МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС «ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б.ОСМОНОВА»

К.С.АЛЫБАЕВ, М.Н.НУРМАТОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Манас
2026

УДК 517.9
ББК 22.161.6
А59

Рассмотрено на заседании Методического совета ЖАГУ имени Б. Осмонова от 18 декабря 2025 года и рекомендовано к использованию и печати.

Рецензенты:
Сопуев А.С. – доктор физ.-мат. наук, профессор
Джураев А.М. – доктор физ.-мат. наук, и.о.проф.

Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.
А Дифференциальные уравнения. Учебное пособие.
– Манас: -2026. – 116 с.
ISBN 978-9967-09-513-7

Дифференциальные уравнения используются для изучения явлений, встречающихся в природе, а точнее, для исследования изменения состояния объекта, их скорости и ускорения. В высших учебных заведениях дифференциальные уравнения преподаются как специальный курса при подготовке профессиональных специалистов по направлению физико-математического образования.

Данное учебное издание предназначено для студентов и преподавателей данного направления.

УДК 517.9
ISBN 978-9967-09-513-7 ББК 22.161.6

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. *Уравнения, содержащие независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные называется дифференциальными*.

Вхождение независимой переменной и неизвестной функции в уравнение не обязательно, а производных обязательно.

Наивысший порядок производной называется порядком уравнения.

Определение. Если неизвестная функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; многих переменных, то уравнением в частных производных.

Примеры: 1.1. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$,

1.2. $\left(x'(t)\right)^2 - t \cdot x(t) = 0$,

1.3. $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$,

1.4. $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t)$,

1.5. $x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 1$.

В примерах 1.1-1.5 функция $x(t)$ – неизвестная; t - независимая переменная.

2.1. $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x,y) = f(x,y)$

2.2. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$

2.3. $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

2.4. $\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]^2 - \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]^2 + u(x,y) = 0$

2.5. $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} = 0$.

В примерах 2.1.-2.5. функция $u(x,y)$ - неизвестная, а x,y - независимые переменные. Уравнения 1.1.-1.5. – обыкновенные, а 2.1.-2.5. – в частных производных.

Уравнения 1.2., 1.4., 2.1., 2.4. – первого; 1.3., 1.5., 2.2., 2.3. – второго; 2.5. – третьего порядков.

Определение. *Решением дифференциального уравнения называют любую функцию, определенную на некотором интервале и имеющую соответствующие порядки производных, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.*

Примеры:

1. Функция $x(t) = sin\omega t$ является решением дифференциального уравнения

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega - const.$$

Имеем:

$$x'(t) = \omega \cdot cos\omega t, x''(t) = -\omega^2 \cdot sin\omega t.$$

Подставляя найденные значения в уравнение, получаем тождество

$$-\omega^2 \cdot sin\omega t + \omega^2 \cdot sin\omega t \equiv 0.$$

Точно также проверяется, что функции

$$x(t) = cos\omega t, x(t) = C_1 sinx(t) + C_2 cos\omega t$$

(C_1, C_2 – произвольные постоянные) являются решениями уравнения

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

2. Функция $u(x,y) = x^2 - y^2$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$

Подставляя найденные значения производных в уравнение, получим тождество

$$2 + (-2) \equiv 0.$$

Функция $u(x, y) = Cxy$ (C–произвольная постоянная) также является решением заданного уравнения.

В данном случае мы не будем ставить задачи нахождения решений, о возможных количествах решений. По ходу изложения будут даны ответы на эти и другие вопросы.

Далее мы в основном будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы.

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Уравнение n-порядка в общем виде можно записать так

$$F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0. \qquad (1)$$

При $n = 1$ имеем уравнение первого порядка

$$F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0. \qquad (2)$$

Пусть задано уравнение (2).

Функция F является функцией от трех переменных t, x, x'. В некоторых случаях соотношение (2) определяет переменную x' как однозначную неявную функцию от переменных t, x.

В этом случае уравнение (2) равносильно уравнению вида

$$x'(t) = f(t, x(t)). \qquad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) называется разрешенным относительно производной.

Уравнение (3) более доступно для изучения, чем общее дифференциальное уравнение (2).

При изучении (3) мы не будем считать, что уравнение (2) как разрешенное относительно производной $x'(t)$, а будем исходить из функции $f(t, x)$ как заданную функцию двух переменных t, x.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Пусть задано уравнение (3). Введем в рассмотрение координатную плоскость $R^2 = \{(t, x)\}$ (рис.1).

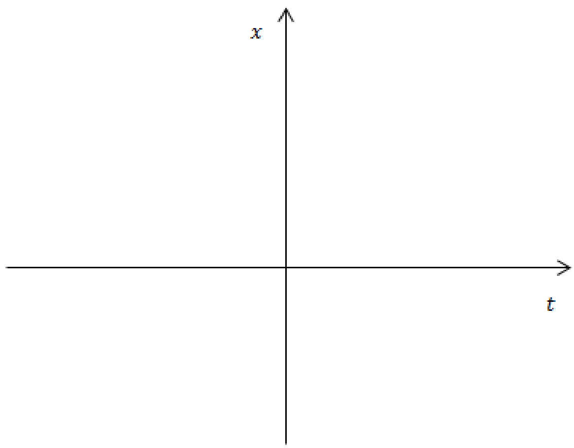


Рисунок. 1.

Функция $f(t, x)$, определяющая дифференциальное уравнение (3), может быть определена не для всех значений своих аргументов t и x, говоря геометрическим языком, не во всех точках плоскости R^2, а лишь в точках некоторого множества $\mathcal{D}$ плоскости R^2. Далее будем предполагать, что $\mathcal{D}$ открытое множество. Это значит, что наряду с каждой точкой $A \epsilon \mathcal{D}$ входит в $\mathcal{D}$ и некоторая окрестность (круг с центром в A) точки A.

Пусть $f(t,x)$ непрерывна в $\mathcal{D}$ и $x = \varphi(t)$ решение уравнения (3) определенная для $r_1 < t < r_2$.

Подставляя $x = \varphi(t)$ в (3) имеем тождество

$$\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \qquad (4)$$

График функции $\varphi(t)$ полностью проходит в открытом множестве $\mathcal{D}$. Если вспомнить геометрический смысл производной, то график в каждой точке имеет касательную с угловым коэффициентом равным $f(t, \varphi(t))$ (рис. 2).

График функции $x = \varphi(t)$ называется интегральной кривой дифференциального уравнения (3).

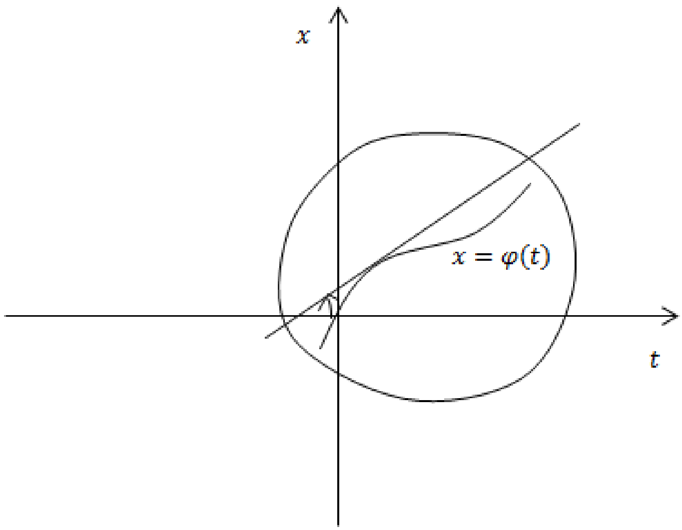


Рисунок. 2.

Поскольку функция $f(t,x)$ непрерывна в $\mathcal{D}$, то через любую точку множества $\mathcal{D}$ можно провести прямую с угловым коэффициентом равным $f(t,x)$ (рис. 3).

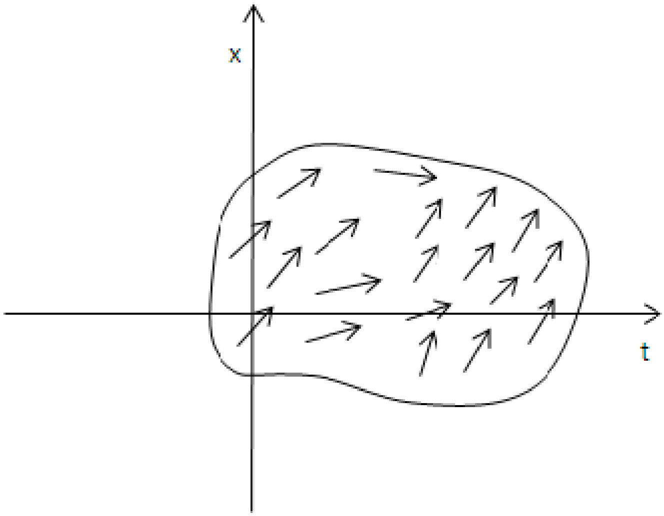


Рисунок. 3

Таким образом, мы получили поле направлений соответствующее уравнению (3).

Связь между геометрической интерпретацией уравнения (3) и геометрической интерпретацией его решений заключается в том, что любая интегральная кривая $x = \varphi(t)$ в каждой своей точке $(t, \varphi(t))$ касается прямой с угловым коэффициентом $f(t, \varphi(t))$.

Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, мы получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

При изучении поля направлений особый интерес представляют линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Такие линии называются изоклинами.

<u>Примеры:</u>

1. Задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$. Надо исследовать поле направлений. Правая часть уравнения определена для $t \neq 0$.

Пусть $\frac{x}{t} = k$ – постоянная. Имеем $x = kt$. Для различных значений k имеем поле направлений (рис.4).

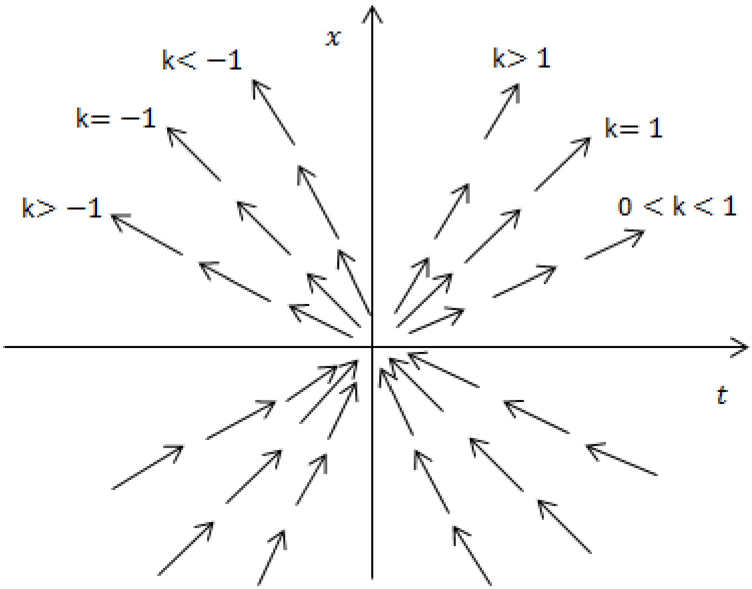


Рисунок. 4

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}.$$

Возьмем $-\frac{t}{x} = k_1 - const$. Отсюда $x = -\frac{1}{k_1}t$.

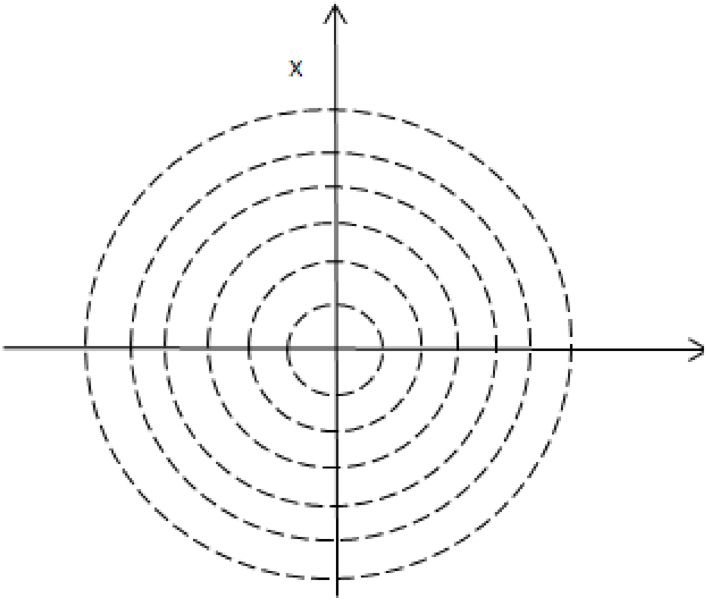


Рисунок. 5

Сравним k (из предыдущего примера) и k_1.

$$k \cdot k_1 = -1,$$

следовательно, касательные определяемые k $и$ k_1 взаимно перпендикулярны. Поле направлений уравнения $x' = -\frac{t}{x}$ изображена на рис. 5.

Изображение поле направлений дает основание, что решением дифференциального уравнения $x' = \frac{x}{t}$ будет функция $x = kt$. Действительно $x' = k$, тогда $k = \frac{kt}{t} = k$.

Решением дифференциального уравнения $x' = -\frac{t}{x}$ будет функция $x^2 + t^2 = c^2$ ($c \neq 0$ и произвольная постоянная).

Проверка: $x^2 = c^2 - t^2$, отсюда $2xx' = -2t$, $x' = -\frac{t}{x}$.

ЗАДАЧА КОШИ

Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения (3) найти решение

$$x = \varphi(t) \tag{4}$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ } при \text{ } t = t_0, \tag{5}$$

где t_0 $и$ x_0 заданные числа, причем $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку (t_0, x_0) области $\mathcal{D}$ (рис. 6).

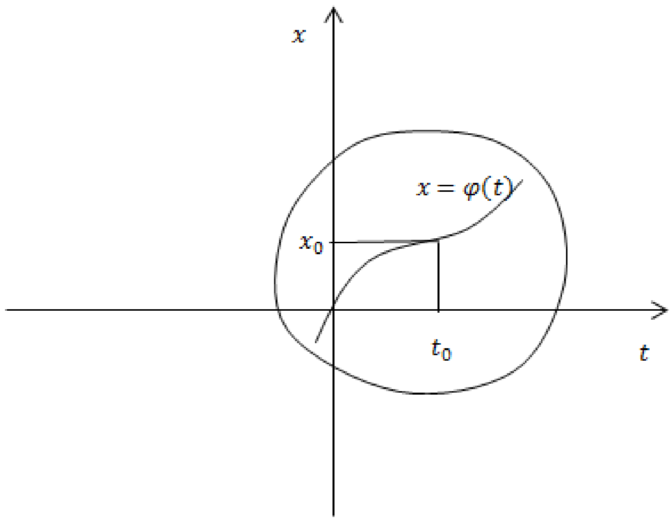


Рисунок. 6

Условие (5) называется начальным условием решения (4), а числа t_0, x_0 – начальными значениями.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию (5) называется задачей Коши.

<u>Примеры:</u>

1. Пусть задано уравнение

$$x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Требуется найти решение $x(t)$ удовлетворяющее условию $x(0) = 1$.

Нетрудно проверить, что функция

$$x(t) = arctgt + C$$

является решением данного уравнения, C – произвольная постоянная.

Полагая, $t = 0$ находим,

$$x(0) = arctg0 + C = 1 \text{ или } C = 1.$$

Решение, удовлетворяющее заданному начальному условию есть

$$x(t) = arctgt + 1$$

Отметим, что функция $x(t) = arctgt$ также является решением. Это решение не удовлетворяет заданному начальному условию, т.е.

$$x(0) = arctg0 = 0.$$

Рассматриваемый пример показывает, наличие произвольной постоянной в решении существенна.

2. Решением уравнения

$$x'(t) = 2t,$$

удовлетворяющим, начальному условию

$$x(0) = 1$$

будет $x(t) = t^2 + 1$. Это – парабола, проходящая через точку (0, 1).

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где t – независимая переменная; $x(t)$ – неизвестная функция; $f(t, x)$ – заданная функция, определенная в открытой области $\mathcal{D}$ переменных t, x.

Задача. Если $(t_0, x_0) \epsilon \mathcal{D}$, то существует ли решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

условию 2? Поставленную задачу назовём задача (1)-(2).

Решение задачи определяется следующей теоремой:

Теорема 1. (существование и единственность решения)

Пусть функция $f(t, x)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями на всем открытом множестве $\mathcal{D}$.

Тогда: *1) для любой точки (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ существует решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условию (2);*

2) если два решения $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ уравнения (1) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т.е., если

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0),$$

то эти решения тождественно равны для всех, тех значений переменного t, для которых они оба определены.

Проведем некоторые разъяснения по выводам теоремы 1. Утверждение, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (2) предполагает, что интервал $r_1 < t < r_2$ определения решения $x = \varphi(t)$ содержит точку t_0.

Далее теорема 1 утверждает, что координаты любой точки (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (1) и что два решения с общими начальными значениями совпадают.

Геометрическое содержание теоремы 1 заключается в том, что через каждую точку (t_0, x_0) множества $\mathcal{D}$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1) (рис.7).

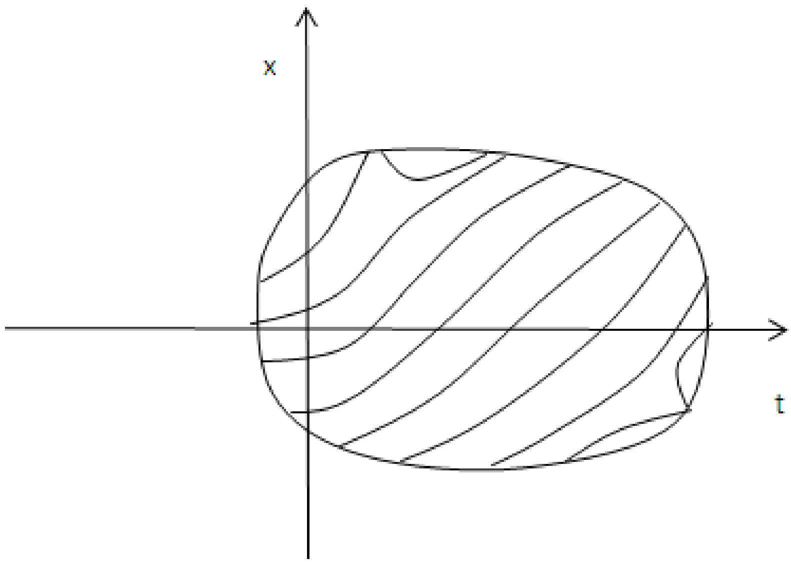


Рисунок. 7.

Рассмотрим пример.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$x' = ax, \tag{3}$$

где a – действительное число. Здесь

$$f(t, x) = ax.$$

Функция $f(t, x)$ зависит только от переменного x. Множество, где определена функция $f(t, x)$, совпадает со всей плоскостью R^2. Сама функция $f(t, x) = ax$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ являются непрерывными функциями переменных t и x во всей плоскости R^2. Выполняются все условия теоремы 1.

Для любой точки $(t_0, x_0) \epsilon R^2$ существует решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяющее условию $x_0 = \varphi(t_0)$. Непосредственной подстановкой в (3) проверяется, что каждая функция

$$x(t) = Ce^{at} \tag{4}$$

где C – произвольное действительное число, является решением уравнения (3).

Решение (4) определено на всей прямой $-\infty < t < +\infty$. В (4), полагая $t = t_0$, определяем решение удовлетворяющее условию $x_0 = \varphi(t_0)$. Действительно $x(t_0) = Ce^{at_0}$ или $x_0 = Ce^{at_0}$.

Отсюда определяем $C = x_0 e^{-at_0}$. Значение C подставляя в (4) получим

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}. \tag{5}$$

Решение (5) удовлетворяет заданному начальному условию.

Подбирая различные точки (t_0, x_0) плоскости R^2 , получим различные решения уравнения (3) из (4). Таким образом, функция (4) является общим решением уравнения (3).

Такая процедура нахождения решений удовлетворяющее заданным начальным условиям сохраняется и для общего случая.

Если задано уравнение (1) и мы каким-то способом нашли общее решение, которая содержит произвольную постоянную C, т.е.

$$x = \varphi(t, C). \tag{6}$$

В (6) подставляя значения $t = t_0, x = x_0$ определяем значение $C = C_0$. Тогда получим решение $x(t) = \varphi(t, C_0)$, удовлетворяющее начальному условию.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x = \varphi(t)$ – некоторое решение уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$ и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Тогда для функции $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1 < t < r_2$ выполняется интегральное тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau. \tag{7}$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ на интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено тождество (7), то функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Докажем это.

Пусть выполняется (7). Полагая $t = t_0$ получаем $\varphi(t_0) = x_0$. $f(\tau, \varphi(\tau)$ непрерывна, тогда правая часть (7) дифференцируема. Продифференцировав тождество (7), получим тождество

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{8}$$

Пусть выполняется тождества (8) и (2).

Проинтегрировав (8) от t_0 до t имеем,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau.$$

Отсюда получим (7).

Из доказанного предложения вытекает, для доказательства существования решения задачи (1) и (2) достаточно доказать существование решения уравнения (7) (интегрального уравнения).

Построим последовательность

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \tag{9}$$

непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $r_1 \le t \le r_2$, который содержит внутри себя точку t_0. Каждая функция последовательности (9) определяется через предыдущую при помощи равенства

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi_k(\tau)\big)d\tau, \ k = 0,1,2, \dots \tag{10}$$

Если график функции $\varphi_k(t)$ проходит в множестве $\mathcal{D}$, то график $\varphi_{k+1}(t)$ также должна пройти в множестве $\mathcal{D}$. Иначе невозможно определить функцию $\varphi_{k+2}(t)$. Покажем, как этого можно добиться.

По условию теоремы 1, для любого $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ функции $f(t,x)$, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывны, тогда для всех $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ выполнены неравенства

$$|f(t,x)| \le \mathrm{C}_1, \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le \mathrm{C}_2,$$

где C_1, C_2–некоторые положительные числа.

Область $\mathcal{D}$ – открытая, тогда для любого $(t_0, x_0)\epsilon\mathcal{D}$ существует прямоугольник Π_r определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \le r, |x - x_0| \le a$$

и $\Pi_r \subset \mathcal{D}$.

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций, заданных на отрезке $|t - t_0| \le r$, графики которых проходят в прямоугольнике Π_r.

Таким образом, функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $|t - t_0| \le r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \le a \tag{11}$$

Вернемся к последовательности (9).

Выясним, при каких условиях $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$.

$$\varphi_0(t) \equiv x_0 \epsilon \Omega_r.$$

$$|\varphi_1(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \le C_1 |t - t_0| \le C_1 \cdot r.$$

Если $C_1 \cdot r \le a$ или $r \le \frac{a}{C_1}$, то $\varphi_1(t) \epsilon \Omega_r$.

Далее

$$|\varphi_2(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| d\tau \le C_1 |t - t_0| \le C_1 \cdot r \le a,$$

$$r \le \frac{a}{C_1}. \tag{12}$$

Таким образом, при выполнении условия (12) $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r, \; k = 0,1,2, \ldots.$

Теперь докажем равномерную сходимость последовательности (9), на отрезке $|t - -t_0| \le r$. Для решения этой задачи, докажем равномерную сходимость ряда

$$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots +$$

$$+(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \ldots \tag{13}$$

Воспользуемся признаком Вейерштрасса.

Имеем

$$|\varphi_0| = |x_0|,$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \le C_1 |t - t_0| \le C_1 \cdot r \le a,$$

$$|\varphi_2-\varphi_1| = \int_{t_0}^{t} |f(\tau,\varphi_1)-f(\tau,x_0)|d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial f(\tau,\theta)}{\partial x}\right| |\varphi_1-\varphi_0|d\tau \le$$

$$\le C_2 \cdot |t-t_0| \cdot max|\varphi_1-\varphi_0| \le C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1-\varphi_0| \le C_2 \cdot r \cdot a,$$

$$|\varphi_2-\varphi_1| \le C_2 \cdot r \cdot max|\varphi_1-\varphi_0|.$$

Если $C_2 \cdot r < 1$, то

$$r < \frac{1}{C_2}. \qquad (14)$$

Обозначим $C_2 \cdot r = q$.

$$|\varphi_3-\varphi_2| \le \int_{t_0}^{t} |f(\tau,\varphi_2)-f(\tau,\varphi_1)|d\tau \le \int_{t_0}^{t} C_2|\varphi_2-\varphi_1|d\tau \le$$

$$\le C_2 \cdot q \cdot max|\varphi_1-\varphi_0| \times |t-t_0| \le C_2 \cdot r \cdot q \cdot max|\varphi_1-\varphi_0| =$$

$$= q^2 \cdot max|\varphi_1-\varphi_0| \le q^2 \cdot a.$$

Продолжая процесс, получим

$$|\varphi_{k+1}-\varphi_k| \le q^k a.$$

В итоге имеем

$$\left|\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\right| \le |\varphi_0| + \sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_{k+1}-\varphi_k| \le$$

$$\le |\varphi_0| + a\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Числовой ряд сходится, тогда для значений $|t-t_0| < r$

$\left(r = min\left\{\frac{1}{C_2}, \frac{a}{C_1}\right\}\right)$ последовательность функций (9) равномерно сходится к некоторой функции $\varphi(t)$. В (10) переходя к пределу при $k \to +\infty$ получим,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Итак, существование решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2) доказано; при этом установлено, что решение $x = \varphi(t)$ определено на интервале $|t - t_0| < r$, где r – произвольное число удовлетворяющее неравенствам (12), (14).

Перейдем к доказательству единственности.

Пусть $x = \varphi(t), x = \psi(t)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2), т.е.

$$\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = x_0$$

и общим интервалом $r_1 < t < r_2$ определения.

Рассмотрим прямоугольник Π_r. Поскольку $\varphi(t), \psi(t)$ являются решениями уравнения (7), то они принадлежат семейству Ω_r.

Имеем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \int_{t_0}^{t} \left| f\left(\tau, \varphi(\tau)\right) - f\left(\tau, \psi(\tau)\right) \right| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot |t - t_0| |\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq C_2 \cdot r \times |\varphi(t) - \psi(t)| = q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Это возможно только при условии $\varphi(t) \equiv \psi(t)$. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

Метод, примененный при доказательстве теоремы 1 называется ***методом последовательных приближений или методом Пикара***.

В теореме 1, условие «Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ является непрерывной функцией на всем открытом множестве $\mathcal{D}$» можно заменить на условие «Функция по переменной x удовлетворяет условию Липшица», т.е.

$$\forall(t,x_1) \text{ и } \forall(t,x_2)|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L|x_1-x_2|,$$

где L – некоторая постоянная независящая от x_1 и x_2.

Условие, сформулированное в теореме 1, является более сильным требованием по сравнению с условием Липшица. Это означает, что существование непрерывной частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ гарантирует выполнимость условия Липшица. Из условия Липшица не всегда вытекает непрерывность частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Действительно, пусть $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна в области $\mathcal{D}$. Возьмем произвольный отрезок $[x_1,x_2]\subset\mathcal{D}$. К функции $f(t,x)$применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$f(t,x_1)-f(t,x_2)=\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}(x_1-x_2), x_1<\theta<x_2.$$

$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}$ непрерывна, тогда

$$\left|\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x}\right|\leq L.$$

Учитывая это, имеем

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L|x_1-x_2|.$$

Пример.

Для уравнения $x'(t) = x(t)$ найдем решение методом последовательных приближений.

Пусть $t_0 = 0, x_0 = 1$.

Интегральное уравнение запишется в виде

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots.$$

Имеем

$$\varphi_0(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(\tau)\, d\tau = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Пределом этой последовательности, равномерно сходящейся на любом отрезке числовой оси, является функция $\varphi(t) = e^t$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основной задачей, возникающей перед нами, когда мы имеем дело с дифференциальным уравнением, является задача отыскания его решений.

Первоначально для решения этой задачи стремились «интегрировать дифференциальные уравнения в квадратурах», т.е. пытались записать решение при помощи элементарных функций и интегралов от них. Позже, когда выяснилось, что решение в этом смысле существует лишь для очень немногих типов уравнений, центр тяжести теории был перенесен на изучение общих закономерностей поведения решений.

Далее мы рассмотрим некоторые классы дифференциальных уравнений, решения которых можно найти методом интегрирования в квадратурах.

УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Пусть задано уравнение

$$x'(t) = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \tag{1}$$

Предположим, что функции $f(t,x)$, $g(t,x)$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ плоскости R^2 переменных t и x , причем $\forall (t,x) \epsilon \mathcal{D}\ (g(t,x) \neq 0)$.

Уравнение (1) преобразуем к виду $\left(x' = \frac{dx}{dt}\right)$

$$g(t,x)dx - f(t,x)dt = 0 \tag{2}$$

Пусть выражение, в левой части (2) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(t,x)$ на всем множестве $\mathcal{D}$. Это означает, что для любого $(t,x)\epsilon\mathcal{D}$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x),\ \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x) \tag{3}$$

Пусть $x = \varphi(t)$ – решение дифференциального уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$.

Тогда имеем

$$\varphi'(t) = \frac{f(t,\varphi(t))}{g(t,\varphi(t))},$$

откуда получаем

$$g\big(t,\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0.$$

Левая часть этого равенства, в силу (3), представляет собой полную производную функции $F\big(t,\varphi(t)\big)$ по t.

Тогда

$$\frac{dF(t,\varphi(t))}{dt} = 0$$

на всем интервале $r_1 < t < r_2$.

Отсюда

$$\forall t \epsilon (r_1, r_2)(F(t,\varphi(t)) = C - const).$$

Мы доказали, для любого решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$F(t,\varphi(t)) = C$$

Теперь докажем, каждая функция $x = \varphi(t)$, заданная на некотором интервале и определяемая как неявная функция из уравнения

$$F(t,x) = C \tag{4}$$

является решением дифференциального уравнения (1).

Дифференцируя тождество (4) по t, в силу (3), получаем:

$$g(t,x) \cdot \varphi'(t) - f\big(t,\varphi(t)\big) = 0.$$

Откуда видно, что $x = \varphi(t)$ решение уравнения (1).

Доказанному, можно придать следующее геометрическое истолкование: Каждая интегральная кривая дифференциального уравнения (1), расположена целиком на некоторой линии уровня функции $F(t,x)$, т.е. определяется уравнением (4). Обратно, каждая связная часть линии уровня (4) представляет собой интегральную кривую.

Возможно линии уровня функции $F(t,x)$ может состоять из нескольких отдельных кусков, то в этом случае целая линия уровня не является одной интегральной кривой, а распадается на несколько интегральных кривых, т.е. одна константа C может, в силу неявного уравнения (4), определять несколько, даже бесконечно много различные решения.

Пусть задано уравнение (2). При каких условиях уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах?

Для ответа на поставленный вопрос предположим, что существует функция $F(t,x)$ определенная и непрерывная по переменным t,x и имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}$ в $\mathcal{D}$.

Пусть

$$dF(t,x) = g(t,x)dx - f(t,x)dt.$$

Тогда имеем тождество

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dx = g(t,x)dx - f(t,x)dt.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x), \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x) \qquad (5)$$

Пусть функции $g(t,x), f(t,x)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ в $\mathcal{D}$.

При таком условии

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}.$$

В силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}$ в области $\mathcal{D}$ для любых $(t, x) \epsilon \mathcal{D}$:

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}.$$

Тогда

$$-\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \tag{6}$$

Предполагая, что левая часть (2) является полным дифференциалом некоторой функции $F(t, x)$, мы получили условие (6). Можно доказать, если выполняется (6), то уравнение (2) будет уравнением в полных дифференциалах.

Таким образом, условие (6) является необходимым и достаточным, чтобы уравнение (2) было уравнением в полных дифференциалах.

Если выполняется условие (5), то общее решение можно записать в виде

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t_0, \xi) d\xi = C \tag{7}$$

или

$$-\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau + \int_{x_0}^{x} g(t, \xi) d\xi = C \tag{8}$$

Общее решение уравнения (2), можно найти другим способом. Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию (5). Интегрируя, первое уравнение по t имеем

$$F(t, x) = -\int f(t, x) dt + \varphi(x), \tag{9}$$

где, $\varphi(x)$ любая функция от x.

Выберем $\varphi(x)$так, чтобы функция (9) была решением второго уравнения. Дифференцируя (9) по x и полагая $\frac{\partial F}{\partial x} = g(t, x)$, получим

$$\varphi'(x) = v(x),$$

где $v(x)$ – некоторая функция от x. Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\varphi(x) = \int v(x)dx.$$

Теперь общее решение уравнения (2) можно записать так:

$$-\int f(t,x)dt + \int v(x)dx = \mathrm{C}.$$

Аналогично, исходя из уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = -f(t,x)$ получим,

$$\int g(t,x)dx + \int v_1(t)dt = C.$$

<u>Примеры:</u>

1. $tdt + xdx = 0$

Проверим условие (6):

$$f(t,x) = -t,\ g(t,x) = x, \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Значит заданное уравнение в полных дифференциалах.

Уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\left(d(t^2) + d(x^2)\right) = 0.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\frac{1}{2}(t^2 + x^2) = C.$$

Это общее решение.

Решение можно получить и по формуле (7) или (8). Имеем

$$\int_{t_0}^{t} \tau d\tau + \int_{x_0}^{x} \xi d\xi = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = C,$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 = C_1 \equiv C + \frac{1}{2}(t_0^2 + x_0^2).$$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Пусть задано уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \qquad (1)$$

(1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение. Если существует функция $\mu(t,x)$такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1), получается уравнение

$$\mu M dt + \mu N dx = 0 \qquad (2)$$

в полных дифференциалах, то функция μ называется интегрирующим множителем.

Поскольку уравнение (2) в полных дифференциалах, в предположении непрерывной дифференцируемости функции $\mu(t,x)$, можно получить следующее уравнение для определения функции $\mu(t,x)$:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

или

$$N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial M}{\partial x} - \mu\frac{\partial N}{\partial t} \qquad (3)$$

<u>Пример.</u> Пусть

$$(1 - t^2x)dt + t^2(x - t)dx = 0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2, \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - t^2,$$

$$M(t,x) = 1 - t^2x,$$

$$N(t,x) = t^2(x - t).$$

Условие $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ не выполняется, значит, заданное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Существует ли интегрирующий множитель $\mu(t,x)$? Предположим, что $\mu(t,x)$ зависит только от t.

Тогда, из (3) имеем

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x-t)} = \frac{2t(t-x)}{t^2(x-t)} = -\frac{2}{t},$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{t}.$$

Отсюда получим

$$ln\mu = -2lnt, \mu = \frac{1}{t^2}.$$

Теперь, умножая обе части заданного уравнения на $\frac{1}{t^2}$, имеем

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right)dt + (x - t)dx = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{t^2} - x\right)}{\partial x} = -1, \frac{\partial(x-t)}{\partial t} = -1.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах. Возможно, также, что функция μ зависит только от x.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \qquad (1)$$

называется линейным уравнением первого порядка, где $x(t)$ - неизвестная функция, $a(t), b(t)$ – заданные функции.

Поставим задачу решения уравнения (1). Предположим, что функции $a(t), b(t)$ непрерывны на некотором интервале $r_1 < t < r_2$. Для правой части уравнения (1) выполняются все условия теоремы 1. Пусть t_0 некоторая точка интервала $r_1 < t < r_2$.

Положим

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Докажем, что совокупность всех решений уравнения записывается формулой

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(t)} \qquad (2)$$

где, x_0 – произвольная постоянная. Функция (2) является решением (1). Это проверяется непосредственной подстановкой. Докажем, что (2) содержит все решения уравнения (1).

Пусть $\varphi(t)$ решение (1), определенное на интервале $r_1 \le s_1 < t < s_2 \le r_2$.

Пусть τ_0, ξ_0 – начальные значения решения $x = \varphi(t)$. Докажем, что так можно подобрать число x_0 в формуле (2), чтобы определяемое этой формулой решение имело своими значениями τ_0, ξ_0, т.е.

$$\varphi(\tau_0) = \xi_0 = \left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(\tau_0)}. \qquad (3)$$

Если верно (3), то из (3) определяется однозначное значение x_0

$$x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} (A(\tau_0) \neq 0),$$

$$x_0 = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau.$$

Найденное x_0 подставляя в (2), имеем $\big(x = \varphi(t)\big)$.

$$\varphi(t) =$$

$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)} =$$

$$= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

$$\varphi(t) = \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

Отсюда при $t = \tau_0$ имеем $\varphi(\tau_0) = \xi_0$.

Или

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}\, d\tau.$$

<u>Пример.</u>

Пусть задано уравнение

$$x'(t) = t \cdot x(t) + sint.$$

Найдем общее решение уравнения по формуле (2)

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{\tau_0}^{t} b(\tau) e^{\frac{-\tau^2 + t_0^2}{2}}\, d\tau \right) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}.$$

Решение уравнения (1) можно найти другим способом.

Рассмотрим уравнение

$$y'(t) = a(t) y(t) \qquad (4)$$

(4) называется однородным уравнением уравнения (1), само уравнение (1) называется неоднородным.

Полагая

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

уравнение перепишем в виде

$$\frac{dy}{y} = a(t)dt \tag{5}$$

Проинтегрировав (5), имеем

$$ln|y| = \int a(t)dt + C_1 = A(t) + C_1$$

или

$$y = e^{A(t)+C_1} = Ce^{A(t)} \tag{6}$$

В (6), считая C функцией от t , получим решение неоднородного уравнения (1).

Пусть

$$\varphi(t) = C(t)e^{A(t)} \tag{7}$$

(7) подставляя в (1), получим

$$\varphi'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

или $C'(t)e^{A(t)} = b(t)$.

Отсюда находим

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)},$$

$$C(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-A(\tau)}\,d\tau,$$

где x_0 – константа интегрирования.

Общее решение (1) определяется формулой

$$x(t) = \left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-A(\tau)}\, d\tau \right) e^{A(t)}.$$

Примененный метод называется методом вариации постоянной.

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнения вида

$$x'(t) = f(t)g(x) \tag{1}$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Пусть $f(t)$ определена и непрерывна на интервале $r_1 < t < r_2$, а $g(x)$ определена, непрерывна и не обращается в нуль на интервале $q_1 < t < q_2$.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0 \tag{2}$$

Уравнение (2) есть уравнение в полных дифференциалах. Функция $F(t, x)$ задается формулой

$$F(t, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau.$$

Все решения уравнения (1) получаются, как неявные функции из соотношения

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau = C \tag{3}$$

Примеры.

1. $x' = -\frac{t}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными

$$xdx = -tdt$$

Общее решение, согласно (3), определяется так

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = -\int_{t_0}^{t} \tau\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2),$$

$$x^2 + t^2 = x_0^2 + t_0^2 \equiv C^2,$$

$$x^2 + t^2 = C^2.$$

2. $x \cdot x' = -t^3.$

Общее решение заданного уравнения представляется неявной функцией

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}t^4 = C.$$

3. $x' = -\frac{2x}{t}$

Общее решение определяется так:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{t}, \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{t} dt,$$

$$lnx = -2lnt + C, lnx + lnt^2 = C, \frac{x}{t^2} = e^C.$$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть рассматривается функция $f(t,x)$.

Если выполняется тождество

$$f(kt,kx) = k^m f(t,x),$$

то функция $f(t,x)$ называется однородной функцией степени m.

Пусть задано уравнение

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0. \tag{1}$$

Если в (1) функции $M(t,x), N(t,x)$ – однородные функции одной и той же степени, то уравнение (1) называется однородным.

Пусть в (1) функции $M(t,x), N(t,x)$ определены и непрерывны в некоторой открытой области $\mathcal{D}$ переменных t и x, причем $\forall (t,x) \in \mathcal{D}$ $(N(t,x) \neq 0)$.

При таких условиях, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right). \tag{2}$$

Действительно, функции $M(t,x), N(t,x)$ запишем в виде

$$M(t,x) = M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right),$$

$$N(t,x) = N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right).$$

Учитывая однородность функций $M(t,x), N(t,x)$ имеем

$$M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m M\left(1, \frac{x}{t}\right),$$

$$N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m N\left(1, \frac{x}{t}\right).$$

Тогда

$$\frac{M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}.$$

Из уравнения (1) находим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}. \tag{3}$$

Правая часть уравнения (3), зависит лишь от отношения переменных t и x. Введя обозначения

$$h\left(\frac{x}{t}\right) \equiv -\frac{M\left(1,\frac{x}{t}\right)}{N\left(1,\frac{x}{t}\right)}$$

(3) перепишем в виде (2).

Займемся решением уравнения (2). Введем новую неизвестную функцию

$$u(t) = \frac{x(t)}{t}.$$

Отсюда получим $x = t \cdot u$. Находим $x' = u + t \cdot u'$. Подставляя вместо x выражение $u + t \cdot u'$, из (2) получим

$$u + t \cdot u' = h(u)$$

или

$$t \cdot u' = h(u) - u \tag{4}$$

Уравнение (4) с разделяющимися переменными. Из (4) получим

$$\frac{du}{h(u)-u} = \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Проинтегрировав (5), получим общее решение в неявной форме

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi} = ln|t| + C.$$

Введем обозначение

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi}.$$

Тогда, общее решение уравнения (2) записывается в виде

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - ln|t| = C.$$

Примеры.

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}$.

Полагая $x = t \cdot u$, найдем $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$.

Найденные значения, подставляя в заданное уравнение, получим

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = 1 + u \text{ или } \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Полученное уравнение, проинтегрировав, имеем

$$\int_{u_0}^{u} d\xi = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} d\tau, u - u_0 = ln|t| - ln|t_0|,$$

$$u = ln|t| + C,$$

где $C = u_0 - ln|t_0|$ – произвольная постоянная.

Поскольку $u = \frac{x}{t}$, то

$$x = t \cdot (ln|t| + C).$$

2. $$t(t + 2x)dt + (t^2 - x^2)dx = 0$$

Заданное уравнение представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t+2x)}{x^2-t^2}.$$

Отсюда получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+2\frac{x}{t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^2-1}.$$

Полагая $\frac{x}{t} = u$, находим $x = t \cdot u$, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$.

Тогда

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1}$$

или

$$t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1} - u = \frac{1+3u-u^3}{u^2-1},$$

$$\frac{(u^2-1)du}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}.$$

Левую часть уравнения, представим в виде

$$-\frac{1}{3}\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

или

$$\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = -\frac{3}{t}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$ln|1 + 3u - u^3| = -3ln|t| + C.$$

Отсюда

$$(1 + 3u - u^3) \cdot t^3 = e^C \equiv C_0.$$

Вместо u, подставляя $u = \frac{x}{t}$, имеем

$$\left(1 + 3\frac{x}{t} - \frac{x^3}{t^3}\right) \cdot t^3 = C_0,$$

$$t^3 + 3xt^2 - x^3 = C_0.$$

3. $\quad (t^2 - x^2)dt + 2txdx = 0.$

Для решения этого уравнения, представим ее в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t^2}{2tx}.$$

Введя, новую функцию $x = t \cdot u$, получим

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Отсюда

$$t \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{u^2+1}{2u}$$

или

$$\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}, \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\int \frac{dt}{t}, ln(u^2+1) + ln|t| = C,$$

$$(u^2+1)t = C, \frac{x^2+t^2}{t} = C.$$

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНОМУ

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right) \qquad (1)$$

Пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда введя, новые переменные

$$t = \xi + \alpha, x = \eta + \beta,$$

где ξ, η - новые переменные; α, β – некоторые постоянные числа, уравнение (1) приведем к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta}{a_2 \xi + b_2 \eta}\right) \qquad (2)$$

Уравнение (2) однородное.

Числа α, β определяются из соотношения

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

то (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{k(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right). \tag{4}$$

Действительно, из соотношения (3),получим $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ или $a_1 = \frac{b_1}{b_2}a_2$. Значение a_1 подставляя в (1) получим

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}a_2t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right).$$

Введя обозначение $\frac{b_1}{b_2} = k$, имеем (4).

Если в уравнении (4) произвести замену: $a_2t + b_2x = y$ – новую неизвестную функцию, то (4) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right). \tag{5}$$

(5) уравнение, не содержащее независимой переменной.

Введя обозначение

$$g(y) \equiv \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2}f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right)$$

Уравнение (5) запишем в виде (при условии $g(y) \neq 0$)

$$\frac{dy}{g(y)} = dt.$$

Интегрируя, это уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} = t + C.$$

Если предположить, что $\frac{1}{g(y)}$ - непрерывная функция на интервале $q_1 < y < q_2$, то решение представляется в виде

$$G(y) = t + C.$$

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение вида

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^n(t) \qquad (1)$$

называется уравнением Бернулли.

В (1) $a(t)$, $b(t)$ заданные функции, определенные и непрерывные на интервале $r_1 < y < r_2$, n – вещественное число, отличное от 0 и 1. При $n = 0$ и $n = 1$ уравнение (1) обращается в линейное уравнение.

Уравнение (1) сведем к линейному уравнению. Для этого обе части уравнения (1) разделим на $x^n(t)$. Уравнение (1), всегда имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ при $n > 0$. Наша задача состоит в отыскании нетривиальных решений, т.е. $x(t) \not\equiv 0$.

После деления, получим

$$x^{-n}x'(t) = a(t)x^{-n+1}(t) + b(t) \qquad (2)$$

В (2) введем новую неизвестную функцию

$$y(t) = x^{-n+1}(t).$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{1-n}y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Получили линейное уравнение относительно функции $y(t)$.

Примеры.

1. Пусть задано уравнение

$$x' = 2tx + 3t^3x^2.$$

Это – уравнение Бернулли и $n = 2$. Обе части уравнения, разделив на x^2, получим

$$x^{-2}x' = 2tx^{-1} + 3t^3.$$

Полагая $y = x^{-1}$, имеем линейное уравнение

$$y' = -2ty - 3t^3.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1 - t^2).$$

Отсюда учитывая, что $y = x^{-1}$ находим общее решение заданного уравнения

$$x(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1-t^2)}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$x' + \frac{t}{1-t^2}x = t\sqrt{x}.$$

Делим обе части на $\sqrt{x}$:

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} + \frac{t}{1-t^2}\sqrt{x} = t.$$

Положим $\sqrt{x} = y$ и получим

$$y' + \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}y = \frac{1}{2}t.$$

Интегрируя это линейное уравнение, находим

$$y = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2).$$

Следовательно,

$$\sqrt{x} = C\sqrt[4]{1 - t^2} - \frac{1}{3}(1 - t^2)$$

есть общее решение заданного уравнения.

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Уравнение вида

$$x'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \tag{1}$$

называется уравнением Риккати.

Относительно функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны на интервале $r_1 < y < r_2$. При таком предположении в полосе

$$\Pi = \{(t, x), r_1 < y < r_2, |x| < +\infty\}$$

выполняются все условия теоремы 1 и через любую точку $(t_0, y_0) \epsilon \Pi$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (1).

Уравнение Риккати интегрируется в квадратурах, лишь в исключительных случаях.

Если известно одно частное решение x_1 уравнения Риккати, то подстановка

$$x = x_1 + \frac{1}{y}, \tag{2}$$

где y – новая неизвестная функция, приводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Действительно, (2) подставляя в (1) имеем

$$x_1' - \frac{1}{y^2} \cdot y' = a(t)x_1 + b(t)x_1^2 + c(t) + \frac{a(t)}{y} +$$

$$+2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Учитывая, что x_1 – решение уравнения (1) отсюда получим

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' = \frac{a(t)}{y} + 2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$

или

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = (a(t) + 2b(t)x_1)\frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Если, обозначим $\frac{1}{y} = z$, то

$$z' = (a(t) + 2b(t)x_1)z + b(t) \cdot z^2 \qquad (3)$$

(3) уравнение Бернулли.

Нетрудно проверить, уравнение Риккати вида

$$x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}, \qquad (4)$$

где, a, b, c – постоянное числа, причем $(b+1)^2 \geq 4ac$ имеет частное решение вида

$$x_1 = \frac{a_1}{t}, \qquad (5)$$

где a_1 – некоторая постоянная, которая определяется подстановкой (5) в (4).

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно, имеет вид

$$F(t, x, x') = 0. \qquad (1)$$

$F(t, x, x')$ является функцией трех переменных. Соотношение (1) в некоторых случаях определяет переменное x', как неявную функцию переменных t и x.

Если это уравнение удается разрешить относительно x', то получаем одно или несколько уравнений

$$x' = f_k(t, x), \ k = 1,2, \dots \qquad (2)$$

Существование решения уравнения (1) связано с возможностью разрешить его относительно x' и существованием решений уравнений (2). Достаточные условия разрешимости уравнения (1) определяются известными из курса анализа условиями существования неявной функции и ее непрерывности вместе с производной.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. (о существовании и единственности решения)

Если в некотором замкнутом трехмерном прямоугольнике $\mathcal{D}_3$ *с центром в точке* (t_0, x_0, x_0'), *где* x_0' - *действительный корень уравнения* $F(t_0, x_0, x_0') = 0$, *выполнены условия:*

1) $F(t, x, x')$ *непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными*

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x'};$$

2) $\frac{\partial F}{\partial x'}(t_0, x_0, x_0') \neq 0$, *то в окрестности точки* $t = t_0$ *существует решение* $x = x(t)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0' \tag{3}$$

Доказательство. В силу условий 1), 2) теоремы, в окрестности точки (t_0, x_0, x_0') выполнены условия существования и единственности неявной функции

$$x' = f(t, x) \tag{4}$$

удовлетворяющей условию

$$x'(t_0) = x_0' = f(t_0, x_0). \tag{5}$$

При этом существует замкнутый прямоугольник $\mathcal{D}_2$ с центром в точке (t_0, x_0) , в котором функция $f(t, x)$непрерывна вместе с производной $\frac{\partial f}{\partial x}$. Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, f(t, x))}{\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, f(t, x))} \tag{6}$$

Таким образом, правая часть уравнения (4) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Тогда существует единственное решение уравнения $x(t)$, определенное на некотором отрезке

$|t-t_0|\leq r$ удовлетворяющее условию

$$x(t_0)=x_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 гарантирует разрешимость уравнения (1) и для каждого из уравнения (2) существование и единственности решения.

Итак, если из (1) получим (2) и правые части (2) удовлетворяют условию теоремы 1, то через каждую точку (t_0,x_0) некоторой области $\mathcal{D}$ переменных t,x проходит единственная интегральная кривая каждого из уравнений (2), причем все они являются решениями уравнения (1). Отметим, направление вектора касательной кривой $x_k(t)$ уравнения (2) в точке (t_0,x_0) определяется значением функции $f_k(t_0,x_0)$. Если эти значения различны, то через точку (t_0,x_0) проходит столько интегральных кривых каково число уравнений (2). Поэтому для выделения определенного решения уравнения (1), надо не только задать начальные данные (t_0,x_0), но и значение производной решения $x'(t_0)=x_0'$. Очевидно, это значение не может быть задано произвольно: x_0' должно быть корнем уравнения

$$F(t_0,x_0,x_0')=0$$

<u>Пример.</u> Пусть рассматривается уравнение

$$(x')^2-(t+x)x'+tx=0 \tag{7}$$

Разрешая его относительно производной x', получим два уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

$$x'=x, \tag{8}$$

$$x'=t. \tag{9}$$

Общее решения уравнения (8), (9) имеют вид

$$x=C_1e^t, \tag{10}$$

$$x=\frac{t^2}{2}+C_2 \tag{11}$$

Оба семейства решений (10), (11) удовлетворяют исходному уравнению. Гладкими интегральными кривыми уравнения (7) будут также кривые, составленные из дуги интегральной кривой семейства (10) и дуги интегральной кривой семейства (11), если в общей точке они имеют общую касательную.

Из семейства (10) возьмем функцию

$x = e^{t-1} (C_1 = e^{-1})$, а из семейства (11) функцию

$x = \frac{t^2+1}{2} \left(C_2 = \frac{1}{2} \right)$.

В точке $t = 1$ интегральные кривые, определяемые, этими функциями имеют, общую касательную с угловым коэффициентом равным 1.

Интегральная кривая, составленная, из дуг рассматриваемых интегральных кривых изображена на рис.1.

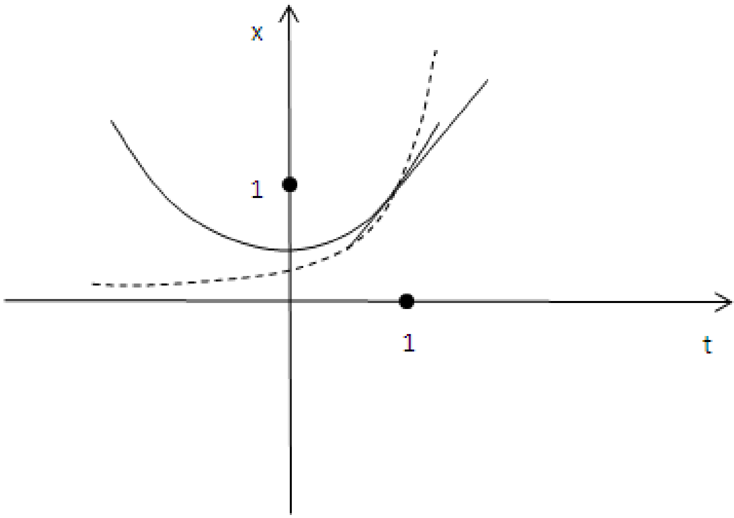


Рисунок. 1.

График функции $x = \frac{t^2+1}{2}$ определена при $-\infty < t \leq 1$, а функции $x = e^{t-1}$, при $1 \leq t < +\infty$. Также на рис. 1 изображена (пунктиром) другая интегральная кривая, составленная из дуг интегральных кривых (10), (11).

$x = \frac{t^2+1}{2}$ определена при $1 \leq t < +\infty$, а $x = e^{t-1}$ при $-\infty < t \leq 1$.

Заметим, для уравнения (7) на прямой $y = x$ не выполняется условие теоремы 2 и прямая $y = x$ представляет геометрическое место точек, где нарушается единственность решения уравнения (7).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ, ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Таким образом, уравнение (1) может быть проинтегрировано путем разрешения относительно x' и интеграции полученных при этом уравнений (2) уже разрешенных относительно производной. Однако интегрирование полученного уравнения (2) часто вызывает значительные трудности.

В ряде случаев представляются более удобные способы интегрирования уравнения (1).

Пусть уравнение (1) можно разрешить относительно неизвестной функции $x(t)$, т.е. уравнение (1) представимо в виде

$$x = f(t, x'). \tag{12}$$

Введем обозначения $x' = p$ и (12) перепишем в виде

$$x = f(t, p)$$

Предположим, что функция $x(t)$ является решением уравнения (1). Тогда тождество (13) можно продифференцировать по t. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = p(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt}. \tag{14}$$

Уравнение (14) представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно p, и его решение можно записать в виде однопараметрического семейства

$$p(t) = \varphi(t, C) \tag{15}$$

Отсюда, используя (13), получим семейство решений исходного уравнения (1) в виде

$$x = f(x, \varphi(x, C)). \tag{16}$$

В (16), учитывая начальные условия, определяем значения C и получаем решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример. $(x')^2 - tx' + x = 0.$

Это уравнение перепишем в виде

$$x = tx' - (x')^2$$

Введем параметр $x' = p$, и получим

$$x = tp - p^2. \tag{17}$$

Откуда

$$\frac{dx}{dt} = p + t\frac{dp}{dt} - 2p\frac{dp}{dt}$$

Или

$$p = p + (t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Тогда

$$(t - 2p)\frac{dp}{dt} = 0.$$

Это уравнение имеет семейство решений

$$p(t) = C - \text{const}$$

и решение $p(t) = \frac{t}{2}$.

Теперь учитывая (17), получим решения исходного уравнения в виде

$$x(t) = Ct - C^2,$$

$$x(t) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4}.$$

В качестве примера применения этого метода, рассмотрим линейное, относительно t и x уравнение

$$x = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'). \tag{18}$$

Уравнение (18) называется уравнением Лагранжа.

Уравнение (18) продифференцируем по t.

$$x' = \varphi(x') + t \cdot \frac{d\varphi}{dx'} \cdot x'' + \frac{d\psi}{dx'} \cdot x''.$$

Полагая $x' = p$, получим

$$p = \varphi(p) + t \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{d\psi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

или

$$p = \varphi(p) + \left(t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot \frac{dp}{dt},$$

$$\left(p - \varphi(p)\right)\frac{dp}{dt} = t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p). \qquad (19)$$

Это уравнение линейно относительно t и $\frac{dp}{dt}$ и легко интегрируется. Проинтегрировав (19), получаем

$$G(t, p, c) = 0 \qquad (20)$$

К (20) присоединяя (18) ($x' = p$) имеем

$$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p) \qquad (21)$$

Из (20) и (21) определяются искомые интегральные кривые.

Для получения (19) мы произвели деление на $\frac{dp}{dt}$. При этом, если p–const, мы теряем это решение.

Если такое решение существует, то она должна быть корнем уравнения $p - \varphi(p) = 0$. Итак, если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни p_k, то к найденным решениям уравнения Лагранжа надо еще добавить

$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p),\ p = p_k$, или, исключая p,

$x = t \cdot \varphi(p_k) + \psi(p_k)$ - прямые линии.

Уравнение вида

$$x = t \cdot x' + \psi(x') \ \ (\psi(x') \not\equiv ax' + b) \qquad (22)$$

называется уравнением Клеро.

Оно отличается от уравнения Лагранжа, только тем, что в нем коэффициент при t равен x'. Для решения уравнения Клеро, полагаем $x' = p$. Тогда (22) примет вид

$$x = t \cdot p + \psi(p). \qquad (23)$$

Далее имеем

$$dx = x'dt, \qquad pdt + [t + \psi'(p)]dp = pdt$$

или

$$[t + \psi'(p)]dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dp = 0 \text{ и } t + \psi'(p) = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $p = C$. Подставляя это значение p в (23), получим

$$x = C \cdot t + \psi(C). \tag{24}$$

Это семейство прямых линий есть общее решение уравнения Клеро.

Уравнение $t + \psi'(p) = 0$, вместе с уравнением (23) образует решение уравнения Клеро в параметрической форме.

$$\left.\begin{aligned} t &= -\psi'(p), \\ x &= t \cdot p + \psi(p) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Пример. Пусть рассматривается уравнение

$$x = t \cdot x' - x'^2.$$

Это уравнение Клеро. Полагая, $x' = p$ имеем

$$x = t \cdot p - p^2.$$

Далее

$$dx = x'dt = p + t \cdot dp - 2pdp$$

или

$$pdt = pdt + (t - 2p)dp.$$

Отсюда получим

$$(t - 2p)dp = 0$$

или

$$dp = 0 \text{ и } t - 2p = 0.$$

Тогда $p = C$. Подставляя $p = C$ в уравнение

$$x = t \cdot p - p^2,$$

получим $x = C \cdot t - C^2$ однопараметрическое решение уравнения.

Из второго уравнения определяем $t = 2p$, и получаем решение уравнения Клеро в параметрической форме

$$\begin{cases} t = 2p, \\ x = t \cdot p - p^2. \end{cases}$$

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Система дифференциальных уравнений

$$x_k'(t) = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка из n уравнений.

Введя векторные обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2)$$

$$f(t, x) = \big(f_1(t, x),\ f_2(t, x), \dots, f_n(t, x)\big).$$

Систему (1) перепишем в векторной форме

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (3)$$

Установим некоторые определения и неравенства для векторов и векторных функций.

Длина или модуль $|x|$ вектора (2) определяется формулой

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Если x и yдва вектора, то имеет место неравенство

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Из этого неравенства следует аналогичное неравенство и для произвольного числа векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$, именно

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|. \qquad (4)$$

Пусть $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$ – непрерывная векторная функция действительного переменного t , т.е. вектор координаты, которого являются непрерывными функциями переменного t.

Пусть $\varphi(t)$ определена на интервале $r_1 < t < r_2$, тогда при $r_1 < t_0 < r_2$ на том же интервале можно определить векторную функцию

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau,$$

при этом компоненты $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ вектора $\psi(t)$ определяются формулами

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_k(\tau) d\tau\,, k = 1,2, \dots, n.$$

Имеет место неравенство

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau\right| \leq \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)| d\tau. \qquad (5)$$

Пусть задана векторная функция

$$g(x) = \big(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\big),$$

определенная на выпуклом множестве Δ пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если любые две точки множества Δ можно соединить отрезком, полностью принадлежащим множеству Δ, то множество Δ называется выпуклым.

Предположим, что имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m}\right| \leq K,$$

где K - положительное число. Тогда для любых двух точек x и y множества Δ выполняются неравенства

$$|g(x) - g(y)| \leq n^2 K |x - y|. \qquad (6)$$

Докажем неравенство (6). Введем в рассмотрение отрезок, соединяющий точки $x и y$:

$$z(s) = y + s(x - y),$$

где $0 \leq s \leq 1$.

Когда s пробегает отрезок $[0,1]$, то точка $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий точки x и y, и, ввиду выпуклости Δ, все время остается в нем.

К разности $g_k(x) - g_k(y)$, применяя, формулу Лагранжа получаем

$$g_k(x) - g_k(y) = g_k\big(z(1)\big) - g_k\big(z(0)\big) = \frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds}\bigg|_{z=0}.$$

Вычислим производную $\frac{dg_k(z(s))}{ds}$ по формуле от производной от сложной функции, получаем:

$$\frac{dg_k\big(z(s)\big)}{ds} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s), \dots, z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot \frac{dz_m(s)}{ds} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_m\big(z_1(s), \dots, z_n(s)\big)}{\partial x_m} \cdot (x_m - y_m).$$

Таким образом

$$|g_k(x) - g_k(y)| \le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x_m - y_m| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{n} K \cdot |x - y| \le nK \cdot |x - y|.$$

Последнее неравенство, возведя в квадрат, затем суммируя по k, и извлекая корень, получаем:

$$|g(x) - g(y)| = +\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |g_k(x) - g_k(y)|^2} \le$$

$$\le n^{\frac{3}{2}} K|x - y| \le n^2 K|x - y|.$$

Теперь сформулируем для системы (1) теорему существования и единственности решения.

Теорема 3. (о существовании и единственности решения).

Пусть: 1. Задана система (1) и правые части (1) определены на некотором открытом множестве $\mathfrak{D}$.

2. Функции $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m}$ $(k = 1,2, \dots, n; m = 1,2, \dots, n)$ *непрерывны на этом множестве.*

Тогда: 1. Для любой точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ *множества* $\mathcal{D}$ *существует решение*

$$x_k = \varphi_k(t)(k = 1,2, \dots, n)$$

системы (1) удовлетворяющее условиям:

$$\varphi_k(t_0) = x_{k0};\ k = 1,2, \dots, n \tag{7}$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0.

2. Если два решения

$$x_k = \varphi_k(t), x_k = \psi_k(t), k = 1,2, \dots, n$$

системы (1) удовлетворяющих условиям

$$\varphi_k(t_0) = \psi_k(t_0), k = 1,2, \dots, n,$$

то, эти решения совпадают на интервале, где они оба определены.

Доказательство данной теоремы проводится, как и доказательство теоремы 1, только с незначительными изменениями.

Пусть задана система (1) и требуется доказать существование решения $x_k = \varphi_k(t)$ удовлетворяющее условиям (7).

Пусть $x = \varphi(t)$ – некоторое решение системы (3) $\big((1)\big)$, так что выполнено тождество

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \tag{8}$$

и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0, x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}). \tag{9}$$

Тогда совокупность соотношений (8), (9) эквивалентно одному соотношению

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau. \qquad (10)$$

Истинность этого предложения доказывается, как и в теореме 1.

Так как точка (t_0, x_0) принадлежит открытому множеству $\mathcal{D}$, то существует множество

$\Pi = \{(t, x), |t - t_0| \leq q, |x - x_0| \leq a\}$, где q и a – некоторые положительные числа и $\Pi \subset \mathcal{D}$. Множество Π замкнутое и ограниченное, то непрерывные функции

$$|f(t,x)|, \left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right|, k, m = 1,2, \dots, n.$$

ограничены на нем, т.е.

$$|f(t,x)| \leq M, \left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \leq K. \qquad (11)$$

Наряду с множеством Π рассмотрим множество

$$\Pi_r = \{(t, x), |t - t_0| \leq r \leq q, |x - x_0| \leq a\} \subset \Pi.$$

Построим последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots \qquad (12)$$

определенных на отрезке $|t - t_0| \leq r$.

Вектор функции $\varphi_k(t)$ определим так

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x_k(\tau)\big) d\tau. \qquad (13)$$

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций графики, которых проходят в Π_r, т.е. если $\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r$, то для $|t - t_0| \leq r$ должно быть

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq a.$$

Определим, при каких условиях $\forall k \ (\varphi_k(t) \epsilon \Omega_r)$.

Пусть $\varphi_k(t)\epsilon\Omega_r$. Определим $\varphi_{k+1}(t)$ по формуле (13).

Имеем

$$|\varphi_{k+1}(t)-x_0| \le \left|\int_{t_0}^{t} f\big(\tau,\varphi_k(\tau)\big)d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \left|f\big(\tau,\varphi_k(\tau)\big)\right|d\tau\right| (\text{усл.}\,11) \le$$

$$\le M|t-t_0| \le M\cdot r.$$

Отсюда вытекает, если $M\cdot r \le a$ или

$$r \le \frac{M}{a}, \tag{14}$$

то

$$\varphi_{k+1}(t)\epsilon\Omega_r.$$

Докажем равномерную сходимость последовательности (12).

Имеем

$$|\varphi_1-\varphi_0| \le \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_0)d\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau,x_0)|d\tau\right| \le$$

$$\le\ M|t-t_0| \le M\cdot r \le a,$$

$$|\varphi_1-\varphi_0| \le a.$$

$$|\varphi_2-\varphi_1| \le \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(\tau,x_1)-f(\tau,x_0)\big)d\tau\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau,\varphi_1)-f(\tau,x_0)|d\tau\right| (\text{неравенство } 6) \le$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} n^2K|\varphi_1 - x_0|d\tau \leq n^2K\,|t - t_0|a \leq n^2K\,ra.$$

Потребуем выполнимость условия

$$n^2K\,r \leq q_0 < 1.$$

Тогда

$$r \leq \frac{q_0}{n^2K} \tag{15}$$

и $|\varphi_2 - \varphi_1| \leq q_0 a$.

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\big(f(\tau,\varphi_2) - f(\tau,\varphi_1)\big)d\tau\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_2 - \varphi_1|d\tau\right| \leq$$

$$\leq n^2K\left|\int_{t_0}^{t}|\varphi_2 - \varphi_1|d\tau\right| \leq q_0an^2K|t - t_0| \leq q_0an^2Kr \leq q_0^2a,$$

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq q_0^2a.$$

Продолжая процесс, получим

$$\forall k \epsilon N\big(|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q_0^k a\big) \tag{16}$$

Таким образом, в силу (16), последовательность функций (12) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции$\varphi(t)$, принадлежащей семейству Ω_r.

Покажем, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (10). В (13) переходя к пределу получим

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau,\varphi(\tau)\big)d\tau.$$

Итак, существование решения $x = \varphi(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию (9) доказана. Решение $x = \varphi(t)$ определена на интервале $|t - t_0| \leq r$, где r - произвольное число, удовлетворяющее неравенствам (14) и (15).

Единственность решения докажем методом от противного.

Пусть существует решения $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ удовлетворяющие условию $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 = \psi(t_0)$ и определенные на интервале $|t - t_0| \leq r$.

Поскольку $\varphi(t), \psi(t)$ являются решениями уравнения (3), то согласно первой части теоремы $\varphi(t) \epsilon \Omega_r$, $\psi(t) \epsilon \Omega_r$.

Тогда, имеем

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| \left(f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)\right) \right| d\tau \right| \leq$$

$$\leq n^2 K \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right| \leq$$

$$\leq n^2 K |t - t_0| \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq$$

$$\leq n^2 K r \cdot max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|,$$

$$max|\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 max|\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Это соотношение $\forall t \ (|t - t_0| \leq r)$ возможна, только при условии $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, т.е. когда $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают на отрезке $|t - t_0| \leq r$. Теорема доказана.

НОРМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Система дифференциальных уравнений вида

$$x_k' = \sum_{m=1}^{n} a_{mk}(t) x_m + b_k(t), k = 1,2, \dots, n \qquad (1)$$

называется нормальной линейной системой.

Пусть требуется найти решение $x_k = \varphi_k(t)$ системы (1) удовлетворяющее условиям

$$x_{k0} = \varphi_k(t_0). \qquad (2)$$

Поставленная задача решается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть функции* $a_{mk}(t)$, $b_k(t)$, $m, k = 1,2, \dots, n$ *являются непрерывными функциями на некотором отрезке* $r_1 \le t \le r_2$. *Тогда для любых начальных значений*

$$t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0};$$

$$r_1 < t_0 < r_2.$$

существует решение системы (1) с этими начальными значениями, определенное на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

Доказательство. Систему (1) и начальные условия (2) в векторной форме запишем в виде

$$x = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A(t) = \big(a_{mk}(t)\big)$ – матрица $n \times n$,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

$$b(t) = \big(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)\big).$$

Введя обозначение

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t)$$

соотношения (3) – (4) заменим соотношением

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau \tag{5}$$

(при этом мы считаем, что $x(t)$ – решение системы (3), удовлетворяющее условию (4)).

Как и в теореме 3 определим последовательность функций

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots \tag{6}$$

при этом полагаем

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_k)\, d\tau. \tag{7}$$

Для правых частей уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m} = a_{mk}(t)$$

и потому на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m}\right| \le K, k, m = 1,2, \dots, n,$$

где K - некоторое положительное число.

Так как, функции $x_0(t)$, $x_1(t)$ ограничены на отрезке, то на этом отрезке имеет место неравенство

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le C - \text{const}.$$

Далее, на этом же отрезке, получаем

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)| d\tau\right| \le$$

$$\le n^2 KC|t - t_0|;$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} |(f(\tau, x_2) - f(\tau, x_1)| d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{(n^2K)^2 C}{2!} |t - t_0|^2;$$

....

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le \frac{(n^2K)^{k-1} C}{(k-1)!} |t - t_0|^{k-1}.$$

Отсюда получаем

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le C \frac{\left(n^2K(r_2 - r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(n^2K(r_2-r_1)\right)^{k-1}}{(k-1)!}$ сходится, тогда последовательность (6) на отрезке $r_1 \le t \le r_2$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $x(t)$.

Для этой функции имеем

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left(f\left(\tau,x_k(\tau)\right)-f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau\right| \le$$

$$\le \max_{r_1\le t\le r_2}\left|\int_{t_0}^{t}\left|\left(f\left(\tau,x_k(\tau)\right)-f\left(\tau,x(\tau)\right)\right|d\tau\right| \le$$

$$\le n^2K(r_2-r_1)|x_k-x|.$$

Таким образом, последовательность функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots$ на отрезке $r_1 \le t \le r_2$ равномерно сходится к функции

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau,x(\tau)\right) d\tau.$$

Переходя к пределу в соотношении (7), получаем

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau,x(\tau)\right) d\tau.$$

Теорема 4 доказана.

Если в (1) все $b_k(t) \equiv 0$ $(k = 1,2,\dots,n)$, то система

$$y_k'(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{km}(t)y_m(t) \qquad (8)$$

называется однородной, а система (1) неоднородной

$(b_k(t) \not\equiv 0)$.

В векторной форме систему (8) можно записать в виде

$$y' = A(t)y(t). \qquad (9)$$

Установим следующие простейшие свойства уравнения (9).

1^0. Если $y = \varphi(t)$ является решением уравнения (9), определенное при $r_1 \le t \le r_2$ и $\varphi(t_0) = 0, r_1 < t < r_2$, то $\varphi(t) \equiv 0$ на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

2^0. Если $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – решения уравнения (9), то функция

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t),$$

также является решением уравнения (9), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – $const$.

Доказательство.

1^0. Вектор $x(t) \equiv 0$ является решением (9). Тогда, согласно теореме 4, решение $\varphi(t)$ имеющая начальное условие $\varphi(t_0) = 0$ и решение $x(t) \equiv 0$ должны совпадать на всем отрезке $r_1 \le t \le r_2$.

2^0. Проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (9).

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

система решений уравнения (9).

Если существуют такие константы $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0, \tag{11}$$

то система (10) называется линейно зависимой.

Если тождество (11) выполняется только при одновременном

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0,$$

то система (10) называется линейно независимой.

Если система (10) линейно зависима, то в (11) существует хотя бы одно $c_m \neq 0$.

Оказывается, что если хотя бы для одного значения $t = t_0$ векторы

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0) \tag{12}$$

линейно зависимы, то решения (10) линейно зависимы.

А. Таким образом, если векторы (10) линейно независимы, то ни при каком значении t векторы (10) не могут быть линейно зависимыми.

Докажем это. Пусть векторы (12) линейно зависимы, т.е. что

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = 0,$$

где не все числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ равны нулю. Положим

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t).$$

В силу свойства 2^0 функция $\varphi(t)$ является решением уравнения (9). Еще $\varphi(t_0) = 0$, тогда согласно свойству $1^0, \varphi(t) \equiv 0$.

Система функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависима.

Если система функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{13}$$

решений уравнения (9) линейно независима, то оно называется фундаментальной системой решений.

Справедливы:

1. Для уравнения (9) всегда существует фундаментальная система решений.

2. Если (13) фундаментальная система решений, то каждое решение $\varphi(t)$ уравнения (9) представима в виде

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \quad (14)$$

Докажем это предложение.

1. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

произвольная система постоянных линейно независимых векторов. Определим решения (13) с начальными условиями

$$\varphi_k(t_0) = a_k, k = 1, \ldots, n.$$

Векторы $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)$ по предположению, линейно независимы, тогда согласно предложению **А** решения (13), также линейно независимы, т.е. составляют фундаментальную систему.

2. Пусть $\varphi(t)$ произвольное решение уравнения (9), а (13) фундаментальная система решений.

Возьмем значение $t = t_0$ и определим

$$\varphi(t_0), \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0).$$

Система (13) фундаментальная система решений, то векторы

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)$$

линейно независимы и составляют базис рассматриваемого пространства (число векторов и равномерность пространства совпадают). Тогда любой вектор $\varphi(t_0)$ из этого пространства через базис выражается так

$$\varphi(t_0) = c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ надлежащим образом выбранные постоянные. Решения $\varphi(t)$ и $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$ имеют общее начальное условие и потому совпадают, т.е. справедливо (14).

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА

Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{15}$$

некоторая система решений уравнения (9).

Решение $\varphi_k(t)$ запишем в координатной форме

$$\varphi_k(t) = \big(\varphi_{k1}(t), \varphi_{k2}(t), \dots, \varphi_{kn}(t)\big).$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t)\varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t)\varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \varphi_{1n}(t)\varphi_{2n}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

k -м столбцом этой матрицы служит решение $\varphi_k(t)$. Координаты $\varphi_k(t)$ являются решением системы (8).
Определитель этой матрицы обозначим через $W(t)$. $W(t)$ – называется определителем Вронского.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если решения (15) линейно независимы, то определитель Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни при одном значении t. В этом случае система (15) является фундаментальной системой решений.
2. Если система (15) линейно зависима, то определитель Вронского тождественна равна нулю.
3. В случае, когда система (15) является фундаментальной системой решений, (16) назовем фундаментальной матрицей. Произвольная квадратная матрица порядка n, составленная из функций переменного t и удовлетворяющая некоторым условиям, является фундаментальной для некоторой системы уравнений вида (8).

Докажем предложения 1-3. Справедливость утверждений 1-2 очевидна. Докажем 3. Пусть (16) есть произвольно заданная матрица функций переменных t.

Функции непрерывно дифференцируемы на интервале $r_1 < t < r_2$. $\forall\, t \epsilon (r_1, r_2)$ $(W(t) \neq 0)$. Предположим, что векторная функция $\varphi_k(t)$, координаты которой составляют k – столбец матрицы (16), является решением уравнения (9).

Имеем

$$\varphi'_{kj}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_{mj}(t) \cdot \varphi_{km}(t),\ j, k = 1,2, \dots, n. \quad (17)$$

Если в (17) зафиксировать индекс j и считать меняющимся только k, то систему полученных соотношений можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестны $a_{mj}(t)$ $(j, m = 1,2, \dots, n)$

Эта система однозначно разрешима, так как матрица ее получается из матрицы (16) транспонированием и потому определитель отличен от нуля. Таким образом, функции $a_{mj}(t)$ однозначно определяются через непрерывные функции $\varphi'_{kj}(t)$, $\varphi_{kj}(t)$.

ФОРМУЛА ЛИУВИЛЛЯ

Правило дифференцирования определителя

Пусть $(\varphi_{km}(t))$ – квадратная матрица порядка n, при этом функции $\varphi_{km}(t)$ являются дифференцируемыми. Определитель этой матрицы обозначим $W(t)$.

Производная $W'(t)$ этого определителя вычисляется по следующей формуле:

$$W'(t) = W_1(t) + \ldots + W_n(t). \quad (18)$$

Слагаемое $W_m(t)$ $(k = 1,2, \dots, n)$ определяется следующим образом: в матрице $(\varphi_{km}(t))$ дифференцируют по t все члены m – й строки, а остальные строки оставляют без изменения. Очевидно, что роли строк и столбцов можно поменять.

Пусть $W(t)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (8), тогда справедлива формула

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} s(\tau)d\tau}, \qquad (19)$$

где $s(t)$ - след матрицы $A(t)$:

$$s(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t).$$

(19) называется формулой Лиувилля.

НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задана неоднородная система линейных уравнений

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \qquad (1)$$

Рассмотрим однородное уравнение соответствующее (1)

$$y'(t) = A(t)y(t)) \qquad (2)$$

Пусть $y = \varphi(t)$ – произвольное решение уравнения (2) и $x^* = \psi(t)$ – некоторое решение уравнения (1), тогда произвольное решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$x = \varphi(t) + \psi(t). \qquad (3)$$

Истинность этого предложения проверяется непосредственной подстановкой (3) в (1).

Теперь ознакомимся методом нахождения решений уравнения (1). Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t) \qquad (4)$$

фундаментальная система решений однородного уравнения (2). Решение (1) будем искать в виде

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t), \quad (5)$$

где $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ – являются неизвестными функциями от t.

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_1(t)\varphi'(t) + \ldots +$$
$$+c_n(t)\varphi_n'(t) =$$
$$= A(t)\big(c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t)\big) + b(t).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ – решения уравнения (2), получаем:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n'(t)\varphi_n(t) = b(t) \quad (6)$$

Уравнение (6) относительно $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$, записанное в координатной форме, имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m'(t) = b_k(t), k = 1,2, \ldots, n. \quad (7)$$

Пусть $\Phi(t) = \big(\varphi_{mk}(t)\big)$ фундаментальная матрица уравнения (2). Тогда соотношение (7) можно записать в виде

$$\Phi(t) \cdot c'(t) = b(t).$$

Отсюда находим:

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$$

или

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \quad (8)$$

где $\Phi^{-1}(t)$ – матрица, обратная матрице $\Phi(t)$.

Формулу (5) можно переписать в виде

$$x_k(t) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_{mk}(t) \cdot c_m(t), \ k = 1,2, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$x = \Phi(t)c(t) \tag{9}$$

(8) подставляя в (9), получаем:

$$x = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)b(t)dt. \tag{10}$$

Таким образом, формула (10) дает общее решение уравнения (1). Решение неоднородного уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 записывается в виде

$$x = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right). \tag{11}$$

При $t = t_0$ имеем $x(t_0) = x_0$. Подстановкой (11) в (1) убеждаемся, что (11) является решением (1).

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n - ГО ПОРЯДКА

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = b(t) \tag{1}$$

называется линейным уравнением n-порядка. Относительно функций $a_1(t), \ldots, a_n(t), b(t)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны на интервале $r_1 < t < r_2$.

Если $b(t) \equiv 0$, то получим уравнение

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)z(t) = 0 \tag{2}$$

Уравнение (2) называется однородным уравнением, уравнения (1). Уравнение (1) называется неоднородным.

Уравнение (1) можно свести к нормальной линейной системе. Для этого введем новые неизвестные функции

$$x_1 = y, x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда эти новые неизвестные функции $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют линейной системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \ \dots - a_1(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

Полученную систему в векторной форме можно записать в виде

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$b(t) = (0, 0, \dots, b(t))$$

Таким образом, исследование уравнения (1) можно свести к исследованию нормальной линейной системы (3).

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения вида

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)}(t) + \ \dots a_{n-1} z' + a_n z^n = f(t), \qquad (1)$$

называются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами n-порядка, где $z(t)$ – неизвестная функция, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные числа, $f(t)$ – заданная функция;

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, а в противном случае неоднородным.

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть задано уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ \dots a_{n-1} z' + a_n z = 0 \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$z = e^{\lambda t}, \qquad (3)$$

где λ - некоторое число (вещественное или комплексное).

(3) подставляя в (2), имеем

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0,$$

или

$$e^{\lambda t} \cdot (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0.$$

$\forall t \epsilon (-\infty, \infty)(e^{\lambda t} \neq 0)$, тогда должно быть

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

Многочлен, в левой части (4) относительно λ, называется характеристическим многочленом уравнения (2), а (4) характеристическим уравнением. Обозначим $L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$. Из курса алгебры известно, что уравнение (4) имеет ровно n корней, считая их кратности.

Сначала рассмотрим случай, когда уравнение (4) имеет n различных корней, т.е. не имеет кратных корней. Для этого случая совокупность всех решений уравнения (2) описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть характеристический многочлен* $L(\lambda)$ *имеет* n *различных корней*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Тогда общее решение уравнения (2) *можно представить в виде*

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \qquad (5)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ - произвольные постоянные.

Доказательство. (5) является решением уравнения (2) проверяется непосредственной подстановкой (5) в уравнение (2).

Докажем, если z_* - некоторое решение уравнения (2), то при надлежащем выборе чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ из (5) можно получить z_*. В этом смысле (5) будет общим решением уравнения (2).

Пусть z_* определена при $-\infty < t < +\infty$ и

$$z_*(0) = z_0, z_*'(0) = z_0', \dots, z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

Покажем теперь, что константы $c_1, c_2, \dots, c_n$ можно подобрать так, чтобы и решение $z(t)$ определяемое, формулой (5), удовлетворяло тем же начальным условиям.

$$z(0) = z_0,\ z'(0) = z_0', \dots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \qquad (6)$$

Из (5) учитывая (6) получаем:

$$c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m + \dots + c_n\lambda_n^m = z_0^{(m)}, \qquad (7)$$

$$m = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Соотношение (7) представляет собой систему из n уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы (определитель Вандермонда) отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны. Тогда из системы (10), однозначно определяются постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$. Таким образом, определяется решение $z(t)$ удовлетворяющее условиям (7). Решения z_* и z удовлетворяют одним и тем же начальным условиям, тогда они совпадают. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет кратные корни.

Теорема 6. *Пусть* $L(\lambda)$ *имеет попарно различные корни* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ $(m < n)$, *причем корень* λ_j $(j = 1,2, \dots, m)$ *имеет кратность* k_j, *так что*

$$k_1 + k_1 + \ldots + k_m = n.$$

Тогда все функции

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = te^{\lambda_1 t}, \dots, z_{k_1} = t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, \dots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m t}, z_{k_1+\dots+k_{m-1}+2} = te^{\lambda_m t}, \dots, z_n = t^{k_m - 1} e^{\lambda_m t} \end{cases} \tag{8}$$

являются решениями уравнения (2). Общее решение уравнения (2) представляется в виде

$$z = c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n, \tag{9}$$

где, $c_1, c_2, \dots, c_n$ *– произвольные постоянные.*

Из теоремы 6 вытекает, что общее решение также можно записать в виде

$$z = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \ \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t}, \tag{10}$$

где $f_j(t)$ есть многочлен степени, не превосходящей чисел $k_j - 1, j = 1,2, \dots, n$. При этом коэффициентами многочленов $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ являются постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Действительно, нетрудно проверить, каждая функция из системы (8) является решением уравнения (2).

Тогда их линейная комбинация, которая представлена соотношением (9) также является решением уравнения (2). Из (9) вытекает справедливость высказанного утверждения.

Примеры.

1. $z^V + 3z^{IV} + z^{III} + z^{II} = 0.$

Характеристический многочлен данного уравнения имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = \\ = \lambda^2(\lambda + 1)^3.$$

Корнями этого многочлена являются числа

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$$

которые, соответственно имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 3.$

В силу теоремы 6 система решений (8) имеет вид:

$$z_1 = 1, z_2 = t, z_3 = e^{-t}, z_4 = te^{-t}, z_5 = t^2e^{-t}.$$

Общее решение можно представить в виде:

$$z = (c_1 + c_2t) + (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t}.$$

2. Решим уравнение $z^V + 2z^{III} + z^I = 0.$

Характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda^2 + 1)^2$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$ (простой) $\lambda_2 = i$ (двухкратный), $\lambda_3 = -i$ (двухкратный).

Система (8) имеет вид

$$z_1 = 1, z_2 = e^{it}, z_3 = te^{it}, z_4 = e^{-it}, z_5 = te^{-it},$$

а общее решение можно записать в виде:

$$z = c_1 + (c_2 + tc_3)e^{it} + (c_4 + tc_5)e^{-it}.$$

3. Рассмотрим уравнение $z^{III} - 5z^{II} + 6z^I = 0.$

Характеристический многочлен имеет вид:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Корнями многочлена будут числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ корни различные. Тогда, согласно теореме 5, общее решение представляется в виде

$$z = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

4. Для дифференциального уравнения
$z^{III} + 3z^{II} + 9z^{I} - 13z = 0$ характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = \lambda^3 - 1 + 3\lambda^2 - 3 + 9\lambda - 9 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) + 3(\lambda^2 - 1) + 9(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 + +3\lambda + 3 + 9) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13).$$

Корнями характеристического многочлена будут числа $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$.
Общее решение, согласно теореме 5, представима в виде

$$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{(-2+3i)t} + c_3 e^{-(2+3i)t}.$$

5. $z^{III} - z = 0$.
Характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0.$$

Корнями будут числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
Тогда общее решение имеет вид

$$z = c_1 e^{t} + c_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + c_3 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}.$$

В заключении отметим:

Если характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то система функций

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, z_n = e^{\lambda_n t} \quad (11)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (2); если характеристический многочлен $L(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1 - k_1$-кратное, $\lambda_2 - k_2$-кратное, $\lambda_m - k_m$-кратное ($k_1 + k_2 +$

$\ldots + k_m = n$), то система функций (8) образуют фундаментальную систему решений.

Для доказательства этого предложения составим определитель Вронского системы (11) (случай различных корней)

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n \\ z_1' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{n-1} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)t}.$$

$\forall t \epsilon (-\infty, +\infty)(W(t) \neq 0)$. Следовательно, система (11) линейно независима и образует фундаментальную систему решений.

Второй случай доказывается также.

НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (1).

Нетрудно проверить (непосредственной подстановкой): для нахождения общего решения достаточно найти $z_{\text{оо}}$ – общее решение однородного уравнения и $z_{\text{чн}}$ – частное решение неоднородного уравнения и сложить эти решения, т.е.

$$z_{\text{он}} = z_{00} + z_{\text{чо}}.$$

Общее решение однородного уравнения определяются теоремами 5, 6. Остается найти частное решение неоднородного уравнения. Для нахождения частного решения уравнения (1) рассмотрим следующие случаи:

1. $f(t) = \mathcal{P}(t)$, где $\mathcal{P}(t)$ – многочлен (полином) от t.

Если число 0 (ноль) не является корнем характеристического многочлена $L(\lambda)$, то частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде

$$z_{чн} = Q(t),$$

где $Q(t)$ – многочлен той же степени, что и $\mathcal{P}(t)$, но с неопределенными коэффициентами.

Если же O есть корень характеристического многочлена кратности K, то

$$z_{чн} = t^k Q(t),$$

$Q(t)$ имеет тот же степень, что и $\mathcal{P}(t)$.

Для определения коэффициентов многочлена Q(t) используется метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим следующий <u>пример</u>: пусть задано уравнение

$$z^{II} - 2z^{I} - 3z = 3t^2 + 1$$

характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$z_{чн} = at^2 + bt + c,$$

где a, b, c – некоторые числа.

Для определения чисел a, b, c функцию $z_{чн}$ представляем в заданное уравнение:

$$z'_{чн} = 2at + b, z''_{чн} = 2a.$$

Имеем

$$2a - 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 + 1.$$

Отсюда, используя равенство многочленов, имеем

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ -4a - 3b = 0 \\ \;\; 2a - 2b - 3c = 1 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = -\dfrac{17}{9} \end{cases}$$

Частное решение $z_{\text{чн}}$ и общее решение $z_{\text{оо}}$ имеют вид

$$z_{\text{чн}} = -t^2 + \tfrac{4}{3}t - \tfrac{17}{9},$$

$$z_{\text{оо}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}.$$

Общее решение можно записать так

$$z_{\text{он}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \left(-t^2 + \tfrac{4}{3}t - \tfrac{17}{9}\right).$$

2. $f(t) = \mathcal{P}(t)e^{at}$.

Если число a не является корнем характеристического многочлена, то

$$z_{\text{чн}} = Q(t)e^{at}.$$

Если a – k-кратный корень, то

$$z_{\text{чн}} = t^k Q(t)e^{at}.$$

В рассматриваемом случае $Q(t)$ – неизвестный многочлен той же степени, что и $\mathcal{P}(t)$. В обеих случаях решения $z_{\text{чн}}$ подставляя в (1), определяем коэффициенты многочлена $Q(t)$.

3. $f(t) = e^{ax}(\mathcal{P}_1(t)cosbt + \mathcal{P}_2(t)sinbt)$,

где $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$ – многочлены от t. Пусть m – наивысшая из степеней полиномов $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$. Тогда, если число $a + ib$ не является корнем характеристического многочлена, то

$$z_{\text{чн}} = e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt),$$

где $Q_1(t), Q_2(t)$ – многочлены степени m.

Если $a + ib$ корень характеристического многочлена кратности k, то

$$z_{\text{чн}} = t^k e^{at}(Q_1(t)cosbt + Q_2(t)sinbt)$$

4. Если $f(t)$ представима в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_m(t),$$

где $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ некоторые функции (возможно, вида рассмотренных 1-3).

Если $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_m(t)$ частные решения уравнения (1), соответствующие функциям

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$$

$$\left(z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = f_j(t), j = 1,2, \ldots, m\right),$$

то

$$z_{\text{он}} = z_1(t) + z_2(t) + \ldots + z_m(t).$$

<u>Примеры</u>.

1. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$z^{II} - z^{I} = e^t + t.$$

Соответствующее однородное уравнение будет

$$z^{II} - z^{I} = 0.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 1).$$

Корнями многочлена являются числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$

Общее решение однородного уравнения можно представить так

$$z_{00} = c_1 + c_2 e^t.$$

Теперь найдем частное решение $z_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения. Правая часть неоднородного уравнения представлена в виде суммы двух функций, т.е.

$$f(t) = e^t + t.$$

Частное решение найдем согласно случаю 4. Для этого рассмотрим уравнения

$$z^{II} - z^{I} = e^{t},\ z^{II} - z^{I} = t.$$

Так как число 1 является корнем характеристического многочлена, то частное решение $z_1(t)$ будем искать в виде $z_1 = Ate^{t}$, где A – некоторая постоянная. Подставляя

$$z_1' \ = Ae^{t} + Ate^{t},$$

$$z_1'' \ = Ae^{t} + Ae^{t} + Ate^{t} = 2Ae^{t} + Ate^{t}$$

в первое уравнение получим

$$2Ae^{t} + Ate^{t} - Ae^{t} - Ate^{t} = e^{t}.$$

Отсюда

$$Ae^{t} = e^{t}$$

или $A = 1$. Таким образом, частным решением первого уравнения будет функция

$$z_1(t) = \ te^{t}.$$

Число $\lambda_1 = 0$ является корнем характеристического многочлена. Тогда, согласно случая 1, частное решение будем искать в виде

$$z_2(t) = t(At + B).$$

Найдем числа A и B. Для этого найдем

$$z_2' = 2At + B, z_2'' = 2A$$

Найденные функции, подставляя во второе уравнение, получим

$$2A - 2At - B = t.$$

Отсюда имеем уравнения для определения A и B

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 2A - B = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$A = -\frac{1}{2},$$

$$B = -1.$$

Тогда

$$z_2 = -t\left(\frac{1}{2}t + 1\right) = -\frac{1}{2}t^2 - t.$$

Согласно 4, общее решение заданного уравнения можно записать в виде

$$z_{0\text{н}} = c_1 + c_2 e^t + te^t - \frac{1}{2}t^2 - t.$$

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m + f_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n. \qquad (1)$$

называется линейной неоднородной системой с постоянными коэффициентами, где x_m – неизвестная функция, a_{km} – постоянные числа, $f_k(t)$ – заданные функции;

Если в (1) все $f_k(t) \equiv 0$ имеем

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{m=1}^{n} a_{km}y_m, k = 1,2,\dots,n \qquad (2)$$

Система (2) называется однородной системой соответствующее (1).

Общее решение системы (1) находят по следующему правилу: находят общее решение системы (2), затем находят какое-либо частное решение системы (1). Сумма двух решений будет общим решением системы (1).

Системы (1) и (2) в векторной форме записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $A = (a_{mk})$ $(k, m = 1,2, \dots, n)$, $f(t) = \big(f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_n(t)\big)$.

Общее решение системы (4) обозначим $y_{об}$, а частное решение системы (3) обозначим $x_ч$. Тогда общее решение $x_{об}$ системы (3)можно записать в виде

$$x_{об} = y_{об} + x_ч. \tag{5}$$

Найдем общее решение $y_{об}$.

Если для некоторого числа λ и некоторого вектора h выполняется соотношение

$$A \cdot \eta = \lambda\eta \tag{6}$$

то число λ называется собственным значением, а вектор η собственным вектором матрицы A.

Π_1 . *Пусть матрица A имеет собственное число λ и собственный вектор η. Тогда векторная функция*

$$y = \eta e^{\lambda t} \tag{7}$$

является решением уравнения (4).

Действительно, (7) подставляя в (4) получим

$$\lambda\eta e^{\lambda t} = A \cdot \eta e^{\lambda t}.$$

Отсюда имеем

$$A \cdot \eta = \lambda\eta.$$

Истинность сказанного доказана. Из соотношения (6) получим

$$(A - \lambda E)\eta = 0, \tag{8}$$

где E - единичная матрица порядка n.

Если в (8) η ненулевой вектор, то должна быть

$$det|A-\lambda E|=0 \tag{9}$$

т. е. определитель матрицы $(A-\lambda E)$ должен равняться нулю.

Левая часть (9), определяет некоторый многочлен степени n относительно λ.

Уравнение (9) называется характеристическим уравнением системы (4), а многочлен характеристическим многочленом (сравните с линейным уравнением n - го порядка с постоянными коэффициентами).

Если известно значение $\lambda=\lambda_j$, то это значение подставляя в (9), можно определить ненулевой вектор h соответствующий λ_j.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Корни уравнения (9) различны. Справедлива теорема.

Теорема 7. *Пусть матрица имеет* n *различных собственных значений:* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ *и* $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ *– соответствующие собственные векторы матрицы А. Положим*

$y_j=\eta_j e^{\lambda_j t}, j=1,2,\dots,n$ ($y_j -$ векторная функция).

Тогда, векторная функция

$$y_{об}=c_1y_1+c_2y_2+\ \dots+c_ny_n. \tag{10}$$

является общим решением системы (4).

Доказательство. (10) является решением системы (4), проверяется непосредственной подстановкой. При этом надо учесть предложение $П_1$. Докажем, что (10) общее решение системы (4). Это означает, что, если $\varphi(t)$ – некоторое решение системы (4), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0)=x_0$, то надлежащим образом, определив постоянные $c_1,c_2,\dots,c_n$ решение $\varphi(t)$ можно представить в виде

$$\varphi(t)\ =c_1y_1+c_2y_2+\ \dots+c_ny_n. \tag{11}$$

Нам осталось показать возможность выбора чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$. Решение $\varphi(t)$ можно считать определенным на всей прямой $-\infty < t < +\infty$. Не ограничивая общности можно взять $t_0 = 0$.

В (11) возьмем $t = 0$. Тогда

$$\varphi(0) = x_0 = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_n\eta_n.$$

Мы получили разложение вектора x_0 по базису $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ (векторы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ образуют базис).

В (10), полагая $t = 0$, получим

$$x(0) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_n\eta_n$$

При одних и тех же значениях $c_1, c_2, \dots, c_n$ начальные значения решений $\varphi(t)$ и $x(t)$ при $t = 0$ совпадают, тогда, согласно теореме 4, эти решения совпадают на всем интервале определения. Теорема доказана.

2. Уравнение (9) имеет кратные корни, т. е. матрица A имеет кратные собственные значения. Пусть λ – есть k кратный корень. Тогда собственному значению λ соответствует серия собственных векторов

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n.$$

Для матрицы A выполняются соотношения

$$A\eta_1 = \lambda\eta_1,\ A\eta_2 = \lambda\eta_2 + \eta_1, \dots, A\eta_k = \lambda\eta_k + \eta_{k-1}.$$

Определим последовательность векторных функций

$$\omega_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \dots + \eta_r,\ r = 1,2, \dots, k. \quad (12)$$

Тогда векторные функции

$$y_r = \omega_r(t)e^{\lambda t}, r = 1,2, \dots, k. \quad (13)$$

являются решениями уравнения (4), причем

$$y_r(0) = \eta_r.$$

Таким образом, каждой серии из k векторов соответствует система из k решений.

Π_2. *Докажем, что система функций (13) является решением системы (4). Сначала докажем справедливость следующих соотношений*

$$\omega_r'(t) = \omega_{r-1}(t), \tag{14}$$

$$A\omega_r(t) = r\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t). \tag{15}$$

Продифференцировав (12), получим первое соотношение. Далее

$$A\omega_r(t) = A\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \ \dots + \eta_r\right) =$$

$$= \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\lambda\eta_1 +$$

$$+ \dots + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}(\lambda\eta_2 + \eta_1) + \lambda\eta_r + \eta_{r-1} = \lambda\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t)$$

Второе соотношение также доказана.

(13) подставляя в (4), имеем

$$y_r'(t) = \left(\omega_r(t)e^{\lambda t}\right)' = \omega_r{}'(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t}.$$

Отсюда, учитывая соотношения (14), (15) получим

$$y_r'(t) = \omega_{r-1}(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t} = \left(\omega_{r-1}(t) + \lambda\omega_r(t)\right)e^{\lambda t} =$$

$$= A\omega_r(t)e^{\lambda t} = Ay_r(t),$$

$$y_r'(t) = Ay_r(t).$$

Справедливость Π_2 доказана.

Теперь сформулируем теорему определяющая общее решение.

Теорема 8. *Пусть матрица A имеет собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, *соответственно кратностями* $k_1, k_2, \dots, k_m$, *причем* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ *и* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k_1}$ *серия с собственным значением* λ_1*;* $\eta_{k_1+1}, \eta_{k_1+2}, \ldots, \eta_{k_1+k_2}$ *серия с собственным значениям* λ_2 *и т.д. Тогда каждой серии соответствует система решений уравнения (4), которые можно выписать в следующем виде:*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \eta_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \eta_2, \\ y_{k_1} = \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \ldots + \eta_{k_2}\right) e^{\lambda_1 t}, \\ y_{k_1+1} = \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, y_{k_1+2} = \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t} + \eta_{k_1+2}, \ldots, \\ y_{k_1+k_2} = \left(\frac{t^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2-1)!}\eta_{k_1+1} + \ldots + \eta_{k_1+k_2}\right) e^{\lambda_2 t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array}\right\} \quad (16)$$

и общее решение системы уравнений (4) описывается формулой

$$y_{\text{об}} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольные постоянные.*

Доказательство этой теоремы проводится, как и в случае доказательство теоремы 7.

Подведя итог можно сказать, что теоремы 7 и 8 подтверждают существование общего решения системы (4). Теперь нам осталось указать способ нахождения частного решения системы (3). При исследовании нормальной системы линейных уравнений было доказано формула нахождения частного решения нормальной системы неоднородного уравнения.

Частное решение было найдено методом вариации постоянных. Если воспользоваться этой формулой, то частное решение (3) записывается формулой

$$x_{\text{ч}} = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right),$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (4); $\Phi^{-1}(t)$ – матрица, обратная матрица $\Phi(t)$.

$\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, которая составляется фундаментальной системой решений уравнения (4). Согласно теорем 7, 8, функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ определяемое этими теоремами являются фундаментальными системами.

Используя $\Phi(t)$ общее решение $y_{об}$ можно записать в виде

$$y_{об} = \Phi(t) \cdot C, \text{ где } C = (C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Теперь можем написать общее решение неоднородной системы

$$x_{об} = y_{об} + x_{ч} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

или

$$x_{об} = \Phi(t) \left(C_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right),$$

где $C_1 = C + x_0$.

Если учесть произвольность C_1, то решение можно записать и так

$$x_{об} = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Примеры.

1. Рассмотрим однородную систему

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_2 + 4y_2.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$.

Согласно теореме 7, частные решения представляются в виде

$$y_{1ч} = \eta_1 e^{1\cdot t},$$

η_1 – собственный вектор, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Пусть $\eta_1 = (\eta_{11}, \eta_{12})$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} -2\eta_{11} - 2\eta_{12} = 0, \\ 3\eta_{11} + 3\eta_{12} = 0. \end{cases}$$

Эта система сводится к уравнению

$$\eta_{11} + \eta_{12} = 0.$$

Одно из чисел η_{11}, η_{12} можно выбрать произвольным.

Пусть $\eta_{11} = 1$, тогда $\eta_{12} = -1$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует решения

$$y_{11} = e^t, y_{12} = -e^t.$$

Аналогично, находим частное решение, соответствующее числу $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta_{21} \\ 2\eta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -3\eta_{21} - 2\eta_{22} = 0, \\ 3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0. \end{cases}$$

$$3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0.$$

Возьмем $\eta_{21} = 2$, тогда $\eta_{22} = -3$.

Соответствующие решения имеют вид

$$y_{21} = 2e^t, y_{12} = -3e^{2t}.$$

Теперь общее решение можем записать так

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t}, y_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 2e^{-t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

Сначала найдем общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Общее решение этой системы найдено в примере 1.

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t},$$

$$y_2 = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

Частное решение рассматриваемой системы найдем методом вариации постоянных. Имеем

$$x_{1ч} = C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{2t},$$

$$x_{2ч} = -C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{2t}.$$

$C_1(t),\ C_2(t)$ находим из системы

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}, \\ -C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}. \end{cases}$$

Получаем

$$C_1'(t) = 8e^{-2t}, C_2'(t) = -3e^{-3t}.$$

Тогда

$$C_1(t) = -4e^{-2t},\ C_2(t) = -e^{-3t}.$$

и

$$x_{1ч} = -4e^{-t} + 2e^{-t} = -2e^{-t},$$

$$x_{2ч} = 4e^{-t} - 3e^{-t} = e^{-t}.$$

Таким образом

$$x_1 = -2e^{-t} + C_1e^t + 2C_2e^{2t},$$

$$x_2 = e^{-t} - C_1e^t - 3C_2e^{2t}.$$

3. Пусть дана система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Найдем ее общее решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)^2 + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$.

Построим решение вида

$$y_1 = \eta_1 e^{(2+i)\cdot t}, y_2 = \eta_2 e^{(2+i)\cdot t}$$

соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$. η_1, η_2 определяются из уравнения $-i\eta_1 - \eta_2 = 0$. Полагая $\eta_1 = 1$, находим $\eta_2 = -i$. Таким образом,

$$y_1 = e^{(2+i)\cdot t} = e^{2t}(cost + isint),$$

$$y_2 = -ie^{(2+i)\cdot t} = -e^t(sint - icost).$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем два вещественных линейно-независимых частных решения:

$$y_{11} = e^{2t} \cdot cost, y_{21} = e^{2t} \cdot sint,$$

$$y_{12} = e^{2t} \cdot sint, y_{22} = -e^{2t} \cdot cost.$$

Рассматривая собственное число $\lambda_2 = 2 - i$, получим такой же результат. Общим решением системы будут

$$y_1 = e^{2t}(C_1 cost + C_2 sint),$$

$$y_2 = e^{2t}(C_1 sint - C_2 cost).$$

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения вида

$$x_k' = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k),\ k = 1,2, \dots, n, \qquad (1)$$

называются нормальными автономными системами порядка n.

Введя обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

систему (1) в векторной форме можно записать в виде

$$x' = f(x). \qquad (2)$$

В автономную систему дифференциальных уравнений независимая переменная t явно не входит. Это означает, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений, не меняется течением времени.

Относительно функций $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ будем предполагать, что они определены на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ пространства размерности n. Элементы этого пространства назовем точками, координатами точки являются переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$. Также, будем предполагать, что на множестве $\mathcal{D}$ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и их частные производные первого порядка непрерывны.

При таком предположении, согласно теореме 3, решения системы (1) или (2), удовлетворяющее заданным начальным условиям существуют.

Теперь докажем, если

$$x_m = \varphi_m(t), m = 1,2, \dots, n \tag{3}$$

является решением (1), то

$$x_m = \varphi_m^*(t) = \varphi_m(t + C), m = 1,2, \dots, n \tag{4}$$

также является решением системы (1).

Так как $x_m = \varphi_m(t)$ является решением системы (1), то имеем тождество

$$\varphi_m'(t) = f_m\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big).$$

Заменяя в этих тождествах t через $t + C$ получаем:

$$\varphi_m'(t + C) = f_m\big(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)\big), m = 1,2, \dots, n.$$

Из правила дифференцирования сложной функции вытекает

$$\big(\varphi_m^*(t)\big)' = \frac{d\varphi_m^*(t)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{d(t+C)} \cdot \frac{d(t+C)}{dt} =$$

$$= \varphi_m'(t + C).$$

Таким образом,

$$\big(\varphi_m^*(t)\big)' = \varphi_m'(t + C) = f_m\big(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)\big) =$$

$$= f_m\big(\varphi_1^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)\big).$$

Отсюда вытекает, что $\varphi_m^*(t)$ или $\varphi_m(t + C)$ являются решением (1).

Теперь перейдем к кинематической интерпретации решений системы (1).

Каждому решению

$$x_m = \varphi_m(t),\ m = 1,2, \dots, n \tag{5}$$

системы (1) поставим соответствие движение точки в n – мерном пространстве, задаваемое уравнениями (5), где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты точки в пространстве, а t – время. В процессе движения эта точка в пространстве описывает некоторую траекторию.

Если с решением (5) рассмотреть другое решение

$$x_m = \psi_m(t), m = 1,2, \dots, n \tag{6}$$

то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в пространстве, либо совпадают.

ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы (1), пересекать себя.

Ответ на поставленный вопрос можно сформулировать так: имеется три сорта траекторий:

1) Положение равновесия;
2) Периодические траектории (циклы);
3) Траектории без самопересечений.

1) Если функция

$$\varphi_m(t) = a_m, m = 1,2, \dots, n$$

где $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть точка множества $\mathcal{D}$, не зависящая от t, является решением системы (1), то это решение называется положением равновесия.

Таким образом, если $\varphi_m(t)$ положение равновесия, то точка $\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$ не движется при изменении t, а стоит на месте.

2) Существует такое положительное число T, что при произвольном t имеют место равенства

$$\varphi_m(t+T) = \varphi_m(t), m = 1,2, \ldots, n,$$

но, при $|\tau_1 - \tau_2| < T$, хотя бы для одного $m = 1,2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\varphi_m(\tau_1) \neq \varphi_m(\tau_2).$$

В этом случае решение

$$x_m = \varphi_m(t), \qquad m = 1,2, \ldots, n$$

называется периодическим с периодом T, а траектория, описываемая решением, называется замкнутой траекторией или циклом.

Из теоремы существования и единственности решения следует, что через каждую область $\mathcal{D}$ системы (1) проходит траектория, изображающая решение системы.

Таким образом, вся область $\mathcal{D}$ полностью заполняется траекториями, которые попарно не пересекаются. Среди всех траекторий, особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия или циклами.

Мы рассмотрели кинематическую интерпретацию системы (1). Сама система (1) также допускает геометрическую интерпретацию.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Теперь определим геометрическую интерпретацию системы (1). Пусть $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ – произвольная точка множества $\mathcal{D}$, тогда этой точке соответствует последовательность из n чисел:

$$f_1(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}), \ \ldots, f_n(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}).$$

Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора

$$f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) = f(x_0),$$

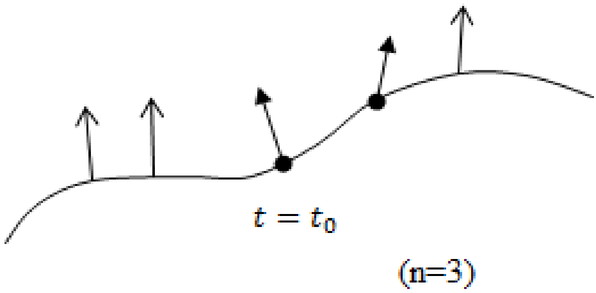
проведенного в n-мерном пространстве и выходящего из точки $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$.

Таким образом, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ – векторное поле, заданное на открытом множестве $\mathcal{D}$. В каждой точке $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ множества $\mathcal{D}$ определен вектор $f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ выходящий из этой точки.

Установим связь между геометрической интерпретацией самой системы (1) и геометрической интерпретацией решений системы (1). Эта связь заключается в следующем: в силу геометрической интерпретации системы уравнений в точке $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ поставлен в соответствие вектор $f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ выходящий из этой точки. Далее, согласно теореме существования и единственности, существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_m(t_0) = x_{0m}, \ m = 1,2, \ldots, n.$$

В силу кинематической интерпретации, решению $x_m = \varphi_m(t)$, соответствует в пространстве движения точки (это возможно $\mathcal{D}$), описывающее траекторию, причем, в момент времени $t = t_0$, движущаяся точка проходит через положение $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ в пространстве.



Таким образом, векторная скорость $(x_1', \dots, x_n')$ точки, описывающей решение $x_m = \varphi_m(t)$, в момент ее прохождения через положение $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ совпадает с вектором $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. Это совпадение выражается системой уравнения (1) при

$$x_m = x_{0m},\ m = 1,2, \dots, n;\ t = t_0.$$

Пространство размерности n , в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траектории и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется фазовым пространством системы (1).

Траектории называются фазовыми траекториями, векторы $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ называются фазовыми скоростями. В фазовом пространстве время t считается параметром.

ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ

Рассмотрим теперь положения равновесия с точки зрения фазовых скоростей.

Пусть точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ множества $\mathcal{D}$.

П3. Если фазовая скорость $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ равна нулю, т.е. $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, то это условие является необходимым и достаточным, чтобы точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ была положением равновесия системы (1), т.е. существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы, для которого $\varphi_m(t) \equiv a_m$.

Из этого предложения вытекает: для отыскания всех положений равновесия системы (1) нужно решить систему уравнений

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, m = 1,2, \dots, n.$$

Эта система представляет собой систему конечных уравнений (производные в нее не входят).

Докажем утверждение П3. Пусть точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ положение равновесия системы (1), т.е. существует решение $x_m = \varphi_m(t)$ системы (1) для которого

$$\varphi_m(t) \equiv a_m,\ m = 1,2, \dots, n\,.$$

Подставляя это решение в систему (1) получим

$$\varphi_m'(t) = (a_m)' = 0 = f_m(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Таким образом, вектор $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ фазовой скорости равна нулю в точке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пусть $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Тогда из (1) имеем

$$\varphi_m'(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

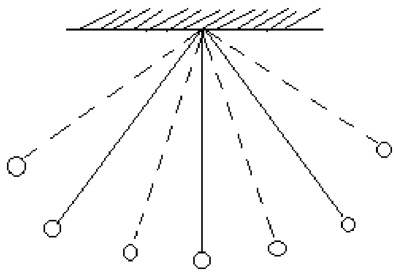
Отсюда вытекает, что $\varphi_m(t) \equiv a_m$.

УСТОЙЧИВОСТЬ

Достаточно многие процессы описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие системы всегда имеют бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Употребляемые на практике устройства обычно работают на вполне определенном режиме, и в их работе, на первый взгляд, невозможно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы уравнений. Это может объясниться либо тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбираются каким-то определенным образом, либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают свое влияние, и устройство само стабилизирует свою работу на стационарном решении.

Приведем пример. Рассмотрим работу стенных часов. Такие часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при запуске часов маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если маятник отклонить недостаточно сильно, то через некоторое время он остановится.

Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний стабилизируется, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний неопределенно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение, а этих решений, несомненно, имеется бесконечное множество, очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечению некоторого времени становится практически не отличимым от него.



Отклонению маятника соответствуют определенные начальные значения, которые при определенных условиях, определяют некоторые решения описывающие колебания маятника. Совокупность решений определяемые небольшими отклонениями маятника обозначим Ω_0 , а совокупность решений определяемые достаточно большими отклонениями обозначим Ω_p.

Если возьмем произвольные, нестационарные решения, из Ω_0 или Ω_p , то через некоторое время эти решения приближаются к одному из стационарных решений. Каждое из двух стационарных решений является в некотором смысле устойчивым.

Таково не вполне точно формулированное определение устойчивости решения.

Приведенный пример показывает, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на две области притяжения.

Если взять начальное значение в одной из областей, то решение (из Ω_0) будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение (из Ω_p) будет стремиться к периодическому решению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

Рассмотрим систему уравнений

$$x'_m = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

Систему (1) в векторной форме запишем в виде

$$x' = f(t, x) \qquad (2)$$

Систему (1), (2) будем считать определенным на бесконечном интервале времени $t_0 \le t < +\infty$.

Пусть $x = \varphi(t)$ решение системы (2) удовлетворяющее начальным условиям $t = t_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$ и определенное для всех $t > t_0$.

Пусть $x = \tilde{\varphi}(t)$ произвольное решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \tilde{\varphi}(t_0)$. Решения $x = \tilde{\varphi}(t)$ с начальными условиями $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \varphi(t_0)$ и определенные для любого $t > t_0$ обозначим $\Omega\,(t_0, \tilde{x}_0)$.

Определение 1. *Если для любого положительного числа ε, найдется такое положительное число δ, что при $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ имеем $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$, то решение $x = \varphi(t)$ называется устойчивым по Ляпунову.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (1)$$

нормальная автономная система и

$$x' = f(x) \qquad (2)$$

- ее векторная запись.

Относительно функций

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1,2, \dots, n. \qquad (3)$$

будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве $\mathcal{D}$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Это условие в дальнейшем гарантирует существование и единственность решений с заданными начальными условиями.

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(a_m - const)$ положение равновесия уравнения (2) и $x = \varphi(t)$ произвольное решение уравнения с начальным условием

$$t = t_0, x_0 = \varphi(t_0) \qquad (4)$$

и определенные для любого $t > t_0$.

Совокупность таких решений обозначим $\Omega(t_0, x_0)$.

Определение 2. *Если* $\varphi(t) \epsilon\, \Omega(t_0, x_0)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *, что при* $|x_0 - a| < \delta$ *имеем*

$|\varphi(t) - a| < \varepsilon$ *при всех* $t > t_0$*, то* a *называется положение равновесия, а уравнение (2) называется устойчивым по Ляпунову.*

Определение 3. *Если:*

1. Положение равновесия a *уравнения (2) устойчива по Ляпунову.*

2. Существует настолько малое положительное число δ_1, что при $|x_0 - a| < \delta_1$ имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t) - a| = 0,$$

то положение равновесия a уравнения (2) называется асимптотически устойчивым.

Пример уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение

$$x' = f(x) \tag{5}$$

Пусть $f(0) = 0$, т. е. $x = 0$ является положением равновесия. Устойчивость этого решения зависит от знака $f(x)$ при x, близких к нулю.

Предположим, что, когда x возрастая, переходит через нуль функция меняет свой знак с “+” на “−”.

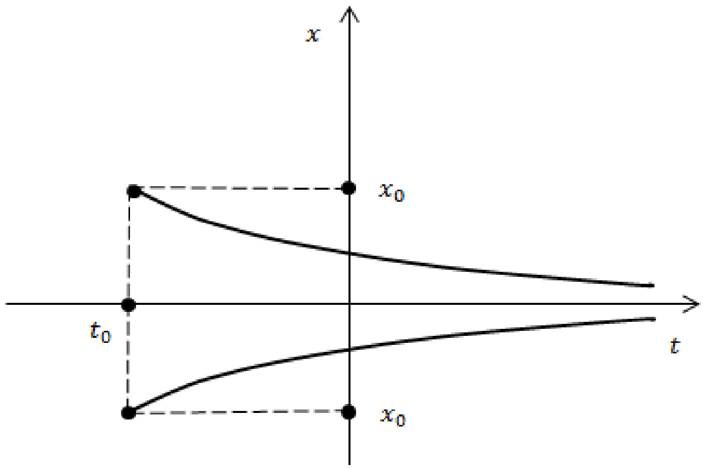
Пусть $x = \varphi(t)$ решение уравнения (5) с начальным условием $x_0 = \varphi(t_0)$ определенное для всех $t > t_0$. $x = \varphi(t)$ подставляя в (5) имеем тождество

$$\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right) \tag{6}$$

Если в (6) для всех $t > t_0$: $\varphi(t) < 0$, то $f\left(\varphi(t)\right) > 0$. Тогда $x = \varphi(t)$ возрастает при $t > t_0$.

Если для всех $t > t_0$: $\varphi(t) > 0$, то $f\left(\varphi(t)\right) < 0$ и решение $x = \varphi(t)$ убывает.

В обеих случаях решение $x = \varphi(t)$ достаточно близка к решению $x = 0$, если только начальные условия x_0 близки к нулю.



УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теперь сформулируем достаточные условия устойчивости положения равновесия для автономной линейной системы с постоянными коэффициентами.

Пусть рассматривается система

$$x' = Ax, \tag{7}$$

где $A = (a_{mk})$ $(m, k = 1, \dots, n)$ – постоянная матрица порядка n,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = \varphi(t)$ – решение системы (7) с начальными значениями

$$t = t_0,\ \varphi(t_0) = x_0.$$

Достаточное условие устойчивости: если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа α и r, что выполнено неравенство

$$|\varphi(t)| \le r|x_0|e^{-\alpha t},\ t \ge t_0 \tag{8}$$

Из неравенства (8) непосредственно следует, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (7) является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Из сформулированного предложения вытекает, что отрицательность действительных частей всех собственных значений матрицы A является достаточным условием устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$.

Пусть e_k – единичный координатный вектор номера k, т.е.

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

где 1 стоит на k – месте. Пусть $\varphi_k(t)$ – решение уравнения (7) с начальным значением

$$\varphi_k(t_0) = e_k, \; k = 1, \dots, n.$$

Тогда решение $x = \varphi(t)$ уравнения (7) с начальным значением $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ можно записать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k} \; \varphi_k(t).$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Пусть рассматривается система (1)

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \; m = 1, \dots, n, \tag{1}$$

определенная в множестве $\mathcal{D}$ переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – положение равновесия этой системы, $a \in \mathcal{D}$. Далее предполагается что правая часть (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Положим

$$x_m = a_m + \xi_m, \qquad m = 1, \dots, n$$

где ξ_m – новые неизвестные функции.

x_m подставляя в (1) и разлагая правые части в ряд Тейлора по переменным ξ_m, получаем:

$$\xi'_m = f_m(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_k} \cdot \xi_k + R_m, m = 1, \dots, n, \quad (1)^*$$

где R_m – член второго порядка малости относительно неизвестных ξ_m.

Так как, a – есть положение равновесия системы (1), то

$$f_m(a) = 0.$$

Полагая

$$a_{mk} = \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n}$$

систему $(1)^*$ можно записать в виде

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot \xi_k + R_m, \ m = 1, \dots, n \quad (1)^{**}$$

Справедлива следующая

Теорема (Ляпунова). *Если все собственные значения матрицы* $A = (a_{mk})$ *имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия* a *системы (1) асимптотически устойчиво; более того, существует настолько малое положительное число* δ, *что при* $|x_0 - a| < \delta$ *имеет место неравенство*

$$|\varphi(t) - a| \le r|x_0 - a|e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где $\varphi(t_0) = x_0$, r *и* α *– положительные числа, не зависящие от* x_0.

Не ограничивая общности, можно считать $a = 0$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью функций Ляпунова. Некоторые положительно определенные квадратичные формы называются функциями Ляпунова.

Определим квадратичную форму. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

переменный вектор n – мерного пространства.

Функция $W(x)$ определяемая формулой

$$W(x) = \sum_{m,k=1}^{n} w_{mk} \cdot x_m \cdot x_k,$$

где $w_{mk} = w_{km}$ – действительные числа; называется квадратичной формой от вектора x.

Если при $x \neq 0$ имеем:

$$W(x) > 0,$$

то квадратичная форма называется положительно определенной.

Для любой квадратичной формы имеет место неравенство

$$\mu|x|^2 \leq W(x) \leq \nu|x|^2, \qquad (9)$$

где μ, ν – некоторые положительные числа, x – произвольный вектор. Теперь рассматривая линейную однородную систему вида (7) (соответствующее системе $(1)^{**}$) можно построить положительно определенную квадратичную форму $W(x)$.

Решение уравнения (7) с начальными значениями t_0, x_0 обозначим $\varphi(t)$. Имеем

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{0k} \cdot \varphi_k(t) \qquad (10)$$

Теперь положим

$$W(x_0) = \int_{t_0}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \qquad (11)$$

Учитывая, (10) получим

$$W(x_0) = \sum_{m,k=1}^{n} x_{0m} \cdot x_{0k} \int_{t_0}^{\infty} \big(\varphi_k(\tau), \varphi_m(\tau)\big) d\tau. \qquad (12)$$

Так как, каждая функция $\varphi_k(t)$ удовлетворяет неравенству (8), то каждый несобственный интеграл в правой части (12), сходится. Следовательно, $W(x_0)$ квадратичная форма относительно вектора x_0 , причем положительно определенная согласно (11) при $x_0 \neq 0$.

Теперь вычислим производную $W'_{(7)}(x_0)$ функции $W(x_0)$ в силу системы (7). Предварительно заметим,что

$$\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big) = \varphi(\tau + t).$$

Тогда

$$W\big(\varphi(t)\big) = \int_0^{\infty} \left|\varphi\big(\tau, \varphi(t)\big)\right|^2 d\tau = \int_0^{\infty} |\varphi(\tau + t)|^2 d\tau =$$

$$= \int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau.$$

Таким образом

$$W'_{(7)}(x_0) = \frac{d}{dt} W\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t = t_0} = \frac{d}{dt}\int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau\Big|_{t = t_0} =$$

$$= |\varphi(t)|^2\Big|_{t = t_0} = -|x_0|^2$$

Итак,

$$W'_{(7)}(x_0) = -|x_0|^2.$$

Если учесть неравенство (9), то

$$-|x_0|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(x_0).$$

Следовательно

$$W'_{(7)}(x_0) \leq \frac{1}{\nu} W(x_0). \tag{13}$$

Пусть $W(x)$ – функция Ляпунова для линейной системы

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\xi_k,\ m = 1, \dots, n \tag{14}$$

получаемой из системы (1)** линеаризацией, т.е. отбрасыванием остаточных членов R_m . Вычислим производную $W'_{(1)**}(x)$ функции $W(x)$ в силу системы (1)**. Имеем

$$W'_{(1)**}(x) = \sum_{m,k=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot a_{mk} \cdot x_k + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m =$$

$$= W_{(14)}(x) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m.$$

Выберем теперь малое положительное число b, чтобы при

$$W(x) \leq b \tag{15}$$

вектор x принадлежал множеству $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Вторые производные $\frac{\partial^2 f_m(\theta x)}{\partial x_m \partial x_k}$, будучи непрерывными функциями, ограничены в эллипсоиде (15) и потому в этом эллипсоиде

$$|R_m| \leq n_0 |x|^2 \leq \frac{n_0}{\mu} W(x),$$

где n_0 – некоторая постоянная.

Так как, $\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}$ есть линейная форма относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$, то

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}\right| \leq l\sqrt{W(x)},$$

где l – некоторая постоянная. Таким образом, существует такое положительное число q, что при $W(x) \leq b$ имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m \leq q W(x)^{\frac{3}{2}}.$$

Выберем положительное число c таким образом, чтобы было

$$c \leq b,\ q\sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Тогда имеем:

$$W'_{(1)**}(x) \leq -\frac{\beta}{2} W(x),$$

при

$$W(x) \leq \text{c}. \qquad (16)$$

Полагая $\alpha = \frac{\beta}{4}$, получаем неравенство

$$W'_{(4)}(x) \leq -2\alpha W(x)$$

справедливое, если для x выполняется неравенство (16).

Пусть x_0 – внутренняя точка эллипсоида (16), т. е.

$$W(x_0) \leq c. \qquad (17)$$

Решение системы (4) с начальными значениями t_0, x_0 обозначим $\varphi(t, x_0)$ и положим

$$w(t) = \mathrm{W}\big(\varphi(t, x_0)\big).$$

Функция $w(t)$ определена для всех значений $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию

$$w'(t) \leq -2\alpha w(t) \qquad (18)$$

до тех пор, пока для нее выполнено неравенство

$$w(t) \leq c. \qquad (19)$$

Если $x_0 \neq 0$, то $w(t) > 0$, и мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (18)

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq -2\alpha;$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq -2\,\alpha(t - t_0);$$

$$ln w(t) - ln w(t_0) \leq -2\alpha(t - t_0).$$

Последнее неравенство дает:

$$W\big(\varphi(t, x_0)\big) \leq W(x_0) e^{-2\alpha(t-t_0)}.$$

Из этого неравенства, используя неравенство (9) получаем:

$$|\varphi(t, x_0)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu} |x_0|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0. \qquad (20)$$

Неравенство (19) верно, если для x_0 выполняется неравенство (16). Из (20), извлекая квадратный корень, получаем

$$|\varphi(t, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |x_0| e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Теорема доказана.

Положение равновесия a уравнения (1) будем называть вполне неустойчивым, если существует такое положительное число σ, что всякое решение $\varphi(t, x_0)$, уравнения (1), начинающееся в точке $x_0 \neq a$ шара $|x_0 - a| < \sigma$, обязательно покидает этот шар и больше в него уже не возвращается.

Если все собственные значения матрицы $A = (a_{mk})$ имеют положительные действительные части, то положение равновесия a уравнения (1) вполне неустойчива.