

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМ, ЖОГОРКУ
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИННОВАЦИЯЛАР
МИНИСТРЛИГИ

“Б.ОСМОНОВ АТЫНДАГЫ ЖАЛАЛ-АБАД
МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ”
ИЛИМИЙ-БИЛИМ БЕРҮҮ ӨНДҮРҮШТҮК КОМПЛЕКСИ

К.С.АЛЫБАЕВ, М.Н.НУРМАТОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Окуу колдонмо

*Манас
2026*

УДК 517.9
ББК 22.161.6
A59

Б.Осмонов атындагы ЖАМУнун Методикалык кеңешинин 2025-жылдын 18-декабрындагы жыйынында каралып колдонууга жана басмага сунушталды.

Рецензенттер:

Сопуев А.С. – физ.-мат. илим. доктору, профессор

Джураев А.М. – физ.-мат. илим. доктору, проф. м.а.

Алыбаев, К. С., Нурматова, М. Н.

A59 Дифференциалдык теңдемелер: Окуу колдонмо.

– Манас: 2026. – 116 б.

ISBN 978-9967-09-513-7

Дифференциалдык теңдемелер жаратылышта кездешүүчү кубулуштарды, тагыраак айтканда нерсенин абалынын өзгөрүшүн, ылдамдыгын, ылдамдануусун изилдөөдө колдонулат. Жогорку билим берүүдө физика-математикалык билим берүү багыты боюнча кесипкөй адистерди даярдоодо дифференциалдык теңдемелер атайын курс катары окутулат.

Бул окуу колдонмо аталган багыттын студенттерине, окутуучуларына сунушталат.

ISBN 978-9967-09-513-7

УДК 517.9
ББК 22.161.6

МАЗМУНУ

НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨР.....	6
ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	8
ГЕОМЕТРИЯЛЫК СҮРӨТТӨЛҮШ.....	9
КОШИ МАСЕЛЕСИ.....	14
ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕЧИМДИН ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖАНА ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ ТЕОРЕМА.....	16
ИНТЕГРАЛДООНУН ЭЛЕМЕНТАРДЫК МЕТОДДОРУ.....	26
ТОЛУК ДИФФЕРЕНЦИАЛДАГЫ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	26
ИНТЕГРАЛДООЧУ КӨБӨЙТҮҮЧҮ.....	31
СЫЗЫКТУУ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	33
ӨЗГӨРМӨЛӨРҮ БӨЛҮШТҮРҮЛҮҮЧҮ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	36
БИР ТЕКТҮҮ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	38
БИР ТЕКТҮҮГӨ КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ТЕНДЕМЕЛЕР..	42
БЕРНУЛЛИНИН ТЕНДЕМЕСИ.....	44
РИККАТИНИН ТЕНДЕМЕСИ.....	46
ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕНДЕМЕЛЕР.....	47
ПАРАМЕТРДИ КИЙИРҮҮ ЖОЛУ МЕНЕН ТУУНДУГА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ИНТЕГРАЛДОО.....	52

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ.....	57
НОРМАЛДУУ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ.....	64
ЧЕЧИМДЕРДИН ФУНДАМЕНТАЛДЫК СИСТЕМАСЫ.....	68
ВРОНСКИЙДИН АНЫКТАГЫЧЫ. ФУНДАМЕНТАЛДЫК МАТРИЦА.....	71
ЛИУВИЛЛДИН ФОРМУЛАСЫ.....	72
СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ.....	73
n – ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕ.....	75
ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР.....	77
БИР ТЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР.....	77
БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕ.....	82
ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ СИСТЕМАЛАР.....	87
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН АВТОНОМДУК СИСТЕМАСЫ.....	97
ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ТУЮК ТРАЕКТОРИЯЛАР.....	99
ФАЗАЛЫК МЕЙКИНДИК.....	101

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ФАЗАЛЫК ЫЛДАМДЫК.....	103
ТУРУКТУУЛУК.....	104
ЛЯПУНОВ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУКТУН АНЫКТАМАСЫ.....	106
ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛДЫН ТУРУКТУУЛУГУ.....	107
ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ СИСТЕМАНЫН ТЕҢ САЛМАКТУУ АБАЛЫНЫН ТУРУКТУУЛУГУ.....	109
БИРИНЧИ ЖАКЫНДАШУУ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУК.....	111

НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨР

Аныктама. Көз – каранды эмес өзгөрмөнү, белгисиз функцияны жана анын туундусун камтыган теңдемелер дифференциалдык деп аталат.

Теңдемеге көз – каранды эмес өзгөрмөнү жана белгисиз функциянын катышуусунун зарылдыгы жок, бирок туундунун катышуусу зарыл.

Туундунун эң жогорку тартиби **теңдеменин тартиби** деп аталат.

Аныктама. Эгер белгисиз функция бир өзгөрмөлүү болсо, анда кадимки дифференциалдык теңдеме деп аталат; көп өзгөрмөлүү болсо, анда теңдеме жекече туундудагы деп аталат.

Мисалдар: 1.1. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$,

$$1.2. \quad (x'(t))^2 - t \cdot x(t) = 0,$$

$$1.3. \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$

$$1.4. \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t),$$

$$1.5. \quad x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 1.$$

1.1-1.5 - мисалдарында $x(t)$ – белгисиз функция; t – көз-каранды эмес өзгөрмө.

$$2.1. \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x,y) = f(x,y),$$

$$2.2. \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$2.3. \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = a(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

$$2.4. \quad \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right]^2 - \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right]^2 + u(x,y) = 0,$$

$$2.5. \quad \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} = 0.$$

2.1.-2.5.-мисалдарында $u(x, y)$ – белгисиз функция, ал эми x, y – белгисиз өзгөрмө. 1.1.-1.5 теңдемелери – кадимки, ал эми 2.1.-2.5 теңдемелери жекече туундудагы теңдемелер.

1.2., 1.4., 2.1., 2.4. теңдемелери – биринчи тартиптеги; 1.3., 1.5., 2.2., 2.3. – экинчи тартиптеги; 2.5. – үчүнчү тартиптеги теңдемелер.

Аныктама. Дифференциалдык теңдеменин чечими деп, кандайдыр бир $(-\infty < t < +\infty)$ интервалында аныкталган жана тиешелүү тартиптеги туундуга ээ болгон каалаган функция аталат, аны теңдемеге койгондо теңдешикке айландырат.

Мисалдар:

1. $x(t) = \sin \omega t$ функциясы
 $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega - \text{const.}$

дифференциалдык теңдемесинин чечими болуп саналат.

$$x'(t) = \omega \cdot \cos \omega t, \quad x''(t) = -\omega^2 \cdot \sin \omega t$$

ээ болобуз. Табылган маанилерди теңдемеге коюп, теңдештикке ээ болобуз:

$$-\omega^2 \cdot \sin \omega t + \omega^2 \cdot \sin \omega t \equiv 0.$$

Дал ушундай эле жол менен

$$x(t) = \cos \omega t, \quad x(t) = C_1 \sin x(t) + C_2 \cos \omega t$$

(C_1, C_2 – каалагандай турактуулар) функциялары

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

теңдемесинин чечими болоору текшерилет.

2. $u(x, y) = x^2 - y^2$ функциясы

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

теңдемесинин чечими болот. Төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Табылган туундулардын маанилерин теңдемеге коюу менен

$$2 + (-2) \equiv 0$$

тендештигине ээ болобуз.

$u(x, y) = Cxy$ функциясы да (C – каалагандай турактуу) берилген теңдеменин чечими болуп саналат.

Бул учурда биз чечимдерди табуу маселеси, чечимдердин мүмкүн болгон саны жөнүндө маселени койбойбуз. Өз учурунда бул жана башка маселелерге жооптор алынат.

Биз мындан ары негизинен, бир гана кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын системасын карайбыз.

ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕНДЕМЕЛЕР

n – тартиптеги теңдемени жалпы түрдө төмөндөгүчө жазууга болот:

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (1)$$

$n = 1$ болгондо

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad (2)$$

биринчи тартиптеги теңдемеге ээ болобуз.

(2) теңдеме берилсин дейли.

F функциясы t, x, x' үч өзгөрмөдөн көз-каранды функция болуп эсептелет. Айрым учурларда (2) катыш x' өзгөрмөсүн t, x өзгөрмөлөрүнөн айкын эмес бир маанилүү функция катары аныктайт.

Бул учурда (2) теңдеме

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (3)$$

түрүндөгү теңдемеге тең күчтүү.

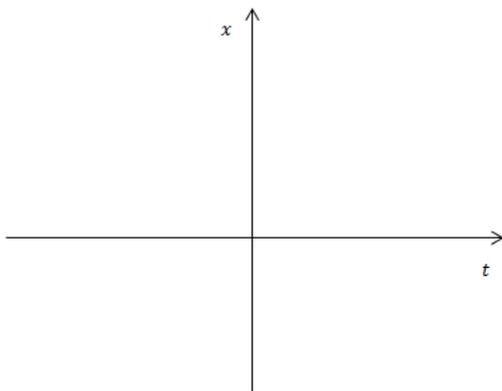
(3) дифференциалдык теңдеме туундусуна карата чечилген деп аталат.

(2) жалпы дифференциалдык теңдемеге караганда (3) теңдемени изилдөө жеткиликтүүрөөк.

(3) теңдемени изилдөөдө, биз (2) теңдемени $x'(t)$ туундусуна карата чечилген деп карабайбыз, $f(t, x)$ функциясын t, x эки өзгөрмөдөн көз-каранды функция катары берилди деп эсептейбиз.

ГЕОМЕТРИЯЛЫК СҮРӨТТӨЛҮШ

(3) теңдеме берилсин дейли. $R^2 = \{(t, x)\}$ (1-сүрөт) координаталык тегиздигин карайлы.



1-сүрөт.

(3) дифференциалдык теңдемесин аныктоочу $f(t, x)$ функциясы t жана x аргументтеринин бардык маанилери үчүн аныкталбашы мүмкүн, геометриялык тилде айтканда, R^2 тегиздигинин бардык чекиттери үчүн эмес, R^2 тегиздигинин кандайдыр бир \mathcal{D} көптүгүнүн айрым бир чекиттеринде аныкталышы мүмкүн. Мындан ары \mathcal{D} ны ачык көптүк деп эсептейли. Бул болсо, $A \in \mathcal{D}$ ар бир чекит менен

катар \mathcal{D} га A чекитинин кандайдыр бир чекебели (борбору A болгон тегерек) да кирет дегенди түшүндүрөт.

$f(t, x)$ \mathcal{D} да үзгүлтүксүз жана $r_1 < t < r_2$ үчүн аныкталган (3) теңдеменин чечими $x = \varphi(t)$ болсун дейли.

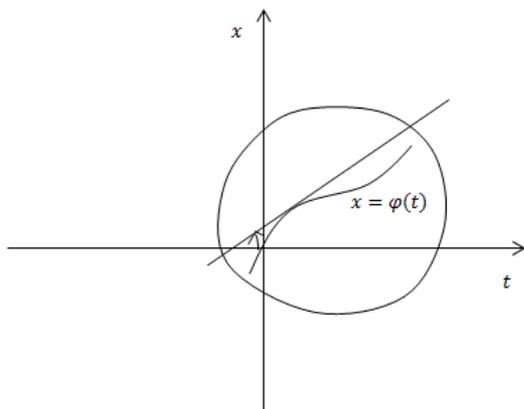
$x = \varphi(t)$ ны (3) теңдемеге коюп,

$$\varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t)) \quad (4)$$

тендештигине ээ болобуз.

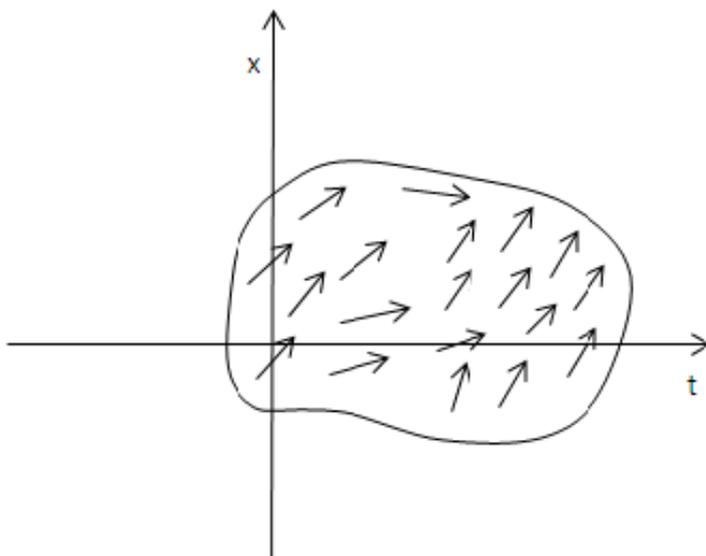
$\varphi(t)$ функциясынын графиги \mathcal{D} ачык көптүгүнөн толук бойдон өтөт. Эгер туундунун геометриялык маанисин эске салсак, анда ар бир чекитте график бурчтук коэффициенти $f(t, \varphi(t))$ га барабар болгон жанымага ээ болот (2-сүр).

$x = \varphi(t)$ функциясынын графиги (3) дифференциалдык теңдеменин интегралдык ийриси деп аталат.



2-сүрөт.

$f(t, x)$ функциясы \mathcal{D} да үзгүлтүксүз болгондуктан, \mathcal{D} көптүгүнүн каалаган чекити аркылуу бурчтук коэффициенти $f(t, x)$ ке барабар болгон түз сызык жүргүзүүгө болот (3-сүр).



3-сүрөт.

Ошентип, биз (3) теңдемеге туура келүүчү багыттардын талаасына ээ болдук.

Каалагандай $x = \varphi(t)$ интегралдык ийриси ар бир өзүнүн $(t, \varphi(t))$ чекитинде бурчтук коэффициенти $f(t, \varphi(t))$ болгон түз сызыкты жанып өтөөрүн (3) теңдеменин геометриялык сүрөттөлүшү менен анын чечимдеринин геометриялык сүрөттөлүшүнүн ортосундагы байланыш аныктайт.

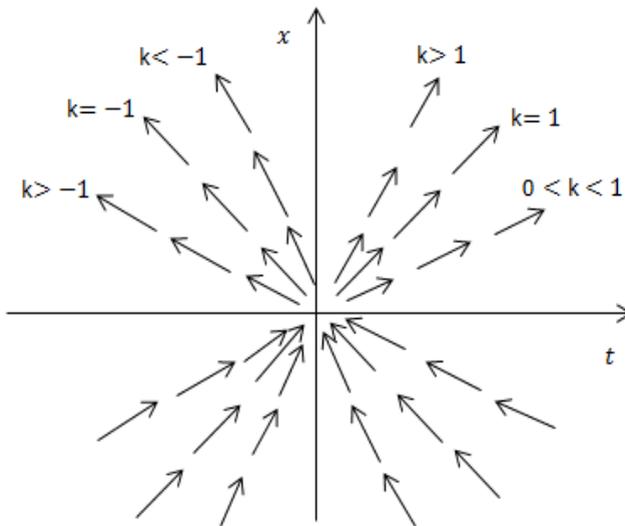
Берилген дифференциалдык теңдемеден аныкталуучу багыттардын талаасын өздөштүрүү менен бул теңдеменин интегралдык ийрилери жөнүндө айрым түшүнүктөрдү, айрым учурда интегралдык ийрилердин өзүн да алабыз.

Багыттардын талаасын өздөштүрүүдө, талаанын багыты бардык чекиттерде ошол эле болгон сызыктар өзгөчө кызыкчылык туудурат. Мындай сызыктар изоклиндер деп аталышат.

Мисалдар:

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ теңдемеси берилсин. Багыттардын талаасын изилдөө керек. Теңдеменин оң жак бөлүгү $t \neq 0$ үчүн аныкталган.

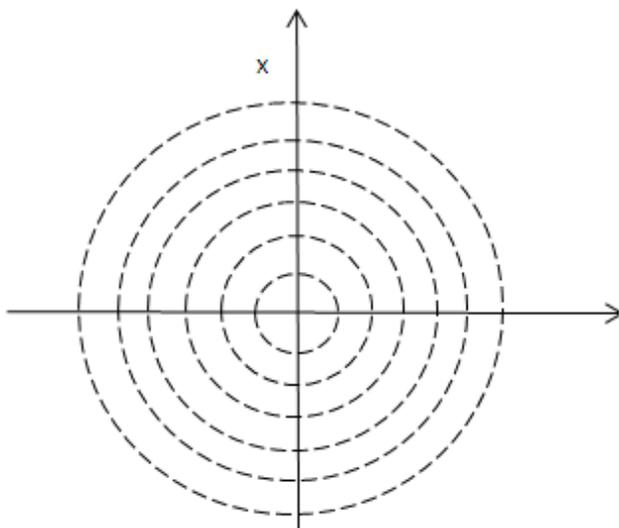
Мейли $\frac{x}{t} = k$ – турактуу болсун. $x = kt$ ээ болобуз. k нын түрдүү маанилери үчүн багыттардын талаасына ээ болобуз (4-сүр).



4-сүрөт.

2. $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$ теңдемесин карайлы.

$-\frac{t}{x} = k_1$ – const алалы. Мындан $x = -\frac{1}{k_1}t$.



5-сүрөт.

k (мурунку мисалдагы) менен k_1 ди салыштыралы.

$$k \cdot k_1 = -1,$$

натыйжада, k менен k_1 ден аныкталуучу жанымалар өз ара перпендикулярдуу.

$x' = -\frac{t}{x}$ теңдемесинин багыттар талаасы 5-сүрөттө сүрөттөлгөн. Багыттар талаасынын сүрөттөлүшү $x' = \frac{x}{t}$ дифференциалдык теңдеменин чечими $x = kt$ функциясы болоорун негиздейт. Чындыгында, $x' = k$ болсо, анда

$$k = \frac{kt}{t} = k.$$

$x' = -\frac{t}{x}$ дифференциалдык теңдемесинин чечими болуп, $x^2 + t^2 = c^2$ ($c \neq 0$ жана каалагандай турактуу) функциясы эсептелет.

Текшерүү: $x^2 = c^2 - t^2$, мындан $2xx' = -2t$, $x' = -\frac{t}{x}$.

КОШИ МАСЕЛЕСИ

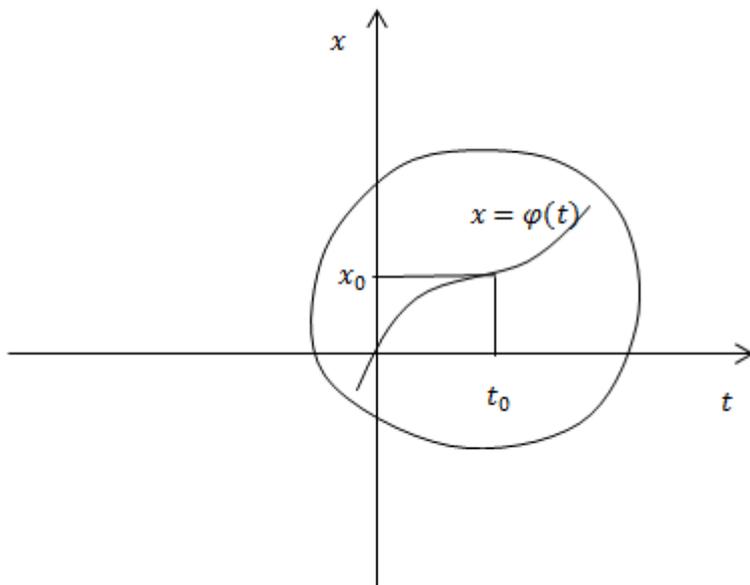
Теориялык жана колдонмо мүнөздөгү көптөгөн суроолордо (3) дифференциалдык теңдеменин бардык чечимдеринин арасында

$$x = \varphi(t) \quad (4)$$

$$t = t_0 \text{ болгондо } \varphi(t_0) = x_0 \quad (5)$$

(5) шартын канааттандыруучу (4) чечимди табуу талап кылынат, мында t_0 жана x_0 – берилген сандар, болгондо да $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$.

Геометриялык жактан, ал \mathcal{D} областынын (t_0, x_0) чекити аркылуу өтүүчү интегралдык ийри изделип жаткандыгын түшүндүрөт (6 - сүрөт).



6-сүрөт.

(5) шарт (4) чечимдин баштапкы шарты деп аталат, ал эми t_0, x_0 – баштапкы берилгендер.

Берилген (4) баштапкы шартты канааттандыруучу чечимди табуу маселеси Коши маселеси деп аталат.

Мисалдар:

1. $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ теңдемеси берилсин дейли.

$x(0) = 1$ шартын канааттандыруучу $x(t)$ чечимин табуу талап кылынсын.

$$x(t) = \arctgt + C$$

функциясы берилген теңдеменин чечими болоорун текшерүү кыйын эмес, C – каалагандай турактуу.

$t = 0$ деп эсептеп,

$$x(0) = \arctg0 + C = 1$$

же $C = 1$ ди табабыз.

Берилген баштапкы шартты канааттандыруучу чечим болуп

$$x(t) = \arctgt + 1$$

эсептелет.

$x(t) = \arctgt$ функциясы чечим боло алаарын баса белгилейли. Бул чечим берилген баштапкы шартты канааттандырбайт, б. а.

$$x(0) = \arctg0 = 0.$$

Каралып жаткан мисал чыгарылышта каалагандай турактуу сан болушу маанилүү экендигин көрсөтөт.

2. $x(0) = 1$ баштапкы шартын канааттандыруучу

$$x'(t) = 2t,$$

теңдемесинин чечими $x(t) = t^2 + 1$ болот. Бул $(0, 1)$ чекити аркылуу өткөн парабола.

**ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛГЕН БИРИНЧИ
ТАРТИПТЕГИ ТЕНДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕЧИМДИН
ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖАНА ЖАШАШЫ ЖӨНҮНДӨ
ТЕОРЕМА**

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

дифференциалдык теңдемеси берилсин дейли, мында t – көз-каранды эмес өзгөрмө; $x(t)$ – белгисиз функция; берилген $f(t, x)$ функциясы t, x өзгөрмөлөрүнүн \mathcal{D} ачык областында аныкталган.

Маселе. Эгер $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ болсо, анда

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (2)$$

шартын канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашайбы?

Коюлган маселени (1)-(2) маселеси деп атайлы.

Маселенин чечими төмөнкү теоремадан аныкталат:

Теорема 1. (чечимдин жашашы жана жалгыздыгы)

$f(t, x)$ функциясы жана анын $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу \mathcal{D} ачык көптүгүнүн баарында үзгүлтүксүз функциялар болушсун.

Анда: 1) \mathcal{D} көптүгүнүн каалагандай (t_0, x_0) чекити үчүн (2) шартты канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашайт;

2) эгерде (1) теңдеменин $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ чечимдери эч болбосо $t = t_0$ бир мааниси үчүн дал келсе, б.а., эгер

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0),$$

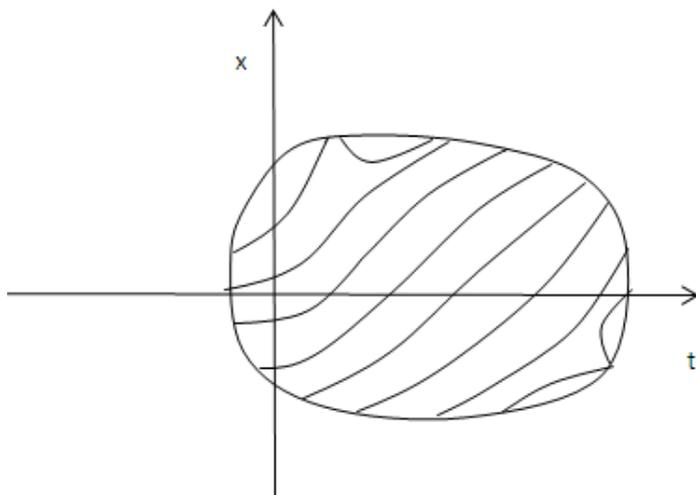
болсо, анда бардык аныкталган t өзгөрмөсүнүн экөө тең аныкталган маанилери үчүн теңдеш барабар болушат.

Теорема 1дин корутундулары боюнча айрым тактоолорду жүргүзөлү. $x = \varphi(t)$ чечими (2) баштапкы

шартты канааттандыргандыгы жөнүндө ырастоо $x = \varphi(t)$ чечими аныкталган $r_1 < t < r_2$ интервалы t_0 чекитин камтый тургандыгын негиздейт.

Андан ары теорема 1. \mathcal{D} көптүгүнүн каалагандай (t_0, x_0) чекитинин координатасы (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими үчүн баштапкы маанилер болуп саналаарын жана жалпы баштапкы маанилүү эки чечим дал келээрин ырастайт.

1-теореманын геометриялык мазмуну \mathcal{D} көптүгүнүн ар бир (t_0, x_0) чекити аркылуу (1) теңдеменин жалгыз гана интегралдык ийриси өтөөрүн түшүндүрөт (7-сүр.).



7-сүрөт.

Мисал карайлы.

$$x' = ax, \quad (3)$$

дифференциалдык теңдемени чыгаруу талап кылынсын дейли, a - чыныгы сан. Мында

$$f(t, x) = ax.$$

$f(t, x)$ функциясы x өзгөрүлмөсүнөн гана көз-каранды. $f(t, x)$ функциясы аныкталган көптүк R^2 тегиздигине толугу менен дал келет. $f(t, x) = ax$ функциясынын өзү жана анын $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ жекече туундусу R^2 тегиздигинде t жана x өзгөрмөлөрү боюнча үзгүлтүксүз функциялар болуп саналышат. Теорема 1дин бардык шарттары арткарылат.

Каалагандай $(t_0, x_0) \in R^2$ чекити үчүн $x_0 = \varphi(t_0)$ шартын канааттандыруучу $x = \varphi(t)$ чечими жашайт. (3) кө түздөн-түз ордуна коюу аркылуу

$$x(t) = Ce^{at} \quad (4)$$

функциясы (3) теңдеменин чечими экендиги текшерилет, мында C – каалагандай чыныгы сан.

(4) чечим $-\infty < t < +\infty$ түз сызыгында аныкталган.

(4) кө $t = t_0$ коюп, $x_0 = \varphi(t_0)$ шартын канааттандыруучу чечимди аныктайбыз.

Чындыгында $x(t_0) = Ce^{at_0}$ же $x_0 = Ce^{at_0}$.

Мындан $C = x_0 e^{-at_0}$ аныктайбыз. C нын маанисин (4) кө коюп,

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \quad (5)$$

ээ болобуз.

(5) чечим берилген баштапкы шартты канааттандырат.

R^2 тегиздигинен түрдүү (t_0, x_0) чекиттерди тандоо менен (4) дөн (3) теңдеменин түрдүү чечимдерин алабыз. Ошентип, (4) функция (3) теңдеменин жалпы чечими болуп саналат.

Берилген баштапкы шартты канааттандыруучу чечимди табуунун мындай жол-жобосу жалпы учур үчүн да сакталат.

Эгер (1) теңдеме берилсе жана биз кандайдыр бир ыкма менен C каалагандай турактууну камтыган жалпы чечимди таба алсак, башкача айтканда

$$x = \varphi(t, C). \quad (6)$$

(6)га $t = t_0, x = x_0$ маанилерин коюп, $C = C_0$ маанисин аныктайбыз. Анда баштапкы шартты канааттандыруучу $x(t) = \varphi(t, C_0)$ чечимине ээ болобуз.

Теорема 1ди далилдөө. 1. $x = \varphi(t) - r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсун дейли жана

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

Анда $\varphi(t)$ функциясы үчүн $r_1 < t < r_2$ интервалында

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau. \quad (7)$$

интегралдык теңдештик орун алат.

Тескерисинче, эгер $r_1 < t < r_2$ интервалында кандайдыр бир үзгүлтүксүз $\varphi(t)$ функциясы үчүн (7) теңдештик орун алса, анда $x = \varphi(t)$ функциясы дифференцирленүүчү болот, (1) теңдеменин чечими болот жана (2) баштапкы шартты канааттандырат.

Муну далилдейли.

(7) теңдештик орун алсын дейли. $t = t_0$ ду койсок, $\varphi(t_0) = x_0$ ээ болобуз. $f(\tau, \varphi(\tau))$ үзгүлтүксүз, анда (7)нин оң жак бөлүгү дифференцирленүүчү. (7) теңдештикти дифференцирлеп,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (8)$$

теңдештикке ээ болобуз.

(8) жана (2) теңдештиктер аткарылсын дейли.

(8)ди t_0 дон t га чейин интегралдап,

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$$

ээ болобуз. Мындан (7) ге ээ болобуз.

Далилденген сүйлөмдөн (1) жана (2) маселелердин чечимдеринин жашашын далилдөө үчүн (7) (интегралдык теңдеменин) теңдеменин чечиминин жашашын далилдөө жетиштүү экендиги келип чыгат.

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \quad (9)$$

t_0 чекитин өз ичине камтыган кандайдыр бир $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде аныкталган үзгүлтүксүз функциялардын удаалаштыгын түзөлү. (9) удаалаштыктагы ар бир функция мурунку аркылуу

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

барбардыгынын жардамында аныкталат.

Эгер $\varphi_k(t)$ функциясынын графиги \mathcal{D} көптүгүнөн өтсө, анда $\varphi_{k+1}(t)$ графиги да \mathcal{D} көптүгү аркылуу өтүүгө тийиштүү. Эмесе $\varphi_{k+2}(t)$ функциясын аныктоо мүмкүн эмес. буга кантип жетишүүгө болоорун көрсөтөлү.

Теорема 1дин шарты боюнча каалагандай $(t, x) \in \mathcal{D}$ үчүн $f(t, x)$, $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ функциялары үзгүлтүксүз, анда бардык $(t, x) \in \mathcal{D}$ үчүн

$$|f(t, x)| \leq C_1, \quad \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq C_2$$

барбарсыздыктары аткарылат, мында C_1, C_2 - кандайдыр бир оң сандар.

\mathcal{D} – ачык область, анда каалагандай $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ үчүн

$$|t - t_0| \leq r, \quad |x - x_0| \leq a$$

барбарсыздыктарынан аныкталуучу P_r тик бурчтук жашайт жана $P_r \subset \mathcal{D}$. $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде берилген жана графиги P_r тик бурчтугу аркылуу өткөн бардык үзгүлтүксүз функциялардын тобун Ω_r аркылуу белгилейли.

Ошентип, $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде аныкталган $\varphi(t)$ функциясы Ω_r тобуна таандык болот, качан гана ошол кесиндиге таандык каалагандай t үчүн

$$|\varphi(t) - x_0| \leq a \quad (11)$$

барабарсыздыгы орун алса.

(9) удаалаштыкка кайталы.

Кандай шарттарда $\varphi_k(t) \in \Omega_r$ болоорун аныктайлы.

$$\varphi_0(t) \equiv x_0 \in \Omega_r.$$

$$|\varphi_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r.$$

Эгер $C_1 \cdot r \leq a$ же $r \leq \frac{a}{C_1}$ болсо, анда $\varphi_1(t) \in \Omega_r$.

Андан ары

$$|\varphi_2(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$r \leq \frac{a}{C_1}. \quad (12)$$

Ошентип, (12) шарт аткарылганда $\varphi_k(t) \in \Omega_r$, $k = 0, 1, 2, \dots$ орун алат.

Эми $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде (9) удаалаштыктын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли. Бул маселени чечүү үчүн

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + \\ &+ (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

катарынын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейли.

Вейерштрасстын белгисинен пайдаланалы.

$$|\varphi_0| = |x_0|,$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| = \int_{t_0}^t |f(\tau, x_0)| d\tau \leq C_1 |t - t_0| \leq C_1 \cdot r \leq a,$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_2 - \varphi_1| &= \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau = \\
&= \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x} \right| |\varphi_1 - \varphi_0| d\tau \leq C_2 \cdot |t - t_0| \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \leq \\
&\leq C_2 \cdot |t - t_0| \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \leq C_2 \cdot r \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \leq \\
&\leq C_2 \cdot r \cdot a \\
|\varphi_2 - \varphi_1| &\leq C_2 \cdot r \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0|.
\end{aligned}$$

ээ болобуз.

Эгер $C_2 \cdot r < 1$ болсо, анда

$$r < \frac{1}{C_2}. \quad (14)$$

$C_2 \cdot r = q$ деп белгилейли.

$$\begin{aligned}
|\varphi_3 - \varphi_2| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)| d\tau \leq \int_{t_0}^t C_2 |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau \leq \\
&\leq C_2 \cdot q \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \times |t - t_0| \leq C_2 \cdot r \cdot q \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \\
&= \\
&= q^2 \cdot \max |\varphi_1 - \varphi_0| \leq q^2 \cdot a.
\end{aligned}$$

Процессти улантуу менен

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q^k a$$

алабыз. Натыйжада

$$\begin{aligned}
\left| \varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \right| &\leq |\varphi_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq \\
&\leq |\varphi_0| + a \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ орун алат.}
\end{aligned}$$

Сан катары жыйналат, анда $|t-t_0| < r$ ($r = \min\{\frac{1}{C_2}, \frac{a}{C_1}\}$) маанилери үчүн (9) функциялардын удаалаштыгы кандайдыр бир $\varphi(t)$ функциясына бир калыпта жыйналат. (10) да $k \rightarrow +\infty$ пределге өтсөк,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

орун алат.

Демек, (1) теңдеменин (2) баштапкы шартты канааттандырган чечиминин жашашы далилденди; ошону менен катар $x = \varphi(t)$ чечими $|t-t_0| < r$ интервалында аныкталаары негизделди, мында r – (12), (14) барабарсыздыктарды канааттандыруучу каалагандай сан.

Чечимдин жалгыздыгын далилдөөгө өтөлү.

$x = \varphi(t), x = \psi(t)$ (2) шартты, башкача айтканда

$$\varphi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = x_0$$

жана аныктаманын $r_1 < t < r_2$ жалпы интервалын канааттандыруучу (1) теңдеменин чечимдери болсун дейли.

Π_r тик бурчтугун карайлы. $\varphi(t), \psi(t)$ – (7) теңдеменин чечимдери болгондуктан, алар Ω_r тобуна таандык болушат.

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| \leq \\ &\leq C_2 \cdot |t - t_0| |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \\ &\leq C_2 \cdot r \times |\varphi(t) - \psi(t)| = q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|, \\ |\varphi(t) - \psi(t)| &< q \cdot |\varphi(t) - \psi(t)| \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Бул $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ шарты аткарылганда гана орун алат. Теорема далилденди.

ЭСКЕРТҮҮ

Теорема 1ди далилдөөдө колдонулган метод *удаалаш жакындаштыруу методу же Пикардын методу* деп аталат.

Теорема 1деги “ $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу \mathcal{D} ачык көптүгүндө үзгүлтүксүз функциялар болушсун” шартын “ x өзгөрмөсү боюнча функция Липшиц шартын канааттандырат”, б.а.

$$\forall(t, x_1) \text{ жана } \forall(t, x_2) |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

мында L - x_1 жана x_2 ден көз-каранды эмес кандайдыр бир турактуулар шартына алмаштырууга болот.

Теорема 1де формулировкаланган шарт Липшиц шартына салыштырмалуу күчтүүрөөк талап болуп саналат. Бул $\frac{\partial f}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундунун жашашы Липшиц шартынын аткарылышына кепилдик берээрин түшүндүрөт. Липшиц шартынан дайыма эле $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундунун үзгүлтүксүздүгү келип чыкпайт.

Чындыгында, $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу \mathcal{D} областында үзгүлтүксүз болсун дейли. Каалагандай $[x_1, x_2] \subset \mathcal{D}$ кесиндини алалы. $f(t, x)$ функциясына чектүү өсүндүлөр жөнүндө Лагранждын теоремасын колдонуп,

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial x} (x_1 - x_2), x_1 < \theta < x_2$$

ээ болобуз. $\frac{\partial f(t, \theta)}{\partial x}$ үзгүлтүксүз, анда $\left| \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial x} \right| \leq L$.

Ушуну эске алып,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

ээ болобуз.

Мисал.

$x'(t) = x(t)$ теңдемеси үчүн чечимди удаалаш жакындаштыруу методун колдонуп табабыз.

$t_0 = 0, x_0 = 1$ болсун дейли.

Интегралдык теңдеме

$$\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

түрүндө жазылат.

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$

функциялардын удаалаштыгын түзөлү.

$$\varphi_0(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(\tau) d\tau = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tau) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

.....

$$\varphi_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

.....

ээ болобуз.

Бул удаалаштыктын предели болуп, сан огунун каалаган кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу $\varphi(t) = e^t$ функциясы эсептелет.

ИНТЕГРАЛДООНУН ЭЛЕМЕНТАРДЫК МЕТОДДОРУ

Дифференциалдык теңдемелер менен иш алып барууда, биздин алдыбызда пайда болуучу негизги маселе болуп анын чечимдерин издөө маселеси эсептелет.

Алгач, бул маселени чечүү үчүн “дифференциалдык теңдемелерди квадратурада интегралдоого”, башкача айтканда чечимди элементардык функциялардын жана алардын интегралынын жардамында жазууга аракет жасашкан. Кийинчерээк мындай маанидеги чечимдер теңдемелердин айрым гана типтери үчүн гана жашагандыгы такталгандыктан, теориянын оордук борбору чечимдердин өзгөрүшүнүн жалпы закон-ченемдүүлүктөрүн үйрөнүүгө жылдырылган.

Биз мындан ары квадратурада интегралдоо методу аркылуу чечимдерди табууга болгон айрым дифференциалдык теңдемелердин классын карайбыз.

ТОЛУК ДИФФЕРЕНЦИАЛДАГЫ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \quad (1)$$

теңдемеси берилсин.

$f(t,x)$, $g(t,x)$ функциялары R^2 тегиздигинин кандайдыр бир \mathcal{D} ачык көптүгүндө t жана x өзгөрмөлөрү боюнча аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли, болгондо да $\forall (t,x) \in \mathcal{D} (g(t,x) \neq 0)$.

(1) теңдемени

$$g(t,x)dx - f(t,x)dt = 0 \quad (2)$$

$(x' = \frac{dx}{dt})$ түрүнө өзгөртүп түзөлү. (2) теңдеменин сол жак бөлүгүндөгү туюнтма \mathcal{D} көптүгүндөгү кандайдыр бир $F(t,x)$ функциясынын толук дифференциалын берет дейли. Бул каалаган $(t,x) \in \mathcal{D}$ үчүн

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -f(t,x) \quad (3)$$

туура келүүчүлүгү орун алаарын түшүндүрөт.

$x = \varphi(t) - r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган (1) дифференциалдык теңдеменин чечими болсун дейли. Анда

$$\varphi'(t) = \frac{f(t,\varphi(t))}{g(t,\varphi(t))}$$

ээ болобуз, мындан

$$g(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) - f(t,\varphi(t)) = 0$$

орун алат.

Бул барабардыктын сол жагы (3) нүн негизинде $F(t,\varphi(t))$ функциясынын t боюнча толук туундусун берет.

Анда $r_1 < t < r_2$ интервалында

$$\frac{dF(t,\varphi(t))}{dt} = 0$$

болот. Мындан

$$\forall t \in (r_1, r_2) (F(t,\varphi(t)) = C - const).$$

Биз (1) теңдеменин каалагандай $x = \varphi(t)$ чечими үчүн

$$F(t,\varphi(t)) = C$$

теңдештиги орун алаарын далилдедик.

Эми кандайдыр бир интервалда берилген жана

$$F(t,x) = C \quad (4)$$

теңдемесинен айкын эмес функция катары аныкталган ар бир $x = \varphi(t)$ функциясы (1) дифференциалдык теңдеменин чечими болуп саналаарын далилдейли.

(4) теңдештикти t боюнча дифференцирлеп (3)гө ылайык,

$$g(t,x) \cdot \varphi'(t) - f(t,\varphi(t)) = 0$$

ээ болобуз. Мындан $x = \varphi(t)$ (1) теңдеменин чечими болуп саналаары көрүнүп турат.

Далилденгенге төмөндөгүдөй геометриялык түшүндүрмө берүүгө болот: (1) дифференциалдык теңдеменин ар бир интегралдык ийриси бүтүн бойдон кандайдыр бир $F(t, x)$ функциясынын деңгээл сызыгында толук бойдон жайгашкан, башкача айтканда (4) теңдемеден аныкталат. Тескерисинче, (4) деңгээл сызыктын ар бир байланыштуу бөлүгү интегралдык ийрини берет.

$F(t, x)$ функциясынын деңгээл сызыктары бир нече бөлүктөрдөн турушу мүмкүн, анда бул учурда бүтүн деңгээл сызык бир интегралдык ийри болуп саналбайт, бир нече интегралдык ийрилерге ажырайт, башкача айтканда бир C турактуусу (4) айкын эмес теңдемеге ылайык, чексиз көп бир нече чечимдерди аныктайт.

(2) теңдеме берилсин дейли. Кандай шарттарда (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналат?

Коюлган суроого жооп берүү үчүн t, x өзгөрмөлөрү боюнча аныкталган жана үзгүлтүксүз жана \mathcal{D} да $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болгон $F(t, x)$ функциясы жашасын дейли.

$$dF(t, x) = g(t, x)dx - f(t, x)dt$$

орун алсын дейли. Анда

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dx = g(t, x)dx - f(t, x)dt$$

тендештигине ээ болобуз. Мындан

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -f(t, x), \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = g(t, x) \quad (5)$$

келип чыгат.

$g(t, x), f(t, x)$ функциялары \mathcal{D} да $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$ үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун дейли. Мындай шартта

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}.$$

Каалагандай $(t, x) \in \mathcal{D}$ үчүн \mathcal{D} областында $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}$ үзгүлтүксүз экендигинен

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}$$

келип чыгат.

Анда

$$-\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \quad (6)$$

(2) нин сол жак бөлүгү кандайдыр бир $F(t, x)$ функциясынын толук дифференциалы деп эсептеп, (6) шартты алабыз. (6) аткарылса, анда (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналаарын далилдөөгө болот.

Ошентип, (6) шарт (2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болушу үчүн зарыл жана жетиштүү шарт болуп саналат.

Эгер (5) шарт аткарылса, анда жалпы чечимди төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$-\int_{t_0}^t f(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^x g(t_0, \xi) d\xi = C \quad (7)$$

же

$$-\int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau + \int_{x_0}^x g(t, \xi) d\xi = C \quad (8)$$

(2) теңдеменин жалпы чечимин башка ыкма менен табууга болот. $F(t, x)$ функциясы (5) шартты канааттандырсын дейли. Биринчи теңдемени t боюнча интегралдап

$$F(t, x) = -\int f(t, x) dt + \varphi(x), \quad (9)$$

ээ болобуз, мында $\varphi(x)$ функциясы x тен көз-каранды каалагандай функция.

$\varphi(x)$ функциясын (9) функция экинчи теңдеменин чечими болгондой тандап алалы. (9) ду x боюнча дифференцирлеп жана $\frac{\partial F}{\partial x} = g(t, x)$ деп

$$\varphi'(x) = v(x)$$

ээ болобуз. Мында $v(x)$ – кандайдыр бир x тен көз-каранды функция.

Бул теңдемени интегралдап,

$$\varphi(x) = \int v(x)dx$$

алабыз. Эми (2) теңдеменин жалпы чечимин төмөндөгүчө жазууга болот:

$$\int f(t, x)dt + \int v(x)dx = C.$$

Аналогиялуу түрдө $\frac{\partial F}{\partial t} = -f(t, x)$ теңдемесинен

$$\int g(t, x)dx + \int v_1(t)dt = C$$

алабыз.

Мисалдар: 1. $t dt + x dx = 0$

(6) шартты текшеребиз:

$$f(t, x) = -t, \quad g(t, x) = x. \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Демек берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме.

Теңдемени

$$\frac{1}{2}(d(t^2) + d(x^2)) = 0$$

түргө өзгөртүп түзүүгө болот. Бул барабардыкты интегралдап, $\frac{1}{2}(t^2 + x^2) = C$ ээ болобуз. Бул жалпы чечим.

Чечимди (7) же (8) формула боюнча алууга болот.

$$\int_{t_0}^t \tau d\tau + \int_{x_0}^x \xi d\xi = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = C \text{ алабыз.}$$

Мындан

$$\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\xi^2 = C_1 \equiv C + \frac{1}{2}(t_0^2 + x_0^2).$$

ИНТЕГРАЛДООЧУ КӨБӨЙТҮҮЧҮ

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0. \quad (1)$$

теңдемеси берилсин дейли. (1) толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналбайт.

Аныктама. Эгерде (1) теңдеменин эки жак бөлүгүнө тең $\mu(t, x)$ функциясын көбөйткөндөн кийин толук дифференциалдагы

$$\mu M dt + \mu N dx = 0 \quad (2)$$

теңдемеге ээ боло тургандай, $\mu(t, x)$ функциясы жашаса, анда μ функциясы интегралдоочу көбөйтүүчү деп аталат.

(2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болгондуктан, $\mu(t, x)$ функциясынын үзгүлтүксүз дифференцирленүүлүгүн эске алып, $\mu(t, x)$ функциясын аныктоо үчүн төмөндөгү теңдемени алууга болот:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

же

$$N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial M}{\partial x} - \mu \frac{\partial N}{\partial t} \quad (3)$$

Мисал.

$$(1 - t^2 x)dt + t^2(x - t)dx = 0$$

берилсин дейли.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2, \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - t^2$$

$$M(t, x) = 1 - t^2 x, N(t, x) = t^2(x - t).$$

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ шарты орун албайт, демек, берилген теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болуп саналбайт.

$\mu(t, x)$ интегралдоочу көбөйтүүчүсү жашайбы?

$\mu(t, x)$ интегралдык көбөйтүүчүсү t дан гана көз-каранды болсун дейли.

Анда (3) дөн

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x-t)} = \frac{2t(t-x)}{t^2(x-t)} = -\frac{2}{t},$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{t}$$

ээ болобуз. Мындан

$$\ln \mu = -2 \ln t, \mu = \frac{1}{t^2}$$

келип чыгат. Эми берилген теңдеменин эки жагын тең $\frac{1}{t^2}$ ка көбөйтүп,

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right) dt + (x - t) dx = 0,$$
$$\frac{\partial \left(\frac{1}{t^2} - x\right)}{\partial x} = -1, \frac{\partial (x - t)}{\partial t} = -1$$

ээ болобуз.

Толук дифференциалдагы теңдемеге ээ болдук. μ функциясы x тен гана көз-каранды болушу мүмкүн.

СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \quad (1)$$

теңдемеси биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеме деп аталат, мында $x(t)$ – белгисиз функция, $a(t), b(t)$ – берилген функциялар.

(1) теңдемени чыгаруу маселесин коёлу. $a(t), b(t)$ функциялары кандайдыр бир $r_1 < t < r_2$ интервалында үзгүлтүксүз болсун дейли. (1) теңдеменин оң жак бөлүгү үчүн 1-теореманын бардык шарттары аткарылат. t_0 чекити $r_1 < t < r_2$ интервалынын кандайдыр бир чекити болсун дейли.

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$$

болсун дейли.

Теңдеменин бардык чечимдеринин жыйындысы

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(t)} \quad (2)$$

формуласынын жардамында жазылаарын далилдейли, мында x_0 - каалагандай турактуу. (2) функция (1) нин чечими болуп саналат. Бул түздөн-түз ордуна коюу аркылуу текшерилет. (2) формула (1) теңдеменин бардык чечимдерин камтый тургандыгын далилдейли.

$\varphi(t)$ – $r_1 \leq s_1 < t < s_2 \leq r_2$ интервалында аныкталган (1) чечими болсун дейли.

τ_0, ξ_0 – маанилери $x = \varphi(t)$ чечиминин баштапкы маанилери болсун дейли. (2) формуладан аныкталган чечим өзүнүн τ_0, ξ_0 маанилерине ээ болгондой, башкача айтканда

$$\varphi(\tau_0) = \xi_0 = \left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(\tau_0)}. \quad (3)$$

x_0 санын тандоого болоорун далилдейли.

Эгерде (3) туура болсо, анда (3) дөн x_0 дун бир маанилүү мааниси аныкталат:

$$x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} (A(\tau_0) \neq 0),$$

$$x_0 = \xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau.$$

Табылган x_0 ду (2) ге коюп, ($x = \varphi(t)$) ээ болобуз.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \\ &= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} - \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(t)} = \\ &= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(t)}. \\ \varphi(t) &= \left(\xi_0 e^{-A(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau \right) e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Мындан, эгер $t = \tau_0$ болсо, $\varphi(\tau_0) = \xi_0$ алабыз.

Же

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}} + \int_{\tau_0}^t b(\tau) e^{\frac{t^2 - \tau_0^2}{2}} d\tau.$$

Мисал.

Төмөнкү теңдеме берилсин:

$$x'(t) = t \cdot x(t) + \sin t.$$

Теңдеменин жалпы чечимин (2) формула боюнча табабыз.

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{\tau_0}^t b(\tau) e^{\frac{-\tau^2 + t_0^2}{2}} d\tau \right) e^{\frac{t^2 - t_0^2}{2}}.$$

(1) теңдеменин чечимин башка ыкма менен тапсак болот.

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (4)$$

теңдемесин карайлы.

(1) теңдеме бир тектүү эмес теңдеме, ал эми (4) теңдеме (1) теңдеменин бир тектүү теңдемеси деп аталат.

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

деп алып, теңдемени төмөнкүчө түрдө жазып алабыз:

$$\frac{dy}{y} = a(t)dt \quad (5)$$

(5)ни интегралдап,

$$\ln|y| = \int a(t)dt + C_1 = A(t) + C_1$$

же

$$y = e^{A(t)+C_1} = Ce^{A(t)} \quad (6)$$

ээ болобуз.

(6)да C ны t дан функция деп эсептеп, (1) бир тектүү эмес теңдеменин чечимин алабыз.

$$\varphi(t) = C(t)e^{A(t)} \quad (7)$$

болсун дейли.

(7) ни (1) ге коюп,

$$\varphi'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)} = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

же $C'(t)e^{A(t)} = b(t)$ ээ болобуз.

Мындан

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)},$$

$$C(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt = x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau$$

табабыз, мында x_0 – интегралдоонун турактуусу.

(1) нин жалпы чечими

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau \right) e^{A(t)}$$

формуласынан аныкталат.

Колдонулган метод турактууларды вариациялоо методу деп аталат.

ӨЗГӨРМӨЛӨРҮ БӨЛҮШТҮРҮЛҮҮЧҮ ТЕНДЕМЕЛЕР

$$x'(t) = f(t)g(x) \quad (1)$$

түрүндөгү теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме деп аталат.

$f(t)$ функциясы $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз, ал эми $g(x)$ функциясы $q_1 < t < q_2$ интервалында нөлгө айланбаган, аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли.

(1) теңдемени

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)dt = 0 \quad (2)$$

түрүндө жазып алууга болот.

(2) теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме. $F(t, x)$ функциясы

$$F(t, x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

формуласы аркылуу берилет.

(1) теңдеменин бардык чечимдери айкын эмес функция катары

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = C \quad (3)$$

туура келүүчүлүгүнөн алынат.

Мисалдар.

1. $x' = -\frac{t}{x}$. Бул теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме

$$x dx = -t dt$$

(3) гө ылайык, жалпы чечим төмөндөгүчө аныкталат:

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} = - \int_{t_0}^t \tau d\tau,$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2),$$

$$x^2 + t^2 = x_0^2 + t_0^2 \equiv C^2,$$

$$x^2 + t^2 = C^2.$$

2. $x \cdot x' = -t^3.$

Берилген теңдеменин жалпы чечими айкын эмес функция катары туюнтулат.

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}t^4 = C.$$

3. $x' = -\frac{2x}{t}$

Жалпы чечим төмөндөгүчө аныкталат:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{t},$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2}{t} dt,$$

$$\ln x = -2 \ln t + C,$$

$$\ln x + \ln t^2 = C,$$

$$\frac{x}{t^2} = e^C.$$

БИР ТЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$f(t, x)$ функциясы каралсын дейли.

Эгер

$$f(kt, kx) = k^m f(t, x)$$

теңдештик орун алса, анда $f(t, x)$ функциясы m – даражадагы бир тектүү функция деп аталат.

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0. \quad (1)$$

теңдемеси берилсин дейли.

Эгер (1) де $M(t, x), N(t, x)$ функциялары бирдей тартиптеги бир тектүү функциялар болушса, анда (1) теңдеме бир тектүү деп аталат.

(1)де $M(t, x), N(t, x)$ функциялары переменных t жана x өзгөрмөлөрү боюнча кандайдыр бир \mathcal{D} ачык областында, болгондо да $\forall (t, x) \in \mathcal{D} (N(t, x) \neq 0)$ аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун дейли.

Мындай шарттарда (1) теңдемени төмөндөгүчө туюнтууга болот:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right). \quad (2)$$

Чындыгында, $M(t, x), N(t, x)$ функцияларын

$$M(t, x) = M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right),$$

$$N(t, x) = N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right).$$

түрүндө жазып алабыз. $M(t, x), N(t, x)$ функцияларынын бир тектүүлүгүн эске алып,

$$M\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m M\left(1, \frac{x}{t}\right),$$

$$N\left(t \cdot 1, t \cdot \frac{x}{t}\right) = t^m N\left(1, \frac{x}{t}\right).$$

ээ болобуз.

Анда

$$\frac{M(t,x)}{N(t,x)} = \frac{M\left(1, \frac{x}{t}\right)}{N\left(1, \frac{x}{t}\right)}.$$

(1) теңдемеден

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M\left(1, \frac{x}{t}\right)}{N\left(1, \frac{x}{t}\right)} \quad (3)$$

алабыз. (3) теңдеменин оң жак бөлүгү t жана x өзгөрмөлөрүнүн катышынан гана көз-каранды.

$$h\left(\frac{x}{t}\right) \equiv -\frac{M\left(1, \frac{x}{t}\right)}{N\left(1, \frac{x}{t}\right)}$$

белгилөөсүн кийирип, (3) нү (2) түрүндө жазып алабыз.

(2) теңдеменин чыгарылышына токтололу. Жаңы белгисиз функцияны кийиребиз

$$u(t) = \frac{x(t)}{t}.$$

$x = t \cdot u$ ээ болобуз. $x' = u + t \cdot u'$ табабыз. x тин ордуна $u + t \cdot u'$ туюнтмасын коюп, (2) ден

$$u + t \cdot u' = h(u)$$

же

$$t \cdot u' = h(u) - u \quad (4)$$

ээ болобуз. (4) теңдеме өзгөрмөлөрү бөлүштүрүлүүчү теңдеме. (4) дөн

$$\frac{du}{h(u)-u} = \frac{dt}{t} \quad (5)$$

ээ болобуз. (5) ни интегралдап,

$$\int_{u_0}^u \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi} = \ln|t| + C$$

айкын эмес формадагы жалпы чечимге ээ болобуз.

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{h(\xi) - \xi}$$

белгилөөсүн кийиребиз. Анда, (2) теңдеменин жалпы чечими

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \ln|t| = C$$

түрүндө жазылат.

Мисалдар.

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}.$$

$x = t \cdot u$ белгилөөсүн кийирип, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$ табабыз.

Табылган маанилерди берилген теңдемеге коюп

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = 1 + u \text{ или } \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

ээ болобуз. Алынган теңдемени интегралдап,

$$\int_{u_0}^u d\xi = \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} d\tau, u - u_0 = \ln|t| - \ln|t_0|,$$

$$u = \ln|t| + C,$$

алабыз, мында $C = u_0 - \ln|t_0|$ – каалагандай турактуу.

$u = \frac{x}{t}$ болгондуктан, анда

$$x = t \cdot (\ln|t| + C).$$

$$2. \quad t(t + 2x)dt + (t^2 - x^2)dx = 0$$

Берилген теңдемени

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t+2x)}{x^2-t^2}$$

түрүндө туюнтабыз. Мындан

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+2\frac{x}{t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^2-1}$$

келип чыгат. $\frac{x}{t} = u$ деп, $x = t \cdot u$, $\frac{dx}{dt} = u + t \cdot \frac{du}{dt}$ ээ болобуз.

Анда

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1}$$

же

$$t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1+2u}{u^2-1} - u = \frac{1+3u-u^3}{u^2-1},$$

$$\frac{(u^2-1)du}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

Теңдеменин сол жак бөлүгүн төмөнкүчө туюнтабыз:

$$-\frac{1}{3} \frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = \frac{1}{t}$$

же

$$\frac{d(1+3u-u^3)}{1+3u-u^3} = -\frac{3}{t}$$

Акыркы теңдемени интегралдап,

$$\ln|1 + 3u - u^3| = -3\ln|t| + C$$

ээ болобуз. Мындан

$$(1 + 3u - u^3) \cdot t^3 = e^C \equiv C_0.$$

u нун ордуна $u = \frac{x}{t}$ коюп,

$$\left(1 + 3\frac{x}{t} - \frac{x^3}{t^3}\right) \cdot t^3 = C_0,$$

$$t^3 + 3xt^2 - x^3 = C_0$$

ээ болобуз.

$$3. \quad (t^2 - x^2)dt + 2txdx = 0.$$

Бул теңдемени чыгаруу үчүн төмөнкүчө туюнтабыз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t^2}{2tx}.$$

$x = t \cdot u$ жаңы функцияны кийирип,

$$u + t \cdot \frac{du}{dt} = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Мындан

$$t \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{u^2+1}{2u}$$

же

$$\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}, \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\frac{dt}{t}$$

Акыркы теңдемени интегралдайбыз:

$$\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = -\int \frac{dt}{t}, \ln(u^2+1) + \ln|t| = C,$$

$$(u^2+1)t = C, \frac{x^2+t^2}{t} = C.$$

БИР ТЕКТҮҮГӨ КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ТЕНДЕМЕЛЕР

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right) \quad (1)$$

түрүндөгү теңдемени карайлы.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

болсун дейли. Анда

$$t = \xi + \alpha, \quad x = \eta + \beta,$$

жаңы өзгөрмөнү кийирип, мында ξ, η – жаңы өзгөрмөлөр;
 α, β – кандайдыр бир турактуу сандар, (1) теңдемени у

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta}{a_2 \xi + b_2 \eta}\right) \quad (2)$$

түрүнө келтиребиз. (2) теңдеме бир тектүү.

α, β сандары

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0, \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

туура келүүчүлүктөрүнөн аныкталат.

Эгер

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

анда (1)

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{k(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right). \quad (4)$$

түрүнө ээ болот.

Чындыгында, (3) туура келүүчүлүктөн $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ же $a_1 = \frac{b_1}{b_2}a_2$ алабыз. a_1 маанисин (1) ге коюп,

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}a_2t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) = f\left(\frac{\frac{b_1}{b_2}(a_2t+b_2x)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$$

ээ болобуз.

$\frac{b_1}{b_2} = k$ белгилөөсүн кийирип, (4) гө ээ болобуз..

Эгер (4) теңдемеде $a_2t + b_2x = y$ жаңы белгисиз функцияны кийирсек, анда (4) төмөндөгүдөй түргө келет:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2} f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right). \quad (5)$$

(5) теңдеме көз-каранды эмес өзгөрмөнү камтыбайт.

$$g(y) \equiv \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_2} f\left(\frac{ky+c_1}{y+c_2}\right)$$

белгилөөсүн кийирсек, (5) теңдемени

$$\frac{dy}{g(y)} = dt$$

түрүндө жазабыз ($g(y) \neq 0$ шарты үчүн).

Бул теңдемени интегралдап,

$$\int \frac{dy}{g(y)} = t + C$$

алабыз.

Эгер $\frac{1}{g(y)}$ ти $q_1 < y < q_2$ интервалында үзгүлтүксүз функция десек, анда чечим

$$G(y) = t + C$$

түрүндө туюнтулат.

БЕРНУЛЛИНИН ТЕНДЕМЕСИ

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^n(t) \quad (1)$$

түрүндөгү теңдеме Бернуллинин теңдемеси деп аталат.

(1)де берилген $a(t)$, $b(t)$ функциялары $r_1 < y < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз функциялар. $n - 0$ жана 1 ден айырмаланган чыныгы сандар. $n = 0$ жана $n = 1$ болгон учурда (1) теңдеме сызыктуу теңдемеге айланат.

(1) теңдемени сызыктуу теңдемеге келтиребиз. Ал үчүн (1) теңдеменин эки жагын тең $x^n(t)$ га бөлөбүз. (1) теңдеме дайыма $n > 0$ үчүн $x(t) \equiv 0$ болгондо үчилтик чечимге ээ болот. Биздин милдет – үчилтик эмес чечимдерди табууда турат, б.а. $x(t) \not\equiv 0$.

Бөлүүдөн кийин

$$x^{-n}x'(t) = a(t)x^{-n+1}(t) + b(t) \quad (2)$$

алабыз. (2) де жаңы белгисиз функцияны кийиребиз:

$$y(t) = x^{-n+1}(t).$$

Анда

$$\frac{1}{1-n}y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

ээ болобуз. $y(t)$ функциясына карата сызыктуу теңдемени алдык.

Мисалдар.

1. $x' = 2tx + 3t^3x^2$ теңдемеси берилсин дейли.

Бул Бернуллинин теңдемеси жана $n = 2$. Теңдеменин эки жагын тең x^2 ка бөлсөк,

$$x^{-2}x' = 2tx^{-1} + 3t^3$$

ээ болобуз. $y = x^{-1}$ деп

$$y' = -2ty - 3t^3$$

сызыктуу теңдемеге ээ болобуз. Бул теңдеменин чечими

$$y = Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1 - t^2)$$

түрүнө ээ. Мындан $y = x^{-1}$ эске алып, берилген теңдеменин жалпы чечимин табабыз.

$$x(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + \frac{3}{2}(1-t^2)}.$$

2. $x' + \frac{t}{1-t^2}x = t\sqrt{x}$ теңдемесин карайлы.

Эки жагын тең \sqrt{x} ке бөлөбүз:

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} + \frac{t}{1-t^2}\sqrt{x} = t.$$

$\sqrt{x} = y$ белгилөөсүнөн

$$y' + \frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2}y = \frac{1}{2}t$$

ээ болобуз.

Бул сызыктуу теңдемени интегралдап

$$y = C\sqrt[4]{1-t^2} - \frac{1}{3}(1-t^2)$$

табабыз.

Натыйжада, берилген теңдеменин жалпы чечими:

$$\sqrt{x} = C\sqrt[4]{1-t^2} - \frac{1}{3}(1-t^2).$$

РИККАТИНИН ТЕНДЕМЕСИ

$$x'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \quad (1)$$

түрүндөгү теңдеме Риккатинин теңдемеси деп аталат.

$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ функцияларга карата $r_1 < y < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун деп аламы.

Мындай ырастоого ылайык

$$D = \{(t, x), r_1 < y < r_2, |x| < +\infty\}$$

тилкесинде теорема 1дин бардык шарттары аткарылат жана каалаган $(t_0, y_0) \in D$ чекити аркылуу (1) теңдеменин жалгыз интегралдык ийриси өтөт.

Риккатинин теңдемеси өзгөчө учурларда гана квадратурада интегралданат.

Эгер Риккатинин теңдемесинин жалгыз x_1 жекече чечими белгилүү болсо, анда

$$x = x_1 + \frac{1}{y}, \quad (2)$$

ордуна коюусу бул теңдемени Бернуллинин теңдемесине келтирет, мында y – жаңы белгисиз функция.

Чынында эле, (2) ни (1) ге коюп,

$$\begin{aligned} x_1' - \frac{1}{y^2} \cdot y' &= a(t)x_1 + b(t)x_1^2 + c(t) + \frac{a(t)}{y} + \\ &+ 2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

ээ болобуз. x_1 – (1) теңдеменин чечими экендигин эске алсак,

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' = \frac{a(t)}{y} + 2b(t)x_1 \cdot \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2}$$

же

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = (a(t) + 2b(t)x_1) \frac{1}{y} + b(t) \cdot \frac{1}{y^2} \text{ орун алат.}$$

Эгер $\frac{1}{y} = z$ белгилесек, анда

$$z' = (a(t) + 2b(t)x_1)z + b(t) \cdot z^2 \quad (3)$$

Бернуллинин теңдемеси б.с.

$$x' = ax^2 + \frac{b}{t}x + \frac{c}{t^2}, \quad (4)$$

түрүндөгү Риккатинин теңдемеси (мында a, b, c – турактуу сандар, болгондо да $(b + 1)^2 \geq 4ac$)

$$x_1 = \frac{a_1}{t}, \quad (5)$$

түрүндөгү жекече чечимге ээ боло тургандыгын текшерүү кыйын эмес, мында a_1 – (5) ни (4) гө коюудан аныкталган кандайдыр бир турактуу.

ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР

Туундусуна карата чечилбеген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме

$$F(t, x, x') = 0 \quad (1)$$

түрүнө ээ. $F(t, x, x')$ үч өзгөрмөлүү функция болуп саналат. (1) туура келүүчүлүк айрым учурда x' өзгөрмөсүн t жана x өзгөрмөлөрүнүн айкын эмес функциясы катары аныктайт.

Эгер бул теңдемени x' ке карата чечүүгө мүмкүн болсо, анда

$$x' = f_k(t, x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

бир же бир нече теңдемелерди алабыз.

(1) теңдеменин чечиминин жашашы анын x' ке карата чечилүү мүмкүнчүлүгүнө жана (2) теңдеменин чечиминин жашашына байланыштуу. (1) теңдеменин чечилишинин

жетиштүү шарты айкын эмес функциянын жашашынын жана анын туундусу менен үзгүлтүксүздүк шартынан аныкталат.

Кийинки теорема орун алат.

Теорема 2. (чечимдин жашашы жана жалгыздыгы)

Эгер борбору (t_0, x_0, x'_0) чекити болгон \mathcal{D}_3 туюк үч өлчөмдүү тик бурчтугунда төмөнкүдөй шарттар аткарылса, мында $x'_0 - F(t_0, x_0, x'_0) = 0$ теңдемесинин чыныгы тамыры:

1) $F(t, x, x')$ функциясы $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x'}$ жекече туундулары менен аргументтердин жыйындысы боюнча үзгүлтүксүз;

2) $\frac{\partial F}{\partial x'}(t_0, x_0, x'_0) \neq 0$, анда $t = t_0$ чекитинин чекебелинде

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0 \quad (3)$$

шартын канааттандыруучу (1) теңдеменин $x = x(t)$ чечими жашайт.

Далилдөө. Теореманын 1), 2) шарттарына ылайык, (t_0, x_0, x'_0) чекитинин чекебелинде

$$x'(t_0) = x'_0 = f(t_0, x_0) \quad (4)$$

баштапкы шартты канааттандырган

$$x' = f(t, x) \quad (5)$$

айкын эмес функциясынын жашашынын жана жалгыздыгынын шарты аткарылсын дейли. Ошону менен бирге $f(t, x)$ функциясы $\frac{\partial f}{\partial x}$ жекече туундусу менен үзгүлтүксүз боло тургандай, борбору (t_0, x_0) чекити болгон \mathcal{D}_2 туюк тик бурчтугу жашайт. Бул туунду төмөнкү формула менен эсептелинет

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, f(t, x))}{\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, f(t, x))} \quad (6)$$

Ошентип, (4) теңдеменин оң жак бөлүгү 1-теореманын бардык шарттарын канааттандырат. Анда теңдеменин

$$x(t_0) = x_0$$

шартын канааттандыруучу кандайдыр бир $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде аныкталган, $x(t)$ жалгыз чечими жашайт.

Теорема далилденди.

Теорема 2 (1) теңдеменин чечилишине жана (2) теңдеменин ар бири үчүн чечимдин жашашына жана жалгыздыгына кепилдик берет.

Демек, эгер (1) ден (2) ни алсак жана (2) нин оң жактары теорема 1дин шарттарын канааттандырса, анда t, x өзгөрүлмөлөрүнүн кандайдыр бир \mathcal{D} областындагы ар бир (t_0, x_0) чекити аркылуу (2) ар бир теңдемесине жалгыз интегралдык ийри туура келет, болгондо да алардын баары (1) теңдеменин чечимдери болот. (t_0, x_0) чекитинде (2) теңдеменин $x_k(t)$ интегралдык ийрисинин векторунун багыты $f_k(t_0, x_0)$ функциясынын маанисинен аныкталат. Эгер бул маанилер түрдүүчө болсо, анда (t_0, x_0) чекити аркылуу (2) теңдеменин саны канча болсо, ошончо интегралдык ийри өтөт. Ошондуктан (1) теңдеменин анык чечимин айырмалоо үчүн, бир гана (t_0, x_0) баштапкы берилгендерди бербестен, чечимдин $x'(t_0) = x'_0$ туундусунун маанисин да берүү керек. Албетте бул маани каалагандай берилиши мүмкүн эмес: x'_0

$$F(t_0, x_0, x'_0) = 0$$

теңдемесинин тамыры болушу керек.

Мисал.

$$(x')^2 - (t + x)x' + tx = 0 \tag{7}$$

теңдемесин карайлы. Аны x' ке карата чыгаруу менен

$$x' = x, \tag{8}$$

$$x' = t. \tag{9}$$

туундусуна карата чечилген эки биринчи тартиптеги теңдемеге ээ болобуз.

(8), (9) теңдеменин жалпы чечими төмөнкүдөй түргө ээ:

$$x = C_1 e^t, \quad (10)$$

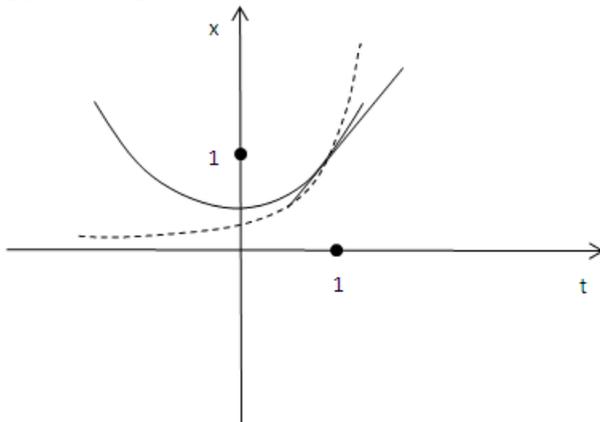
$$x = \frac{t^2}{2} + C_2 \quad (11)$$

(10), (11) эки теңдеменин чечимдеринин тобу баштапкы теңдемени канааттандырат. Ошондой эле, жалпы чекитте жалпы жанымага ээ болушса, анда (7) теңдеменин жылмакай интегралдык ийрилери (10) топтун интегралдык ийрисиинин жаасынан жана (11) топтун интегралдык ийрисиинин жаасынан түзүлгөн ийрилер болушат.

(10) топтон $x = e^{t-1}$ ($C_1 = e^{-1}$) функциясын, ал эми

(11) топтон $x = \frac{t^2+1}{2}$ ($C_2 = \frac{1}{2}$) функциясын алабыз.

$t = 1$ чекитинде бул функциялар менен аныкталган интегралдык ийрилер бурчтук коэффициенти 1 ге барабар болгон жалпы жанымага ээ болушат. Каралып жаткан интегралдык ийрилердин жаасынан түзүлгөн интегралдык ийри 1-сүрөттө сүрөттөлгөн.



1-сүрөт.

$x = \frac{t^2+1}{2}$ функциясынын графиги $-\infty < t \leq 1$ аралыгында аныкталган, ал эми $x = e^{t-1}$ функциясынын графиги болсо, $1 \leq t < +\infty$ аралыгында аныкталган. Ошондой эле 1-сүрөттө (10), (11) интегралдык ийрилердин жааларынан түзүлгөн башка интегралдык ийри да (үзүк сызык менен) сүрөттөлгөн. $x = \frac{t^2+1}{2}$ функциясы $1 \leq t < +\infty$ аралыгында аныкталган, ал эми $x = e^{t-1}$ функциясы $-\infty < t \leq 1$ аралыгында аныкталган.

(7) теңдеме үчүн $y = x$ түз сызыгында 2-теореманын шарты орун албастыгын жана $y = x$ түз сызыгы (7) теңдеменин чечиминин жалгыздыгы бузулган учурда чекиттердин геометриялык ордун түшүндүрөөрүн байкайбыз.

ПАРАМЕТРДИ КИЙИРҮҮ ЖОЛУ МЕНЕН ТУУНДУГА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ИНТЕГРАЛДОО

Ошентип, (1) тендеме x' ке карата чечилген жол жана туундусуна карата чечилбеген (2) тендемеден алынгандарды интеграциялап интегралдоо мүмкүн. Бирок алынган (2) тендемени интегралдоо көбүнчө маанилүү кыйынчылыктарды жаратып келет. Көпчүлүк учурларда (1) тендемени интегралдоонун ыңгайлуураак ыкмалары берилет.

(1) тендеме $x(t)$ белгисиз функциясына карата чечүүгө мүмкүн болсун дейли, башкача айтканда (1) тендеме төмөнкүчө туюнтууга мүмкүн болот

$$x = f(t, x'). \quad (12)$$

$x' = p$ белгилөөсүн кийиребиз жана (12)

$$x = f(t, p)$$

түрүндө жазабыз. $x(t)$ функциясы (1) тендеменин чечими болсун дейли. Анда (13) теңдештикти t боюнча дифференцирлөөгө болот.

$x(t)$ функциясы (1) тендеменин чечими болсун дейли. Анда (13) теңдештикти t боюнча дифференцирлөөгө болот. Төмөнкүгө ээ болобуз

$$\frac{dx}{dt} = p(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (14)$$

(14) тендеме p га карата сызыктуу дифференциалдык тендеме болуп саналат жана анын чечимин

$$p(t) = \varphi(t, C) \quad (15)$$

бир параметрдик топ түрүндө жазууга болот.

Мындан (13)гү колдонуп, (1) баштапкы берилген тендеменин чечимдеринин тобун алабыз

$$x = f(x, \varphi(x, C)). \quad (16)$$

(16) да баштапкы шарттарды эске алып, берилген баштапкы шарттарды канааттандыруучу чечимди алабыз жана C нын маанилерин табабыз.

Мисал. $(x')^2 - tx' + x = 0$.

Бул теңдемени төмөнкүчө жазып алалы

$$x = tx' - (x')^2$$

$x' = p$ параметрин кийирип,

$$x = tp - p^2 \tag{17}$$

Мындан

$$\frac{dx}{dt} = p + t \frac{dp}{dt} - 2p \frac{dp}{dt}$$

же

$$p = p + (t - 2p) \frac{dp}{dt} = 0.$$

Анда

$$(t - 2p) \frac{dp}{dt} = 0.$$

Бул теңдеме

$$p(t) = C - const$$

чечимдердин тобуна жана $p(t) = \frac{t}{2}$ чечимине ээ.

Эми (17) ни эске алып,

$$x(t) = Ct - C^2,$$

$$x(t) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4}$$

түрүндөгү чечимин алабыз.

Бул методду колдонуу мисалы катарында t жана x ке карата сызыктуу

$$x = t \cdot \varphi(x') + \psi(x'). \tag{18}$$

теңдемени карайлы.

(18) теңдеме Лагранждын теңдемеси деп аталат.

(18) теңдемени t боюнча дифференцирлейли

$$x' = \varphi(x') + t \cdot \frac{d\varphi}{dx'} \cdot x'' + \frac{d\psi}{dx'} \cdot x''.$$

$x' = p$ десек, төмөндөгүгө ээ болобуз

$$p = \varphi(p) + t \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{d\psi}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

же

$$p = \varphi(p) + \left(t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p) \right) \cdot \frac{dp}{dt},$$

$$(p - \varphi(p)) \frac{dp}{dt} = t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p). \quad (19)$$

Бул теңдеме t жана $\frac{dp}{dt}$ га карата сызыктуу теңдеме жана ал оңой интегралданат. (19) ду интегралдап

$$G(t, p, c) = 0 \quad (20)$$

ээ болобуз. (20) га (18) ди бириктирип, ($x' = p$)

$$x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p) \quad (21)$$

алабыз. (20) жана (21) ден изделүүчү интегралдык ийрилер аныкталат.

(19) ду алуу үчүн, биз $\frac{dp}{dt}$ га бөлдүк, ошол учурда эгер $p = \text{const}$ десек, анда бул чечимди жоготобуз.

Эгер мындай чечим жашаса, анда ал $p - \varphi(p) = 0$ теңдемесинин чечими болушу керек. Демек, $p - \varphi(p) = 0$ теңдемеси p_k чыныгы тамырларына ээ болсо, анда Лагранждын теңдемесинин табылган чечимдерине $x = t \cdot \varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_k$ кошобуз, же p ны эске албай, $x = t \cdot \varphi(p_k) + \psi(p_k)$ – түз сызыктарга ээ болобуз.

$$x = t \cdot x' + \psi(x') \quad (\psi(x') \cong ax' + b) \quad (22)$$

түрүндөгү теңдеме Клеронун теңдемеси деп аталат.

Ал Лагранждын теңдемесинен анын t болгон учурдагы коэффициентти x' ке барабар болгондугу менен гана айырмаланат. Клеронун теңдемесин чыгаруу үчүн, $x' = p$ белгилөөсүн кийиребиз. Анда (22)

$$x = t \cdot p + \psi(p). \quad (23)$$

ээ болобуз. Мындан

$$dx = x' dt, p dt + [t + \psi'(p)] dp = p dt$$

орун алат.

$$[t + \psi'(p)] dp = 0.$$

Бул теңдеме эки теңдемеге ажырайт:

$$dp = 0 \text{ жана } t + \psi'(p) = 0.$$

Биринчи теңдемеден $p = C$ экендиги келип чыгат. p нын бул маанисин (23)кө коюп,

$$x = C \cdot t + \psi(C). \quad (24)$$

алабыз. Түз сызыктардын бул тобу Клеронун теңдемесинин жалпы чечими болуп саналат.

$t + \psi'(p) = 0$ теңдемеси (23) теңдеме менен биргеликте параметрдик формадагы Клеронун теңдемесинин чечимин түзөт.

$$\left. \begin{aligned} t &= -\psi'(p), \\ x &= t \cdot p + \psi(p) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Мисал. $x = t \cdot x' - x'^2$ теңдемеси берилсин дейли.

Бул Клеронун теңдемеси. $x' = p$ десек,

$$x = t \cdot p - p^2$$

ээ болобуз.

Андан кийин

$$dx = x' dt = p + t \cdot dp - 2p dp$$

же

$$pdt = pdt + (t - 2p)dp.$$

Мындан $(t - 2p)dp = 0$ же $dp = 0$ жана $t - 2p = 0$ ээ болобуз. Анда $p = C$.

$p = C$ ны $x = t \cdot p - p^2$ теңдемеге коюп, $x = C \cdot t - C^2$ теңдеменин бир параметрдик чечимин алабыз.

Экинчи теңдемеден $t = 2p$ ни аныктайбыз жана

$$\begin{cases} t = 2p, \\ x = t \cdot p - p^2 \end{cases}$$

параметрдик формадагы Клеронун теңдемесинин чечимине ээ болобуз.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

$$x'_k(t) = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

дифференциалдык теңдемелер системасы n теңдемеден турган биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин нормалдык системасы деп аталат.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$$

вектордук белгилөөлөрдү кийирүү менен (1) системаны вектордук формада жазып алабыз:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (3)$$

Векторлор жана вектордук функциялар үчүн айрым аныктамаларды жана барабарсыздыктарды орнотобуз.

(2) вектордун $|x|$ модулу же узундугу

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

формуласы менен аныкталат.

Эгер x жана y эки вектору берилсе,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

анда барабарсыздыгы орун алат.

Бул барабарсыздыктан каалагандай сандагы x_1, x_2, \dots, x_n векторлору үчүн аналогиялуу барабарсыздык орун алат:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \quad (4)$$

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ – t чыныгы өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз вектордук функция, башкача айтканда вектор координаталары t өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялар.

$\varphi(t)$ функциясы $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган болсун, анда $r_1 < t_0 < r_2$ үчүн ошол эле интервалда

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$$

вектордук функцияны аныктоого мүмкүн, болгондо да $\psi(t)$ векторунун $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ компоненттери

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^t \varphi_k(\tau) d\tau, k = 1, 2, \dots, n$$

формуласынан аныкталат.

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)| d\tau \quad (5)$$

барабарсыздыгы орун алат.

x_1, x_2, \dots, x_n өзгөрүлмөлөрүнүн мейкиндигинин Δ томпок көптүгүндө аныкталган

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)),$$

вектордук функциясы берилсин дейли. Эгер Δ көптүгүнүн каалаган эки чекитин Δ көптүгүнө толук бойдон таандык болгон кесинди аркылуу туташтырсак, анда Δ көптүгү томпок деп аталат.

$$\left| \frac{\partial g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m} \right| \leq K$$

барабарсыздыгы орун алсын дейли, мында K – оң сан.

Анда Δ көптүгүнөн алынган каалаган эки x жана y чекиттери үчүн

$$|g(x) - g(y)| \leq n^2 K |x - y| \quad (6)$$

барабарсыздыгы орун алат.

(6) барабарсыздыкты далилдейли. x жана y чекиттерин туташтыруучу кесиндини кийирели:

$$z(s) = y + s(x - y),$$

мында $0 \leq s \leq 1$.

Качан гана $s \in [0,1]$ кесиндисин бойлото өтсө, анда $z(s)$ чекити x жана y чекиттерин туташтыруучу кесиндисин бойлоп өтөт, жана Δ томпоктугунан ал дайыма анда калат.

$g_k(x) - g_k(y)$ айырмасына Лагранждын формуласын колдонуп,

$$g_k(x) - g_k(y) = g_k(z(1)) - g_k(z(0)) = \left. \frac{dg_k(z(s))}{ds} \right|_{z=0}$$

алабыз.

Татаал функциядан туунду алуу формуласы боюнча $\frac{dg_k(z(s))}{ds}$ туундусун эсептеп, төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} \frac{dg_k(z(s))}{ds} &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial g_m(z_1(s), \dots, z_n(s))}{\partial x_m} \cdot \frac{dz_m(s)}{ds} = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial g_m(z_1(s), \dots, z_n(s))}{\partial x_m} \cdot (x_m - y_m). \end{aligned}$$

Ошентип

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_k(y)| &\leq \sum_{m=1}^n K \cdot |x_m - y_m| \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^n K \cdot |x - y| \leq nK \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Акыркы барабарсыздыкты квадратка көтөрүп, андан кийин аны k боюнча суммалап жана тамыр чыгарып,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= + \sqrt{\sum_{k=1}^n |g_k(x) - g_k(y)|^2} \leq \\ &\leq n^{\frac{3}{2}} K |x - y| \leq n^2 K |x - y| \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Эми (1) система үчүн чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теореманы формулировкалайбыз.

3-теорема. (Чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө)

1. (1) система жана (1) оң жак бөлүгү кандайдыр бир \mathcal{D} ачык көптүгүндө аныкталган болсун дейли.

2. $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_m}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $m = 1, 2, \dots, n$) функциялары бул көптүктө үзгүлтүксүз болсун.

Анда: 1. \mathcal{D} көптүгүнөн алынган каалаган $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ чекити үчүн t_0 чекитин камтыган кандайдыр бир интервалда аныкталган (1) системасынын

$$\varphi_k(t_0) = x_{k0}; k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

шарттарды канааттандырган

$$x_k = \varphi_k(t) (k = 1, 2, \dots, n)$$

чечими жашайт.

2. Эгер (1) системанын

$$x_k = \varphi_k(t), x_k = \psi_k(t), k = 1, 2, \dots, n$$

чечимдери

$$\varphi_k(t_0) = \psi_k(t_0), k = 1, 2, \dots, n$$

шарттарын канааттандырса, анда бул чечимдер алар аныкталган интервалда дал келишет.

Берилген теореманы далилдөө теорема ди далилдөө сыяктуу эле, маанилүү эмес өзгөрүүлөр менен жүргүзүлөт.

(1) система берилсин дейли жана (7) шартын канааттандыруучу $x_k = \varphi_k(t)$ чечиминин жашашын далилдөө талап кылынат.

$x = \varphi(t)$ – (3) системанын кандайдыр бир чечими болсун, демек

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (8)$$

теңдештиги аткарылат жана

$$\varphi(t_0) = x_0, x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \quad (9)$$

болсун дейли.

Анда (8), (9) туура келүүчүлүктөрдүн жыйындысы

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

туура келүүчүлүктөрдүн бирине эквиваленттүү.

Бул сүйлөмдүн тууралыгы теоремада 1-дей сыяктуу далилденет.

(t_0, x_0) чекити \mathcal{D} ачык көптүгүнө таандык болгондуктан, $\Pi = \{(t, x), |t - t_0| \leq q, |x - x_0| \leq a\}$ көптүгү жашайт, мында q жана a – кандайдыр бир оң сандар жана $\Pi \subset \mathcal{D}$. Π көптүгү туюк жана чектелген, анда

$$|f(t, x)|, \left| \frac{\partial f_k(t, x)}{\partial x_m} \right|, k, m = 1, 2, \dots, n$$

үзгүлтүксүз функциялар анда чектелген болушат, б.а.

$$|f(t, x)| \leq M, \left| \frac{\partial f_k(t, x)}{\partial x_m} \right| \leq K. \quad (11)$$

Π көптүгү менен катар

$$\Pi_r = \{(t, x), |t - t_0| \leq r \leq q, |x - x_0| \leq a\} \subset \Pi$$

көптүгүн карайбыз.

$|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде аныкталган

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots \quad (12)$$

вектордук функциялардын удаалаштыгын түзөбүз.

$\varphi_k(t)$ вектор-функциясын

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \quad (13)$$

түрүндө аныктайбыз.

P_r аркылуу өткөн бардык үзгүлтүксүз функциялардын графиктеринин тобун Ω_r аркылуу белгилейбиз, б.а. эгер $\varphi_k(t) \in \Omega_r$, анда $|t - t_0| \leq r$ үчүн

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq a$$

болушу керек.

Кандай шарттарда $\forall k (\varphi_k(t) \in \Omega_r)$ экендигин аныктайбыз?

$\varphi_k(t) \in \Omega_r$ болсун дейли. (13) формула боюнча $\varphi_{k+1}(t)$ аныктайлы.

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t) - x_0| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \right| \quad (11 - \text{шарт}) \leq \\ &\leq M|t - t_0| \leq M \cdot r \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Мындан, эгер $M \cdot r \leq a$ же

$$r \leq \frac{M}{a}, \quad (14)$$

болсо, анда $\varphi_{k+1}(t) \in \Omega_r$ орун ала тургандыгы келип чыгат.

(12) удаалаштыктын бир калыпта жыйналуучулугун далилдейбиз.

$$\begin{aligned} |\varphi_1 - \varphi_0| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x_0)| d\tau \right| \leq \\ &\leq M|t - t_0| \leq M \cdot r \leq a, \end{aligned}$$

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leq a \quad \text{ээ болобуз.}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_2 - \varphi_1| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0)) d\tau \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_1) - f(\tau, x_0)| d\tau \right| (6 - \text{барабарсыздык}) \leq \\
&\leq \int_{t_0}^t n^2 K |\varphi_1 - x_0| d\tau \leq n^2 K |t - t_0| a \leq n^2 K r a. \\
n^2 K r &\leq q_0 < 1
\end{aligned}$$

шартынын аткарылышын талап кылабыз.

Анда

$$r \leq \frac{q_0}{n^2 K} \quad (15)$$

жана $|\varphi_2 - \varphi_1| \leq q_0 a$.

$$\begin{aligned}
|\varphi_3 - \varphi_2| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, \varphi_2) - f(\tau, \varphi_1)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau \right| \leq \\
&\leq n^2 K \left| \int_{t_0}^t |\varphi_2 - \varphi_1| d\tau \right| \leq q_0 a n^2 K |t - t_0| \leq q_0 a n^2 K r \leq q_0^2 a, \\
|\varphi_3 - \varphi_2| &\leq q_0^2 a.
\end{aligned}$$

Процессти улантагып

$$\forall k \in N (|\varphi_{k+1} - \varphi_k| \leq q_0^k a) \quad (16)$$

ээ болобуз. Ошентип, (16)га ылайык, (12) функциялардын удаалаштыгы Ω_r тобуна таандык болгон кандайдыр бир $\varphi(t)$ үзгүлтүксүз функцияларга бир калыпта жыйналат.

$\varphi(t)$ функциясы (10) теңдемени канааттандыра тургандыгын көрсөтөлү. (13)тө пределге өтүү менен,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

алабыз. Демек, (9) шартты канааттандырган (3) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечими жашай тургандыгы далилденди. $x = \varphi(t)$ чечими $|t - t_0| \leq r$ интервалында аныкталган, мында $r -$ (14) жана (15) барабарсыздыктарды канааттандырган каалагандай сан.

Чечимдин жалгыздыгын каршысынан далилдөө методу менен далилдейбиз.

$x_0 = \varphi(t_0)$, $x_0 = \psi(t_0)$ шарттарын канааттандыруучу $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ чечимдери жашасын дейли. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ (3) теңдеменин чечимдери болгондуктан, теореманын биринчи бөлүгүнө ылайык $\varphi(t) \in \Omega_r$, $\psi(t) \in \Omega_r$.

Анда

$$\begin{aligned} \max |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq n^2 K \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq n^2 K |t - t_0| \cdot \max |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \\ &\leq n^2 K r \cdot \max |\varphi(t) - \psi(t)| \leq q_0 \max |\varphi(t) - \psi(t)|, \\ \max |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq q_0 \max |\varphi(t) - \psi(t)| \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Бул $\forall t (|t - t_0| \leq r)$ туура келүүчүлүгү бир гана $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ шарты үчүн гана орун алышы мүмкүн, б.а. качан гана $\varphi(t)$ жана $\psi(t)$ $|t - t_0| \leq r$ кесиндисинде дал келишкенде. Теорема далилденди.

НОРМАЛДУУ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

$$x'_k = \sum_{m=1}^n a_{mk}(t)x_m + b_k(t), k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер системасы нормалдуу сызыктуу система деп аталат.

(1) системанын

$$x_{k0} = \varphi_k(t_0) \quad (2)$$

шартын канааттандыруучу $x_k = \varphi_k(t)$ чечимин табуу талап кылынсын.

Коюлган маселе төмөнкү теорема аркылуу чечилет.

Теорема 4. $a_{mk}(t)$, $b_k(t)$, $m, k = 1, 2, \dots, n$ функциялары кандайдыр бир $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда каалагандай

$$t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; r_1 < t_0 < r_2.$$

баштапкы маанилер үчүн $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндесинде толук аныкталган (1) системанын чечимдери жашайт.

Далилдөө. (1) системаны жана (2) баштапкы шарттарды вектордук формада төмөнкүдөй түрдө жазабыз:

$$x = A(t)x + b(t), \quad (3)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A(t) = (a_{mk}(t))$ – $n \times n$ өлчөмдүү матрица,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

$$b(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)).$$

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t)$$

Белгилөөсүн кийирип, (3) - (4) туура келүүчүлүгүн

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x) d\tau \quad (5)$$

туура келүүчүлүгүнө алмаштырабыз (мында $x(t)$ – (4) шартты канааттандырган (3) системанын чечими деп эсептейбиз).

Теорема 3төгү сыяктуу

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots \quad (6)$$

функциялардын удаалаштыгын аныктайбыз, ошону менен

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k) d\tau \quad (7)$$

деп алабыз.

(1) тендеменин оң жак бөлүгү үчүн

$$\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m} = a_{mk}(t)$$

ээ болобуз жана ошонун негизинде $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде

$$\left| \frac{\partial f_k(t,x)}{\partial x_m} \right| \leq K, k, m = 1, 2, \dots, n,$$

барабарсыздыгы орун алат, мында K – кандайдыр бир оң сан.

$x_0(t)$, $x_1(t)$ функциялары кесиндиде чектелген болгондуктан, бул кесиндиде

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq C - const$$

барабарсыздыгы орун алат.

Андан ары бул кесиндиде

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |(f(\tau, x_1) - f(\tau, x_0))| d\tau \right| \leq \\ &\leq n^2 K C |t - t_0|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_3(t) - x_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |(f(\tau, x_2) - f(\tau, x_1))| d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{(n^2 K)^2 C}{2!} |t - t_0|^2; \end{aligned}$$

.....

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{(n^2 K)^{k-1} C}{(k-1)!} |t - t_0|^{k-1}.$$

ээ болобуз. Мындан

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq C \frac{(n^2 K (r_2 - r_1))^{k-1}}{(k-1)!}$$

алабыз.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n^2 K(r_2 - r_1))^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{катары} \quad \text{жыйналгандыктан,} \quad (6)$$

удаалаштык $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде кандайдыр бир $x(t)$ үзгүлтүксүз функциясына бир калыпта жыйналат.

Бул функция үчүн

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, x(\tau))) d\tau \right| \leq \\ & \leq \max_{r_1 \leq t \leq r_2} \left| \int_{t_0}^t |(f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, x(\tau)))| d\tau \right| \leq \\ & \leq n^2 K(r_2 - r_1) |x_k - x| \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Ошентип, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots$ функциялардын удаалаштыгы $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

функциясына бир калыпта жыйналат. (7) туура келүүчүлүгүндө пределге өтүү менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Теорема 4 далилденди.

Эгер (1)де бардык $b_k(t) \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) болсо, анда

$$y'_k(t) = \sum_{m=1}^n a_{km}(t) y_m(t) \quad (8)$$

системасы бир тектүү, ал эми (1) система ($b_k(t) \neq 0$) бир тектүү эмес деп аталат.

Вектордук формада (8) системаны төмөнкүдөй түрдө жазууга болот:

$$y' = A(t)y(t). \quad (9)$$

Төмөнкүдөй (9) теңдеменин жөнөкөй касиеттерин орнотолу.

1⁰. Эгер $y = \varphi(t)$ $r_1 \leq t \leq r_2$ жана $\varphi(t_0) = 0$,

$r_1 < t < r_2$ болгондо аныкталган (9) теңдеменин чечими болсо, анда $r_1 \leq t \leq r_2$ толук кесиндиде $\varphi(t) \equiv 0$ болот.

2⁰. Эгер $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – (9) теңдеменин чечимдери болсо, анда

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t),$$

функциясы да (9) теңдемесинин чечими болуп саналат, мында $c_1, c_2, \dots, c_n - const$.

Далилдөө.

1⁰. $x(t) \equiv 0$ вектору (9) дун чечими болуп саналат. Анда, теорема 4 түн негизинде, $\varphi(t_0) = 0$ баштапкы шартына ээ болгон $\varphi(t)$ чечими жана $x(t) \equiv 0$ чечими $r_1 \leq t \leq r_2$ кесиндисинде дал келиши керек.

2⁰. (9) теңдемеге түздөн-түз коюлуп текшерилет.

ЧЕЧИМДЕРДИН ФУНДАМЕНТАЛДЫК СИСТЕМАСЫ

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \quad (10)$$

(9) теңдеменин чечимдеринин системасы болсун дейли.

Эгер

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0, \quad (11)$$

болгондой бир мезгилде нөлгө айланбаган c_1, c_2, \dots, c_n константалары (турактуу сандары) жашаса, анда (10) система көз-каранды деп аталат.

Эгер (11) теңдештик бир мезгилде

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$$

болгон учурда орун алса, анда (10) система сызыктуу көз-каранды эмес деп аталат.

Эгер (10) система сызыктуу көз-каранды болсо, анда (11)де эч болбосо бир $c_m \neq 0$ жашайт.

Көрсө, эгер эч болбосо $t = t_0$ бир мааниси үчүн

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0) \quad (12)$$

векторлору сызыктуу көз-каранды болсо, анда (10) чечим сызыктуу көз-каранды болот.

А. Ошентип, эгер (10) векторлор сызыктуу көз-каранды эмес болсо, анда t нын эч бир маанисинде (10) векторлор сызыктуу көз-каранды болушпайт.

Аны далилдейли. Эгер (12) векторлор сызыктуу көз-каранды болсо, башкача айтканда

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = 0,$$

мында бардык сандар c_1, c_2, \dots, c_n нөлгө барабар эмес.

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$$

болсун дейли.

2^0 касиеттин негизинде $\varphi(t)$ функциясы (9) теңдеменин чечими болуп саналат. Ошондой эле $\varphi(t_0) = 0$ болсо, анда 1^0 касиеттин негизинде $\varphi(t) \equiv 0$ болот. $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функциялардын системасы сызыктуу көз-каранды.

Эгер (9) теңдеменин чечимдери

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \quad (13)$$

функциялардын системасы сызыктуу көз-каранды болсо, анда ал чечимдердин фундаменталдык системасы деп аталат.

Төмөнкүлөр орун алат:

1. (9) теңдемеси үчүн дайыма чечимдердин фундаменталдык системасы жашайт.

2. Эгер (13) чечимдердин фундаменталдык системасы болсо, анда (9) теңдеменин ар бир $\varphi(t)$ чечими төмөнкү түрдө көрсөтүлөт:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad (14)$$

Ушул сүйлөмдү далилдейбиз.

1. a_1, a_2, \dots, a_n каалагандай турактуу сызыктуу көз-каранды эмес векторлордун системасы болсун дейли.

$$\varphi_k(t_0) = a_k, k = 1, \dots, n$$

баштапкы шарттары менен (13) чечимди аныктайлы.

Божомол боюнча $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ векторлору сызыктуу көз-каранды эмес, анда A сүйлөмүнө ылайык, (13) чечимдер сызыктуу көз-каранды эмес, башкача айтканда фундаменталдык системаны түзүшөт.

2. $\varphi(t)$ – (9) теңдеменин каалагандай чечими, ал эми (13) чечимдердин фундаменталдык системасы болсун дейли. $t = t_0$ маанисин алалы жана

$$\varphi(t_0), \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$$

аныктайлы.

(13) система чечимдердин фундаменталдык системасы болгондуктан, анда

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$$

векторлору сызыктуу көз-каранды эмес болушат жана каралып жаткан мейкиндиктин (векторлордун саны мейкиндиктин бир калыптуулугу менен дал келет) базисин түзөт. Анда бул мейкиндиктен алынган каалаган $\varphi(t_0)$ вектору базис аркылуу төмөнкүчө туюнтулат:

$$\varphi(t_0) = c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0),$$

мында c_1, c_2, \dots, c_n тиешелүү түрдө тандалган турактуулар.

$\varphi(t)$ жана $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$ чечимдери жалпы баштапкы шартка ээ, ошол себептен дал келишет, башкача айтканда (14) орун алат.

ВРОНСКИЙДИН АНЫКТАГЫЧЫ. ФУНДАМЕНТАЛДЫК МАТРИЦА

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \tag{15}$$

(9) теңдеменин чечимдеринин кандайдыр бир системасы болсун дейли.

$\varphi_k(t)$ чечимин координаталык формада жазабыз:

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{k1}(t), \varphi_{k2}(t), \dots, \varphi_{kn}(t)).$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{n1}(t) \\ \varphi_{12}(t) & \varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1n}(t) & \varphi_{2n}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

матрицасын түзөбүз, бул матрицанын k -мамычасы $\varphi_k(t)$ чечимине кызмат аткарат. $\varphi_k(t)$ координаталары (8) системанын чечими болуп саналат.

Бул матрицанын аныктагычын $W(t)$ аркылуу белгилейбиз. $W(t)$ – Вронскийдин аныктагычы деп аталат.

Төмөнкү ырастоолор орун алат:

1. Эгер (15) чечимдер сызыктуу көз-каранды эмес болушса, анда $W(t)$ – Вронскийдин аныктагычы t нын эч бир маанисинде нөлгө айланбайт. Бул учурда (15) система чечимдердин фундаменталдык системасы болуп саналат.
2. Эгер (15) система сызыктуу көз-каранды болсо, анда Вронскийдин аныктагычы теңдеш түрдө нөлгө барабар болот.
3. (15) система чечимдердин фундаменталдык системасы болгон учурда (16)ны фундаменталдык матрица деп атайбыз. t өзгөрүлмөлүү функциялардан түзүлгөн жана кандайдыр бир шарттарды канааттандыруучу каалагандай

n – тартиптеги квадраттык матрица кандайдыр бир (8) түрдөгү теңдемелер системасы үчүн фундаменталдык болуп саналат.

1 –3-сүйлөмдөрдү далилдейли. 1-2-ырастоолордун туура экендиги анык.

3тү далилдейли. (16) t өзгөрүлмөлүү функциялардын каалагандай берилген матрицасы болсун дейли. Функциялар $r_1 < t < r_2$ интервалында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болсун дейли. $\forall t \in (r_1, r_2) (W(t) \neq 0)$. Координатасы (16) матрицанын k – мамычасын түзгөн $\varphi_k(t)$ вектордук функциясы (9) теңдеменин чечими болуп саналсын дейли.

$$\varphi'_{kj}(t) = \sum_{m=1}^n a_{mj}(t) \cdot \varphi_{km}(t), \quad j, k = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

ээ болобуз.

Эгер (17)де j индексин бекемдеп жана k гана өзгөрөт деп эсептесек, анда алынган туура келүүчүлүктөрдүн системасын $a_{mj}(t)$ ($j, m = 1, 2, \dots, n$) белгисиздерине карата сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасы катары кароого болот.

Бул система бир маанилүү чечилүүчү, анткени анын матрицасы (16) матрицадан транспонирлөө жолу менен алынат жана аныктагычы нөлдөн айырмалуу. Ошентип $a_{mj}(t)$ функциясы $\varphi'_{kj}(t)$, $\varphi_{kj}(t)$ үзгүлтүксүз функциялары аркылуу бир маанилүү аныкталат.

ЛИУВИЛЛДИН ФОРМУЛАСЫ

Аныктагычты дифференцирлөө эрежеси

$(\varphi_{km}(t))$ – n -тартиптеги квадраттык матрица, ошону менен бирге $\varphi_{km}(t)$ функциялары дифференцирленүүчү болуп саналат. Бул матрицанын аныктагычын $W(t)$ аркылуу белгилейли.

Бул аныктагычтын $W'(t)$ туундусу төмөнкү формула боюнча эсептелет:

$$W'(t) = W_1(t) + \dots + W_n(t). \quad (18)$$

$W_m(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) кошулуучусу төмөнкүчө түрдө аныкталат: $(\varphi_{km}(t))$ матрицасында m – сапчадагы бардык мүчөлөрдү t боюнча дифференцирлеп, калган сапчадагыларды өзгөрүүсүз калтырылат. Албетте, сапча жана мамычанын ролун алмаштырууга болот.

$W(t)$ – (8) теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасынын Вронский аныктагычы болсун, анда төмөнкү формула орун алат:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t s(\tau)d\tau}, \quad (19)$$

мында $s(t) = A(t)$ матрицасынын изи:

$$s(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t).$$

(19) Лиувилдин формуласы деп аталат.

СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ

Сызыктуу бир тектүү эмес теңдемелердин системасы берилсин дейли

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \quad (1)$$

(1)ге туура келүүчү бир тектүү теңдемени карайлы

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad (2)$$

$y = \varphi(t)$ – (2) теңдеменин каалагандай чечими болсун жана $x^* = \psi(t)$ (1) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсун дейли. Анда (1) теңдеменин каалаган чечимин төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$x = \varphi(t) + \psi(t). \quad (3)$$

Бул сүйлөмдүн тууралыгы (3)нү (1)ге түздөн-түз коюу менен текшерилет.

Эми (1) теңдеменин чечимдерин табуу методу менен таанышабыз.

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \quad (4)$$

(2) бир тектүү теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасы болсун дейли. (1) чечимди төмөнкүчө түрдө издейбиз

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t), \quad (5)$$

мында $c_1(t), \dots, c_n(t)$ – функциялары белгисиз t өзгөрүлмөсүнөн көз-каранды функциялар болуп саналышат.

(5)ни (1) теңдемеге коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned} c_1'(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n'(t)\varphi_n(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + \dots + \\ + c_n(t)\varphi_n'(t) = \\ = A(t)(c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t)) + b(t). \end{aligned}$$

Мындан, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ – (2) теңдеменин чечимдери экендигин эске алып, төмөнкүнү алабыз:

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n'(t)\varphi_n(t) = b(t) \quad (6)$$

Координаталык формада жазылган $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ карата (6) теңдеме төмөнкү түргө ээ:

$$\sum_{m=1}^n \varphi_{mk}(t) \cdot c_m'(t) = b_k(t), k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

$\Phi(t) = (\varphi_{mk}(t))$ (2) теңдеменин фундаменталдык матрицасы болсун дейли. Анда (7) туура келүүчүлүгүн төмөнкүчө жазууга болот:

$$\Phi(t) \cdot c'(t) = b(t).$$

Мындан $c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ же

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt, \quad (8)$$

табабыз, мында $\Phi^{-1}(t)$ – матрицасы $\Phi(t)$ матрицасына тескери матрица. (5) формуланы төмөнкүдөй түрдө

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{m=1}^n \varphi_{mk}(t) \cdot c_m(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \text{ же} \\ x &= \Phi(t)c(t) \end{aligned} \quad (9)$$

вектордук түрдө жазсак болот.

(8)ни (9) га коюп төмөнкүнү алабыз:

$$x = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt \quad (10)$$

Ошентип, (10) формула (1) теңдеменин жалпы чечимин берет. t_0, x_0 баштапкы маанилери менен берилген (1) бир тектүү эмес теңдеменин чечими төмөкүчө түрдө берүүгө болот:

$$x = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau \right). \quad (11)$$

Эгер $t = t_0$ болсо, $x(t_0) = x_0$ ээ болобуз. (11)ни (1)ге коюп, чынында (11) – (1)нин чечими болооруна ынанабыз.

n – ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕ

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = b(t) \quad (1)$$

түрүндөгү теңдеме n -тартиптеги сызыктуу теңдеме деп аталат. $a_1(t), \dots, a_n(t), b(t)$ функциялары $r_1 < t < r_2$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз деп болжолдойбуз.

Эгер $b(t) \equiv 0$ болсо, анда төмөнкү теңдемени алабыз:

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)z(t) = 0 \quad (2)$$

(2)теңдеме (1)теңдеменин бир тектүү теңдемеси деп аталат.

(1) теңдеме бир тектүү эмес теңдеме деп аталат.

(1) теңдемени нормалдуу сызыктуу системага келтирүүгө болот. Ал үчүн жаңы белгисиз функцияларды кийиребиз:

$$x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Анда бул жаңы белгисиз x_1, \dots, x_n функциялар сызыктуу системаны канааттандырат:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

Алынган системаны вектордук формада төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = (0, 0, \dots, b(t))$$

Ошентип, (1) теңдемени изилдөө менен (3) нормалдуу сызыктуу системаны изилдөөгө келтирүүгө болот.

ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} z' + a_n z^n = f(t), \quad (1)$$

түрүндөгү теңдеме n – тартиптеги турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдеме деп аталат, мында z – белгисиз функция, a_1, a_2, \dots, a_n – турактуу сандар, $f(t)$ – берилген функция;

Эгер $f(t) \equiv 0$ болсо, анда теңдеме бир тектүү деп, тескерисинче учурда бир тектүү эмес деп аталат.

БИР ТЕКТҮҮ ТЕҢДЕМЕЛЕР

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \quad (2)$$

теңдемеси берилсин дейли.

(2) теңдеменин чечимин

$$z = e^{\lambda t} \quad (3)$$

түрүндө издейбиз, мында λ – кандайдыр бир сан (чыныгы же комплекстик).

(3) нү (2) ге коюп

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} = 0,$$

же

$$e^{\lambda t} \cdot (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0$$

ээ болобуз.

$\forall t \in (-\infty, \infty) (e^{\lambda t} \neq 0)$, анда

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4)$$

болушу керек. (4) нүн сол жагындагы көп мүчө λ га карата (2) теңдеменин мүнөздүк көп мүчөсү, ал эми (4) мүнөздүк теңдеме деп аталат.

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

деп белгилейбиз. Алгебра курсунан белгилүү болгондой, (4) теңдеме эселүүлүктөрүн эске алуу менен, n тамырга ээ болот.

Алгач, (4) теңдеме n түрдүү тамырга ээ болгон, башкача айтканда эселүү тамырларга ээ болбогон учурларды карайбыз. Бул учур үчүн (2) теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жыйындысы төмөнкү теорема менен мүнөздөлөт.

Теорема 5. $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n түрдүү тамырларга ээ болсун дейли.

Анда (2) теңдеменин жалпы чечимин төмөнкүчө түрдө туюнтууга болот:

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad (5)$$

мында c_1, c_2, \dots, c_n – каалагандай турактуулар.

Далилдөө. (5) – (2) теңдеменин чечими болуп саналат, (5)ни (2)ге түздөн-түз коюу аркылуу текшерилет.

Эгер z_* - (2) теңдеменин кандайдыр бир чечими болсо, анда (5) ден c_1, c_2, \dots, c_n сандарын тиешелүү тандоодон z_* ду алууга болот. Ушундай мааниде (5) – (2) теңдеменин жалпы чечими болуп саналат.

z_* чечимин $-\infty < t < +\infty$ болгондо аныкталган болсун дейли

$$z_*(0) = z_0, z'_*(0) = z'_0, \dots, z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

c_1, c_2, \dots, c_n константаларын (5) формула менен аныкталуучу $z(t)$ чечим ошол эле баштапкы шарттарды канааттандыргандай тандоого боло тургандыгын көрсөтөлү.

$$z(0) = z_0, z'(0) = z'_0, \dots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \quad (6)$$

(5) ден (6)ны эске алып

$$c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m = z_0^{(m)}, \quad (7)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ алабыз.

(7) туура келүүчүлүгү c_1, c_2, \dots, c_n белгисиздерине карата n теңдемеден турган системаны берет.

Системанын матрицасы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

түрүнө ээ. Бул матрицанын аныктагычы (Вандермонддун аныктагычы) нөлдөн айырмалуу, анткени бардык $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сандары түрдүүчө түгөйлөш. Анда (10) системадан c_1, c_2, \dots, c_n турактуулар бир маанилүү аныкталат. Ошентип, (7) шартын канааттандыруучу $z(t)$ чечими аныкталат. z_* жана z чечимдери бир эле баштапкы шартты канааттандырат, ошол себептен алар дал келишет.

Теорема далилденди.

$L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү эселүү тамырларга ээ болгон учурду карайлы.

Теорема 6. $L(\lambda)$ түгөйлөш түрдүү $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($m < n$) тамырларга ээ болот, болгондо да λ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) тамыры k_j – эселүүлүккө ээ, демек

$$k_1 + k_1 + \dots + k_m = n.$$

Анда бардык функциялар

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = t e^{\lambda_1 t}, \dots, z_{k_1} = t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, z_{k_1+2} = t e^{\lambda_2 t}, \dots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ \dots \\ z_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m t}, z_{k_1+\dots+k_{m-1}+2} = t e^{\lambda_m t}, \dots, z_n = t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{cases} \quad (8)$$

(2) теңдеменин чечимдери болуп саналат.

(2) теңдеменин жалпы чечими

$$z = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n, \quad (9)$$

түрүндө туюнтулат, мында c_1, c_2, \dots, c_n – каалагандай турактуулар.

6-теоремадан жалпы чечимди

$$z = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad (10)$$

түрүндө жазууга боло тургандыгы келип чыгат, мында $f_j(t)$ көп мүчөсү $k_j - 1, j = 1, 2, \dots, n$ сандарынан ашып кетпеген даражадагы көп мүчө болуп саналат.

Чынында эле, (8) системанын ар бир функциясы (2) теңдеменин чечими экендигин текшерүү кыйын эмес.

Анда (9) туура келүүчүлүгү менен туюнтулган сызыктуу комбинация (2) теңдеменин чечими болуп саналат. (9)дан айтылган ырастоонун тууралыгы келип чыгат.

Мисалдар.

$$1. \quad z^V + 3z^{IV} + z^{III} + z^{II} = 0.$$

Берилген теңдеменин мүнөздүк көп мүчөсү төмөнкүдөй түргө ээ:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) \\ &= \lambda^2(\lambda + 1)^3 \end{aligned}$$

Бул көп мүчөнүн тамырлары болуп, тиешелүү түрдө $k_1 = 2, k_2 = 3$ эселүүлүккө ээ болгон $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ сандары эсептелет.

6-теоремага ылайык, (8) чечимдердин системасы төмөнкүдөй түргө ээ:

$$z_1 = 1, z_2 = t, z_3 = e^{-t}, z_4 = te^{-t}, z_5 = t^2 e^{-t}.$$

Жалпы чечимди төмөнкүчө түрдө туюнтууга болот:

$$z = (c_1 + c_2 t) + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}$$

$$2. \quad z^V + 2z^{III} + z^I = 0 \text{ теңдемесин чыгаралы.}$$

Мүнөздүк көп мүчө

$$L(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda(\lambda^2 + 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$ (жөнөкөй) $\lambda_2 = i$ (эки эселүү), $\lambda_3 = -i$ (эки эселүү) тамырларга ээ.

(8) система

$$z_1 = 1, z_2 = e^{it}, z_3 = te^{it}, z_4 = e^{-it}, z_5 = te^{-it}$$

түрүнө ээ, анын жалпы чечимин төмөнкүчө жазууга болот:

$$z = c_1 + (c_2 + tc_3)e^{it} + (c_4 + tc_5)e^{-it}.$$

3. $z^{III} - 5z^{II} + 6z^I = 0$ теңдемесин карайлы.

Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Көп мүчөнүн тамырлары болуп түрдүү тамырлар болгон $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ сандар эсептелет. Анда теорема 5ке ылайык, жалпы чечим $z = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$ түрүндө туюнтулат.

4. $z^{III} + 3z^{II} + 9z^I - 13z = 0$ теңдемеси үчүн мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = \lambda^3 - 1 + 3\lambda^2 - 3 + 9\lambda - 9 = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) + 3(\lambda^2 - 1) + 9(\lambda - 1) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 + 3\lambda + 3 + 9) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 13). \end{aligned}$$

Мүнөздүк көп мүчөнүн тамырлары: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$.

Теорема 5ке ылайык, жалпы чечим

$$z = c_1e^t + c_2e^{(-2+3i)t} + c_3e^{(-2-3i)t}$$

түрүндө туюнтулууга тийиш.

5. $z^{III} - z = 0$. Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0.$$

Тамырлары болуп $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ сандары эсептелет. Анда жалпы чечим төмөнкүдөй түргө ээ болот:

$$z = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + c_3 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}.$$

Жыйынтыгында, төмөнкүлөрдү белгилеп кетели:

Эгер $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчө түрдүү $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ тамырларга ээ болсо, анда

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, z_n = e^{\lambda_n t} \quad (11)$$

функциялардын системасы (2) теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасын түзөт; эгер $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөсү $\lambda_1 - k_1 -$ эселүү, $\lambda_2 - k_2 -$ эселүү, $\lambda_m - k_m -$ эселүү ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) тамырларга ээ болсо, анда (8) функциялардын системасы чечимдердин фундаменталдык системасын түзөт. Бул сүйлөмдү далилдөө үчүн (11) системанын Вронский аныктагычын (түрдүү тамырлар учуру) түзөлү.

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} z_1 & \dots & z_n \\ z'_1 & \dots & z'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n^{n-1} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t}. \end{aligned}$$

$\forall t \in (-\infty, +\infty) (W(t) \neq 0)$. Натыйжада, (11) система сызыктуу көз-каранды эмес болот жана чечимдердин фундаменталдык системасын түзөт.

Экинчи учур ушундай эле далилденет.

БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ТЕҢДЕМЕ

(1) теңдемени карайлы.

Текшерүүнү жүргүзүү (түздөн-түз ордуна коюу менен) кыйынчылык туудурбайт: жалпы чечимди табуу үчүн, z_{00} – бир тектүү теңдеменин жалпы чечимин жана $z_{\text{чн}}$ – бир тектүү эмес теңдеменин жекече чечимин табуу жана аларды кошуу коюу жетиштүү, башкача айтканда

$$z_{жбэ} = z_{жб} + z_{жекбэ}.$$

Бир тектүү тендеменин жалпы чечими теорема 5, бдан аныкталат. Бир тектүү эмес тендеменин жекече чечимин табуу калат. (1) тендеменин жекече чечимин табуу үчүн төмөнкүдөй учурларды карайбыз:

1. $f(t) = \mathcal{P}(t)$, мында $\mathcal{P}(t)$ – t дан көп мүчө (полином).

Эгер 0 (нөл) саны $L(\lambda)$ мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болуп саналбаса, анда бир тектүү эмес тендеменин жекече чечимин төмөнкүдөй түрдө табууга болот:

$$z_{жекбэ} = Q(t),$$

мында $Q(t)$ – көп мүчө, анын тартиби $\mathcal{P}(t)$ нын тартиби кандай болсо ошондой, бирок коэффициенттери белгисиз.

Эгер 0 саны K эселүүлүктөгү мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болсо, анда

$$z_{жекбэ} = t^k Q(t),$$

$Q(t)$ көп мүчөсү $\mathcal{P}(t)$ көп мүчөсүнүн тартиби менен бирдей.

$Q(t)$ көп мүчөнүн коэффициенттерин аныктоо үчүн белгисиз коэффициенттер методу пайдаланылат.

Төмөнкү мисалды карап көрөлү.

$$z^{II} - 2z^I - 3z = 3t^2 + 1$$

тендемеси берилсин дейли.

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

мүнөздүк көп мүчөсү $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ тамырларына ээ.

Тендеменин жекече чечимин төмөнкүдөй түрдө издейбиз:

$$z_{жекбэ} = at^2 + bt + c,$$

мында a, b, c – кандайдыр бир сандар.

a, b, c сандарын аныктоо үчүн, $z_{\text{жекбэ}}$ функциясын берилген теңдемеде туюнтабыз:

$$z'_{\text{жекбэ}} = 2at + b, z''_{\text{жекбэ}} = 2a.$$

$$2a - 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) = 3t^2 + 1$$

ээ болобуз.

Мындан, көп мүчөлөрдүн барабардыгын пайдаланып, төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ -4a - 3b = 0 \\ 2a - 2b - 3c = 1 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{4}{3} \\ c = -\frac{17}{9} \end{cases}$$

$z_{\text{жекбэ}}$ жекече чечим жана $z_{\text{жб}}$ жалпы чечим төмөндөгүдөй түрдө болот:

$$z_{\text{жекбэ}} = -t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{17}{9}, \quad z_{\text{жб}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}.$$

Жалпы чечимди мындайча жазууга болот:

$$z_{\text{жбэ}} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \left(-t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{17}{9}\right).$$

$$2. \quad f(t) = \mathcal{P}(t)e^{at}.$$

Эгер a саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болбосо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = Q(t)e^{at}.$$

Эгер $a - k$ эселүү тамыр болсо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = t^k Q(t)e^{at}.$$

Каралып жаткан учурда $Q(t)$ көп мүчөсү $\mathcal{P}(t)$ кандай тартипте болсо, ошондой тартипте. Эки учурда тең $z_{\text{жекбэ}}$ чечимдерин (1)ге коюп, $Q(t)$ көп мүчөсүнүн коэффициенттерин аныктайбыз.

$$3. \quad f(t) = e^{ax}(\mathcal{P}_1(t)\cos bt + \mathcal{P}_2(t)\sin bt),$$

мында $\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t) - t$ дан көп мүчөлөр. $m - \mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)$ көп мүчөлөрдүн тартиптеринин эң чоңу. Анда, эгер $a + ib$ саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болбосо,

$$z_{\text{жекбэ}} = e^{at}(Q_1(t)\cos bt + Q_2(t)\sin bt),$$

орун алат, мында $Q_1(t), Q_2(t) - m$ -тартиптеги көп мүчөлөр.

Эгер $a + ib$ мүнөздүк теңдеменин $k -$ эселүүлүктөгү тамыры болсо, анда

$$z_{\text{жекбэ}} = t^k e^{at}(Q_1(t)\cos bt + Q_2(t)\sin bt)$$

болот.

4. Эгер $f(t)$ төмөнкүдөй түрдө туюнтулса,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_m(t),$$

мында $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ айрым функциялар (балким 1-3тө каралган түрдө болушу мүмкүн).

Эгер $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$ (1) теңдеменин

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$$

$$(z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = f_j(t), j = 1, 2, \dots, m)$$

функцияларына туура келген жекече чечимдери болсо, анда

$$z_{\text{он}} = z_1(t) + z_2(t) + \dots + z_m(t).$$

Мисалдар.

1. $z'' - z' = e^t + t$ бир тектүү эмес сызыктуу теңдемесин карайлы.

Тиешелүү бир тектүү теңдеме болуп төмөнкү теңдеме эсептелет:

$$z'' - z' = 0.$$

Мүнөздүк көп мүчө төмөнкүдөй түргө ээ:

$$L(\lambda) = \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 1).$$

Көп мүчөнүн тамырлары болуп, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ сандары эсептелет.

Бир тектүү теңдеменин жалпы чечимин

$$z_{жб} = c_1 + c_2 e^t$$

түрүндө туюнтууга болот.

Эми бир тектүү эмес теңдеменин $z_{жекбэ}$ жекече чечимин табалы. Бир тектүү эмес теңдеменин оң жак бөлүгү эки функциянын суммасы түрүндө туюнтулган, б.а.

$$f(t) = e^t + t.$$

Жекече чечимди 4-учурга ылайык табабыз. Ал үчүн

$$z^{II} - z^I = e^t, \quad z^{II} - z^I = t$$

теңдемелерин карайбыз.

1 саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болгондуктан, $z_1(t)$ жекече чечимин $z_1 = Ate^t$ түрүндө издейбиз, мында A – кандайдыр бир турактуу сан. Биринчи теңдемеге

$$z_1' = Ae^t + Ate^t,$$

$$z_1'' = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$$

коюп, $2Ae^t + Ate^t - Ae^t - Ate^t = e^t$ ээ болобуз.

Мындан

$$Ae^t = e^t$$

же $A = 1$. Ошентип, биринчи теңдеменин жекече чечими болуп, төмөнкү функция эсептелет:

$$z_1(t) = te^t$$

$\lambda_1 = 0$ саны мүнөздүк көп мүчөнүн тамыры болуп саналат. Анда 1-учурга ылайык, жекече чечимди

$$z_2(t) = t(At + B)$$

түрүндө издейбиз.

A жана B сандарын табабыз. Ал үчүн

$$z_2' = 2At + B, z_2'' = 2A$$

табабыз.

Табылган функцияларды экинчи теңдемеге коюп,

$$2A - 2At - B = t$$

ээ болобуз.

Мындан A жана B ларды аныктоо үчүн төмөнкү теңдемелерди алабыз:

$$\begin{cases} -2A = 1, \\ 2A - B = 0. \end{cases}$$

Бул системаны чыгарып $A = -\frac{1}{2}, B = -1$ алабыз. Анда

$$z_2 = -t \left(\frac{1}{2}t + 1 \right) = -\frac{1}{2}t^2 - t.$$

4гө ылайык, берилген теңдеменин жалпы чечимин

$$z_{0H} = c_1 + c_2 e^t + t e^t - \frac{1}{2}t^2 - t$$

түрүндө жазууга болот.

ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ СИСТЕМАЛАР

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{m=1}^n a_{km} x_m + f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер системасы турактуу коэффициенттүү сызыктуу бир тектүү эмес система деп аталат, мында x_m - белгисиз функция, a_{km} - турактуу сандар, $f_k(t)$ - берилген функциялар;

Эгер (1)де бардык $f_k(t) \equiv 0$ болсо,

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{m=1}^n a_{km} y_m, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

ээ болобуз.

(2) система (1)ге туура келген бир тектүү система деп аталат.

(1) системанын жалпы чечими төмөнкү эреже боюнча табылат: (2) системанын жалпы чечими табылат, андан кийин (1) системанын кандайдыр бир жекече чечими табылат. Эки чечимдин суммасы (1) системанын жалпы чечими болуп саналат.

(1)жана (2) системаларды вектордук формада

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (4)$$

түрүндө жазабыз.

Мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $A = (a_{mk})$, $(k, m = 1, 2, \dots, n)$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$.

(4) системанын жалпы чечимин $y_{ж}$, ал эми (3) системанын жекече чечимин $x_{жек}$ аркылуу белгилейбиз. Анда (3) системанын $x_{ж}$ жалпы чечимин

$$x_{ж} = y_{ж} + x_{жек} \quad (5)$$

түрүндө жазууга болот.

$y_{ж}$ жалпы чечимди табабыз.

Эгер кандайдыр бир λ саны жана кандайдыр бир η вектору үчүн

$$A \cdot \eta = \lambda \eta \quad (6)$$

туура келүүчүлүгү орун алса, анда λ саны өздүк маани деп, ал эми η вектору A матрицасынын өздүк вектору деп аталат.

C_1 . A матрицасы λ өздүк санына жана η өздүк векторуна ээ болсун дейли. Анда

$$y = \eta e^{\lambda t} \quad (7)$$

вектордук функция (4) теңдеменин чечими болуп саналат.

Чындыгында, (7)ни (4)гө коюп, $\lambda \eta e^{\lambda t} = A \cdot \eta e^{\lambda t}$ алабыз.

Мындан $A \cdot \eta = \lambda \eta$ ээ болобуз.

Айтылгандардын тууралыгы далилденди. (6) туура келүүчүлүктөн

$$(A - \lambda E)\eta = 0 \quad (8)$$

алабыз, мында $E - n$ -тартиптеги бирдик матрица.

Эгер (8)де η нөл эмес вектор болсо, анда

$$\det|A - \lambda E| = 0 \quad (9)$$

болушу керек, башкача айтканда $(A - \lambda E)$ матрицасынын аныктагычы нөлгө барабар болушу керек.

(9) дун сол жак бөлүгү λ га карата n -тартиптеги кандайдыр бир көп мүчөнү аныктайт.

(9) теңдеме (4) системанын мүнөздүк теңдемеси деп аталат, ал эми көп мүчө мүнөздүк көп мүчө деп аталат (турактуу коэффициенттүү n -тартиптеги сызыктуу теңдеме менен салыштыргыла).

Эгер $\lambda = \lambda_j$ мааниси белгилүү болсо, анда бул маанини (9)га коюп, λ_j га туура келүүчү h нөл эмес векторун аныктоого болот.

Төмөнкүдөй учурларды карап көрөлү:

1. (9) теңдеменин тамырлары түрдүү. Төмөнкү теорема орун алат:

Теорема 6. Матрица n түрдүү өздүк маанилерге ээ болсун дейли: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ жана $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n - A$ матрицасынын тиешелүү өздүк векторлору.

$$y_j = \eta_j e^{\lambda_j t}, j = 1, 2, \dots, n \quad (y_j - \text{вектордук функция})$$

болсун дейли.

Анда

$$y_{об} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (10)$$

вектордук функциясы (4) системанын жалпы чечими болуп саналат.

Далилдөө. (10) – (4) системанын чечими болуп саналат, ал түздөн-түз ордуна коюу аркылуу текшерилет. Мында C_1 сүйлөмүн эске алуу керек. (10) – (4) системанын жалпы чечими экенин далилдейбиз. Бул, эгер $\varphi(t)$ – (4) системанын $\varphi(t_0) = x_0$ шартын канааттандыруучу кандайдыр бир чечими болсо, анда тиешелүү түрдө c_1, c_2, \dots, c_n турактууларды аныктоо менен $\varphi(t)$ чечимин

$$\varphi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (11)$$

түрүндө туюнтууга болот.

Бизге c_1, c_2, \dots, c_n сандарын тандоо мүмкүнчүлүгүн көрсөтүү калды. $\varphi(t)$ чечимин бүткүл $-\infty < t < +\infty$ түз сызыгында аныкталган деп эсептөөгө болот. Жалпылыкты чектебестен, $t_0 = 0$ алууга болот.

(11) де $t = 0$ ду алабыз. Анда

$$\varphi(0) = x_0 = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_n \eta_n.$$

Биз x_0 векторунун $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ базиси боюнча ажыралмасын алдык ($\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ векторлору базисти түзөт).

(10)до, $t = 0$ деп эсептеп,

$$x(0) = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_n \eta_n$$

ээ болобуз.

c_1, c_2, \dots, c_n лердин бир эле маанилеринде $\varphi(t)$ жана $x(t)$ чечимдеринин баштапкы маанилери $t = 0$ болгондо, дал келишет, анда теорема 4кө ылайык, бул чечимдер аныкталуу интервалында дал келишет. Теорема далилденди.

2. (9) теңдеме эселүү тамырларга ээ, б.а. A матрицасы эселүү өздүк маанилерге ээ. $\lambda - k$ эселүү тамыр болсун дейли. Анда λ өздүк маанисине $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ өздүк векторлорунун сериясы туура келет. A матрицасы үчүн

$$A\eta_1 = \lambda\eta_1, A\eta_2 = \lambda\eta_2 + \eta_1, \dots, A\eta_k = \lambda\eta_k + \eta_{k-1}$$

туура келүүчүлүктөрү орун алат.

$$\omega_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \dots + \eta_r, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

вектордук функциялардын удаалаштыгын аныктайлы.

Анда

$$y_r = \omega_r(t)e^{\lambda t}, \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (13)$$

вектордук функциялар (4) теңдеменин чечими болуп саналышат, болгондо да

$$y_r(0) = \eta_r.$$

Ошентип, k векторлорунун ар бир сериясына k чечимдерден турган система туура келет.

C_2 . (13) функциялардын системасы (4) системанын чечими болуп саналаарын далилдейли. Алгач, төмөнкү туура келүүчүлүктөрдүн тууралыгын далилдеп алалы.

$$\omega_r'(t) = \omega_{r-1}(t), \quad (14)$$

$$A\omega_r(t) = r\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t). \quad (15)$$

(12)ни дифференцирлеп, биринчи туура келүүчүлүктү алабыз. Андан кийин

$$\begin{aligned} A\omega_r(t) &= A \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_2 + \dots + \eta_r \right) = \\ &= \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\lambda\eta_1 + \dots + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}(\lambda\eta_2 + \eta_1) + \lambda\eta_r + \eta_{r-1} = \\ &= \lambda\omega_r(t) + \omega_{r-1}(t). \end{aligned}$$

Экинчи туура келүүчүлүк да далилденди.
 (13) нү (4)кө коюп,

$$y_r'(t) = (\omega_r(t)e^{\lambda t})' = \omega_r'(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t}$$

ээ болобуз.

Мындан, (14), (15) туура келүүчүлүктөрдү эске алып,

$$\begin{aligned} y_r'(t) &= \omega_{r-1}(t)e^{\lambda t} + \lambda\omega_r(t)e^{\lambda t} = \\ &= (\omega_{r-1}(t) + \lambda\omega_r(t))e^{\lambda t} = A\omega_r(t)e^{\lambda t} = Ay_r(t), \\ y_r'(t) &= Ay_r(t). \end{aligned}$$

ээ болобуз. C_2 нин орун алаары далилденди.

Эми жалпы чечимди аныктоочу теореманы формулировкакалайлы.

Теорема 8. *А матрицасы тиешелүү түрдө k_1, k_2, \dots, k_m эселүүлүктөрү менен $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ өздүк маанилерге ээ болсун, болгондо да $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ жана λ_1 өздүк маанилүү $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_1}$ серия; λ_2 өздүк маанилүү $\eta_{k_1+1}, \eta_{k_1+2}, \dots, \eta_{k_1+k_2}$ серия ж.б. Анда ар бир серияга төмөнкүдөй түрдө жазууга мүмкүн болгон (4) теңдемелердин чечимдеринин системасы туура келет:*

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \eta_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = \eta_1 e^{\lambda_1 t} + \eta_2, \\ y_{k_1} &= \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \eta_1 + \dots + \eta_{k_2} \right) e^{\lambda_1 t}, \\ y_{k_1+1} &= \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, y_{k_1+2} = \eta_{k_1+1} e^{\lambda_2 t} + \eta_{k_1+2}, \dots, \\ y_{k_1+k_2} &= \left(\frac{t^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2-1)!} \eta_{k_1+1} + \dots + \eta_{k_1+k_2} \right) e^{\lambda_2 t}, \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

жана (4) теңдемелер системасынын жалпы чечими

$$y_{об} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

формуласы менен мүнөздөлөт, мында c_1, c_2, \dots, c_n – каалагандай турактуулар.

Бул теореманын далилдөөсү теорема 7 ни далилдөө учурундагыдай жүргүзүлөт.

Жыйынтык чыгаруу менен, теорема 7, 8 (4) системанын жалпы чечимдеринин жашашын ырастайт деп айтууга болот. Эми (3) системанын жекече чечимин табуу ыкмасын көрсөтүшүбүз калды. Сызыктуу теңдемелердин нормалдык системасын изилдөөдө бир тектүү эмес теңдемелердин нормалдуу системасынын жекече чечимин табуу формуласы далилденген.

Жекече чечим турактууларды вариациялоо методу аркылуу табылган. Эгер бул формуланы пайдалансак, анда (3) жекече чечим

$$x_{\text{ч}} = \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

формуласы аркылуу жазылат, мында $\Phi(t)$ – (4) теңдеменин фундаменталдык матрицасы; $\Phi^{-1}(t)$ – матрицасы $\Phi(t)$ матрицасына тескери матрица.

$\Phi(t)$ – (4) теңдеменин чечимдеринин фундаменталдык системасынан түзүлгөн фундаменталдык матрица. Теорема 7, 8ге ылайык, бул теоремалар менен аныкталган y_1, y_2, \dots, y_n функциялар фундаменталдык системалар деп аталат.

$\Phi(t)$ ны пайдаланып, $y_{\text{ж}}$ жалпы чечимин

$$y_{0\text{б}} = \Phi(t) \cdot C, \text{ мында } C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

түрүндө жазууга болот.

Эми бир тектүү эмес системанын жалпы чечимин

$$x_{\text{ж}} = y_{\text{ж}} + x_{\text{жек}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

же

$$x_{\text{ж}} = \Phi(t) \left(C_1 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

деп жаза алабыз, мында $C_1 = C + x_0$.

C_1 дин каалагандай экендигин эске алып, чечимди төмөнкүчө жазууга болот:

$$x_{\text{ж}} = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Мисалдар.

1. Бир тектүү системаны карайлы:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 3y_2 + 4y_1.$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

мүнөздүк теңдемесин түзөбүз.

Ал $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ тамырларына ээ болот.

Теорема 7ге ылайык, жекече чечимдер төмөнкүдөй түрдө жазылат:

$$y_{1ч} = \eta_1 e^{1 \cdot t},$$

η_1 – вектор $\lambda_1 = 1$ өздүк маанисине туура келүүчү өздүк вектор.

$\eta_1 = (\eta_{11}, \eta_{12})$ болсун дейли. Анда

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix}$$

же

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Мындан

$$\begin{cases} -2\eta_{11} - 2\eta_{12} = 0, \\ 3\eta_{11} + 3\eta_{12} = 0. \end{cases}$$

системасына ээ болобуз.

Бул система

$$\eta_{11} + \eta_{12} = 0$$

теңдемесине келтирилет.

η_{11}, η_{12} сандарынын бирин каалагандай тандоого болот.

$\eta_{11} = 1$ болсун дейли, анда $\eta_{12} = -1$. Ошентип, $\lambda_1 = 1$ өздүк маанисине $y_{11} = e^t, y_{12} = -e^t$ чечимдер туура келет.

Аналогиялуу түрдө, $\lambda_2 = 2$ санына туура келген жекече чечимди табабыз:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta_{21} \\ 2\eta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -3\eta_{21} - 2\eta_{22} = 0, \\ 3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0. \end{cases}$$

$$3\eta_{21} + 2\eta_{22} = 0.$$

$\eta_{21} = 2$ болсун дейли, анда $\eta_{22} = -3$.

Тиешелүү чечимдер

$$y_{21} = 2e^t, y_{12} = -3e^{2t}$$

түрүнө ээ.

Эми жалпы чечимди

$$y_1 = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, y_2 = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}$$

деп жазууга болот.

2. Төмөнкү системанын жалпы чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 2e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + e^{-t}. \end{cases}$$

Алгач, бир тектүү системанын жалпы чечимин табабыз:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2x_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Бул системанын жалпы чечими 1-мисалда табылган

$$y_1 = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, y_2 = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}.$$

Каралып жаткан системанын жекече чечимин турактууларды вариациялоо методу аркылуу табабыз.

$$x_{1ч} = C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{2t}, x_{2ч} = -C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{2t}$$

ээ болобуз. $C_1(t)$, $C_2(t)$ ларды

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}, \\ -C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t} \end{cases}$$

системадан табабыз. $C_1'(t) = 8e^{-2t}$, $C_2'(t) = -3e^{-3t}$ ээ болобуз. Анда $C_1(t) = -4e^{-2t}$, $C_2(t) = -e^{-3t}$ жана

$$x_{1ч} = -4e^{-t} + 2e^{-t} = -2e^{-t},$$

$$x_{2ч} = 4e^{-t} - 3e^{-t} = e^{-t}.$$

Ошентип

$$x_1 = -2e^{-t} + C_1 e^t + 2C_2 e^{2t},$$

$$x_2 = e^{-t} - C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}.$$

3. Төмөнкү система берилсин дейли:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Анын жалпы чечимин табабыз.

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } (2 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

мүнөздүк теңдемеси $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$ тамырларга ээ.
 $-i\eta_1 - \eta_2 = 0$ теңдемесинен аныкталган $\lambda_1 = 2 + i$.

η_1, η_2 өздүк маанисине туура келүүчү

$$y_1 = \eta_1 e^{(2+i)t}, y_2 = \eta_2 e^{(2+i)t}$$

түрүндөгү чечимди түзөбүз. $\eta_1 = 1$ деп эсептеп, $\eta_2 = -i$ табабыз. Ошентип

$$y_1 = e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i \sin t),$$

$$y_2 = -i e^{(2+i)t} = -e^t(\sin t - i \cos t).$$

Чыныгы жана мнимый бөлүктөрдү ажыратып, эки чыныгы сызыктуу көз-каранды эмес жекече чечимдерди алабыз:

$$y_{11} = e^{2t} \cdot \cos t, y_{21} = e^{2t} \cdot \sin t,$$

$$y_{12} = e^{2t} \cdot \sin t, y_{22} = -e^{2t} \cdot \cos t.$$

$\lambda_2 = 2 - i$ өздүк санды кароо менен, ушундай эле натыйжаны алабыз. Системанын жалпы чечими төмөнкү болуп саналат:

$$y_1 = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), y_2 = e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИН АВТОНОМДУК СИСТЕМАСЫ

$$x'_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер n - тартиптеги нормалдык автономдук система деп аталат.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

белгилөөлөрүн кийрип, (1) системаны вектордук формада

$$x' = f(x). \quad (2)$$

түрүндө жазууга болот.

Дифференциалдык теңдемелердин автономдук системасына t көз-каранды эмес өзгөрүлмө айкын түрдө кирбейт. Бул теңдемелер системасы менен мүнөздөлгөн көз-каранды эмес функциялардын өзгөрүү закону убакыттын өтүүсү менен өзгөрбөйт.

$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ функциясына карата n өлчөмдүү мейкиндиктин кандайдыр бир \mathcal{D} ачык көптүгүндө аныкталган болсун дейли. Бул мейкиндиктин элементтерин чекиттер деп атайбыз, чекиттин координаталары болуп x_1, x_2, \dots, x_n өзгөрүлмөлөрү эсептелет. Ошондой эле, биз \mathcal{D} көптүгүндө $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциялары жана биринчи тартиптеги туундулары үзгүлтүксүз болсун дейли.

Мындай божомолдоодон теорема 3кө ылайык, (1) же (2) системанын берилген баштапкы шарттарды канааттандыруучу чечимдери жашайт.

Эми, эгерде (1)нин чечими

$$x_m = \varphi_m(t), m = 1, 2, \dots, n$$

болсо, анда

$$x_m = \varphi_m^*(t) = \varphi_m(t + C), m = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

(1) системанын чечими болоорун далилдейли.

$x_m = \varphi_m(t)$ (1) системанын чечими болуп саналгандыктан,

$$\varphi_m'(t) = f_m(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

теңдештиги орун алат. Бул теңдештиктерде t ны $t + C$ менен алмаштырсак,

$$\varphi_m'(t + C) = f_m(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)), m = 1, 2, \dots, n$$

алабыз.

Татаал функцияны дифференцирлөө эрежесинен

$$\begin{aligned} (\varphi_m^*(t))' &= \frac{d\varphi_m^*(t)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{dt} = \frac{d\varphi_m(t+C)}{d(t+C)} \cdot \frac{d(t+C)}{dt} = \\ &= \varphi_m'(t + C). \end{aligned}$$

келип чыгат.

Ошентип,

$$\begin{aligned}(\varphi_m^*(t))' &= \varphi_m'(t + C) = f_m(\varphi_1(t + C), \dots, \varphi_n(t + C)) = \\ &= f_m(\varphi_1^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)).\end{aligned}$$

Мындан $\varphi_m^*(t)$ же $\varphi_m(t + C)$ (1)нин чечими болуп саналаары орун алат.

Эми (1) системанын чечимдеринин кинематикалык чечмеленишине өтөбүз.

(1) системанын

$$x_m = \varphi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

ар бир чечимине (5) теңдемелер аркылуу берилүүчү n - өлчөмдүү мейкиндиктеги чекиттин кыймылын туура келтиребиз, мында x_1, x_2, \dots, x_n – мейкиндиктеги чекиттердин координаталары, ал эми t – убакыт. Кыймыл процессинде бул чекит мейкиндикте кандайдыр бир траекторияны сүрөттөйт.

Эгер (5)нин чечими менен башка

$$x_m = \psi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

чечимди карасак, анда бул чечимдерге туура келүүчү траекториялар мейкиндикте же кесилишет же дал келишет.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ТУЮК ТРАЕКТОРИЯЛАР

“(1) системанын чечимин сүрөттөөчү траектория өзүн-өзү кесип өтөбү” деген суроо коёлу.

Коюлган суроого жоопту төмөнкүчө формулировкалоого болот: үч сорттогу траектория кездешет:

- 1) Тең салмактуулук абал;
- 2) Мезгилдүү траекториялар (циклдер);
- 3) Өз ара кесилишпөөчү траекториялар.

1) Эгер

$$\varphi_m(t) = a_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

(1) системанын чечими болсо, анда ал чечим тең салмактуулук абал деп аталат, мында (a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{D} көптүгүндөгү t дан көз-каранды эмес чекит.

Ошентип, эгер $\varphi_m(t)$ тең салмактуулук абалы болсо, анда $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ чекити t нын өзгөрүүсүнөн кыймылга келбейт, өз ордунда турат.

2) Каалагандай t үчүн T оң саны жашап,

$$\varphi_m(t + T) = \varphi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

барабардыгы орун алат, бирок $|\tau_1 - \tau_2| < T$ болгондо, эч болбосо, бир $m = 1, 2, \dots, n$ үчүн

$$\varphi_m(\tau_1) \neq \varphi_m(\tau_2)$$

барабардыгы орун алат.

Бул учурда

$$x_m = \varphi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

чечим T мезгили менен мезгилдүү деп аталат, ал эми чечимди сүрөттөөчү траектория турук траектория же цикл деп аталат.

Чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремадан (1) системанын ар бир \mathcal{D} областын аркылуу системанын чечимин сүрөттөөчү траектория өтө тургандыгы келип чыгат.

Ошентип, \mathcal{D} областы толук бойдон өз ара кесилишпеген траекториялар менен толтурулат. Бардык траекториялардын арасында тең салмактуулук абал же цикл болуп саналган өз ара кесилишпөөчү өзгөчө траекториялар каралат.

Биз (1) системанын кинематикалык интерпретациясын карадык. (1) системанын өзү да геометриялык интерпретацияга жол берет.

ФАЗАЛЫК МЕЙКИНДИК

Эми (1) системанын геометриялык интерпретациясын аныктайлы. $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ – \mathcal{D} көптүгүнөн алынган каалаган чекит болсун, анда бул чекитке n сандардын удаалаштыгы туура келет:

$$f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}), \dots, f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Бул сандарды n -өлчөмдүү мейкиндикте жүргүзүлгөн жана $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинен чыккан

$$f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) = f(x_0)$$

векторунун компоненти катары кароого болот.

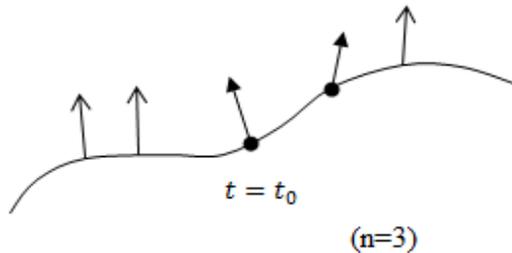
Ошентип, автономдук системага \mathcal{D} ачык көптүгүндө берилген вектордук талаа – геометриялык түспөлү туура келтирилет. \mathcal{D} көптүгүнүн ар бир $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинде ошол чекиттен чыгуучу $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектор аныкталган.

(1) системанын өзүнүн геометриялык интерпретациясы менен (1) системанын чечимдеринин геометриялык интерпретациясынын ортосундагы байланышты орнотолу. Ал байланыш төмөнкү менен түшүндүрүлөт: $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ чекитинде теңдемелер системасынын геометриялык интерпретациясына ылайык, ошол чекиттен чыккан $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектор тиешелеш коюлат. Андан кийин, чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теоремага ылайык төмөнкү баштапкы шарттарды канааттандыруучу (1) системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт:

$$\varphi_m(t_0) = x_{0m}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Кинематикалык интерпретациянын негизинде $x_m = \varphi_m(t)$ чечимине мейкиндикте траекторияны сүрөттөөчү чекиттин кыймылы (ал \mathcal{D} болушу мүмкүн),

болгондо да, $t = t_0$ убакыт моментинде кыймылга келген чекит мейкиндикте $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ абалы аркылуу өтөт.



Ошентип, $x_m = \varphi_m(t)$ чечимин мүнөздөөчү чекиттин (x'_1, \dots, x'_n) вектордук ылдамдыгы $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ абалы аркылуу өтүү моментинде $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ вектору менен дал келет. Бул дал келүү

$$x_m = x_{0m}, m = 1, 2, \dots, n; t = t_0$$

болгон учурда (1) теңдемелер системасы менен туюнтулат.

(1) автономдук системанын чечимдери траектория түрүндө жана (1) автономдук системанын өзү вектордук талаа түрүндө интерпретацияланган n өлчөмдүү мейкиндик (1) системанын фазалык мейкиндиги деп аталат.

Траекториялар – фазалык траектория деп, $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ векторлор – фазалык ылдамдыктар деп аталышат. Фазалык мейкиндикте t убактысы параметр катары каралат.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛ ЖАНА ФАЗАЛЫК ЫЛДАМДЫК

Эми фазалык ылдамдыктар көз-карашында тең салмактуулук абалды карайлы.

(a_1, a_2, \dots, a_n) чекити \mathcal{D} көптүгүнөн алынсын дейли.

С₃. Эгерде (a_1, a_2, \dots, a_n) чекитиндеги $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ фазалык ылдамдык нөлгө барабар болсо, б.а. $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, анда бул шарт (a_1, a_2, \dots, a_n) чекити (1) системанын тең салмактуулук абалы болушу үчүн зарыл жана жетиштүү болот, б.а. $\varphi_m(t) \equiv a_m$ болгондой системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт. Бул сүйлөмдөн төмөндөгү келип чыгат: (1) системанын бардык тең салмактуулук абалдарын табуу үчүн

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, m = 1, 2, \dots, n$$

теңдемелер системасын чыгаруу керек.

Бул система чектүү теңдемелер (ага туундулар кирбейт) системасын туюнтат.

С₃ ырастоосун далилдейли. (a_1, a_2, \dots, a_n) чекити (1) системанын тең салмактуулук абалы болсун дейли, б.а.

$$\varphi_m(t) \equiv a_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

болгондой (1) системанын $x_m = \varphi_m(t)$ чечими жашайт. Ал чечимди (1) системага коюп,

$$\varphi'_m(t) = (a_m)' = 0 = f_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

алабыз. Ошентип, фазалык ылдамдыктын $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ вектору (a_1, a_2, \dots, a_n) чекитинде нөлгө барабар.

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

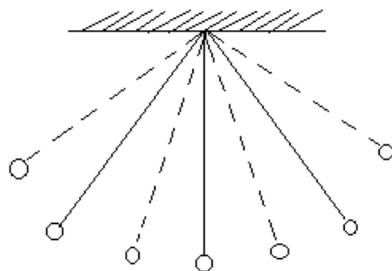
болсун дейли. Анда (1)ден $\varphi'_m(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ ээ болобуз. Мындан $\varphi_m(t) \equiv a_m$ экендиги келип чыгат.

ТУРУКТУУЛУК

Жетишээрлик көпчүлүк процесстер кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы менен мүнөздөлүшөт. Мындай системалар дайыма чечимдердин чексиз көп чыгарылыштарына ээ болушат, жана бир анык чечимди берүү үчүн анын баштапкы маанилерин көрсөтүү керек болот. Практикада колдонулган түзүлүштөр көбүнчө анык бир режимде иштешет, жана алардын иштешинде, биринчи көз-карашта теңдемелер системасынын түрдүү чечимдерине туура келүүчү иштөө режимдеринин чексиз көптүгүн аныктоо мүмкүн эмес. Ал түзүлүштү ишке киргизгенде, чечимдердин баштапкы маанилери кандайдыр бир анык жол менен тандалгандыгынан же прибордун иштөө узактыгында баштапкы маанилер өзүнүн таасирин жоготушу менен түшүндүрүлөт, жана түзүлүш стационардык режимде өзүнүн ишин өзү стабилдештирет.

Мисал келтирели. Дубал саатынын иштешин карап көрөлү. Мындай саат маятниктин абдан өзгөчө кыймылы менен иштейт, бирок саатты иштеткенде, маятник вертикалдык абалдан өтө же бир аз четтетилиши мүмкүн. Эгер маятник жетиштүү деңгээлде четтетилбесе, ал бир аздан кийин токтоп калат.

Эгер четтетүү жетишээрлик чоң болсо, анда кандайдыр бир кыска убакыттан кийин термелүүлөрдүн амплитудасы стабилдештирилет, жана сааттар ушундай термелүүлөрдүн амплитудасы менен анча көп эмес жүрөт. Ошентип, сааттын ишин мүнөздөөчү теңдемелердин системасында эки стационардык чечим болот: жүрүш жок болгон учурдагы тең салмактуулук абал жана сааттын нормалдуу жүрүшүнө туура келген мезгилдүү чечим. Башка каалагандай чечим мындай стационардык чечимдердин бирине өтө бат жакындашат жана кандайдыр бир убакыттын өтүшү менен андан эч айырмаланбай калат, ал эми мындай чечимдер чексиз көп кездешет.



Маятниктин четтөөсүнө анык шарттарда маятниктин термелүүсүн мүнөздөөчү кандайдыр бир чечимди аныктоочу анык баштапкы маанилер туура келет. Маятниктин чоң эмес четтөөлөрүндө аныкталуучу чечимдердин жыйындысын Ω_0 аркылуу белгилейбиз, ал эми жетишээрлик чоң четтөөлөр менен аныкталуучу чечимдердин жыйындысын Ω_p аркылуу белгилейбиз.

Эгер Ω_0 же Ω_p дан каалагандай стационардык эмес чечимдерди алсак, анда кандайдыр бир убакыттан кийин ал чечимдер стационардык чечимдердин бирине жакындайт. Мындай эки стационардык чечимдердин ар бири кандайдыр бир мааниде туруктуу болуп саналат.

Чечимдердин туруктуулугунун анча так эмес аныктамасынын формулировкакаланышы мына ушундай.

Келтирилген мисал сааттын иштешин мүнөздөгөн теңдемелер системасынын фазалык мейкиндиги эки тартылуу областына ажырай тургандыгын көрсөтөт.

Эгер областтардын биринен баштапкы маанини алсак, анда (Ω_0 дон алынган) чечим тең салмактуулук абалга умтулат; эгер башка облаттан баштапкы маанилерди алсак, анда (Ω_0 дон алынган) чечимдер мезгилдүү чечимге умтулушат.

ЛЯПУНОВ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУКТУН АНЫКТАМАСЫ

$$x'_m = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

теңдемелер системасын карайлы.

(1) системаны вектордук формада төмөнкүчө түрдө жазабыз:

$$x' = f(t, x) \quad (2)$$

(1), (2) системаны $t_0 \leq t < +\infty$ чексиз убакыт интервалында аныкталган деп эсептейли.

$t = t_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарттарын канааттандырган жана бардык $t > t_0$ үчүн аныкталган (2) системанын чечими $x = \varphi(t)$ болсун дейли.

$t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \tilde{\varphi}(t_0)$ баштапкы шарттарын канааттандыруучу (2) системанын каалагандай чечими $x = \tilde{\varphi}(t)$ болсун. $t = t_0$, $\tilde{x}_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарттары менен берилген жана каалагандай $t > t_0$ үчүн аныкталган $x = \tilde{\varphi}(t)$ чечимин $\Omega(t_0, \tilde{x}_0)$ аркылуу белгилейбиз.

Аныктама 1. Эгер каалагандай ε оң саны үчүн, $|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta$ болгондо, бардык $t > t_0$ үчүн $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon$ боло тургандай δ оң саны табылса, анда $x = \varphi(t)$ чечими Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

ТЕҢ САЛМАКТУУЛУК АБАЛДЫН ТУРУКТУУЛУГУ

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

нормалдуу автономдук система жана

$$x' = f(x) \quad (2)$$

анын вектордук жазылышы.

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), m = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

функцияларына карата x_1, x_2, \dots, x_n өзгөрүлмөлөрүнүн \mathcal{D} кандайдыр бир ачык көптүгүндө биринчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун жана аныкталган болсун деп божомолдойлу. Бул шарт мындан аркы берилген баштапкы шарттар менен берилген чечимдердин жашашына жана жалгыздыгына кепилдик берет.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ($a_m - \text{const}$) (2) теңдеменин тең салмактуулук абалы жана

$$t = t_0, x_0 = \varphi(t_0) \quad (4)$$

баштапкы шарты менен берилген жана каалагандай $t > t_0$ үчүн аныкталган теңдеменин $x = \varphi(t)$ каалагандай чечими болсун дейли.

Мындай чечимдердин жыйындысын $\Omega(t_0, x_0)$ аркылуу белгилейбиз.

Аныктама 2. Эгер $\varphi(t) \in \Omega(t_0, x_0)$ жана $|x_0 - a| < \delta$ болгондо, бардык $t > t_0$ үчүн $|\varphi(t) - a| < \varepsilon$ болгондой δ оң саны жашаса, анда a тең салмактуулук абал, ал эми (2) теңдеме Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

Аныктама 3. Эгер:

1. (2) теңдеменин a тең салмактуулук абалы Ляпунов боюнча туруктуу деп аталат.

2. $|x_0 - a| < \delta_1$ үчүн жетишээрлик кичине δ_1 оң сан жашаса, анда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t) - a| = 0,$$

ээ болобуз, анда (2) теңдеменин a тең салмактуулук абалы асимптотикалык туруктуу деп аталат. .

Биринчи тартиптеги теңдеменин мисалы

$$x' = f(x) \tag{5}$$

теңдемесин карайлы.

$f(0) = 0$, б.а. $x = 0$ тең салмактуулук абалы болсун дейли. Бул чечимдин туруктуулугу x тин нөлгө жакын маанилериндеги $f(x)$ тин белгисинен көз-каранды.

x тин нөл аркылуу өтүп өсүүсүнөн, функция белгисин “+”тан “-”ка өзгөртөт деп божомолдойлу.

$x = \varphi(t)$ бардык $t > t_0$ үчүн аныкталган $x_0 = \varphi(t_0)$ баштапкы шарты менен берилген (5) теңдеменин чечими болсун дейли. (5)ке $x = \varphi(t)$ коюп,

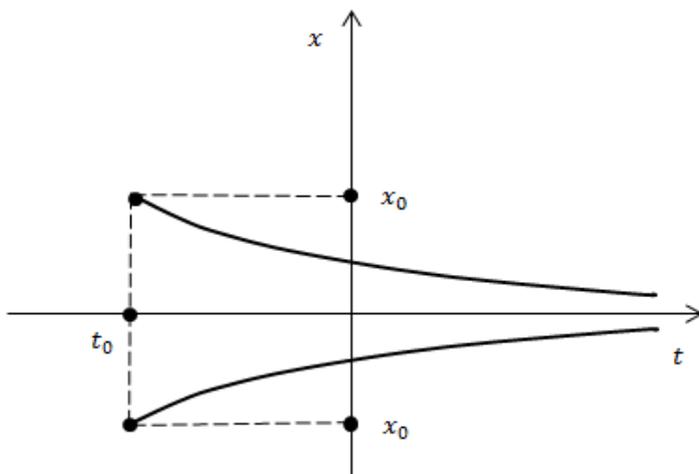
$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \tag{6}$$

теңдештигине ээ болобуз.

Эгер (6) да бардык $t > t_0$: $\varphi(t) < 0$ болсо, анда $f(\varphi(t)) > 0$.

Эгер бардык $t > t_0$: $\varphi(t) > 0$ болсо, анда $f(\varphi(t)) < 0$ жана $x = \varphi(t)$ чечими кемийт.

Эки учурда тең x_0 баштапкы шарты нөлгө жакын болсо гана, $x = \varphi(t)$ чечими $x = 0$ чечимине жетишээрлик жакын болот.



ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ СИСТЕМАНЫН ТЕҢ САЛМАКТУУ АБАЛЫНЫН ТУРУКТУУЛУГУ

Эми турактуу коэффициенттүү сызыктуу система үчүн тең салмактуу абалдын туруктуулугунун жетиштүү шартын формулировкалайлы.

$$x' = Ax, \quad (7)$$

системасы берилсин дейли, мында $A = (a_{mk})$ ($m, k = 1, \dots, n$) – n -тартиптеги турактуу матрица, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $x = \varphi(t)$

$$t = t_0, \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

баштапкы шарты менен берилген (7) системанын чечими.

Туруктуулуктун жетиштүү шарты: Эгер A матрицасынын бардык өздүк маанилери терс чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда

$$|\varphi(t)| \leq r|x_0|e^{-\alpha t}, \quad t \geq t_0 \quad (8)$$

барабарсыздыгы аткарыла тургандай, α жана r оң сандары жашайт.

(8) барабарсыздыктан (7) теңдеменин $x = 0$ тең салмактуулук абалы түздөн-түз Ляпунов боюнча туруктуу жана асимптотикалык туруктуу экендиги келип чыгат.

Формулировкаланган сүйлөмдөн A матрицасынын бардык өзүк маанилеринин чыныгы бөлүктөрүнүн терс болушу $x = 0$ тең салмактуулук абалдын туруктуулуктун жетиштүү шарты жана асимптотикалык туруктуулугу келип чыгат.

e_k – k номериндеги бирдик координаталык вектор болсун дейли, б. а.

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

мында 1 саны k – орунда турат. $\varphi_k(t)$

$$\varphi_k(t_0) = e_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

баштапкы мааниси менен берилген (7) теңдеменин чечими болсун дейли.

Анда

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$$

баштапкы мааниси менен берилген (7) теңдеменин $x = \varphi(t)$ чечимин

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n x_{0k} \varphi_k(t)$$

түрүндө жаза алабыз.

БИРИНЧИ ЖАКЫНДАШУУ БОЮНЧА ТУРУКТУУЛУК

$$x'_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad m = 1, \dots, n, \quad (1)$$

(x_1, x_2, \dots, x_n) өзгөрмөлөрдүн \mathcal{D} көптүгүндө аныкталган (1) система берилсин жана $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – бул системанын тең салмактуулук абалы, $a \in \mathcal{D}$. Андан кийин (1)дин оң жагы чечимдин жалгыздыгы жана жашашы жөнүндө теореманын шарттарын канааттандырат деп болжолдойлу.

$$x_m = a_m + \xi_m, \quad m = 1, \dots, n$$

деп алалы, мында ξ_m – жаңы белгисиз функциялар.

x_m ди (1) ге коюп жана оң жагын ξ_m өзгөрмөлөрү боюнча Тейлордун катарына ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\xi'_m = f_m(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_k} \cdot \xi_k + R_m, \quad m = 1, \dots, n, \quad (1)^*$$

мында $R_m - \xi_m$ белгисизине карата экинчи тартиптеги кичинеликтеги мүчө.

a – (1) системанын тең салмактуулук абалы болгондуктан,

$$f_m(a) = 0.$$

$$a_{mk} = \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_k}$$

деп алып, (1)^{*} системаны төмөнкүчө түрдө жазууга болот:

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^n a_{mk} \cdot \xi_k + R_m, \quad m = 1, \dots, n \quad (1)^{**}$$

Төмөнкү теорема орун алат:

Теорема (Ляпуновдун теоремасы). Эгер $A = (a_{mk})$ матрицасынын бардык өздүк маанилери терс чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда (1) системасынын a тең салмактуулук абалы асимптотикалык туруктуу; мындан

сырткары $|x_0 - a| < \delta$ болгондо жетишиээрлик кичине δ оң саны жашап

$$|\varphi(t) - a| \leq r|x_0 - a|e^{-\alpha(t-t_0)},$$

барабарсыздыгы орун алат, мында $\varphi(t_0) = x_0$, r жана $\alpha - x_0$ дон көз-каранды болбогон оң сандар.

Жалпылыкты бузбастан, $a = 0$ деп эсептөөгө болот.

Бул теореманын далилдөөсү Ляпуновдун функциясынын жардамында жүргүзүлөт. Айрым оң аныкталган квадраттык формалар Ляпуновдун функциялары деп аталат.

Квадраттык форманы аныктайлы.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

n -өлчөмдүү мейкиндикте өзгөрмө вектор болсун дейли.

$$W(x) = \sum_{m,k=1}^n w_{mk} \cdot x_m \cdot x_k,$$

формуласы менен аныкталган $W(x)$ функциясы x векторунан квадраттык форма деп аталат.

Эгер $x \neq 0$ болгондо

$$W(x) > 0,$$

болсо, анда квадраттык форма оң аныкталган деп аталат.

Каалагандай квадраттык форма үчүн

$$\mu|x|^2 \leq W(x) \leq \nu|x|^2, \quad (9)$$

барабарсыздыгы орун алат, мында μ, ν – айрым оң сандар, x – каалагандай вектор. Эми (7) ((1)** системасына туура келүүчү) түрдөгү сызыктуу бир тектүү системаны кароо менен, $W(x)$ оң аныкталган квадраттык форманы түзүүгө болот.

t_0, x_0 баштапкы маанилери менен берилген (7) теңдеменин чечимин $\varphi(t)$ аркылуу белгилейбиз.

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n x_{0k} \cdot \varphi_k(t) \quad (10)$$

эз болобуз. Эми

$$W(x_0) = \int_{t_0}^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \quad (11)$$

болсун дейли. (10) ду эске алып,

$$W(x_0) = \sum_{m,k=1}^n x_{0m} \cdot x_{0k} \int_{t_0}^{\infty} (\varphi_k(\tau), \varphi_m(\tau)) d\tau. \quad (12)$$

алабыз. (8) барабарсыздыгын ар бир $\varphi_k(t)$ функциясы канааттандыргандыктан, (12) нин оң жагындагы ар бир өздүк эмес интеграл жыйналат. Натыйжада, x_0 векторуна карата $W(x_0)$ квадраттык форма болот, ошону менен бирге $x_0 \neq 0$ болгондо (11) ге ылайык оң аныкталган.

Эми (7) системага ылайык, $W(x_0)$ функциясынын $W'_{(7)}(x_0)$ туундусун эсептейбиз. Алдын-ала

$$\varphi(\tau, \varphi(t)) = \varphi(\tau + t).$$

экендигин белгилей кетсек. Анда

$$\begin{aligned} W(\varphi(t)) &= \int_0^{\infty} |\varphi(\tau, \varphi(t))|^2 d\tau = \int_0^{\infty} |\varphi(\tau + t)|^2 d\tau = \\ &= \int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Ошентип,

$$\begin{aligned} W'_{(7)}(x_0) &= \frac{d}{dt} W(\varphi(t)) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \Big|_{t=t_0} = \\ &= |\varphi(t)|^2 \Big|_{t=t_0} = -|x_0|^2 \end{aligned}$$

Демек, $W'_{(7)}(x_0) = -|x_0|^2$.

Эгер (9) барабарсыздыкты эске алсак, анда

$$|x_0|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(x_0).$$

Натыйжада

$$W'_{(7)}(x_0) \leq \frac{1}{\nu} W(x_0). \quad (13)$$

$$\xi'_m = \sum_{k=1}^n a_{mk} \xi_k, \quad m = 1, \dots, n \quad (14)$$

сызыктуу системасы үчүн (1)** системаны сызыкташтыруудан алынган, башкача айтканда R_m калдык мүчөлөрдү таштоодон алынган $W(x)$ Ляпунов функциясы болсун дейли. (1)** системасына ылайык, $W(x)$ функциясынын $W'_{(1)**}(x)$ туундусун эсептейли.

$$\begin{aligned} W'_{(1)**}(x) &= \sum_{m,k=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot a_{mk} \cdot x_k + \sum_{m=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m = \\ &= W_{(14)}(x) + \sum_{m=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m \end{aligned}$$

ээ болобуз.

$$W(x) \leq b \quad (15)$$

болгондо x вектору \mathcal{D} көптүгүнө таандык болгондой, b оң санын тандайлы.

$\frac{\partial^2 f_m(\theta x)}{\partial x_m \partial x_k}$ экинчи тартиптеги туундулар үзгүлтүксүз функциялар болгондуктан, (15) эллипсоидде чектелген жана ошол себептен бул эллипсоидде

$$|R_m| \leq n_0 |x|^2 \leq \frac{n_0}{\mu} W(x),$$

мында n_0 – кандайдыр бир турактуу.

$\frac{\partial W(x)}{\partial x_m}$ x_1, x_2, \dots, x_n ге карата сызыктуу форма болгондуктан,

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \right| \leq l\sqrt{W(x)},$$

мында l – айрым турактуу. Ошентип, $W(x) \leq b$ болгондо

$$\sum_{m=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x_m} \cdot R_m \leq qW(x)^{\frac{3}{2}}$$

ээ боло тургандай, q оң саны жашайт.

$$c \leq b, \quad q\sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}$$

болгондой, c оң санын тандайбыз. Анда

$$W(x) \leq c. \tag{16}$$

Болгондо $W'_{(1)**}(x) \leq -\frac{\beta}{2}W(x)$ ээ болобуз.

$\alpha = \frac{\beta}{4}$ деп белгилеп, x үчүн (16) барабарсыздык орун алган $W'_{(4)}(x) \leq -2\alpha W(x)$ барабарсыздыкты алабыз.

x_0 – (16) эллипсоиддин ички чекити болсун дейли, б.а.

$$W(x_0) \leq c. \tag{17}$$

t_0, x_0 баштапкы шарттары менен берилген (4) системанын чечимин $\varphi(t, x_0)$ аркылуу белгилейли жана

$w(t) = W(\varphi(t, x_0))$ болсун дейли.

$w(t)$ функциясы $t \geq t_0$ бардык маанилер үчүн аныкталган жана ал үчүн

$$w'(t) \leq -2\alpha w(t) \tag{18}$$

шартын

$$w(t) \leq c. \tag{19}$$

барабарсыздыгы аткарылганга чейин канааттандырат.

Эгер $x_0 \neq 0$ болсо, анда $w(t) > 0$ болот, жана биз (18) барабарсыздыкка негизделген төмөнкү эсептөөлөрдү жүргүзөбүз:

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq -2\alpha;$$

$$\int_{t_0}^t \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq -2\alpha(t - t_0);$$

$$\ln w(t) - \ln w(t_0) \leq -2\alpha(t - t_0).$$

Акыркы барабарсыздык төмөнкүнү берет:

$$W(\varphi(t, x_0)) \leq W(x_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}.$$

(9) барабарсыздыкты пайдалануу менен

$$|\varphi(t, x_0)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu} |x_0|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0. \quad (20)$$

алабыз. Эгер x_0 үчүн (16) барабарсыздык аткарылса, (19) барабарсыздык орун алат. (20)дан квадраттык тамыр чыгаруу менен

$$|\varphi(t, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |x_0| e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

ээ болобуз. Теорема далилденди.

(1) теңдеменин a тең салмактуулук абалы толук бойдон туруксуз деп аталат, эгерде каалагандай σ оң саны жашап, каалагандай $\varphi(t, x_0)$ чечими $|x_0 - a| < \sigma$ шарынын $x_0 \neq a$ чекитинен баштап, ошол шарды сөзсүз таштап кетип жана ага кайра кайтып келбесе.

Эгер $A = (a_{mk})$ матрицасынын бардык өздүк маанилери оң чыныгы бөлүктөргө ээ болсо, анда (1) теңдеменин a тең салмактуулук абалы толук бойдон туруксуз болот.