Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д.Н. Прянишникова»

В.В. Аюпов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Пермь
ИПЦ «Прокрость»
2017

УДК 681.3.06 (075)
ББК 22.1
А-998

Рецензенты:

И.К. Березин, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИМСС УрО РАН;

В.Н. Иванов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Пермского национального исследовательского университета.

А-998 Аюпов, В.В.
Математическое моделирование технических систем: учебное пособие / В.В.Аюпов; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 242 с.
ISBN 978-5-94279-337-1

В учебном пособии представлены основные понятия, определения и положения теории моделирования и теории систем, приведена классификация математических моделей, даны описания основных форм математических моделей технических систем, используемых при решении задач современной сельскохозяйственной практики.

Учебное пособие предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлению 35.03.06 «Агроинженерия» Пермской ГСХА, для изучения курса «Математическое моделирование технических систем». Пособие может оказаться полезным студентам, магистрантам и аспирантам других направлений и специальностей сельскохозяйственных вузов при выполнении ими выпускных квалификационных работ.

УДК 681.3.06 (075)
ББК 22.1

Печатается по решению Методического совета Пермской государственной сельскохозяйственной академии (протокол № 3 от 16 января 2017 г.).

Учебное издание

Аюпов Васыл Вафович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Подписано в печать 31.01.2017 г. Формат 60×80 $^{1}/_{16}$
Усл. печ. л. 15,12. Тираж 50 экз. Заказ №13.

ИПЦ *«ПрокростЪ»*
Пермской государственной сельскохозяйственной академии
имени академика Д.Н. Прянишникова
614990, Россия, г. Пермь, ул. Петропавловская, 23
Тел. (342) 210-35-34

ISBN 978-5-94279-337-1

Содержание

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов инженерного факультета, изучающих дисциплину математического и естественнонаучного цикла “Математическое моделирование технических систем” и теоретические основы работы технических систем – машин и механизмов.

Целью дисциплины «Математическое моделирование технических систем» является изучение методов построения и анализа математических моделей, постановка и решение задачи синтеза проектируемых и оптимизации находящихся в эксплуатации технических систем (машин, механизмов и т.п.)

Содержание учебного пособия построено на материалах различных литературных источников, авторских разработках по системному подходу, математическому моделированию и на базе созданного и прочитанного курса лекций в Пермской государственной сельскохозяйственной академии.

Для освоения материала данного учебного пособия достаточно знаний, полученных студентами при изучении курсов высшей математики, компьютерной математики и теоретической механики.

Введение

Жизнь любого человека сопровождается процессами моделирования и различными моделями. Использование различных учебных пособий, макетов в школьные годы, проведение лабораторных экспериментов, расчетов в студенческие годы, разработка чертежей, проектирование и расчет реальных устройств и процессов, построение теорий различного рода и назначения – примеры использования моделей и моделирования, когда реальные объекты и процессы заменяются их отображениями (моделями, описаниями и т.д.).

Если кратко охарактеризовать моделирование, то оно заключается в замене *реальной системы* (процесса, явления) *моделью*, которая находится с ней (с ними) в некотором соответствии и способна воспроизводить интересующие исследователя свойства или характеристики реальной системы.

Безусловно, моделирование является не единственным методом изучения окружающего нас мира. Но роль моделирования в науке, в исследованиях инженерных, организационных, экономических объектов и систем и, вообще, в жизни человека, весьма велика. Можно утверждать: **познание любого объекта, системы, процесса, явления сводится, по существу, к созданию его (ее) модели.**

Познание и изучение окружающего нас мира можно осуществлять различными способами и методами. Но при исследовании различных сложных объектов, явлений, процессов, при создании, организации и оптимизации сложных систем *метод моделирования* является одним из самых мощных методов. Так, перед изготовлением любого технического устройства или сооружения разрабатывается его модель-проект, человек, прежде чем совершить что-либо, обдумывает возможную последовательность действий и возможные последствия этих действий, организуя взаимодействие множества объектов, т.е. организуя деятельность некоторой системы, человек организует систему так, чтобы получить максимальный эффект от деятельности такой системы и т.д. Причиной все более расширяющегося применения моделей является то, что процессы, происходящие в модели, можно регистрировать, проверять их соответствие результатам теоретического анализа, заменять аналитические расчеты процессов их непосредственным наблюдением, т. е. эффективно решать все основные задачи экспериментального исследования.

Можно отметить и другой существенный фактор, способствующий значительному повышению интереса к методам моделирования как в науке и технике, так в других областях, – это развитие и широкое распространение средств вычислительной техники. С помощью моделей, реализованных на компьютере, можно изучать новые явления, решать практически все задачи анализа и проектирования сложных систем, осуществлять выбор наилучших вариантов решений, выполнять анализ и прогнозирование поведения технических систем и решать множество других задач.

В этом учебном пособии рассматриваются общие вопросы моделирования, классификации моделей, конкретные методы и алгоритмы построения математических моделей, основанных на принципах теоретической механики.

Данное учебное пособие предназначено для ознакомления студентов, магистрантов и аспирантов сельскохозяйственных вузов, обучающихся по направлениям «Агроинженерия», с основами моделирования сложных технических объектов и систем, используемых в сельскохозяйственной практике.

1. Общие положения теории моделирования

1.1. Моделирование как метод исследования

Модель и моделирование – универсальные понятия, атрибуты одного из наиболее мощных методов познания в любой профессиональной области, познания систем, процессов, явлений. *Модель и моделирование* объединяют специалистов различных областей, работающих над решением междисциплинарных проблем.

Под *моделированием* в широком смысле принято понимать процесс построения, изучения и совершенствования моделей, их использование в научных исследованиях (теоретических и экспериментальных), применение моделей непосредственно в процессах планирования, управления, оптимизации, прогнозирования, контроля и т.д.

Моделирование как метод исследования является мощным инструментом познания на протяжении всей истории развития человечества. Одним из примеров созданной человеком системы моделей, адекватно отражающей широкий класс явлений и процессов реального мира, являются, например, модели классической механики.

Моделирование как инструмент познания требует творческого подхода и определенного искусства владения им. С другой стороны, моделирование как наука опирается на научные знания той области, где этот инструмент познания используется. Например, для построения математической модели автомобильного поезда (АП) требуются знания законов теоретической механики, движения АП в различных эксплуатационных условиях и различных режимах движения и т.д. Только глубокие профессиональные знания исследователя в сочетании с творческим подходом к решаемой проблеме могут быть основой для успешного применения метода моделирования. Сам процесс моделирования предполагает такой способ изучения объекта, при котором модель, с точки зрения цели исследования, вполне точно (адекватно) и достаточно полно замещает изучаемый объект в процессе познавательной деятельности.

Моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования *по своей сущности* приводит к условному делению на материальное (физическое) моделирование, теоретическое (абстрактное) и идеальное моделирование.

Материальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его *материального* аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики исследуемого объекта.

Основными разновидностями материального моделирования являются натурное и аналоговое.

Натурное моделирование – это моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

Примерами натурных физических моделей являются модели гидротехнических сооружений, военные учения, аэродинамическая труба, воспроизводящая условия полета самолета в воздушном пространстве, экспериментальный макет автомобиля и многое другое.

К достоинству физического моделирования следует отнести получение достаточно достоверных результатов, которые необходимы для принятия правильных решений при проектировании, планировании, контроле, управлении, прогнозировании и т.д. К недостаткам следует отнести относительно высокую стоимость по сравнению с математическими моделями, а также трудность быстрой (оперативной) доработки модели при переходе от одного варианта к другому. Изготовление физической модели занимает много времени, а соответствие измеренных искомых величин на модели оригиналу бывает достаточно грубым, что искажает в некоторой степени изучаемый процесс.

Аналоговое моделирование – моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами).

Таким образом, аналогия не предполагает тождественности физической природы модели и прототипа, но требует, чтобы модель при некоторых условиях вела себя аналогично поведению оригинала (косвенное подобие). Аналогия основана на возможности моделирования явления (системы, процесса) одной природы явлениями (системами, процессами) совсем другой природы. Например, электромеханическая аналогия: колебания в механических системах можно моделировать колебаниями в электрических цепях. При этом модель (аналог) и оригинал (прототип) описываются одинаковыми математическими соотношениями, например дифференциальными уравнениями. На этом сходстве основана теория аналогий и аналоговое моделирование. Аналоговые, а затем цифровые и гибридные вычислительные машины позволяют решать широкий класс линейных и нелинейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях. На моделях-аналогах можно "проигрывать" различные ситуации, даже маловероятные, например, ситуации, до которых объект-оригинал нельзя допускать – критические, аварийные и чрезвычайные ситуации. Данный класс моделей используется также при исследовании сложных систем, над которыми нельзя ставить опасные эксперименты (ракетный комплекс, экономика, производство, экология, летательный аппарат и т.д.).

Теоретическое (абстрактное, информационное) моделирование – моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, иероглифы, наборы символов, включающие в себя и совокупность правил оперирования этими знаковыми образованиями и конструкциями.

Примерами таких моделей являются:

• коды и сигналы как модели сообщений;

• математические формулы как модели процессов и объектов;

• рабочие чертежи как модели деталей будущей конструкции;

• характеристика личности как модель деятельности и качеств человека;

• любой язык человеческого общения (устного или письменного);

• любые алгоритмические языки и языки программирования и т.д.

Между моделями данного класса и оригиналом возможно однозначное отношение. Например, теория кодирования изучает законы и правила построения и использования кодов (кодирование-декодирование) в технических системах. Другими примерами использования моделей условного подобия являются: криптография, картография, языкознание, техническое черчение, информатика и математика.

Математическое моделирование – частный случай знакового моделирования.

Математическое моделирование – это знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследования модели проводятся с использованием тех или иных математических методов.

В настоящее время это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного познания.

Преимуществами математического моделирования по сравнению с другими видами моделирования являются:

- экономичность, сбережение ресурсов реальной системы;
- возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов и систем;
- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;
- возможность изменения масштаба времени;
- универсальность технического и программного обеспечения, наличие пакетов прикладных программ для проведения широкого круга работ;
- возможности прогнозирования и выявления общих закономерностей;
- возможности сравнительно простого многофакторного анализа.

В качестве примеров математического моделирования в различных областях человеческой деятельности можно указать расчет траекторий космических аппаратов, прогнозирование погодных явлений, расчет и проектирование машин и устройств любой сложности, моделирование процессов в экономике, использование математических моделей в медицине, биологии и многое другое.

Идеальное моделирование – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием мыслимого аналога, воспроизводящего требуемые характеристики и свойства исследуемого объекта.

Примерами идеальных моделей являются геометрическая точка, математический маятник, идеальный газ, бесконечность и др.

Различают два вида идеального моделирования:

- неформализованное (интуитивное);
- формализованное.

К ***неформализованному моделированию*** можно отнести построение отображений (образов, моделей) с использованием различных форм мышления: эмоции, интуиции, образного мышления, подсознания, эвристики как совокупности логических приемов и правил отыскания истины. При неформализованном моделировании модель не формулируется, а вместо нее используется некоторое нечеткое мысленное отражение (образ) реальности, служащее основой для рассуждения и принятия решения.

Примером неопределенных (интуитивных) представлений об объекте может служить нечеткое описание ситуации, основанное на опыте и на интуиции.

К ***формализованному моделированию*** можно отнести образное моделирование, когда модели строятся из каких-либо наглядных элементов (упругие шары, потоки жидкости, траектории движения тел и т.д.). Анализ образных моделей осуществляется мысленно и может быть отнесен к формализованному моделированию в том случае, когда правила взаимодействия образов четко формализованы. Этот вид моделирования используется при мысленном эксперименте.

К формализуемым абстрактным моделям относятся знаковые модели, в том числе математические и языковые конструкции (языки программирования, естественные языки) вместе с правилами их преобразования и интерпретации. Примером знаковых моделей могут служить также чертежи, схемы, графики, формулы и т.д.

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные модели проще и удобнее применять и исследовать в силу их возможности проводить *вычислительные эксперименты*. Вычислительный эксперимент – это эксперимент, осуществляемый с помощью компьютерной модели, с целью прогноза состояний системы, ее реакций на входные сигналы.

Компьютерные модели позволяют выявлять основные факторы, определяющие свойства изучаемого объекта-оригинала, в частности, исследовать отклик моделируемой технической системы на изменения ее параметров и начальных условий. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов на компьютере, целью которых является анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого объекта.

Эволюционное моделирование представляет собой направление в математическом моделировании, объединяющем компьютерные и эвристические методы моделирования с эволюционным принципом. Инструментами эволюционного моделирования являются генетические алгоритмы, эволюционные стратегии, эволюционное программирование, а также искусственные нейронные сети, нечеткая логика. При этом эволюционные вычисления можно трактовать как развитие методов теории адаптивных систем.

1.2. Правила и этапы моделирования

Можно выделить следующие правила и этапы моделирования при исследовании технических систем и технологических процессов.

Первое правило моделирования заключается в привлечении различных специалистов для разработки обобщенной технологии создания и анализа моделей. Необходимость в привлечении специалистов разных профилей обусловлена сложностью и трудоемкостью процесса разработки, исследования и применения моделей.

Второе правило говорит о том, что разработчикам моделей нужно знать как общие законы функционирования технических систем, так и частные соотношения физики, механики и других наук, которые обычно представляются математическими соотношениями.

Третье правило заключается в том, что объективная сложность технических систем и происходящих в них технологических процессов, исключает возможность их всестороннего изучения с помощью только одной какой-либо модели. Это означает, что обобщенная модель должна состоять из нескольких разнотипных взаимосвязанных подмоделей.

Процесс построения такой обобщенной модели состоит из следующих основных этапов моделирования.

1. *Содержательная постановка задачи* – обследование объекта и формулировка технического задания на разработку модели.

2. *Концептуальная постановка задачи* – семантическое моделирование объекта.

3. *Проверка корректности* полученной модели и ее предварительный качественный анализ.

4. *Математическая постановка задачи* и обоснование метода ее решения.

5. *Подбор или разработка алгоритма* решения задачи с помощью компьютера.

6. *Исследование модели и проверка адекватности полученных результатов.*

Итогом процесса моделирования технической системы должно быть создание работающей адекватной модели, удовлетворяющей требованиям заказчика и разработчика.

1.3. Понятие модели

Существует достаточно большое число определений понятия «модель». Одни из них слишком абстрактны, другие – слишком конкретны. Но все они отражают ту или иную сторону этого многогранного понятия.

Модель – это упрощенное представление другого объекта или процесса.

Модель – это форма представления и существования наших знаний.

Модель – это инструмент познания окружающего мира.

Модель – как аналог (образец) будущего изделия.

Модель – как аналог реального объекта.

Аналогия (от греч. *analogia* – соответствие, соразмерность) – это представление о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем сходство может быть как существенным, так и несущественным. Существенность сходства или различия двух объектов условна и зависит от уровня абстрагирования (отвлечения), определяемого конечной целью исследования. Уровень абстрагирования зависит от набора учитываемых параметров объекта исследования.

В дальнейшем будем придерживаться следующего определения понятия модели, которое является более узким и более конкретным.

Объект* M *является в определенных условиях* *моделью системы* S *(объекта, процесса, явления, ситуации), если* *мо-

***дель* M *имитирует (воспроизводит) требуемые характеристики (свойства, признаки) системы* S.

Таким образом, модель и исходная система *эквивалентны* относительно множества *воспроизводимых* характеристик, в то время как полное множество характеристик самой системы, как правило, значительно шире подмножества характеристик, воспроизводимых моделью.

Модель **M** по сравнению с оригиналом **S** имеет существенные преимущества: наглядность, простота, обозримость, легкость преобразований с ней, возможность проведения испытаний и получения с ее помощью новых информации и знаний.

В свою очередь сама модель является системой. Модель имеет структуру, цель, является некоторой иерархически организованной целостностью.

Структура модели – это упорядоченное множество элементов и их отношений.

В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных иерархических уровня: метауровень, макроуровень и микроуровень.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теорию графов, математической логики, теории автоматического управления, теории конечных автоматов.

На *макроуровне* объект рассматривается как динамическая система с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных свойств.

На *микроуровне* объект рассматривается как сплошная среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных.

Понятие модели претерпевало так же, как и понятие системы, определенную эволюцию. Эволюция понятий моделей отражает эволюцию процесса познания. Так, на ранних этапах под моделью понимали некоторое физическое устройство (объект), которое в определенных условиях заменяет другой объект. Примерами таких устройств могут служить модели самолетов, кораблей, машин, различные макеты, шаблоны, протезы и т.д.

На следующем этапе под моделью объекта понимался объект-заменитель, который отражал лишь интересующие исследователя свойства и характеристики объекта-оригинала. При этом модель перед объектом обладала такими преимуществами, как наглядность, простота, доступность для эксперимента, возможность идентификации и т.д. Само понятие модели уже значительно расширилось и включало в себя чертежи, таблицы, характеристики, графики, рисунки, картографические изображения, различные формы описания устройств и т.д.

На третьем же этапе в понятие модели включают не только реальные (физические, материальные), но и абстрактные (идеальные) построения. Примером последних могут служить идеи, гипотезы, теории, математические, логические и имитационные модели. Так, в форме математической модели можно описать и типовую деятельность человека-оператора в организационно-технических системах. Сам процесс мышления можно трактовать как процесс последовательного перехода от одних абстрактных моделей к другим. При этом модель выступает как форма существования и представления знаний об исследуемом объекте (явлении, процессе, системе). Таким образом, познание материального мира идет через модели, а целенаправленная деятельность человека невозможна без моделирования.

Укажем на некоторые *свойства моделей*.

Во-первых, хорошая модель очень информативна, и эта информация представлена в весьма сжатом виде.

Во-вторых, модель иерархична, – есть модели более высокого уровня (например, модель системы управления) и более низкого уровня (например, модели элементов систем управления).

В-третьих, сама модель уточняется и корректируется в процессе моделирования, т.е. недостатки модели нельзя предугадать заранее.

В-четвертых, модель может выступать в качестве эталона, идеализирующего собой различные формы деятельности: управление, планирование, принятие решений, прогнозирование и т.д. Например, в адаптивных (самонастраивающихся) системах управления техническими объектами реализуется принцип управления по эталонной модели.

Главный недостаток метода моделирования заключается в том, что при некорректном моделировании можно получить результаты, не имеющие отношения к исследуемым свойствам системы или неправильно отражающие свойства реальной системы. В этом есть объективная причина: модель отражает (не всегда точно) только определенные, но не все, свойства реального объекта. И все же достоинств у метода моделирования больше, чем недостатков.

Можно выделить следующие *достоинства моделей*:

1. Модели *экономичны* так как они экономят время, сокращают издержки и затраты материальных ресурсов в процессе исследования или проектирования технического объекта.

2. Модели *практичны*, они всегда строятся так, чтобы были проще и удобнее для исследований, чем исходные объекты. На моделях можно ставить такие эксперименты, проведение которых на реальных объектах либо слишком дорого, либо опасно для персонала и окружающей среды.

3. Некоторые явления можно изучать *только* на их моделях. Например, ядерные взрывы, траектории космических аппаратов, электрические разряды молнии, полет самолета при развитии критической ситуации на борту в результате отказов отдельных функциональных подсистем и т.п.

4. Модели воспроизводят лишь основные, наиболее *важные для данного исследования* свойства изучаемой системы. Отсюда же следует, что у изучаемой системы (объекта) могут быть несколько (много) моделей, каждая из которых воспроизводит (имитирует) определенный набор свойств и характеристик. Так, например, проектируя новое техническое устройство, можно построить и использовать модель, описывающую динамические (упрощенно, скоростные) свойства и характеристики. В то же время для определения прочностных характеристик, изгибно-крутильных свойств потребуется совершенно другая модель.

5. Модели позволяют выявить механизм формирования исследуемых свойств системы, научиться прогнозировать эти свойства и целенаправленно их изменять в желаемую сторону.

6. Исследования, проведенные с применением моделей, могут послужить основанием для заключения о несостоятельности некоторых гипотез или идей.

7. При моделировании систем могут возникнуть и побочные эффекты. Например, модель может воспроизводить такие признаки системы, которые адекватны реальным свойствам, но данная модель не была предназначена для этого. Этот эффект следует рассматривать как исключение, а не как закономерность, хотя в истории науки есть случаи, когда подобным образом делались открытия в области тонких физических явлений.

Достоинства моделирования делают его наиболее эффективным методом, как научных исследований, так и практической деятельности человека.

1.4. Классификация моделей

Проблема *моделирования* состоит из трех задач:

- *построение модели* (это творческий этап исследования, так как в общем случае нет алгоритма для построения произвольной модели);
- *исследование модели* (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- *использование модели* (конструктивная и конкретизируемая задача).

По уровню (глубине) *моделирования модели* бывают:

- *эмпирические* – разработанные на основе эмпирических фактов и знаний;
- *теоретические* – полученные на основе математических описаний;
- *комбинированные (смешанные)* – основанные на эмпирических зависимостях и математических описаниях.

Проблема классификации моделей, как и любых достаточно сложных явлений и процессов, сложна и многогранна.

Объективная причина этого состоит в том, что исследователя интересует лишь какое-то одно свойство (или несколько свойств) системы (объекта, процесса, явления), для отображения которого и создана модель. Поэтому в основу классификации можно положить множество различных классификационных признаков: способ описания, функциональное назначение, степень детализации, структурные свойства, область применения и т.д.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые классы (виды) моделей (табл.1).

Таблица 1

Виды моделей и их классификация

Признак классификации	**Виды моделей**
Сущность модели	− материальные (физические) − идеальные (воображаемые) − информационные (теоретические, абстрактные)
Характеристика объекта моделирования	− модель внешнего вида − модель структуры − модель поведения
Степень формализации	− неформализованные − частично формализованные − формализованные
Назначение модели	− исследовательские: · дескрипторные · когнитивные · концептуальные · формальные − учебные − рабочие: · оптимизационные · управленческие
Роль в управлении объектом моделирования	− регистрирующие − эталонные − прогностические − имитационные − игровые − оптимизационные
Фактор времени	− статические − динамические

Дадим краткие пояснения видам моделей, представленных в табл.1.

Материальные (физические, реальные) модели – модели, построенные средствами материального мира для отражения его объектов, процессов.

Идеальные (воображаемые) модели – модели, построенные средствами мышления на базе нашего сознания.

Информационные (абстрактные, теоретические) модели – модели, построенные на одном из языков (знаковых систем) кодирования информации.

Познавательная модель – форма организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Познавательная модель, как правило, является *теоретической моделью*.

Прагматическая модель – средство организации практических действий, рабочего представления целей системы для ее управления. Прагматические модели, как правило, *прикладные модели*.

Инструментальная модель – средство построения, исследования и/или использования прагматических и/или познавательных моделей.

Материальные модели представляют собой реальные, вещественные конструкции, служащие для замены оригинала в определенном отношении. Основным требованием к построению данного класса моделей является требование сходства (подобия, аналогии) между моделью и оригиналом. Различают несколько типов подобия – геометрическое, физическое, аналогию и др.

Геометрическое подобие является основным требованием к построению геометрических моделей, которые представляют собой объект, геометрически подобный своему прототипу и служащий для демонстрационных целей. Две геометрические фигуры подобны, если отношение всех соответствующих длин и углов одинаковы. Если известен коэффициент подобия – масштаб, то простым умножением размеров одной фигуры на величину масштаба определяются размеры другой фигуры. В общем случае такая модель демонстрирует принцип действия, взаимное расположение частей, процесс сборки и разборки, компоновку объекта и предназначена для изучения свойств, которые инвариантны (независимы) от абсолютных величин линейных размеров объекта. Примерами геометрических моделей являются: макеты машин, манекены, скульптуры, протезы, глобусы и т.д. Они изображают прототип не во всем многообразии его свойств, не в любых качественных границах, а в границах чисто пространственных. Здесь имеет место сходство (подобие) не вообще между вещами, а между особыми типами вещей – телами. В этом ограниченность данного класса моделей. Отметим, что здесь реализуется прямое подобие.

Физическое подобие относится к модели и оригиналу одинаковой физической природы и отражает их сходство в одинаковости отношений одноименных физических переменных в соответствующих пространственно-временных точках. Два явления физически подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой. Геометрическое подобие является частным случаем физического подобия. При физическом подобии модель и оригинал могут находиться в более сложных геометрических отношениях, чем линейная пропорциональность, так как физические свойства оригинала не пропорциональны его геометрическим размерам. Здесь важно, чтобы пространство физических переменных модели было подобно пространству физических переменных оригинала. При этом физическая модель по отношению к оригиналу является аналогией типа изоморфизма (взаимно однозначного соответствия). Центральной проблемой является проблема корректного пересчета результатов модельного эксперимента на результаты испытания оригинала в реальных условиях. Сходство основано на соблюдении некоторых физических критериев.

Идеальные (воображаемые) модели – это идеальные конструкции в нашем сознании в виде образов или представлений о тех или иных физических явлениях, процессах, объектах, системах (геометрическая точка, бесконечность и т.д.).

Абстрактные (теоретические, информационные) модели – модели, представляющие объекты моделирования в образной или знаковой форме.

Примерами абстрактных моделей могут служить какая-либо гипотеза о свойствах материи, предположения о поведении сложной системы в условиях неопределенности или новая теория о строении сложных систем.

На абстрактных моделях и на умозрительной аналогии (сходстве) между моделью **M** и оригиналом **S** строится абстрактное (теоретическое) моделирование.

Ярким представителем абстрактного и знакового моделирования является математическая модель.

Математическая модель – это совокупность математических формул, уравнений, соотношений, описывающая интересующие исследователя свойства объекта моделирования.

Субъекта моделирования (человека) в процессе моделирования могут интересовать

- внешний вид объекта моделирования;
- структура объекта моделирования;

– поведение объекта моделирования;

– всевозможные комбинации вида, структуры, поведения объекта моделирования.

Для исследования каждого аспекта моделирования (вид, структура, поведение) или их комбинации могут использоваться соответствующие модели: *модели внешнего вида*, *модели структуры*, *модели поведения*.

Модель внешнего вида чаще всего сводится к перечислению внешних признаков объекта моделирования и предназначена для идентификации (распознавания) объекта.

Модель структуры представляет собой перечень составных элементов объекта моделирования с указанием связей между этими элементами и предназначена для наглядного отображения, изучения свойств, выявления значимых связей, исследования стабильности объекта моделирования.

Модель поведения представляет собой описание изменений внешнего вида и структуры объекта моделирования с течением времени и в результате взаимодействия с другими объектами. Назначение моделей поведения – прогнозирование будущих состояний объекта моделирования, управление объектов, установление связей с другими объектами, внешними по отношению к объекту моделирования.

Объективно уровни наших представлений, уровни наших знаний о различных явлениях, процессах, системах различны. Это отражается в способах представления рассматриваемых явлений.

К ***неформализованным*** (интуитивным) моделям можно отнести отображения (образы), полученные с использованием различных форм мышления: эмоции, интуиции, образного мышления, подсознания, эвристики как совокупности логических приемов и правил отыскания истины. При неформализованном моделировании модель не формулируется, а вместо нее используется некоторое нечеткое мысленное отражение (образ) реальности, служащее основой для принятия решения.

Примером неопределенных (интуитивных) представлений об объекте может служить нечеткое описание ситуации, основанное на опыте и на интуиции.

В отличие от интуитивного ***семантическое*** (*смысловое*) моделирование логически обосновано с помощью некоторого числа исходных предположений (гипотез).

К ***формализованным*** моделям можно отнести образные модели, когда модели строятся из каких-либо наглядных элементов (упругие шары, потоки жидкости, траектории движения тел и т.д.).

К формализуемым абстрактным моделям относятся ***семиотические*** (*знаковые*) модели, в том числе математические конструкции, языки программирования, естественные языки вместе с правилами их преобразования и интерпретации. Такие модели используют не только общеизвестные слова или наглядные изображения, но и разного рода символы – буквы, иероглифы, нотные знаки, цифры и т.д.

По своему **назначению** модели призваны решать множество задач:

- *исследовательские* (дескрипторные, когнитивные, концептуальные, формальные) модели предназначены для генерации знаний путем изучения свойств объекта;

- *учебные* модели предназначены для передачи знаний об изучаемом объекте;

- *рабочие* (оптимизационные, управленческие) модели предназначены для генерации правильных действий в процессе достижения цели.

К ***исследовательским*** моделям относятся полунатурные стенды, физические модели, математические модели.

Отметим, что исследовательские модели могут выступать в качестве учебных, если они предназначены для передачи знаний о свойствах объекта. Примерами рабочих моделей могут служить: робот; автопилот; математическая модель объекта, встроенная в систему управления или контроля; искусственное сердце и т.д. При этом исследовательские и учебные модели должны приближаться к реальности, а рабочие модели должны отражать эту реальность. Четкой границы между этими моделями не существует. Так например, исследовательская модель, адекватно отражающая свойства объекта, может быть использована в качестве рабочей.

Исследовательские модели являются носителями новых знаний, учебные модели соединяют старые и новые знания.

Рабочие модели идеализируют накопленные знания в форме идеальных действий по выполнению тех или иных функций, которые желательно было бы осуществить.

Дескрипторные модели – описательные модели, предназначены для установления законов изменения параметров этих процессов и являются реализациями описательных и объяснительных содержательных моделей на формальном уровне моделирования.

В качестве примера такой модели можно привести модель движения материальной точки под действием приложенных сил, использующую второй закон Ньютона. Задавая положение и скорость точки в начальный момент времени (входные величины), массу точки (параметр модели) и закон изменения прикладываемых сил (внешние воздействия), можно определить скорость и координаты точки в любой последующий момент времени (выходные величины).

Когнитивные (мысленные, познавательные) ***модели*** – модели, представляющие собой некий мысленный образ объекта, его идеальная модель в голове исследователя, полученная в результате наблюдения за объектом-оригиналом. Иначе говоря, формы организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Когнитивные модели являются *теоретическими моделями*.

Формируя такую модель, исследователь, как правило, стремится ответить на конкретные вопросы, поэтому от бесконечно сложного устройства объекта отсекается все ненужное с целью получения его более компактного и лаконичного описания.

Когнитивные модели субъективны, так как формируются умозрительно на основе всех предыдущих знаний и опыта исследователя. Получить представление о когнитивной модели можно, только описав ее в знаковой форме. Представление когнитивной модели на естественном языке называется ***содержательной моделью***.

Когнитивные и содержательные модели не эквивалентны, поскольку первые могут содержать элементы, которые исследователь не сможет или не хочет сформулировать.

Концептуальной моделью принято называть содержательную модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знания, занимающихся изучением объекта моделирования.

В более широком смысле под концептуальной моделью понимают содержательную модель, базирующуюся на определенной концепции или точке зрения.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий, универсального языка моделирования или алгоритмических языков).

В гуманитарных науках процесс моделирования во многих случаях заканчивается созданием концептуальной модели объекта.

В естественнонаучных и технических дисциплинах, как правило, удается построить формальную модель.

Таким образом, когнитивные, содержательные и формальные модели составляют три взаимосвязанных уровня моделирования.

Оптимизационные модели – *нормативные* модели, предназначенные для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом.

Как правило, такие модели строятся с использованием одной или нескольких дескриптивных моделей и включают некоторый критерий, позволяющий сравнивать различные варианты наборов значений выходных величин между собой с целью выбора наилучшего. На область значений входных параметров могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств, связанные с особенностями рассматриваемого объекта или процесса.

Отметим, что для большинства реальных процессов, конструкций требуется определение оптимальных параметров сразу по нескольким критериям, т.е. мы имеем дело с так называемыми многокритериальными задачами оптимизации.

Управленческие модели – *ситуационные* модели, используемые для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека.

В общем случае принятие решений является процессом, по своей сложности сравнимым с процессом мышления в целом. Однако на практике под принятием решений обычно понимается выбор некоторых альтернатив из заданного их множества, а общий процесс принятия решений представляется как последовательность таких выборов альтернатив.

В отличие от оптимизационных моделей, где критерий выбора считается определенным, и искомое решение устанавливается из условий его экстремальности, в управленческих моделях необходимо введение специфических критериев оптимальности, которые позволяют сравнивать альтернативы при различных неопределенностях задачи. Вид критерия оптимальности в управленческих моделях заранее не фиксируется. Именно в этом состоит основная особенность данных моделей.

Регистрирующие модели представляют собой модели, предназначенные для регистрации интересующих исследователя свойств и качеств, недоступных для непосредственной регистрации на объекте моделирования.

При решении задач управления сложными динамическими объектами используются эталонные и прогностические модели, которые представляют собой формализованное отображение желаемых характеристик объекта управления для целей текущего или будущего управления объектом.

Эталонная модель – это модель, описывающая в той или иной форме желаемые (идеализированные) свойства объекта моделирования (управления).

Прогностические модели – модели, предназначенные для определения *будущих* состояний (*будущего* поведения) объекта моделирования.

Имитационные модели – это совокупность описания элементов системы, взаимосвязей элементов друг с другом, внешних воздействий, алгоритмов функционирования системы (или правил изменения состояний) под влиянием внешних и внутренних возмущений.

Имитационные модели создаются и используются тогда, когда создание единой модели сложной системы невозможно или сопряжено с очень большими трудностями, имеющиеся математические методы не позволяют получить удовлетворительных аналитических или численных решений рассматриваемых задач. Но наличие описаний элементов и алгоритмов функционирования позволяет имитировать процесс функционирования системы и производить *измерения* интересующих характеристик.

Можно также отметить, что имитационные модели могут быть созданы для гораздо более широкого класса объектов и процессов, чем аналитические и численные модели. Кроме того, поскольку для реализации используются, как правило, вычислительные средства (компьютеры и другие средства) средствами формализованного описания имитационных моделей служат универсальные или специальные алгоритмические языки.

Имитационное моделирование при изучении больших (сложных) систем остается практически единственно доступным методом получения информации о поведении системы в условиях неопределенности, что особенно важно на этапе ее проектирования. Данным методом можно выбирать структуру, параметры и алгоритмы управления синтезируемой системы, оценивать их эффективность, а также имитировать поведение системы в условиях, которые невозможно воспроизвести на реальном прототипе (например, аварии, отказы, чрезвычайные ситуации и т.д.). Когда при имитационном моделировании изучают поведение системы при действии случайных факторов с последующей статистической обработкой информации, то целесообразно в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статического моделирования. При этом метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) рассматривается как численный метод решения аналитических задач.

Игровые модели – это совокупность описаний военных, экономических, спортивны, деловых игр. Эти модели являются упрощенными математическими моделями конфликтов и, как бы, репетируют поведение объекта в различных ситуациях, проигрывая их с учетом возможной реакции со стороны конкурента, союзника или противника. С помощью игровых моделей можно оказывать психологическую помощь больным, разрешать конфликтные ситуации. Для моделирования конфликтных ситуаций разработан специальный аппарат – математическая теория игр. Стороны, участвующие в конфликте, называются игроками.

Особый класс моделей составляют *кибернетические* модели, которые отражают управленческие аспекты поведения сложных систем на основе информационного обмена между ее элементами. Сама физическая природа кибернетических моделей отличается от физической природы прототипа и ее элементов. Особенностью кибернетических моделей является возможное наличие в них, кроме механизма управления, также и механизмов самоорганизации, обучения, адаптации и т.д., а в более сложных системах – и искусственного интеллекта.

Учет **фактора времени** при моделировании приводит использованию статических и динамических моделей.

Статические модели отражают установившиеся (равновесные) режимы работы системы.

Статические режимы работы элементов, объектов, систем отражены в их статических характеристиках (линейных, нелинейных) и описываются соответствующими алгебраическими функциональными зависимостями.

Динамические модели отражают неустановившиеся (неравновесные, переходные) режимы работы системы.

Для описания неравновесных (переходных) режимов работы системы чаще всего используются дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений.

Учитывая специфическую направленность рассматриваемых вопросов моделирования, приведем более подробную классификацию математических моделей.

1.5. Классификация математических моделей

Первоначально дадим несколько различных определений математических моделей.

Математическая модель – это объект, который имеет с оригиналом следующее однозначное соответствие:

1) структуры, т.е. состава элементов и связей между ними;

2) уравнений, описывающих свойства этих элементов и их связей.

Учитывая, что система есть совокупность взаимосвязанных элементов, (объектов) в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое, можно сформулировать определение математической модели системы.

Математическая модель системы – это множество математических моделей элементов, взаимосвязанных и взаимодействующих друг с другом и адекватно отражающих свойства системы.

Практически любая математическая модель позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления. Поэтому можно полагать, что суть любой подобной модели заключается в отображении некоторого заданного множества значений входных параметров на множество значений выходных параметров. Данное обстоятельство позволяет рассматривать математическую модель как некоторый *математический оператор* и сформулировать следующее определение.

Математическая модель – это любой оператор А, позволяющий по соответствующим значениям входных параметров X установить выходные значения параметров Y объекта моделирования: Y = AX.

В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств X и Y могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.). В то же время понятие оператора A в приведенном определении может трактоваться достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных, интегро-дифференциальных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение выходных параметров по заданным исходным значениям.

Определение математической модели через понятие оператора является более конструктивным с точки зрения построения классификации (табл.2) таких моделей, поскольку включает в себя все многообразие имеющихся в настоящее время математических моделей.

Таблица 2

Классификация видов математических моделей

Признак классификации	**Виды математических моделей**
Способ получения математической модели	- теоретические - экспериментальные
Форма представления математической модели	- инвариантные - аналитические - графические - функциональные - структурные - алгоритмические
Вид оператора математической модели	- алгебраические - функциональные - дифференциальные - интегральные
Свойства параметров оператора модели	− линейные − нелинейные − сосредоточенные − распределенные − стационарные − нестационарные
Фактор времени	− статические − динамические
Количество входов/выходов	− скалярные − матричные (многосвязные)
Количество переменных состояния	− одномерные − многомерные
Характер переменных	− непрерывные − дискретные − логические − детерминированные − стохастические (вероятностные)

Теоретические модели получают на основе описания физических процессов функционирования объекта.

Экспериментальные модели формируются на основе поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как ”черный ящик”. Эксперименты при этом могут быть физические (на техническом объекте или на его физической модели) или вычислительные (теоретической математической модели).

Инвариантная форма – это запись соотношений в математической модели в общем виде с помощью традиционного математического языка безотносительно (не учитывая) к методу решения.

Аналитические модели – модели в форме аналитических функциональных зависимостей, когда представление преобразования входного сигнала в выходной осуществляется с помощью некоторой функциональной зависимости или логического условия.

Графические *(схемные)* модели представляются в виде графов, эквивалентных схем, диаграмм и т.п.

Функциональные модели описывают процессы функционирования технических объектов и имеют форму систем уравнений. По способам получения функциональные математические модели делятся на *теоретические* и *экспериментальные*.

Структурные модели – модели, отображающие только структуру исследуемого объекта и использующиеся при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого. Эти параметры называют *морфологическими переменными*. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов.

Сложные явления и системы описываются множествами уравнений и соотношений. Получение требуемого результата моделирования в виде конечной формулы или численного значения является весьма сложной, а часто неразрешимой задачей. В этих случаях успешным является использование *алгоритмических* моделей.

Алгоритмические модели – модели в форме алгоритма получения требуемых результатов, реализуемого на компьютере с использованием методов вычислительной математики. Такие модели могут учитывать практически любое число существенных факторов, а потому используются для моделирования наиболее сложных объектов и процессов и чаще всего с помощью мощных и быстродействующих компьютеров.

Алгебраические модели – модели в форме алгебраического уравнения.

Дифференциальные модели – модели в форме дифференциального уравнения (обыкновенные дифференциальные уравнения, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, системы дифференциальных уравнений в частных производных).

Интегральные модели – модели в форме интегральных уравнений и систем интегральных уравнений.

Математическая модель называется ***линейной***, если оператор модели обеспечивает линейную зависимость выходных величин от значений входных величин (выполняется принцип суперпозиции).

Математическая модель называется ***нелинейной***, если оператор модели не обеспечивает линейную зависимость выходных величин от значений входных величин (не выполняется принцип суперпозиции).

В моделях с ***сосредоточенными*** параметрами предполагается, что все свойства оператора модели сосредоточены в фиксированных точках. Такое предположение приводит к использованию моделей в форме алгебраических и/или обыкновенных дифференциальных уравнений.

В моделях с ***распределенными*** параметрами предполагается, что свойства оператора модели распределены в пространстве, что приводит к тому, что оператор модели имеет вид дифференциальных уравнений в частных производных.

Стационарная (статическая) модель – модель, отображающая взаимосвязь между входным и выходным воздействиями объекта в его установившемся состоянии без учета времени. Математическая модель стационарна и в том случае, когда параметры оператора модели неизменны во времени. Математически это обстоятельство выражается в том, что параметры (коэффициенты) модели явно не зависят от времени.

Математическая модель называется ***нестационарной*** (неустановившейся) в том случае, когда параметры оператора модели изменяются с течением времени.

Статические математические модели – модели, которые описывают установившиеся (равновесные) режимы работы системы. По своей форме статические модели – алгебраические уравнения или функциональные зависимости, не содержащие в качестве аргумента время.

Динамические математические модели – модели, которые описывают неустановившиеся (неравновесные, переходные) режимы работы системы. Чаще всего динамические математические модели представляются в дифференциальной форме.

Разделение математических моделей на одномерные и многомерные, на скалярные и матричные не имеет строгих установившихся правил. Но наиболее часто используемым является следующие представления.

Модель называется ***скалярной***, если в качестве входной переменной величины (входного сигнала) выступает одна единственная переменная величина и выходная переменная величина (выходной сигнал) также представлена в единственном числе. Число внутренних переменных (переменных состояния) при этом может быть произвольным.

Модель называется ***матричной*** (многосвязной), если число входных переменных и/или число выходных переменных величин не равно единице. Опять же число внутренних переменных (переменных состояния) при этом может быть произвольным.

Модель называется ***одномерной***, если количество внутренних переменных (переменных состояния), обеспечивающих полное однозначное описание каждого состояния объекта моделирования равно единице. *Одномерная* математическая модель содержит *одну выходную величину.* Входных величин может быть несколько.

Модель называется ***многомерной***, если количество внутренних переменных (переменных состояния), обеспечивающих полное однозначное описание каждого состояния объекта моделирования больше единицы. *Многомерная* математическая модель содержит *несколько выходных величин.* Для многомерного объекта число уравнений соответствует числу выходных величин.

Математические модели называются ***непрерывными***и, если все внутренние переменные модели являются непрерывными величинами.

Математические модели называются ***дискретными***, если хотя бы одна переменная модели является дискретной величиной.

Логические модели – модели, в которых в качестве переменных величин используются логические величины или логические выражения.

Детерминированные модели – модели, переменные которых представляют собой детерминированные величины, а каждому параметру модели соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число либо соответствующая функция.

Стохастические (вероятностные) модели – модели, переменные которых представляют собой случайные величины, заданные плотностями вероятностей.

Классификация моделей по какому-либо одному признаку не может охватить всех видов моделей, ибо модель, как и исходная система, многогранна и отражает лишь те ее свойства, которые представляют интерес для исследователя.

1.6. Свойства математических моделей

Рассмотрим некоторые свойства математических моделей, которые позволяют в той или иной степени либо различать, либо отождествлять модель с оригиналом (объектом, процессом). Принято выделять следующие свойства математических моделей: целенаправленность, адекватность, замкнутость, корректность, простота и сложность, мягкость и жесткость, конечность, приближенность, экономичность, истинность, информативность, полнота, адаптивность, управляемость, эволюционируемость.

Целенаправленность. Модель всегда отражает некоторую систему, то есть имеет цель.

Адекватность. Под *адекватностью* модели принято понимать правильное качественное и количественное описание объекта (процесса) по выбранному множеству характеристик с некоторой разумной степенью точности.

Адекватность является важнейшим требованием к модели, она требует соответствия модели ее реальному объекту (процессу, системе и т.д.) относительно выбранного множества его свойств и характеристик. При этом имеется в виду адекватность не вообще, а адекватность по тем свойствам модели, которые являются для исследователя существенными. Полная адекватность означает тождество между моделью и прототипом.

Математическая модель может быть адекватна относительно одного класса ситуаций (состояние системы + состояние внешней среды) и не адекватна относительно другого. Применение неадекватной модели может привести либо к существенному искажению реального процесса или свойств (характеристик) изучаемого объекта, либо к изучению несуществующих явлений, свойств и характеристик.

Можно ввести понятие степени адекватности, которая будет меняться от 0 (отсутствие адекватности) до 1 (полная адекватность). Степень адекватности характеризует долю истинности модели относительно выбранной характеристики (свойства) изучаемого объекта. Отметим, что в некоторых простых ситуациях численная оценка степени адекватности не представляет особой трудности. Трудность оценки степени адекватности в общем случае возникает из-за неоднозначности и нечеткости самих критериев адекватности, а также из-за трудности выбора тех признаков, свойств и характеристик, по которым оценивается адекватность.

Понятие адекватности является рациональным понятием, поэтому повышение ее степени также следует осуществлять на рациональном уровне. Адекватность модели должна проверяться, контролироваться, уточняться постоянно в процессе исследования на частных примерах, аналогиях, экспериментах и т.д. В результате проверки адекватности выясняют, к чему приводят сделанные допущения: то ли к допустимой потере точности, то ли к потере качества. При проверке адекватности также можно обосновать законность применения принятых рабочих гипотез при решении рассматриваемой задачи или проблемы.

Замкнутость. Математическая модель является *замкнутой*, если она учитывает и отображает замкнутую (полную) систему необходимых гипотез, связей и отношений.

Контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, притом однозначно, решить поставленную математическую задачу. Например, если задача свелась к отысканию $\boldsymbol{n}$ неизвестных из некоторой системы алгебраических или трансцендентных уравнений, то контроль замкнутости состоит в проверке того факта, что число независимых уравнений должно быть $\boldsymbol{n}$. Если их меньше $\boldsymbol{n}$, то надо установить недостающие уравнения, а если их больше $\boldsymbol{n}$, то либо уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка. Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает $\boldsymbol{n}$, но сами уравнения удовлетворяются лишь приближенно, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов. Неравенств среди условий также может быть любое число, как это бывает, например, в задачах линейного программирования. Свойство математической замкнутости системы математических соотношений тесно связано с введенным Ж. Адамаром понятием корректно поставленной математической задачи.

Корректность. Математическая модель является *корректной*, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, начальных и граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Проверка корректности математической модели.

В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и/или интегро– дифференциальных уравнений (ИДУ). Для обеспечения корректности постановки задачи к системе ОДУ (ДУЧП) добавляются начальные или граничные условия, которые могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач для систем ОДУ или ДУЧП:

Задача Коши, или задача с начальными условиями, в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;

Начально-граничная, или краевая, задача, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной и на границе последней в каждый момент времени (на исследуемом интервале);

Задачи на собственные значения, в формулировку которых входят параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений проводят ряд проверок, в частности:

- контроль размеренностей величин при использовании принятой системы единиц для значений всех параметров;

- контроль порядков, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключения малозначимых параметров (например, если при сложении трех величин одна из них много меньше других, то такой величиной можно пренебречь);

- контроль характера зависимостей, который заключается в проверке того, что значения выходных параметров модели соответствуют, например, физическому или иному смыслу изучаемой модели;

- контроль экстремальных ситуаций – проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к своим предельно допустимым значениям;

- контроль граничных условий, включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям;

- контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что выписанная система соотношений дает возможность получить однозначное решение задачи.

Математическая задача является *корректно поставленной*, если ее решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных. В этом случае решение считается непрерывным, если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения. Доказательство корректности конкретной задачи часто является достаточно сложной математической проблемой. Математическая модель считается корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех вышеперечисленных контрольных проверок.

Понятие корректности задачи имеет большое значение в прикладной математике. Например, численные методы решения оправдано применять лишь к корректно поставленным задачам. При этом далеко не все задачи, возникающие на практике, можно считать корректными (например, так называемые обратные задачи). Доказательство корректности конкретной математической задачи – достаточно сложная проблема, она решена только для некоторого класса математически поставленных задач. Проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения. Аналогично понятию «корректно поставленная задача» можно ввести понятие «корректная математическая модель».

Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Простота и сложность. Одновременное требование простоты и адекватности модели является противоречивым. С точки зрения адекватности сложные модели являются предпочтительнее простых. В сложных моделях можно учесть большее число факторов, влияющих на изучаемые характеристики объектов. Хотя сложные модели и более точно отражают моделируемые свойства оригинала, но они более громоздки, труднообозримы и неудобны в обращении. Поэтому исследователь стремится к упрощению модели, так как простыми моделями легче оперировать. При стремлении к построению простой модели должен соблюдаться основной *принцип упрощения модели: упрощать модель можно до тех пор, пока сохраняются основные свойства, характеристики и закономерности, присущие оригиналу.*

Этот принцип указывает на предел упрощения. При этом понятие простоты (или сложности) модели является понятием относительным. Модель считается достаточно простой, если современные средства исследования (математические, информационные, физические) дают возможность провести качественный и количественный анализ с требуемой точностью. А поскольку возможности средств исследований непрерывно растут, то те задачи, которые раньше считались сложными, теперь могут быть отнесены к категории простых.

Более трудной задачей является обеспечение простоты/сложности модели сложной системы, состоящей из отдельных подсистем, соединенных друг с другом в некоторую иерархическую и многосвязную структуру. При этом каждая подсистема и каждый уровень имеют свои локальные критерии сложности и адекватности, отличные от глобальных критериев системы.

С целью меньшей потери адекватности упрощение моделей целесообразнее проводить:

1) на физическом уровне с сохранением основных физических соотношений,

2) на структурном уровне с сохранением основных системных свойств.

Упрощение же моделей на математическом уровне может привести к существенной потере степени адекватности. Например, усечение характеристического уравнения высокого порядка до 2 – 3-го порядка может привести к совершенно неверным выводам о динамических свойствах системы.

Заметим, что более простые модели используются при решении задачи синтеза, а более сложные точные модели – при решении задачи анализа.

Жесткость и мягкость модели. Примером жесткой модели является таблица умножения. Простейший пример мягкой модели – принцип "чем дальше в лес, тем больше дров". Возможность полезной математической теории мягких моделей открыта относительно недавно (Арнольд).

Гармонический осциллятор – пример так называемой «жёсткой» модели. Она получена в результате сильной идеализации реальной физической системы. Для решения вопроса о её применимости необходимо понять, насколько существенными являются факторы, которыми мы пренебрегли. Иными словами, нужно исследовать «мягкую» модель, получающуюся малым возмущением «жёсткой». Если система сохраняет свое качественное поведение при малом возмущении, говорят, что она структурно устойчива. Гармонический осциллятор – пример структурно-неустойчивой (негрубой) системы. Тем не менее, эту модель можно применять для изучения процессов на ограниченных промежутках времени.

Конечность моделей. Известно, что мир бесконечен, как любой объект, не только в пространстве и во времени, но и в своей структуре (строении), свойствах, отношениях с другими объектами. Бесконечность проявляется в иерархическом строении систем различной физической природы. Однако при изучении объекта исследователь ограничивается конечным количеством его свойств, связей, используемых ресурсов и т.д. Он как бы «вырезает» из бесконечного мира некоторый конечный фрагмент в виде конкретного объекта, системы, процесса и т.д. и пытается познать бесконечный мир через конечную модель этого фрагмента.

Правомерен ли такой подход к исследованию бесконечного мира? Практика отвечает положительно на этот вопрос, основываясь на свойствах человеческого разума и законах Природы, хотя сам разум конечен, но зато бесконечны генерируемые им способы познания мира. Процесс познания идет через непрерывное расширение наших знаний. Это можно наблюдать на эволюции разума, на эволюции науки и техники.

Таким образом, конечность моделей систем заключается, во-первых, в том, что они отображают оригинал в конечном числе отношений, т.е. с конечным числом связей с другими объектами, с конечной структурой и конечным количеством свойств на данном уровне изучения, исследования, описания, располагаемых ресурсов. Во-вторых, в том, что ресурсы (информационные, финансовые, энергетические, временные, технические и т.д.) моделирования и наши знания как интеллектуальные ресурсы конечны, а потому объективно ограничивают возможности моделирования и сам процесс познания мира через модели. Поэтому исследователь (за редким исключением) имеет дело с конечномерными моделями.

Выбор размерности модели (ее степени свободы, переменных состояния) тесно связан с классом решаемых задач. Увеличение размерности модели связано с проблемами сложности и адекватности. При этом необходимо знать, какова функциональная зависимость между степенью сложности и размерностью модели. Если эта зависимость степенная, то проблема может быть решена за счет применения вычислительных систем. Если же эта зависимость экспоненциальная, то «проклятие размерности» (Р. Калман) неизбежно и избавиться от него практически не удается.

Как отмечалось выше, увеличение размерности модели приводит к повышению степени адекватности и одновременно к усложнению модели. При этом степень сложности ограничена возможностью оперирования с моделью, т.е. теми средствами моделирования, которыми располагает исследователь. Необходимость перехода от грубой простой модели к более точной реализуется за счет увеличения размерности модели путем привлечения новых переменных, качественно отличающихся от основных и которыми пренебрегли при построении грубой модели. Эти переменные могут быть отнесены к одному из следующих трех классов:

1) *быстропротекающие* переменные, протяженность которых во времени или в пространстве столь мала, что при грубом рассмотрении они принимались во внимание своими интегральными или осредненными характеристиками;

2) *медленнопротекающие* переменные, протяженность изменения которых столь велика, что в грубых моделях они считались постоянными;

3) *малые переменные* (малые параметры), значения и влияния которых на основные характеристики системы столь малы, что в грубых моделях они игнорировались.

Отметим, что разделение сложного движения системы по скорости на быстропротекающее и медленнопротекающее движения дает возможность изучать их в грубом приближении независимо друг от друга, что упрощает решение исходной задачи. Что касается малых переменных, то ими пренебрегают обычно при решении задачи синтеза, но стараются учесть их влияние на свойства системы при решении задачи анализа.

При моделировании стремятся по возможности выделить небольшое число основных факторов, влияние которых одного порядка и не слишком сложно описывается математически, а влияние других факторов оказывается возможным учесть с помощью осредненных, интегральных или "замороженных" характеристик.

Приближенность моделей. Конечность и простота (упрощенность) модели характеризуют *качественное* различие (на структурном уровне) между оригиналом и моделью. Тогда приближенность модели будет характеризовать *количественную* сторону этого различия.

Можно ввести количественную меру приближенности путем сравнения, например, грубой модели с более точной эталонной (полной, идеальной) моделью или с реальной моделью. Приближенность модели к оригиналу *неизбежна*, существует объективно, так как модель как другой объект отражает лишь отдельные свойства оригинала. Поэтому степень приближенности (близости, точности) модели к оригиналу определяется постановкой задачи, целью моделирования.

Чрезмерное стремление к повышенной точности модели приводит к ее значительному усложнению, и, следовательно, к снижению ее практической ценности. При моделировании сложных (человеко-машинных, организационных) систем точность и практический смысл не совместимы и исключают друг друга. Причина противоречивости и несовместимости требований точности и практичности модели кроется в неопределенности и нечеткости знаний о самом оригинале – его поведении, его свойствах и характеристиках, о поведении окружающей среды, о механизмах формирования цели, путей и средствах ее достижения и т.д.

Экономичность моделей. Данное свойство математических моделей определяется затратами ресурсов (человеческих, материальных, временных, вычислительных и др.) на ее реализацию и эксплуатацию.

Истинность моделей. В каждой модели есть доля истины, т.е. любая модель в чем-то правильно отражает оригинал. Степень истинности модели выявляется только при практическом сравнении её с оригиналом. Что касается малых переменных, то ими пренебрегают обычно при решении задачи синтеза, но стараются учесть их влияние на свойства системы при решении задачи анализа.

При моделировании стремятся по возможности выделить небольшое число основных факторов, влияние которых одного порядка и не слишком сложно описывается математически, а влияние других факторов оказывается возможным учесть с помощью осредненных, интегральных или "замороженных" характеристик.

С одной стороны, в любой модели содержится безусловно истинное, т.е. определенно известное и правильное. С другой стороны, в модели содержится и условно истинное, т.е. верное лишь при определенных условиях. Типовая ошибка при моделировании заключается в том, что исследователи применяют те или иные модели *без проверки условий их истинности*, границ их применимости. Такой подход приводит заведомо к получению неверных результатов.

В любой модели также содержится нечто, могущее быть в условиях неопределенности либо верным, либо ложным. Только на практике устанавливается фактическое соотношение между истинным и ложным в конкретных условиях. Таким образом, при анализе уровня истинности модели необходимо выяснить:

1) точные, достоверные знания;

2) знания, достоверные при определенных условиях;

3) знания, оцениваемые с некоторой степенью неопределенности;

4) знания, не поддающиеся оценке даже с некоторой степенью неопределенности;

5) незнания, т.е. то, что неизвестно.

Таким образом, оценка истинности модели как формы знаний сводится к выявлению содержания в ней как объективных достоверных знаний, так и знаний, приближенно оценивающих оригинал, а также то, что составляет незнание.

Информативность. Модель должна содержать достаточную информацию о системе (в рамках гипотез, принятых при построении модели) и должна давать возможность получить новую информацию.

Полнота. В модели должны быть учтены все основные связи и отношения, необходимые для обеспечения достижения цели моделирования.

Адаптивность. Модель должна быть приспособлена к различным входным параметрам, воздействиям среды.

Управляемость. Модель должна иметь хотя бы один параметр, изменениями которого можно имитировать поведение моделируемой системы в различных условиях.

Эволюционируемость. Возможность развития моделей.

1.7. Общие требования и рекомендации по математическому моделированию

При построении математических моделей объектов, систем, процессов целесообразно придерживаться следующих требований и рекомендаций, которые имеют характер *постоянного контроля* за процессом математического моделирования:

1. Моделирование следует начинать с построения самых грубых моделей на основе выделения самых существенных факторов. При этом необходимо четко представлять как цель моделирования, так и цель познания с помощью данных моделей.

2. Желательно не привлекать к работе искусственные и трудно проверяемые гипотезы.

3. Необходимо контролировать размерность переменных придерживаясь правила: складываться и приравниваться могут только величины одинаковой размерности.

4. Необходимо контролировать порядок складываемых друг с другом величин с тем, чтобы выделить основные слагаемые (переменные, факторы) и отбросить малозначительные. При этом должно сохраняться свойство «грубости» модели: отбрасывание малых величин приводит к малому изменению количественных выводов и к сохранению качественных результатов.

5. Необходимо контролировать характер функциональ-

ных зависимостей, следуя правилу: проверять сохранность зависимости изменения направления и скорости одних переменных от изменения других. Это правило позволяет глубже понять физический смысл и правильность выведенных соотношений.

6. Необходимо контролировать поведение переменных при приближении параметров модели к особым, экстремальным значениям. Обычно в экстремальной точке модель упрощается или вырождается, а соотношения приобретают более наглядный смысл и могут быть проще проверены.

7. Необходимо контролировать поведение модели в известных условиях: удовлетворение модели поставленным начальным и граничным условиям; поведение системы как модели при действии на нее типовых входных сигналов.

8. Необходимо контролировать получение побочных эффектов и результатов, анализ которых может дать новые направления в исследованиях или потребовать перестройки самой модели.

Постоянный контроль правильности функционирования моделей в процессе исследования позволяет избежать грубых ошибок в конечном результате. При этом выявленные недостатки модели исправляются в ходе моделирования, а не вычисляются заранее.

1.8. Этапы построения и применения математических моделей

Построение математической модели – это центральный этап исследования или проектирования технической системы. От качества разработанной модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение математической модели – это процедура не формальная. Она существенно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, и всегда опирается на определенный эмпирический материал.

В общем случае процесс разработки математических моделей состоит из следующих этапов:

1) Обследование объекта моделирования и формулировка технического задания на разработку модели (содержательная постановка задачи)

Этап обследования включает следующие работы:

- выявление основных факторов, механизмов, влияющих на поведение объекта моделирования, определение параметров, подлежащих отражению в модели;
- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов;
- обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

Содержательная постановка задачи моделирования может уточняться и конкретизироваться в процессе дальнейшей разработки модели. Если объектом моделирования является технологический процесс, машина, конструкция или деталь, то содержательную постановку задачи моделирования называют технической постановкой задачи. Вместе с дополнительными требованиями к реализации модели и представлению результатов содержательная постановка задачи моделирования оформляется в виде *технического задания* на проектирование и разработку модели.

2) Концептуальная и математическая постановка задачи

На данном этапе формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров. Для обоснования принятых гипотез, как правило, используются некоторые теоретические положения и/или экспериментальные данные об объекте. Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать *расчетную схему технического объекта* и ее математическое описание.

Совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели. Наиболее простые операторы модели получают, используя различные методы аппроксимации экспериментальных данных (интерполяция, метод наименьших квадратов и др.). Более сложные теоретические модели получают на основе каких-либо законов, справедливых для объектов исследования в рассматриваемой области знаний, например, на основе уравнений законов сохранения. В ряде случаев математические соотношения, описывающие поведения объекта, приходится устанавливать самому исследователю.

3) Качественный анализ и проверка корректности модели

В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и/или интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Для обеспечения корректности постановки задачи к системе ОДУ или ДУЧП добавляются начальные или граничные условия, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка. Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач для систем ОДУ или ДУЧП:

- задача Коши, или задача с начальными условиями, в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;

- начально-граничная, или краевая, задача, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней в каждый момент времени (на исследуемом интервале);

- задачи на собственные значения, в формулировку которых входят параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс).

Для *контроля правильности* полученной системы математических соотношений проводят ряд проверок, в частности:

- контроль размерностей величин при использовании принятой системы единиц для значений всех параметров;

- контроль порядков, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключения малозначимых параметров (например, если при сложении трех величин одна из них много меньше других, то такой величиной можно пренебречь);

- контроль характера зависимостей, который заключается в проверке того, что значения выходных параметров модели соответствуют, например, физическому или иному смыслу изучаемой модели;

- контроль экстремальных ситуаций – проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к своим предельно допустимым значениям;

- контроль граничных условий, включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям;

- контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность получить однозначное решение задачи.

Математическая задача является *корректно поставленной*, если ее решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных. В этом случае решение считается *непрерывным*, если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения. Доказательство корректности задачи часто является достаточно сложной математической проблемой. Математическая модель считается корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок.

4) Выбор и обоснование выбора методов решения задачи

При выборе или разработке метода решения задачи прежде всего устанавливается область его применения. Чем шире круг задач, которые объявлены как допустимые для решения данным методом, тем этот метод более универсален.

В большинстве случаев четкая и однозначная формулировка ограничений на применение метода затруднительна. Возможны ситуации, когда оговоренные заранее условия применения метода выполняются, однако удовлетворительное решение задачи не получается. Следовательно, вероятность P успешного применения метода в оговоренном заранее классе задач меньше единицы. Эта вероятность является количественной оценкой важного свойства методов и алгоритмов, называемого *надежностью*.

Аналитические методы более надежны, но не всегда применимы. Отказы в решении задач алгоритмическими методами могут проявляться, например, в несходимости итерационного процесса (итерация – последовательное приближение), в превышении погрешностями предельно допустимых значений и т.п.

К наиболее важным машинным (численным) методам относятся:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

Говоря о машинных вычислениях, важно осознавать, что они по своей природе являются приближенными и получаемое численное решение – это не всегда точное математическое решение.

Рассмотрим, например, квадратное уравнение $x^2 - 20x + 1 = 0$, которое имеет меньший корень $x \approx 0.05$. Если используемый нами машинный метод позволят вычислять квадратные корни с точностью до одного знака после запятой, тогда:

$$x_{min} = \frac{20 - \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 10 - \sqrt{99} \approx 10 - 9{,}9 = 0{,}1.$$

Результат отличается от точного решения на 100 %. Однако его можно улучшить, если перевести вычисляемый квадратный корень в знаменатель:

$$x_{min} = 10 - \sqrt{99} = \frac{(10 - \sqrt{99})(10+\sqrt{99})}{10+\sqrt{99}} = \frac{100-99}{10+\sqrt{99}} = \frac{1}{19{,}9} \approx 0{,}05.$$

Т.е. в данном случае удалось найти способ исправить ошибку, обусловленную машинным методом. Вообще, выделяют четыре основных типа ошибок, характерных для приближенных вычислений.

1. *Ошибки исходных данных* имеют место, когда исходные данные носят приближенный характер, например, получены путем физических измерений (любое средство измерения имеет ограниченную точность). Этот вид ошибки рассматривается как шум (говорят, что данные зашумлены). Улучшение точности при наличии таких ошибок не достигается даже при правильной организации процесса вычислений.

2. *Ошибки округления* возникают в связи с конечным представлением дробных чисел в компьютере. Нехватка разрядов обусловливает потерю части *значащих цифр*. Анализ ошибок округления усложняется тем, что в обычном компьютере десятичные числа представляются в виде двоичных кодов. Фактически число, хранящееся в компьютере, может случайным образом как округляться, так и усекаться. И соответствующие ошибки могут распространиться на последующие вычисления, чаще всего в циклах. Если накопление ошибок округления приводит к значительной потере точности, то алгоритм (метод) считается *неустойчивым*, в противном случае – *устойчивым*.

3. *Ошибки переполнения* возникают в том случае, когда результат расчета по своему абсолютному значению превышает наибольшее представимое в памяти ЭВМ значение. При

правильном использовании программных средств встречаются достаточно редко. Одним из способов их избежать является изменение единиц измерения вычисляемой величины, например, 1000*мм*=1*м* и т.д.

4. *Ошибки метода (алгоритма)* возникают вследствие отклонения алгоритмического процесса вычислений от точного (аналитического). Если при неограниченном увеличении числа шагов алгоритма решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи, то говорят, что вычислительный метод *сходится*. Для повышения надежности алгоритмов часто применяют комбинирование различных методов, автоматическую параметрическую настройку методов и т.п. В конечном счете, добиваются значений надежности p, равных или близких к единице. Применение методов с $p<1$ хотя и нежелательно, но допускается в отдельных частных случаях при обязательном условии, что некорректное решение распознается и отсутствует опасность принять такое решение за правильное решение.

5) Поиск решения, разработка алгоритма решения и исследование его свойств, реализация алгоритма в виде программы для ЭВМ

В случаях, когда решение можно найти аналитическим методом, потребности в разработке специального программного обеспечения, как правило, не возникает. Численный, или приближенный, метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Требования, предъявляемые к алгоритму, указываются в следующем определении.

Алгоритм – это упорядоченный набор недвусмысленных и выполнимых этапов, определяющий некоторый конечный процесс.

Это определение содержит несколько важных требований:

1) требование *упорядоченности* указывает, что этапы алгоритма должны выполняться в некотором определенном порядке, но необязательно один за другим;

2) требование *выполнимости* этапа означает принципиальную возможность его осуществления;

3) требование *недвусмысленности* означает, что во время выполнения алгоритма при любом состоянии процесса информации должно быть достаточно, чтобы полностью определить действия, которые требуется осуществить на каждом этапе;

4) требование *конечности* процесса означает, что алгоритм должен быть *результативен*, т.е. выполнение алгоритма должно приводить к его завершению.

Кроме того, к методам и алгоритмам, как и к математическим моделям, предъявляют требования точности и экономичности.

Точность характеризуется степенью совпадения точного решения уравнений заданной модели и приближенного решения, полученного с помощью оцениваемого метода, а *экономичность* – затратами вычислительных ресурсов на реализацию метода (алгоритма).

Оценки точности и экономичности бывают теоретическими и экспериментальными. Теоретические оценки обычно характеризуют эффективность применения исследуемого метода не к одной конкретной модели, а к некоторому классу моделей и являются предметом изучения в вычислительной математике. Экспериментальные оценки основаны на определении показателей эффективности решения с помощью набора специально составляемых тестовых задач.

Процесс создания программного обеспечения обычно идет в следующей последовательности:

- составление технического задания на разработку программного обеспечения;

- проектирование структуры программного комплекса;

- кодирование алгоритма;

- тестирование и отладка;

- сопровождение и эксплуатация.

Техническое задание на разработку программного обеспечения оформляют в виде спецификации. Примерная форма спецификации включает следующие семь разделов:

Название задачи – дается краткое определение решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).

Описание – подробно излагается математическая постановка задачи, описываются применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.

Управление режимами работы программы – формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой (интерфейс «пользователь–компьютер»).

Входные данные – описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.

Выходные данные – описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены (в числовом, графическом или текстовом), приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.

Ошибки – перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой (например, ошибки при вводе входных данных), указываются способы диагностики (обнаружения ошибок при работе программного комплекса) и защиты от этих ошибок на этапе проектирования, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.

Тестовые задачи – приводятся один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

На этапе *проектирования* формируется общая структура программного комплекса. Вся программа разбивается на программные модули. Для каждого программного модуля формулируются требования по реализуемым функциям и разрабатывается алгоритм, выполняющий эти функции. Определяется схема взаимодействия программных модулей, называемая *схемой потоков данных* программного комплекса. Разрабатывается план, и задаются исходные данные для тестирования отдельных модулей и программного комплекса в целом.

Большинство профессиональных программных средств, реализующих математические модели, состоят из трех основных частей:

- *препроцессора* (подготовка и проверка исходных данных модели);
- *процессора* (решение задачи, реализация вычислительного эксперимента);
- *постпроцессора* (отображение полученных результатов).

Возможности пре- и постпроцессора наиболее широко реализуются в современных системах автоматизированного проектирования (САПР), где они в значительной степени сокращают время на получение данных и оценку результатов моделирования.

6) Проверка адекватности модели

Проверка адекватности модели преследует две цели:

- убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок;

- установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей. Как правило, различают качественное и количественное совпадение результатов сравнения. При качественном сравнении требуется лишь совпадение вида функции распределения выходных параметров (убывающая или возрастающая, с одним экстремумом или с несколькими). При количественном сравнении оценивают точность вычисления параметров. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов, удовлетворительной считается точность 10–15 %. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть менее 2 %.

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам: а) значения задаваемых входных параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез; б) принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены неточно; в) неверна исходная совокупность гипотез.

Все три случая требуют дополнительного исследования как моделируемого объекта (с целью накопления новой дополнительной информации о его поведении), так и самой модели (с целью уточнения границ ее применимости).

7) Практическое использование модели

Практическое использование и анализ результатов моделирования позволяет:

- выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или, по крайней мере, лучшим образом учесть его поведение и свойства;
- обозначить область применения модели;
- проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности;
- показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.

2. Системный подход

2.1. Понятие системы

Решение вопроса о специфических признаках *системного подхода*, в отличие от любого другого типа научного исследования, предопределяется тем, что понимается под системой.

Термин «*система*» употребляется во многих значениях, что приводит к опасности упустить основное содержание этого понятия.

Под *системой* понимается:

• «Комплекс элементов, находящихся во взаимодействии» (Л. Берталанфи);

• «Нечто такое, что может изменяться с течением времени», «любая совокупность переменных..., свойственных реальной логике» (Р. Эшби);

• «Множество элементов с соотношением между ними и между их атрибутами (Холл А.Д.)»;

• «Совокупность элементов, организованных таким образом, что изменения, исключения или введение нового элемента закономерно отражаются на остальных элементах» (Топоров В.Н.);

• «Взаимосвязь самых различных элементов», «все состоящее из связанных друг с другом частей» (Ст. Бир);

• «Отображение входов и состояний объекта в выходных объекта» (М. Месарович).

Правильно было бы сказать, что строгого, единого определения для понятия «система» в настоящее время нет.

В первом приближении можно придерживаться нормативного понятия системы. Система (греч.– «составленное из частей», «соединение» от «соединяю») – объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов, явлений, а также знаний о природе и обществе.

Система есть совокупность или множество связанных между собой элементов.

Элементы системы могут представлять собой понятия, в этом случае мы имеем дело с понятийной системой (инструмент познания).

Элементами системы могут являться объекты (устройства) (ПК - клавиатура, мышь, монитор и т.д.).

Элементами системы могут быть субъекты: игроки в футбольной команде, студенты в группе и т.д.

Таким образом, система – это совокупность живых и неживых элементов либо тех и других вместе. Существует несколько десятков определений этого понятия. Их анализ показывает, что определение понятия система изменялось не только по форме, но и по содержанию. Так Л. фон Берталанфи определяет систему, как «комплекс взаимодействующих компонентов или как совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой».

Система – это полный, целостный набор элементов, взаимосвязанных между собой так, чтобы могла реализовываться функция системы.

Отличительным (главным свойством) системы является ее целостность. Комплекс объектов, рассматриваемых в качестве системы, представляет собой некоторое единство, целостность, обладающую общими свойствами и поведением.

Очевидно, необходимо рассматривать и связи системы с внешней средой.

Система проявляется как целостный материальный объект, представляющий собой закономерно обусловленную совокупность функционально взаимодействующих элементов. Основные свойства системы проявляются через целостность, взаимодействие и взаимозависимость процессов преобразования вещества, энергии и информации, через ее функциональность, структуру, связи, внешнюю среду и пр.

В дальнейшем будем придерживаться следующего определения системы.

Система – это совокупность взаимосвязанных элементов, обособленных от среды и взаимодействующая с ней как целое.

Как и любое фундаментальное понятие, система конкретизируется в процессе рассмотрения ее основных свойств. Важнейшие свойства системы: структурность, взаимозависимость со средой, иерархичность, множественность описаний (табл. 3).

Таблица 3

Свойства системы и их характеристики

Свойство системы	**Характеристика**
Ограниченность	Система отделена от окружающей среды границами
Целостность	Ее свойство целого принципиально не сводится к сумме свойств составляющих элементов
Структурность	Поведение системы обусловлено свойствами ее структуры
Взаимозависимость со средой	Система формирует и проявляет свойства в процессе взаимодействия со средой
Иерархичность	Соподчиненность элементов в системе
Множественность описаний	По причине сложности познание системы требует множественности ее описаний

Можно выделить основные *свойства системы*:

• система есть, прежде всего, совокупность элементов, которые при определенных условиях могут рассматриваться как системы;

• наличие существенных связей между элементами и (или) их свойствами, превосходящих по мощности (силе) связи этих элементов с элементами не входящими в данную систему. Под существенными связями понимаются такие, которые закономерно, с необходимостью определяют интегративные свойства системы. Указанное свойство отличает систему от простого конгломерата и выделяет ее из окружающей среды;

• наличие определенной организации, что проявляется в системе энтропии (системе неопределенности, хаоса), системы по сравнению с энтропией системообразующих факторов, определяющих возможность создания системы, число существенных связей, которыми может обладать элемент, число квантов пространства и времени;

• существование интегративных свойств, т.е. присущих системе в целом, но не свойственных ни одному из ее элементов в отдельности. Их наличие показывает, что свойства системы хотя и зависят от свойств элементов, но не окружают их полностью. Т.е. система не сводится к простой совокупности элементов, и, расчленяя систему на отдельные части, нельзя познать все свойства системы в целом.

В самом общем случае понятие «система» характеризуется:

• наличием множества элементов;

• наличием связей между ними;

• целостным характером данного устройства или процесса.

В научной литературе имеется множество определений этого понятия. В философском теоретико-познавательном смысле система есть способ мышления как способ постановки и упорядочения проблем. В научно-исследовательском понимании система представляет собой общую методологию исследования процессов и явлений, отнесенных к какой-либо области человеческих знаний, в качестве объекта системного анализа. В проектном понимании система представляется как методология проектирования и создания комплексов методов и средств для достижения определенной цели. В наиболее узком, инженерном смысле система понимается как взаимосвязанный набор вещей (объектов) и способов их использования для решения определенных задач. В Советском энциклопедическом словаре система определяется как множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство.

Анализируя различные взаимно дополняющие понятия системы, следует отметить, что наиболее полное определение должно включать и элементы, и связи, и свойства, и цель, и наблюдателя (исследователя), и его язык, с помощью которого отображается объект или процесс. Однако есть системы, для которых наблюдатель, исследователь очевиден, и его не надо включать в определение системы, например для некоторых технических систем. Иногда не нужно в явном виде говорить о цели. Таким образом, при исследовании с целью проектирования, создания или совершенствования объектов техники нужно проанализировать ситуацию с помощью полного определения системы, а затем, выделив наиболее существенные компоненты, принять "рабочее" определение системы, которым будут пользоваться все лица, участвующие в принятии решении. Важно, чтобы в понятии "система" был отражен подход и объект исследования как к системе. Дело в том, что один и тот же объект на разных этапах его рассмотрения может быть представлен в различных аспектах, соответственно существуют и различные аспекты понятия "система": теоретико-познавательный, методологический, научно-исследовательский, проектный, инженерный, конструкторский и т.д., – вплоть до материального воплощения.

Система представляет собой совокупность элементов (объектов, субъектов), находящихся между собой в определенной зависимости и составляющих некоторое единство (целостность), направленное на достижение определенной цели.

Система может являться элементом другой системы более высокого порядка (надсистема) и включать в себя системы более низкого порядка (подсистемы).

Таким образом, понятия "элемент", "подсистема", "система", "надсистема" взаимно преобразуемы: система может рассматриваться как элемент системы более высокого порядка, а элемент – как система (при углубленном анализе).

Система может быть представлена в виде блока с неизвестной структурой и известными только "входами" и "выходами" (в кибернетике и теории систем такое представление называют "черным ящиком") или в виде графических структур с не до конца выявленными элементами и существенными связями, или в виде математического описания, например в виде формул.

В настоящее время ученые пришли к выводу, что математика неэффективна при исследовании широких проблем с множеством неопределенностей, которые характерны для исследования и разработки техники как единого целого. Вырабатывается концепция такого исследования, в котором упор делается преимущественно на разработку новых диалектических принципов научного мышления, логического анализа систем с учетом их взаимосвязей и противоречивых тенденций. При таком подходе на первый план выдвигаются не математические методы, а сама логика системного подхода, упорядочение процедуры принятия решений. И видимо, не случайно, что под системным подходом зачастую принимается некоторая совокупность системных принципов.

2.2. Принципы системного подхода

Принцип – это обобщенные опытные данные, это закон явлений, найденный из наблюдений. Поэтому их истинность связана только с фактом, а не с какими-либо домыслами. Из принципов путем логико-математического рассуждения получают в применении к конкретным ТС бесчисленные следствия, охватывающие всю область явления и составляющие безукоризненную теорию. Теории такого рода необычайно прочны и незыблемы: они построены из самого добротного материала - верного опыта и тонкого рассуждения.

В формулировке принципов существует некоторый элемент условности, связанный с общим уровнем развития науки в данную историческую эпоху. Поэтому происходит постепенное уточнение принципов, но не их отмена или пересмотр.

По своей структуре методы и принципы имеют общие черты и различия.

Метод – это не фактическая деятельность, а возможные ее альтернативные способы. Принцип – это постоянно и последовательно применяемый метод.

Следовательно, по мере того как метод теряет свою альтернативность, становится все больше и больше преобладающим вариантом или даже единственным вариантом действий, тем меньше он метод и тем больше он принцип. Принцип мы не выбираем, мы ему следуем постоянно.

Известно, что принципы всеобщей связи и развития как основополагающие принципы диалектики в условиях подвергаются дальнейшему развитию и конкретизации в применении их к естествознанию и технике. Представляется, что для более плодотворного использования философских категорий, в том числе и принципов, необходимо, чтобы между ними и частными естественными и техническими знаниями (науками) находились связующие звенья. Одним из них и является *системный анализ*. Именно он и позволяет реализовать непосредственный контакт, стыковку философских положений и методов (принципов) конкретных наук.

Сначала системный анализ базировался главным образом на применении сложных математических приемов. Спустя некоторое время ученые пришли к выводу, что математика неэффективна при анализе широких проблем с множеством неопределенностей, которые характерны для исследования и разработки техники как единого целого. Об этом говорят многие ведущие специалисты-системщики. Поэтому стала вырабатываться концепция такого системного анализа, в котором делается упор на разработку новых диалектических принципов научного мышления, логического анализа сложных объектов с учетом их взаимосвязей и противоречивых тенденций. Наиболее часто к системным причисляют следующие принципы:

1) конечной цели;
2) измерения;
3) эквифинальности;
4) единства;
5) связности;
6) модульного построения;
7) иерархии;
8) функциональности;
9) *развития* (историчности, открытости);
10) децентрализации;
11) неопределенности.

Принцип конечной цели

Это абсолютный приоритет конечной (глобальной) цели. Принцип имеет следующие правила:

• для проведения СА необходимо, в первую очередь, сформулировать цели исследования;

• анализ следует вести на базе первоочередного уяснения основной цели (функции основного назначения) системы, что позволит определить ее основные существенные свойства, показатели качества и критерии оценки;

• при синтезе систем любая попытка изменения должна оцениваться относительно того, помогает или мешает она достижению конечной цели;

• цель функционирования искусственной системы задается, как правило, системой, в которой исследуемая система является составной частью.

Принцип измерения

О качестве функционирования какой-либо системы можно судить только применительно к системе более высокого порядка. Т.е. для определения эффективности функционирования надо представить ее как часть более общей и проводить оценку внешних исследуемой системы относительно целей и задач надсистемы.

Принцип эквифинальности

Система может достигнуть требуемого конечного состояния, независимо от времени и определяемого исключительно собственными характеристиками системы при различных начальных условиях и различными путями. Это форма устойчивости по отношению к начальным и граничным условиям.

Принцип единства

Это совместное рассмотрение системы как целого и как совокупность частей (элементов). Принцип ориентирован на «взгляд внутрь» системы, на расчленение ее с сохранением целостных представлений о системе.

Принцип связности

Рассмотрение любой части совместно с ее окружением подразумевает проведение процедуры выявления связей между элементами системы и выявление связей (учет внешней среды). В соответствии с этим принципом систему, в первую очередь, следует рассматривать как часть (элемент, подсистему) другой системы, называемой подсистемой.

Принцип модульного построения

Полезно выделение модулей в системе и рассмотрение ее как совокупности модулей. Принцип указывает на возможность вместо части системы исследовать совокупность ее входных и выходных воздействий (абстрагироваться от излишней детализации) (учебный план, модули).

Принцип иерархии

Введение иерархии частей и их ранжирование упрощает порядок рассмотрения систем и, как следствие, разработку системы.

Принцип функциональности

Совместное рассмотрение структуры и функций с приоритетом функций над структурой. Принцип утверждает, что любая структура тесно связана с функцией системы и ее частей. При придании системе новых функций полезно пересматривать ее структуру, а не пытаться втиснуть новую функцию в старую схему. Поскольку выполняемые функции составляют процессы, то целесообразно рассматривать отдельно: процессы, функции, структуры. В свою очередь, процессы сводятся к анализу потоков различных видов:

- материальный,
- энергии,
- информации (энтропия, негэнтропия), смена состояний.

С этой точки зрения структура есть множество ограничений на потоки в пространстве и во времени.

Принцип развития

Это учет изменяемости системы, ее способности к развитию, адаптации, расширению, замене частей, накапливанию информации. В основу систематизированной системы требуется закладывать возможность развития, наращивания, усовершенствования.

Принцип децентрализации

Это сочетание в сложных системах централизованного и децентрализованного управления. Децентрализация — в иерархической системе такая реорганизация протекающих внутри системы процессов, при которой часть процессов переводятся на более низкий уровень иерархии; соответственно, при централизации — на более высокий уровень.

Принцип неопределенности

Это учет неопределенностей и случайностей в системе. Принцип утверждает, что можно иметь дело с системой, в которой структура, функционирование или внешние воздействия не полностью определены.

Перечисленные принципы обладают очень высокой степенью общности. Для непосредственного применения исследователь должен наполнить их конкретным содержанием применительно к предмету исследования.

Каждая из перечисленных идей (принципов) при своем практическом осуществлении, даже отдельно взятая, может дать определенный эффект. Но эффект возрастает, если они применяются в комплексе. Тогда эти идеи превращаются в определенную систему принятия решений и управления, позволяющую более эффективно руководить сложными программами.

При этом процесс управления расчленяется на следующие элементы:

• выявление и обоснование конечных целей и уже на этом основании – промежуточных целей и задач, которые необходимо решать на каждом данном этапе;

• выявление и сведение в единую систему частей решаемой задачи, ее взаимосвязей с другими задачами и объектами, а также последствий принимаемых решений;

• выявление и анализ альтернативных путей решения задачи в целом и ее отдельных элементов (подзадач), сравнение альтернатив с помощью соответствующих критериев, выбор оптимального решения;

• создание (или усовершенствование) структуры организации, призванной обеспечить выполнение принимаемой программы, с тем, чтобы она с наибольшим эффектом обеспечивала реализацию принимаемых решений;

• разработка и принятие конкретных программ финансирования и осуществления работ – как долговременных, рассчитанных на весь срок, необходимый для реализации поставленных перед собой целей (этот план может быть и ориентировочным, своего рода прогнозом), так и средне- и краткосрочных.

2.3. Классификация систем

Многообразие систем довольно велико, и существенную помощь при их изучении оказывает классификация.

Классификация – это разделение совокупности объектов на классы по некоторым наиболее существенным признакам.

Важно понять, что классификация – это только модель реальности, поэтому к ней надо так и относиться, не требуя от нее абсолютной полноты. Еще необходимо подчеркнуть относительность любых классификаций.

Сама классификация выступает в качестве инструмента системного анализа. С ее помощью структурируется объект (проблема) исследования, а построенная классификация является моделью этого объекта.

Полной классификации систем в настоящее время нет, более того, не выработаны окончательно ее принципы. Разные авторы предлагают разные принципы классификации, а сходным, по сути, принципам – дают разные названия.

1. Классификация по происхождению.

В зависимости от происхождения системы делятся на *естественные* и *искусственные* (создаваемые, антропогенные) системы.

Естественные системы – это системы, объективно существующие в действительности в живой и неживой природе и обществе.

Эти системы возникли в природе без участия человека.

Примеры естественных систем: атом, молекула, клетка, организм, популяция, общество, вселенная и т.п.

Искусственные системы – это системы, созданные человеком.

Примеры искусственных систем: холодильник, самолет, предприятие, фирма, город, государство, партия, общественная организация и т.п.

Кроме того, можно говорить о третьем классе систем – *смешанных системах*, куда относятся *эргономические* (машина – человек-оператор), автоматизированные, биотехнические, организационные и другие системы.

2. Классификация по объективности существования.

Все системы можно разбить на две большие группы: реальные (материальные или физические) и абстрактные (символические) системы.

Реальные системы состоят из изделий, оборудования, машин и вообще из естественных и искусственных объектов.

Абстрактные системы, по сути, являются моделями реальных объектов – это языки, системы счисления, идеи, планы, гипотезы и понятия, алгоритмы и компьютерные программы, математические модели, системы наук.

Иногда выделяют идеальные или концептуальные системы – системы, которые выражают принципиальную идею или образцовую действительность – образцовый вариант имеющейся или проектируемой системы.

Также можно выделить виртуальные системы – не существующие в действительности модельные или мыслительные представления реальных объектов, явлений, процессов (могут быть как идеальными, так и реальными системами).

3. Действующие системы.

Выделим из всего многообразия создаваемых систем действующие системы. Такие системы способны совершать операции, работы, процедуры, обеспечивать заданное течение технологических процессов, действуя по программам, задаваемым человеком. В действующих системах можно выделить следующие системы: 1) технические, 2) эргатические, 3) технологические, 4) экономические, 5) социальные, 6) организационные и 7) управления.

1. *Технические системы* представляют собой материальные системы, которые решают задачи по программам, составленным человеком; сам человек при этом не является элементом таких систем.

Техническая система – это совокупность взаимосвязанных физических элементов.

В качестве связей в таких системах выступают физические взаимодействия (механические, электромагнитные, гравитационные и др.).

Примеры: автомобиль, холодильник, компьютер.

2. *Эргатические системы*. Если в системе присутствует человек, выполняющий определенные функции субъекта, то говорят о эргатической системе.

Эргатическая система – это система, составным элементом которой является человек-оператор.

Частным случаем эргатической системы будет человеко-машинная система – система, в которой человек-оператор или группа операторов взаимодействует с техническим устройством в процессе производства материальных ценностей, управления, обработки информации и т.д.

Примерами эргатических систем являются: шофер за рулем автомобиля, рабочий, вытачивающий деталь на токарном станке.

Существуют два класса определения понятия "технология":

а) как некой абстрактной совокупности операций.

б) как некой совокупности операций с соответствующими аппаратно-техническими устройствами или инструментами.

Отсюда, по аналогии со структурой, можно говорить о формальной и материальной технологической системе.

3. Технологическая система (формальная) – это совокупность операций (процессов) в достижении некоторых целей (решений некоторых задач).

Структура такой системы определяется набором методов, методик, рецептов, регламентов, правил и норм.

Элементами формальной технологической системы будут операции (действия) или процессы. Ранее процесс был определен как последовательная смена состояний, здесь же мы будем рассматривать другое понимание процесса: как последовательной смены операций.

Процесс – это последовательная смена операций (действий направленных на изменение состояния объекта.

Связями в технологической системе поступают свойства обрабатываемых объектов или сигналы, передаваемые от операции к операции.

Технологическая система (материальная) – это совокупность реальных приборов, устройств, инструментов и материалов (техническое, обеспечение системы), реализующих операции (процессное обеспечение системы) и предопределяющих их качество и длительность.

Технологическая система более гибкая, чем техническая: минимальными преобразованиями ее можно переориентировать на производство других объектов, либо на получение других свойств последних.

Примеры технологических систем: производство бумаги, изготовление автомобиля.

4. *Экономическая система* – что система отношений (процессов), складывающихся в экономике. Развернем что определение.

Экономическая система – это совокупность экономических отношений, возникающих в процессе производства, распределения, обмена и потребления экономических продуктов и регламентируемых совокупностью соответствующих принципов, правил и законодательных норм.

5. *Социальная система*. Поскольку мы рассматриваем только создаваемые системы, то социальную систему будем рассматривать в следующем разрезе:

Социальная система – это совокупность мероприятий, направленных на социальное развитие жизни людей.

К таким мероприятиям относятся: улучшение социально-экономических и производственных условий труда, усиление его творческого характера, улучшение жизни работников, улучшение жилищных условий и т. п.

6. *Организационная система*. Взаимодействие вышеназванных систем обеспечивает организационная система (система организационного управления).

Организационная система – это совокупность элементов, обеспечивающих координацию действий, нормальное функционирование и развитие основных функциональных элементов объекта.

Элементы такой системы представляют собой органы управления, обладающие правом принимать управленческие решения – это руководители, подразделения или даже отдельные организации (например, министерства).

Связи в организационной системе имеют информационную основу и определяются должностными инструкциями и другими нормативными документами, в которых прописаны права, обязанности ответственность органа управления.

7. Система управления. Управление рассматривается как действия или функция, обеспечивающие реализацию заданных целей.

Систему, в которой реализуется функция управления, называют *системой управления*.

Система управления содержит два главных элемента: управляемую подсистему (объект управления) и управляющую подсистему (осуществляющую функцию управления).

Применительно к техническим системам управляющую подсистему называют системой регулирования, а к социально-экономическим – системой организационного управления.

Разновидностью системы управления является эргатическая система – человеко-машинная система управления.

8. Информационные системы

Информационной системой (или информационно-вычислительной системой) называют совокупность взаимосвязанных аппаратно-программных средств для автоматизации накопления и обработки информации. В информационную систему данные поступают от источника информации. Этиданныеотправляютсянахранениелибопретерпеваютвсистеменекоторуюобработкуизатемпередаютсяпотребителю.

Информационная система (ИС) – это система, реализующая *информационную модель* предметной области, чаще всего – какой-либо области человеческой деятельности. ИС должна обеспечивать: получение (ввод или сбор), хранение, поиск, передачу и обработку (преобразование) информации.

9. *Централизованные и децентрализованные системы*

Централизованной системой называется система, в которой некоторый элемент играет главную, доминирующую роль в функционировании системы. Такой главный элемент называется ведущей частью системы или ее центром. При этом небольшие изменения ведущей части вызывают значительные изменения всей системы: как желательные, так и нежелательные. К недостаткам централизованной системы можно отнести низкую скорость адаптации (приспособления к изменяющимся условиям окружающей среды), а также сложность управления из-за огромного потока информации подлежащей переработке в центральной части систем.

Децентрализованная система – это система, в которой нет главного элемента.

Важнейшие подсистемы в такой системе имеют приблизительно одинаковую ценность и построены не вокруг центральной подсистемы, а соединены между собой последовательно или параллельно.

Примеры.

1. Армейские структуры представляют собой ярко выраженные централизованные системы.

2. Интернет является практически идеальной децентрализованной системой.

6. Классификация по размерности. Системы подразделяются на одномерные и многомерные.

Система, имеющая один вход и один выход, называется *одномерной*. Если входов или выходов больше одного – *многомерной*.

Нужно понимать условность одномерности системы – в реальности любой объект имеет бесчисленное число входов и выходов.

10. Классификация систем по однородности и разнообразию структурных элементов

Системы бывают гомогенные, или однородные, и гетерогенные, или разнородные, а также смешанного типа.

В гомогенных системах структурные элементы системы однородны, т. е. обладают одинаковыми свойствами. В связи с этим в гомогенных системах элементы взаимозаменяемы.

Пример. Гомогенная компьютерная система в организации состоит из однотипных компьютеров с установленными на них одинаковыми операционными системами и прикладными программами. Это позволяет заменить вышедший из строя компьютер любым другим без дополнительной настройки и переучивания конечного пользователя.

Понятие «гомогенная система» широко используется при описании свойств газов, жидкостей или популяций организмов.

Гетерогенные системы состоят из разнородных элементов, не обладающих свойством взаимозаменяемости.

11. Линейные и нелинейные системы

Система называется *линейной*, если она описывается линейными уравнениями (алгебраическими, дифференциальными, интегральными и т. п.), в противном случае – *нелинейной*. Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. Предположим, что после изменения входной переменной на величину Δx выходная переменная изменяется на Δy. Если система линейна, то после двух независимых изменений входной переменной на Δx_1 и Δx_2. таких, что $\Delta x_1+\Delta x_2 = \Delta x$, суммарное изменение выходной переменной также будет равно Δy. Большинство сложных систем являются нелинейными. В связи с этим для упрощения анализа систем довольно часто применяют процедуру линеаризации, при которой нелинейную систему описывают приближенно линейными уравнениями в некоторой (рабочей) области изменения входных переменных. Однако не всякую нелинейную систему можно линеаризировать, в частности, нельзя линеаризировать дискретные системы.

12. Дискретные и континуальные системы

Среди нелинейных систем выделяют класс дискретных систем.

Дискретная система – это система, содержащая хотя бы один элемент дискретного действия.

Дискретный элемент – это элемент, выходная величина которого изменяется дискретно, т. е. скачками, даже при плавном изменении входных величин. Все остальные системы относятся к системам *непрерывного (континуального)* действия. Система непрерывного действия (непрерывная система) состоит только из элементов непрерывного действия, т. е. элементов, выходы которых изменяются плавно при плавном изменении входных величин.

13. Каузальные и целенаправленные системы

В зависимости от способности системы ставить себе цель различают каузальные и целенаправленные (целеустремленные, активные) системы.

К каузальным системам относится широкий класс неживых систем:

Каузальные системы – это системы, которым цель внутренне не присуща.

Если такая система и имеет целевую функцию (например, автопилот), то эта функция задана извне пользователем.

Целенаправленные системы – это системы, способные к выбору своего поведения в зависимости от внутренне присущей цели.

В *целенаправленных системах* цель формируется внутри системы.

Пример. Система "самолет-пилоты" способна поставить себе цель и отклониться от маршрута.

Элемент целенаправленности всегда присутствует в системе, включающей в себя людей (или еще шире живые существа). Вопрос чаще всего состоит в степени влияния этой целенаправленности на функционирование объекта. Если мы имеем дело с ручным производством, то влияние так называемого человеческого фактора очень большое. Отдельный человек, группа людей или весь коллектив способны поставить цель своей деятельности, отличную от цели компании.

Активные системы, к которым, в первую очередь, относятся организационные, социальные и экономические, в зарубежной литературе называются «мягкими» системами. Они способны сознательно предоставлять недостоверную информацию и сознательно не выполнять планы, задания, если им это выгодно. Важным свойством таких систем является дальновидность, обеспечивающая способность системы прогнозировать будущие последствия принимаемых решений. Это, в частности, затрудняет применение обратной связи для управления системой. Кроме того, иногда на практике системы условно делят на системы, стремящиеся к цели - *целеориентированные*, и на системы, которые ориентированы, в первую очередь, не на цели, а на определенные ценности - *ценностноориентированные*.

14. Большие и сложные системы

Достаточно часто термины «большая система» и «сложная система» используются как синонимы. В то же время существует точка зрения, что большие и сложные системы – это разные классы систем. При этом некоторые авторы связывают понятие «большая" с величиной системы, количеством элементов (часто относительно однородных), а понятие "сложная" - со сложностью отношений, алгоритмов или сложностью поведения. Существуют более убедительные обоснования различия понятий «большая система" и "сложная" "система».

14.1. Большие системы

Понятие «большая система» стало употребляться после появления книги Р.Х. Гуда и Р.З. Макола. Этот термин широко использовался в период становления системных исследований для того, чтобы подчеркнуть принципиальные особенности объектов и проблем, требующих применения системного подхода.

В качестве признаков большой системы предлагалось использовать различные понятия:

• понятие иерархической структуры, что, естественно, сужало класс структур, с помощью которых может отображаться система;

• понятие «человеко-машинная» система (но тогда выпадали полностью автоматические комплексы);

• наличие больших потоков информации;

• или большого числа алгоритмов ее переработки.

У.Р. Эшби считал, что система является большой с точки зрения наблюдателя, возможности которого она превосходит в каком-то аспекте, важном для достижения цели. При этом физические размеры объекта не являются критерием отнесения объекта к классу больших систем. Один и тот же материальный объект в зависимости от цели наблюдателя и средств, имеющихся в его распоряжении, можно отображать или не отображать большой системой.

Ю.И. Черняк также в явном виде связывает понятие большой системы с понятием «наблюдатель»: для изучения большой системы, в отличие от сложной, необходим "наблюдатель" (имеется в виду не число людей, принимающих участие в исследовании или проектировании системы, а относительная однородность их квалификации: например, инженер или экономист). Он подчеркивает, что в случае большой системы объект может быть описан как бы на одном языке, т. е. с помощью единого метода моделирования, хотя и по частям, подсистемам. Еще Ю.И. Черняк предлагает называть большой системой «такую, которую невозможно исследовать иначе, как по подсистемам».

14.2. Классификация систем по сложности

Существует ряд подходов к разделению систем по сложности, и, к сожалению, нет единого определения этому понятию, нет и четкой границы, отделяющей простые системы от сложных систем. Разными авторами предлагались различные классификации сложных систем.

Например, признаком простой системы считают сравнительно небольшой объем информации, требуемый для ее успешного управления. Системы, в которых не хватает информации для эффективного управления, считают сложными.

Г.Н. Поваров оценивает сложность систем в зависимости от числа элементов, входящих в систему:

- малые системы (10-10^{3} элементов);
- сложные (10^{4}-10^{6});
- ультрасложные (10^{7}-10^{30} элементов);
- суперсистемы (10^{30}-10^{200} элементов).

В частности, Ю.И. Черняк сложной называет систему, которая строится для решения многоцелевой, многоаспектной задачи и отражает объект с разных сторон в нескольких моделях. Каждая из моделей имеет свой язык, а для согласования этих моделей нужен особый метаязык. При этом подчеркивалось наличие у такой системы сложной, составной цели или даже разных целей и притом одновременно многих структур (например, технологической, административной, коммуникационной, функциональной и т. д.).

В.С. Флейшман за основу классификации принимает сложность поведения системы.

Одна из интересных классификаций по уровням сложности предложена К. Боулдингом. В этой классификации каждый последующий класс включает в себя предыдущий.

Условно можно выделить два вида сложности: структурную и функциональную.

Структурная сложность. Ст. Бир предлагает делить системы на простые, сложные и очень сложные.

Простые - это наименее сложные системы.

Сложные - это системы, отличающиеся разветвленной структурой и большим разнообразием, внутренних связей.

Классификация систем по уровню сложности К. Боулдинга.

Очень сложная система - это сложная система, которую подробно описать нельзя.

Несомненно, что эти деления довольно условны и между ними трудно провести границу. (Здесь сразу вспоминается вопрос: с какого количества камней начинается куча?)

Позднее Ст. Бир предложил относить к простым системам те, которые имеют до 10^3 состояний, к сложным - от 10^3 до 10^6 состояний и к очень сложным – системы, имеющие свыше миллиона состояний.

Функциональная сложность. Говоря о сложности систем, Ст. Бир отразил только одну сторону сложности – сложность строения – структурную сложность. Однако следует сказать и о другой сложности систем – функциональной (или вычислительной).

Для количественной оценки функциональной сложности можно использовать алгоритмический подход, например количество арифметико-логических операций, требуемых для реализации функции системы преобразования входных значений в выходные, или объем ресурсов (время счета или используемая память), используемых в системе при решении некоторого класса задач.

Считается, что не существует систем обработки данных, которые могли бы обработать более чем $1.6 \cdot 10^{17}$ бит информации в секунду на грамм своей массы. Тогда гипотетическая компьютерная система, имеющая массу, равную массе Земли, за период, равный примерно возрасту Земли, может обработать порядка 10^{98} бит информации (предел Бреммермана). При этих расчетах в качестве информационной ячейки использовался каждый квантовый уровень в атомах, образующих вещество Земли. Задачи, требующие обработки более чем 10^{93} бит называются трансвычислительными. В практическом плане это означает, что, например, полный анализ системы из 100 переменных, каждая из которых может принимать 10 разных значений, является трансвычислительной задачей.

Пример. Если система имеет два входа, которые могут находиться в двух возможных состояниях, то возможных вариантов состояния – четыре. При 10 входах вариантов уже 1024, а при 20-ти (что соответствует маленькой реальной сделке) – вариантов уже 2^{20}. Когда имеется реальный оперативный план небольшой корпорации, в котором хотя бы тысяча независимых событий (входов), то вариантов получается 2^{1000}! Значительно больше предела Бреммермана.

Кроме того, выделяют такой тип сложности, как динамическая сложность. Она возникает тогда, когда меняются связи между элементами. Например, в коллективе сотрудников фирмы может время от времени меняться настроение, поэтому существует множество вариантов связей, которые могут устанавливаться между ними. Попытку дать исчерпывающее описание таким системам можно сравнить с поиском выхода из лабиринта, который полностью изменяет свою конфигурацию, как только вы меняете направление движения. Примером могут служить шахматы.

Малые и большие, сложные и простые. Авторы книги предлагают рассматривать четыре варианта сложности систем:

1) малые простые;

2) малые сложные;

3) большие простые;

4) большие сложные.

При этом выделение системы того или иною класса в одном и том же объекте зависит от точки зрения на объект, т. е. от наблюдателя. Один и тот же объект может быть представлен системами разной сложности. И это зависит не только от наблюдателя, но и от цели исследования.

Пример. При стратифицированном описании предприятия на самой верхней страте оно может быть описано в виде малой простой системы в виде «черного ящика» с основными ресурсами на входе и продукцией на выходе.

15. Детерминированность, стохастичность

Рассмотрим еще одну классификацию систем, предложенную Ст. Биром.

Если входы объекта однозначно определяют его выходы, то есть его поведение можно однозначно предсказать (с вероятностью 1), то объект является *детерминированным* в противном случае – *недетерминированным* (*стохастическим*).

Математически детерминированность можно описать как строгую функциональную связь $Y = F(X)$, а стохастичность возникает в результате добавления случайной величины ε: $Y = F(X) + \varepsilon$.

Детерминированность характерна для менее сложных систем; стохастические системы сложнее детерминированных, поскольку их более сложно описывать и исследовать.

Примеры:

1. Швейную машинку можно отнести к детерминированной системе: повернув на заданный угол рукоятку машинки можно с уверенностью сказать, что иголка переместится вверх-вниз на известное расстояние.

2. Примером недетерминированной системы является процесс изменения погоды за определенное время.

Стохастичность – следствие случайности. Случайность – это цепь не выявленных закономерностей, скрытых за порогом нашего понимания.

А с другой стороны стохастичность обусловлена приблизительностью наших измерений. В первом случае мы не можем учесть все факторы (входы), действующие на объект, а также не знаем природы его нестационарности. Во втором – проблема непредсказуемости выхода связана с невозможностью точно измерить значения входов и ограниченностью точности сложных вычислений.

Детерминированные системы можно подразделить на ***динамические и статические системы.***

Динамические делятся на стационарные и нестационарные.

16. Классификация систем по степени организованности

16.1. Степень организованности системы

Организованность или упорядоченность организованности системы R оценивается по формуле R = 1-Э, где Э – реальное или текущее значение энтропии. Если система полностью детерминированная и организованная то Э = 0 и R = 1. Снижение энтропии системы до нулевого значения означает полную «заорганизованность» системы и приводит к вырождению системы. Если система полностью дезорганизованная, то R=0 и $Э = Э_{макс}$, где $Э_{макс}$ – максимально возможная энтропия или неопределенность по структуре и функциям системы.

Качественная классификация систем по степени организованности была предложена В. В. Налимовым, который выделил класс хорошо организованных и класс плохо организованных, или диффузных систем. Позднее к этим классам был добавлен еще класс самоорганизующихся систем. Важно подчеркнуть, что наименование класса системы не является ее оценкой. В первую очередь, это можно рассматривать как подходы к отображению объекта или решаемой задачи, которые могут выбираться и зависимости от стадии познания объекта и возможности получения информации о нем.

16.2. Хорошо организованные системы

Если исследователю удается определить нее элементы системы и их взаимосвязи между собой и с целями системы и вид детерминированных (аналитических или графических) зависимостей, то возможно представление объекта в виде хорошо организованной системы. То есть представление объекта в виде хорошо организованной системы применяется в тех случаях, когда может быть предложено детерминированное описание и экспериментально показана правомерность его применения (доказана адекватность модели реальному объекту).

Такое представление успешно применяется при моделировании технических и технологических систем. Хотя, строго говоря, даже простейшие математические соотношения, отображающие реальные ситуации, также не являются абсолютно адекватными, поскольку, например, при суммировании яблок не учитывается, что они не бывают абсолютно одинаковыми, а вес можно измерить только с некоторой точностью. Трудности возникают при работе со сложными объектами (биологическими, экономическими, социальными и др.). Без существенного упрощения их нельзя представить в виде хорошо организованных систем. Поэтому для отображения сложного объекта в виде хорошо организованной системы приходится выделять только факторы, существенные для конкретной цели исследования. Попытки применить модели хорошо организованных систем для представления сложных объектов практически часто нереализуемы, так как, в частности, не удается поставить эксперимент, доказывающий адекватность модели. Поэтому в большинстве случаев при представлении сложных объектов и проблем на начальных этапах исследования их отображают классами, рассмотренными ниже.

16.3. Плохо организованные (или диффузные) системы

Если не ставится задача определить все учитываемые компоненты и их связи с целями системы, то объект представляется в виде плохо организованной (или диффузной) системы. Для описания свойств таких систем можно рассматривать два подхода: выборочный и макропараметрический.

При выборочном подходе закономерности в системе выявляются на основе исследования не всего объекта или класса явлений, а путем изучения достаточно представительной (репрезентативной) выборки компонентов, характеризующих исследуемый объект или процесс. Выборка определяется с помощью некоторых правил. Полученные на основе такого исследования характеристики или закономерности распространяют на поведение системы в целом. Пример. Если нас ни интересует средняя цена на хлеб и каком-либо городе, то можно было бы последовательно объехать или обзвонить все торговые точки города, что потребовало бы много времени и средств. А можно пойти другим путем: собрать информацию в небольшой (но репрезентативной) группе торговых точек, вычислить среднюю цену и обобщить ее на весь город.

При этом нельзя забывать, что полученные статистические закономерности справедливы для всей системы с какой-то вероятностью, которая оценивается с помощью специальных приемов, изучаемых математической статистикой.

При макропараметрическом подходе свойства системы оценивают с помощью некоторых интегральных характеристик (макропараметров).

Пример.

Свойства газа характеризуют макропараметрами – давлением, температурой и т. д., а не определяют путем точного описания поведения каждой молекулы. Основываясь на этих параметрах, разрабатывают приборы и устройства, использующие свойства газа, не исследуя при этом поведение каждой молекулы.

Отображение объектов в виде диффузных систем находит широкое применение при определении пропускной способности систем разного рода, при определении численности штатов в обслуживающих, например ремонтных, цехах предприятия и в обслуживающих учреждениях, при исследовании документальных потоков информации и т.д.

16.4. Самоорганизующиеся системы

Класс самоорганизующихся, или развивающихся, систем характеризуется рядом признаков, особенностей, которые, как правило, обусловлены наличием в системе активных элементов, делающих систему целенаправленной. Отсюда вытекают особенности экономических систем, как самоорганизующихся систем, по сравнению с функционирование технических систем:

• нестационарность (изменчивость) отдельных параметров системы и стохастичность ее поведения;

• уникальность и непредсказуемость поведения системы в конкретных условиях. Благодаря наличию активных элементов системы появляется как бы "свобода воли", но в тоже время возможности ее ограничены имеющимися ресурсами (элементами, их свойствами) и характерными для определенного типа систем структурными связями;

• способность изменять свою структуру и формировать варианты поведения, сохраняя целостность и основные свойства (в технических и технологических системах изменение структуры, как правило, приводит к нарушению функционирования системы или даже к прекращению существования как таковой);

• способность противостоять энтропийным (разрушающим систему) тенденциям. В системах с активными элементами не выполняется закономерность возрастания энтропии и даже наблюдаются негэнтропийные тенденции, т. е. собственно самоорганизация;

• способность адаптироваться, к изменяющимся условиям. Это хорошо по отношению к возмущающим воздействиям и помехам, но плохо, когда адаптивность проявляется и к управляющим воздействиям, затрудняя управление системой;

• способность и стремление к целеобразованию;

• принципиальная неравновесность.

Легко видеть, что хотя часть этих особенностей характерна и для диффузных систем (стохастичность поведения, нестабильность отдельных параметров), однако в большинстве своем они являются специфическими признаками, существенно отличающими этот класс систем от других и затрудняющими их моделирование.

Рассмотренные особенности противоречивы. Они в большинстве случаев являются и положительными и отрицательными, желательными и нежелательными для создаваемой системы. Их не сразу можно понять и объяснить для того, чтобы выбрать и создать требуемую степень их проявления.

При этом следует иметь в виду важное отличие открытых развивающихся систем с активными элементами от закрытых.

17. Классификация систем по степени открытости (закрытости, замкнутости)

Открытые системы – это системы, обменивающиеся с окружающей средой энергией, веществом и информацией. В открытых системах могут происходить явления самоорганизации, усложнения или спонтанного возникновения порядка.

Замкнутые системы обмениваются со средой только энергией и информацией.

В *изолированных системах* любой обмен исключен.

18. Мягкие и жесткие системы.

Чекланд П.Б. ввел различие между жесткими и мягкими системами.

Жесткие системы характеризуется тем, что для подобных систем при попытке к какой-то мере «оптимизировать» решение инженерные методологии дают возможность определить результаты, цели и задачи, которые могут быть получены (достигнуты, решены).

Мягкие системы характеризуется как в высшей степени сложный, неясный и часто непостижимый феномен, применительно к которому не могут быть установлены конкретные цели и который требует изучения с целью осуществить улучшение. Существование подобных систем не ограничивается социальной и политической областями.

На предприятиях, где наблюдаются сложные, часто плохо определенные модели поведения, сдерживающие способность к улучшениям, подобные системы могут использоваться для описания отношений как внутри предприятия, так и между предприятиями.

Пытаясь понять принципиальные особенности моделирования таких систем, уже первые исследователи отмечали, что, начиная с некоторого уровня сложности, систему легче изготовить и ввести в действие, преобразовать и изменить, чем отобразить формальной моделью. По мере накопления опыта исследования и преобразования таких систем это наблюдение подтверждалось, и была осознана их основная особенность - принципиальная ограниченность формализованного описания развивающихся, самоорганизующихся систем.

Необходимость сочетания формальных методов и методов качественного анализа и положена в основу большинства моделей и методик системного анализа. При формировании таких моделей меняется привычное представление о моделях, характерное для математического моделирования и прикладной математики. Изменяется представление и о доказательстве адекватности таких моделей.

Основную конструктивную идею моделирования при отображении объекта классом самоорганизующихся систем можно сформулировать следующим образом: накапливая информацию об объекте, фиксируя при этом все новые компоненты и связи и применяя их можно получать отображения последовательных состояний развивающейся системы, постепенно создавая все более адекватную модель реального, изучаемого или создаваемого объекта. При этом информация может поступать от специалистов различных областей знаний и накапливаться во времени по мере ее возникновения (в процессе познания объекта).

Адекватность модели также доказывается как бы последовательно (по мере её формирования) путем оценки правильности отражения в каждой последующей модели компонентов и связей, необходимых для достижения поставленных целей.

Выводы. 1. При изучении любых объектов и процессов, в том числе и систем, большую помощь оказывает классификация - разделение совокупности объектов на классы по некоторым, наиболее существенным признакам.

2. В зависимости от происхождения системы могут быть естественными (системы, объективно существующие в живой и неживой природе и обществе) и искусственными (системы, созданные человеком).

3. По объективности существования все системы можно разбить на две большие группы: реальные (материальные или физические) и абстрактные (символические) системы.

4. Среди всего многообразия создаваемых систем особый интерес представляют действующие системы, к которым относятся технические, технологические, экономические, социальные и организационные.

5. По степени централизации выделяют централизованные системы (имеющие в своем составе элемент, играющий главную, доминирующую роль в функционировании системы) и децентрализованные (не имеющие такого элемента).

6. Различают системы одномерные (имеющие один вход и один выход) и многомерные (если входов или выходов больше одного).

7. Системы бывают гомогенные, или однородные, и гетерогенные или разнородные, а также смешанного типа.

8. Если система описывается линейными уравнениями, то она относится к классу линейных систем, в противном случае – нелинейных.

9. Система, не содержащая ни одного элемента дискретного действия (выходная величина которого изменяется скачками даже при плавном изменении входных величин), называется непрерывной, в противном случае – дискретной.

10. В зависимости от способности системы поставить себе цель различают каузальные системы (неспособные ставить себе цель) и целенаправленные (способные к выбору своего поведения в зависимости от внутренне присущей цели).

11. Различают большие, очень сложные, сложные и простые системы.

12. По предсказуемости значений выходных переменных системы при известных значениях входных различают детерминированные и стохастические системы.

13. В зависимости от степени организованности выделяют классы хорошо организованных систем (их свойства можно описать в виде детерминированных зависимостей), плохо организованных (или диффузных) и самоорганизующихся (включающие активные элементы).

14. Начиная с некоторого уровня сложности, систему легче изготовить и ввести в действие, преобразовать и изменить, чем отобразить формальной моделью, поскольку имеется принципиальная ограниченность формализованного описания развивающихся самоорганизующихся систем.

15. В соответствии с гипотезой фон Неймана простейшим описанием объекта, достигшего некоторого порога сложности, оказывается сам объект, а любая попытка его строгого формального описания приводит к чему-то более трудному и сложному.

3. Технические системы

3.1. Техника

Техника (от греч. *techne* – искусство, мастерство, умение) – совокупность средств человеческой деятельности, созданных для осуществления процессов производства и обслуживания непроизводственных потребностей общества.

В технике материализованы знания и производственный опыт, накопленные человечеством в процессе развития производства. Техника облегчает трудовые усилия человека и увеличивает их эффективность, позволяет преобразовывать природу в соответствии с потребностями общества. По мере развития производства техника последовательно заменяет человека в выполнении технологических функций, связанных с физическим и умственным трудом. Средствами техники пользуются для воздействия на предметы труда при создании материальных и культурных благ, для получения, передачи и превращения энергии, исследования законов развития природы и общества, передвижения и связи, сбора, хранения, переработки и передачи информации, управления обществом, обслуживания быта, ведения войны и обеспечения обороны.

По *функциональному назначению* различают технику производственную, военную, бытовую, медицинскую, для научных исследований, образования, культуры и др. Основную часть технических средств составляет производственная техника, к которой относятся машины и механизмы, инструменты, аппаратура управления машинами и технологическими процессами, а также производственные здания и сооружения, коммуникации.

Технику обычно классифицируют по *отраслевой структуре производства* (например, промышленности, транспорта) или применительно к отдельным структурным подразделениям производства. Например, техника авиационная, мелиоративная, энергетическая, химическая, горная и т.п.

Техника все в большей мере *становится материализацией научных знаний*. Развитие техники выражается в создании новых и усовершенствовании существующих типов машин, оборудования, повышения технического уровня производств, процессов, их комплексной механизации и автоматизации, в создании новых материалов, топлива и преобразователей энергии и т.п.

Исторически техника прошла путь развития от примитивных машин, выполняющих одну операцию до сложнейших автоматических машин современного производства, объединенных в единое целое - систему, имеющую соответствующую структуру и направленную на достижение определенных целей.

3.2. Технический объект

Технический объект (ТО) – это машина, механизм, технический комплекс, а также любой их компонент, выделяемый в процессе проектирования путем декомпозиции (деления) структуры целостного объекта на отдельные блоки, части, элементы.

Процесс возникновения нового технического объекта, функционирования и исчезновения, иначе говоря, жизненный цикл технического объекта, состоит из нескольких этапов – стадий его развития.

3.3. Жизненный цикл технического объекта

Жизненный цикл технического объекта – последовательность этапов существования объектов искусственного происхождения от начала их создания до момента исчезновения, т.е. стадии процесса, охватывающие различные состояния системы, начиная с момента необходимости в такой системе и заканчивая ее полным выводом из эксплуатации.

На каждом этапе объект имеет относительно стабильный набор характеристик. Разные классы технических систем могут иметь несколько различающийся набор этапов жизненного цикла.

Типичный состав стадий (этапов) жизненного цикла технической системы:

1. *Стадия замысла*. Определение функций и потребительских качеств технической системы, что соответствует составлению технического задания.

2. *Стадия разработки*. Выбор функциональной структуры, принципа действия и технического решения, что соответствует разработке технического предложения или (и) технического проекта;

3. *Стадия проектирования*. Рабочее проектирование, связанное с расчетом и оптимизацией параметров технической системы, выбором и разработкой технологии изготовления, составлением проектной документации;

4. *Стадия производства*. Изготовление, контроль и испытание технической системы;

5. Стадия транспортировки и хранения технической системы;

6. *Стадия применения*. Эксплуатация, обслуживание, диагностика неисправностей и ремонт технической системы;

7. *Стадия утилизация* технической системы в результате ее физического или морального старения.

Наибольшее число задач технического творчества возникает на этапах 1,2; характерны такие задачи и для этапов 4, 6, 7.

3.4. Техническая система

Техническая система (ТС) – это структура, образованная взаимосвязанными элементами, предназначенная для выполнения определенных полезных функций.

Функция – это способность ТС проявлять свое свойство (качество, полезность) при определенных условиях и преобразовывать предмет труда (изделие) в требуемую форму или величину. Появление цели – это результат осознания потребности. Потребность (постановка задачи) – это то, что нужно иметь (сделать), а функция – реализация потребности в ТС. Возникновение потребностей, осознание цели и формулирование функции – это процессы, происходящие внутри человека. Но реально действующая функция – это воздействие на предмет труда (изделие) или служение человеку. То есть, не хватает промежуточного звена – рабочего органа. Это и есть носитель функции в чистом виде.

Рабочий орган (РО) – единственная функционально полезная человеку часть технической системы. Все остальные части вспомогательные. ТС и возникали на первых этапах как рабочие органы (взамен органов тела и в дополнение им). И только потом, для увеличения полезной функции к рабочему органу "пристраивались" другие части, подсистемы, вспомогательные системы.

Наука и техника как области человеческой деятельности существуют с давних пор. Однако если в прошлых столетиях проблемы этих областей интересовали лишь узкий круг причастных к ним интеллектуалов, а отношение к технике было сугубо прикладным, то наше время выдвинуло оба этих явления в центр общественного внимания. Количество специальных технических дисциплин возрастает с огромной скоростью, поскольку не только различные отрасли техники, но и разные аспекты этих отраслей становятся предметом исследования. Всё возрастающая специализация в технике стимулирует процесс развития технических дисциплин, однако все они концентрируют свое внимание на отдельных видах, или на отдельных аспектах, определенных "срезах" техники. Техника же в целом не является предметом исследования технических дисциплин.

Многие естественные науки в связи с усилением их влияния на природу вынуждены принимать во внимание технику и даже делают её предметом специального исследования, конечно, со своей особой естественнонаучной (например, физической) точки зрения. В силу проникновения техники практически во все сферы жизни современного общества даже общественные науки, прежде всего социология и психология, обращаются к специальному анализу технического развития. Историческое же развитие техники традиционно является предметом изучения истории техники как особой гуманитарной дисциплины, но, как правило, историко-технические исследования специализированы по отдельным отраслям или стадиям развития и почти не затрагивают вопросы о тенденциях и перспективах развития современной техники.

Технические устройства и орудия, которые окружают нас в повседневной жизни, это лишь предметы технической деятельности человека, материальные результаты его технических усилий и размышлений. За всем этим лежит обширная сфера технических знаний и основанных на этих знаниях действий. Технические знания воплощаются не только через техническую деятельность в разного рода технических устройствах, но и фиксируются в статьях, книгах, учебниках. Без налаженного механизма производства, накопления и передачи знаний никакое техническое развитие в современном обществе было бы невозможно. Кроме того, сам процесс применения научных знаний в инженерной практике далеко не прост и связан не только с приложением уже имеющихся, но и с получением новых знаний.

Поэтому в настоящее время техника понимается:

- как *совокупность технических устройств*, от отдельных простейших орудий до сложнейших технических систем;

- как совокупность различных видов технической деятельности по созданию этих устройств, от научно–технического исследования и проектирования до их изготовления и эксплуатации, от разработки отдельных элементов технических систем до системного исследования и проектирования;

- как *совокупность технических знаний* (технологий), от специализированных технических, до теоретических научно-технических и системотехнических знаний.

Иногда говорят, что техника развивается по законам природы. В доказательство приводится тот факт, что любая машина и орудие основаны на законах и явлениях природы, которые нельзя игнорировать, создавая технику. Действительно, эти законы нельзя отбросить, но сама природа никогда не создавала и не создает технику, техника создается людьми, обществом, а раз так, то бесполезно пытаться законами природы объяснить технический прогресс. В наше время появляются новые тенденции в понимании техники, связанные с возрастанием роли науки в техническом развитии, а так же с тем, что теперь нередко гораздо сложней и трудней разработать (спроектировать) техническую систему, чем ее изготовить.

Любое общественное явление развивается при участии человека и благодаря его деятельности, поэтому говорить о саморазвитии техники в строгом смысле этого слова нельзя.

Можно лишь подразумевать возникновение определенных внутренних противоречий в технике, обусловленных общим ходом ее развития. Техника развивается не по экономическим, политическим или иным законам, свойственным определенным сторонам общественной жизни, а по законам, которые выражают ее взаимодействие с этими сторонами, устойчивые связи и отношения с ними. Следовательно, стремясь обнаружить закономерности техники и технического прогресса, необходимо в первую очередь изучать их взаимодействие с другими сторонами и явлениями общественной жизни. *Технический объект* – это, несомненно, часть объективной реальности, но часть особая. Его возникновение и существование связаны с человеком. Это определяет исторический характер технического объекта. Он выступает воплощением знаний людей. Усиление, дополнение и замещение рабочих органов – социальная необходимость, реализуемая путем использования природы и воплощения в преобразуемых природных телах трудовых функций. Поэтому, есть основания считать, что существует ряд закономерностей элементов внутренней организации, структуры технических устройств и технических систем. *Эксплуатация*, *изготовление* и *конструирование* тесно связаны друг с другом и представляют собой своеобразное развитие технической практики. В качестве объекта эксплуатации техника выступает как некоторая материальная и функциональная целостность, сохранение и регулирование которой – непременное условие ее использования. Движущим противоречием эксплуатации является несоответствие между *условиями функционирования* техники и ее *функциональными особенностями*. Функциональные особенности предполагают постоянство условий эксплуатации, а условия эксплуатации имеют тенденцию меняться. Преодоление этого противоречия достигается в технологии, в нахождении типовых технологических операций. Технологии – это обусловленные состоянием знаний способы достижения целей. Причем, достигая поставленной цели, человек одновременно достигает и множества других целей, многие из которых он не ставил. Внутренним противоречием технологии является несоответствие между используемыми природными процессами и потребностями в повышении надежности и эффективности техники. Преодоление этого противоречия достигается в конструировании более совершенной техники, с помощью которой можно использовать более фундаментальные закономерности природы. Техника не пассивна по отношению к технологии, средство влияет на цель. Новая техника изменяет технологию, технология сама становится средством реализации внутренних достоинств сконструированной техники. Исторически возникновение и становление первых технических наук относят к концу XVIII века. Использование природных сил, овеществляемых в машинах, в качестве непременного условия требовало сознательного применения естествознания. Именно в силу этого впервые возникли такие практические проблемы, которые могли быть разрешены лишь научным путем, так появилась теория машин и механизмов. Современные технические науки по мере усложнения исследуемых ими технических систем, несущих сложные социальные функции, сближаются в известном плане с общественными науками. Появился раздел социально-технических знаний, который нацелен на исследование технических устройств с точки зрения технико-экономических, инженерно-психологических, технико-эстетических, эргономических, экологических и других социальных характеристик. Причина возникновения и развития техники заключена в противоречиях между целями (потребностями) и средствами для воплощения этих целей в деятельности человека. Любое разрешение противоречия требует каких-либо изменений: приспособление и развитие самого человека (прямохождение, развитие кисти, мозга), преобразование окружающей природной среды (сельскохозяйственное использование, животноводство, строительство сооружений), изменение общества (социальных структур, связей, функций и ориентиров) или "достраивание" (расширение функциональных возможностей) человека и общества путем создания искусственных технических "органов".

3.5. Признаки технических систем

Каковы основные признаки технических систем? К ним можно отнести следующие:

– технические системы состоят из частей и элементов, то есть, имеют *структуру*;

– элементы (части) технической системы имеют *связи* друг с другом, соединены определенным образом, организованы в пространстве и времени;

– технические системы созданы для некоторых *целей*, для выполнения полезных *функции*;

– каждая техническая система в целом обладает каким-то особым качеством, неравным простой сумме свойств составляющих ее элементов – является цельной, функционирующей, организованной. Это называют эмерджентностью – системным эффектом (качеством) данной системы.

3.6. Технология

Технoлóгия (от греческого téchne – искусство, мастерство, умение и греческого логия – изучение) – совокупность методов и инструментов для достижения желаемого результата; способ преобразования данного в необходимое.

Технология – в широком смысле – объём знаний, которые можно использовать для производства товаров и услуг из экономических ресурсов. Технология – в узком смысле – способ преобразования вещества, энергии, информации в процессе изготовления продукции, обработки и переработки материалов, сборки готовых изделий, контроля качества, управления. Технология включает в себе методы, приемы, режим работы, последовательность операций и процедур, она тесно связана с применяемыми средствами, оборудованием, инструментами, используемыми материалами.

Современные технологии основаны на достижениях научно–технического прогресса и ориентированы на производство продукта: материальная технология создаёт материальный продукт, информационная технология (ИТ) – информационный продукт. Технология это также научная дисциплина, разрабатывающая и совершенствующая способы и инструменты производства. В быту технологией принято называть описание производственных процессов, инструкции по их выполнению, технологические требования и пр. Технологией или технологическим процессом часто называют также сами операции добычи, транспортировки и переработки, которые являются основой производственного процесса. Технический контроль на производстве тоже является частью технологии. Разработкой технологий занимаются технологи, инженеры, конструкторы, программисты и другие специалисты в соответствующих областях.

Технология – по методологии ООН: – либо технология в чистом виде, охватывающая методы и технику производства товаров и услуг (dissembled technology); – либо воплощенная технология, охватывающая машины, оборудование сооружения, целые производственные системы и продукцию с высокими технико-экономическими параметрами (embodied technology).

3.7. Взаимосвязь техники и технологии

Развитие техники таково, что на первом этапе ее развития происходит усложнение технических систем и объектов – усложняются задачи, возрастает число функций, выполняемых техническими системами.

Но в последнее время наметилась тенденция, заключающаяся в том, что появились технологические процессы, которые осуществляются с минимальным и даже нулевым участием технических устройств. Например, теоретические достижения в области механики жидкостей и газов позволили радикально упростить технику возгонки нефти по фракциям. Успехи генной инженерии делают вполне реальным самостоятельное усвоение сельскохозяйственными культурами атмосферного азота. Процесс развития таких растений не будет опосредован техническим звеном, и, тем не менее, это будет технологический процесс, функционально эквивалентный гигантской индустрии азотных удобрений.

Можно сказать, что идеальная техническая система – это система, вес, объем и площадь которой стремятся к нулю, при этом способность выполнять работу и решать поставленные перед ней задачи сохраняется (не уменьшается). Иначе говоря, идеальная техническая система – это когда системы нет, а ее функция сохраняется.

Что же является главным в понимании сущности техники и технологии?

Конечно, технологический процесс является основным, а техника – производной от него.

Таким образом, из факта реального существования технологии с минимальным и даже нулевым участием искусственных устройств следует вывод о первичности технологического процесса по отношению к технике. Наиболее ярко связь технологии и техники и отмеченной тенденции прослеживается в истории развития вычислительной техники информационных технологий.

4. Проектирование технических систем

4.1. Методология проектирования

Создание нового *технического объекта* – сложный и длительный процесс, в котором основным *этапом* является *стадия проектирования*.

Современная методология проектирования базируется на *системном подходе*. Основные понятия, принципы моделирования и системного подхода рассмотрены в разделах 1, 2.

Проектирование технических систем на методологическом уровне базируется на принципах, обеспечивающих корректность и достоверность результатов исследований, полученных с использованием математических моделей, и, в конечном счете, качественное проектирование систем.

Такими принципами являются:

1) системный подход при решении задач анализа и синтеза;

2) принцип иерархического многоуровневого моделирования;

3) принцип множественности моделей.

4.2. Рассмотрение техники и технических объектов с позиций системного подхода

Технический объект при системном подходе рассматривается как сложная управляемая система, состоящая из взаимосвязанных, целенаправленно функционирующих элементов и находящаяся во взаимодействии с окружающей внешней средой. Это позволяет учесть все факторы, влияющие на его функционирование, и обеспечить создание технического объекта с высокими показателями эффективности, качества и его эксплуатационных свойств.

Одно из важнейших требований системного подхода заключается в необходимости рассматривать существование и функционирование ТО во *времени* и в *пространстве*. Описание существования объекта во времени приводит к понятию *жизненного цикла*, а в пространстве – к понятию *внешней среды*, с которой взаимодействует объект в процессе своего функционирования.

Как говорилось в разделе 3, жизненным циклом технического объекта называется совокупность взаимосвязанных процессов создания и последовательного изменения его состояния от формирования исходных требований к объекту до окончания его эксплуатации. Жизненный цикл состоит из следующих основных *стадий*: *создание, производство, обращение, эксплуатация и утилизация.* Каждая из стадий содержит ряд этапов, операций и процедур. Все стадии жизненного цикла имеют *прямые* и *обратные связи*.

Прямые связи. Качество проекта определяет устойчивое и управляемое функционирование объекта и сказывается на производственных и эксплуатационных издержках. Эффективность характеризует основные эксплуатационные свойства объекта (производительность, экономичность и др.).

Обратные связи. Но высокая эффективность новых разработок достижима лишь при учете результатов эксплуатации ТО и анализа технологических аспектов его производства.

Процесс создания ТО состоит из стадий: предпроектные исследования, техническое задание, техническое предложение, эскизный проект, технический проект, рабочий проект, изготовление опытных образцов, испытания и доводка, приемочные испытания.

Первые две стадии и частично третья составляют этап внешнего проектирование, формирование описания среды функционирования ТО, моделирование и исследование, направленные на разработку концепции и технического решения. Этап внешнего проектирования называется этапом научно – исследовательских работ (НИР). Завершается НИР разработкой технического задания (ТЗ).

Остальные стадии относятся к внутреннему проектированию и составляют этап опытно – конструкторских работ (ОКР), в процессе которого определяются и конкретизируются основные функциональные и конструктивные параметры, определяющие технико – экономические показатели и облик создаваемого технического объекта.

Решение проблемы создания нового технического объекта базируется на всесторонне обоснованной концепции и вытекает из безусловных потребностей общества, необходимости практической реализации достигнутого научного потенциала и повышения показателей эффективности.

Концепция определяется как комплекс требований к техническому объекту для выполнения его назначения и содержит описание основы функционирования объекта.

Кроме выделения стадий осуществляется *декомпозиция* процесса проектирования в зависимости от степени абстрагирования, характера отображаемых свойств объекта, его структуры, принятой схемы распределения работ между подразделениями проектно – конструкторской организации и др.

Декомпозиция приводит к выделению составных частей объекта (блоков), иерархических уровней, аспектов. Это позволяет сложную задачу проектирования свести к решению более простых задач с учетом взаимодействия между ними. Каждая задача решается на основе локальной оптимизации, но декомпозиция критериев при этом осуществляется таким образом, чтобы локальные цели были подчинены конечной цели проектирования. Следовательно, концепция системности выражается не только в выделении взаимозависимых и взаимодействующих элементов технического объекта как системы, но и в единстве целей их функционирования. Кроме того, технический объект, в свою очередь, рассматривается как элемент более сложной системы (надсистемы), в состав которой входит ряд объектов внешней среды, взаимодействующих с данным техническим объектом.

Таким образом, методология проектирования базируется на системном подходе, использующем принципы декомпозиции, иерархичности, итеративности, локальной оптимизации и комплексного осуществления процесса проектирования, включающего функциональный, конструкторский и технологический аспекты.

Аспекты различаются характером решаемых задач и используют различные описания.

Функциональный аспект включает отображение основных принципов функционирования, характера физических и информационных процессов в объекте. При функциональном проектировании осуществляется синтез структуры и определяются основные параметры объекта и его составных частей (элементов), функционирования. Результат проектирования – принципиальные, функциональные, кинематические, алгоритмические схемы и сопровождающие их документы.

Функциональное проектирование осуществляется практически на всех стадиях и этапах создания технического объекта и при этом многократно повторяется по мере раскрытия неопределенностей, характерных для начальных этапов.

Конструкторский аспект – это реализация результатов функционального проектирования. При конструкторском проектировании разрабатываются компоновки и рабочие чертежи деталей, осуществляется выбор стандартных и унифицированных элементов, материалов деталей, оформляется конструкторская и эксплуатационная документация.

При этом определяются оптимальные конструктивные параметры – размеры и форма деталей, сборочных единиц и т.п., обеспечивающие минимальные массу и габариты, равнопрочность элементов конструкции при заданном ресурсе.

Технологический аспект включает реализацию результатов конструкторского проектирования, т.е. их материализацию в виде физического изделия (машины, технической системы и т.п.). Технологическое проектирование решает задачи технологические маршруты изготовления деталей, сборки, накладки технологических испытаний изготавливаемых изделий, осуществляется выбор оборудования, оснастки, инструмента и т.д.

Кроме рассмотренной иерархии этапов, стадий и аспектов проектирования иерархические уровни выделяют на основе блочного структурирования технического объекта по функциональным признакам, а также в связи с различной степенью абстрагирования при описании физических свойств технического объекта на разных этапах и стадиях проектирования.

При блочном структурировании вначале выделяют крупные блоки, составляющие верхний иерархический уровень, затем каждый блок расчленяют на более мелкие блоки, входящие в следующий уровень, и т.д. вплоть до неделимых элементов (деталей), составляющих нижний уровень иерархии. Например, блоки верхнего иерархического уровня автомобиля: двигатель, трансмиссия, ходовая часть и др. В трансмиссию входят блоки: сцепление, коробка передач, карданная передача, главная передача, дифференциал. Каждый из них может быть, в свою очередь, расчленен на более мелкие блоки.

С другой стороны, технический объект и выделяемые по функциональным признакам блоки могут быть структурированы по степени абстрагирования (детальности описания физических свойств). В этом случае возникают *три иерархических уровня*: верхний называют *метауровнем*, средний – *макроуровнем* и, нижний – *микроуровнем*.

4.3. Структура и параметры объектов проектирования

Структура – это упорядоченное множество элементов и их отношений.

Технический объект при системном подходе рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих элементов, составляющих упорядоченное множество.

Структура технического объекта характеризуется *качественны*м и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми *параметрами элементов*.

Структура технической системы – совокупность *необходимых* и *достаточных* для достижения цели отношений (связей) между элементами системы.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды.

Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с техническим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

Параметр – это величина, характеризующая свойство или режим работы объекта. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. Следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, рабочая скорость, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость, габариты, масса, показатели надежности, показатели качества переходных процессов и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта.*

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. Различают внутренние и внешние параметры.

Внутренние параметры – это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Например, двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля. Выходные параметры их – мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии и одновременно это внутренние параметры автомобиля.

Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры – свойства его элементов.

При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

Внешние параметры – это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, для автомобиля внешняя среда – дорога и воздушная среда. Параметры дороги включают в себя углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды – плотность и относительная влажность воздуха, скорость и направление ветра.

4.4. Стадии, аспекты и режимы процесса проектирования

При проектировании сложных технических систем выделяются следующие *стадии*.

Стадия предварительного проектирования или стадия научно-исследовательских работ, связана с поиском принципиальных возможностей построения систем, исследованием новых принципов, структур, технических средств, обоснованием наиболее общих решений. Результат этой стадии – техническое предложение.

На *стадии эскизного проектирования* или опытно-конструкторских работ, производится детальная проработка всех частей проекта, конкретизируются и детализируются технические решения.

На *стадии рабочего проекта* формируется вся необходимая документация для изготовления изделия. Далее создается и испытывается опытный образец, по результатам испытаний вносятся необходимые коррективы в проектную документацию, после чего осуществляется внедрение.

Этап проектирования – составная часть любой из стадий проектирования, сводящихся к выполнению операций и процедур и относящихся к одному из аспектов или иерархическому уровню.

Расчленение (декомпозиция) описаний свойств объекта приводит к появлению ряда **аспектов** описания.

Функциональный аспект связан с отображением основных принципов функционирования, характера физических и информационных процессов, протекающих в техническом объекте.

Конструкторский аспект связан с реализацией результатов функционального проектирования, то есть с определением геометрических форм объектов и их взаимного расположения в пространстве.

Технологический аспект относится к реализации результатов конструкторского проектирования, то есть, связан с описанием средств и методов изготовления объектов.

Следует иметь в виду, что понятие аспекта уровня проектирования относится к структурированию представлений о проектируемом объекте, а этапа – к структурированию процесса проектирования.

По характеру и степени участия человека и использования вычислительной техники различают несколько режимов проектирования.

Автоматический режим имеет место при выполнении маршрута проектирования и алгоритмов на персональном компьютере без вмешательства человека в ход решения.

Ручной режим характеризуется выполнением маршрута проектирования без помощи ЭВМ.

Диалоговый (интерактивный) режим является более совершенным режимом, при нем все процедуры в маршруте выполняются с помощью ЭВМ, а участие человека проявляется в оперативной оценке результатов проектных процедур или операций, в выборе продолжений и корректировке хода проектирования.

Развитие систем автоматизированного проектирования (САПР) происходит в направлении увеличения степени автоматизации. Однако работа в режиме диалога необходима, поскольку полностью процесс проектирования сложных технических систем формализовать не удается, а участие человека в ряде случаев позволяет ускорить процесс принятия решений.

4.5. Постановка задач проектирования

Техническое задание на проектирование обычно представляет собой вербальное (словесное) описание целей и задач проектирования данного объекта. Эти задачи носят оптимизационный характер. Для осуществления проектирования конкретного технического объекта необходима его математическая модель и формализация понятия «оптимальный».

Результатом выполнения маршрута проектирования являются проектное решение и проектные документы, содержащие информацию о структуре и выходных параметрах ТО и о параметрах его элементов (внутренних параметрах объекта) при заданных внешних параметрах.

В общем случае задача проектирования имеет следующую математическую формулировку: определить структуру и внутренние параметры технического объекта, доставляющие экстремум некоторой скалярной функции $F(\bar{X})$ при заданных ограничениях $\bar{\varphi}(\bar{X}) > 0, \psi(\bar{X}) = 0$, где $\bar{X}$ – вектор оптимизируемых параметров.

Функцию $F(\vec{X})$ называют *целевой функцией* или *функцией качества.* Она количественно выражает качество технического объекта. Эффективность и качество функционирования объекта характеризуются его выходными параметрами, поэтому они выступают в роли *критериев оптимальности.* Так как физические свойства объекта характеризуются множеством выходных параметров, то задача оказывается *многокритериальной.*

Процедура постановки задачи проектирования носит неформальный характер и включает следующие этапы: выбор критериев оптимальности, формирование целевой функции, выбор управляемых (оптимизируемых) параметров, назначение ограничений, нормирование управляемых и выходных параметров. Содержание этих этапов будет раскрыто позже при изучении методов оптимизации.

Многокритериальность задачи создает сложности формирования целевой функции и приводит к множеству возможных решений. Выделение некоторого подмножества решений задачи относится к проблеме выбора и принятия решения. *Задачей принятия решения* называют кортеж $\alpha = < W, \Theta >$, где W – множество вариантов решений задачи; Θ – принцип оптимальности, дающий представление о качестве вариантов, в простейшем случае правило предпочтения вариантов. Решением задачи α называют множество $W_{\text{ok}} \subseteq W$, полученное на основе принципа оптимальности.

Задачи принятия решений классифицируют по наличию информации о множестве W и принципе оптимальности Θ.

Если W и Θ неизвестны, возникает *общая задача принятия решения.* Это наиболее сложная задача, так как данные для получения W_{ok} определяют в процессе решения. Задачу с известным Θ называют *задачей выбора*, а задачу с известными W и Θ – *задачей оптимизации.*

Построение W в общем случае является задачей выбора. Следовательно, общую задачу принятия решений можно свести к решению последовательных задач выбора. Информацию о физических свойствах вариантов W при этом доставляет ЭВМ, а выбор осуществляет *лицо, принимающее решение* (ЛПР), т.е. проектировщик.

Сложность задачи принятия решения обусловлена условиями неопределенности, характерными для начальных стадий проектирования технического объекта. Это приводит к необходимости многократного повторения процедур проектирования по мере раскрытия неопределенностей.

Раздел математической теории принятия решений в условиях определенности называют *теорией статистических решений.*

4.6. Особенности технологии автоматизированного проектирования технического объекта

Технология автоматизированного проектирования технических объектов базируется на изложенной в разделе 4.1 методологии.

Основные этапы разработки системы автоматизированного проектирования технического объекта предусматривают выполнение взаимосвязанных процедур анализа и синтеза.

Анализ технического объекта – это изучение его физических свойств, характеризуемых выходными параметрами. При анализе не создаются новые объекты, а исследуются заданные на основе изучения процессов их функционирования. Для этого проводятся вычислительные эксперименты с использованием математических моделей объектов.

Синтез технического объекта – это создание новых вариантов, обеспечивающих заданный алгоритм функционирования и выполнение технических требований к объекту.

Математические описания элементов структуры проектируемого объекта известны и хранятся в базе данных. В результате формирования математической модели представляет собой по существу синтез абстрактной модели объекта. Процедура синтеза при этом легко формализуется и может быть автоматизирована.

Оптимизации подлежат обычно не все параметры объекта, а только часть из них. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

Проектное решение, удовлетворяющее заданным техническим требованиям, называют *допустимым решением*.

Если сравнивается ограниченное число вариантов структур, то основными компонентами технологического маршрута проектирования являются: синтез структуры, анализ и оптимизация параметров вариантов структур, процедура оценки и принятия решения.

Если определяют наилучшие в некотором смысле структуру и параметры, то синтез называют *оптимизацией*. При определении оптимальных значений параметров говорят о *параметрической оптимизации*. Задачу выбора оптимальной структуры называют структурной оптимизацией.

Декомпозиция и иерархичность процесса проектирования технического объекта обусловливают многообразие решаемых задач, их целей и используемых математических моделей на различных стадиях и этапах. Разнообразие учитываемых при этом физических свойств разделяет объекты на *дискретные* и *непрерывные*. Это различие определяется мощностью множества значений переменных характеризующих количество вариантов проектных решений. Если множество имеет мощность континуума, объект называют непрерывным. Если множество конечно или счетно, то объект называют дискретным. Соответственно математические модели этих объектов называют *непрерывными* и *дискретными*.

Оптимизации подлежат обычно не все параметры объекта, а только часть из них. Параметры элементов объекта, подлежащие оптимизации, называют *управляемыми параметрами*.

Проектное решение, удовлетворяющее заданным техническим требованиям, называют *допустимым решением*.

Если сравнивается ограниченное число вариантов структур, то основными компонентами технологического маршрута проектирования являются: синтез структуры, анализ и оптимизация параметров вариантов структур, процедура оценки и принятия решения.

5. Основы теоретической механики

Механика – раздел физики, в котором изучается механическая форма движения тел в пространстве и времени.

В теоретической механике изучаются общие свойства механического движения тел под действием сил. При построении теории реальные объекты заменяются идеализированными образами – *моделями*. В моделях учитываются не все свойства реальных объектов, а только существенные для рассматриваемого круга вопросов. Оценить существенные свойства может только практика.

Простейшей моделью в механике является *материальная точка,* заменяющая реальное тело. Такая замена допустима, если при заданной точности вычислений размерами тела можно пренебречь – оно мало по сравнению с некоторым расстоянием, рассматриваемым в поставленной задаче. Это традиционное определение понятия материальной точки находит более глубокое обоснование введения этого понятия в связи с возможностью отделения вращательного движения тела вокруг центра масс от поступательного его движения вместе с центром масс и возможностью независимого их излучения.

Система материальных точек (механическая система) моделирует систему взаимодействующих тел. Отдельно взятое материальное тело моделируется непрерывной совокупностью материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга (твердое тело).

Пространство моделируется множеством геометрических точек: непрерывным, однородным, изотропным, односвязным, трехмерным с геометрией Евклида. Время в классической механике принимается непрерывным, однородным, одномерным и однонаправленным, равномерно текущим вперед. Все эти свойства – результат обобщения многовековой практической деятельности людей. Только на рубеже двух последних столетий практика потребовала внесения изменений в эти представления (специальная теория относительности).

Математическое изучение движения требует введения системы отсчета. С некоторым телом связывается неизменно система координат, и выбирается соответствующий способ измерения длин и промежутков времени. В результате пространство арифметизируется: каждой его точке ставится в соответствие три вещественных числа, каждому моменту времени – одно число. При этом все элементы системы отсчета идеализированы: тело отсчета и единичный масштаб принимаются абсолютно твердыми, часы – идущими идеально правильно, равномерно.

Соотношение между моделью и реальным объектом весьма сложное. Законы механики, хотя и формулируются для моделей, выводятся из экспериментов и наблюдений над реальными телами и процессами. На вопрос о том, являются ли знания, приобретенные путем математического анализа свойств моделей, действительно знаниями об оригиналах, может дать ответ только практика. Она устанавливает меру соответствия полученных наукой истин реальностям нашего мира. Односторонность моделей устраняется в процессе поступательного развития науки. Конкретная модель играет роль момента, звена в процессе познания, который реализуется через относительные истины.

Основными разделами теоретической механики являются: статика, кинематика и динамика.

Статика – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием приложенных к ним сил и моментов сил.

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения. Движущиеся объекты рассматриваются как геометрические точки или тела. Изучая геометрию движения, кинематика интересуется возможными видами движения точек и тел, скоростями и ускорениями точек тела, траекториями, перемещениями и пр. Массы тел и действующие на них силы в кинематике не учитываются.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучаются движения механических систем под действием сил и моментов сил, определяемых по законная Ньютона.

5.1. Кинематика

Определение таких понятий кинематики как скорость и ускорение точки, угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела дается по одной и той же логической схеме. Проследим за логикой введения понятий на примере скорости. Рассмотрим цепочку

$$\bar{r}(t) \Rightarrow \Delta\bar{r} \Rightarrow \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{\text{с}} \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_c = \vec{v}(t), \qquad (5.1)$$

$$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}; \overline{v}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}.$$

В этой цепочке $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор движущийся точки M, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M; $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки за время от произвольного момента t до момента $t + \Delta t$; $\vec{v}_{\text{с}}$ – средняя скорость точки M в интервале ($t, t + \Delta t$); $\vec{v}(t)$ – скорость точки M в данный момент t. Вводимая величина – здесь это скорость $\vec{v}(t)$ – определяется через предельный переход.

В цепочке (5.1) вводимые величины допускают не только математическое, но и механическое истолкование. Так, $\Delta\vec{r}$– геометрическое приращение радиус-вектора – может быть истолковано как перемещение воображаемой точки, совершающей равномерное прямолинейное движение со скоростью $\vec{v}_с$ по хорде от точки M(t) до точки M'(t+Δt).

В соответствии с определением, скорость $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ – это кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета. Скорость характеризует быстроту движения точки, темп изменения радиус-вектора $\vec{r}$. Модуль и направления вектора $\vec{v}$ совпадают с модулем и направлением перемещения точки за единицу времени в равномерном движении по касательной к траектории в предположении, что скорость точки, начиная с данного момента, не изменяется. Скорость точки направлена всегда по касательной к траектории.

По аналогичной схеме вводится понятие ускорения точки $\vec{w}(t)$:

$$\vec{v}(t) \Rightarrow \Delta\vec{v} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{w}_c \Rightarrow = \vec{w}(t) \qquad (5.2)$$

Вектор $\Delta\vec{v}$ здесь можно истолковать как приращение скорости за время Δt в воображаемом равноускоренном движении с постоянным по величине и направлению ускорением $\vec{w}_с$. Ускорение $\vec{w}$ – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчета. По модулю и направлению вектор $\vec{w}$ совпадает с вектором скорости точки, описывающей годограф скорости.

Аналогично вводится понятие угловой скорости $\omega(t)$ вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$\varphi(t) \Rightarrow \Delta\varphi \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_с \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \omega_с = \omega(t), \qquad (5.3)$$

и понятие углового ускорения тела $\varepsilon(t)$:

$$\omega(t) \Rightarrow \Delta\omega \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_с \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_с = \varepsilon(t). \qquad (5.4)$$

5.2. Динамика материальной точки

Первый закон Ньютона – закон инерции – изолированная материальная точка сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения или находится в состоянии покоя.

Содержанием закона инерции является утверждение о существовании инерциальных систем отсчета. Следует отличать инерциальную систему отсчета как одну из наиболее важных моделей (научных идеализаций) в механике от конкретной формы ее реализации на практике. Для любой задачи (из астрономии, космонавтики, обычной инженерной практики) всегда можно указать такую систему отсчета, по отношению к которой движение тел будет описываться законами Ньютона с заранее заданной точностью. Система, которая движется равномерно и прямолинейно относительно однажды найденной инерциальной системы, тоже инерциальная (с той же точностью) для данной задачи. На практике мы всегда имеем дело, таким образом, с прототипами инерциальной системы, хотя их и принято называть просто инерциальными системами.

Второй закон Ньютона – основной закон динамики: производная по времени от количества движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета равна геометрической сумме приложенных к точке сил:

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{F},$$

где $m\vec{v}$ – количество движения.

Поскольку масса m постоянная, то

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \text{ или } m\vec{w} = \vec{F},$$

где $\vec{w}$ – ускорение точки, $\vec{F}$ – геометрическая сумма приложенных к точке сил. Учитывая, что $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = d^2\vec{r}/dt^2$, можно написать

$$m\, d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}.$$

Третий закон Ньютона – закон взаимодействия тел: действия тел друг на друга равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Классическая механика имеет определенные границы применимости. Она описывает движение макроскопических тел при скоростях, значительно меньших скорости света в вакууме. Область приложения классической механики весьма обширна: инженерная практика, космонавтика, астрономия и др. Классическая механика – основа многих технических наук.

5.3. Две основные задачи динамики точки

В соответствии с основным уравнением динамики точки

$$m\, d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F} \tag{5.5}$$

рассматривают две задачи:

- Первая задача:

по заданному уравнению движения определяют действующую на точку силу (обратная задача).

- Вторая задача:

по заданной силе находят уравнения движения (прямая задача).

Решение обратной задачи требует выполнение дифференцирования, тогда как решение – интегрирования. Теория дифференциальных уравнений гарантирует лишь существование и единственность (при заданных начальных условиях) решений при весьма широких предположениях об аналитических свойствах правых частей дифференциальных уравнений, т.е. о свойствах силы как функции своих параметров. Нахождение общего решения системы дифференциальных уравнений в замкнутой форме с использованием введенных в обиход в математике функций не всегда возможно. Причина: класс функций, определенных дифференциальными уравнениями, шире, чем класс конечных комбинаций используемых в математике функций.

В связи с математическими трудностями интегрирования уравнений движения особое значение приобретает нахождение первых интегралов упомянутых уравнений. Первые интегралы содержат ту или иную определенную информацию о движении.

Первым интегралом дифференциальных уравнений движения называется равенство

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c, \qquad (5.6)$$

где c – произвольная постоянная, связывающая функционально координаты движущейся точки, их произвольные по времени (проекции скорости) и, возможно, время. Например, уравнению колебаний груза на пружине $m\ddot{x}+k\ x=0$ соответствует первый интеграл в виде $m\dot{x}^2+kx^2= c$.

Шесть независимых первых интегралов движения дают полную информацию о движении точки в пространстве. Действительно, решая шесть уравнений

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c_i,\ i=1,2,3,4,5,6. \qquad (5.7)$$

Получим шесть функций $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, зависящих от времени и шесть постоянных интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Тем самым полностью определяются кинематические уравнения движения точки в проекции ее скорости. Постоянные находятся по заданным начальным условиям движения.

Вторым интегралом называется равенство

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2, c_3, t) = c. \qquad (5.8)$$

Достаточно знать три вторых интеграла, чтобы иметь полную информацию о движении точки. Ее координаты x, y, z определяются как функции времени и шести постоянных интегрирования, которые могут быть найдены, как обычно, по начальным условиям движения.

Часть первых и вторых интегралов уравнения движения обязана своим существованием свойствам пространства и времени. Они имеют место для любой замкнутой системы материальных точек (замкнутой механической системы), и в этом смысле являются универсальными.

В отличие от задачи интегрирования уравнений движения, определение универсальных интегралов движения особых трудностей не составляет, так как эти интегралы имеют простой физический смысл законов сохранения энергии, количества движения, момента количества движения, скорости центра масс. Получение информации о движении механических систем значительно облегчается, если начинать исследование именно с нахождения первых и вторых интегралов движения.

5.4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Уравнения движения материальной точки массы m относительно инерциальной системы отсчета по второму закону Ньютона имеет вид

$$m\vec{w} = \vec{F} \text{ или } m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \qquad (5.9)$$

где $\vec{F}$– геометрическая сумма действующих на точку сил.

Если сила $\vec{F}$ задана, интегрирование этих дифференциальных уравнений позволяет определить уравнение (закон) движения точки. Само интегрирование бывает удобно проводить в определенных координатах: декартовых, полярных, цилиндрических, в натуральной форме и других. Чтобы перейти от векторной формы уравнений (5.9) к координатной форме, необходимо спроектировать (5.9) на координатные оси.

Уравнения движения точки в декартовых координатах.

Проектируя (15.1) на декартовые оси, получим

$$m\,d^2x/dt^2 = F_x,\ md^2y/dt^2 = F_y,\ md^2z/dt^2 = F_z, \qquad (5.10)$$

или

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x,\ m\frac{dv_y}{dt} = F_y,\ m\frac{dv_z}{dt} = F_z, \qquad (5.11)$$

Если движение плоское (точка движется в плоскости Oxy), используются только первые два уравнения; если точка движется по прямой (ось Ox) – только одно уравнение

$$m\,d^2x/dt^2 = F_x.$$

Это уравнение бывает удобно представить иначе: $m\,\frac{dv_x}{dt} = F_x$, или $mv_x dv_x \frac{}{dx} = F_x$ (поскольку $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} =$ $= v_x$d/dx).

Аналогично поступают и при использовании других координат.

6. Динамика механической системы

6.1. Связи

Механическая система – совокупность материальных точек, в которой движение и положение каждой точки зависит от движений и положений остальных точек, входящих в состав системы.

Различают системы *свободные* (без связей) и *несвободные* (со связями). Пример свободной системы: солнечная система, рассматриваемая как десять материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Пример несвободной системы: цилиндр, скатывающийся без скольжения по наклонной плоскости вниз.

Связи – это заранее заданные, не вытекающие из динамических уравнений движения ограничения, налагаемые на положения, скорости и ускорения точек механической системы. Связи реализуются материально посредством нитей, стержней, подшипников, пазов, муфт, поверхностей тел и т.п. Аналитически связи выражаются уравнениями, связывающими координаты материальных точек, их скорости время. Тела, осуществляющие связи, действуют на точки системы с определенными силами, которые называются реакциями связей или пассивными силами.

Различают связи *геометрические* и *дифференциальные*. Уравнения первых содержат только координаты механической системы и, может быть, время. Уравнения дифференциальных связей содержат первые производные от координат по времени.

Геометрические связи и дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы, называются *голономными* связями. Их уравнения допускают представления в виде

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots x_N, y_N, z_N, t) = 0 \qquad (6.1)$$

где x_1, y_1, z_1, …, x_N, y_N, z_N – координаты точек системы;
t – время.

Если в уравнение связи время t входит явно, ее называют *нестационарной*; если время не входит явно – *стационарной*. Связи, заданные равенствами, называют *удерживающими*, а заданные неравенствами – *неудерживающими*.

Связи называют *неголономными*, если их уравнения нельзя проинтегрировать и свести к виду, содержащему только координаты точек и время (отсутствует интегрирующий множитель). Механическая система, на которую наложены только голономные связи, называется *голономной* системой.

Система называется *неголономной*, если на нее наложена хотя бы одна неголономная связь. В учебной литературе обычно рассматриваются только линейные относительно скоростей неголономные связи.

6.2. Действительные и возможные перемещения, число степеней свободы, идеальные связи

Действительным перемещением системы называется бесконечно малое ее перемещение, совершающееся в процессе движения под действием как заданных сил, так и реакций связей. Оно происходит за время dt в соответствии с динамическими уравнениями движения и уравнениями связей и характеризуется изменением координат $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$,…, $d\vec{r}_N$, где $d\vec{r}_i(dx_i, dy_i, dz_i)$.

Вариацией или возможным (виртуальным) перемещением точки в случае голономных связей называется любое допускаемое наложенными связями элементарное перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный фиксированный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени.

Возможные (виртуальные) перемещения точек системы выражаются малыми изменениями радиус-векторов ее точек, которые будем обозначать через $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2$,…, $\delta\vec{r}_N$, где $\delta\vec{r}_I(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$. Векторы $\delta\vec{r}_i$ и их проекции δx_i, δy_i, δz_i называются простыми или изохронными вариациями радиус-векторов и координат.

Вариации координат можно задать аналитически, например, так. Пусть координата x_i изменяется со временем по некоторому закону $x_i(t)$. Изменим вид самой функции, положив

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \varepsilon_i\eta_i(t),$$

где ε_i – произвольный достаточно малый по модулю параметр (число), а $\eta_i(t)$ – произвольная дифференцируемая функция, ограниченная во времени для всех t. Величины $\varepsilon_i\eta_i(t)$ называются изохронными вариациями функций $x_i(t)$ обозначаются через δx_i. Следовательно, по определению $\delta x_i = \varepsilon_i\eta_i(t)$.

Введем понятие *изохронной вариации функции*, зависящей от координат, которые сами могут являться функциями времени, т.е. для функций $f(x, y, z, t)$.

Главная линейная часть приращения функции при фиксированном t называется изохронной вариацией функции и обозначается δf.

$$\delta f = \text{л.ч.}\left(f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) - f(x, y, z, t)\right).$$

Пусть, например, на точку наложена нестационарная голономная связь

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{6.2}$$

В фиксированный момент t сообщаем точке виртуальное перемещение $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ в новом положении

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = 0.$$

Приращение функции равно нулю; ее изохронная вариация:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (6.3)$$

(t фиксировано, $\delta t = 0$).

Наложенная связь ограничивает вариации координат $\delta x; \delta y; \delta z$ этим соотношением в каждый момент времени.

Если связь неголономная вида

$$A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z} + D = 0, \qquad (6.4)$$

где x, y, z – координаты точки; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} -$ их производные по времени; $A, B, C, D -$ функции x, y, z и t, то проекции возможного перемещения точки на координатные оси, т.е. вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ координат точки, должны удовлетворять равенствам

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z = 0 \qquad (6.5)$$

(последнее слагаемое $D\delta t$ отбрасывается, так как момент t фиксируется, $\delta t = 0$).

Возможное перемещение системы – это любая совокупность возможных перемещений точек заданной механической системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.

При удерживающих связях для любого возможного перемещения точки механической системы противоположное ему перемещение также является возможным; тогда как при неудерживающих связях имеются возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными.

Число независимых возможных перемещений механической системы называется *числом ее степеней свободы.*

Число степеней свободы системы совпадает с числом *независимых* вариаций координат.

Если система голономная (связи голономны), ее число степеней свободы совпадает с числом независимых координат, однозначно определяющих положение системы, или с числом свойственных системе независимых перемещений.

Важным является понятие *идеальных связей* – связей, для которых сумма работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы (при удерживающих связях). При неудерживающих связях *идеальные связи* – такие связи, сумма работ реакций которых равна нулю на всех тех возможных перемещениях, противоположные которым тоже являются возможными.

Пример. Массивное колечко перемещается по стержню, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости. Виртуальное перемещение колечка в момент t – это бесконечно малое его перемещение $\delta\vec{r}$, которое совершается на самом деле на вращающемся стержне и обусловлено действующими силами.

Пример. Массивное кольцо скользит вниз по неподвижной натянутой проволоке, связь реализована проволокой. Координаты кольца x, y связаны уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.6)$$

Связь голономная, стационарная, удерживающая. Одна степень свободы. Если трение между кольцом и проволокой отсутствует, то связь идеальна.

Пример. При тех же условиях проволока натянута на клине, который может перемещаться по горизонтальной плоскости.

Координаты кольца x_1, y_1и координаты точки клина x_2, y_2 связаны уравнениями

$$\frac{x_1-x_2}{a}+\frac{y_1-y_2}{b}=1;\ y_2=0 \qquad (6.7)$$

Связь голономная, стационарная, удерживающая. Две степени свободы (четыре вариации координат $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2$, δy_2) связаны двумя зависимостями, которые легко найти варьированием уравнения (6.7), если отсутствует третье между кольцом и проволокой и также между клином горизонтальной плоскостью, то эти связи идеальные.

Пример. При тех же условиях, что и в предыдущем примере, движение клина задано заранее: клин перемещают равномерно в направлении оси x со скоростью v. Координаты кольца связаны уравнением

$$\frac{x-vt}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (6.8)$$

Связь голономная, нестационарная, удерживающая. Одна степень свободы. Фиксируя t и варьируя (6.8), находим

$$\frac{\delta x}{a}+\frac{\delta y}{b}=0,$$

т.е. две вариации связаны одним уравнением. Если трения между кольцом и проволокой нет, эта связь идеальная.

Пример. Колесико планиметра (прибора для измерения площадей по картам и планам) катится без скольжения по горизонтальной плоскости карты. Положение колесика определяется координатами $x_с, y_с$ его центра C ($z_с = R$ –радиус колесика), углом θ между плоскостью колесика и осью x и углом поворотаφколесика вокруг своей оси, так как скольжение колесика исключено, то $v_с = R\dot{\varphi}$. Острый обод колесика исключает перемещение в направлении, перпендикулярном его плоскости.

Следовательно, вектор $\vec{v}_с$ лежит в плоскости колесика, и поэтому $\dot{x}_с = R\dot{\varphi}cos\theta, \dot{y}_с = R\dot{\varphi}\,sin\theta,$ или $dx_с - R\delta\varphi cos\theta =$ $= 0, dy_с - R\delta\varphi sin\theta = 0.$

Динамика несвободных систем сводится к динамике свободных систем на основе аксиомы о связях: не изменяя движение системы, связь можно отбросить, заменив ее действие соответствующей силой – реакцией связи; после замены система рассматривается уже как свободная.

Силы, действующие на материальные точки системы, разделяют на *внутренние* – силы взаимодействия между точками самой системы и *внешние*, обусловленные действием тел (и полей), не принадлежащих системе.

Пусть система состоит из N материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_{\mathrm{N}}$. На точку $m_k, k = 1,2, \dots, N,$ действуют все прочие точки данной системы; равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к точке m_k, обозначают $\vec{F}^i{}_k$, а равнодействующую внешних сил – через $\vec{F}^{\mathrm{e}}{}_k$.

Сила, приложенная к точке m_k, равна геометрической сумме

$$\vec{F}_k = \vec{F}^i{}_k + \vec{F}^e{}_k. \tag{6.9}$$

Внутренние силы любой механической системы обладают важными свойствами:

1) геометрическая их сумма равна нулю:

$$\vec{F}^{\mathrm{i}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{k}} = 0; \tag{6.10}$$

2) геометрическая сумма моментов внутренних сил относительно любой точки пространства равна нулю:

$$\vec{M}^i = \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k \times \vec{F}^i{}_k) = 0. \tag{6.11}$$

Оба эти свойства − следствие того, что внутренние силы равны и направлены противоположно друг другу по одной прямой, на которой лежат точки (третий закон Ньютона).

6.3. Общие теоремы динамики системы

Число общих теорем в случае системы равно четырем, тогда как в случае точки их три. Четвертая теорема – о движении центра масс – только по форме отличается от теоремы об изменении количества движения. Две другие теоремы те же, что и в случае точки: об изменении кинетической энергии и об изменении момента количества движения.

Пусть несвободная (со связями) механическая система состоит из N материальных точек, массы которых m_1, $m_2,\dots,m_N$. Пользуясь аксиомой о связях, освободим систему от наложенных связей и приложим к ее точкам силы, равные реакциям связей. После этой операции разделим все силы, действующие на точки системы, на два класса: внешние внутренние. Последние, как и силы взаимодействия между точками системы, должны удовлетворять принципу «действия и противодействия» согласно третьему закону Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальных точек системы теперь такие:

$$\frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k) = \vec{F}^e{}_k + \vec{F}^i{}_k, (k=1,2,\dots,N),$$

где $\vec{F}^e{}_k$ – главный вектор (геометрическая сумма) всех внешних сил, действующих на точку m_k; $\vec{F}^i{}_k$ – главный вектор всех внутренних сил, действующих на ту же точку m_k.

Ввиду того, что вывод общих теорем динамики системы аналогичен выводу таких же теорем в динамике точки, рассмотрим следующую схему. Представим уравнения движения точек m_k системы согласно второму закону Ньютона. Система, хотя и состоит из отдельных точек, представляет собой единое целое. Просуммируем уравнения движения точек по всем точкам системы. В результате приходим к трем теоремам.

Введем обозначения:

$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$ – *количество движения системы* – геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек системы;

$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k {v^2}_k$ – кинетическая энергия системы – сумма кинетических энергий всех точек системы;

$\vec{K}_o = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)$ – кинетический момент системы относительно центра О.

$\vec{F}^e = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^e{}_k$ – так называемый *главный вектор внешних сил системы* (геометрическая сумма всех внешних сил системы);

$\vec{M}^e{}_o = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_k \times \vec{F}^e{}_k)$ – *главный момент внешних сил системы относительно центра О* (геометрическая сумма моментов всех внешних сил системы относительно центра – начала координат О);

$d'A^e = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^e{}_k \cdot d\vec{r}_k$ – элементарная работа внешних сил системы на перемещение системы $(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N)$;

$d'A^i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^i{}_k \cdot d\vec{r}_k$ – элементарная работа внутренних сил системы.

$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^i{}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^e{}_k.$

Учитывая, что согласно (39.10) $\sum \vec{F}^i{}_k = 0$, и пользуясь обозначениями $\sum m_k \vec{v}_k = \vec{Q}$ и $\sum \vec{F}^e{}_k = \vec{F}^e$, приходим к равенству $\frac{dQ}{dt} = \vec{F}^e$. Аналогично выводятся и два других равенства.

Сформулируем обще теоремы динамики системы.

В движении механической системы относительно инерциальной системы отсчета имеют место следующие равенства:

1. *Теорема об изменении количества движения механической системы*. Производная по времени от количества

движения системы равна главному вектору (геометрической сумме) всех действующих на систему внешних сил:

$$\frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k) = \vec{F}^e .$$

2. *Теорема об изменении кинетической энергии механической системы*. Дифференциал кинетической энергии механической системы равен элементарной работе внешних и внутренних сил, приложенных ко всем точкам системы:

$$dT = d'A^e + d'A^i.$$

3. *Теорема об изменении кинетического момента системы*. Производная по времени от кинетического момента системы, взятого относительно неподвижного центра, равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d}{dt}\vec{K}o = \vec{M}^e{}_o.$$

Следует иметь в виду, что количество движения точки $m_k\vec{v}_k$ – *связанный* вектор, он приложен к материальной точке m_k, тогда как количество движения системы $\vec{Q}$ – вектор *свободный;* обычно на рисунках $\vec{Q}$ прикладывают к началу координат. Главный вектор внешних сил $\vec{F}^e$ – это *свободный* вектор. Кинетический момент системы $\vec{K}_o$ по своему определению связан с центром *O*, относительно которого берутся моменты; то же характерно и для главного момента внешних сил $\vec{M}^e{}_o$.

Главный вектор внешних сил системы $\vec{F}^e$, поскольку это свободный вектор, можно найти так. От какой-нибудь точки пространства, например, от начала координат, откладываем векторы, равные внешним силам системы $\vec{F}^e{}_k$. Затем геометрически откладываем их по правилу параллелограмма или, лучше, по правилу многоугольника. Вектор $\overrightarrow{\mathrm{M}}^{\mathrm{e}}$ получим, если в центре (т.е. в точке O, относительно которой берутся моменты) сложим геометрически моменты всех внешних сил по правилу многоугольника.

6.4. Теорема о движении центра масс механической системы

Рассмотрим четвертую теорему динамики системы.

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, для которой сумма произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N} m_{\mathrm{k}}\vec{r}'_{\mathrm{k}} = 0. \qquad (6.12)$$

К концу первого вектора $\vec{F}^{\mathrm{e}}{}_{1}$прикладываем своим началом второй вектор, начало третьего – к концу второго и т.д.; $\vec{F}^{\mathrm{e}}$ представляем вектором, замыкающим многоугольник.

Заменив $\vec{r}'_{\mathrm{k}} = \vec{r}_{\mathrm{k}} - \vec{r}_{\mathrm{c}}$, найдем $\sum_{k=1}^{N} m_{\mathrm{k}}(\vec{r}_{\mathrm{k}} - \vec{r}_{\mathrm{c}}) = 0,$ откуда

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m\vec{r}\mathrm{k}}{\sum_{k=1}^{N} m\mathrm{k}}. \qquad (6.13)$$

Из этой формулы, определяющей радиус-вектор центра масс, находим

$$\sum_{k=1}^{N} m_{\mathrm{k}}\vec{r}_{\mathrm{k}} = M\vec{r}_{\mathrm{c}} (M = \sum_{k=1}^{N} m_{\mathrm{k}})$$

и после дифференцирования по времени получаем

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{\mathrm{c}}, \qquad (6.14)$$

т.е. количество движения любой механической системы равно массе системы, умноженной на скорость центра масс.

Дифференцируя (6.14) по времени и заменяя $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ по теореме об изменении количества движения на $\vec{F}^{\mathrm{e}}$, находим

$$\vec{F}^{\mathrm{e}} = M\vec{w}_{\mathrm{c}}. \qquad (6.15)$$

Это равенство одинаковой структуры с равенством, выражающим второй закон Ньютона. Поэтому имеет место теорема:

Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной масса всей системы, на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил системы.

Пример. Центр масс прыгуна в воду с трамплина движется по параболе, если пренебречь сопротивлением воздуха.

6.5. Случай замкнутой механической системы

Механическая система называется замкнутой, или изолированной, если на нее не действуют внешние силы. В отсутствие внутренних диссипативных сил движение системы материальных точек происходит под действием одних только внутренних центральных сил, удовлетворяющих третьему закону Ньютона и зависящих только от расстояния между телами (точками) системы. Такие силы потенциальные стационарные; для них существует потенциальная энергия Π^i – энергия взаимодействия точек системы.

Имеют место все три закона сохранения:

$$\vec{Q} = \vec{c}, T + \Pi^{\mathrm{i}} = E, \vec{K}_{\mathrm{o}} = \vec{c}_{\mathrm{o}}. \qquad (6.16)$$

В развернутом виде эти равенства имеют вид

$$\sum m_{\mathrm{k}}\dot{x}_{\mathrm{k}} = c_1, \sum m_{\mathrm{k}}\dot{y}_{\mathrm{k}} = \vec{c}_2, \sum m_{\mathrm{k}}\dot{z}_{\mathrm{k}} = c_3,$$

$$\frac{1}{2}\sum m_{\mathrm{k}}(\dot{x}^2_{\mathrm{k}} + \dot{y}^2_{\mathrm{k}} + \dot{z}^2_{\mathrm{k}}) + \Pi^{\mathrm{i}}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{\mathrm{N}}, y_{\mathrm{N}}, z_{\mathrm{N}}) = E,$$

$$\sum m_{\mathrm{k}}(y_{\mathrm{k}}\dot{z}_{\mathrm{k}} - z_{\mathrm{k}}\dot{y}_{\mathrm{k}}) = c_4, \sum m_{\mathrm{k}}(z_{\mathrm{k}}\dot{x}_{\mathrm{k}} - x_{\mathrm{k}}\dot{z}_{\mathrm{k}}) =$$

$$= c_5, \sum m_{\mathrm{k}}(x_{\mathrm{k}}\dot{y}_{\mathrm{k}} - y_{\mathrm{k}}\dot{x}_{\mathrm{k}}) = c_6.$$

В проекции на декартовы оси координат, получаем семь первых интегралов: три интеграла количества движения, один интеграл энергии и три интеграла кинетического момента.

Кинетическая энергия T, количество движения $\vec{Q}$ и кинетический момент $\vec{K}_o$ аддитивны: любая из этих величин для системы равна сумме значений для каждой из материальных точек. В классической механике это верно и при наличии взаимодействия между точками.

Кроме семи первых интегралов движения для замкнутой системы существуют еще три вторых интеграла. Это интегралы движения центра масс: если $\vec{F}^e = 0$, то из (6.15) после интегрирования следует $\vec{v}_c = \vec{a}$, откуда $\vec{r}_c = \vec{a}t + \vec{b}$ – *центр масс замкнутой механической системы движется равномерно и прямолинейно.*

Наличие внутренних диссипативных сил в замкнутой системе не является помехой для выполнения законов сохранения количества движения и кинетического момента. Не выполняется при этом только закон сохранения механической энергии, которая частично превращается во внутреннюю энергию.

7. Дифференциальные принципы теоретической механики

7.1. Примеры несвободных систем

Рассмотрим пояснение общих определений, данных ранее, на примерах.

Пример 1. Математический маятник – это материальная точка массы m, колеблющаяся по дуге окружности в однородном поле тяжести в вертикальной плоскости . Реализуется маятник в виде груза, подвешенного на капроновой нити. Положение маятника можно задавать декартовыми координатами x, yгруза. Эти координаты связаны соотношением

$$x^2+y^2-l^2=0, \tag{7.1}$$

где l – длина маятника.

При заданной длине l в качестве координаты, определяющей положение маятника, проще пользованиям углом φ отклонение нити от вертикали, отсчитывая этот угол против часовой стрелки. Преимущества использования угла φ:

1) число координат меньше (одна вместо двух);

2) φ – независимая координата, x, y связаны уравнением (7.1).

Уравнение (7.1) представляет собой ограничение, заданное заранее, независимое от динамических уравнений движения. Подобные ограничения называются связями. Связь (7.1) голономная, стационарная, удерживающая. Голономная связь содержит только координаты; стационарная связь не содержит явно времени t, удерживающая связь представлена уравнением, а не неравенством.

Кроме силы тяжести на груз действует сила упругости нити – *реакция связи.* Сила тяжести задана заранее, она является *активной*. Реакция связи (пассивная сила) заранее не задана, она подлежит определению из уравнений механики; ее значение от величины активной силы.

Рассмотрим виртуальное (возможное) перемещение маятника. Пусть в фиксированный момент времени t координаты груза равны x, y. Разность координат $(x+\delta x)-x$ и $(y+\delta y)-y$ в тот же момент t двух бесконечных близких положений, совместимых со связями, определяют виртуальное, или возможное, перемещение маятника. Поскольку оба положения x, y и $x+\delta x, y+\delta y$ согласуются со связями, то наряду с (7.1) имеет место еще и равенство

$$(x+\delta x)^2+(y+\delta y)^2-l^2=0. \tag{7.2}$$

Вычитая из (7.2) равенство (7.1), получим

$$2x\delta x+2y\delta y+(\delta x^2+\delta y^2)=0. \tag{7.3}$$

Виртуальное перемещение определяется вариациями координат δx и δy, которые должны быть согласованы с уравнениями связей по определению с точностью до главной линейной части приращения включительно. Это означает, что мы получим уравнение для вариаций координат, если сохраним в (7.1) только *линейные* члены. Следовательно, для любого фиксированного момента t вариации координат удовлетворяют равенству

$x\delta x+y\delta y=0$

Связь (7.1) является идеальной. Это означает: работа реакции $\vec{N}$ нити на любом виртуальномперемещении равна нулю. Действительно,

$$\vec{N}\cdot\delta\vec{r}=-\frac{N\vec{r}}{r}\cdot\delta\vec{r}=-\frac{N}{r}(x\delta x+y\delta y)=0.$$

Равенство нулю работы можно заключить также из того, что вектор реакции $\vec{N}$ перпендикулярен $\delta\vec{r}(\delta x,\delta y)$.

Пример 2. Математический маятник, подвешенный к бруску, который может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Система состоит из двух материальных точек массой $m_1(x_1, y_1)$ и $m_2(x_2, y_2)$. Четыре координаты этих точек удовлетворяют двум уравнениям связей:

$$y_1 = 0, \tag{7.4}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \tag{7.5}$$

Варьируя эти уравнения, находим ограничения на вариации координат

$$\delta y_1 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0, \tag{7.6}$$

Здесь две независимые вариации координат: 4-2=2. Из трех вариаций $\delta x_1, \delta x_2, \delta y_2$ две можно выбрать произвольно; тогда две другие определятся из уравнений (7.6). В итоге можно получить бесчисленное множество виртуальных перемещений системы. Связи голономные, стационарные, удерживающие, идеальные.

Пример 3. Спортсмен на лыжах скользит по трамплину, отрывается от него и летит в воздухе, а затем снова приземляется. Трамплин – связь: голономная, стационарная, неудерживающая. Условием отрыва от связи является обращение в нуль реакции связи.

Пример 4. Математический маятник находится на платформе, которая движется с заданной постоянной скоростью v.

В отличие от маятника в примере 2, рассматриваемый здесь *маятник имеет* не две, а одну *степень свободы*. Уравнения связей имеют вид

$$y_1 = 0, x_1 = vt,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Варьируя эти уравнения, т.е. дифференцируя при фиксированном t находим

$$\delta y_1 = 0, \delta x_1 = 0, (x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta x_1) = 0.$$

Из уравнения $\delta x_1 = 0$ следует, что виртуальное перемещение осуществляется при неподвижном бруске. Связи голономные, нестационарные, удерживающие.

В заключение остановимся на некоторых общих положениях.

1. Действительные перемещения точек системы происходят во времени под действием заданных сил при наложенных связях; эти перемещения согласуются как с действующими силами, так и со связями. Возможные перемещения согласуются только с «замороженными» связями, силы игнорируются.

В случае стационарных связей действительное бесконечно малое перемещение системы геометрически совпадает с одним из возможных перемещений.

Возможное перемещение определяется разностями радиус-векторов (или координат) точек системы в положении для момента t и бесконечно близкого положения, которое согласуется со связями в момент t. Эти разности радиус-векторов обозначаются $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_{\mathrm{N}}$, а их проекции на декартовы оси $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_{\mathrm{N}}, \delta y_{\mathrm{N}}, \delta z_{\mathrm{N}}$. Такие величины называются *изохронными вариациями* радиус-векторов, или координат.

Найдем в общем виде уравнения, связывающие вариации координат. Для краткости условимся функцию $f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{\mathrm{N}}, y_{\mathrm{N}}, z_{\mathrm{N}}, t)$ записывать в виде $f(x, y, z, t)$; здесь под x, y, z понимаются координаты всех точек системы в момент t. Пусть они удовлетворяют уравнениям голономных связей число связей равно l:

$$f_\alpha(x, y, z) = 0 \ (\alpha = 1,2, \dots, l).$$

Рассмотрим бесконечно близкое положение системы, согласованное со связями в момент t, и пусть $\mathrm{x} + \delta\mathrm{x}, \mathrm{y} +$

$\delta y, z+\delta z$ – соответствующие координаты точек. Так как эти координаты удовлетворяют уравнениям связей в тот же момент t, то

$$f_\alpha(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t)=0.$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущие и сохраняя, как того требует определение понятия виртуальных перемещений, главную линейную часть разности, получим

$$\delta f_\alpha=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial xk}\cdot\delta x_k+\frac{\partial f_\alpha}{\partial yk}\cdot\delta y_k+\frac{\partial f_\alpha}{\partial zk}\cdot\delta z_k\right)=0\ (\alpha=1,2,\ldots,l).$$

Здесь множители $\partial f_\alpha/\partial xk, \partial f_\alpha/\partial yk, \partial f_\alpha/\partial zk$ – некоторые постоянные, так как уравнения относятся к определенному моменту t и соответствующему положению системы. Система l однородных линейных уравнений представляет собой систему ограничений на изохронные вариации координат.

2. *Неголономными называются связи*, уравнения которых не сводится к уравнениям, содержащим только координаты и время. В дальнейшем будем рассматривать только линейные относительно скоростей связи вида

$$\sum_k(A_{\beta k}\dot{x}_k+B_{\beta k}\dot{y}_k+C_{\beta k}\dot{z}_k)+D_\beta=0\ (k=1,2,\ldots,S),$$

где коэффициенты *A, B, C, D* могут зависеть от координат точек и времени. Связь стационарная, если $D_\beta=0$, а $A_{\beta k}$, $B_{\beta k}$, $C_{\beta k}$ не зависят явно от *t*.

Если неголономных связей нет, то *3N* вариаций координат $\delta x_1, \delta y_1 \delta z_1, \ldots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ связаны *l* уравнениями. Из общего числа *3N*вариаций *l* можно найти из уравнений, если только как-либо выбрать остальные *3N – l* вариаций (произвольно, но в допустимых пределах). Считается поэтому, что среди *3N* вариаций координат имеется *3N – l* независимых и *l* зависимых.

Числом степеней свободы системы называется число независимых возможных перемещений механической системы, или число независимых вариаций координат.

Число степеней свободы голономной системы совпадает с числом независимых координат, определяющий положение системы в пространстве: $n = 3N - l$.

Если кроме голономных есть и неголономные связи, последние дополнительно ограничивают вариации координат, и тогда число степеней свободы меньше числа независимых координат, определяющих положение системы, на число неголономных связей.

3. Характерная особенность *удерживающих связей* в том, что для любого возможного перемещения точки механической системы существует противоположное ему перемещение, которое также является возможным. Неудерживающими называются связи, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными. Аналитически неудерживающие связи выражаются неравенствами $f(x, y, z, t) \geq 0$.

Пример: шарик, скатывающийся по поверхности сферы, − неудерживающая связь (набрав достаточно большую скорость, шарик оторвется от сферы и будет двигаться как свободное тело – по параболе).

4. Скольжение бруска по наклонной плоскости, когда поверхности идеально гладкие, – связь идеальная.

Качение без проскальзывания тел с шероховатыми поверхностями – связь идеальная (в случае как голономной, так и неголономной системы).

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как множество частиц, подчиненных условию нахождения на неизменных расстояниях, т.е. как систему с идеальными голономными удерживающими связями.

Работа реакций идеальных связей на действительном перемещении равна нулю, если связи стационарные, и вообще отлична от нуля, если связи нестационарные.

7.2. Принцип виртуальных перемещений

Принцип виртуальных перемещений – это принцип статики. *Статика – раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механической системы под действием сил.* В статике абсолютно твердого тела рассматривают также операции преобразования систем сил в эквивалентные системы сил. Эквивалентные системы сил имеют одинаковый главный вектор и одинаковый главный момент относительно одного и того же центра (любого). Под равновесием механической системы понимают такое состояние этой системы, при котором все ее точки под действием приложенных сил остаются в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчета. Если система координат инерциальная, равновесие называется *абсолютным*, если система движется по отношению к инерциальной системе с ускорением – равновесие называется *относительным.*

Существует несколько способов построения статики – графический, геометрический (на основе независимой системы аксиом), аналитический – на основе принципа возможных перемещений. Рассмотрим аналитический способ.

Статический принцип сформирован в результате обобщения теории простых машин. Объединив с принципом Даламбера, его перенесем и на динамку.

Принцип виртуальных перемещений имел фундаментальное значение для последующего развития механики. Лагранж установил общий принцип, позволяющий легко находить условия равновесия каких угодно механических систем.

Теорема – необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с идеальными стационарными удерживающими связями является равенство нулю работы всех активных сил на любом возможном перемещении системы (и равенство нулю скоростей всех точек в начальный момент времени).

Необходимость – из уравнения движения $m_k\vec{w}_k = \vec{F}_k + \vec{N}_k$ следует, что в случае равновесия, поскольку ускорения всех точек равны нулю, выполняется равенство

$$0 = \vec{F}_k + \vec{N}_k, \ (k = 1,2, \dots, l).$$

Геометрическая сумма сил, приложенных к каждой точке, равна нулю. Сообщим теперь системе виртуальное перемещение. Умножим равенство на $\delta\vec{r}_k$и просуммируем по точкам. Получим

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k \cdot \delta\vec{r}_k.$$

Поскольку связи идеальные, второе слагаемое правой части уравнения обращается в нуль, и окончательно получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \qquad (7.7)$$

- условие необходимости.

Достаточность. Исходим из предложения, что сумма работ всех активных сил системы на любом ее виртуальном перемещении равна нулю, и система в момент t_o покоится:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \ (\vec{v}_k(t_o) = 0, k = 1,2, \dots, N).$$

Связи системы стационарные, удерживающие.

Исходя из принципа виртуальных перемещений, Лагранж построил всю статику и дал новый метод решения задач.

Равновесие систем с нестационарными связями возможно лишь в отдельных случаях.

7.3. Применение принципа виртуальных перемещений

Выведем сначала вспомогательную формулу для работы сил, приложенных к абсолютно твердому телу, перемещающемуся в пространстве. Твердое тело представляем себе как совокупность малых частиц (материальных точек), и пусть к частице Δm_k приложена сила $\vec{F}_k = \vec{F}^e_k + \vec{F}^i_k$ – геометрическая сумма внешних и внутренних сил. Элементарная работа сил на произвольном бесконечно малом перемещении тела

$$d'A = \sum_{k=1}^{N} F_k d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k dt = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_k) dt =$$

$$= ((\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k) \cdot \vec{v}_o + \vec{\omega} \cdot \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k \times \vec{F}_k)) dt$$

($\vec{F}_k \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times \vec{F}_k)$ – из векторной алгебры).

Здесь $\vec{v}_o$– скорость полюса – точки O тела, выбор которой произволен; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения тела.

По свойству внутренних сил $\sum \vec{F}^i_k = 0, \sum (\vec{r}_k \times \vec{F}^i_k) = = 0$, так что окончательно имеем

$$d'A = (\vec{F}^e \cdot \vec{v}_o + \vec{\omega} \cdot \vec{M}^e_o) dt, \qquad (7.8)$$

где $\vec{F}^e$ – главный вектор внешних сил, $\vec{M}^e_o$ – их главный момент относительно полюса O.

Воспользуемся формулой (7.8) для вывода условия равновесия абсолютно твердого тела. Согласно принципу возможных перемещений, условием равновесия является выполнение равенства $\delta A = 0$:

$$\delta A = (\vec{F}^e \cdot \vec{v}_o + \vec{\omega} \cdot \vec{M}^e_o) \delta t = 0. \qquad (7.9)$$

Рассмотрим частные случаи:

1) *тело свободное*; $\vec{v}_o$ и $\vec{\omega}$ можно взять произвольно, и поэтому

$$\vec{F}^e = 0, \vec{M}^e_o = 0 \qquad (7.10)$$

Необходимое и достаточное условие равновесия свободного твердого тела состоит в равенстве нулю главного вектора и главного момента приложенных к телу сил (момент относительно любой неподвижной точки);

2) точка O тела закреплена: $\vec{v}_o = 0$. Формула (7.9) приобретает вид $\delta A = \vec{M}^e_o \cdot \vec{\omega} dt$, и, так как $\vec{\omega}$ – произвольный вектор $\vec{M}^e_o = 0$.

Для равновесия твердого тела с одной закрепленной точкой необходимо и достаточно, чтобы главный момент приложенных активных сил относительно закрепленной точки тела равнялся нулю и чтобы тело находилось в покое в начальный (после приложения сил) момент.

Принцип виртуальных перемещений применяется и в случае неидеальных связей. Если, например, есть сила трения, то ее следует отнести к активным силам.

При помощи этого принципа можно определять и реакции идеальных связей. Связь мысленно отбрасывают и заменяют ее реакцией, которую рассматривают затем как активную силу.

Принцип применим как к голономным, так и к неголономным системам.

7.4. Принцип Даламбера

В задачах на несвободное движение тела неизвестными могут быть ускорения тел, натяжения нитей, реакции осей блоков, подшипников и т.п. (например, в задачах о двух грузах, соединенных нитью, перекинутой через блок). Комбинируя приемы и используя различные теоремы и законы динамики, можно определить вообще все неизвестные величины. Однако это более сложный путь. Даламбер указал более эффективный метод, применимый для решения всех задач на несвободное движение. Зная движение системы, по принципу Даламбера легко определить реакции внешних связей (при этом неизвестные внутренние силы исключаются); можно находить также и реакции внутренних связей, если выделять и рассматривать отдельные части системы; можно составлять дифференциальные уравнения движения и т.д.

Принцип Даламбера. Уравнение движения точки m_k относительно инерциальной системы отсчета представим в виде

$$\vec{F}_{\text{k}}+\vec{N}_{\text{k}}-m_{\text{k}}\vec{w}_{\text{k}}=0,\ \ (k=1,2,\ldots,N) \qquad (7.11)$$

где $\vec{F}_k$ – активная сила, приложенная к точке m_k; $\vec{N}_k$ – пассивная сила. Вектор – $m_k\vec{w}_k$ называется силой инерции Даламбера частицы m_k. Подчеркнем, что по отношению к инерциальной системе отсчета изменение скорости точки m_k происходит под влиянием активных сил $\vec{F}_k$ и связей (пассивных сил $\vec{N}_k$), но не «сил инерции Даламбера». В этом смысле «силы инерции Даламбера» фиктивные, а само понятие условное. Равенство (7.11) выражает так называемый принцип Даламбера: *в каждый момент времени для любой точки механической системы нулю равна геометрическая сумма активной силы,* реакции связи и *силы инерции Даламбера.*

Если в любой момент времени систему и связи остановить и ко всем точкам m_kприложить активные силы $\vec{F}_k$, реакции связи $\vec{N}_k$ и силы инерции $\vec{\Phi}_k=-\,m_k\vec{w}_k$, то система будет пребывать в покое. Говорят поэтому, что упомянутые силы *уравновешены.*

Следствием применения принципа является *утверждение*: в каждый момент движения нулю равна геометрическая сумма (главный вектор) активных сил, реакцией связей и сил инерции системы, а также сумма моментов (главный момент) этих сил:

$$\sum\vec{F}_{\text{k}}+\sum\vec{M}_{\text{k}}\sum\vec{\Phi}_{\text{k}}=0, \qquad (7.12)$$

$$\sum\overline{m}_{\text{o}}(\vec{F}_{\text{k}})+\sum\overline{m}_{\text{o}}(\vec{N}_{\text{k}})+\sum\vec{m}_{\text{o}}(\vec{\Phi}_{\text{k}})=0.$$

Эти уравнения можно отнести к мысленно остановленной системе, поэтому в качестве центра O, относительно которого берутся моменты сил, можно взять произвольную неподвижную точку. Нулю равна и сумма моментов этих сил относительно произвольной неподвижной оси (до «остановки» системы точка и ось могли перемещаться). Применим уравнения (7.12) к случаю, когда твердое тело совершает плоскопараллельное движение. Уравнения движения центра масс тела и уравнения вращения тела вокруг оси C_z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, имеют вид

$$M\vec{w}_{\text{c}} = \sum \vec{F}_{\text{k}} + \sum \vec{N}_{\text{k}} \tag{7.13}$$

$$J_{\text{cz}} = \sum m_{\text{cz}}(\vec{F}_{\text{k}}) + \sum m_{\text{cz}}(\vec{N}_{\text{k}})$$

Отметим, что уравнение вращения тела относительно поступательно движущейся системы центра масс записывается так же, как уравнение относительно инерциальной системы). С другой стороны, для остановленного тела справедливы равенства (7.12)

$$\sum \vec{F}_{\text{k}} + \sum \vec{N}_{\text{k}} + \sum \vec{\Phi}_{\text{k}} = 0,$$

$$\sum m_{\text{cz}}(\vec{F}_{\text{k}}) + \sum m_{\text{cz}}(\vec{N}_{\text{k}}) + \sum m_{\text{cz}}(\vec{\Phi}_{\text{k}}) = 0, \tag{7.14}$$

где сумма моментов взята относительно оси Cz, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения (нулю равняется сумма моментов сил относительно оси Cz).

Сравнивая уравнения (62.4) и (62.3), получаем

$$\sum \vec{\Phi}_{\text{k}} = -M\vec{w}_{\text{c}}, \sum m_{\text{cz}}(\vec{\Phi}_{\text{k}}) = -J_{\text{cz}}\varepsilon \tag{7.15}$$

Таким образом, 1) главный вектор даламберовых сил инерции тела равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела, 2) при плоскопараллельном движении тела сумма моментов даламберовых сил инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения, равна – $J_{\text{cz}}\varepsilon$, т.е. равна произведению момента инерции тела относительной центральной оси Cz на угловое ускорение тела со знаком минус.

Первое следствие справедливо для любого движения.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии Cxy, перпендикулярную оси Cz, то как следствие при плоско-параллельном движении (параллельно плоскости Cxy; C – центр масс) к уравнениям (7.15) добавляются два очевидных уравнения: $\sum m_{\text{Cx}}(\vec{\Phi}_k) = 0$, $\sum m_{\text{Cy}}(\vec{\Phi}_k) = 0$.

В заключение подчеркнем, что силы инерции Даламбера $\vec{\Phi}_k = -m_k\vec{w}_k$ вводятся при рассмотрении движения относительно инерциальной системы отсчета. Добавление к действующим силам сил инерции Даламбера следует рассматривать как методический прием, который сводит изучение движения к рассмотрению равновесия (в любой момент движения).

7.5. Принцип Даламбера – Лагранжа. Общее уравнение механики

Рассматривая принцип Даламбера, мы ввели понятие силы инерции для всех материальных точек системы. Эти силы определяются как произведение масс точек и их ускорения, взятого с обратным знаком. После добавления сил инерции к активным и пассивным силам получаем равновесие сил в движущейся системе. Равновесие сил означает выполнение условия принципа виртуальных перемещений. Поэтому открывается возможность распространить принцип виртуальных перемещений, относящийся к статике, и на динамику.

Пусть система представлена материальным точками с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$ и координаты этих точек удовлетворяют заранее заданным уравнениям, которые выражают голономные, удерживающие, идеальные связи. Равнодействующую активных сил, приложенных к точке m_k, обозначим $\vec{F}_{\text{k}}$, а равнодействующая пассивных сил – $\vec{N}_{\text{k}}$. По второму закону Ньютона

$$m_{\text{k}}\vec{w}_{\text{k}} = \vec{F}_{\text{k}} + \vec{N}\text{k}$$

или

$$\vec{F}_{\text{k}} - m_{\text{k}}\vec{w}_{\text{k}} + \vec{N}_{\text{k}} = 0;\ (k = 1,2,\dots,N) \qquad (7.16)$$

− активные силы, пассивные силы и силы инерции Даламбера «уравновешены». Зафиксируем теперь момент t и сообщим системе виртуальное перемещение $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_{\text{N}}$. Умножим скалярно каждое уравнение (7.16) на соответствующее $\delta\vec{r}_{\text{k}}$ и суммируем все уравнения:

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_{\text{k}} - m_{\text{k}}\vec{w}_{\text{k}}) \cdot \delta\vec{r}_{\text{k}} + \sum_{k=1}^{N}\vec{N}_{\text{k}} \cdot \delta\vec{r}_{\text{k}} = 0.$$

По определению идеальных связей последняя сумма равна нулю, поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_{\text{k}} - m_{\text{k}}\vec{w}_{\text{k}}) \cdot \delta\vec{r}_{\text{k}} = 0. \qquad (7.17)$$

Найденное уравнение (7.17) называется общим уравнением динамики. Оно выражает принцип Даламбера – Лагранжа:

в каждый момент движения механической системы с идеальными удерживающими связями сумма работ активных сил и сил инерции Даламбера на любом виртуальном перемещении равна нулю.

В развернутом виде общее уравнение динамики выглядит так:

$$\sum_{k=1}^{N}((F_{\text{kx}} - m_{\text{k}}\ddot{x}_{\text{k}})\delta x_{\text{k}} + (F_{\text{ky}} - m_{\text{k}}\ddot{y}_{\text{k}})\delta y_{\text{k}} + \\ + (F_{\text{kz}} - m_{\text{k}}\ddot{z}_{\text{k}})\delta z_{\text{k}}) = 0 \quad , \qquad (7.18)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции активной силы $\vec{F}_{\text{k}}$ на соответствующие оси;

x_k, y_k, z_k – координаты точки m_k.

Принцип Даламбера – Лагранжа является одним из наиболее общих принципов в механике. Он охватывает всю механику систем с идеальными связями (любыми голономными и линейными неголономными; стационарными и нестационарными). Силы могут быть как потенциальными, так и не потенциальными.

Если связи не являются идеальными, необходимо учесть, кроме математических уравнений этих связей, еще и добавочные физические условия для реакций. Например, если движение тел происходит с трением, необходимо учесть физические законы трения (сухого, вязкого). Силы трения фактически включаются в число активных сил, а нормальные составляющие реакции связей по-прежнему удовлетворяют условию идеальности ($\sum \vec{N}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0$). Таким образом, и неидеальные связи фактически включаются в общую схему.

Принцип Даламбера – Лагранжа положен в основу определения движения системы: в действительном движении ускорения точек таковы, что сумма работ (7.17) на виртуальных перемещениях обращается в нуль. Математически принцип Даламбера – Лагранжа представляется *вариационным соотношением* (7.17).

7.6. Уравнения Лагранжа в независимых координатах

Механическая система может состоять из произвольно большого числа частиц или тел и вместе с тем обладать небольшим числом степеней свободы. Например, кривошипно-шатунный *механизм* (кривошип- шатун- шток- поршень в цилиндре) *обладает* лишь одной *степенью свободы*; уравнение движения механизма можно определить законом вращения одного только кривошипа: $\varphi = \varphi(t) -$ угол поворота кривошипа (обобщенная координата).

Выведем дифференциальные уравнения движения голономной механической системы в независимых координатах.

Вывод уравнений движения голономной механической системы в независимых координатах – уравнений Лагранжа второго рода состоит в преобразовании общего уравнения динамики, выражающего принцип Даламбера – Лагранжа к независимым координатам. Разбиваем исходное уравнение на два слагаемых. Первое слагаемое – работа активных сил на виртуальном перемещении – заменяется суммой $\sum_{i=1}^{n} Q_{\mathrm{i}}\,\delta q_{\mathrm{i}}$. Второе слагаемое преобразуется с учетом зависимостей $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_n, t)$, которые можно рассматривать как уравнения связей в параметрической форме, поскольку $q_1, q_2, \dots, q_n$ независимы. В результате преобразований получим уравнение, которое распадается на систему n отдельных уравнений, поскольку $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ произвольны.

Таким образом, если $\mathrm{T} = \mathrm{T}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ – кинетическая энергия системы, а $\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n$ – работа приложенных к системе активных сил на произвольном виртуальном перемещении δq_1, $\delta q_2, \dots, \delta q_n$, где Т, $Q_1, \dots,$ Q_n – известные функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ (в силу того, что система задана), то уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}i} - \frac{\partial T}{\partial qi} = Q_{\mathrm{i}}\,(i = 1,2, \dots, n), \qquad (7.19)$$

Интегрированием уравнений Лагранжа определяем функции $q_i(t), i = 1,2, \dots, n$; это позволяет найти радиус-векторы точек системы

$\vec{r}_{\mathrm{k}} = \vec{r}_{\mathrm{k}}(t)$ а затем и $\vec{v}_{\mathrm{k}} = \dot{\vec{r}}_{\mathrm{k}}$, $\vec{w}_{\mathrm{k}} = \ddot{\vec{r}}_{\mathrm{k}}(t)$ и $\vec{F}_{\mathrm{k}} = \vec{F}_{\mathrm{k}}(\vec{r}_{\mathrm{k}}, \vec{v}_{\mathrm{k}}, t), k = 1,2, \dots, N$. После этого можно определить и реакции связей.

8. Введение в теорию размерности величин

При изучении механических явлений вводится ряд понятий, например энергия, скорость, напряжение и т.п., которые характеризуют рассматриваемое явление и могут быть заданы и определены с помощью чисел.

Все вопросы о движении и равновесии формулируются как задачи об определении некоторых функций и численных значений для величин, характеризующих явление, причем при решении таких задач законы природы и различные геометрические соотношения представляют в виде функциональных уравнений – обычно дифференциальных.

При чисто теоретических исследованиях эти уравнения служат для установления общих качественных свойств движений и для фактического вычисления искомых функциональных связей с помощью различных математических операций. Однако механическое исследование не всегда возможно осуществить путем математических рассуждений и вычислений. В ряде случаев решение механических задач встречается с непреодолимыми математическими трудностями. Очень часто мы не имеем вообще математической постановки задачи, т.к. исследуемое механическое явление настолько сложно, что для него пока еще нет удовлетворительной схемы и нет еще уравнений движения. С таким положением мы встречаемся при решении очень многих очень важных задач в области авиамеханики, гидромеханики, в проблемах изучения прочности и деформаций различных конструкций и т.п. В этих случаях главную роль играют экспериментальные методы исследования, которые дают возможность установить простейшие опытные факты. Вообще всякое изучение явлений природы начинается с установления простейших опытных фактов, на основе которых можно формулировать законы, управляющие исследуемым явлением, и записать их в виде некоторых математических соотношений.

Для правильной постановки и обработки экспериментов, результаты которых позволяли бы установить общие закономерности и могли бы быть приложенными к случаям, в которых эксперимент не производился непосредственно, необходимо вникать в сущность изучаемого вопроса и давать общий качественный анализ. Кроме того, сама постановка экспериментов, результаты которых представляются в виде совокупности чисел, характеризующих исследуемые стороны явлений, может осуществляться только на основе предварительного теоретического анализа. В постановке опытов и вообще для практики очень важно правильно выбрать безразмерные параметры. Число их должно быть минимальным, и взятые параметры должны отражать в наиболее удобной форме основные эффекты.

Возможность такого предварительного качественно-теоретического анализа и выбора системы определяющих безразмерных параметров дает теория размерности и подобия. Она может быть приложена к рассмотрению весьма сложных явлений и значительно облегчает обработку экспериментов. Более того, в настоящее время грамотная постановка и обработка экспериментов немыслимы без учета вопросов подобия и размерности. Иногда в начальной стадии изучения некоторых сложных явлений теория размерности является единственно возможным теоретическим методом. Однако не следует переоценивать возможностей этого метода. Результаты, которые можно получить с помощью теории размерности, ограничены и во многих случаях тривиальны. Вместе с тем совершенно неверно довольно широко распространенное мнение, что теория размерности вообще не может дать важных результатов. Комбинирование теории подобия с соображениями, полученными из эксперимента или математическим путем из уравнений движения, иногда может приводить к довольно существенным результатам. Обычно теория размерности и подобия приносит очень много пользы и в теории и в практике. Все результаты, которые добываются с помощью этой теории, получаются всегда очень просто, элементарно и почти без всякого труда. Тем не менее, применение методов теории размерности подобия к новым задачам требует от исследователя известного опыта и проникновения в сущность изучаемых явлений.

С помощью теории размерности можно получить особенно ценные выводы при рассмотрении таких явлений, которые зависят от большого количества параметров, но при этом так, что некоторые из этих параметров в известных случаях становятся несущественными. В дальнейшем мы проиллюстрируем такие случаи на примерах. Методы теории размерности и подобия играют особенно большую роль при моделировании различных явлений.

8.1. Размерные и безразмерные величины

Пусть требуется измерить какую-либо величину Q. Это значит, что необходимо ее сравнить с другой величиной q такой же физической природы, т.е. определить во сколько раз Q отличается от q. Для единообразия устанавливают определенное значение q и называют ее единицей измерения. Единицы измерения различных физических величин, объединенные на основе их непротиворечивости друг другу, образуют систему единиц.

Величины, численное значение которых зависит от системы единиц измерения, называются *размерными или имено-*

ванными величинами. Величины, численное значение которых не зависит от применяемой системы единиц измерения, называются *безразмерными или отвлеченными величинами*. Длина, время, энергия могут служить примерами размерных величин. Углы, отношение двух длин - примеры безразмерных величин.

Однако подразделение величин на размерные и безразмерные является до некоторой степени делом условности. Так, например, угол мы только что назвали безразмерной величиной. Но известно, что углы можно измерять в радианах, в градусах, в долях прямого угла, т.е. в различных единицах. Следовательно, число, определяющее угол, зависит от выбора единицы измерения. Поэтому угол можно рассматривать и как величину размерную. Определим угол как отношение длины стягивающей его дуги окружности к радиусу; этим самым будет определена однозначно единица измерения угла – радиан. Если теперь во всех системах единиц измерения измерять углы только в радианах, то угол можно будет рассматривать как безразмерную величину. Точно так же, если для длины ввести единую фиксированную единицу измерения во всех системах единиц измерения, то после этого длину можно будет считать безразмерной величиной. Но фиксирование единицы измерения для углов удобно, а для длины неудобно. Это объясняется тем, что для геометрически подобных фигур соответствующие углы одинаковы, а соответствующие длины неодинаковы, и поэтому в различных вопросах выгодно выбирать за основную длину различные расстояния.

Размерные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому, если некоторые из этих величин принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения, то единицы измерения всех остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Принятые для основных величин единицы измерения называются основными или первичными, а все остальные – производными или вторичными.

В настоящее время наиболее распространенной и имеющей предпочтительное применение является Международная система единиц СИ. В системе СИ произвольно, т.е. независимо одна от другой, выбраны единицы измерения так называемые первичные величины -масса, длина, время, температура, сила тока, сила света, количество вещества. Они получили название основных единиц. Единицы измерения других физических величин, например, сила, скорость, энергия и др., получаются из основных единиц в результате того или иного действия над ними.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. Например, сила определяется исходя из уравнения:

$$F = M\,a = M\,L / T^2 = MLT^{-2}$$

Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы измерения обозначается буквой в квадратных скобках:

$$F = [M]\,[L]\,[T]^{-2},$$

где [M], [L], [T] – соответственно размерности массы, длины и времени.

В тоже время размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степень размерностей первичных величин:

$$[Q] = [M]^{\mu}[L]^{\lambda}\,[T]^{\tau}.$$

Таблицу основных параметров, определяющих явление, всегда легко составить, если задача сформулирована математически. Для этого следует отметить все размерные и безразмерные величины, которые необходимо и достаточно задать, чтобы численные значения всех искомых величин определялись уравнениями задачи. В ряде случаев таблицу определяющих параметров можно составить, не выписывая уравнение задачи. Можно просто установить факторы, необходимые для полного определения искомой величины, численное значение которой иногда можно находить только экспериментально. Среди определяющих параметров должны быть величины с размерностями, через которые могут быть выражены размерности всех зависимых параметров.

При решении какой-либо задачи очень редко применяются все основные единицы измерения. Например, для механической системы используются такие величины, как метр, килограмм, секунда, в то время как в электрической системе, в которой отсутствует механическое перемещение тел, применяются размерности силы тока, длины, времени (ампер, метр, секунда).

Ускорение обычно рассматривается как размерная величина, размерность которой есть длина, деленная на квадрат времени. Во многих вопросах ускорение силы тяжести g, равное ускорению при падении тел в пустоте, можно считать постоянной величиной (9,81 м/сек^2). Это постоянное ускорение g можно выбрать в качестве фиксированной единицы измерения для ускорений во всех системах единиц. Тогда любое ускорение будет измеряться отношением его величины к величине ускорения силы тяжести. Это отношение называется перегрузкой, численное значение которой не будет меняться при переходе от одних единиц измерения к другим. Следовательно, перегрузка является величиной безразмерной. Но в тоже время перегрузку можно рассматривать и как размерную величину, именно как ускорение, когда за единицу измерения принято ускорение, равное ускорению силы тяжести. В этом последнем случаем мы предполагаем, что за единицу измерения перегрузки - ускорения – можно взять и такое ускорение, которое не равно ускорению силы тяжести.

С другой стороны, величины отвлеченные (безразмерные) в общепринятом смысле этого слова можно выражать с помощью различных чисел. В самом деле, отношение двух длин можно выразить только в виде обычного арифметического частного, но и в процентах, а также другими способами.

Таким образом, понятия размерных и безразмерных величин являются относительными понятиями. Мы вводим некоторый запас единиц измерения. Тогда величины, для которых единицы измерения одинаковы во всех принятых системах единиц измерения, мы будем называть *безразмерными*. Величины же, для которых в опытах или в теоретических исследованиях фактически или потенциально (явно или неявно) допускаются различные единицы измерения, мы будем называть *размерными*. Из этого определения вытекает, что некоторые величины можно рассматривать в одних случаях как размерные, а в других – как безразмерные. Выше мы указали подобные примеры, в дальнейшем мы встретимся с рядом других таких примеров.

8.2. Основные и производные единицы измерения

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому если некоторые из этих величин принять основные и установить для них какие-то единицы измерения, то единицы измерения всех остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Принятые для основных величин единицы измерения будем называть *основными* или *первичными*, а все остальные – *производными* или *вторичными*.

На практике достаточно установить единицы измерения для трех величин, каких именно, – это зависит от конкретных условий той или иной задачи; в разных вопросах целесообразно за основные единицы брать единицы измерения различных величин. Так, в физических исследованиях удобно за основные единицы взять единицы длины, времени и массы, а в технике – единицы длины, времени и силы. Но можно было бы взять за основные единицы измерения также единицы скорости, вязкости и плотности и т. п.

Большим распространением пользуются физическая и техническая системы единиц измерения. В физической системе за основные единицы измерения приняты сантиметр, грамм-масса и секунда (отсюда сокращенное название – система единиц CGS), а в технической системе – метр, килограмм-масса и секунда (отсюда сокращенное название – система единиц MKS). Система CGS была предложена великим физиком Германии Вильгельмом Вебером. Её использование было узаконено постановлением Комитета Британской Ассоциации Продвижения Науки в 1872 году, под влиянием мнения Максвелла. Система CGS позже в 1960 году была заменена на систему метр-килограмм-секунда (СИ, SI). С 1 января 1963 года государственным стандартом СССР (ГОСТ 9867-61) введена единая Международная система единиц СИ (SI – System International).

Единицы измерения – один метр (=100 см), массы – один килограмм (=1000 г) и времени – 1 секунда установлены опытным путем на основе определенного соглашения. До 1960 года за один метр принималась длина эталона из платино-иридиевого сплава, хранящегося во французской Палате метр и весов; за один килограмм – масса эталона из платино-иридиевого сплава, хранящегося в той же Палате мер и весов. За одну секунду принималась 1/24·3600 доля средних солнечных суток.

В системе СИ за основные механические единицы измерения приняты метр, килограмм-масса и секунда; за единицу силы тока принят ампер, за единицу термодинамической температуры – кельвин, за единицу силы света – кандела и за единицу количества вещества – моль.

Как только установлены основные единицы измерения, единицы измерения для других механических величин, например, для силы, энергии, скорости, ускорения и т.п., получаются автоматически из их определения.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины M, символ единицы для времени – буквой T (в технической системе единиц символ единицы силы обозначается буквой K). О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц измерения. Например, размерностью площади будет L^2, размерностью скорости L/T, размерностью силы в физической системе единиц будет ML/T^2, а в технической системе – K.

В дальнейшем для обозначения размерности какой-нибудь величины a мы будем пользоваться символом $[a]$, введенным Максвеллом. Например, для размерности силы F в физической системе будем писать

$$[\mathrm{F}] = \frac{M\cdot L}{T^2} \text{ или } \frac{M\cdot L}{T^2} = \mathrm{K}.$$

Формулы размерности удобны для пересчета численного значения размерной величины при переходе от одной системы единиц измерений к другой. Например, при измерении ускорения силы тяжести в сантиметрах и секундах имеем g=981 см/сек^2. Если необходимо от этих единиц измерения перейти к километрам и часам, то для пересчета указанного численного значения ускорения силы тяжести следует воспользоваться соотношениями

$$1 \text{ см} = \frac{1}{10^5} \text{ км}, \ 1 \text{ сек} = \frac{1}{3600} \text{ часа},$$

поэтому

$$g = 981\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} = 981\ \frac{\frac{1}{10^5}}{(\frac{1}{3600})^2\text{час}^2} = 98{,}1\cdot 36^2\,\frac{\text{км}}{\text{час}^2}.$$

Вообще, если в новой системе единиц измерения единица длины вα раз, единица массы в β раз, а единица времени в γ раз меньше старых единиц, то численное значение физической величины a, имеющей размерность $[a]$ = $L^l\cdot M^m\cdot T^n$, увеличивается в новой системе в $\alpha^l\cdot\beta^m\cdot\gamma^n$ раз.

Число основных единиц измерений не обязательно должно быть равным трем. Вместо трех можно брать и большее число основных единиц. Так, например, опытным путем можно установить независимо друг от друга единицы измерения для четырех величин: длины, времени, массы и силы. В этом случае уравнение Ньютона примет вид:

$$F=c\cdot m\cdot a\ ,$$

где F есть сила, m – масса, a – ускорение и c – постоянная, имеющая размерность

$$[c] = \frac{K\cdot T^2}{M\ L}.$$

При таком выборе основных единиц в формулы размерности механических величин будут входить в общем случае четыре аргумента. Коэффициент c в написанном выше уравнении является физической постоянной подобной ускорению силы тяжести g или гравитационной постоянной γ в законе всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

где m_1 и m_2 – массы двух материальных точек, r – расстояние между ними. Численное значение коэффициента c будет зависеть от выбора основных единиц измерения.

Если постоянную считать отвлеченным числом (следовательно, будет иметь одинаковые численные значения во всех системах единиц измерения), равным или не равным единице, то тем самым определится размерность силы через массу, длину и время, единица измерения силы будет определяться однозначно в зависимости от единиц измерения массы, силы, длины и времени.

Вообще с помощью введения дополнительных физических постоянных мы можем выбирать опытным путем независимо друг от друга единицы измерения для n величин ($n > 3$), но при этом мы должны ввести n - 3 дополнительных размерных физических постоянных. В этом случае формулы производных величин будут содержать в общем случае n аргументов.

При изучении механических явлений достаточно ввести только три независимые основные единицы измерения: для длины, массы (или силы) и времени. Этими единицами можно обойтись также и при изучении тепловых и даже электрических явлений.

Нетрудно видеть, что число основных единиц измерения можно взять и меньшим трех. В самом деле, все силы мы можем сравнивать с силой тяготения, хотя это неудобно и противоестественно в тех вопросах, в которых сила тяготения не играет роли. В физической системе единиц сила вообще определяется равенством

$$F = m \cdot a,$$

а сила тяготения – равенством

$$F' = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

где γ есть гравитационная постоянная, имеющая размерность $[\gamma] = M^{-1}L^3T^{-2}$ Подобно тому, как размерную постоянную механического эквивалента тепла можно заменить безразмерной постоянной при измерении количества тепла в механических единицах, так и гравитационную постоянную можно считать абсолютной безразмерной постоянной. Этим определится размерность массы в зависимости от L и T: $[m]=M=L^3T^{-2}$. Следовательно, в этом случае изменение единицы массы полностью определяется изменением единиц измерения для длины и времени. Таким образом, рассматривая гравитационную постоянную как абсолютную безразмерную постоянную, мы будем иметь всего две независимые единицы измерения.

Число независимых единиц измерения можно сократить до одной, если мы примем за абсолютную безразмерную постоянную еще одну размерную физическую постоянную, например коэффициент кинематической вязкости воды ν или скорость света в пустоте c.

Наконец, мы можем рассматривать все физические величины как безразмерные, если примем соответствующие физические постоянные за абсолютные безразмерные постоянные. В этом случае исключается возможность употребления различных систем единиц измерения. Получается одна – единственная система единиц измерения, основанная на выбранных физических постоянных (например, на гравитационной постоянной, скорости света и коэффициенте вязкости воды), значения которых принимаются в качестве абсолютных универсальных постоянных. В науке можно было наблюдать тенденцию к введению такой системы единиц, так как она позволяет установить единицы измерения, которые не могут быть утрачены, подобно эталонам для метра и килограмма – величинам, являющимся по существу случайными величинами, не связанными с основными явлениями природы.

Введение такой единственной системы единиц измерения, исключающей все другие системы единиц, равносильно полному устранению понятию размерности. В единой универсальной системе единиц измерения численные значения всех количественных характеристик определяются однозначно их физической величиной.

В некоторых отношениях такая универсальная единая система единиц измерения, т.е. употребление одинаковых мер, способов исчисления времени и т.п., представляла бы собой определенное удобство для практики, являясь одним из звеньев стандартизации способов измерения.

Однако во многих явлениях такие специальные постоянные, как гравитационная постоянная, скорость света в пустоте или коэффициент кинематической вязкости воды, совершенно несущественны. Поэтому единая универсальная система единиц измерения, связанная с законами тяготения, распространения света и вязкого трения в воде или с какими-нибудь другими физическими процессами во многих случаях носила бы искусственный характер и была бы практически неудобна. Наоборот, практически в различных разделах физики удобно пользоваться системами единиц измерения с различными основными единицами в соответствии с существом и сравнительной значимостью физических понятий, применяемых для описания рассматриваемых явлений.

В механике за основные величины удобно взять силу, длину и время, причем в технической механике единицы для сил и длины удобнее взять иными, чем в небесной механике; в электротехнике за основные величины выгоднее принять силу тока, сопротивление, длину и время (ампер, ом, сантиметр и секунда) и т.д. Более того, при конкретном изучении отдельных специальных классов явлений численные значения количественных характеристик часто выгодно выражать в виде отношения к задаваемым или наиболее характерным величинам по смыслу рассматриваемых частных задач. В разных случаях эти характерные основные величины могут быть различными.

8.3. О формуле размерности

Зависимость единицы измерения производной величины от единиц измерения основных величин может быть представлена в виде формулы. Эта формула называется формулой размерности, и ее можно рассматривать как сжатое определение и характеристику физической величины.

О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц измерения. В разных системах единиц измерения формула размерности для одной и той же величины может содержать различное число аргументов и может иметь различный вид. В системе единиц измерения GGS формулы размерности всех физических величин имеют вид степенного одночлена

$$M^{\mu} L^{\lambda} T^{\tau}.$$

Покажем, что такой вид формулы размерности определяется следующим физическим условием: отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения. Например, будем ли измерять площадь в квадратных метрах или квадратных сантиметрах, отношение двух площадей, измеренных, в квадратных метрах, будет таким же, как и отношение этих же площадей, измеренных в квадратных сантиметрах. Для основных величин это условие является составной частью определения единицы измерения и удовлетворяется само собой.

Пусть мы имеем какую-нибудь размерную производную величину y; для простоты примем сначала, что величина y является геометрической и поэтому зависит только от длин, следовательно,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть некоторые расстояния. Обозначим через y' то значение величины y, которое соответствует значениям аргументов $x_1', x_2', \dots, x_n'$. Численное значение y, а также y', зависит от единицы измерения для расстояний $x_1, x_2, \dots, x_n$. Уменьшим эту единицу или масштаб расстояний в α раз. Тогда согласно сформулированному выше условию мы должны иметь

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x_1', x_2', \dots, x_n')}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x_1'\alpha, x_2'\alpha, \dots, x_n'\alpha)}{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)} \qquad (8.1)$$

т.е. отношение $\frac{y'}{y}$ должно быть одинаковым при любом значении масштаба длин α. Из равенства (8.1) получаем

$$\frac{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f(x_1'\alpha, x_2'\alpha, \dots, x_n'\alpha)}{f(x_1', x_2', \dots, x_n')}$$

или

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha). \qquad (8.2)$$

Следовательно, отношение численных значений производной геометрической величины, измеренной в разных масштабах длины, зависит только от отношения масштабов длин.

Из соотношения (8.2) легко найти вид функции $\varphi(\alpha)$:

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1), \frac{y(\alpha_2)}{y(1)} = \varphi(\alpha_2).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi(\alpha_1/\alpha_2), \qquad (8.3)$$

так как при $x_1' = x_1\alpha_2, x_2' = x_2\alpha_2, \dots, x_n' = x_n\alpha_2$ имеем

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{y'(\alpha_1/\alpha_2)}{y'(1)} = \varphi(\alpha_1/\alpha_2).$$

Дифференцируя уравнение (8.3) по α_1 и полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ получаем

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\,\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=1} = \frac{m}{\alpha}\,.$$

Интегрируя, найдем

$$\varphi(\alpha) = C\,\alpha^m.$$

Так как $\varphi(1) = 1$, то $C = 1$; следовательно,

$$\varphi(\alpha) = \alpha^m. \qquad (8.4)$$

Этот вывод справедлив для любой размерной величины, зависящей от нескольких основных величин, если мы будем менять только один масштаб. Нетрудно видеть, что если изменяются масштабы α, β, γ трех основных величин, то функция φ будет иметь вид

$$\varphi = \alpha^m\,\beta^n\,\gamma^l. \qquad (8.5)$$

Этим доказывается, что формулы размерности физических величин должны иметь вид степенных одночленов.

8.4. О втором законе Ньютона

При исследованиях механических или физических явлений вводится, во-первых, система понятий – величин, характеризующих различные стороны изучаемых процессов – характеристик, и, во-вторых, система единиц измерения, с помощью которой определяются численные значения введенных характеристик. Между характеристиками явления имеется ряд соотношений. Некоторые из этих соотношений присущи только для конкретной системы и для отдельного частного процесса, другие соотношения могут быть справедливы для некоторых классов систем и движений. Соотношения последнего рода имеют особую ценность, и отыскание подобных соотношений составляет важнейшую задачу физических исследований.

Одним из средств определения соотношений между характеристиками могут служить методы теории размерности и подобия. Наша цель – показать в дальнейшем способы и приемы применения и использования этих методов. Перед непосредственным изложением этих приемов рассмотрим на примерах сущность некоторых механических соотношений и общие характерные способы их получения. В связи с этим, а также в связи с некоторым самостоятельным интересом мы рассмотрим основное соотношение механики, известное под названием второго закона Ньютона.

Некоторые из соотношений между характеристиками являются простыми следствиями, выражающими определение этих величин. Например, величина скорости v равняется отношению пройденного пути к соответствующему промежутку времени; величина кинетической энергии материальной точки E равняется $mv^2/2$, где m есть масса материальной точки, и т.д.

Помимо этих тривиальных соотношений, можно находить с помощью экспериментальных или теоретических исследований функциональные связи между численными значениями характеристик явления, вытекающие из природы и особенностей рассматриваемого явления или класса явлений. Примером таких соотношений могут служить законы Кеплера о движении планет и закон всемирного тяготения. Осветим кратко связь между этими законами.

На основании многолетних и обширных наблюдений над движением планет в 1609 и 1619 гг. Кеплером были сформулированы следующие общие законы.

1. Планеты описывают около Солнца эллипсы, причем Солнце находится в одном из фокусов эллипса.

2. Радиус-вектор, соединяющий Солнце с планетой, ометает в равные промежутки времени равные площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам соответствующих средних расстояний планет от Солнца.

Если определить величину силы взаимодействия Солнца и планеты как массу, умноженную на ускорение, то из законов Кеплера математическим путем можно вывести закон всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{8.6}$$

где F есть сила притяжения, r – расстояние между материальными точками, m_1 и m_2 – их массы. Этот закон был установлен Ньютоном в 1682 г. и в дальнейшем был проверен и подтвержден сравнением полученных с его помощью многочисленных выводов с наблюдениями в природе и в специально поставленных опытах.

Другим примером может служить закон Гука, выражающий зависимость между силой F натяжения пружины и ее удлинением x.

Этот закон выводится из наблюдений равновесия и движения груза, подвешенного на пружине, на основе определения величины силы как произведения массы на ускорение и в ряде случаев и с использованием правила сложения сил.

В математической записи этот закон имеет вид

$$F = k\,x, \tag{8.7}$$

где k есть коэффициент пропорциональности (коэффициент жесткости пружины).

Пользуясь этим законом, можно в различных частных случаях (груз подвешен на нескольких пружинах, изменяется масса или жесткость пружины, изменяются начальные условия движения и т.д.) теоретически определить закон движения, т.е. зависимость от времени всех механических величин, найти период колебания и т.д.

Решение этих и других подобных задач механики основано на исследовании уравнения движения материальной частицы

$$F = ma, \tag{8.8}$$

где a есть вектор ускорения, m – масса материальной точки и F – вектор силы. Сила F в ряде случаев представляется в виде векторной суммы нескольких сил

$$\mathrm{F}=\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2+\ldots, \tag{8.9}$$

характеризующих различные эффекты. Возможность замены одновременно действующих нескольких сил одной силой, определенной по формуле (8.9), является опытным фактом.

Рассмотрим теперь подробнее величины, входящие в уравнение (8.8). Ускорение a представляет собой кинематическую величину, которую всегда можно получить опытно независимо от уравнения (8.8). Масса m определяет свойство инерции тела. Для материальной точки понятие массы можно ввести на основе третьего закона Ньютона (всякое действие представляет собой взаимодействие с равными, но противоположно направленными силами). В самом деле, каждой материальной точке можно приписать значение постоянной величины – ее массы, так что при движении любых двух изолированных взаимодействующих материальных точек M_1 и M_2 или M_1 и M_3 будут иметь место соотношения

$$m_1a_1+m_2a_2 = 0,\ m_1a'_1+m_3a'_3 = 0. \tag{8.10}$$

Следовательно, отношение масс всегда можно определить из опыта независимо от уравнения (8.8) путем измерения отношения ускорений при движении взаимодействующих тел.

Постоянство массы, определяемой соотношениями (8.10) при всевозможных движениях, является опытным фактом, выражающим собой закон природы, который, вообще говоря, может допускать уточнения.

Если движение известно, то соотношение (8.8) может служить просто равенством, определяющим величину суммарной силы. На практике уравнение (8.8) очень часто служит для вычисления силы. В задачах об определении движения соотношение (8.8) можно использовать только в том случае, когда известна зависимость силы от величин, характеризующих движение (времени, координат положения точки, скорости и т.п.). Эта зависимость может быть получена либо теоретически на основании дополнительных гипотез, которые обязательно должны быть проверены на опыте, либо непосредственно опытным путем.

Как при теоретических рассуждениях, так и в опытах определение зависимости силы от различных физических величин получается с помощью уравнения (8.8). Из наблюдения и изучения простейших движений устанавливается зависимость произведения от других параметров движения. Затем полученные зависимости обобщаются на более сложный класс движений; справедливость обобщений опять должна проверяться на опыте путем сравнения выводов, полученных из уравнений движения, с результатами опыта. Таким образом, общий путь получения закона всемирного тяготения из закона Кеплера характерен для определения силы в зависимости от параметров движения.

Аналогичным образом определяется сила взаимодействия электрических зарядов – закон Кулона, сила магнитного напряжения – закон Био–Савара, сила капиллярности – закон Вебера, сила трения между твердыми телами – закон трения Кулона, связь между напряжениями и деформациями в упругом теле – закон Гука, сила вязкого трения внутри жидкости – закон Ньютона и т.п.

Опытные законы природы, подобные закону всемирного тяготения, закону Гука и т.п., получены из рассмотрения широких классов движения, в которых величина силы определялась как произведение массы на ускорение. Следовательно, в конкретных задачах, связанных с определением движения, мы не можем ввести в рассмотрение силы независимо от уравнения $F=ma$, использованного применительно к соответствующим опытам. Исследование механических явлений можно проводить аналогичным путем, если взять вместо силы за основную величину другое понятие, например, кинетическую энергию системы. Равенство

$$E = \sum \frac{mv^2}{2} \tag{8.11}$$

можно рассматривать как определение кинетической энергии механической системы. Исследуя экспериментально некоторые классы движений данной механической системы, мы можем подметить зависимость величины энергии E от ряда других механических характеристик. Например, при движении консервативной системы устанавливается, что кинетическая энергия может быть представлена как некоторая функция координат точек системы и аддитивной постоянной h, значение которой выделяет известный подкласс среди всех возможных движений системы,

$$\mathrm{E} = -\mathrm{V}+\mathrm{h}. \tag{8.12}$$

Величина V носит название потенциальной энергии системы. Равенство (8.6) и закон (8.7), характеризующий консервативную систему, приводят к уравнению,

$$\sum \frac{mv^2}{2} + V = h, \qquad (8.13)$$

которое выражает собой закон сохранения механической энергии.

В настоящее время в исследованиях ряда механических явлений мы еще не можем определять движения с помощью соотношения (8.8) или (8.12), так как наукой еще не решены окончательно простейшие задачи в зависимости силы и кинетической энергии от обстоятельств механического состояния системы.

В аналитической механике всегда подразумевается, что законы для сил или выражение потенциальной энергии известны. Основные задачи аналитической механики связаны с вопросами математического аппарата исследования: с методами интегрирования уравнений движения и установлением различных эквивалентных или более широких принципов, которые могут заменять исходные опытные законы.

Главнейшая задача механического или вообще физического исследования многих явлений заключается в установлении законов для сил в зависимости от основных характеристик состояния движения и в связи с этим в выявлении определяющих характеристик и самой возможности установления подобных законов для практических целей.

Основная заслуга Ньютона состоит в том, что он указал на произведение массы на ускорение как на величину, которая может иметь одинаковое значение разных тел и различных движений, происходящих в разных местах пространства с различными скоростями, и главное как на величину, которую можно в ряде случае определять в опытах в функции от времени, положения и скорости точек системы.

Однако определение силы в функции простейших характеристик движения, как мы видели, принципиально не всегда возможно. В этих случаях возникает вопрос, не удобнее ли вместо произведения массы на ускорение взять другие характеристики движения и исследовать их связь?

Рассмотрим еще кратко вопрос о силах инерции. Возьмем совокупность различных систем координат, движущихся друг относительно друга. Ускорение имеет относительную величину и направление в двух системах координат, совершающих разные движения. Связь между ускорениями точки по отношению к системам координат, движущимся друг относительно друга, устанавливается в кинематике.

Мы можем зависимость силы от основных характеристик движения устанавливать опытно в некоторой определенной системе координат, обычно в системе координат, связанной с Землей или с центром тяжести солнечной системы.

Если нам известны законы для сил в некоторой системе координат, то мы легко найдем произведение массы на ускорение, т.е. силу в любой системе координат, движение которой относительно исходной системы задано. Как известно, в этом случае мы должны вводить в рассмотрение так называемые силы инерции. Для наблюдателя, связанного неизменно с подвижной системой, действующие силы слагаются из сил, определенных в системе координат, в которой производился опыт (исходная система координат), и из сил инерции, которые для подвижного наблюдателя с механической точки зрения неотличимы от любых других сил.

8.5. Структура функциональных связей между физическими величинами

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или непосредственно из опыта, представляют собой функциональные зависимости между величинами, характеризующими исследуемое явление. Численные значения этих размерных физических величин зависят от выбора систем единиц измерения, должны обладать некоторой социальной структурой. Пусть мы имеем размерную величину a, которая является функцией независимых между собой размерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n); \tag{8.14}$$

некоторые из этих параметров в рассматриваемом процессе могут быть переменными, другие – постоянными. Выясним структуру функции $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в предположении, что эта функция выражает собой некоторый физический закон, независимый от выбора системы единиц измерения. Пусть среди размерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ первые k величин ($k \leq n$) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k). Независимость размерностей означает, что формула, выражающая размерность одной из величин, не может быть представлена как комбинация в виде степенного одночлена из формул размерности для других величин. Например, размерность длины L, скорости L/T и энергии ML^2/T^2 независимы; размерности длины L, скорости L/T и ускорения L/T^2 зависимы. Среди механических величин обычно имеется не более трех с независимыми размерностями. Мы предполагаем что k равняется наибольшему числу параметров с независимыми размерностями, поэтому размерности величин $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ можно выразить через размерности параметров$a_1, a_2, \ldots, a_k$. Примем k независимых величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ за основные величины и ведем для их размерностей обозначения

$$[a_1] = A_1, [a_2] = A_2, \ldots, [a_k] = A_k.$$

Размерности остальных величин будут иметь вид

$$[a] = {A_1}^{m_1}{A_2}^{m_2}\ldots{A_k}^{m_k},$$

$$[a_{k+1}] = {A_1}^{p_1}{A_2}^{p_2}\ldots{A_k}^{p_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[a_n] = {A_1}^{q_1}{A_2}^{q_2}\ldots{A_k}^{q_k},$$

Изменим теперь единицы измерения величин a_1, a_2, . . ., a_k соответственно в α_1, α_2, . . ., α_k раз; численные значения этих величин и величин a, a_{k+1}, . . ., a_n в новой системе единиц будут соответственно равны:

$$a'_1 = \alpha_1 a_1,\ a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\dots\alpha_k^{m_k}\, a,$$
$$a'_2 = \alpha_2 a_2,\ a'_{k+1} = \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\dots\alpha_k^{p_k}\, a_{k+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a'_k = \alpha_k a_k,\ a'_n = \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\dots\alpha_k^{q_k}\, a_n.$$

В новой системе единиц измерения соотношение (8.14) примет вид

$$a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\dots\alpha_k^{m_k}\, a = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\dots\alpha_k^{m_k}\, f(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$
$$= f(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_k a_k,\ \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\dots\alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\dots$$
$$\dots\alpha_k^{q_k} a_n). \qquad (8.15)$$

Это равенство показывает, что функция f обладает свойством однородности относительно масштабов a_1, a_2, . . ., a_k. Масштабы a_1, a_2, . . . , a_k произвольны. Воспользуемся выбором этих масштабов для сокращения числа аргументов у функции f. Положим:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1},\ \alpha_2 = \frac{1}{a_2},\ \dots,\ \alpha_k = \frac{1}{a_k},$$

т.е. выберем систему единиц измерения таким образом, чтобы значения первых k аргументов в правой части соотношения (8.15) равнялись единице. Иначе говоря, используя то обстоятельство, что соотношение (8.14) согласно предположению не зависит от системы единиц измерения, мы устанавливаем систему единиц измерения так, чтобы k аргументов у функции f имели фиксированные постоянные значения, равные единице.

В этой относительной системе единиц измерения численные значения параметров a, a_{k+1}, . . . , a_n определяются формулами

$$\Pi = \frac{a}{a_1{}^{m_1} a_2{}^{m_2} \dots a_k{}^{m_k}},\ \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1{}^{p_1} a_2{}^{p_2} \dots a_k{}^{p_k}},\ \dots,\ \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1{}^{q_1} a_2{}^{q_2} \dots a_k{}^{q_k}},$$

где a, a_1, a_2, . . . , a_n – численные значения рассматриваемых величин в первоначальной системе единиц измерения. Нетрудно видеть, что значения Π, Π_1, …, Π_{n-k} вообще не зависят от выбора первоначальной системы единиц измерения, так как они имеют нулевую размерность относительно единиц измерения A_1, A_2, …, A_k. Очевидно также, что значения Π, Π_1, … , Π_{n-k} вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются k единиц измерения для величин a_1, a_2, . . . , a_k. Следовательно, эти величины можно рассматривать как безразмерные. Пользуясь относительной системой единиц измерения, соотношение (8.14) можно представить в виде

$$\Pi = f\,(1,1, \dots, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \tag{8.16}$$

Таким образом связь между $n+1$размерными величинами a, a_1, . . ., a_n, независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид соотношения между $n+1$- k величинами Π, Π_1, . . . , Π_{n-k}, представляющими собой безразмерные комбинации из $n+1$размерных величин. Этот общий вывод теории размерностей известен под названием *П – теоремы*.

Если известно, что рассматриваемая безразмерная величина является функцией ряда размерных величин, то эта функция может зависеть только от безразмерных комбинаций, составленных из определяющих размерных величин.

Очевидно, что в соотношении (8.16) систему безразмерных параметров Π_1, Π_2, . . . , Π_{n-k}, можно, изменяя вид функции f, заменять другой системой безразмерных параметров, являющихся функциями n-k параметров Π_1, . . . , Π_{n-k}. Нетрудно видеть, что из n параметров a_1, a_2, . . ., a_n, среди которых имеется не более k параметров с независимыми размерностями, нельзя составить больше n-k независимых безразмерных степенных комбинаций. Это непосредственно вытекает из вывода соотношения (8.16), если за величину a мы примем любую выбранную безразмерную комбинацию, определяемую величинами a_1, a_2, . . ., a_n.

Всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерности к исследованию механических задач.

Чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, тем больше ограничена функциональная зависимость и тем проще вести исследование. В частности, если число основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, которые имеют независимые размерности, то с помощью теории размерности эта зависимость полностью определяется с точностью до постоянного множителя. В самом деле, если $n = k$, т.е. все размерности независимы, то из параметров a_1, a_2, . . . , a_n нельзя образовать безразмерной комбинации, и поэтому функциональная зависимость (6.3) может быть представлена в виде

a= с $a_1{}^{m_1} a_2{}^{m_2} . . . a_n{}^{m_n}$,

где c – безразмерная постоянная, а показатели m_1, m_2, … , m_n легко определяются с помощью формулы размерности для a. Что же касается безразмерной постоянной, то ее можно определить любым опытом, либо теоретически, решаю соответствующую математическую задачу. Очевидно, что теория размерности приносит тем большую пользу, чем больше мы можем выбирать основных единиц измерения.

Выше мы видели, что число основных единиц измерения можно выбирать произвольно, однако увеличение числа основных единиц связано с введение дополнительных физических постоянных, которые также должны фигурировать среди определяющих параметров. Увеличивая число основных единиц измерения, мы увеличиваем число размерных постоянных; в общем случае разность $n+1-k$, равная числу безразмерных параметров, в которых формулируется физическое соотношение, остается постоянной. Увеличение числа основных единиц измерения может приносить пользу только в том случае, когда из дополнительных физических соображений ясно, что физические постоянные, возникающие при введении новых основных единиц измерения, несущественны.

8.6. Параметры, определяющие класс явлений

При всяком изучении механических явлений мы начинаем со схематизации, с выделения основных факторов, определяющих интересующие нас величины, и в широком смысле слова с построения модели исследуемых процессов при помощи простейших образов и явлений, уже выясненных и изученных. Правильная схематизация очень часто представляет собой трудную задачу, требующую от исследователя большого опыта, интуиции и предварительного качественного выяснения механизма изучаемых процессов. Сущность некоторых задач заключается в проверке правильности гипотез, справедливость которых более или менее вероятна.

Выделение определяющих факторов и глубокое проникновение в существо взаимных связей и закономерностей – это основа сознательного использования и управления явлениями природы для успешного разрешения многообразных задач, поставленных в жизни перед человечеством.

Свойства тел и элементарные физические законы, которые играют существенную роль и управляют явлением, характеризуются рядом величин, которые могут быть размерными, переменными или постоянными.

Механическая система или состояние ее движения определяются рядом размерных и безразмерных параметров и функций.

Рассматриваемая совокупность различных механических систем, совершающих некоторые движения, мы всегда можем ограничить соответствующим образом класс допустимых систем и движений так, чтобы конкретная система и ее движение определялись конечным числом размерных и безразмерных параметров. Ограничение класса допустимых систем и движений всегда может быть достигнуто дополнительными требованиями о фиксировании отвлеченных параметров и вида задаваемых функций задачи в безразмерной форме.

Теория размерности позволяет получить выводы, вытекающие из возможности применять для описания физических закономерностей произвольные или специальные системы единиц измерений. Поэтому при перечислении параметров, определяющих класс движений, необходимо указывать все размерные параметры, связанные с существом явления, независимо от того, сохраняют ли эти параметры фактически постоянные значения (в частности, это могут быть физические постоянные) или они могут изменяться для различных движений выделенного класса. Важно, что размерные параметры могут принимать разные численные значения в различных системах единиц измерения, хотя, возможно, и одинаковые для всех рассматриваемых движений. Например, при рассмотрении движений, в которых вес тел существен, мы обязательно должны учитывать в качестве физической размерной постоянной ускорение силы тяжести g, хотя величина g постоянна для всех реальных движений. После того как ускорение силы тяжести g введено в качестве определяющего параметра, мы можем, ничего не усложняя, искусственно расширять класс движений путем введения в рассмотрение движений, в которых ускорение g принимает различные значения. В ряде случаев подобный прием позволяет получить практически ценные качественные выводы.

Как находить систему параметров, определяющих класс явлений? Таблицу основных параметров, определяющих явление, всегда легко выписать, если задача сформулирована математически. Для этого нужно отметить все размерные и безразмерные величины, которые необходимо и достаточно задать для того, чтобы численные значения всех искомых величин определялись уравнениями задачи. В ряде случаев таблицу определяющих параметров можно составить, не выписывая уравнений задачи. Можно просто установить те факторы, которые необходимы для полного определения искомой величины, численные значения которой иногда возможно находить только экспериментально.

При составлении системы определяющих параметров необходимо, как и при составлении уравнений задачи, схематизировать явление. Тем не менее, для применения теории размерности нужно знать меньше, чем для составления уравнений движения механической системы. Для одной и той же системы определяющих параметров могут быть различные уравнения движения. Уравнения движения не только показывают, от каких параметров зависят искомые величины, но содержат в себе потенциально также все функциональные связи, определение которых составляет математическую задачу.

Из этих соображений очевидно, что теория размерности по существу ограничена. С помощью одной только теории размерности мы не можем определить функциональных соотношений между безразмерными величинами.

Выводы теории размерности могут измениться, если мы будем изменять уравнения движения путем умножения различных членов уравнений задачи на некоторые положительные или отрицательные безразмерные числа или функции, зависящие от системы определяющих параметров. Подобные видоизменения уравнений могут существенно влиять на характер физических закономерностей.

Всякую систему уравнений, заключающую в себе математическую запись законов, управляющих явлением, можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Все выводы теории размерности будут сохраняться при любом изменении физических законов, представленных в виде соотношений между одними и теми же безразмерными величинами. Система определяющих параметров должна обладать свойствами полноты.

Среди определяющих параметров должны обязательно быть величины с размерностями, через которые могут выразиться размерности всех зависимых параметров. Некоторые из определяющих параметров могут быть физическими размерными постоянными.

Ниже на отдельных примерах мы укажем способы комбинирования методов теории размерности с соображениями, вытекающими из симметрии, линейности задачи, математических свойств функции при малых или больших значениях определяющих параметров и т.п.

9. Теория подобия

9.1. Метод обобщенных переменных

Современное развитие техники характеризуется резким усложнением задач, решаемых при изготовлении изделий, высокими требованиями к их надежности, сжатыми сроками создания и внедрения в эксплуатацию, стремлением сократить затраты на разработку изделия при удовлетворении заданных условий.

Следует отметить, что существующие методы оценки и контроля качества изделия по результатам испытаний оказываются часто неэффективными в условиях детерминированного эксперимента или имеющейся разнородной, ограниченной по объему статистической информации о результатах физического моделирования, макетирования и испытаний небольшого числа образцов.

Между реальными возможностями современного математического аппарата и теми требованиями, которые к нему фактически предъявляются, существует глубокий разрыв, а полнота знаний для любых теоретических исследований достигается в том случае, если каждая величина, существенная для данного процесса, определяется как функция аргументов, соответствующих конкретным условиям задачи. Общеизвестно, что теоретическое представление приобретает конкретный и точный характер лишь в том случае если оно выражено в форме количественного соотношения.

В подавляющем большинстве случаев попытка найти аналитическое решение возникающих задач связано с непреодолимыми трудностями. Обычно возможность довести исследование до конца в аналитической форме достигается ценой существенных упрощений, вносимых при постановке задачи или в ходе ее решения. Поэтому нередко получаемые результаты, в лучшем случае имеют характер приближенной оценки, в худшем - неправильны по существу и могут являться источником глубоких заблуждений. При изучении сложных задач, в которых присутствует большое число переменных, приходится вводить множество разнородных величин, каждая из которых рассматривается как самостоятельная переменная.

В большинстве случаев влияние отдельных факторов, представленных различными величинами, проявляется не порознь, а совместно. Таким образом, необходимо рассматривать не отдельные величины, а их совокупности, определенные для каждого конкретного процесса. Переход от обычных физических величин к величинам комплексного типа (которые составлены из тех же величин, но в определенных сочетаниях, зависящих от природы процесса) создает важные преимущества, прежде всего, достигается уменьшение числа переменных. Вместе с тем в этих величинах, отражающих влияние отдельных факторов не порознь, а в совокупности, более отчетливо выступают внутренние связи, характеризующее процесс, а вся количественная картина в целом становится более ясной. Здесь важно уже на стадии постановки задачи выявить связь между отдельными группами величин и соединить их в комплексы строго определенного вида. Эти комплексы имеют ясный физический смысл. Они определяют конечный эффект взаимодействия ряда факторов и, следовательно, характеризуют относительную интенсивность их влияния. Являясь вполне устойчивыми комбинациями из величин, существенных дня изучаемых процессов, комплексы получают значение особого рода переменных, характерных для этих процессов.

Таким образом, при переходе от обычных физических величин к величинам комплексного типа, появляется ряд важных преимуществ:

- во-первых, уменьшается число переменных;

- во-вторых, отражается влияние не отдельных факторов, а всего комплекса, более ясно выступают внутренние связи;

- в-третьих, заданное значение комплекса может быть получено как результат бесчисленного множества различных комбинации составляющих его величин.

В этом случае при решении задачи будет рассматриваться не единичный частный случай, а бесконечное множество различных случаев, объединенных некоторой общностью свойств. Замещение обычных переменных обобщенными, является основной чертой рассматриваемой системы исследования. Эту систему называют *теорией подобия и анализ размерностей*, или *методом обобщенных переменных*.

Учение о подобии и моделировании начало создаваться более четырехсот лет тому назад. Леонардо да Винчи, Микеланджело, Галилеем делали попытки обосновать методы моделирования и применять их в различных областях: архитектуре, механике, геометрии, астрономии. Однако первые научные формулировки условия подобия были получены И. Ньютоном в его работе «Математические начала натуральной философии», в которой он рассматривает движение материальных тел и устанавливает законы их подобия. Им были открыты пути применения в моделировании механических систем и их критерии.

В 1822 г. увидела свет работа Д. Фурье «Аналитическая теория теплопроводности», в которой было показано, что члены уравнений, описывающих физические явления, всегда имеют одинаковую размерность. Это правило получило название правила Фурье или правила размерной однородности уравнений математической физики.

В России основоположником теории подобия является В. Л. Кирпичев, который в 1874 г. опубликовал работу «Беседы о механике», посвященную исследованию упругих явлений в геометрически подобных телах. Дальнейшие исследования позволили детально рассмотреть вопросы, связанные с моделированием в строительстве, военном деле.

Продолжателями этого направления явились такие ученые, как М.В. Кирпичев, Н.Е. Жуковский, А.А. Гухман, Л.И. Седов и др.

Академик М.В. Кирпичев в своих работах показал, что теория подобия является теорией эксперимента и моделирования. Она указывает, каким образом нужно ставить опыт, обрабатывать опытные данные, а также обобщать и распространять полученные результаты на другие объекты. Профессор А. А. Гухман сформулировал ряд важных положений, в частности, третью теорему подобия, в которой определяются условия, необходимые и достаточные для обеспечения подобия групп явлений. Большой вклад им был внесен в исследования, связанные с гидромеханикой и переносом тепла в движущейся среде. Профессором Л.И. Седовым были подробно рассмотрены методы подобия применительно к механике, движению различных тел в жидкости. Профессор Н. Е. Жуковский внес неоценимый вклад в развитие теории воздухоплавания и моделирования авиационной техники.

Математические основы теории подобия н анализа размерностей дали значительный толчок развитию многих современных направлений науки и техники. Например, моделированию строительных конструкций, тепло- и гидроэлектростанций, различных силовых и электрических установок. Теория подобия достаточно широко используется для определения прочностных, усталостных характеристик, при моделировании экономических расчетов. В настоящее время актуальнейшей проблемой является развитие теории подобия применительно к задачам больших, сложных и неоднородных систем.

Необходимо отметить, что если раньше теория подобия и анализа размерностей развивалась в направлении обработки полученных данных, при которой с учетом их статистического характера авторы стремились обеспечить наилучшее приближение полученных значений к истинным, то в настоящее время получило распространение другое направление, связанное с теорией планирования эксперимента. Этому направлению положили начало работы таких зарубежных исследователей, как Р. Фишер, Д. Бокс, Ч. Хикс, Н. Винер. Среди отечественных исследователей следует упомянуть В.В. Налимова, Г.К. Круга, Ю.П. Адлера, В.С Пугачева, Н.П. Бусленко и др.

Особенностью этого направления являлось то, что в решении этих проблем центральное место заняли исследования не одного фактора, как это делалось раньше, а многих влияющих факторов. Решение многофакторных задач стало возможным в результате применения современной вычислительной техники. Методы математического планирования эксперимента позволяют получить математические модели исследуемого процесса в реальном диапазоне изменения многих факторов. Развитие вычислительной техники и соответствующие организационные мероприятия значительно расширили круг разрешимых задач, позволили отказаться от некоторых чрезмерных упрощений и тем самым повысить точность математических моделей.

В настоящее время моделирование применяется в различных отраслях науки и техники при решении конкретных технических, экономических и других задач. Методы моделирования чрезвычайно разнообразны, однако наиболее широкое распространение получило физическое и математическое моделирование.

Понятие моделирования тесно связано с понятием информации, характеризующей воздействия, которые получают системы и ее отдельные элементы, а также происходящие в результате этих воздействий изменения состояния системы, определяемые всегда во времени и в пространстве.

Общая задача теории подобия и моделирования - это выработка методологии, направленной на упорядочение способов получения и обработки информации об объектах, существующих вне нашего сознания и взаимодействующих между собой и внешней средой.

Таким образом, можно сказать, что теория подобия применяется в следующих случаях:

- при определении аналитических зависимостей соотношений и решений конкретных задач;
- при обработке результатов экспериментальных исследований различных технических устройств в тех случаях, когда результаты представлены в обобщенных «критериальных» зависимостях;
- при создании моделей, т.е. установок, воспроизводящих явления в других установках (оригиналах), обычно больших по величине, или более сложных по структуре, или более дорогих, чем создаваемые модели.

9.2. Теоремы подобия

Для правильного понимания и использования данного метода необходимо знать основные теоремы теории подобия.

Первая теорема подобия формулирует свойства подобных систем, утверждая, что подобные явления имеют одинаковые критерии подобия. Критерии подобия можно определить различными путями: или из условия тождественности уравнений, описывающих процессы, или из анализа размерностей, разновидностью которого является метод нулевых размерностей. При этом различие состоит лишь в способах решения задачи, результат, в конечном счете, один и тот же.

Вторая теорема подобия предполагает, что функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленными из них критериями подобия. Применяя безразмерные комплексы величин, полученные результаты можно распространить на все подобные процессы, уменьшить число величин, которые следует связать функциональной зависимостью.

Пределы закономерного распространения единичного опыта указывается в *третьей теореме подобия*. Достаточным условием подобия двух систем является равенство любых двух соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из их основных параметров и начальных (граничных) условий. Определяющие критерии составляются из независимых между собой величин, которые входят в условия однозначности (геометрические соотношения, физические параметры, краевые условия, начальные и граничные).

Теория подобия дает общие методические указания, как поступить в каждом отдельном случае при анализе уравнений, описывающих явление, при постановке и обработке данных опыта над ними и при распределении результатов опыта на другие явления. Она показывает, что любая функциональная зависимость между физическими параметрами исследуемого объекта может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия, составленными из физических параметров. При этом критерии подобия представляют собой безразмерные параметры, которые характеризуют физическое подобие происходящих в исследуемом объекте процессов, и являются константами для всех подобных процессов.

Однако при решении конкретной задачи необходимо констатировать следующее:

- как правило, известны далеко не все определяющие параметры данного явления;

- даже среди определяющих параметров можно выделить факторы, оказывающие более значимое влияние, и факторы, влияние которых сравнительно невелико;

- практически невозможно подобрать параметры натуры таким образом, чтобы определяющие критерии модели и натуры были равнозначны.

Поэтому при моделировании приходится иногда использовать наиболее значимые параметры и исключать из рассмотрения менее значимые параметры; пренебрегать необходимостью равенства некоторых критериев; пользоваться усредненными значениями переменных величин. В этом случае подобие между моделью и построенной на ее основе натурой является приближенным. Степень приближения в каждом конкретном случае различна.

О возможности погрешности моделирования можно судить по результатам исследования модели, выясняя значение различных параметров и критериев подобия для характеристики процесса. Дня этой цели можно использовать уравнение процесса. Однако и тогда, когда оценка точности подобия невозможна, ценность методов приближенного моделирования не уменьшается; эти методы позволяют определить направление поисков и порядок ожидаемого результата.

В тех случаях, когда известен только набор физических параметров, характеризующих процесс, но неизвестны уравнения, связывающие их между собой, целесообразно применять теорию размерностей. При этом выбор номенклатуры физических параметров зависит от исследователя, и данный этап в процедуре построения критериев подобия является наиболее ответственным. Для выбора определяющих физических параметров можно использовать методы планирования экспериментов или экспертные методы.

Имеется несколько способов получения критериев подобия на основе установленной номенклатуры параметров, которые характеризуют физическую сущность исследуемого процесса. Наиболее эффективным способом, позволяющим использовать средства вычислительной техники, является алгоритм, разработанный В. А. Вениковым на основе методов линейной алгебры. Он включает следующие этапы:

- составление списка параметров X_1, X_2 ,..., X_n;
- составление матрицы из показателей степени размерностей параметров;
- выявление числа k независимых между собой параметров путем вычисления ранга матрицы;
- расчет значений показателей степени γ_1, …. γ_n;
- определение выражений критериев подобия во всех формах записи.

Физические процессы, протекающие в технических системах и их элементах, обычно настолько сложны, что если даже и удается их описать аналитически, то, как правило, в это описание необходимо вводить эмпирические коэффициенты.

При этом возникает задача *идентификации модели*, заключающаяся в том, чтобы по результатам эксперимента или наблюдений построить математические модели некоторого типа, адекватно описывающие поведение исследуемой системы. Наиболее часто используются методы идентификации систем такие как метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, метод байесовских оценок, метод эвристик, экспертное оценивание и другие.

Поэтому в блоки идентификации исследуемых процессов, помимо описания самих математических моделей, должны быть заложены алгоритмы вычисления значений коэффициентов уравнения подобия.

Требования к коэффициентам уравнений подобия можно сформулировать следующим образом:

1) коэффициенты должны иметь ясный физический смысл. Это позволит оценить границы их применения и по мере необходимости построить для их определения дополнительные математические модели.

2) иерархия математических моделей, описывающих физические процессы, должна строиться таким образом, чтобы в пределе стремиться к такому уравнению, коэффициентами которого были бы только физические константы.

3) в силу того, что математические модели в блоках идентификации должны строиться в виде зависимостей между критериями подобия, эмпирические коэффициенты, входящие в эти зависимости, должны быть безразмерными.

4) коэффициенты должны быть подобраны таким образом, чтобы модель охватывала как можно большее число типов изделий при соблюдении стохастического подобия их между собой.

5) число эмпирических коэффициентов, вводимых в математическую модель, должно быть оптимальным.

6) если математическая модель правильно отражает физическую сущность процессов, то, увеличивая число коэффициентов, можно существенно повысить адекватность модели.

В настоящее время теория подобия получила широкое распространение при решении сложных математических задач в различных областях науки и техники.

10. Экспериментальные факторные модели

10.1. Особенности экспериментальных факторных моделей

Наряду с теоретическими математическими моделями при функциональном проектировании технических систем широко применяются *экспериментальные факторные математические модели*.

Теоретические модели имеют то преимущество, что они непосредственно описывают физические свойства технической системы. Коэффициенты уравнений теоретических моделей представляют собой параметры элементов технической системы (внутренние параметры системы) или некоторые комбинации этих параметров, а зависимые переменные – фазовые координаты системы. Они позволяют осуществлять имитационное моделирование процессов функционирования технической системы во времени, детально изучать изменение фазовых координат в зависимости от внешних воздействий (возмущающих и управляющих), анализировать устойчивость системы, качество переходных процессов, эффективность функционирования в условиях случайных внешних воздействий, близких к реальным, т.е. оценивать ее функциональную работоспособность и выполнение технических требований к системе.

Но функциональные теоретические модели сложных технических объектов представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка (обычно не ниже 30-го порядка). Однократное решение такой системы уравнений на самых современных ЭВМ требует значительной затраты машинного времени (десятки и даже сотни минут). Следует при этом учитывать, что задачи проектирования носят ярко выраженный оптимизационный характер. Целью функционального проектирования является выбор структуры на основе некоторого множества вариантов и определение оптимальных параметров технического объекта. Процедуры выбора структуры и оптимизационные алгоритмы требуют выполнения множества итераций, количество которых может достигать чисел второго и третьего порядков, причем, на каждой итерации решается исходная система дифференциальных уравнений. Поэтому решение одной проектной задачи характеризуется огромными затратами машинного времени. Этим объясняется медленное внедрение методов функционального проектирования в конструкторских организациях. Вместе с тем, возможно обеспечить высокий технический уровень и конкурентоспособность создаваемых сложных технических объектов.

Затраты машинного времени можно значительно сократить, если на этапе оптимизации параметров использовать экспериментальную факторную математическую модель. Экспериментальные факторные модели, в отличие от теоретических, не используют физических законов, описывающих происходящие в зависимости выходных параметров от внутренних внешних параметров объектов проектирования.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (физические эксперименты), либо вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью. При создании новых технических объектов физический эксперимент проводится на прототипах или аналогах, а иногда на макетных образцах. Однако физические эксперименты требуют огромных затрат материальных и временных ресурсов, поэтому их выполняют обычно в тех случаях, когда возникает необходимость поиска путей совершенствования существующих технических систем, когда сложность этих систем и условий их функционирования не позволяет надеяться на требуемую точность их математического описания теоретическими методам.

При функциональном проектировании факторные модели наиболее часто получают на основе вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью.

При построении экспериментальной факторной модели объект моделирования (проектируемая техническая система) представляется в виде «черного ящика», на вход которого подаются некоторые переменные $\vec{X}$ и $\vec{Z}$, а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные $\vec{Y}$.

В число входных переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ входят внутренние и внешние параметры объекта проектирования, подлежащие оптимизации, а выходными переменными «черного ящика» являются выходные параметры объекта, характеризующие его эффективность и качество процессов функционирования, выбираемые в качестве критериев оптимальности.

В процессе изменения эксперимента изменение переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ приводит к изменениям выходных переменных $\vec{Y}$. Для построения факторной модели необходимо регистрировать эти изменения и осуществлять необходимую их статистическую обработку для определения параметров модели.

При проведении физического эксперимента переменными $\vec{X}$ можно управлять, изменяя их величину по заданному закону. Переменные $\vec{Z}$ - неуправляемые, принимающие случайные значения. При этом значения переменных $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ можно контролировать и регистрировать с помощью соответствующих измерительных приборов. Кроме того, на объект воздействуют некоторые переменные $\vec{\mathrm{E}}$, которые нельзя наблюдать и контролировать. Переменные $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{\mathrm{n}})$ называют *контролируемыми и управляемыми*; переменные $\vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_{\mathrm{m}})$ - *контролируемыми, но неуправляемыми*, а переменные $\vec{\mathrm{E}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\mathrm{L}})$ – *неконтролируемыми и неуправляемыми.*

Переменные $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ называют *факторами*. Факторы $\vec{X}$ являются управляемыми и изменяются как *детерминированные* переменные, а факторы $\vec{Z}$ неуправляемые, изменяются во времени случайным образом, т.е. $\vec{Z}$ представляет собой *случайные процессы*. Пространство контролируемых переменных – факторов $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ – образует *факторное пространство*.

Выходная переменная $\vec{Y}$ представляет собой вектор зависимых переменных моделируемого объекта. Ее называют *откликом*, а зависимость $\vec{Y}$ от факторов $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ – *функцией отклика*. Геометрическое представление функции отклика называют *поверхностью отклика*.

Переменная $\vec{\mathrm{E}}$ действует в процессе эксперимента бесконтрольно. Если предположить, что факторы $\vec{X}$ и $\vec{Z}$ стабилизированы во времени и сохраняют постоянные значения, то под влиянием переменных $\vec{\mathrm{E}}$ функция отклика $\vec{Y}$ может меняться как систематическим, так и случайным образом. В первом случае говорят о *систематической помехе*, а во втором – о *случайной помехе*. При этом полагают, что случайная помеха обладает вероятностными свойствами, не изменяемыми во времени.

Возникновение помех обусловлено ошибками методик проведения физических экспериментов, ошибками измерительных приборов, неконтролируемыми изменениями параметров и характеристик объекта и внешней среды, включая воздействия тех переменных, которые в принципе могли бы контролироваться экспериментатором, но не включены им в число исследуемых факторов (вследствие трудностей их измерения, по ошибке или незнанию). Помехи могут быть также обусловлены неточностью физического или математического моделирования объектов.

В вычислительных экспериментах объектом исследования является теоретическая математическая модель, на основе которой необходимо получить экспериментальную факторную модель. Для ее получения необходимо определить структуру и численные значения параметров модели.

Под *структурой модели* понимается вид математических соотношений между факторами $\vec{X}$,$\vec{Z}$ и откликом $\vec{Y}$. Параметры представляют собой коэффициенты уравнений факторной модели. Структуру модели обычно выбирают на основе априорной информации об объекте с учетом назначения и последующего использования модели. Задача определения параметров модели полностью формализована. Она решается методами регрессионного анализа. *Экспериментальные факторные модели называют также регрессионными моделями*.

Регрессионную модель можно представить выражением

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{b}, \vec{Z}),$$

где $\vec{b}$ – вектор параметров факторной модели.

Вид вектор-функции $\vec{\varphi}$ определяется выбранной структурой модели и при выполнении регрессионного анализа считается заданным, а параметры $\vec{b}$ подлежат определению на основе результатов эксперимента, проводимого в условиях действия помехи $\vec{\mathrm{E}}$, представляемой в виде аддитивной составляющей функции отклика $\vec{Y}$.

Эксперимент – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследовательских испытаниях.

Опыт – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Опыт – отдельная элементарная часть эксперимента.

Различают эксперименты пассивные и активные.

Пассивным называется такой эксперимент, когда значениями факторов управлять нельзя, и они принимают случайные значения. Это характерно для многих технических объектов при проведении на них физических экспериментов. В таком эксперименте существуют только факторы $\vec{Z}$. В процессе эксперимента в определенные моменты времени измеряются значения факторов $\vec{Z}$ и функций откликов $\vec{Y}$. После проведения N опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели. Такой подход к построению математической модели лежит в основе метода статистических испытаний (Монте-Карло).

Активным называется такой эксперимент, когда значениями факторов задаются и поддерживают их неизменными на заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента. Следовательно, в этом случае существуют только управляемые факторы $\vec{X}$. Однако в связи с тем, что в активном эксперименте также действует аддитивная помеха $\vec{\mathrm{E}}$, реализации функций отклика $\vec{Y}$ представляет собой случайные величины, несмотря на то, что варьируемые факторы $\vec{X}$ детерминированы. Поэтому здесь так же, как и в пассивном эксперименте, построение экспериментальной факторной модели требует статистической обработки полученных результатов опытов.

Основные особенности экспериментальных факторных моделей следующие: они статистические; представляют собой сравнительно простые функциональные зависимости между оценками математических ожиданий выходных параметров объекта от его внутренних и внешних параметров; дают адекватное описание установленных зависимостей лишь в области факторного пространства, в которой реализован эксперимент. Статистическая регрессионная модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства, которые в полной мере проявляются лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях.

10.2. Принципы планирования эксперимента

Для получения адекватной математической модели необходимо обеспечить выполнение определенных условий проведения эксперимента. Модель называют *адекватной*, если в оговоренной области варьирования факторов $\vec{X}$ полученные с помощью модели значения функций отклика $\vec{Y}$ отличаются от истинных не более чем на заданную величину.

Методы построения экспериментальных факторных моделей рассматриваются в *теории планирования эксперимента*.

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Такой подход обусловлен высокой стоимостью экспериментов, как физических, так и вычислительных, и вместе с тем необходимостью построения адекватной модели.

Планирование осуществляют как активного, так и пассивного эксперимента. Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного. Это следует учитывать при выборе вида эксперимента. В вычислительном эксперименте, в отличие от физического, нет никаких ограничений на выбор управляемых факторов и характер их измерения. Поэтому вычислительные эксперименты обычно всегда реализуются как активные. В дальнейшем будут рассматриваться в основном вопросы, связанные с планированием активных экспериментов.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы:

- отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;

- постепенное усложнение структуры математической модели;

- сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;

- рандомизация опытов;

- оптимальное планирование эксперимента.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использовании густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. В этом случае в принципе можно получить факторную модель, которая будет практически почти полностью соответствовать исходной теоретической модели. Однако в большинстве случаев при решении практических задач, для которых используется факторная модель, такого детального описания не требуется. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика. Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента.

В отсутствие априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта. Если проверка этой модели на адекватность не дает удовлетворительного результата, ее постепенно усложняют путем изменения структуры (например, повышая степень полинома, принятого в качестве факторной модели, или вводя в модель дополнительные факторы и т.п.) при этом используются результаты опытов, выполненных при построении простой модели, и проводится некоторое количество дополнительных опытов.

При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика $\vec{Y}$ в опытах, проведенных в одной и той же точке плана. В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной. Чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель.

Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха. Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называется рандомизацией систематически действующих помех.

Наличие помех приводит к *ошибкам эксперимента*. Ошибки подразделяют на *систематические* и *случайные*, соответственно наименованиям вызывающих их факторов – помех.

В *вычислительных активных экспериментах* ошибки характерны только для определяемых значений функций отклика. Если исходить из целей построения факторных моделей на основе теоретических моделей, полагая, что теоретические модели дают точное описание физических свойств технического объекта, а регрессионная модель является ее аппроксимацией, то значения функций отклика будут содержать только случайную ошибку. В этом случае необходимости в рандомизации опытов не возникает.

Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может порождать наряду с отмеченными в предыдущем параграфе факторами также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны быть:

1) управляемыми (установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);
2) совместными (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);
3) независимыми (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);
4) однозначными (одни факторы не должны быть функцией других);
5) непосредственно влияющими на выходные параметры.

В вычислительном эксперименте реализация трех первых требований не создает никаких затруднений, а в физическом эксперименте могут возникнуть сложности и даже невозможность их осуществления, что приведет к необходимости замены активного эксперимента пассивным.

Функции отклика должны быть:

1) численно измеряемыми;
2) иметь четкий физический смысл;
3) однозначными (характеризовать только одно свойство объекта);
4) информативными (полностью характеризовать определенное свойство объекта);
5) статистически эффективными (измеряются с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

10.3. План эксперимента

При проведении активного эксперимента задается определенный план варьирования факторов, т.е. эксперимент заранее планируется.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Точка плана – упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, т.е. точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точке плана с номером i соответствует вектор-строка

$X_{\mathrm{i}} = (X_{\mathrm{i1}}, X_{\mathrm{i2}}, \dots, X_{\mathrm{iN}})$.

Общая совокупность таких векторов $\vec{X}_{i,}\ i = \overline{1, L}$, образует план эксперимента, а совокупность различающихся векторов, число которых обозначим N, - *спектр плана*.

В активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения. Фиксированное значение фактора называют *уровнем фактора*. Количество принимаемых уровней факторов зависит от выбранной структуры факторной модели и принятого плана эксперимента.

Минимальный X_{jmin} и максимальный X_{jmax}, $j = \overline{1, n}$ ($n -$ число факторов), уровни всех факторов выделяют в факторном пространстве некоторый гипер-параллелепипед, представляющий собой *область планирования*. В области планирования находятся все возможные значения факторов, используемые в эксперименте.

Вектор $\vec{X}^0 = (X^0{}_1, X^0{}_2, \dots, X^0{}_{\mathrm{n}})$ задает точку центра области планирования. Координаты этой точки $X^0{}_j$ обычно выбирают из соотношения

$$X^0{}_{\mathrm{j}} = (X_{\mathrm{jmax}} + X_{\mathrm{jmin}})/2 \qquad (10.1)$$

Точку $\vec{X}^0$ называют *центром эксперимента*. Она определяет основной уровень факторов $X^0_j, j = \overline{1,n}$. Центр эксперимента стремятся выбрать как можно ближе к точке, которая соответствует искомым оптимальным значениям факторов. Для этого используется априорная информация об объекте.

Интервалом (или шагом) *варьирования фактора X_j* называют величину, вычисляемую по формуле

$$\Delta X_j = (X_{j\,max} - X_{j\,min})/2, \; j = \overline{1,n}. \qquad (10.2)$$

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, а основной 0. Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = (X_j - X^0_j)/\Delta X_j, \; j = \overline{1,n}. \qquad (10.3)$$

Для переменных x_j начало координат совмещено с центром эксперимента, а в качестве единиц измерения используются интервалы варьирования факторов.

Центр эксперимента находится в точке 0 с координатами X^0_1, X^0_2. Точки 1, 2, 3, 4 являются точками плана эксперимента. Например, значения факторов X_1 *и* X_2 в точке 1 равны соответственно $X_{1\,min}$ и $X_{2\,min}$, а нормированные их значения $x_{1\,min}=-1$, $x_{2\,min}=-1$.

В дальнейшем будем предполагать, что в планах активных экспериментов факторы нормированы.

План эксперимента удобно представлять в матричной форме. План эксперимента задается либо матрицей плана, либо матрицей сектора плана в совокупности с матрицей дублирования.

Матрица плана представляет собой прямоугольную таблицу, содержащую информацию о количестве и условиях проведения опытов. Строки матрицы плана соответствуют опытам, а столбцы – факторам. Размерность матрицы плана

$L \times n$, где L – число опытов, n – число факторов. При проведении повторных (дублирующих) опытов в одних и тех же точках плана матрица плана содержит ряд совпадающих строк.

Матрица спектра плана – это матрица, в которую входят только различающиеся между собой строки матрицы плана. Размерность матрицы спектра плана $N \times n$, где N – число точек плана, различающихся между собой хотя бы одной координатой $X_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$, где вектор X_{ij} – нормированное значение j-го фактора в i-м опыте.

Матрица дублирования – квадратная диагональная матрица m, диагональные элементы которой равны числам m_i , $i = \overline{1, N}$ параллельных опытов в соответствующих точках спектра плана.

Опыты при выполнении эксперимента проводятся в последовательности, предусмотренной матрицей плана. Эта матрица составляется лишь при необходимости рандомизации опытов, когда в результатах эксперимента можно ожидать наличие систематических ошибок. Для выбора случайной последовательности опытов используется таблица равномерно распределенных случайных чисел. Первое число таблицы выбирают произвольно, желательно случайным образом, а затем, начиная с этого числа, выписывают L чисел таблицы, где L – число опытов (с учетом их дублирования). При этом числа, большие L, а также уже выписанные, отбрасываются.

В вычислительных экспериментах опыты проводят в соответствии с матрицей спектра плана, так как предполагается отсутствие систематических ошибок и поэтому нет необходимости в рандомизации опытов.

10.4. Регрессионный анализ

Регрессио́нный анализ — статистический метод исследования влияния одной или нескольких независимых переменных $X_1, X_2, ..., X_p$ на зависимую переменную Y. Независимые переменные иначе называют *регрессорами* или *предикторами*, а зависимые переменные — *критериальными*. Терминология зависимых и независимых переменных отражает лишь математическую зависимость переменных, а не причинно-следственные отношения.

Целями регрессионного анализа являются:

1. Определение степени детерминированности вариации критериальной переменной предикторами.

2. Предсказание значения зависимой переменной с помощью независимой.

3. Определение вклада отдельных независимых переменных в вариацию зависимой.

Таким образом, регрессионный анализ проводится для получения по экспериментальным данным регрессионных моделей, представляющих собой экспериментальные факторные модели.

Задачей регрессионного анализа является определение параметров экспериментальных факторных моделей объектов проектирования или исследования, т.е. определение коэффициентов уравнений моделей при выбранной их структуре.

Регрессионный анализ включает в себя три основных этапа:

- статистический анализ результатов эксперимента;
- получение коэффициентов регрессионной модели;
- оценку адекватности и работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технической системы.

Регрессионный анализ нельзя использовать для определения наличия связи между переменными, поскольку наличие такой связи и есть предпосылка для применения анализа.

11. Примеры моделирования механических систем

11.1. Задача о колебаниях математического маятника

Математическим маятником называется тяжёлая материальная точка, которая двигается или по вертикальной окружности (плоский математический маятник), или по сфере (сферический маятник). В первом приближении математическим маятником можно считать груз малых размеров, подвешенный на нерастяжимой гибкой нити.

Рассмотрим движение плоского математического маятника по окружности радиуса l с центром в точке O (рис. 1). Пусть положение точки M (маятника) определяется углом отклонения φ радиуса OM от вертикали. Направим касательную $M\tau$ в сторону положительного отсчёта угла φ. Уравнение движения маятника составим на основании второго закона Ньютона в виде

$$mW = F+N, \tag{11.1}$$

где F– действующая на точку активная сила;

W– ускорение точки M;

N– реакция связи.

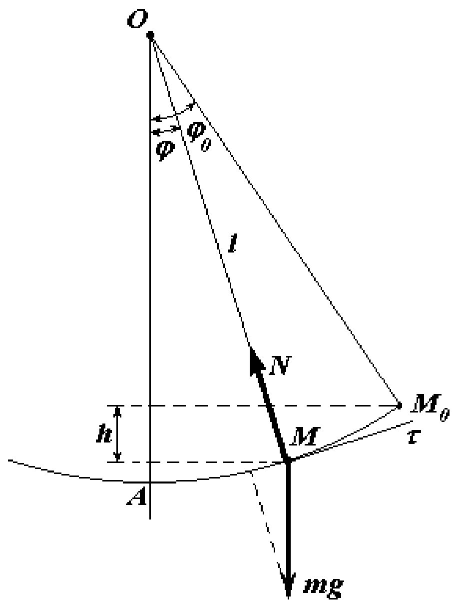


Рис. 1. Схема колебаний математического маятника

Уравнение (11.1) мы получили по второму закону Ньютона, который является основным законом динамики и гласит, что производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на неё силе, т. е.

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \qquad (11.2)$$

где v – скорость точки M.

Считая массу постоянной, можно представить уравнение (11.2) в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F \text{ или } mW = F.$$

Итак, уравнение (11.1) в проекции на ось $\boldsymbol{\tau}$ даст нам одно из естественных уравнений движения точки по заданной неподвижной гладкой кривой:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau \text{ или } m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau.$$

В нашем случае получим в проекции на ось τ

$$m\frac{dv}{dt} = -mgsin\varphi,$$

где m – масса маятника.

Так как $v = l \cdot \omega$ или $v = l\,\frac{d\varphi}{dt}$, отсюда находим

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,mgsin\varphi$$

Сокращая на m и полагая

$$\frac{g}{l} = \omega^2, \qquad (11.3)$$

будем окончательно иметь:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 sin\varphi = 0. \qquad (11.4)$$

Рассмотрим сначала случай *малых колебаний*. Пусть в начальный момент маятник отклонён от вертикали на угол φ_0 и опущен без начальной скорости. Тогда начальные условия будут:

$$\text{при } t_0 = 0,\ \varphi = \varphi_0,\ \dot{\varphi_0} = 0. \qquad (11.5)$$

Из интеграла энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h, \qquad (11.6)$$

где V − потенциальная энергия, а h — постоянная интегрирования, следует, что при этих условиях в любой момент времени угол $\varphi \le \varphi_0$. Значение постоянной h определяется по начальным данным. Допустим, что угол φ_0 мал; тогда угол φ будет также мал и можно приближённо положить $sin\ \varphi \approx \varphi$. При этом уравнение (11.4) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (11.7)$$

Уравнение (11.7) есть дифференциальное уравнение простого гармонического колебания. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t = a\sin(\omega t + \varepsilon), \qquad (11.8)$$

где A и B или a и ε суть постоянные интегрирования.

Отсюда сразу находим период T малых колебаний математического маятника (период − промежуток времени, в течение которого точка возвращается в прежнее положение с той же скоростью)

$$\sin\omega(t + T) = \sin\omega t \text{ и } \cos\omega(t + T) = \cos\omega t$$

$$\sin(\omega t + \omega T) = \sin\omega t,$$

т.к. sin имеет период равный 2π, то $\omega T = 2\pi$, следовательно

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (11.9)$$

Для нахождения закона движения при начальных условиях (11.5) вычисляем:

$$\dot{\varphi} = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t). \qquad (11.10)$$

Подставляя значения (11.5) в уравнения (11.8) и (11.10), получим:

$$\varphi_0 = A,\ 0 = \omega B,$$

т.е. B=0. Следовательно, закон движения для малых колебаний будет:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t. \qquad (11.11)$$

Найдём теперь *точное решение* задачи о плоском математическом маятнике. Определим сначала первый интеграл уравнения движения (11.4). Так как

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\dot\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi\,\frac{d\dot\varphi}{d\varphi},$$

то (11.4) можно представить в виде

$$\dot\varphi\,\frac{d\dot\varphi}{d\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi.$$

Отсюда, умножая обе части уравнение на $d\varphi$ и интегрируя, получим:

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} = -\omega^2 \cos\varphi + C. \qquad (11.12)$$

Обозначим здесь через φ_0 угол максимального отклонения маятника; тогда при $\varphi = \varphi_0$ будем иметь $\dot\varphi = 0$, откуда $C = \omega^2 \cos\varphi_0$. В результате интеграл (11.12) даёт:

$$\dot\varphi^2 = 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \qquad (11.13)$$

где ω определяется равенством (11.3).

Этот интеграл представляет собой интеграл энергии и может быть непосредственно получен из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A^a_{M_0M}, \qquad (11.14)$$

где $A^a_{M_0M}$ − работа на перемещении M_0M активной силы F, если учесть, что в нашем случае v_0=0, $v = l\dot\varphi$ и $A^a_{M_0M} =$ $= mgh = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

Из уравнения (11.13) видно, что при движении маятника угол φ будет изменяться между значениями $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$ ($|\varphi|<\varphi_0$, так как $\dot\varphi^2 \geq 0$), т.е. маятник будет совершать колебательное движение. Условимся отсчитывать время t от момента прохождения маятника через вертикаль *OA* при его движении право (см. рисунок 1). Тогда будем иметь начальное условие:

$$\text{при } t = 0, \varphi = 0. \qquad (11.15)$$

Кроме того, при движении из точки *A* будет $\dot{\varphi} > 0$; извлекая из обеих частей равенства (11.13) квадратный корень, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\sqrt{2\cos\varphi - \cos\varphi_0}.$$

Разделяя здесь переменные, будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \omega \cdot dt. \qquad (11.16)$$

Так как

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2},$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2},$$

то

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}).$$

Подставляя этот результат в уравнение (11.16), получаем:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\omega \cdot dt. \qquad (11.17)$$

Чтобы проинтегрировать уравнение (11.17), нужно найти квадратуру левой части. Для этого перейдём от переменной φ к новой переменнойα, полагая:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin\alpha, \qquad (11.18)$$

где $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = k\cos\alpha \cdot d\alpha,$$

откуда

$$d\varphi = \frac{2k\cos\alpha \cdot d\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2k\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}.$$

Кроме того, $\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = k^2(1-\sin^2\alpha) = k^2\cos^2\alpha$. Подставляя все эти величины в уравнение (11.17) и заменяя ω его значением (11.3), получим:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}}dt. \qquad (11.19)$$

По принятым начальным условиям (11.15) при t=0 угол φ=0, а, следовательно, как видно из (11.18), и α=0. Тогда, беря от обеих частей уравнения (11.19) определённые интегралы справа от 0 до t, а слева от 0 до α, получим закон движения маятника в виде

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}}t. \qquad (11.20)$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (11.20), представляет собой *эллиптический интеграл первого рода*. Величина k называется модулем эллиптического интеграла. Этот интеграл есть функция верхнего предела и модуля, т.е.

$$u = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = F(\alpha,k). \qquad (11.21)$$

Если в равенстве (11.21) рассматривать верхний предел a как функцию от интеграла u, то такая функция носит название амплитуды u и обозначается так:

$$\alpha = \mathrm{am}[F(\alpha,k)], \text{ или } \alpha = \mathrm{am}u. \qquad (11.22)$$

Беря от обеих частей равенства (11.22) синус, мы получим:

$$\sin\alpha = \sin \mathrm{am}u = \mathrm{sn}u. \qquad (11.23)$$

Функция sn$u$ (синус-амплитуда u) представляет собой так называемую *эллиптическую функцию Якоби*. Поскольку, согласно уравнению (11.20), $u=\sqrt{\frac{g}{l}}t$, то, переходя в равенстве

(11.23) от α к φ с помощью формулы (11.18), найдём закон движения маятника, выраженный эллиптическую функцию sn, в виде

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\,\mathrm{sn}(\sqrt{\frac{g}{l}}t). \qquad (11.24)$$

11.1.4. Период колебаний математического маятника в общем случае

Найдём период T колебания маятника. Из положения $\varphi = 0$ в положение $\varphi = \varphi_0$ маятник приходит за четверть периода. Так как, согласно равенству (11.18), при $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$, а при $\varphi = \varphi_0$ величина $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то из уравнения (11.20) имеем:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \qquad (11.25)$$

Таким образом, определение периода колебаний маятника сводится к вычислению величины

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = F\left(\frac{\pi}{2},k\right) = K, \qquad (11.26)$$

представляющий собой четверть периода эллиптического интеграла (11.21).

Известно (формула Валлиса), что

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\alpha d\alpha = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (11.27)$$

Разлагая в выражении (11.26) подынтегральную функцию в ряд, получим:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = (1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\alpha+\cdots)d\alpha.$$

Тогда, используя формулу (11.27), будем иметь:

$$K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4+\cdots\right]. \qquad (11.28)$$

Подставляя это значение K в равенство (11.25) и учитывая, что

$k=\sin\frac{\varphi_0}{2}$, получим для периода колебаний плоского математического маятника выражение

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\cdots\right]. \qquad (11.29)$$

Следовательно, чем больше φ_0 (угол размаха), тем больше период колебания маятника. Таким образом, математический маятник свойством изохронности не обладает. Если при малых размерах ограничиться в формуле (11.29) только двумя первыми членами, то, полагая $\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}$, получим приближённое выражение периода

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{{\varphi_0}^2}{16}\right). \qquad (11.30)$$

Таким образом, получено уравнение простого гармонического колебания, закон движения для малых колебаний, закон движения маятника через эллиптическую функцию, а также выражение для периода колебаний маятника.

11.2. Задача о двойном математическом маятнике

В лагранжевой механике для описания системы используются *обобщенные координаты* и *обобщенные скорости*. В нашем случае в качестве таких переменных можно взять углы отклонения маятников α_1, α_2 и их угловые скорости $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$. Используя указанные переменные, построим *лагранжиан* двойного маятника и запишем дифференциальные уравнения Лагранжа. Упрощенная модель двойного маятника показана на рисунке 2. Будем считать стержни невесомыми. Их длины равны l_1 и l_2. Массы точечных тел (они представлены шарами конечного радиуса) составляют m_1 и m_2. В точках подвеса (шарнирах) трение отсутствует.

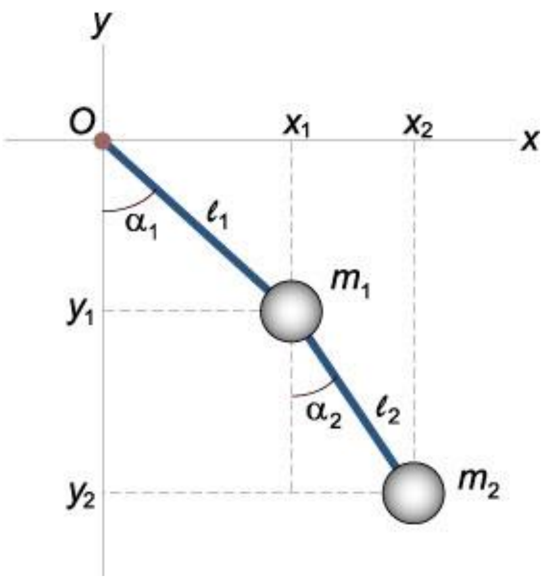


Рис. 2. Упрощенная модель двойного маятника

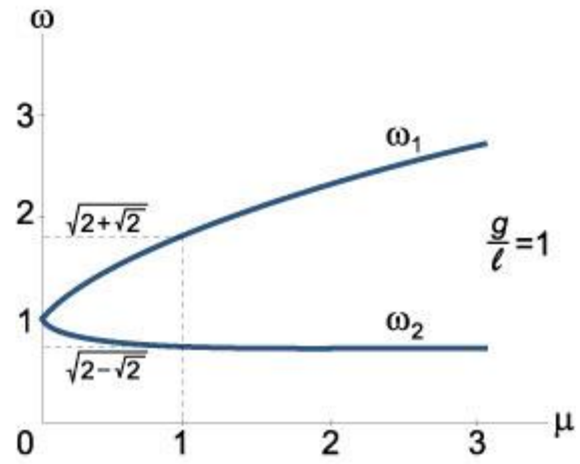


Рис. 3. Зависимость частот ω_1, ω_2 от параметра μ

Введем систему координат O*xy*, начало которой совпадает с точкой подвеса *O*. Координаты маятников определяются следующими соотношениями:

$$x_1 = l_1 \sin\alpha_1, \qquad x_2 = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2,$$

$$y_1 = -l_1 \cos\alpha_1, \quad y_2 = -l_1 \cos\alpha_1 - l_2 \cos\alpha_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергия маятников (соответственно *T* и *V*) выражаются формулами

$$\mathrm{T} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)}{2} + \frac{m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)}{2},$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2.$$

Тогда лагранжиан записывается в виде

$$\mathrm{L} = \mathrm{T}\text{-}\mathrm{V} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 - (\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2) = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2.$$

С учетом того, что

$$\dot{x}_1 = \mathrm{l}_1 \cos\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1, \quad \dot{x}_2 = \mathrm{l}_1 \cos\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 + \mathrm{l}_2 \cos\alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1, \quad \dot{y}_2 = l_1 \sin\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 + l_2 \dot{\sin}\,\alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2.$$

Следовательно,

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \frac{m_1}{2}\left(l_1^2\dot{\alpha}_1^2\cos^2\alpha_1 + l_1^2\dot{\alpha}_1^2\sin^2\alpha_1\right) = \frac{m_1}{2} l_1^2\dot{\alpha}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_2}{2}[(l_1\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 + l_1\dot{\alpha}_2\cos\alpha_2)^2 +$$

$$+(l_1\dot{\alpha}_1\sin\alpha_1 + l_2\dot{\alpha}_2\sin\alpha_2)^2] = \frac{m_2}{2}\Big[l_1^2\dot{\alpha}_1^2\cos^2\alpha_1 +$$

$$+l_2^2\dot{\alpha}_2^2\cos^2\alpha_2 + 2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + l_1^2\dot{\alpha}_1^2\sin^2\alpha_1 +$$

$$+l_2^2\dot{\alpha}_2^2\sin^2\alpha_2 + 2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\Big] = \frac{m_2}{2}\Big[l_1^2\dot{\alpha}_1^2 + l_2^2\dot{\alpha}_2^2 +$$

$$+2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\Big],$$

$V_1 = m_1\, g\, y_1 = -m_1\, g\, l_1 \cos\alpha_1,$

$V_2 = m_2\, g\, y_2 = -m_2\, g\, (l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2).$

В результате лагранжиан системы принимает такой вид:

$$L = T - V = T_1 + T_2 - (V_1 + V_2) =$$

$$= \frac{l_1^2\dot{\alpha}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\alpha}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) +$$

$$+m\, g\, l_1\cos\alpha_1 + m_2\, g\, l_2\cos\alpha_2\ ,$$

где $m = m_1 + m_2$.

Для данной задачи *уравнения Лагранжа* запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad i = 1{,}2.$$

Входящие в эти уравнения частные производные выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} = m\, l_1^2\dot{\alpha}_1 + m_2l_1l_2\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = -m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m\, g\, l_1\sin\alpha_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} = m_2l_2^2\dot{\alpha}_2 + m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 g l_2\sin\alpha_2.$$

Следовательно, первое уравнение Лагранжа записывается как

$$\frac{d}{dt}[m\, l_1^2\dot{\alpha_1} + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_2}\cos(\alpha_1-\alpha_2)] +$$
$$+m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m\, g\, l_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

$$\Rightarrow\ m\, l_1^2\ddot{\alpha_1} + m_2 l_1 l_2[\ddot{\alpha_2}\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cdot$$
$$\cdot(\dot{\alpha_1}-\dot{\alpha_2})]+m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+(m_1+m_2) g l_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

$$\Rightarrow\ m\, l_1^2\ddot{\alpha_1} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_2}\cos(\alpha_1-\alpha_2) -$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m\, g l_1 \sin\alpha_1 = 0\ \Rightarrow$$

$$m\, l_1^2\ddot{\alpha_1} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_2}\cos(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+mgl_1 \sin\alpha_1 = 0$$

Сокращая на $l_1 \neq 0$, получаем:

$$ml_1\ddot{\alpha_1} + m_2 l_2 \ddot{\alpha_2}\cos(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 l_2 \dot{\alpha}_2^2\ \sin(\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+\ m\mathrm{g}\ sin\,\alpha_1 = 0.$$

Аналогично выведем второе дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}[m_2 l_2^2\dot{\alpha_2} + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\cos(\alpha_1-\alpha_2)] -$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 g l_2 \sin\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow\ m_2 l_2^2\ddot{\alpha_2} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_1}\cos(\alpha_1-\alpha_2) -$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cdot(\dot{\alpha_1}-\dot{\alpha_2}) -$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 g l_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

$$\Rightarrow\ m_2 l_2^2\ddot{\alpha_2} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha_1}\cos(\alpha_1-\alpha_2) -$$
$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\sin(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2}\sin(\alpha_1-\alpha_2) -$$

$$-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1-\alpha_2)+m_2 g l_2 \sin\alpha_2=0, \Rightarrow$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2+m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1-\alpha_2)-m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2)+$$
$$+m_2 g l_2 \sin\alpha_2=0.$$

После сокращения на $m_2 l_2 \neq 0$ уравнение принимает такой вид:

$$l_2 \ddot{\alpha}_2+l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1-\alpha_2)-l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2)+\mathrm{g} \sin\alpha_2=0.$$

Таким образом, нелинейная система двух дифференциальных уравнений Лагранжа записывается как

$$\begin{cases} m l_1 \ddot{\alpha}_1+m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1-\alpha_2)+m_2 l_2 \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2)++m g \sin\alpha_1=0, \\ l_2 \ddot{\alpha}_2+l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1-\alpha_2)-l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2)+g \sin\alpha_2=0. \end{cases} \qquad (11.31)$$

Если считать углы $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ малыми, то колебания маятников вблизи нулевого положения равновесия можно описать линейной системой уравнений. Чтобы получить такую систему, вернемся назад к исходному лагранжиану системы:

$$\mathrm{L=T-V}=m l_1^2 \dot{\alpha}_1^2/2+m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2/2+m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1-\alpha_2)+$$
$$+m \mathrm{g} l_1 \cos\alpha_1+m_2 \mathrm{g}\, l_2 \cos\alpha_2.$$

Запишем этот лагранжиан в более простом виде. Разложим косинусы, входящие в него, в ряд Маклорена и сохраним лишь линейные и квадратичные члены:

$$\cos\alpha_1 \approx 1-\frac{\alpha_1^2}{2}, \cos\alpha_2 \approx$$
$$\approx 1-\frac{\alpha_2^2}{2}, \cos(\alpha_1-\alpha_2) \approx 1-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{2} \approx 1.$$

С учетом малости величин – произведения $\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2$и квадратов величин углов α_1, α_2 в разложении косинусов, можно ограничиться линейным слагаемыми. Подставляя это в исходный лагранжиан и учитывая, что потенциальная энергия определяется с точностью до константы, получим лагранжиан двойного маятника в виде:

$$L=T-V=\frac{ml_1^2\dot{\alpha}_1^2}{2}+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\alpha}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2-$$
$$-mgl_1\alpha_1^2/2+\frac{m_2}{2}gl_2\alpha_2^2.$$

Выведем дифференциальные уравнения Лагранжа для данного лагранжиана, которые записываются в таком виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1}-\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}=0, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2}-\frac{\partial L}{\partial \alpha_2}=0.$$

После нахождения частных производных и несложных преобразований получаем систему двух дифференциальных уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(m\,l_1^2\dot{\alpha}_1+m_2l_1l_2\dot{\alpha}_2)+m\,gl_1\alpha_1=0,\\ \frac{d}{dt}(m_2l_2^2\dot{\alpha}_1+m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1)+m_2gl_2\alpha_2=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}m\,l_1^2\ddot{\alpha}_2+m_2l_1l_2\ddot{\alpha}_2+m\,gl_1\alpha_1=0,\\ m_2l_1l_2\ddot{\alpha}_1+m_2l_2^2\ddot{\alpha}_2+m_2gl_2\alpha_2=0.\end{cases}$$

Данную систему уравнений можно записать в компактной матричной форме. Введем матрицы

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}m & m_2l_1l_2\\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}m\,l_1^2gl_1 & 0\\ 0 & m_2gl_2\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений представляется в виде

$$M\ddot{\alpha}+K\alpha=0.$$

В случае одного тела такое уравнение описывает свободные незатухающие колебания с определенной частотой. В случае двойного маятника решение будет содержать колебания с двумя характерными частотами, которые называются *нормальными модами*. Нормальные моды представляют собой действительную часть комплекснозначной векторной функции

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix}H_1\\ H_2\end{pmatrix} exp(i\omega t)\right],$$

где H_1, H_2 − собственные векторы, ω − действительная частота. Значения нормальных частот $\omega_{1,\,2}$ определяются из решения характеристического уравнения

$$\det(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})=0.$$

Выведем общие формулы для циклических частот $\omega_{1,\,2}$ в случае произвольных масс m_1, m_2 и длин l_1, l_2:

$$\begin{vmatrix} mgl_1-\omega^2 ml_1^2 & -\omega^2 m_2 l_1 l_2\\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2 g l_2-\omega^2 m_2 l_2^2\end{vmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m\,(gl_1-\omega^2 l_1^2) & -\omega^2 m_2 l_1 l_2\\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2(gl_2-\omega^2 l_2^2)\end{vmatrix}=0,$$

$$\Rightarrow m_2 m\,(gl_1-\omega^2 l_1^2)\,(gl_1-\omega^2 l_2^2)-\omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0,$$

$$\Rightarrow m_2 m(gl_1 l_2-\omega^2 g l_1 l_2^2+\omega^4 l_1^2 l_2^2)-\omega^4 m_2^2 l_1^2 l_2^2 = 0,$$

$$\Rightarrow m_2 l_1 l_2[m(g^2-\omega^2 g l_1-\omega^2 g l_2+\omega^4 l_1 l_2)-\omega^4 m_2 l_1 l_2] = 0,$$

$$\Rightarrow mg^2-\omega^2 m(l_1+l_2)g+\omega^4 m l_1 l_2-\omega^4 m_2 l_1 l_2 = 0,$$

$$\Rightarrow mg^2-\omega^2 m(l_1+l_2)g+\omega^4 m_1 l_1 l_2 = 0.$$

Мы получили биквадратное уравнение для частот ω. Вычислим дискриминант:

$$D=m^2(l_1+l_2)^2g^2-4m_1 m g^2 l_1 l_2=g^2 m[m(l_1+l_2)^2-4m_1 l_1 l_2].$$

Таким образом, квадраты нормальных частот $\omega_{1,\,2}$ равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{gm(l_1+l_2)\pm g\sqrt{m[m(l_1+l_2)^2-4m_1 l_1 l_2]}}{2m_1 l_1 l_2}$$

или

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2}\left\{m(l_1+l_2) \pm \sqrt{[m(l_1+l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]}\right\}.$$

Данное выражение является несколько громоздким. Поэтому далее рассмотрим случай, когда длины стержней обоих маятников равны: $l_1 = l_2 = l$. Тогда нормальные частоты будут определяться более компактной формулой

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l^2}[2\mathrm{lm} \pm \sqrt{m\,(4l^2 m - 4m_1 l^2)}] = \frac{g}{m_1 l}\,(m \pm \sqrt{mm_2}) =$$
$$= \frac{g}{l}[1+\mu \pm \sqrt{(1+\mu)\mu}], \text{ где } \mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

Как видно, собственные частоты $\omega_{1,\,2}$ зависят лишь от отношения масс $\mu = m_2/m_1$. Зависимости частот ω_1, ω_2 от параметра μ (при условии $g/l = 1$) показаны выше на рисунке 3. В частности, при равных массах $m_1 = m_2 = m$, т.е. при $\mu = 1$, собственные частоты равны

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (1) записывается в виде

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{pmatrix} = \mathrm{Re}[\begin{pmatrix}H_1\\ H_2\end{pmatrix}\exp(\mathrm{i}\omega t)]=$$
$$=C_1\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}}\end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}}\end{pmatrix},$$

где постоянные C_1, C_2, φ_1, φ_2 зависят от начальных положений и скоростей маятников.

Рассмотрим характер малых колебаний для некоторого конкретного набора начальных данных. Пусть, например, координаты и скорости маятников в начальный момент имеют такие значения:

$$\alpha_1(t=0), \alpha_2(t=0) = \frac{\pi}{6}, \dot{\alpha_1}(t=0) = 0, \dot{\alpha_2}(t=0) = 0.$$

В этом случае начальные фазы равны нулю: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Определим постоянные C_1 и C_2:

$$\begin{cases} \alpha_1(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ \alpha_2(0) = -C_1\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} + C_2\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow C_1 = -C_2, \Rightarrow 2C_2\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}, \ \Rightarrow C_1 = -\frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}.$$

Тогда закон колебаний маятников выражается формулами

$$\alpha_1(t) = -\frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\cos(\omega_1 t) + \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\cos(\omega_2 t),$$

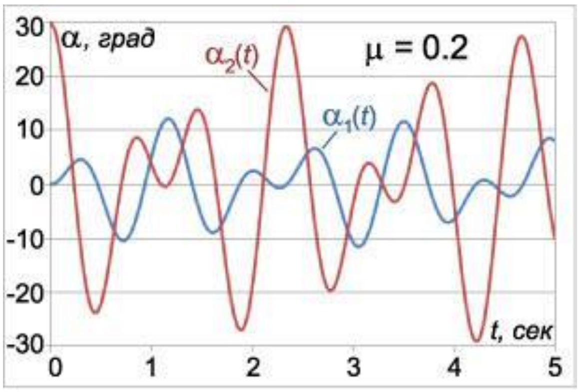
$$\alpha_2(t) = \frac{\pi}{12}\cos(\omega_1 t) + \frac{\pi}{12}\cos(\omega_2 t),$$

где циклические частоты ω_1, ω_2 определяются соотношением

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)\mu}}\,, \ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1+\mu+\sqrt{(1+\mu)\mu}}\,.$$

Здесь углы $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ выражаются в радианах, а время t в секундах. На рисунках 4-6 приведены графики малых колебаний маятников для трех значений μ: $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 5$, при $l = l_1 = l_2 = 0.25$ *м*, $g = 9.8$ *м/с*^{2}.

Углы отклонения маятников для удобства приведены в градусах. Из графиков видно, что в системе происходят *биения*, при которых энергия циклически переходит от одного маятника к другому. Когда один маятник почти останавливается, другой раскачивается с максимальной амплитудой. Через некоторое время маятники "меняются ролями" и так далее. Колебания с большей частотой ω_1 модулируются более низкочастотными колебаниями с частотой ω_2. Это особенно хорошо заметно на рисунке 6 при большом значении μ ($\mu_3 = 5$), когда разница между частотами ω_1 и ω_2 велика.



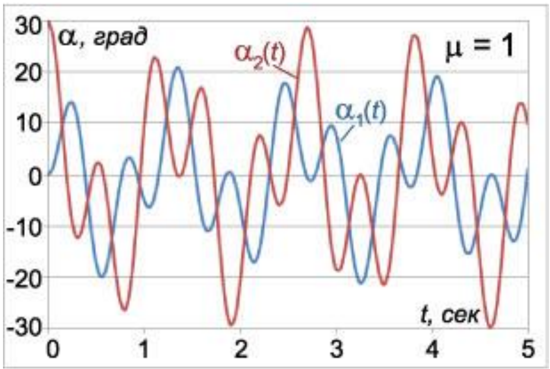


Рис. 4. Зависимость углов α_1, α_2 от времени t при $\mu_1 = 0.2$

Рис. 5. Зависимость углов α_1, α_2 от времени t при $\mu_2 = 1$

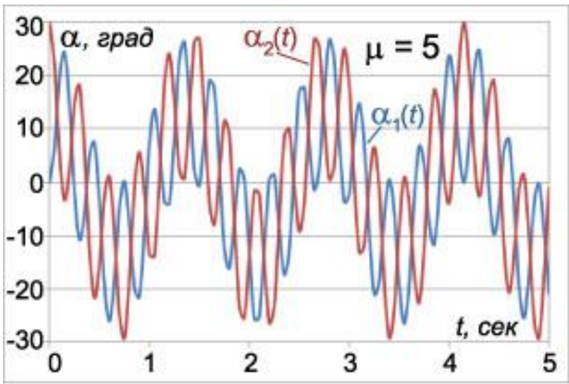


Рис. 6. Зависимость углов α_1, α_2 от времени t при $\mu = 5$

Итак, малые колебания двойного маятника имеют периодический характер и описываются суммой двух гармоник с частотами ω_1, ω_2, зависящими от параметров системы. Характерным свойством малых колебаний двойного маятника является *эффект биений*.

Наиболее распространенным методом численного решения дифференциальных уравнений является *метод Рунге-Кутты*. Различные вариации этого метода используются в большинстве математических пакетов (MatLab, Maple, Mathematica, Mathcad), как правило, с автоматическим контролем точности и адаптивным временным шагом.

Для численного моделирования движения двойного маятника воспользуемся вычислительными средствами универсальной компьютерной системы «Mathematica». Предварительно несколько упростим дифференциальные уравнения

(11.31), полагая, что длины маятников одинаковы: $l_1 = l_2 = l$. Введем также параметр μ, равный отношению массы второго маятника к массе первого: $\mu = m_2/m_1$. Тогда система уравнений (11.31) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \mu_1\ddot{\alpha}_1 + \mu\ddot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \mu\dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \mu_1\, g/l\sin\alpha_1 = 0, \\ \quad \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + g/l\sin\alpha_2 = 0\,. \end{cases}$$

с начальными условиями: $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ и где введено обозначение $\mu_1 = 1 + 1/\mu$.

Описанная модель реализована для различных значений параметров α_0 и μ в виде анимации, фрагменты которой приведенной ниже. Для упрощения начальные углы отклонения маятников приняты равными: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$. Данное приложение наглядно демонстрирует хаотическую динамику двойного маятника при различных значениях параметров μ и α_0. Интересно, что в некоторых режимах в системе возникают устойчивые траектории, как, например, на рисунке 7, или компактные области притяжения, как на рисунке 8.

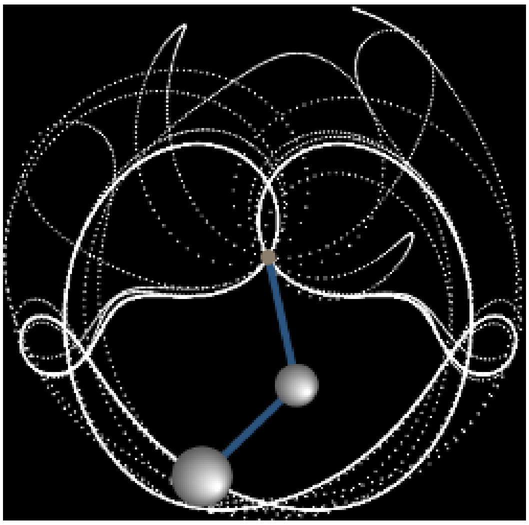


Рис. 7. Устойчивые траектории двойного маятника при $\mu = 2.75$, $\alpha = 161°$

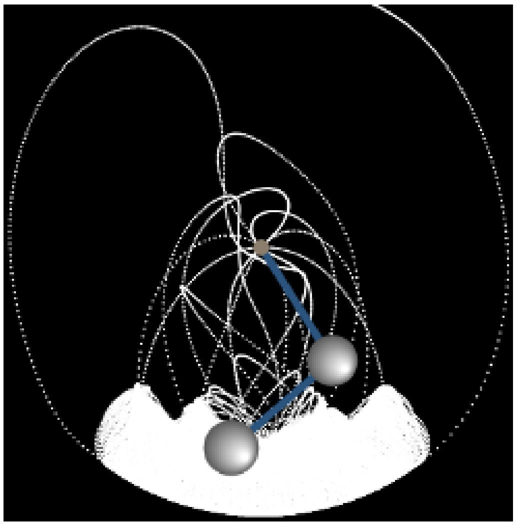


Рис. 8. Компактные области притяжения траекторий двойного маятника при $\mu = 1.28$, $\alpha = 158°$

Заключение

Моделирование систем и процессов, исследование различных явлений на моделях стало одним из основных методов изучения сложных технических систем. Существующий аппарат современной математики, мощные средства вычислительной техники, развитые компьютерные технологии обработки информации позволяют успешно решать любые практические задачи, стоящие перед обществом.

Тема моделирования и разработки математических моделей процессов, явлений, объектов, систем весьма многогранна. В данном учебном пособии рассмотрены лишь некоторые основные формы математических моделей и пути разработки этих моделей. Изучение приведенных здесь материалов можно рассматривать как первый шаг в область современного математического моделирования технических систем.

Контрольные вопросы к разделам

Раздел 1.

1.1 Моделирование как метод исследования.
1.2 Правила моделирования.
1.3 Этапы моделирования.
1.4 Понятие модели.
1.5 Классификация моделей.
1.6 Классификация математических моделей.
1.7 Свойства математических моделей.
1.8 Требования к математическому моделированию.
1.9 Этапы построения и применения математических моделей.

Раздел 2.

2.1 Понятие системы.
2.2 Принципы системного подхода.
2.3 Классификация систем.

Раздел 3.

3.1 Техника.
3.2 Технический объект.
3.3 Жизненный цикл технического объекта.
3.4 Техническая система.
3.5 Технология.
3.6 Взаимосвязь техники и технологии

Раздел 4.

4.1 Методология проектирования.
4.2 Техника и технические объекты с позиций системного подхода.
4.3 Структура и параметры объектов проектирования.
4.4 Стадии, аспекты и режимы процесса проектирования.
4.5 Постановка задач проектирования.
4.6 Особенности технологии автоматизированного проектирования технического объекта.

Раздел 5.

5.1 Кинематика:
5.2 Динамика материальной точки.

5.3 Две основные задачи динамики материальной точки.
5.4 Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Раздел 6.

6.1 Связи.
6.2 Действительные возможные перемещения.
6.3 Число степеней свободы, идеальные связи.
6.4 Общие теоремы динамики системы материальных точек.
6.5 Теорема о движении центра масс механической системы.
6.6 Случай замкнутой механической системы.

Раздел 7.

7.1 Примеры несвободных систем.
7.2 Принцип виртуальных перемещений.
7.3 Применение принципа виртуальных перемещений.
7.4 Принцип Даламбера.
7.5 Принцип Даламбера - Лагранжа.
7.6 Общее уравнение механики.
7.7 Уравнения Лагранжа в независимых координатах.

Раздел 8.

8.1 Размерные и безразмерные величины.
8.2 Основные и производные единицы измерения.
8.3 О формуле размерности.
8.4 О втором законе Ньютона.
8.5 Структура функциональных связей между физическими величинами.
8.6 Параметры, определяющие класс явлений.

Раздел 9.

9.1 Метод обобщенных переменных.
9.2 Теоремы подобия.

Раздел 10.

10.1 Особенности экспериментальных факторных моделей.
10.2 Принципы планирования эксперимента.
10.3 План эксперимента.
10.4 Регрессионный анализ.

Список использованной литературы

1. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М.: Металлургия, 1969. – 157 с.

2. Теория подобия и размерностей. Моделирование. Алабушев Л.М. [и др.] М.: Высшая школа, 1968. – 208 с.

3. Алиев Т.И. Основы проектирования систем. – СПб: Университет ИТМО, 2015. –120 с.

4. Андрейченко, К. П. Математическое моделирование динамических систем: учебное пособие / К. П. Андрейченко, Д. К. Андрейченко. — Саратов: Изд-во Саратовского ГТУ, 2000. — 140 с.

5. Аполов О.Г. Теория систем и системного анализа. Курс лекций. Уфа, 2012, 274 с.

6. Асанов А.З. Введение в математическое моделирование динамических систем. Казань: Изд. Казанского гос. университета. 2007. 205 с.

7. Афанасьев Ю.Д. Теория подобия в инженерных расчетах. М: Высшая школа, 1967. – 235 с.

8. Аюпов В.В. Исследование маневренных свойств автопоездов на основе системного подхода: монография. Пермь: ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2012. – 96 с.

9. Белов П.Г. Системный анализ и моделирование процессов в техносфере. М.: Издательский центр «Академия», 2003. 512 с.

10. Берталанфи Л. фон. Общая теория систем – обзор проблем и результатов // Системные исследования: Ежегодник. – М.: Наука, 1969. С. 30-54.

11. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. / Пер. с англ. В. Я. Алтаева. – М.: Наука, 1963. – 276с.

12. Боголюбова, М. Н. Системный анализ и математическое моделирование в машиностроении: учебное пособие / М. Н. Боголюбова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 123 с.

13. Болдин А.П. Основы научных исследований. М.: Издательский центр «Академия», 2012. — 336 с.

14. Боровой А., Херувимов А. Колебания и маятники. Ж. Квант. 1981. № 8. – С. 30-37

15. Брейтман В.М. Подобие физических явлений с геометрической точки зрения // НДВШЭнергетика,1958. № 1. С. 32-45.

16. Бугаенко Г.А., Маланин В.В., Яковлев В.И. Основы классической механики. М.: Высшая школа. 1999. – 366 с.

17. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М.: Наука, 1978. –399 с.

18. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть II. М.: Наука. 1969. – 332 с.

19. Валге А.М. Обработка экспериментальных данных и моделирование динамических систем при проведении исследований по механизации сельскохозяйственного производства. СПб.: СЗНИИМЭСХ, 2002. – 176 с.

20. Введение в математическое моделирование: учебное пособие для вузов / В. Н. Ашихмин [и др.]; под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2005. – 440 с.

21. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. М.; Высшая школа, 1976. – 479 с.

22. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов. Издательство: "Лань", 2013. – 192 с.

23. ГОСТ 8.417 Международная система единиц СИ.

24. Гуд Г.Х., Макол Р. З. Системотехника. Введение в проектирование больших систем – М.: Сов. радио. 1962. – 383 с.

25. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Иностранная литература, 1948, –345 с.

26. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973. –296 с.

27. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. – М.: «Диалектика», 2007. – 912 с.

28. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. Учебник. М.: - МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010, 496 с.

29. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды математического ин-та им. Стеклова. Мл., 1949. С.104-144

30. Кирпичев М.В. Теория подобия. М.: АН СССР, 1953. -213 с.

31. Кузьмин В.В. Математическое моделирование технологических процессов сборки, механической обработки изделий в машиностроении: учеб. пособие / В.В. Кузьмин. – М.: Высш. шк., 2008.– 279 с.

32. Лебедев А.Л. Основы теории подобия и моделирования. Л.: ЛЭТИ,1971. – 245 с.

33. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы / Пер. с англ. под ред. С. В. Емельянова. М.: Мир, 1978. – 312 с.

34. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.

35. Павлова М.И. К вопросу проектирования // Научно- исследовательские труды МТИ. 1954. Т. 12. – 147 с.

36. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит. 2005, 320 с.

37. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

38. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем: учебное пособие. Изд.: Высшая школа. 2001. – 343 с.

39. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В. П. Тарасик. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.

40. Уорнер М. Классики менеджмента. СПб.: Питер, 2001. -1168 с.

41. Фёрстер Э., Рёнц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

42. Флейшман Б.С. Основы системологии // Радио и Связь. М.: Москва, 1982. 368 с.

43. Хартман Г. Современный факторный анализ М.: Статистика, 1972. 486 с.

44. Хикс Ч.Р. Основные принципы планирования эксперимента. М.: Мир, 1967. – 406 с.

45. Холл А.Д. Опыт методологии для системотехники. М.: «Сов. радио», 1975. – 448 с.

46. Черняк Ю.И. Системный анализ в управлении экономикой. М.: Экономика, 1975. – 193 с.

47. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М.: Иностранная литература, 1959. 432 с.

48. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. М.: Сов. радио, 1980. – 144 с.