

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
**КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**А.М. Леушин, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Н. Прошин**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**  
**МЕХАНИКА**  
**(ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС)**  
**ЗАДАЧНИК ДЛЯ ФИЗИКОВ**

**Казань – 2015**

УДК 531(07)  
ББК 22.21  
Т11

*Принято на заседании кафедры теоретической физики  
Протокол № 4 от 21 октября 2015 года*

**Рецензент –**

профессор, заведующий кафедрой теоретической физики  
Казанского государственного педагогического университета **Р.М. Юльметьев**

**Леушин А.М.**

**Т11 Теоретическая физика. Механика (практический курс). Задачник для физиков / А.М. Леушин, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Н. Прошин – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 250 с. Издание третье, исправленное и дополненное.**

В пособии предлагаются для решения задачи по всем разделам читаемого в Институте физики Казанского университета курса теоретической механики. Общее количество задач около 600. Для удобства использования пособия в каждом его разделе приводятся основные теоретические положения и формулы, а в конце имеются приложения, содержащие минимум сведений по математике, необходимых для решения задач по теоретической механике. В каждом разделе даны подробные решения нескольких типичных задач, а сами задачи расположены в порядке их усложнения: сначала представлены легкие задачи, затем – задачи средней трудности и далее приводятся задачи повышенной трудности.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов физических специальностей классических университетов.

© Леушин А.М., Нигматуллин Р.Р.,  
Прошин Ю.Н., 2015

© Казанский университет, 2015

## Предисловие к первому изданию

Среди дисциплин, изучаемых в университете в курсе теоретической физики, классическая механика занимает одно из ведущих мест, поскольку основные ее положения необходимы для дальнейшего усвоения других дисциплин теоретической физики. Именно в классической механике студенты получают возможность, не выходя за пределы классической физики, знакомиться со многими понятиями и математическими методами и приемами, которые в дальнейшем используются при изучении электродинамики, термодинамики и статистической физики и квантовой механики.

Для успешного усвоения теоретической механики, кроме изучения теории, необходимы навыки решения практических задач. Практика преподавания показывает, что курс классической механики является одним из самых сложных, и что способы решения задач студентами усваиваются значительно труднее, чем теория предмета. Эти трудности состоят в неумении облекать конкретные физические задачи в абстрактную математическую форму, в отсутствии навыков использования законов изменения и сохранения физических величин и в неспособности интегрировать получающиеся системы дифференциальных уравнений движения.

К сожалению, делу не способствует наличие значительного числа задачников с большим количеством задач, а также существование руководств, в которых вместе с приведенными задачами подробно разбираются и их решения. При индивидуальной работе с использованием задачников первого типа студента подавляет число задач: все их не перерешать, а какие достаточно решить, чтобы освоить курс, самостоятельно выбрать сложно. При использовании же задачников второго типа студент, не обладающий достаточной волей и самолюбием, наверняка не устоит перед соблазном посмотреть приведенное решение и не будет пытаться решить задачу сам.

Для того чтобы избавить студентов от этих дополнительных проблем, в 1988 году было издано пособие [1], в котором был собран минимум за-

дач, решение которых, по нашему мнению, способствовало бы усвоению изучаемого теоретического материала. Решения задач отсутствовали, и только некоторые из задач были снабжены ответами. Пособие оказалось достаточно удобным как для использования на семинарских занятиях, так и при самостоятельной работе, и продолжает использоваться преподавателями и студентами до сих пор. Однако, в процессе эксплуатации в нем, помимо некоторых неточностей и опечаток, обнаружился два недостатка. Во-первых, в некоторых разделах оказалось недостаточное число разных по уровню и по способам решения задач. Их явно не хватало для полноценного приобретения практического навыка, поэтому для решения в аудитории приходилось привлекать дополнительные задачи, не говоря уж о возможности варьирования курса и самостоятельном изучении. Во-вторых, при работе с пособием испытывалась потребность иметь в нем основные положения и формулы, необходимые для решения задач. При подготовке предлагаемого пособия мы постарались учесть это и избавить новое издание от указанных недостатков. Необходимость в издании такого пособия назрела уже давно, поскольку какие-либо новые задачки и пособия по решению задач по теоретической механике практически не издавались уже много лет (даже при выходе подобной книги ее современный тираж не способен удовлетворить потребность иметь такой задачник на столе у *каждого* студента), задачки прошлых лет не переиздаются и, мало помалу, становятся библиографическими редкостями, недоступными большинству студентов.

Пособие состоит из 10 разделов. Структура предыдущего пособия [1] в нем в основном сохранена, в него также вошли большинство задач предыдущего пособия с исправлением ошибок и опечаток, но общее количество задач значительно увеличено: с 222 до 587. Новые задачи большей частью взяты из книг [2-18], приведенных в Библиографии в конце пособия, есть и оригинальные задачи. Значительно расширены разделы по динамике материальной точки, по проблеме двух тел и теории рассеяния частиц, по уравнениям Лагранжа, по теории твердого тела, по условиям равновесия систем, по малым колебаниям механических систем, по уравнениям Гамильтона, по каноническим преобразованиям. В отличие от преды-

дущего пособия, мы ликвидировали в нем раздел "Общие законы системы материальных точек". Часть задач этого раздела, решаемых с использованием законов сохранения, мы переместили в раздел 3, объединив их с задачами о движении частицы в центральном поле. Другая часть задач, в которых речь идет о нахождении центра масс системы, объединена в разделе 6 с задачами о движении твердого тела. Из раздела, посвященного уравнениям Лагранжа, исключены все задачи по расчету электрических цепей, поскольку при решении таких задач лагранжев формализм не получил широкого распространения. Кроме того, учитывая опыт многолетнего преподавания, нам показалось удобным в новом пособии добавить приложение, в котором бы содержался минимум сведений по математике, необходимых для решения задач по теоретической механике. В него мы включили сведения о векторах и векторном анализе, о матрицах, о дифференцировании и интегрировании элементарных функций, об основных дифференциальных уравнениях и методах их решений.

Сами разделы сейчас выглядят тоже по-другому. Каждый состоит из пяти подразделов: в первом из них мы приводим минимальные теоретические сведения, необходимые для решения задач данного раздела; во втором подробно показываем решения нескольких (от трех до шести) типичных задач; в следующих трех подразделах приводятся сами предлагаемые для решения задачи, причем сначала мы даем простые задачи, называемые обязательными задачами, решение которых необходимо для базового овладения минимальными навыками и основными приемами решения задач по теоретической механике. Далее следуют задачи средней трудности и в последнем подразделе предлагаются задачи повышенной трудности. Конечно, это деление задач по разной степени трудности несколько условно и носит достаточно субъективный характер. Сразу после формулировки многих задач, особенно обязательных, в квадратных скобках приведены ответы. В пособии имеется большое количество рисунков, которые поясняют постановку задачи, они, как правило, приводятся рядом с текстом конкретной задачи.

В пособии используются стандартные обозначения для векторов, они выделяются **жирным шрифтом** (например,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{W}$  или  $\mathbf{\Omega}$ ). Скалярные вели-

чины, как правило, выделены *курсивом* (например,  $r$ ,  $W$  или  $s$ ). Полные производные по времени  $t$  часто обозначаются точками над переменной (например,  $\dot{r}$ ,  $\dot{x}$  или  $\ddot{s}$ ).

Мы отдаем себе отчет в том, что и в этом пособии могут остаться незамеченные нами неточности, опечатки или ошибки и будем признательны всем, кто обратит на них наше внимание.

Пособие подготовлено на кафедре теоретической физики Казанского государственного университета. Разделы 1, 2, 3 и математическое приложение написаны проф. Р.Р. Нигматуллиным, разделы 4, 5, 6 и 7 – доц. А.М. Леушиным, разделы 8, 9 и 10 написаны проф. Ю.Н. Прошиным, им же проведена компьютерная верстка всего пособия.

Авторы благодарны за частичную поддержку Civil Research and Development Foundation (CRDF) (проект Basic Research and High Education (BRHE) REC-007) и SNSF (проект 7 IP 62595 в рамках SCOPES).

## **Предисловие ко второму изданию**

Во втором исправленном издании было изменено название пособия, чтобы привести его в соответствие с новым Государственным образовательным стандартом 2000 года, согласно которому в курсе теоретической физики нет раздела "Теоретическая механика". Он разделен на два: "Механика" и "Основы механики сплошных сред". Наше пособие содержит материал только первого раздела "Теоретическая физика. Механика".

Мы признательны сотрудникам кафедры теоретической физики (особенно доценту Ларионову А.Л.) и студентам физического факультета Казанского университета, указавшим на неточности и опечатки, допущенные при подготовке первого издания.

Второе издание выпущено при поддержке профессора Кочелаева Б.И. и Swiss National Scientific Foundation (SNSF) в рамках соглашения № 7 IP 62595 по программе SCOPES.

А.М. Леушин

Июль 2003 г.

## **Предисловие к третьему изданию**

В третьем издании исправлены обнаруженные опечатки и неточности, изменены формулировки ряда задач, частично изменения также коснулись текстов примеров решений некоторых задач и Приложения 1, добавлено Приложение 2. Пособие заново подверглось форматированию.

Авторы признательны всем сотрудникам кафедры теоретической физики и студентам Института физики Казанского университета, указавшим на неточности и опечатки, допущенные при подготовке первого и второго изданий. Также авторы благодарны А.С. Кутузову, написавшему Приложение 2 для данного пособия.

Ю.Н. Прошин

Сентябрь 2015 г.

## Раздел 1. Кинематика материальной точки

### Минимальные теоретические сведения по кинематике

Приведем основные понятия и формулы кинематики, основываясь на порядке производной ( $n_d = 0, 1, 2$ ), определяющей кинематическую величину.

Величины, соответствующие  $n_d = 0$ .

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , который в каждый момент времени направлен из начала некоторой произвольной системы координат на данную материальную точку. Зависимость от времени радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  (или координат) определяет закон движения материальной точки. Траектория материальной точки – это геометрическое место точек концов радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$ .

**Декартова система координат (ДСК):**

Переменные  $x, y, z$ .

Пределы изменения переменных:  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty; -\infty < z < \infty$ .

Закон движения в ДСК определяется в трехмерном случае тремя скалярными функциями (координатами)  $x(t), y(t), z(t)$ , зависящими от времени  $t$ , и выражается равенством

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z. \quad (1.1)$$

*Примеры:*

- *уравнение пространственной эллиптической спирали*

$$\mathbf{r}(t) = A\sin(\omega t)\mathbf{e}_x + B\cos(\omega t)\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z.$$

- *плоское движение тела, брошенного с высоты  $H$  с начальной скоростью  $v_0$  и под начальным углом  $\theta$  к горизонту,*

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{e}_x + \left[ H + (v_0 \sin \theta)t - gt^2 / 2 \right]\mathbf{e}_y.$$

Закон движения тела может быть задан также в *цилиндрической и сферической* системах координат (см. Приложение 2).



**Цилиндрическая система координат (ЦСК).**

Переменные  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

Связь переменных ДСК с переменными ЦСК:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ .

Пределы изменения переменных:  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Связь между ортами:

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z.$$

В отличие от ортов ДСК орты ЦСК  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  зависят от времени  $t$ , и их производные по времени не равны нулю.

Радиус-вектор  $\mathbf{r}(t) = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$ .

**Сферическая система координат (ССК).**

Переменные  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Связь переменных ДСК с переменными ССК:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Пределы изменения переменных:  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Связь между ортами:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{e}_y \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta,$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_x \cos \varphi \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \varphi \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi.$$

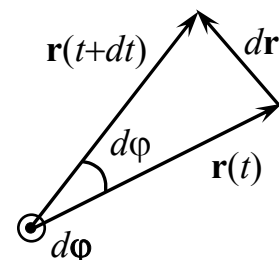
Все орты ССК зависят от времени.

Радиус-вектор  $\mathbf{r}(t) = r \mathbf{e}_r$ .

Перемещение материальной точки есть вектор между двумя точками траектории, т.е.

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1). \quad (1.2a)$$

Вектор бесконечно малого поворота  $d\varphi$  имеет длину, равную бесконечно малому углу поворота радиус-вектора материальной точки, и направление, совпадающее с направлением перемещения правого винта, вращаемого вместе с радиус-вектором. Например, на приведенном рисунке поворот  $\mathbf{r}(t)$  происходит в плоскости рисунка против часовой стрелки, поэтому вектор  $d\varphi$  направлен на нас перпендикулярно плоскости, в которой происходит поворот. Вектор элементарного пе-



ремещения  $d\mathbf{r}$  при повороте (когда длина вектора  $\mathbf{r}$  не меняется) и вектор  $d\varphi$  связаны соотношением

$$d\mathbf{r} = [d\varphi \mathbf{r}]. \quad (1.2б)$$

Путь, пройденный материальной точкой к моменту времени  $t$ , определяется как длина участка траектории и выражается через интеграл от модуля скорости  $v$

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Следует особо отметить, что в этой формуле и ниже величина пути  $s(t)$  является функцией верхнего предела интегрирования  $t$ . Переменная внутри интеграла может обозначаться, строго говоря, произвольной буквой.

Величины, соответствующие  $n_d = 1$ .

Мгновенная линейная скорость материальной точки в момент времени  $t$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.4)$$

определяется выражениями

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (\text{ДСК}), \quad (1.5а)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (\text{ЦСК}), \quad (1.5б)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \quad (\text{ССК}), \quad (1.5в)$$

соответственно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Напомним, что точкой сверху, для краткости, обозначается полная производная по времени, т.е.  $\dot{\rho} = d\rho/dt$  и т.д.

Средняя скорость за время  $\tau$  от начала движения определяется выражением

$$\langle \mathbf{v}(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{v}(t) dt = \frac{\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}(0)}{\tau}, \quad (1.6)$$

а средняя величина модуля скорости за этот же интервал времени  $\tau$  –

$$v(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v(t) dt = \frac{s(\tau)}{\tau}. \quad (1.7)$$

При выводе последнего выражения использовалась формула для модуля скорости, которая получается из (1.3) дифференцированием по времени,

$$\frac{ds}{dt} = v(t). \quad (1.8)$$

Секторная скорость определяется соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \mathbf{v}]. \quad (1.9)$$

Последнее выражение используется, в основном, при описании движения материальной точки в поле центральных сил.

Вектор угловой скорости определяется как отношение вектора бесконечно малого поворота к промежутку времени, за который этот поворот произошел:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}. \quad (1.10)$$

Связь угловой скорости с линейной скоростью при вращении (когда длина вектора  $\mathbf{r}$  не меняется) дается выражением

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (1.11)$$

Величины, соответствующие  $n_d = 2$ .

Мгновенное линейное ускорение материальной точки

$$\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.12)$$

можно записать в виде:

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (\text{ДСК}). \quad (1.13a)$$

$$\mathbf{w}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (\text{ЦСК}). \quad (1.13b)$$

В самом общем случае, для произвольной ортогональной криволинейной системы координат, задаваемой тремя произвольными координатами  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), справедливо следующее выражение (формула (П2.40) Приложения 2)

$$w_i = \frac{1}{2h_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q_i} \right). \quad (1.14)$$

Здесь  $h_i = |\partial \mathbf{r} / \partial q_i|$  – набор коэффициентов Ламе,  $v^2 = h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_2^2 \dot{q}_2^2 + h_3^2 \dot{q}_3^2$ .

*Примечание:* Используя эту формулу и принимая во внимание выражения для коэффициентов Ламе в ССК:  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\varphi = r \sin \theta$ , получите выражения для компонент ускорения в ССК

$$\left[ \mathbf{w}(t) = \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta + \right. \\ \left. + \left( r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\varphi \right],$$

проверьте справедливость выражения в ЦСК (1.13б).

Раскрывая выражение для секторной скорости в ЦСК, можно установить следующую связь

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \quad \text{и} \quad w_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma_z}{dt}. \quad (1.15)$$

Вектор углового ускорения определяется как производная по времени от вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (1.16)$$

Связь между линейным ускорением (1.12), угловым ускорением (1.16) и угловой скоростью (1.10) при вращении (когда длина вектора  $\mathbf{r}$  не меняется) дается выражением

$$\mathbf{w} = [\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]. \quad (1.17)$$

Среднее ускорение за время  $\tau$  от начала движения определяется выражением

$$\langle \mathbf{w}(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{w}(t) dt = \frac{\mathbf{v}(\tau) - \mathbf{v}(0)}{\tau}. \quad (1.18)$$

Сопровождающая система координат (естественный трехгранник)

Движение материальной точки по криволинейной траектории иногда удобно описывать в *сопровождающей системе* координат, задаваемой *нормальным*  $\mathbf{n}$  и *тангенциальным*  $\boldsymbol{\tau}$  ортами. Эту систему координат определяют еще как *естественный трехгранник*.

Вектор  $\boldsymbol{\tau}$  направлен *вдоль* вектора скорости  $\mathbf{v}$ , вектор  $\mathbf{n}$  *перпендикулярен* направлению скорости и *направлен к центру кривизны* траектории в данной точке. Третий орт сопровождающего трехгранника получается как  $\mathbf{n}_b = [\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}]$ .

Радиус-вектор точки задается с помощью длины дуги траектории  $s(t)$  (или величиной пути):  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ . Путь  $s(t)$ , проходимый точкой, определяется выражением (1.3).

Разложение скорости в сопровождающей системе координат (или по осям естественного трехгранника) определяется выражением

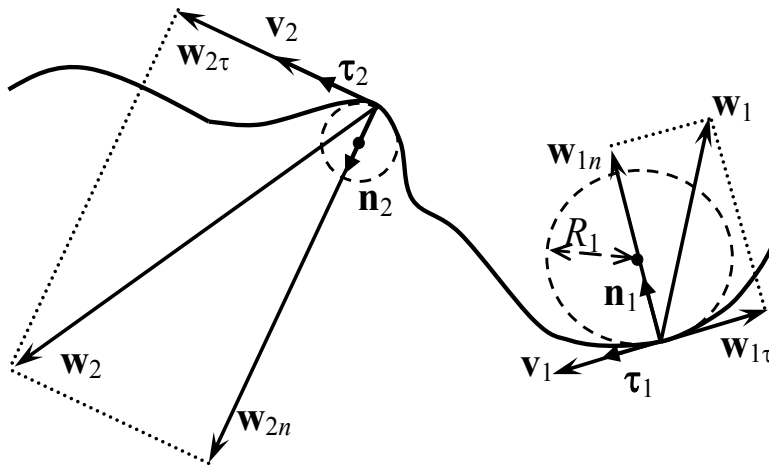
$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} \equiv v\boldsymbol{\tau}. \quad (1.19)$$

Полное ускорение раскладывают на *тангенциальное* ускорение  $\mathbf{w}_\tau$ , направление которого совпадает или противоположно направлению вектора линейной скорости, и *нормальное* ускорение  $\mathbf{w}_n$ , направленное вдоль единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Длины векторов  $\mathbf{w}_\tau$ ,  $\mathbf{w}_n$  определяются выражениями

$$w_\tau = \dot{v}, \quad (1.20)$$

$$w_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.21)$$

Из сказанного ясно, что тангенциальное ускорение меняет *только длину*



вектора скорости, в то время как нормальное ускорение определяет *только поворот* вектора скорости.

На рисунке точками показано положение *центра кривизны* траектории в данной точке, а *радиус кривизны*  $R$  можно найти из соотношения

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \right| = \sqrt{\left( \frac{d^2x(s)}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y(s)}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z(s)}{ds^2} \right)^2}.$$

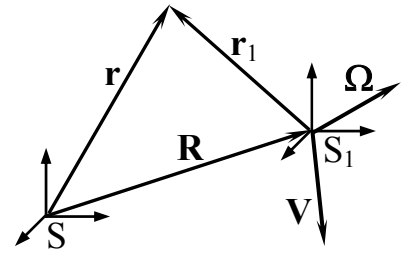
Если плоская траектория задана в ДСК уравнением  $y = y(x)$  или параметрически, причем в качестве параметра использована временная переменная  $t$ :  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$ , то радиус кривизны  $R$  может быть вычислен по формулам

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \frac{\dot{\alpha}}{v} \right| = \left| \frac{y''_{xx}}{(1+(y'_x)^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right|, \quad (1.22)$$

где угол  $\alpha$  определяется выражением:  $\text{tg}(\alpha) = v_y / v_x$ .

Преобразование координат, скоростей и ускорений при переходе к другой системе отсчета

Пусть имеются две системы отсчета  $S$  и  $S_1$ . При этом система  $S_1$  относительно системы  $S$  характеризуется радиус-вектором начала отсчета  $\mathbf{R}$ , его скоростью  $\mathbf{V}$  и ускорением  $\mathbf{W}$ , а также постоянной угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$ .



Положение одной и той же материальной точки определяется радиус-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ . Соотношение между ними:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1. \quad (1.23)$$

Дифференцируя его по времени, получим связи между скоростями и ускорениями материальной точки, определяемыми в разных системах отсчета:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}_1] + \mathbf{v}_1, \quad (1.24a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} + [\mathbf{\Omega} [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}_1]] + 2[\mathbf{\Omega} \mathbf{v}_1] + \mathbf{w}_1. \quad (1.24б)$$

Некоторые предварительные указания по решению задач по кинематике

В механике можно решать две основные задачи.

*Прямая задача механики* формулируется в общем виде следующим образом: по заданному движению материальной точки найти действующие на нее силы. Задача сводится к отысканию вектора ускорения  $\mathbf{w}(t)$  или его компонент. Вектор силы, как известно, можно найти по формуле:  $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{w}(t)$ . Существенный момент, который следует помнить, заключается в том, что полные производные по времени от единичных ортов криволинейной системы координат (за исключением декартовой) *не равны нулю*.

*Обратная задача механики* может быть сформулирована следующим образом: по заданным компонентам силы, действующей на материальную точку, найти ее закон движения. При этом предполагается, что начальные условия движения (начальное положение точки, ее начальная скорость) известны. В кинематике это сводится к заданию скорости или ускорения материальной точки. Обратная задача, как правило, труднее прямой, так как предполагает составление дифференциального уравнения первого (если известна скорость) или второго (известно ускорение) порядка и его решение. Кроме того, необходимо хорошо представлять себе связи между раз-

личными скоростями (мгновенной, средней, секторной и т.д.) и ускорениями, которые помогают выразить условия исходной обратной задачи в форме дифференциального уравнения.

Для успешного решения задач по кинематике необходимо хорошо знать стандартные решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также уметь преобразовывать их к новым переменным, для того чтобы "увидеть" их стандартную форму.

## Примеры решения задач по кинематике

**Задача 1.** Частица движется в положительном направлении оси  $Ox$  так, что ее скорость меняется по закону  $v = \alpha x$ , где  $\alpha$  – размерная постоянная. Принимая во внимание начальные условия ( $t = 0$ ,  $x = x_0$ ), найти:

- а) зависимость от времени мгновенной скорости и ускорения частицы;
- б) среднюю величину скорости частицы за время, в течение которого она пройдет первые  $s$  метров пути.

*Решение.*

1. *Предварительный анализ задачи.* Задача может быть классифицирована как обратная задача механики и для своего решения требует составления простейших дифференциальных уравнений. Помимо нахождения искомого уравнения для получения его частного решения необходимо знание начальных условий (величину пройденного пути  $x_0$  к начальному моменту времени  $t = 0$ ).

2. *Составление необходимых уравнений.* Из условия задачи можно определить следующую связь между мгновенной скоростью и пройденным расстоянием к моменту времени  $t$

$$v = \frac{dx}{dt} = \alpha x. \quad (1.25)$$

Последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его частное решение может быть записано в виде

$$x(t) = x_0 \exp(\alpha t).$$

Из последнего уравнения дифференцированием нетрудно получить искомые равенства для ответов на первый пункт (а)

$$v(t) = \alpha x_0 \exp(\alpha t), \quad w(t) = \alpha^2 x_0 \exp(\alpha t).$$

Для ответа на вопрос (б) необходимо вначале установить связь между  $s$  и временем  $t(s)$ . Она находится интегрированием уравнения (1.25)

$$t(s) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0}^{x_0+s} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{x_0+s}{x_0} \right).$$

Затем необходимо воспользоваться выражением для средней величины скорости, которое применительно к данному случаю, запишется в виде

$$\langle v \rangle_s = \frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} v(t) dt = \frac{s}{t_s} = \frac{\alpha s}{\ln((x_0+s)/x_0)}.$$

Последняя формула содержит окончательное решение поставленной задачи.

3. *Анализ решения.* Чтобы выработать навык, помогающий разобраться не только в простейших задачах, но и понимать структуру более сложных задач, можно придерживаться следующего принципа: "*понять – означает обобщить*". В соответствии с этим принципом, глядя на полученные решения можно задать следующий вопрос: как изменятся результаты решения этой простой задачи, если выбрать зависимость между скоростью и пройденным расстоянием в виде  $v = \alpha x^p$ . Попробуйте воспроизвести эти расчеты самостоятельно. Для проверки приведем ответы для этого случая:

$$x(t) = x_0 [1 + bt]^{1/(1-p)}, \quad \text{где } b = \alpha(1-p)x_0^{p-1}, \quad v(t) = \frac{x_0 b}{(1-p)} [1 + bt]^{p/(1-p)},$$

$$w(t) = \frac{x_0 b^2 p}{(1-p)^2} [1 + bt]^{(1-2p)/(1-p)}, \quad t(s) = \frac{1}{b} \left[ \left( \frac{s}{x_0} \right)^{1-p} - 1 \right], \quad \langle v \rangle_s = \frac{s}{t(s)}.$$

Для детальной проверки математических расчетов найдите опечатку в выражении  $w(t)$ , *умышленно* сделанную в ответе.

**Задача 2.** Бакенщик спускается с вершины маяка, двигаясь по желобу, имеющему форму винтовой линии. Параметры винтовой линии, шаг  $h$  и диаметр  $D$  постоянны.

а) Найти *годограф скорости* бакенщика и определить величину и направление ускорения, в предположении, что величина его скорости *постоянна* по времени.



б) Найти годограф скорости бакенщика и определить величину и направление ускорения для случая, когда величина его вертикальной компоненты скорости пропорциональна времени.

*Решение.*

1. *Анализ задачи.* Согласно классификации данная задача может быть отнесена к прямой задаче механики. Траектория бакенщика – винтовая линия, которая в ЦСК задается уравнениями:  $\rho = R$  (радиус маяка),  $\varphi = \omega t$ ,  $z = -ct$ .

Свяжем параметры винтовой линии с данными задачи:  $R = D/2$ ,  $h = c(2\pi/\omega)$ . Согласно определению, *годограф скорости* – это геометрическое место точек концов радиус-вектора *мгновенной* скорости. Поэтому "найти годограф" означает определить мгновенный вектор скорости  $\mathbf{v}(t)$  по вектору  $\mathbf{r}(t)$ .

2. *Восстановление необходимых связей.* Восстановим формулы, связывающие компоненты векторов скорости и ускорения в цилиндрической системе координат,

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho + z(t)\mathbf{e}_z, \quad v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \quad w_z = \ddot{z}.$$

Последние формулы полностью решают поставленную задачу. Беря соответствующие производные, получим искомый ответ:

$$v_\rho = 0, \quad v_\varphi = R\omega, \quad v_z = -c; \quad w_\rho = -R\omega^2, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0; \quad v = [(R\omega)^2 + c^2]^{1/2}.$$

Пункт (б) решается аналогично. Воспроизведите соответствующие расчеты самостоятельно. При этом необходимо учесть, что  $\dot{z} = v_z = -bt$ .

**Задача 3.** Точка движется, замедляясь по некоторой плоской траектории, таким образом, что в каждый момент времени ее тангенциальные и нормальные ускорения по модулю равны друг другу. В начальный момент времени  $t = 0$  скорость точки равна  $v_0$ . Найти траекторию материальной точки. Предполагается, что зависимость радиуса кривизны траектории от времени известна и задается некоторой функцией  $R(t)$ .

*Решение.*

1. *Предварительный анализ задачи.* Задача может быть отнесена к обратной задаче механики и для своего решения требует решения простейших

дифференциальных уравнений. Помимо составления уравнения для получения частного решения необходимо знание начальных условий (величин скорости или пройденного пути к начальному моменту времени  $t = 0$ ). Слово "замедляясь", приведенное в условии задачи, означает, что с увеличением времени скорость уменьшается, т.е. движение происходит с *отрицательным* ускорением. Для составления соответствующих дифференциальных уравнений удобнее всего использовать *сопровождающую* систему координат. В этой системе скорость и ускорение задаются следующим образом (1.19) – (1.21):

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}(t) = \dot{v}(t)\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \quad (1.26)$$

Полезные соотношения, связывающие радиус кривизны траектории с длиной дуги и скоростью изменения угла, определяются выражением (1.22).

2. *Решение задачи.* Используя условие задачи и уравнения (1.26), получим следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R(t)},$$

решение которого имеет вид

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \int_0^t dt / R(t)}.$$

Если воспользоваться теперь выражением (1.22) для радиуса кривизны  $R$  и перейти к декартовым координатам, то можно написать систему уравнений для отыскания уравнения плоской кривой в ДСК

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2(t), \quad (1.27a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \right] = \frac{\dot{x}^2}{v^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{v(t)}{R(t)}. \quad (1.27b)$$

Для решения системы (1.27) можно перейти к новым переменным

$$\dot{x} = v(t) \cos[\alpha(t)], \quad \dot{y} = v(t) \sin[\alpha(t)]. \quad (1.28)$$

Осуществляя этот переход, получим уравнение для  $\Phi(t) = \operatorname{tg}[\alpha(t)]$

$$\frac{1}{1 + \Phi^2(t)} \frac{d}{dt} (\Phi(t)) = \frac{v(t)}{R(t)}.$$

После его интегрирования и перехода в ДСК имеем

$$\alpha(t) = J(t) + \alpha_0,$$

где  $J(t) = \int_0^t \frac{v(\tau)}{R(\tau)} d\tau$ ,  $\alpha_0 = \arctg \frac{v_y(0)}{v_x(0)}$ .

Решения для  $x(t)$ ,  $y(t)$  легко получаются из соотношений (1.28) интегрированием. Последние интегралы решают поставленную задачу в самом общем виде.

*Анализ решения.* В соответствии с принципом "понять – означает обобщить", глядя на полученные решения, полезно задать следующий вопрос: можно ли получить решение задачи, если отношение тангенциального ускорения к нормальному равно  $b$  ( $b$  – некоторое заданное положительное число)? Можно ли получить результат для случая  $b = b(t)$ ?

## Задачи

### Обязательные задачи

1.1. Точка А находится на ободе колеса радиуса  $R$ , которое катится без проскальзывания по горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

а) Определить закон движения точки обода колеса в декартовых координатах. Найти скорость и ускорение данной точки и показать, что ускорение всегда направлено к центру колеса.

б) Вычислить полный путь  $s$ , проходимый точкой А между двумя последовательными моментами ее касания рельса.

$$[ \text{а) } x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)), \quad y(t) = R(1 - \cos(\omega t)), \quad \text{б) } s = 8R ]$$

1.2. Найти траекторию  $y(x)$ , мгновенную и среднюю скорость, мгновенное и среднее ускорение материальной точки массы  $m$ , если ее декартовые координаты меняются по закону:

а)  $x = a(1 - \lambda \cos \omega t)$ ,  $y = b(1 - \cos \omega t)$ ,  $0 < \lambda < 1$ ;

б)  $x = a(1 - \lambda \cos \omega t)$ ,  $y = b(1 - \sin \omega t)$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

Для обоих случаев определить также модуль и направление силы и вычислить компоненту секторной скорости, перпендикулярную плоскости движения.

- 1.3. Изобразить графически траекторию и вычислить мгновенную скорость и ускорение материальной точки, если ее декартовы координаты меняются по закону:

а)  $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $y(t) = b \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

б)  $x(t) = 3a \left( \cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t \right)$ ,  $y(t) = 3a \left( \sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right)$ .

Последняя кривая называется *астроидой*. Определить в обоих случаях величину и направление силы, а также компоненту секторной скорости, перпендикулярную плоскости движения.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а) } \mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r} \\ \text{б) } F_x = -3m\omega^2 x + 6m\omega^2 (xy^2)^{1/3}, \quad F_y = -3m\omega^2 y + 6m\omega^2 (x^2 y)^{1/3} \end{array} \right]$$

- 1.4. Изобразить графически траекторию (для случаев, указанных в скобках); вычислить мгновенную скорость и ускорение материальной точки, если ее полярные координаты меняются по закону:

а)  $\rho(t) = a \cos(n\varphi)$ ,  $\varphi = \omega t$  ( $n = 2, 3, 4$ );

б)  $\rho^n(t) = a^n \cos(n\varphi)$ ,  $\varphi = \omega t$  ( $n = 1/2, 1, 2$ ) – синус-спираль. Последняя кривая при  $n = 1/2$  называется *кардиоидой*, при  $n = 2$  она определяет *лемнискату Бернулли*.

Определить во всех случаях компоненты силы, а также компоненту секторной скорости, перпендикулярную плоскости движения.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а) } F_\rho = -m\omega^2(n^2 + 1)\rho, \quad F_\varphi = -2m\omega^2 \sqrt{1 - (\rho/a)^2} \\ \text{б) } F_\rho = -2m\omega^2 \rho + a\omega^2(1 - n)(\rho/a)^{1-2n}, \quad F_\varphi = ? \end{array} \right]$$

- 1.5. Вычислить полные производные по времени от единичных ортов ЦСК и ССК, выразив их через линейную комбинацию самих ортов.
- 1.6. Нарисовать примерный вид траектории и найти компоненты силы, действующей на материальную точку, если ее движение в сферической системе координат задается уравнениями:

а)  $r = R_0$ ,  $\theta = \omega t$ ,  $\varphi = 2\omega t$  ( $\omega$  – постоянная величина);

б)  $r = R_0 + V_0 t$ ,  $\theta = \cos(\omega t)$ ,  $\varphi = \cos(2\omega t)$ .

- 1.7. Объяснить различие и кинематический смысл выражений:  $\dot{s}$  ( $s$  – длина пути, пройденного материальной точкой),  $\dot{r}$ ,  $\dot{v}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$ . Здесь  $A = |\mathbf{A}|$  определяет величину соответствующего вектора. Записать соответствующие выражения в цилиндрической и сферической системах координат, а также в системе координат естественного трехгранника.
- 1.8. Материальная точка движется по окружности радиуса  $R$ , причем  $\varphi = \omega t$  ( $\varphi$  – угол между радиус-вектором точки, проведенным из некоторой точки  $A$  окружности, и прямой, соединяющей точку  $A$  и центр окружности;  $\omega$  – константа). Найти тангенциальную и нормальную составляющие скорости и ускорения точки.
- 1.9. Материальная точка движется по параболе  $y = kx^2$  так, что ее ускорение параллельно оси  $y$ , а его модуль постоянен и равен  $w$ . Определить нормальную и тангенциальную составляющие ускорения точки как функции времени.

### Задачи средней трудности

- 1.10. Материальная точка движется в плоскости. Ее тангенциальные и нормальные ускорения равны постоянным величинам  $a$  и  $b$ . Найти закон движения и уравнение траектории точки в декартовых координатах; начальные условия считать известными. Показать, что траектория имеет вид спирали. Найти уравнение спирали в полярных координатах с центром в предельной точке закручивания спирали.
- 1.11. Бусинка движется по некоторой кривой  $y = f(x)$  с постоянной скоростью  $v$ . Найти величину ускорения бусинки в зависимости от ее положения, если кривая:

а)  $y = px^2$  (парабола),      б)  $y = 1/(ax + b)$  (гипербола).

$$\left[ \text{а) } w = 2pv^2 / (1 + 4p^2x^2)^{3/2} \right]$$

- 1.12. Движение материальной точки в плоскости задано в полярных координатах:  $\rho = \rho(t)$  и  $\varphi = \varphi(t)$ . Показать, что в случае постоянства сек-

торной скорости  $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$  вектор ускорения точки коллинеарен (параллелен) ее радиус-вектору, а его величина  $w$  определяется формулой Бине:  $w = w_\rho = -\frac{4\sigma^2}{\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right]$ .

1.13. Пользуясь формулой Бине, определить силу  $F$ , действующую на материальную точку массы  $m$ , и изобразить примерный вид траектории, если уравнение траектории в полярной системе координат имеет вид:

а)  $\rho = p/(1 + \varepsilon \cos(\gamma\varphi))$ ,  $\sigma = \rho^2\dot{\varphi}/2 = \text{const}$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  – постоянные;

б)  $\rho = p/(\varphi - \varphi_0)$ ,  $\sigma = \rho^2\dot{\varphi}/2 = \text{const}$ ,  $p$ ,  $\varphi_0$  – постоянные.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а)} F = -\frac{4m\sigma^2\gamma^2}{p} \left( \frac{1}{\rho^2} - (1 - \gamma^{-2}) \frac{p}{\rho^3} \right), \quad \text{б)} F = -4m\sigma^2 \frac{1}{\rho^3} \end{array} \right]$$

1.14. Материальная точка движется по окружности радиуса  $R$  так, что ускорение точки образует с ее скоростью постоянный угол  $\alpha$  ( $\alpha \neq \pi/2$ ). Найти закон движения точки. За какое время скорость точки увеличится в  $n$  раз, если в начальный момент  $t=0$  она равнялась  $v_0$ ?

$$\left[ \varphi(t) = \varphi_0 - \text{tg } \alpha \ln \left( 1 - \frac{v_0 t \text{ ctg } \alpha}{R} \right), \quad t_n = \frac{R \text{ tg } \alpha}{v_0} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right]$$

1.15. Материальная точка движется по некоторой траектории в плоскости  $xOy$ . Известна зависимость модуля скорости  $v$  и радиуса кривизны  $R$  в зависимости от величины пройденного пути  $s$ . Найти закон движения материальной точки  $x(t)$ ,  $y(t)$  для следующих случаев:

а)  $v(s) = as$ ,  $R(s) = b/s$ .

б)  $v(s) = a \cos(bs)$ ,  $R(s) = b/s$ .

в)  $v(s) = a/s$ ,  $R(s) = bs$ .

г)  $v(s) = a/\cos^2(bs)$ ,  $R(s) = bs$ .

( $a$ ,  $b$  – некоторые положительные размерные постоянные).

### Задачи повышенной трудности

1.16. Материальная точка движется в плоскости  $xOy$  таким образом, что сохраняется отношение:  $w_x/w_y = -v_y/v_x$ . Известна зависимость радиуса

кривизны  $R$  траектории от пройденного пути  $s$ . Найти закон движения материальной точки  $x(t)$ ,  $y(t)$  для следующих случаев:

$$\begin{array}{ll} а) R(s) = a/s; & б) R(s) = 1 + (s/a)^2; \\ в) R(s) = a/s^2; & г) R(s) = bs. \end{array}$$

1.17. Материальная точка движется в плоскости таким образом, что зависимость секторной скорости от расстояния  $\rho$  известна, т.е.  $\sigma(\rho) = \sigma_0 \Phi(\rho)$  ( $\Phi(\rho)$  – заданная функция). Известно также, что отношение  $v_\rho/v_\phi = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$ . Найти закон движения материальной точки  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$  для приведенных ниже функций  $\Phi(\rho)$ , если известно, что  $\rho(t=0) = \rho_0$ ,  $\varphi(t=0) = 0$ .

$$\begin{array}{ll} а) \Phi(\rho) = 1; & б) \Phi(\rho) = (\rho/a)^2; \\ в) \Phi(\rho) = (a/\rho)^2; & г) \Phi(\rho) = [1 + (\rho/a)^2]^{-1/2}. \end{array}$$

1.18. Материальная точка движется в плоскости с постоянной секторной скоростью  $\sigma_0$ . Известна зависимость величины модуля скорости точки от расстояния  $\rho$ , т.е.  $v(\rho) = v_0 F(\rho)$ . Найти закон движения материальной точки  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$  для приведенных ниже функций  $F(\rho)$ , если известно, что  $\rho(t=0) = \rho_0$ ,  $\varphi(t=0) = 0$ .

$$\begin{array}{ll} а) F(\rho) = 1; & б) F(\rho) = \alpha/\rho; \\ в) F(\rho) = \beta/\rho^2; & г) F(\rho) = \alpha/\rho + \beta/\rho^2. \end{array}$$

1.19. Материальная точка движется в пространстве таким образом, что  $v_r = \operatorname{const}$ ,  $v_\theta = v_0 f(\theta)$ ,  $v_\phi = v_0 \varphi$ . Найти закон движения материальной точки  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  для приведенных ниже функций  $f(\theta)$ , если известно, что  $r(t=0) = r_0$ ,  $\theta(t=0) = \pi/2$ ,  $\varphi(t=0) = \pi$ .

$$\begin{array}{ll} а) f(\theta) = 1; & б) f(\theta) = \sin(\theta); \\ в) f(\theta) = \theta; & г) f(\theta) = \operatorname{tg}(\theta). \end{array}$$

1.20. Точка движется в плоскости таким образом, что ее секторная скорость  $\sigma_z = k\rho^\alpha$ , а угол между векторами ускорения и радиус-вектором точки постоянен и равен  $\beta$ . Найти закон движения и уравнение траектории точки, если  $\rho(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $v(0) = v_0$ .

$$\begin{array}{ll} а) \alpha = 1, \beta = 45^\circ; & б) \alpha = 1, \beta = 30^\circ; \\ в) \alpha = 2, \beta = 60^\circ; & г) \alpha = 2, \beta = 90^\circ. \end{array}$$

- 1.21. Материальная точка движется в плоскости  $xOy$ . Известна зависимость радиуса кривизны от величины пройденного пути  $R(s)$ . Найти траекторию точки, выбрав в качестве независимого параметра величину пройденного пути  $s$ .



## Раздел 2. Динамика материальной точки

### Минимальные теоретические сведения по динамике точки

Динамика – это раздел механики, в котором решается следующая задача: *по заданным силам, действующим на материальную точку (или систему материальных точек) и заданным начальным условиям, найти ее (их) закон движения* (т.е. зависимость координат точки или системы точек от времени). Эту задачу можно решать по-разному (см. разделы 3, 5, 6, 9, 10). В этом разделе мы будем рассматривать движение одной *свободной* материальной точки, т.е. полное число степеней свободы равно трем. Задача сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений вида:

$$m\dot{w}_i = F_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

В самом общем случае эта система записана для некоторой ортогональной криволинейной системы координат, когда радиус-вектор точки задается в виде функции  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  и для произвольной функциональной зависимости компонент вектора силы  $\mathbf{F}$  от расстояния, скорости и времени. Так как единого аналитического метода, сводящего систему дифференциальных уравнений второго порядка к квадратурам (к интегралам от известных функций), *в общем случае не существует*, то обычно выделяют такие случаи, когда такое сведение возможно и решение в этих случаях может быть выражено в форме замкнутых интегралов от известных функций силы. Полезно напомнить простейшие случаи, когда решение получается "автоматически" в квадратурах.

а) Сила является *только функцией времени*. В этом случае ответ получается после двукратного интегрирования заданной функции  $\mathbf{F}(t)$  по временной переменной.

б) Часто в ДСК компонента силы зависит лишь от *той же самой компоненты скорости*. Тогда структура уравнений (2.1) имеет вид

$$m\ddot{x} = F_1(\dot{x}), \quad m\ddot{y} = F_2(\dot{y}), \quad m\ddot{z} = F_3(\dot{z}). \quad (2.2)$$

Эта система уравнений разделяется и сводится к квадратурам с помощью

замены переменной  $\dot{x} = p$  и преобразованием второй производной по времени от каждой координаты по правилу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = p \frac{dp}{dx}. \quad (2.3)$$

Это преобразование позволяет понизить порядок дифференциального уравнения и получить решение в параметрической форме для каждой координаты в виде

$$x(v) = m \int_{v_0}^v \frac{p}{F_1(p)} dp, \quad t(v) = m \int_{v_0}^v \frac{dp}{F_1(p)}. \quad (2.4)$$

в) Компонента силы в ДСК зависит только от одной соответствующей координаты. К этому пункту относится также случай одномерного движения. При этом сила  $F(x)$  является потенциальной, можно определить потенциал  $U(x) = -\int F(x) dx$  и, используя закон сохранения полной энергии  $E$ , свести задачу к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными вида

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = E = \frac{mv_0^2}{2} + U(x_0). \quad (2.5)$$

Здесь  $x_0$  и  $v_0$  (начальные значения для координаты и скорости соответственно) полностью определяют значение постоянной  $E$ . Решение последнего уравнения в квадратурах обычно записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}, \quad t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \quad (2.6)$$

Точки остановки  $x(E)$ , в которых скорость обращается в нуль, определяются из уравнения  $E = U(x)$ . Отметим, что в формуле (2.6) учет знака скорости важен при инфинитном движении материальной точки. Для финитного движения в силу периодической смены знака скорости, его учет происходит "автоматически". В последнем случае материальная точка движется периодическим образом между двумя соответствующими точками остановки  $x_{1,2}(E)$ , а формула для периода финитного движения  $T$  имеет вид

$$T = T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{(E - U(x))}}. \quad (2.7)$$

### Методические указания к решению задач по динамике материальной точки

Отыскание закона движения (траектории) материальной точки в рамках ньютоновского формализма обычно сводится к следующим пунктам:

1. Определение природы и симметрии сил, действующих на материальную точку.
2. Выбор системы координат, в которых переменные дифференциального уравнения могут быть разделены или записаны наиболее простым способом для их решения известными аналитическими методами.
3. Выбор и правильная запись начальных условий.
4. Запись дифференциальных уравнений типа (2.1) или (2.5) и их решение.
5. Анализ полученного результата и возможное обобщение полученного решения.

### Примеры решения задач по динамике

**Задача 1.** Пуля, пробив доску толщиной  $h$ , изменила свою скорость от  $v_0$  до  $v$ . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной некоторой степени скорости  $v^\theta$  ( $\theta > 1$ ).

*Решение.* Считая, что пуля летит строго в горизонтальном направлении, а влияние силы тяжести является малым по сравнению с силой сопротивления, уравнение Ньютона запишется в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v^\theta.$$

Отсюда находим выражение для времени движения пули в доске

$$t = -\frac{m}{\gamma} \int_{v_0}^v p^{-\theta} dp = \frac{m}{\gamma} \left( \frac{1}{1-\theta} \right) v_0^{1-\theta} \left[ 1 - (v/v_0)^{1-\theta} \right]. \quad (2.8)$$

Последнее выражение (2.8) *нельзя* считать решением, так как коэффициент пропорциональности  $\gamma$  неизвестен. Для его нахождения необходимо связать этот коэффициент с толщиной доски  $h$ . Для этого представим исходное уравнение Ньютона в виде (см. (2.3))

$$m \frac{dv}{dx} v = -\gamma v^\theta. \quad (2.9)$$

Интегрируя уравнение (2.9) при заданных начальных условиях, получаем

$$h = -\frac{m}{\gamma} \int_{v_0}^v p^{1-\theta} dp = \frac{m}{\gamma} \left( \frac{1}{2-\theta} \right) v_0^{2-\theta} \left[ 1 - (v/v_0)^{2-\theta} \right]. \quad (2.10)$$

Найдем из последнего уравнения (2.10) коэффициент  $\gamma$  и, подставляя это выражение в уравнение (2.8), получим окончательный ответ

$$t = \frac{h}{v_0} \left( \frac{2-\theta}{1-\theta} \right) \left[ \frac{1 - (v/v_0)^{1-\theta}}{1 - (v/v_0)^{2-\theta}} \right]. \quad (2.11)$$

*Замечание.* Полезно проанализировать решение (2.11) при  $\theta \rightarrow 1, 2$ . Рекомендуется также нарисовать примерный график функции  $t(v/v_0)$  при различных значениях параметра  $\theta$ .

**Задача 2.** Найти закон движения для трехмерного гармонического осциллятора, если помимо упругой силы на осциллятор действует постоянная сила и сила трения, пропорциональная скорости. Предполагается, что в начальный момент времени осциллятор находился в точке равновесия  $\mathbf{r} = 0$  и имел начальную скорость  $\mathbf{v}_0$ .

*Решение.* Уравнение движения для этого случая записывается в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma \mathbf{v} + \kappa \mathbf{r} = \mathbf{F}_0. \quad (2.12)$$

Здесь  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ,  $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma \mathbf{v}$  – сила трения,  $\mathbf{F}_0$  – постоянная сила,  $F_{\text{упр}} = -\kappa \mathbf{r}$  – сила упругости,  $\gamma$  и  $\kappa$  – соответствующие размерные коэффициенты.

Обычно анализируются случаи, когда  $\mathbf{F}_0 = 0$ . Мы рассмотрим решение уравнения (2.12) для случая  $\mathbf{F}_0 \neq 0$ . В уравнении (2.12) разделим все члены уравнения на массу  $m$  частицы. Тогда уравнение для выделенной координаты, например,  $x$  (для других координат  $y, z$  уравнения выглядят аналогично) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_{0x}}{m}, \quad (2.13)$$

где  $\beta = \gamma/2m$ , а  $\omega_0^2 = \kappa/m$  – собственная частота колебаний.

Вначале выясним, к чему приводит действие постоянной силы. Будем искать решение в виде:  $x = u + x_e$ . Здесь первый член  $u$  – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.13) с равной нулю правой частью;  $x_e$  – частное решение уравнения (2.13) в виде постоянной, физически соответствующее *сдвигу* исходного положения равновесия затухающего осциллятора. Подстановка  $x = u + x_e$  приводит к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad x_e = \frac{F_{0x}}{m\omega_0^2}. \quad (2.14)$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно новой переменной  $u$ . Его решение имеет вид

$$u(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad x(t) = u(t) + x_e, \quad (2.15)$$

где  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ . При  $\omega_0^2 > \beta^2$  возникают затухающие колебания с частотой  $\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ , а решение  $u(t)$  (2.15) можно также записать в виде  $x(t) = a \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \phi_0) + x_e$ . Необходимо также выразить константы  $C_1$  и  $C_2$  (или  $a$  и  $\phi_0$ ) через начальные условия  $x_0$  и  $v_{0x}$ .

**Задача 3.** Определить закон движения заряженной частицы массой  $m$  и зарядом  $q$  в однородном, но нестационарном электромагнитном поле. Векторы электрической и магнитной напряженностей  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  – заданные функции. Считать, что вектор  $\mathbf{H}(t)$  сохраняет со временем свое направление и меняется только по величине, вектор же  $\mathbf{E}(t)$  меняется как по величине, так и по направлению. Начальные условия считать заданными.

*Решение.* Реализуем пункты из методических указаний на стр. 27.

1. Частица взаимодействует с электромагнитным полем посредством силы Лоренца, которая имеет вид

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E}(t) + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \mathbf{H}(t)], \quad (2.16)$$

где  $q$  – заряд частицы,  $c$  – электродинамическая константа, численно равная скорости света в вакууме ( $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/с).

2. Направим ось  $z$  декартовой системы координат вдоль вектора  $\mathbf{H}(t)$ , направление которого не меняется со временем. Величину магнитного поля  $H(t)$  можно считать заданной функцией. Также будем считать заданными компоненты электрического поля  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$ ,  $E_z(t)$ .

3. Начальные условия следует взять в общем виде, считая известными декартовы координаты частицы  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и компоненты ее скорости  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$ ,  $v_{z0}$  в некоторый «начальный» момент времени  $t_0$ .

4. Уравнение Ньютона для данной задачи

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}_L = q\mathbf{E}(t) + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}(t)], \quad (2.17)$$

записанное в компонентах выбранной декартовой системы координат, приводит к следующей системе уравнений:

$$m w_x(t) = qE_x(t) + \frac{q}{c} H(t) v_y(t), \quad (2.18a)$$

$$m w_y(t) = qE_y(t) - \frac{q}{c} H(t) v_x(t), \quad (2.18б)$$

$$m w_z(t) = qE_z(t). \quad (2.18в)$$

Отметим, что выбор этой задачи обусловлен следующими причинами:

а) Эта проблема включает в себя стандартную задачу о движении заряженной частицы в *однородных стационарных* электрическом и магнитном полях (векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  постоянны в пространстве и во времени).

б) На примере решения этой задачи можно показать, в каких случаях системы уравнений второго порядка могут быть решены переходом к комплексной переменной.

в) Можно заметить, что магнитная часть силы Лоренца при соответствующем переобозначении переменных совпадает с силой инерции Кориолиса:  $\mathbf{F}_K = 2m[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}(t)]$ . Следовательно, по аналогии с движением частицы в переменном электромагнитном поле может быть решена задача о движении материальной точки при действии силы

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}(t) + 2m[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}(t)]. \quad (2.19)$$

*Решение системы уравнений.* Перепишем систему в виде

$$\dot{v}_x(t) = \frac{q}{m} E_x(t) + \frac{q}{mc} H(t) v_y(t), \quad (2.20a)$$

$$\dot{v}_y(t) = \frac{q}{m} E_y(t) - \frac{q}{mc} H(t) v_x(t), \quad (2.20б)$$

$$\dot{v}_z(t) = \frac{q}{m} E_z(t). \quad (2.20в)$$

Последнее уравнение (2.20в) решается независимо от первых двух уравнений. Первые два уравнения (2.20а) и (2.20б) требуют совместного решения, поскольку оба содержат неизвестные функции  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$  и их производные. Они могут быть решены переходом к комплексной переменной  $u = v_x + iv_y$ , где  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ). Умножая второе уравнение на мнимую единицу  $i$  и складывая его с первым, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно комплексной переменной  $u(t)$

$$\frac{du(t)}{dt} + i \frac{q}{mc} H(t) u(t) = \frac{q}{m} \xi(t), \quad (2.21)$$

где  $\xi(t) = E_x(t) + iE_y(t)$ . Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами и может быть проинтегрировано (формула (П1.19) из Приложения 1). С учетом начальных условий его решение в квадратурах записывается в виде

$$u(t) = u_0 e^{-i\Phi(t, t_0)} + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t \xi(\tau) e^{-i\Phi(t, \tau)} d\tau, \quad (2.22)$$

где  $\Phi(t, t') = \frac{q}{mc} \int_{t'}^t H(\eta) d\eta$ ,  $u_0 = v_{x0} + iv_{y0}$ . Переходя к исходным переменным, получим решения для компонент скорости:

$$v_x(t) = v_{x0} \cos \Phi(t, t_0) + v_{y0} \sin \Phi(t, t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t d\tau \left[ E_x(\tau) \cos \Phi(t, \tau) + E_y(\tau) \sin \Phi(t, \tau) \right], \quad (2.23a)$$

$$v_y(t) = v_{y0} \cos \Phi(t, t_0) - v_{x0} \sin \Phi(t, t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t d\tau \left[ E_y(\tau) \cos \Phi(t, \tau) - E_x(\tau) \sin \Phi(t, \tau) \right], \quad (2.23б)$$

$$v_z(t) = v_{z0} + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t E_z(\tau) d\tau. \quad (2.23\text{в})$$

Чтобы получить зависимости  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  достаточно проинтегрировать систему (2.23) еще раз с учетом начальных условий. Мы не будем приводить окончательное решение ввиду его громоздкости.

*Замечание.* Вновь действуя по принципу: "понять – означает обобщить", полезно написать уравнения движения для материальной точки, двигающейся в плоскости  $xOy$  неинерциальной системы координат, если на нее действует полная сила инерции, обусловленная вращением

$$\mathbf{F} = -2m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}] - m([\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]]) \quad (2.24)$$

Предполагается, что нестационарный вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  перпендикулярен плоскости движения.

**Задача 4.** Найти период колебаний материальной точки, на которую действует сила с потенциалом  $U = U_0|x/a|^p$  ( $p$  – произвольный положительный параметр, определяющий минимум потенциала). Считать, что в начальный момент времени материальная точка начинает свое движение из точки остановки.

*Решение:* Для решения этой задачи воспользуемся формулой (2.7)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{-x_1}^{x_1} \frac{dy}{\sqrt{E - U_0 \left| \frac{y}{a} \right|^p}} = 2a \sqrt{\frac{2m}{U_0}} \int_0^{y_1} \frac{dx}{\sqrt{y_1^p - x^p}}. \quad (2.25)$$

Здесь  $y_1 = x_1/a$  – безразмерная координата точки остановки, определяемая уравнением  $y_1^p = (E/U_0)$ . С помощью замены  $z = (x/y_1)^p$  последний интеграл в выражении (2.25) можно свести к бета-функции и представить окончательный результат в виде

$$T(E) = 2a \sqrt{\frac{2m}{U_0}} \left( \frac{E}{U_0} \right)^{1-p/2} C(p) = 2a \sqrt{\frac{2m}{U_0}} \left( \frac{E}{U_0} \right)^{1-p/2} \frac{\Gamma(1+1/p)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/p+1/2)}, \quad (2.26)$$

где для представления параметра  $C(p)$  через гамма-функции  $\Gamma(x)$  необходимо воспользоваться соотношением, определяющим бета-функцию  $B(x,y)$ ,



$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.27)$$

В выражениях (2.26)–(2.27)  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ .

Частота колебания и ее зависимость от начальной амплитуды находится из (2.26) по формуле  $\omega = 2\pi/T$ .

*Анализ полученного решения.* Из формулы (2.26) следует, что период колебаний в потенциальной яме вида  $U = U_0 |x/a|^p$  не зависит от начальной амплитуды колебания (начальной энергии  $E$ ) только для *линейных* гармонических колебаний с  $p = 2$ .

**Задача 5.** Найти закон движения для одномерного гармонического осциллятора, если помимо упругой силы на осциллятор действует сила трения пропорциональная *квадрату скорости*. В начальный момент времени осциллятор находился в точке равновесия  $x = 0$  и имел начальную скорость  $v_0$ .

*Решение.* Уравнение движения для этого случая записывается в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma v^2 + \kappa x = 0. \quad (2.28)$$

Здесь  $v = dx/dt$ ,  $F_{\text{тр}} = -\gamma v^2$  – сила трения;  $F_{\text{упр}} = -\kappa x$  – сила упругости;  $\gamma$  и  $\kappa$  – соответствующие размерные коэффициенты.

Обычно анализируется случай, когда  $F_{\text{тр}} = -\gamma v$ . Для сравнения с линейным случаем мы *намеренно* рассмотрим решение уравнения (2.28), которое сведем к квадратурам и рассмотрим некоторые обобщения задачи об одномерном движении в поле потенциальных сил.

Перейдем в уравнении (2.28) к новым переменным  $x$  и  $T = mv^2/2$ . Тогда получим следующее уравнение

$$\frac{dT}{dx} + \frac{2\gamma}{m} T + \kappa x = 0. \quad (2.29)$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение относительно новой переменной  $T(x)$ , решение которого имеет вид

$$T(x) = T_0 \exp[-\lambda x] - \frac{\kappa}{\lambda} x + \frac{\kappa}{\lambda^2} [1 - \exp(-\lambda x)]. \quad (2.30)$$

Здесь  $\lambda = 2\gamma/m$ ,  $T_0 = mv_0^2/2$ . Из дифференциального уравнения (2.30) с разделяющимися переменными можно найти решение в квадратурах в виде обратной зависимости  $t(x)$ . Это решение имеет вид

$$t = \int_0^x dx \left[ v_0^2 \exp(-\lambda x) + \frac{2\omega_0^2}{\lambda^2} (1 - \lambda x - \exp(-\lambda x)) \right]^{-1/2}. \quad (2.31)$$

Дальнейшее исследование квадратурного решения (2.31) возможно только *численными* методами, так как интеграл в последней формуле *не* выражается в элементарных функциях. Ввиду отсутствия привычного аналитического решения вида  $x(t)$ , эта модель *не* получила такого широкого распространения как линейная модель.

*Анализ полученного решения.* Если теперь вернуться к исходному уравнению (2.28), то можно заметить, что подобным методом может быть решено уравнение вида

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma(x)v^2 = F(x). \quad (2.32)$$

Это уравнение описывает движение материальной точки в поле потенциальной силы  $F(x)$  и, действующей на нее *неоднородной* силы трения  $F_{\text{тр}} = -\gamma(x)v^2$ . Чтобы получить его решение, вновь переходим к переменной  $x$  и кинетической энергии  $T = mv^2/2$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{2\gamma(x)}{m} T = F(x). \quad (2.33)$$

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида (2.33) может быть записано следующим образом

$$T(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = T_0 e^{-\Phi(x, x_0)} + \int_{x_0}^x F(x') e^{-\Phi(x, x')} dx', \quad \text{где } \Phi(x, a) = \frac{2}{m} \int_a^x \gamma(y) dy, \quad (2.34)$$

а  $x_0 = x(t=0)$ . Выражение (2.34) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$t(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 \exp[-\Phi(x, x_0)] + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x') \exp[-\Phi(x, x')] dx'}}. \quad (2.35)$$

Последнее равенство при  $\gamma(x) = 0$  переходит в известное решение (2.6)

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

где  $U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx'$  – потенциальная энергия.

Мы *намеренно* привели решение последней задачи как задачи *повышенной* трудности, чтобы на ее примере можно было получить представление о методах решения некоторых нетривиальных дифференциальных уравнений, порожденных "физикой" задачи. Как следует из этого примера, закон "сохранения" механической энергии можно получить также и для определенного класса диссипативных сил.

Чтобы показать более широкую применимость уравнения (2.33), рассмотрим следующую задачу. Как известно, уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0, \quad (2.36)$$

описывает модель гармонического осциллятора. Пусть  $y(x)$  – некая заданная нелинейная связь между исходным смещением  $x$  и "новым" смещением  $y$ , которое удовлетворяет уравнению (2.36) с известным решением. Какому уравнению должна удовлетворять функция  $y(x)$ , чтобы его можно было свести к уравнению (2.36) для гармонического осциллятора?

Решим эту задачу. Замечая, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} v_x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx} v_x \right] v_x, \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad (2.37)$$

и переходя к новой переменной  $x$ , относительно функции  $v_x$  получим уравнение

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{d}{dx} (v_x^2) + \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) v_x^2 + \omega_0^2 y(x) = 0, \quad (2.38)$$

которое представляет собой *частный* случай уравнения (2.33). Следовательно, в этом частном случае решение получается просто обращением решения уравнения  $y(x) = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  относительно исходной переменной  $x$ .

## Задачи

### Обязательные задачи

2.1. Груз веса  $P$ , находящийся в покое на гладкой горизонтальной плоскости начинает двигаться вдоль оси  $x$  под действием горизонтальной силы  $f = A \sin(\omega t)$ , где  $A$  и  $\omega$  – константы. а) Найти закон движения груза, предполагая, что в начальный момент его координата  $x = 0$ . б) Решить задачу для шероховатой плоскости, если коэффициент трения между плоскостью и грузом постоянен и равен  $\kappa$ .

2.2. а) Найти закон движения материальной точки с массой  $m$  под действием силы упругости  $F = -\kappa x$  ( $\kappa > 0$ ), предполагая, что она движется вдоль оси  $Ox$  и в начальный момент времени имеет координату  $x_0$  и скорость  $v_0$  (модель линейного гармонического осциллятора). б) Получить решение для случая  $\kappa < 0$  и сравнить его с предыдущим решением.

$$\left[ \text{а) } x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega^2}, \quad \text{tg}(\varphi_0) = -v_0 / \omega x_0 \right]$$

2.3. Тело под действием силы тяжести ( $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ ) свободно падает в среде, сила сопротивления которой зависит от скорости  $\mathbf{v}$  и меняется по закону  $\mathbf{R}(\mathbf{v}) = -\gamma v^n \frac{\mathbf{v}}{v}$ . Считать, что при  $t = 0$   $v = 0$  и  $z = h$ .

Определить одномерный закон движения тела  $z(t)$  для случаев:

а)  $n = 1$ ,    б)  $n = 2$ .

в) Найти приближенно закон движения тела для малых  $t/\tau \ll 1$  и больших  $t/\tau \gg 1$  при  $n = 2$ . Как изменится этот закон при произвольной величине параметра  $n$ ?

г) Вычислить полную работу, совершенную телом при падении с высоты  $h$ , для случаев (а) и (б).

$$[\text{б) } z(t) = h - (v_\infty \tau) \ln[\text{ch}(t/\tau)], \quad v_\infty = (mg/\gamma)^{1/2}, \quad \tau = m/\gamma v_\infty]$$

2.4. Материальная точка движется под действием заданной силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 - \kappa \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{F}_0$  – постоянная сила. Для случаев (а–в) найти траекторию точки, если при  $t = 0$   $\mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ .

а)  $\mathbf{F}_0 \perp \mathbf{r}_0$ ,  $\kappa > 0$ ,    б)  $\mathbf{F}_0 \parallel \mathbf{r}_0$ ,  $\kappa > 0$ ,    в)  $(\mathbf{F}_0 \wedge \mathbf{r}_0) = \alpha$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\kappa < 0$ .

г) Вычислить работу и среднюю мощность, совершаемую точкой на заданном участке траектории  $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}]$ .

$$[\text{г)} A = (\mathbf{F}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) - \kappa(r^2 - r_0^2)/2 ]$$

2.5. Найти траекторию частицы массы  $m$  и зарядом  $e$ , двигающейся с начальной скоростью  $\mathbf{v}_0$  в электрическом поле  $\mathbf{E}(t)$  и магнитном поле  $\mathbf{H}(t)$ , для случаев:

а)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{H}_0$ ,  $(\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \alpha$ .

б)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$ ,  $(\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \beta$ ,  $(\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \alpha = \pi$ .

в)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0$ ,  $(\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \beta$ .

г)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t)$ ,  $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{H}_0$ ,  $(\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{H}_0) = \beta$ .

2.6. а) Проинтегрировать уравнения движения частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$ , двигающейся под действием упругой силы  $\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{r}$  ( $\kappa > 0$ ), если на нее дополнительно наложено постоянное магнитное поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ , перпендикулярной направлению начальной скорости  $\mathbf{v}_0$  (классический эффект Зеемана).

б) Как изменится результат задачи, если угол между направлением начальной скорости и приложенным магнитным полем равен  $\alpha$ ?

$$\left[ \text{а)} \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} \pm \omega_H, \quad \omega_0^2 = \kappa / m, \quad \omega_H = eH / 2mc \right]$$

2.7. Определить закон движения частицы в поле  $U(x)$  и вычислить период колебания в областях финитного движения для потенциалов:

а)  $U(x) = \kappa x^2 / 2$ ,    б)  $U(x) = \kappa x^2 / 2 + \alpha / x^2$ ,    в)  $U(x) = ax^2 + bx$ ,

г)  $U(x) = -\alpha/x + \beta/x^2$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ), ( $E < 0$ ,  $E > 0$ ).

Здесь  $E$  – величина полной механической энергии.

### Задачи средней трудности

2.8. Пузырек воздуха, имея заданную плотность  $\rho = \text{const}$ , под действием архимедовой силы поднимается со дна реки. Известно, что скорость течения реки зависит от текущей высоты подъема пузырька  $y$  по закону  $v_x = \alpha F(y)$ .

а) Показать, что траектория пузырька в пренебрежении силами тре-

ния выражается формулой  $x(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2(\kappa-1)g}} \int_0^y y^{-1/2} F(y) dy$ . Здесь

$\kappa = \rho_b/\rho$ ,  $\rho_b$  – плотность воды,  $g$  – ускорение силы тяжести.

б) Оценить величину сноса пузырька по горизонтали, если глубина реки известна ( $h = 10$  м). Закон изменения скорости течения реки с высотой взять в виде  $v_x = (g/h)^{1/2} y$ .

- 2.9. Моторная лодка массы  $m$ , двигающаяся с постоянной силой тяги  $F_0$ , перпендикулярной берегу, пересекает реку шириной  $2L$ . Скорость течения реки равна нулю у берегов и *линейно* возрастает к середине реки, принимая максимальное значение  $u_{\max}$  на ее середине ( $y = L$ ). Определить траекторию лодки, считая, что ее начальная скорость в момент запуска двигателя была равна нулю (ось  $Ox$  направить вдоль реки; ускорение лодки поперек реки задается выражением  $w_y = F_0/m = a$ , а скорость вдоль реки –  $v_x = u(y)$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq L, \quad x_1(y) = \frac{au_{\max}}{6L} \left( \frac{2y}{w} \right)^{3/2}; \\ L \leq y \leq 2L, \quad x_2(y) = -\frac{4}{3} u_{\max} \left( \frac{2L}{w} \right)^{1/2} + 2u_{\max} \left( \frac{2y}{w} \right)^{1/2} - x_1(y) \end{array} \right]$$

- 2.10. Над поверхностью Земли действует однородное магнитное поле, вектор напряженности  $\mathbf{H}$  которого горизонтален. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  начинает движение на высоте  $h$  от Земли со скоростью  $v_0$ , направленной вертикально вниз. При каком значении высоты  $h$  частица не сможет достичь поверхности Земли? (ускорение свободного падения считается известным и равно  $g$ ).

$$\left[ h > \frac{1}{\omega^2} \left( g + \sqrt{v_0^2 \omega^2 + g^2} \right), \quad \omega = \frac{eH}{mc} \right]$$

- 2.11. Горизонтально летящая пуля, имея массу  $m$  и начальную скорость  $v_0$ , попадает в материал, величина силы сопротивления которого меняется по закону:  $R = -\gamma v^a x^b$  ( $v = \dot{x}$ , параметры  $a, b > 0$ ).

Определить максимальную глубину проникновения пули в материал  $L$  и закон движения пули для случаев:

а)  $a = 1, b = 1$ ;    б)  $a = 3/2, b = 1/2$ ;    в)  $a = 1/2, b = 3/2$ .

$$\left[ v(x) = v_0 \left( 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^{1+b} \right)^{1/(2-a)}, \quad L = \left[ \frac{m(1+b)}{\gamma(2-a)} v_0^{2-a} \right]^{1/(1+b)} \right]$$

г) Вычислить работу, совершенную пулей, до ее остановки.

$$\left[ A = \frac{(2-a)}{2(1+b)} \gamma v_0^a L^{1+b} \text{ (особо исследовать случай } a = 2) \right]$$

2.12. Определить закон движения частицы в заданном поле  $U(x)$  и вычислить период колебания в областях финитного движения для потенциалов:

а)  $U(x) = U_0(\exp(-2\alpha x) - \beta \exp(-\alpha x))$  ( $\alpha, \beta > 0$ ; потенциал Морзе),

б)  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(\alpha x)$ , ( $2\alpha|x| \leq \pi$ ),

в)  $U(x) = -U_0/\operatorname{ch}^2(\alpha x)$ ,

г)  $U(x) = -\alpha/x^2$ .

2.13. Частица, имеющая массу  $m$  и заряд  $e$ , влетает:

а) в однородное стационарное электрическое поле  $\mathbf{E}$ ,

б) в однородное стационарное магнитное поле  $\mathbf{H}$

со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , перпендикулярной направлению поля. Определить закон движения частицы для этих случаев, считая, что на нее, кроме силы Лоренца, действует дополнительно сила сопротивления  $\mathbf{R} = -\beta \mathbf{v}$  (при  $t = 0 \mathbf{r}_0 = 0, \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_y$ ).

$$\left[ \begin{aligned} \text{б)} \left( x - v_0 \omega / \Omega^2 \right)^2 + \left( y - v_0 \beta / m \Omega^2 \right)^2 &= (v_0 / \Omega)^2 \exp(-2\beta t / m) \\ \omega &= eH / mc, \quad \Omega^2 = \omega^2 + (\beta / m)^2 \end{aligned} \right]$$

2.14. Определить приближенно закон движения частицы в поле  $U(x)$ .

а) вблизи точки остановки  $x = a$ :  $U'(a) \neq 0$ ;

$$\left[ \begin{aligned} \text{а)} x(t) &= a \pm Ft^2/2m, \quad F = -U'(a) \\ \text{точность формулы убывает при росте } |x - a| \end{aligned} \right]$$

б) вблизи точки экстремума  $x = a$ :  $U'(a) = 0$  и  $U''(a) \neq 0$ .

$$\left[ \begin{aligned} \text{б)} x(t) &= a \pm s \exp(\pm \lambda t), \quad s = x(0) - a, \quad \lambda^2 = -U''(a)/m \\ \text{знак в показателе степени определяется} \\ \text{направлением скорости в начальный момент времени} \end{aligned} \right]$$

Задачи повышенной трудности

- 2.15. Электрон движется в неоднородном магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H} = H_0\Phi(y/a)\mathbf{e}_z$ . Найти закон движения и траекторию электрона при следующих начальных условиях:  $\mathbf{r}(0) = 0$ ,  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_y$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \int_0^y (v_0^2 - \psi^2(y))^{-1/2} dy, \quad x(y) = \int_0^y \psi(y) (v_0^2 - \psi^2(y))^{-1/2} dy, \\ \psi(y) = a\omega_H \int_0^{y/a} \Phi(u) du, \quad \omega_H = -\frac{eH_0}{m_e c} \end{array} \right]$$

- 2.16. Частица с массой  $m$ , двигающаяся со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , переходит из полупространства, в котором ее потенциальная энергия постоянна и равна  $U_1$ , в полупространство с постоянной энергией  $U_2$ . Определить изменение величины и направления скорости частицы (угол  $\theta_1$  между нормалью к плоскости раздела полупространств и направлением скорости  $\mathbf{v}_1$ , считается заданным).

$$\left[ v_2 = v_1 \sqrt{1 + \frac{2(U_1 - U_2)}{mv_1^2}}, \quad \text{ctg } \theta_2 = \frac{1}{\sin \theta_1} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \frac{2(U_1 - U_2)}{mv_1^2}} \right]$$

- 2.17. Известно, что тангенциальная и нормальная компоненты силы, действующие на материальную точку массы  $m$ , зависят от угла  $\varphi$ , образованного касательной, проведенной к некоторой точке траектории, и направлением оси  $Ox$ . Определить закон движения материальной точки при следующих начальных условиях:  $t = 0$ ,  $v = v_0$ ,  $\varphi = 0$ .

Указание: выразить радиус кривизны через угловые переменные с помощью соотношения  $1/R = \dot{\varphi}/v$ .

$$\left[ \begin{array}{l} v(\varphi) = v_0 \exp \left[ \int_0^\varphi \frac{F_\tau(u)}{F_n(u)} du \right], \quad t = m \int_0^\varphi \frac{v(u)}{F_n(u)} du. \\ x(\varphi) = m \int_0^\varphi \frac{v^2(u) \cos(u)}{F_n(u)} du, \quad y(\varphi) = m \int_0^\varphi \frac{v^2(u) \sin(u)}{F_n(u)} du \end{array} \right]$$

- 2.18. Небольшая шайба массы  $m$ , расположенная на вершине шероховатой сферы радиуса  $R$ , скатывается с нее без начальной скорости. Коэф-



коэффициент трения зависит от полярного угла  $\theta$  и задается некоторой функцией  $k(\theta)$ . Найти зависимость скорости шайбы от полярного угла  $v(\theta)$ . Получить решение для скорости и зависимости угла скатывания от времени (в квадратурах) для  $k = \text{const}$ .

$$\left[ R \frac{d\theta}{dt} = v(\theta) = \sqrt{2gR} \left[ \exp(\Phi(\theta)) \int_0^\theta (\sin(u) - k(u) \cos(u)) \exp(-\Phi(u)) du \right]^{1/2}, \right. \\ \left. \Phi(\theta) = 2 \int_0^\theta k(u) du \right]$$

2.19. Небольшая шайба массы  $m$ , расположенная *внутри* шероховатой полусферы, скатывается внутри нее под действием собственного веса без начальной скорости, начиная с некоторого угла  $\theta_0$  ( $\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$ ). Коэффициент трения зависит от полярного угла  $\theta$  и задается некоторой функцией  $k(\theta)$ .

а) Найти зависимость скорости шайбы от полярного угла  $v(\theta)$ .

б) Получить решение для скорости и зависимости угла скатывания от времени (в квадратурах) для  $k = \text{const}$ .

$$\left[ R \frac{d\theta}{dt} = v(\theta) = \sqrt{2gR} \left[ \exp(-\Phi(\theta)) \int_{\theta_0}^\theta (\sin(u) - k(u) \cos(u)) \exp(\Phi(u)) du \right]^{1/2}, \right. \\ \left. \Phi(\theta) = 2 \int_{\theta_0}^\theta k(u) du \right]$$

2.20. Тело массы  $m$  движется под действием нестационарной возвращающей силы  $\mathbf{F}_1 = -k(t)\mathbf{r}$  и нестационарной силы сопротивления среды  $\mathbf{F}_2 = -\gamma(t)\mathbf{v}$ . Какому условию должны удовлетворять функции  $k(t)$  и  $\gamma(t)$ , чтобы одним преобразованием по временной переменной  $\tau$  исходное уравнение движения можно было свести к уравнению движения с постоянными  $k_0$  и  $\gamma_0$ ? Найти это преобразование.

$$\left[ m \frac{dY}{dt} + \gamma(t)Y - \gamma_0 Y^2 = 0, \quad \tau = \int Y(t) dt, \quad Y(t) = \sqrt{\left| \frac{k(t)}{k_0} \right|} \right]$$

## Раздел 3. Метод законов сохранения и движение в центральном поле

### Минимальные теоретические сведения

#### Законы изменения и сохранения физических величин и интегралы движения

Как было продемонстрировано в предыдущем разделе, задача о движении одной частицы имеет общее решение для сравнительно широкого класса сил. Проблему движения двух частиц также можно решить в квадратурах при достаточно общих допущениях о силе взаимодействия между частицами (см. следующий раздел). Однако задача трех и большего количества частиц при общих предположениях о силах взаимодействия встречает непреодолимые трудности. Известны только некоторые частные решения этой задачи или решения для очень узкого класса взаимодействий.

В связи с этим приобретают огромное значение общие теоремы, справедливые при любом числе частиц, которые часто позволяют получить общие результаты без решения систем дифференциальных уравнений или контролировать правильность приближенных решений. Такими универсальными теоремами являются законы изменения и сохранения импульса, момента и энергии механической системы.

Законы сохранения физических величин приводят к интегралам движения. Интегралом движения называется такая функция времени, координат и скоростей частиц, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями. Интегралы движения, содержащие скорости частиц, называются первыми интегралами движения. Вторыми интегралами движения называются такие функции времени, координат частиц и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения.

Наличие интегралов движения существенно облегчает решение системы уравнений движения. Знание, например,  $s$  независимых первых ин-

тегралов движения дает возможность понизить порядок системы дифференциальных уравнений на  $s$ . Для механической системы, состоящей из  $N$  частиц, система  $6N$  первых интегралов или  $3N$  вторых интегралов движения эквивалентны общему решению уравнений движения.

Сами законы сохранения, следовательно, и интегралы движения, являются следствием законов изменения физических величин со временем – их частными случаями. Закон изменения импульса системы  $N$  материальных точек  $\mathbf{P}$  получается на основе второго закона Ньютона и имеет вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ex}}$  – сумма всех внешних сил, действующих на точки системы.

Для замкнутой, или изолированной, системы, т.е. системы, взаимодействием которой с прочими, не входящими в нее телами, можно пренебречь, внешние силы равны нулю и поэтому

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \text{const} = \mathbf{P}_0,$$

т.е. имеет место закон сохранения импульса и импульс является первым интегралом движения. Если система будет не замкнута, то в том случае, когда проекция суммы всех внешних сил на некоторую неподвижную ось (скажем ось  $z$ ) в любой момент времени равна нулю, проекция импульса системы на ту же ось будет сохраняться, т. е.

$$P_z = \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = P_{z0}.$$

Наряду с полным импульсом системы, важную роль в механике играет момент количества движения, или момент импульса системы. Он определяется как сумма моментов импульса отдельных точек системы

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i],$$

где  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{p}_i$  – радиус-вектор и импульс  $i$ -ой точки системы. Закон изменения момента импульса системы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^{\text{ex}}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{L}^{\text{ex}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}]$  – момент всех внешних сил, действующих на систему.

Для изолированной системы точек  $\mathbf{L}^{\text{ex}} = 0$  и из (3.2) получаем закон сохранения момента количества движения

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \text{const} = \mathbf{M}_0,$$

т.е. полный момент количества движения изолированной системы точек остается постоянным и также является первым интегралом движения.

Введем полную потенциальную энергию системы  $U = U^{\text{ex}} + U^{\text{in}}$  как сумму ее потенциальной энергии во внешних полях  $U^{\text{ex}}$  и внутренней по-

тенциальной энергии  $U^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N U_{ki}(r_{ki})$ , где  $U_{ki}(r_{ki})$  – зависящая от рас-

стояния  $r_{ki}$  между  $i$ -ой и  $k$ -ой точками потенциальная энергия их взаимодействия. Определяя полную механическую энергию системы  $E = T + U$  как сумму кинетической  $T$  и полной потенциальной энергии  $U$ , можно получить закон ее изменения со временем в виде

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \frac{\partial U^{\text{ex}}}{\partial t} + N^{\text{d}}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что изменение полной энергии обусловлено нестационар-

ностью внешнего потенциального поля и мощностью  $N^{\text{d}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{\text{d}} \mathbf{v}_i)$  всех

диссипативных сил  $\mathbf{F}_i^{\text{d}} = \mathbf{F}_i^{\text{ex.d}} + \mathbf{F}_i^{\text{in.d}}$ , как внешних  $\mathbf{F}_i^{\text{ex.d}}$ , так и внутренних

$\mathbf{F}_i^{\text{in.d}}$ . Если диссипативные силы (внешние и внутренние) отсутствуют и если потенциальная энергия системы во внешних полях не зависит явно от времени, то полная механическая энергия системы

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + U^{\text{ex}} + \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N U_{ki}(r_{ki}) = \text{const} = E_0$$

будет сохраняться, т.е. будет интегралом движения. Такую систему называют консервативной.

### Движение в центральном поле

Использование законов сохранения и интегралов движения удобно продемонстрировать на примере рассмотрения задачи о движении частицы в центральном поле.

Если сила, действующая на частицу, направлена вдоль ее радиус-вектора (параллельно или антипараллельно ему), то такая сила называется центральной. Если к тому же модуль этой силы зависит только от величины радиус-вектора, то сила является потенциальной и стационарной. Тогда помещая начало системы координат в силовой центр, в соответствии с (3.2) и (3.3) получим четыре первых скалярных интеграла движения

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{r} \mathbf{v}] = \mathbf{M}_0, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E_0.$$

Из этих четырех интегралов независимы только три, поскольку три компоненты момента импульса  $M_x, M_y, M_z$  связаны между собой соотношением

$$(\mathbf{M}\mathbf{v}) = m([\mathbf{r} \mathbf{v}]\mathbf{v}) = 0.$$

Наряду с первыми интегралами движения, в данной задаче можно найти три вторых независимых интеграла. Один из них получается в результате скалярного умножения вектора момента импульса  $\mathbf{M}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$

$$(\mathbf{M}\mathbf{r}) = M_x x + M_y y + M_z z = m([\mathbf{r} \mathbf{v}]\mathbf{r}) = 0$$

и представляет собой уравнение плоскости, в которой происходит движение частицы и которая оказывается перпендикулярной направлению сохраняющегося момента  $\mathbf{M}$ . Два других вторых интеграла движения можно получить направляя ось  $z$  по вектору  $\mathbf{M}$  и вводя на плоскости  $xOy$  полярные координаты  $\rho$  и  $\phi$ . Для величины момента  $M$  и полной энергии частицы  $E$  тогда найдем

$$M = m\rho^2\dot{\phi}, \quad E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + U(\rho).$$

Выражая из 1-го соотношения  $\dot{\phi}$  через  $M / m\rho^2$  и подставляя во второе, для энергии частицы будем иметь

$$E = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{M^2}{2m\rho^2} + U(\rho).$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя по времени от 0 до  $t$ , получаем еще один второй интеграл в виде

$$C_1 = \text{const} = t \mp \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(\rho)] - \frac{M^2}{m^2\rho^2}}}. \quad (3.4)$$

Верхний знак соответствует движению от центра ( $\dot{\rho} > 0$ ). Далее, написав  $d\varphi$  как  $d\varphi = \frac{M}{m\rho^2} dt$  и интегрируя по  $\varphi$  от 0 до  $\varphi$ , находим 3-ий второй интеграл движения

$$C_2 = \text{const} = \varphi \mp \int \frac{M}{\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{2m[E - U(\rho)] - \frac{M^2}{\rho^2}}}. \quad (3.5)$$

Формулы (3.4) и (3.5) в общем виде решают поставленную задачу. Вторая из них определяет связь между координатами  $\rho$  и  $\varphi$ , т.е. дает уравнение траектории на плоскости, в то время как первая определяет в неявном виде расстояние  $\rho$  двигающейся частицы от силового центра как функцию времени.

В частности, для силы притяжения, меняющейся обратно пропорционально квадрату расстояния до силового центра, т.е. для потенциальной энергии  $U(\rho) = -\alpha/\rho$  с  $\alpha > 0$  (проблема Кеплера), из (3.5) получим уравнение траектории в виде

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.6a)$$

с параметрами  $p$  и  $\varepsilon$ , определяемыми соотношениями

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.6b)$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Автомобиль заданной массы  $m$  движется таким образом, что развиваемая им мощность в процессе движения сохраняет свое *постоянное* значение. Показать, что путь, проходимый автомобилем, изменяется со

временем по закону  $S(t) = at^{3/2}$ . Считать, что в начальный момент времени его скорость равна нулю.

*Решение.* Для связи мощности со скоростью движения воспользуемся законом изменения кинетической энергии, который следует из (3.3),

$$\frac{dT}{dt} = N_0. \quad (3.7)$$

Здесь  $N_0$  – мощность *всех* сил (включая и внутренние), действующих на автомобиль. По условию задачи  $N_0$  является величиной постоянной. Интегрируя уравнение (3.7) с учетом начальных условий получим, что величина скорости меняется по закону

$$v(t) = \left( \frac{2N_0}{m} \right)^{1/2} t^{1/2}. \quad (3.8)$$

Определив закон изменения скорости и интегрируя (3.8) с учетом соотношения  $ds/dt = v(t)$ , находим искомый закон изменения  $s(t)$

$$s(t) = \frac{2}{3} \left( \frac{2N_0}{m} \right)^{1/2} t^{3/2}. \quad (3.9)$$

Последняя формула (3.9) дает решение поставленной задачи.

*Замечание.* Получите решение для  $s(t)$ , если в начальный момент времени скорость автомобиля  $v_0 \neq 0$ .

$$\left[ s(t) = \frac{m}{3N_0} \left[ v_0^2 + (2N_0/m)t \right]^{3/2} \right].$$

**Задача 2.** Найти закон движения частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в магнитном поле  $\mathbf{H}(0, 0, H_0 \cos(y/a))$ . Начальные условия в декартовых координатах имеют вид  $\mathbf{r}(0) = 0$ ,  $\mathbf{v}(0) = (0, \omega a, 0)$ , где  $\omega = eH_0/mc$ .

*Решение.* Умножив векторное уравнение движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \quad (3.10)$$

скалярным образом сначала на скорость  $\mathbf{v}$ , а затем на орт  $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{H}$ , можно получить следующие интегралы движения:

$$m \left( \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = 0 \rightarrow T = \frac{m(\mathbf{v} \mathbf{v})}{2} = \text{const} \quad \text{и} \quad m \left( \mathbf{e}_z \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = 0 \rightarrow v_z = (\mathbf{v} \mathbf{e}_z) = \text{const}.$$

Учет начальных условий приводит к следующему выражению

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 = \omega^2 a^2, \quad (3.11a)$$

Разделив на массу  $x$ -компоненту уравнения (3.10), имеем

$$\frac{d\dot{x}}{dt} - \omega \dot{y} \cos(y/a) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}[\dot{x} - a\omega \sin(y/a)] = 0 \rightarrow \dot{x} - a\omega \sin(y/a) = \text{const}.$$

Опять используя начальные условия, получаем

$$\dot{x} = \omega a \sin(y/a). \quad (3.11b)$$

Из системы двух уравнений (3.11) находим

$$\dot{y}^2 = \omega^2 a^2 \cos^2(y/a). \quad (3.12)$$

Интегрируя (3.12), получаем

$$\omega t = \int_0^y \frac{dy}{a \cos(y/a)} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin(y/a)}{1 - \sin(y/a)}}. \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.11a), (3.13) находим закон движения частицы

$$\dot{x}(t) = a\omega \operatorname{th}(\omega t), \quad x(t) = a \ln[\operatorname{ch}(\omega t)], \quad (3.14a)$$

$$y(t) = a \operatorname{arcsin}[\operatorname{th}(\omega t)]. \quad (3.14b)$$

**Задача 3.** Найти закон движения заряда в радиально-симметричном (т.е. *не зависящем* от азимутального угла  $\varphi$ ) магнитном поле  $\mathbf{H} = H_0 \Phi(\rho) \mathbf{e}_z$ . Начальные условия в полярных координатах имеют вид  $\mathbf{r}(0) = (\rho_0, \varphi_0)$ ,  $\mathbf{v}(0) = (v_\rho(0), \rho_0 \omega_H, 0)$ ;  $\omega_H = eH_0/mc$ .

*Решение.* Магнитная компонента силы Лоренца в полярных координатах принимает вид

$$\mathbf{F}_L = \frac{eH_0}{c} \frac{d\varphi}{dt} \rho \Phi(\rho) \mathbf{e}_\rho - \frac{eH_0}{c} \frac{d\rho}{dt} \Phi(\rho) \mathbf{e}_\varphi.$$

Уравнения Ньютона в полярных координатах запишутся в виде

$$\frac{dv_\rho}{dt} - \rho \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \omega_H \rho \Phi(\rho) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = -\omega_H \frac{d\rho}{dt} \Phi(\rho). \quad (3.15)$$

Из последнего уравнения (3.15), переходя к новой независимой переменной  $\rho$ , получаем



$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M(\rho)}{\rho^2}, \quad M(\rho) = \rho_0^2 \omega_H - \omega_H \int_{\rho_0}^{\rho} u \Phi(u) du. \quad (3.16)$$

Воспользовавшись определением радиальной компоненты скорости и учитывая связь (3.16) угловой скорости и расстояния  $\rho$ , первое уравнение в выражении (3.15) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (v_\rho^2) = \omega_H \frac{\Phi(\rho)M(\rho)}{\rho} + \frac{M^2(\rho)}{\rho^3}. \quad (3.17)$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом начальных условий, получаем квадратурные формулы для связи радиальной компоненты скорости и пройденного радиального расстояния со временем

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{v_\rho^2(0) - U(\rho)}, \quad t = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{du}{\sqrt{v_\rho^2(0) - U(u)}}. \quad (3.18)$$

Здесь потенциальная функция определяется выражением

$$U(\rho) = -2\omega_H \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\Phi(u)M(u)}{u} du - 2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M^2(u)}{u^3} du. \quad (3.19)$$

С учетом последних формул (3.18), (3.19) и связи (3.16) можно получить квадратурную формулу для искомой траектории

$$\varphi - \varphi(0) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M(u) du}{u^2 \sqrt{v_0^2(0) - U(u)}}. \quad (3.20)$$

Формулы (3.18) и (3.20) решают поставленную задачу. Решение этой задачи *повышенной* трудности мы привели только по одной причине: показать, что существуют силовые поля, которые можно считать обобщением стандартной задачи о движении материальной точки в центральном поле. Любые точные решения нетривиальных уравнений Ньютона в квадратурах для произвольных сил представляют особую ценность для теоретической механики.

*Замечание.* Рекомендуется воспроизвести и проверить эти общие формулы, взяв для рассмотрения частный случай:  $\Phi(\rho) = \rho$ .

## Задачи

### Обязательные задачи

- 3.1. Материальная точка с массой  $m$  описывает окружность радиуса  $a$ , притягиваясь некоторой точкой  $O$  этой окружности. Найти силу притяжения и скорость точки как функции расстояния  $\rho$  до центра притяжения (момент импульса материальной точки считать заданным и равным  $M$ ).

$$\left[ \mathbf{F} = -\frac{8M^2 a^2}{m\rho^5} \mathbf{e}_\rho, \quad v = \frac{2Ma}{m\rho^2} \right]$$

- 3.2. Доказать, что при движении частицы в поле  $V(\rho) = -\alpha/\rho$ , где  $\alpha$  – положительная константа, величина  $\mathbf{A} = [\mathbf{v} \mathbf{M}] - \alpha \mathbf{e}_\rho$  есть интеграл движения. Найти траекторию частицы, используя при этом постоянство вектора  $\mathbf{A}$ .
- 3.3. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e$ . Найти отношение максимального  $\dot{\phi}_{\max}$  и минимального  $\dot{\phi}_{\min}$  значений угловой скорости радиус-вектора спутника.

$$[\dot{\phi}_{\max}/\dot{\phi}_{\min} = (1 + e)^2/(1 - e)^2]$$

- 3.4. Первая космическая скорость  $v_1$  определяется как минимальная скорость, которую необходимо придать телу, чтобы оно стало искусственным спутником планеты. Вторая космическая скорость  $v_2$  определяется как минимальная скорость, которую должно иметь тело, чтобы выйти из сферы влияния планеты, и начать инфинитное движение. Оценить величины этих скоростей для Земли и Луны.

$$\left[ v_1 = \sqrt{gR}, \quad v_2 = v_1 \sqrt{2}, \quad v_{13} \cong 8 \text{ км/сек}, \quad v_{1Л} \cong 1.7 \text{ км/сек} \right]$$

- 3.5. Тело без начальной скорости падает на Землю с большой высоты  $H$ . Найти зависимость скорости тела от его текущей высоты  $h$ . Исследовать случаи  $H/R \ll 1$ ,  $h/R \ll 1$  и  $H/R \gg 1$ ,  $h/R \gg 1$  ( $R$  – радиус Земли).

$$\left[ v(h) = \sqrt{\frac{2gR^2(H-h)}{(R+h)(R+H)}} \right]$$

- 3.6. Тело падает на Землю с большой высоты  $h$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти время  $T$ , по истечении которого тело достигнет поверхности Земли, и скорость, которую оно приобретет за это время. Радиус Земли  $R$  предполагается известным.
- 3.7. Найти траектории (изобразить их примерный вид) и закон движения частицы в поле  $U = -U_0$  (при  $r < R$ ) и  $U = 0$  (при  $r > R$ ) (сферическая потенциальная яма) при различных значениях начального момента импульса  $M$  и энергии  $E$ .
- 3.8. Найти траектории движения частицы и изобразить их примерный вид, если она движется в потенциальном поле  $U(\rho)$ .
- а)  $U(\rho) = \alpha/\rho + \beta/\rho^2$ , ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ );
- б)  $U(\rho) = -\alpha/\rho + \beta/\rho^2$ , ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ );
- в)  $U(\rho) = -\alpha/\rho - \beta/\rho^2$ , ( $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < M^2/2m$ );
- г)  $U(\rho) = -\alpha/\rho - \beta/\rho^2$ , ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > M^2/2m$ ).
- 3.9. Показать, что в поле  $U = -\alpha/r - (\mathbf{F}_0 \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{F}_0$  – постоянная величина, скалярная величина  $I = (\mathbf{F}_0 [\mathbf{v} \mathbf{M}]) - \alpha(\mathbf{F}_0 \mathbf{r})/r + [\mathbf{F}_0 \mathbf{r}]^2/2$  является интегралом движения.
- 3.10. Обобщить теорему о вириале сил для заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле.
- 3.11. Найти траекторию материальной точки, полная энергия которой при движении в потенциальном поле  $U(r) = -\alpha \ln(r/r_0)/r^2$  равна нулю.
- 3.12. Найти зависимость от координат потенциала центрального поля, в котором материальная точка может двигаться по гиперболической спирали  $\rho = p/(a\varphi + b)$ , где  $p$ ,  $a$ ,  $b$  – константы.

### Задачи средней трудности

- 3.13. С какой по величине начальной скоростью  $v_0$  нужно запустить тело с Северного полюса под углом  $\alpha_0$  к поверхности Земли ( $0 \leq \alpha_0 < \pi/2$ ), чтобы оно, пролетев под действием гравитации Земли, упало на экваторе? Силу сопротивления атмосферы не учитывать. Нарисовать два типа возможных траекторий. В каких пределах для каждого типа

траектории можно менять угол запуска  $\alpha_0$ ? Найти оптимальный угол запуска, то есть угол, при котором величина начальной скорости минимальна. Ответ выразить через радиус Земли  $R$  и величину ускорения свободного падения на поверхности Земли  $g$ .

*Примечание.* Гравитационное поле Земли совпадает с полем точечной массы, равной массе Земли и расположенной в центре Земли.

$$\left[ \begin{array}{l} v_0(\alpha_0) = \sqrt{\frac{gR}{\cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0)}}, \quad \text{где } 0 \leq \alpha_0 < 3\pi/8, \quad \alpha_{0,\text{оптим}} = \pi/8 \\ v_0(\alpha_0) = \sqrt{\frac{gR}{\cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \sin \alpha_0)}}, \quad \text{где } 0 \leq \alpha_0 < \pi/8 \end{array} \right]$$

- 3.14. Найти закон движения частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в магнитном поле  $\mathbf{H}(0, 0, H_0\Phi(x/a))$ . Начальные условия в декартовых координатах имеют вид:  $\mathbf{r}(0) = 0$ ,  $\mathbf{v}(0) = (\omega a, 0, 0)$ , где  $\omega = eH_0/mc$ . Функция  $\Phi(u)$  ( $u = x/a$ ) определяется соотношением  $\Phi(u) = \frac{d}{du} \sqrt{W(u)}$ .  $W(u)$ , в свою

очередь, задается следующими выражениями:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } W(u) = u^2 + u^{-2}; & \text{б) } W(u) = 1/\text{ch}^2(u); \\ \text{в) } W(u) = \exp(2u) - \alpha \exp(u) \quad (\alpha > 0); & \text{г) } W(u) = \text{tg}^2(u). \end{array}$$

- 3.15. Материальная точка движется в центрально-симметричном поле при наличии силы трения  $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\gamma(v)\mathbf{v}$  ( $v$  – величина вектора скорости). Доказать, что тело будет находиться в плоскости, проходящей через центр силы, при произвольных начальных условиях.
- 3.16. Частица с зарядом  $e$  движется в однородно стационарном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Доказать, что выражение  $J = (\mathbf{M}\mathbf{H}) + \frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathbf{H}]^2$  является интегралом движения. Здесь  $\mathbf{M}$  – момент импульса частицы.
- 3.17. Частица с зарядом  $e$  и массы  $m$  движется в поле магнитного монополя  $\mathbf{H} = \mu\mathbf{r}/r^3$ . Найти интеграл движения, следующий из закона изменения момента импульса частицы.
- 3.18. Проинтегрировать уравнения движения свободной точки в цилиндрических координатах.

- 3.19. Шарик массы  $m$  находится на гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени ему сообщается скорость  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту, после чего он начинает подпрыгивать над плоскостью. Постоянный коэффициент восстановления  $\lambda$  ( $\lambda = |p_{y+}|/|p_{y-}|$ ,  $0 < \lambda < 1$ ) при ударе предполагается известным. Найти время  $\tau$ , по истечении которого шарик перестает подпрыгивать. Найти также расстояние  $L$ , пройденное шариком по горизонтали за это время.

$$\left[ \tau = \frac{2v \sin \alpha}{g(1-\lambda)}, \quad L = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g(1-\lambda)} \right]$$

- 3.20. Телу массы  $m$ , находящемуся в состоянии покоя, сообщается скорость  $v$ . Как изменится совершаемая над ним работа, если скорость тела увеличится на ту же величину  $v$ , но от начального значения скорости  $v_0$ ?

$$[\text{увеличится на величину } m(\mathbf{v}\mathbf{v}_0)]$$

- 3.21. Какие компоненты векторов импульса  $\mathbf{P}$  и момента импульса  $\mathbf{M}$  сохраняются при движении в следующих полях:

- поле бесконечной однородной плоскости;
- поле бесконечного однородного цилиндра;
- поле двух точек;
- поле однородного конуса;
- поле однородного кругового тора.

- 3.22. Найти наибольшую высоту подъема  $H$  над поверхностью Земли снаряда, вылетевшего с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha_0$  к горизонту и упавшего на Землю. Силу сопротивления атмосферы не учитывать. Ответ выразить через радиус Земли  $R$  и величину ускорения свободного падения на поверхности Земли  $g$ .

*Примечание.* Гравитационное поле Земли совпадает с полем точечной массы, равной массе Земли и расположенной в центре Земли.

$$\left[ H = R \frac{v_0^2 - gR + \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2)v_0^2 \cos^2 \alpha_0}}{2gR - v_0^2} \right]$$

- 3.23. Два спутника, имеющие равные массы, движутся в одном направлении вокруг притягивающего центра по компланарным орбитам, одна

из которых – круговая радиуса  $r_0$ , а другая – эллиптическая с расстояниями перигея и апогея  $r_0$  и  $8r_0$  соответственно. Полагая, что спутники путем непосредственной стыковки соединились друг с другом в точке соприкосновения своих орбит, а дальнейшее движение продолжали вместе, найти апогей их новой орбиты.

$$\left[ r_a = \frac{49}{23} r_0 \right]$$

### Задачи повышенной трудности

- 3.24. Получить законы изменения и сохранения импульса и момента импульса для системы частиц, обладающих переменными массами.
- 3.25. При каком условии выполняется закон сохранения полной механической энергии для системы частиц с переменными массами?
- 3.26. Три частицы (с массами  $m_1, m_2, m_3$ ) расположены в вершинах равностороннего треугольника с известной стороной  $d$  и взаимодействуют друг с другом по закону Ньютона. Найти угловую скорость вращательного движения системы, при котором относительное расположение частиц остается неизменным.

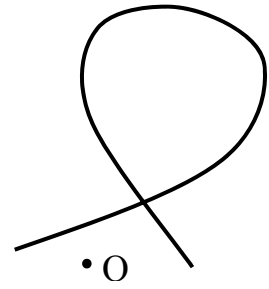
$$\left[ \Omega = \left( \gamma M / d^3 \right)^{1/2}, M = m_1 + m_2 + m_3 \right]$$

- 3.27. Спутник выведен на круговую околоземную орбиту. Сила трения, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, равна  $F_v = Av^\alpha$ , где  $v$  – полная скорость спутника. Замечено, что скорость изменения радиального расстояния  $r$  ( $dr/dt = -C$ , где  $C$  – положительная константа), обусловленная воздействием этой силы достаточно мала, так что потеря энергии за один оборот мала по сравнению с полной кинетической энергией спутника  $E$ . Из этих условий найти выражения для  $A$  и  $\alpha$ .

$$[\alpha = 3]$$

- 3.28. Частица массой  $m$  движется по круговой орбите радиуса  $R$  в поле центральной силы, потенциал которой равен  $-\alpha/r^n$ . Показать, что если  $n < 2$ , то потенциал обладает минимумом и круговая орбита будет устойчивой по отношению к малым колебаниям (т.е. частица осциллирует около круговой орбиты). Вычислить период таких осцилляций.

3.29. Материальная точка движется в поле притягивающей центральной силы  $\mathbf{F} = F(x, y, z, t) \mathbf{r}/r$ . Существует ли такая зависимость величины силы  $F(x, y, z, t)$  от координат и времени, что траектория самопересекается, а центр притяжения  $O$  лежит вне замкнутой петли. (На рисунке изображена плоскость орбиты.)



## Раздел 4. Проблема двух тел и теория столкновения и рассеяния частиц

### Минимальные теоретические сведения

#### Проблема двух тел

Под проблемой двух тел понимают задачу о движении двух взаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил. Ее решение лежит в основе небесной механики и теории свободного движения спутников, в основе теории столкновения и рассеяния частиц.

Уравнения движения частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , если потенциальная энергия их взаимодействия  $U(r)$  зависит только от расстояния между ними  $r$ , в инерциальной лабораторной системе координат  $Oxyz$  (л-системе) имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}(r), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12}(r), \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{F}_{21}(r) = -\nabla_1 U(r)$ ,  $\mathbf{F}_{12}(r) = -\nabla_2 U(r)$ .<sup>1</sup> Определяя радиус-вектор центра масс  $\mathbf{R}$  и относительный радиус-вектор двух частиц  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / m, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $m = m_1 + m_2$ , из системы (4.1) находим движение центра масс

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad (4.3)$$

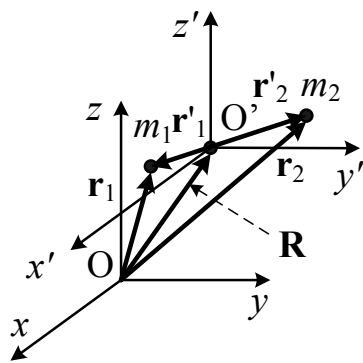
где  $\mathbf{V}_0 = (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}) / m$ ,  $\mathbf{R}_0 = (m_1 \mathbf{r}_{10} + m_2 \mathbf{r}_{20}) / m$ , а  $\mathbf{r}_{10}$ ,  $\mathbf{r}_{20}$ ,  $\mathbf{v}_{10}$ ,  $\mathbf{v}_{20}$  – начальные радиус-векторы и скорости соответствующих частиц, и получаем уравнение движения для фиктивной  $\mu$ -частицы

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(r). \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> Оператор "набла"  $\nabla$  используется для вычисления потенциальной силы посредством векторной операции **grad** и имеет вид  $\nabla_i = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_i} = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_i}$ .



Величину  $\mu = m_1 m_2 / m$  называют приведенной массой системы двух частиц, а уравнение (4.4) описывает движение  $\mu$ -частицы в центрально-симметричном поле с потенциалом  $U(r)$ . Для интерпретации этого уравнения удобно перейти к новой системе координат  $O'x'y'z'$  ( $\mu$ -системе), центр которой совмещается с центром масс системы, а оси ориентированы параллельно осям  $l$ -системы (см. рисунок). Радиус-векторы частиц  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$  в  $\mu$ -системе отсчета связаны с радиус-векторами в  $l$ -системе соотношениями



$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1, \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2, \end{cases} \quad (4.5)$$

используя которые, можно получить для  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = -(m_2 / m)\mathbf{r} = -(\mu / m_1)\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}'_2 = (m_1 / m)\mathbf{r} = (\mu / m_2)\mathbf{r}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Поскольку радиус-векторы  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$  описывают движение исходных частиц по отношению к  $\mu$ -системе, можно утверждать, что уравнение (4.4), из которого находится  $\mathbf{r}$ , тоже характеризует движение реальных частиц по отношению к  $\mu$ -системе, а формально представляет собой уравнение движения фиктивной  $\mu$ -частицы в заданном центральном поле с центром силы, как бы помещенном в центр масс системы двух частиц. Решению этой задачи был посвящен раздел 3. Найдя радиус-вектор  $\mu$ -частицы  $\mathbf{r}$ , и, используя (4.3) и (4.5), можно затем найти законы движения реальных частиц относительно исходной системы координат

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - (m_2 / m)\mathbf{r}(t), \\ \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + (m_1 / m)\mathbf{r}(t). \end{cases} \quad (4.7)$$

### Теория столкновения и рассеяния частиц

Если в начальный момент времени две частицы находятся достаточно далеко друг от друга, а их начальные скорости направлены так, что с течением времени происходит сближение частиц, то в результате взаимодействия они могут снова удалиться на достаточно большое расстояние друг от друга, причем их скорости изменятся как по величине, так и по направлению. В этом случае говорят, что произошло рассеяние частиц. Рассеяние частиц зависит от характера взаимодействия между частицами, поэтому изучение та-

ких процессов играет большую роль в физике.

В задаче о рассеянии считаются известными массы частиц и потенциальная энергия их взаимодействия как функция расстояния между ними, а взаимодействие с внешними объектами не принимается во внимание. До рассеяния частицы считаются бесконечно удаленными друг от друга и обладающими скоростями, равными

$$\mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_1(t)|_{t=-\infty}, \quad \mathbf{v}_2^- = \mathbf{v}_2(t)|_{t=-\infty},$$

где  $\mathbf{v}_1(t)$  и  $\mathbf{v}_2(t)$  – скорости обеих частиц в момент времени  $t$ . Помимо скоростей  $\mathbf{v}_1^-$  и  $\mathbf{v}_2^-$ , также считается известным так называемое *прицельное расстояние*  $\rho$ , т.е. минимальное расстояние, на котором частицы пролетели бы друг от друга, если бы не взаимодействовали между собой. Скорость центра инерции

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-) / m \quad (4.8)$$

является интегралом движения и сохраняется во времени, а скорость  $\mu$ -частицы в момент времени  $t = -\infty$

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^- = \dot{\mathbf{r}}_2^- - \dot{\mathbf{r}}_1^- \quad (4.9)$$

определяется через скорости рассеивающихся частиц.  $\mu$ -частица движется в одной плоскости, ориентация которой по отношению к  $\zeta$ -системе в теории рассеяния считается заданной. По известным данным,  $\mathbf{v}_1^-$ ,  $\mathbf{v}_2^-$ ,  $U(r)$ , углу  $\varepsilon$ , задающему ориентацию плоскости движения  $\mu$ -частицы, прицельному расстоянию  $\rho$ , в задаче о рассеянии требуется определить скорости обеих частиц после рассеяния, т.е. скорости частиц при  $t = +\infty$

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_1(t)|_{t=+\infty}, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_2(t)|_{t=+\infty}.$$

В случае упругого рассеяния, после которого внутренняя энергия частиц остается неизменной и скорость  $\mu$ -частицы по величине также не меняется, т.е.  $v^+ = v^-$ , общее решение задачи можно получить сразу, используя выражения радиус-векторов частиц через радиус-вектор  $\mu$ -частицы (4.6), а также факт сохранения скорости центра масс (4.8)  $\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^- = \mathbf{V}$ . Дифференцируя (4.6) по времени, будем иметь

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1 = -(m_2 / m)\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}'_2 = (m_1 / m)\mathbf{v}. \end{cases} \quad (4.10)$$

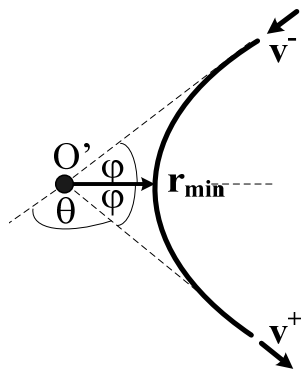
Аналогичным образом, дифференцируя (4.7), найдем

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{V} - (m_2 / m)\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + (m_1 / m)\mathbf{v}. \end{cases}$$

Устремляя в этих соотношениях  $t \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^+ = \mathbf{V} - (m_2 / m)\mathbf{v}^+ = \mathbf{V} - (m_2 / m)v^- \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{V} + (m_1 / m)\mathbf{v}^+ = \mathbf{V} + (m_1 / m)v^- \mathbf{e}_\theta, \end{cases} \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{e}_\theta$  – единичный вектор, направленный по вектору  $\mathbf{v}^+$ . Его направление удобнее всего определить по отношению к направлению вектора  $\mathbf{v}^-$ , тогда он непосредственно будет характеризовать отклонение при рассеянии скоростей первой и второй частиц от их первоначальных направлений в  $\zeta$ -системе. Этот же вектор характеризует отклонение при рассеянии на центре масс скорости  $\mu$ -частицы от ее начального направления. Угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{v}^+$  и  $\mathbf{v}^-$ , называемый углом рассеяния в  $\zeta$ -системе, очень просто связан с угловыми характеристиками траектории  $\mu$ -частицы, а именно:



$$\theta = \pi - 2\phi, \quad (4.12)$$

где угол  $\phi$  есть угол между асимптотой траектории и минимальным радиус-вектором  $\mu$ -частицы  $\mathbf{r}_{\min}$ . Величину этого угла мы можем вычислить, воспользовавшись выражением

$$\phi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu(v^-)^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}, \quad (4.13)$$

где  $r_{\min}$ , определяющий точку поворота, является корнем уравнения

$$1 - \frac{2U(r)}{\mu(v^-)^2} - \frac{\rho^2}{r^2} = 0. \quad (4.14)$$

Вследствие того, что решение (4.11) получено лишь на основе законов сохранения полной энергии системы и ее импульса, скорости частиц по-

сле рассеяния  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_2^+$  являются одними и теми же функциями скоростей до рассеяния  $\mathbf{v}_1^-, \mathbf{v}_2^-$ , углов  $\varepsilon$  и  $\theta$  при любом центральном взаимодействии частиц. С другой стороны,  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_2^+$  как функции скоростей  $\mathbf{v}_1^-, \mathbf{v}_2^-$ , угла  $\varepsilon$  и прицельного расстояния  $\rho$  будут различными для разных взаимодействий, так как зависимость  $\theta$  от  $\rho$  и  $v^-$  определяется конкретным видом потенциальной энергии  $U(r)$ .

Только в одном случае угол  $\theta$  имеет определенное значение при любой потенциальной энергии взаимодействия. Это случай "лобового удара", когда

$$\rho = 0, \quad \varphi = 0, \quad \theta = \pi$$

и, следовательно, вектор  $\mathbf{e}_\theta$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{v}^-$ . В таком случае его можно записать в виде

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{v}^- / v^-.$$

Это выражение для  $\mathbf{e}_\theta$  вместе с решением (4.11) позволяет получить очень простые формулы для скоростей частиц после "лобового удара" (см. ниже задачу 4.4).

Если рассматриваемые частицы не являются точечными по величине, а обладают некоторыми конечными размерами, то удар частиц друг о друга может произойти и при прицельном расстоянии не равном нулю. Конечно, в таком случае удар не обязательно будет "лобовым". В теории удара "лобовой удар" классифицируется как "центральный и прямой" и определяется как такой удар, при котором точка соприкосновения соударяющихся тел и скорости их центров масс лежат на линии центров масс. Если хотя бы одна из скоростей центров масс соударяющихся тел до удара не лежит на линии центров масс, то удар называют "косым". В теории рассеяния о случаях удара тел говорят как о столкновении частиц, и столкновение частиц рассматривается как общий случай рассеяния частиц.

Рассмотрение общего случая, когда  $\rho \neq 0$ , становится более наглядным, если применить графическое изображение решения (4.11), т.е. воспользоваться, так называемой, диаграммой скоростей. Построение и использование диаграммы скоростей показано ниже на конкретном примере при решении **Задачи 2**.

На практике приходится иметь дело не с одним актом рассеяния, который рассмотрен выше, а с множеством таких актов. Для характеристики процесса рассеяния одного пучка частиц на другом вводят величину, называемую дифференциальным эффективным поперечным сечением рассеяния  $d\sigma$ , определяя его как отношение числа  $\mu$ -частиц, рассеиваемых за единицу времени в интервал углов  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , к числу  $\mu$ -частиц, пролетающих за единицу времени через единичную площадку поперечного сечения пучка  $\mu$ -частиц до рассеяния. Величину  $d\sigma$  можно выразить в виде функции прицельного расстояния  $\rho$

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (4.15)$$

Если далее, используя уравнения (4.12)–(4.14), найти прицельное расстояние в зависимости от  $\theta$  и  $v^-$

$$\rho = \rho(\theta, v^-),$$

то можно определить дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния обоих пучков как функцию угла рассеяния в  $\mathcal{L}$ -системе

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (4.16)$$

Вместо выражения (4.16) часто используют  $d\sigma$ , отнесенное не к элементу плоского угла  $d\theta$ , а к элементу телесного угла  $d\Omega$ :

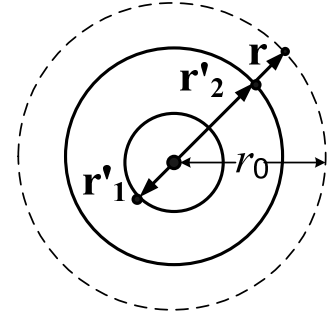
$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (4.17)$$

Экспериментальные исследования процессов рассеяния сводятся к измерению потока частиц до рассеяния и количества частиц, рассеивающихся под разными углами. Тем самым находят сечения рассеяния в лабораторной системе координат. Теоретически эти величины можно найти, вычисляя  $d\sigma(\theta)$  в  $\mathcal{L}$ -системе, а затем, определяя функции  $\theta(\theta_1)$  и  $\theta(\theta_2)$  из диаграммы скоростей, основанной на решении (4.11). Дифференциальные эффективные сечения рассеяния частиц первого и второго пучков в лабораторной системе можно далее получить как результат подстановки:

$$d\sigma_1 = d\sigma(\theta) \Big|_{\theta=\theta(\theta_1)}, \quad d\sigma_2 = d\sigma(\theta) \Big|_{\theta=\theta(\theta_2)}.$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Две материальные точки массы  $m_1$  и  $m_2$  взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Найти величины начальных скоростей точек, при которых расстояние  $r_0$  между ними во время движения не будет меняться.



*Решение.* В соответствии с (4.2) расстояние между точками есть модуль радиус-вектора  $\mu$ -частицы, и поэтому  $\mu$ -частица будет двигаться по круговой траектории. Так же, согласно (4.6), будут двигаться и обе материальные точки в системе центра масс, причем они и  $\mu$ -частица все время будут находиться на одной прямой, как показано на рисунке. Эксцентриситет круговой траектории  $\mu$ -частицы, обладающей отрицательной полной энергией, в соответствии с результатами раздела 3 (см. формулу (3.6б)), можно записать в виде

$$\varepsilon = 0 = \sqrt{1 - (2M^2|E|/\mu\alpha^2)}, \quad (4.18)$$

где  $E$  – есть полная энергия  $\mu$ -частицы,  $M$  – величина ее момента количества движения,  $\mu$  – приведенная масса и  $\alpha$  – константа взаимодействия в потенциале  $U = -\alpha/r$ , которая в данном случае гравитационного взаимодействия равна  $\gamma m_1 m_2$ . Из (4.18) для полной энергии  $E$  находим

$$E = -(\mu\alpha^2 / 2M^2) = -(\gamma^2 m_1^3 m_2^3 / 2(m_1 + m_2)M^2). \quad (4.19)$$

С другой стороны, полная энергия  $\mu$ -частицы является интегралом движения и равна сумме кинетической и потенциальной энергии. В начальный момент времени для нее будем иметь

$$E = (m_1 m_2 v_0^2 / 2(m_1 + m_2)) - (\gamma m_1 m_2 / r_0). \quad (4.20)$$

Момент количества движения  $M$   $\mu$ -частицы также интеграл движения и в начальный момент времени для частицы, двигающейся со скоростью  $v_0$  по круговой траектории радиуса  $r_0$ , для него найдем

$$M = m_1 m_2 r_0 v_0 / (m_1 + m_2). \quad (4.21)$$

Приравнявая далее величины (4.19) и (4.20), с учетом (4.21) получаем

уравнение

$$v_0^4 - [2\gamma(m_1 + m_2) / r_0] v_0^2 + \gamma^2 (m_1 + m_2)^2 / r_0^2 = 0$$

для определения начальной скорости  $\mu$ -частицы. Решая его, находим

$$v_0 = \sqrt{\gamma(m_1 + m_2) / r_0}.$$

Для начальных скоростей точек в движении, при котором расстояние  $r_0$  между ними во время движения не будет меняться в соответствии с (4.10) получаем

$$\begin{cases} v_{10} = m_2 v_0 / (m_1 + m_2) = m_2 \sqrt{\gamma / (m_1 + m_2) r_0}, \\ v_{20} = m_1 v_0 / (m_1 + m_2) = m_1 \sqrt{\gamma / (m_1 + m_2) r_0}. \end{cases}$$

**Задача 2.** Частица массы  $m_1$  до рассеяния покоится, а частица массы  $m_2$  в лабораторной системе координат движется со скоростью  $\mathbf{v}$ . Определить величины и направления скоростей обеих частиц в лабораторной системе отсчета после рассеяния как функции угла рассеяния  $\theta$  в системе центра масс.

*Решение.* Поскольку скорость первой частицы до рассеяния  $\mathbf{v}_1^- = 0$ , а скорость второй частицы  $\mathbf{v}_2^- = \mathbf{v}$ , то, согласно (4.9),  $\mu$ -частица до рассеяния движется со скоростью  $\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}$ . Для скорости центра масс будем иметь

$$\mathbf{V} = (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-) / m = m_2 \mathbf{v} / m. \quad (4.22)$$

Для скоростей первой и второй частиц до рассеяния в  $\mathcal{C}$ -системе найдем

$$\mathbf{v}_1'^- = -m_2 \mathbf{v} / m, \quad \mathbf{v}_2'^- = m_1 \mathbf{v} / m. \quad (4.23)$$

После рассеяния частиц их скорости в  $\mathcal{C}$ -системе повернутся на угол  $\theta$  и приобретут вид

$$\mathbf{v}_1'^+ = -(m_2 v / m) \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{v}_2'^+ = (m_1 v / m) \mathbf{e}_\theta. \quad (4.24)$$

С учетом (4.22) и в соответствии с (4.11) скорости обеих частиц после рассеяния в лабораторной системе координат будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^+ &= (m_2 / m) \mathbf{v} - (m_2 / m) v \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{v}_2^+ &= (m_2 / m) \mathbf{v} + (m_1 / m) v \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Умножая эти векторы скалярно сами на себя и извлекая из скалярных про-

изведений квадратные корни, получим величины скоростей обеих частиц после рассеяния

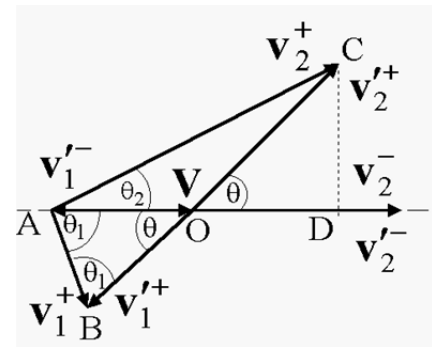
$$\begin{aligned} v_1^+ &= (m_2 v / m) \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 2(m_2 v / m) \sin(\theta / 2), \\ v_2^+ &= (v / m) \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для нахождения направлений скоростей обеих частиц после рассеяния воспользуемся диаграммой скоростей. Для ее построения (см. рисунок) выбираем некоторое направление, скажем горизонтальное, и вдоль него от некоторой точки  $O$  в направлении направо откладываем вектор скорости второй частицы до рассеяния в  $\mu$ -системе, в соответствии с (4.23) равный

$v_2'^- = m_1 v / m$ . Затем вдоль этой же прямой в противоположном направлении от той же точки  $O$  проводим вектор скорости первой частицы до рассеяния в  $\mu$ -системе, в соответствии с

(4.23) равный  $v_1'^- = -m_2 v / m$ . Эти векторы всегда противоположно направлены, поскольку они выражаются через один и тот же вектор  $v$  скорости  $\mu$ -частицы с различными скалярными коэффициентами противоположными по знаку. В процессе рассеяния вектор  $v_2'^-$  поворачивается на угол рассеяния в  $\mu$ -системе, не изменяясь по величине, и превращается в вектор  $v_2'^+$ , поэтому изображаем его повернутым на угол  $\theta$ , скажем против часовой стрелки. Точно так же ведет себя и вектор  $v_1'^-$ , превращаясь в вектор  $v_1'^+$ , оба вектора  $v_2'^+$  и  $v_1'^+$ , после рассеяния находятся на одной прямой. На рисунке мы изобразили векторы второй частицы большими по величине, допустив, что масса  $m_1 > m_2$ . Эта четверка векторов представляет собой диаграмму скоростей в  $\mu$ -системе. Для того чтобы построить полную диаграмму скоростей, к ней необходимо присоединить вектор скорости центра масс.

Чтобы иметь возможность получить векторы скоростей частиц в  $l$ -системе, вектор скорости центра масс следует провести так, чтобы он оканчивался в той точке, в которой начинаются все уже построенные четыре вектора. Характер получаемой диаграммы будет зависеть от распо-





ложения вектора скорости центра масс. Если этот вектор не будет находиться в плоскости диаграммы  $\zeta$ -системы, то результирующая диаграмма будет иметь пространственный вид, если же он окажется в той же плоскости, то диаграмма будет плоской. В нашем случае вектор скорости центра масс, равный согласно (4.22)  $\mathbf{V} = m_2 \mathbf{v} / m$ , не только находится в плоскости  $\zeta$ -диаграммы, так он еще и направлен по вектору  $\mathbf{v}'_2^-$ , а по величине в точности совпадает с вектором  $\mathbf{v}'_1^-$ . Диаграмма, таким образом, оказывается плоской, а вектор скорости центра масс мы должны провести так, чтобы он начинался в той же точке, в которой кончается вектор  $\mathbf{v}'_1^-$ , а оканчивался в точке О. Теперь для получения векторов скоростей в  $l$ -системе складываем вектор скорости центра масс с векторами скоростей частиц в  $\zeta$ -системе. В частности, добавляя к вектору  $\mathbf{V}$  вектор  $\mathbf{v}'_1^-$ , получаем вектор скорости первой частицы в  $l$ -системе  $\mathbf{v}_1^-$ , который, как и дано в условии задачи, оказывается равным нулю. Далее, складывая векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}'_2^-$ , получаем вектор скорости второй частицы в  $l$ -системе  $\mathbf{v}_2^-$ , который направлен направо по горизонтальной прямой. Он начинается в точке А, а конец его совпадает с концом вектора  $\mathbf{v}'_2^-$ . Сложение векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}'_1^+$  дает вектор  $\mathbf{v}_1^+$ , а при сложении векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{v}'_2^+$  находим вектор  $\mathbf{v}_2^+$ . Угол  $\theta_1$  между векторами  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_1^-$  по определению является углом рассеяния первой частицы в лабораторной системе координат, но вектор  $\mathbf{v}_1^- = 0$ , поэтому в данной ситуации угол  $\theta_1$  приходится определять как угол между векторами  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_2^-$ . Аналогичным образом, угол  $\theta_2$  между векторами  $\mathbf{v}_2^+$  и  $\mathbf{v}_2^-$  определяет угол рассеяния второй частицы в  $l$ -системе. Для нахождения угла  $\theta_1$  рассмотрим  $\triangle AOB$ , который, в силу равенства сторон OA и OB, является равнобедренным и угол в его вершине равен  $\theta$ . Тогда из условия  $\theta + 2\theta_1 = \pi$  находим

$$\theta_1 = (\pi - \theta) / 2. \quad (4.27)$$

Для определения угла  $\theta_2$  строим прямоугольный  $\triangle ACD$ , в котором

нам известна гипотенуза  $AC = v_2^+$  и, кроме того, мы можем, воспользовавшись  $\triangle COD$ , найти в нем катет  $CD = v_2'^- \sin \theta$ . Тогда, используя соотношения (4.23) и (4.26), для  $\sin \theta_2$  будем иметь

$$\sin \theta_2 = \frac{m_1 \sin \theta}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta}}. \quad (4.28)$$

Можно, однако, в  $\triangle ACD$  вычислить второй катет  $AD = v_1'^- + v_2'^- \cos \theta$ , и тогда для  $\operatorname{tg} \theta_2$  получить более простое выражение

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sin \theta}{(m_2 / m_1) + \cos \theta}. \quad (4.29)$$

В любом случае, соотношения (4.26), (4.27), (4.28) или (4.29) полностью решают поставленную задачу, поскольку дают величины и направления векторов скоростей  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_2^+$  как функции угла рассеяния  $\theta$  в системе центра масс.

**Задача 3.** Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$ , имеющая на бесконечности скорость  $\mathbf{v}$ , налетает на такую же частицу, первоначально неподвижную, с прицельным расстоянием  $\rho$ . Найти скорости обеих частиц после рассеяния, предполагая, что частицы взаимодействуют по закону Кулона.

*Решение.* Общее решение для скоростей  $\mathbf{v}_1^+$  и  $\mathbf{v}_2^+$  можно получить сразу, если воспользоваться результатами решения предыдущей задачи. Достаточно лишь в выражения (4.26), (4.29) подставить условие равенства масс частиц:  $m_1 = m_2 = m$ . Имеем тогда

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v \sin(\theta / 2), & \theta_1 &= (\pi - \theta) / 2, \\ v_2^+ &= v \cos(\theta / 2), & \operatorname{tg} \theta_2 &= \operatorname{tg}(\theta / 2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Из этих уравнений видим, что частицы после рассеяния двигаются под прямым углом друг к другу. Для нахождения связи между углом  $\theta$  и прицельным расстоянием  $\rho$  вычислим интеграл, определяющий угол  $\varphi$ , подставив в (4.13) потенциал кулоновского взаимодействия  $U(r) = e^2/r$  и учитывая, что приведенная масса  $\mu$  для двух частиц одинаковой массы  $m$  равна  $m/2$ . Имеем

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{4e^2}{mrv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Вводя новую переменную  $\eta = \frac{\rho}{r} + \frac{2e^2}{mrv^2}$ , для радикала найдем

$$\sqrt{1 - \frac{4e^2}{mrv^2} - \frac{\rho^2}{r^2}} = \sqrt{1 + \frac{4e^4}{m^2 \rho^2 v^4} - \eta^2}.$$

Дифференциал —  $d\eta = -\frac{\rho}{r^2} dr$ . Еще раз меняя переменную

$\varepsilon = \eta / \sqrt{1 + (4e^4 / m^2 \rho^2 v^4)}$ , интеграл сведем к виду  $\varphi = - \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ . Инте-

грируя, находим  $\varphi = \arccos \frac{\frac{\rho}{r} + \frac{2e^2}{mrv^2}}{\sqrt{1 + \frac{4e^4}{m^2 \rho^2 v^4}}}$ . Если значение угла  $\varphi$  при

$r = r_{\min}$  принять за начало отсчета угла  $\varphi$  и положить его равным нулю, то

будем иметь  $\varphi = \arccos \frac{2e^2 / mrv^2}{\sqrt{1 + (2e^2 / mrv^2)^2}}$ . Беря косинус от обеих частей

этого равенства, получаем

$$\cos \varphi = \frac{2e^2 / mrv^2}{\sqrt{1 + (2e^2 / mrv^2)^2}} \quad (4.31)$$

Вспоминая выражение (4.12), находим  $\varphi = \pi/2 - \theta/2$  и, следовательно,

$\cos \varphi = \sin(\theta/2)$ . Далее с использованием (4.31) получаем интересное

нас соотношение между прицельным расстоянием и углом рассеяния в

$\psi$ -системе  $\sin^2(\theta/2)[1 + (2e^2 / mrv^2)^2] = (2e^2 / mrv^2)^2$ . Вводя кинетическую

энергию двигающейся частицы  $E = mv^2/2$ , этому соотношению можно

придать очень компактный вид

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = e^2 / \rho E.$$

Наконец, пользуясь найденными выше выражениями (4.30), для углов рассеяния в лабораторной системе, получим

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \operatorname{tg}(\theta / 2) = e^2 / \rho E, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{ctg}(\theta / 2) = \rho E / e^2.$$

Эти формулы вместе с выражениями (4.30) для величин скоростей  $v_1^+$  и  $v_2^+$  полностью решают поставленную задачу.

## Задачи

### Обязательные задачи

- 4.1. Показать, что задача о движении двух заряженных частиц в однородном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  сводится к задаче о движении центра масс и о движении  $\mu$ -частицы в заданном поле.
- 4.2. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц определяется выражением  $U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = (c/2)(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - l)^2$ . Предполагая, что частицы все время находятся на расстоянии  $a$  друг от друга, найти величины скоростей частиц в системе центра масс.
- 4.3. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , взаимодействующие по закону всемирного тяготения, совершают финитное движение. Показать, что минимальное и максимальное расстояние  $x$  между ними являются корнями квадратного уравнения

$$Ex^2 + \gamma m_1 m_2 x - (m_1 + m_2)M^2 / 2m_1 m_2 = 0,$$

где  $E$  и  $M$  – величины энергии и момента импульса системы соответственно, а  $\gamma$  – гравитационная постоянная. Из указанного уравнения найти условие, при котором реализуются круговые орбиты.

$$\left[ \gamma^2 m_1^3 m_2^3 + 2M^2 E (m_1 + m_2) = 0 \right]$$

- 4.4. Найти скорости после упругого "лобового удара" двух одинаковых частиц, двигающихся навстречу друг другу со скоростями  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ .
- 4.5. Определить отношение масс  $m_1$  и  $m_2$  двух частиц в следующих случаях: а) первая частица находится в покое; происходит упругий "лобовой удар", после которого вторая частица остается в покое; б) ча-

стицы встречаются с равными по величине и противоположными по направлению скоростями; после "лобового удара" вторая частица остается в покое.

4.6. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся в одном и том же направлении. Каковы должны быть их скорости  $v_1$  и  $v_2$ , чтобы после столкновения догоняющая частица с массой  $m_1$  остановилась, а вторая частица получила бы заданную скорость  $u_2$ ? Столкновение частиц считать упругим.

4.7. Три абсолютно упругих шара с массами  $m_1, m_2, m_3$  покоятся в гладком горизонтальном желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с некоторой начальной скоростью, ударяет по второму шару, который, начав двигаться, в свою очередь, ударяет по третьему шару. При какой величине массы  $m_2$  второго шара третий шар получит наибольшую скорость?

$$\left[ m_2 = \sqrt{m_1 m_3} \right]$$

4.8. Частица массы  $m_1$ , движущаяся со скоростью  $v_1$ , рассеивается на покоящейся частице массы  $m_2 = 3m_1$ . После рассеяния частица с массой  $m_2$  движется под углом  $\pi/4$  к первоначальному направлению движения частицы с массой  $m_1$ . Найти угол рассеяния 1-ой частицы  $\theta_1$  и величины скоростей обеих частиц после рассеяния.

4.9. Шарик, обладающий скоростью  $\mathbf{v}$ , испытывает абсолютно упругий удар о плоскость, движущуюся со скоростью  $\mathbf{u}$ . Найти скорость шарика после удара.

4.10. Покажите, что угол рассеяния  $\theta_1$ , первоначально покоящейся рассеиваемой частицы относительно направления скорости такой же рассеиваемой частицы имеет следующее простое выражение  $\theta_1 = (\pi - \theta) / 2$ , где  $\theta$  – угол рассеяния в системе центра масс.

4.11. Выразить скорости обеих частиц после рассеяния движущейся частицы с массой  $m_2$  на неподвижной частице с массой  $m_1$  через их углы рассеяния в лабораторной системе координат.

4.12. Определить интервал значений, который может иметь угол между направлениями скоростей после рассеяния движущейся частицы с массой  $m_2$  на первоначально покоящейся частице с массой  $m_1$ .

$$[0 \leq \beta < \pi/2 \ (m_2 > m_1), \quad \beta = \pi/2 \ (m_2 = m_1), \quad \pi/2 < \beta \leq \pi \ (m_2 < m_1)]$$

4.13. Частица массы  $m_1$ , двигающаяся со скоростью  $v_1$ , рассеивается на покоящейся частице массы  $m_2$ . Определить угол рассеяния в системе центра масс, при котором покоящаяся частица получит всю кинетическую энергию движущейся частицы.

4.14. Частица массы  $m_1$ , двигающаяся со скоростью  $v_1$ , налетает на покоящуюся частицу массы  $m_2$  и рассеивается на угол  $\theta_1$ . Найти угол рассеяния  $\theta$  в системе центра масс, переданную часть кинетической энергии и отношение масс, при котором передаваемая энергия будет максимальной.

4.15. Частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся навстречу друг другу со скоростями, равными по величине и противоположными по направлению ( $v_1 + v_2 = 0$ ). Определить скорости обеих частиц после рассеяния в лабораторной системе координат как функции угла рассеяния в системе центра масс.

$$\left[ \begin{array}{l} v_1^+ = v_2^- [4m_2^2 + (m_2 - m_1)^2 - 4m_2(m_2 - m_1)\cos\theta]^{1/2} / (m_1 + m_2), \\ v_2^+ = v_1^- [4m_1^2 + (m_2 - m_1)^2 - 4m_2(m_1 - m_2)\cos\theta]^{1/2} / (m_1 + m_2), \\ \operatorname{tg} \theta_1 = \sin \theta / [(m_1 - m_2) / 2m_2 + \cos \theta], \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \sin \theta / [(m_2 - m_1) / 2m_1 + \cos \theta] \end{array} \right]$$

#### Задачи средней трудности

4.16. Частица массы  $M$  налетает на покоящуюся частицу массы  $m$  ( $m < M$ ) и рассеивается на ней. Найти максимально возможное значение угла рассеяния налетающей частицы.

4.17. Частица массы  $m_1$ , двигающаяся со скоростью  $v$ , сталкивается с покоящейся частицей массы  $m_2$  так, что скорость ее образует при ударе угол  $\alpha$  с линией, соединяющей центры масс частиц ("косой удар"). Определить скорости  $u_1$  и  $u_2$  каждой из частиц после удара, предполагая удар упругим.

- 4.18. Частица массы  $m$  упруго сталкивается с покоящейся частицей массы  $M$  ( $m < M$ ) и отклоняется от первоначального направления на угол  $\pi/2$ . Под каким углом  $\theta$  к направлению первоначального движения частицы с массой  $m$  полетит более тяжелая "частица отдачи".
- 4.19. Комета массы  $m$  движется в поле тяготения звезды массы  $M$  ( $M \gg m$ ), имея невозмущенную скорость (на бесконечности)  $v$  и прицельное расстояние  $\rho$ . Найти уравнение траектории кометы и определить угол  $\theta$ , на который отклоняется ее траектория, когда она снова удаляется на бесконечность.
- 4.20. Для частицы массы  $m$ , двигающейся со скоростью  $v$  в поле с потенциалом  $U(r) = -\alpha/r - \beta/r^2$ , определить зависимость прицельного расстояния  $\rho$  от угла рассеяния  $\theta$ .

$$\left[ \theta = \pi - \frac{2}{\sigma} \arccos\left(-\frac{1}{e}\right), \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{l^2}}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha^2}(l^2 - 2\beta)}, \quad l = \rho v \sqrt{m} \right]$$

### Задачи повышенной трудности

- 4.21. Две частицы движутся друг относительно друга по круговым орбитам под действием гравитационной силы. Период этого движения равен  $\tau$ . В некоторый момент времени их движение внезапно прекращается, после чего они начинают двигаться навстречу друг к другу. Вычислить промежуток времени  $T$ , по истечении которого они столкнутся.

$$\left[ T = \frac{\tau}{4\sqrt{2}} \right]$$

- 4.22. Найти условие, при котором разделяются задачи о движении центра масс и об относительном движении двух заряженных частиц в однородном магнитном поле.

$$[e_1/m_1 = e_2/m_2]$$

- 4.23. Найти эффективное сечение рассеяния частиц массы  $m$  сферической "потенциальной ямой", т.е. полем с потенциалом  $U = 0$  при  $r > a$  и  $U = -U_0$  при  $r < a$  (см. также задачу 3.7).

- 4.24. Определить эффективное сечение рассеяния частиц массы  $m_1$  от абсолютно твердого шарика массы  $m_2$  и радиуса  $a$ , предполагая, что потенциал взаимодействия:  $U = \infty$  при  $r < a$  и  $U = 0$  при  $r > a$ .
- 4.25. Найти эффективное сечение упругого рассеяния для шариков радиуса  $a$  и массы  $m$  на таких же покоящихся шариках, предполагая, что потенциал их взаимодействия имеет вид:  $U = \infty$  при  $r < 2a$  и  $U = 0$  при  $r > 2a$ .
- 4.26. Найти угол рассеяния и эффективное сечение рассеяния частицы массы  $m$  с энергией  $E$  в поле  $U(r) = \alpha/r^2$  ( $\alpha > 0$ ), предполагая, что скорость частицы до рассеяния была равна  $v$ , и она двигалась к силовому центру с прицельным расстоянием  $\rho$ .

$$\left[ \theta = \pi [1 - (1 + 2\alpha / m\rho^2 v^2)^{-1/2}], \quad d\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha (\pi - \theta)}{mv^2 \theta^2 (2\pi - \theta)^2 \sin \theta} d\Omega \right]$$



## Раздел 5. Уравнения Лагранжа.

### Минимальные теоретические сведения

Если каждая точка материальной системы может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую систему называют *свободной*. Если вследствие каких-либо ограничений (условий) точки и тела, составляющие материальную систему, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости, то такая система называется *несвободной*.

Ограничения (условия), которые не позволяют точкам системы занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости, называются *связями*. Аналитически эти ограничения записываются в виде *уравнений связей*<sup>1</sup>

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) \leq 0, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{r}_i$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_i$  – радиус-вектор и скорость  $i$ -ой точки,  $N$  – полное число точек системы, а  $t$  – время. В случае знака равенства в выражении (5.1) связь называется *удерживающей*; если стоит знак неравенства, то связь называется *неудерживающей*. Далее речь будет идти только об удерживающих связях.<sup>2</sup>

Если уравнение удерживающей связи

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0 \quad (5.2)$$

содержит явно время  $t$ , то связь называется *нестационарной* или *реономной*. Если уравнение связи не содержит времени  $t$ , т.е. уравнение связи имеет вид

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = 0,$$

<sup>1</sup> Предполагается, что функция  $f$  непрерывна и имеет непрерывные производные по всем аргументам.

<sup>2</sup> При наличии неудерживающих связей движение системы можно разбить на участки свободного и несвободного движения: несвободного, когда в выражении (5.1) имеется знак равенства, и свободного, когда стоит знак неравенства.

то связь называется стационарной или склерономной.

Связь, накладывающая ограничения только на координаты точек системы, т.е. связь, уравнение которой не содержит скоростей точек

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (5.3)$$

называется геометрической или голономной. Связь же, уравнение которой имеет вид (5.2), называется кинематической или неголономной.

Материальная система, на которую наложены только голономные связи, называется голономной, а материальная система с неголономными связями – неголономной.

Связи реализуются посредством всякого рода поверхностей, различных тел, стержней, нитей, шарниров и т.д. Силы  $\mathbf{R}_i$ , с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точки системы, называются реакциями связей, или пассивными силами. В связи с этим, заданные силы  $\mathbf{F}_i$ , которые действуют на точки свободной системы, называются активными силами.

Наличие связей вносит в решение задач по механике две трудности. Первая из них состоит в том, что не все координаты  $x_i, y_i, z_i$  несвободной системы являются независимыми друг от друга, так как они теперь связаны определенными соотношениями – уравнениями связей; следовательно, не все уравнения движения системы

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.4)$$

будут независимы. Здесь  $m_i$  – масса  $i$ -ой точки,  $\mathbf{F}_i$  – полная активная действующая на нее сила,  $\mathbf{R}_i$  – равнодействующая всех сил реакций. Вторая трудность заключается в том, что силы  $\mathbf{R}_i$ , развиваемые связями, заранее не известны. В сущности, наложить на систему связи – это означает просто указать, что имеются силы, которые непосредственно нам не известны, но они определенным образом влияют на движение системы.

Обе отмеченные выше трудности можно преодолеть двумя различными способами. При первом из них вводят виртуальные перемещения точек системы  $\delta \mathbf{r}_i$ , как приращения, удовлетворяющие уравнениям связей (5.3) в данный фиксированный момент времени, и определяют идеальные связи, как связи, суммарная работа сил реакций которых на всех виртуальных перемещениях равна нулю

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i) = 0.$$

При этом удается показать, что силы реакции связей могут быть выражены в виде линейных форм

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5.5)$$

относительно градиентов функций  $f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ), определяющих уравнения связей (5.3). Величины  $\lambda_{\alpha}$  называются неопределенными множителями Лагранжа,  $s$  – число налагаемых на систему связей. Тогда вместо уравнений движения (5.4) получаем уравнения движения системы с голономными идеальными связями

$$\begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) & (i = 1, 2, \dots, N), \\ f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, s), \end{cases} \quad (5.6)$$

которые называются уравнениями Лагранжа 1-го рода. Эти уравнения называются также уравнениями Лагранжа с реакциями связей, поскольку решение системы (5.6) через соотношения (5.5) автоматически определяет силы реакций связей. Неизвестными величинами в (5.6) являются радиус-векторы всех точек системы  $\mathbf{r}_i(t)$  и неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_{\alpha}(t)$ , причем число уравнений  $3N + s$  в точности равно числу неизвестных. Следует отметить однако, что практическое использование уравнений (5.6) для систем с большим количеством точек из-за большого числа уравнений весьма затруднено.

Если нас не интересуют реакции связей, и требуется найти лишь законы движения точек несвободной системы, то можно пойти по второму пути и получить уравнения, которые в качестве неизвестных величин содержали бы только независимые координаты, а неизвестные силы реакций в новых уравнениях не фигурировали бы вообще.

Система, состоящая из  $N$  материальных точек, будучи свободной от связей, имеет  $3N$  независимых координат, т.е. для описания ее движения необходимо задавать  $3N$  независимых параметров. Число независимых па-

раметров  $n$ , которые необходимо ввести, чтобы полностью охарактеризовать поведение системы, называется числом степеней свободы системы. Таким образом, число степеней свободы системы без наложенных связей равно  $3N$ . Если на систему наложить голономные связи, выражаемые  $s$  уравнениями вида (5.3), то с их помощью можно исключить  $s$  координат из общего числа  $3N$  и получить лишь  $3N - s$  независимых координат. Таким образом, число степеней свободы системы с  $s$  голономными связями будет определяться выражением

$$n = 3N - s. \quad (5.7)$$

В соответствие с этим, вместо декартовых или криволинейных координат можно ввести новые координаты, число которых в точности равно числу степеней свободы системы. Такие координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  называются обобщенными координатами. На обобщенные координаты не следует смотреть как на обычные координаты, имеющие размерность длины. В качестве обобщенных координат могут быть взяты любые величины, определяющие положение рассматриваемой системы. Через эти координаты можно выразить радиус-векторы всех точек системы

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-s}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.8)$$

Если, воспользоваться выражениями (5.8) и в определениях виртуальных перемещений и в условии идеальности связей перейти к вариациям обобщенных координат  $\delta q_j$ , то тогда динамический принцип Даламбера, или общее уравнение механики,

$$\sum_{i=1}^N ((\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i) = 0^1 \quad (5.9)$$

позволяет получить систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3N - s), \quad (5.10)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы, а  $Q_j$  – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $q_j$ . Производные от обобщенных ко-

<sup>1</sup> Здесь  $\dot{\mathbf{p}}_i$  – производная по времени от импульса  $i$ -ой точки.

ординат  $\dot{q}_j$  называются обобщенными скоростями. Полученные уравнения называются уравнениями Лагранжа 2-го рода. Они, как и уравнения Лагранжа 1-го рода, справедливы для систем с голономными идеальными связями, но в отличие от последних, не содержат реакций связей в качестве неизвестных функций, хотя полностью учитывают влияние связей на движение механической системы. Число уравнений равно числу степеней свободы системы, а неизвестными величинами в них являются обобщенные независимые координаты как функции времени  $q_j(t)$ .

Обобщенные силы, стоящие в правых частях уравнений (5.10), могут быть найдены по формулам

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right), \quad (5.11)$$

или как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{j=1}^{3N-s} Q_j \delta q_j. \quad (5.12)$$

Подобно тому, как обобщенные координаты  $q_j$  не обязательно должны иметь размерность длины, обобщенные силы  $Q_j$  не обязательно имеют размерность силы. Однако произведение  $Q_j q_j$  всегда имеет размерность работы.

Если заданные силы носят потенциальный характер с потенциальной энергией  $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ , то воспользовавшись их определением

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t),$$

для обобщенной силы в соответствии с (5.11), будем иметь

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\sum_{i=1}^N \left( \nabla_i U \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (5.13)$$

В этом случае уравнения Лагранжа 2-го рода примут вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, 3N - s).$$

Вводя далее функцию Лагранжа<sup>1</sup>  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ , как разность кинетической и потенциальной энергий

$$L = T - U, \quad (5.14)$$

и замечая, что потенциальная энергия не зависит от скоростей точек системы, уравнениям Лагранжа 2-го рода можно придать наиболее часто употребляемый вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.15)$$

В таком виде уравнения Лагранжа<sup>2</sup> можно представить и тогда, когда система не является потенциальной. Это удастся сделать в том случае, когда обобщенные силы  $Q_j$  можно получить из некоторой функции  $\mathcal{V}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  посредством равенства

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j}. \quad (5.16)$$

В этом случае уравнения (5.10) трансформируются в уравнения (5.15) с функцией Лагранжа  $\mathcal{L}$ , равной

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{V}. \quad (5.17)$$

Величина  $\mathcal{V}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  называется обобщенным потенциалом или потенциалом, зависящим от скоростей, а силы, определяемые равенством (5.16), называются обобщенно-потенциальными силами. Возможность использования такого "потенциала" имеет не только академический интерес; посредством потенциала такого типа описывают, например, движения заряженной частицы в электромагнитном поле (см. задачи (5.30) и (5.31)). Силы инерции, действующие на частицу в неинерциальной системе отсчета, также являются обобщенно-потенциальными силами (см. ниже задачу 6.60).

Если, далее, допустить, что, наряду с обобщенно-потенциальными силами, на систему действуют еще и силы не потенциального характера,

<sup>1</sup> Функцию Лагранжа иногда по аналогии с квантово-механическими операторами называют лагранжианом.

<sup>2</sup> Ниже, говоря об уравнениях Лагранжа, мы будем иметь в виду уравнения Лагранжа 2-го рода.

скажем диссипативные  $\mathbf{F}_i^d$ , то уравнениям Лагранжа можно придать еще один достаточно общий вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1, 2, \dots, 3N - s), \quad (5.18)$$

где обобщенные диссипативные силы  $Q_j^d$  определяются выражением

$$Q_j^d = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_i^d \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right).$$

Для составления уравнений Лагранжа необходимо знать явный вид кинетической энергии и обобщенного потенциала как функций обобщенных координат и обобщенных скоростей. Зависимости от обобщенных координат для каждой системы имеют свой конкретный вид. Зависимость от обобщенных скоростей общая для всех систем и может быть установлена, если для перехода к обобщенным координатам и скоростям воспользоваться преобразованиями (5.8) и выражениями скоростей точек системы

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Для кинетической энергии тогда получим выражение вида

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (5.19)$$

где  $T^{(0)}$ ,  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  являются однородными формами, соответственно, нулевого, первого и второго порядков относительно обобщенных скоростей

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad T^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (5.20)$$

с коэффициентами, зависящими только от обобщенных координат и времени

$$a_j = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right), \quad a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (5.21)$$

Если преобразование (5.8) не содержит времени явно, т.е. если  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ , что может иметь место при стационарности связей, то формы  $T^{(0)}$  и  $T^{(1)}$  пре-

вращаются в нуль, и кинетическая энергия становится однородной квадратичной симметричной формой обобщенных скоростей  $T = T^{(2)}$ .

Исходя из требования независимости обобщенно-потенциальных сил от ускорений точек системы, обобщенный потенциал можно представить в виде

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(0)} + \mathcal{V}^{(1)}, \quad (5.22)$$

где форма нулевого порядка  $\mathcal{V}^{(0)}$  относительно обобщенных скоростей является обычной потенциальной энергией системы  $U$

$$\mathcal{V}^{(0)} = U,$$

а  $\mathcal{V}^{(1)}$  – линейная форма обобщенных скоростей

$$\mathcal{V}^{(1)} = \sum_{j=1}^n U_j \dot{q}_j$$

с коэффициентами  $U_j$ , зависящими только от времени и координат.

Получив функцию Лагранжа, следует иметь в виду, что она нередко может быть упрощена, если воспользоваться неоднозначностью ее определения. Можно показать (см. задачу (5.10)), что уравнения Лагранжа для двух функций Лагранжа, связанных соотношением

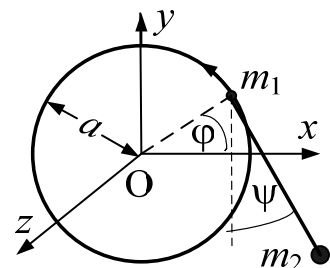
$$L' = L + \frac{d}{dt} \Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (5.23)$$

где  $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  – произвольная функция обобщенных координат и времени, имеют один и тот же вид.

Несмотря на то, что уравнения Лагранжа получены для анализа поведения несвободных систем, разумеется, они справедливы и для систем, у которых никаких связей нет. В этом случае они представляют собой уравнения движения свободной системы, поведение которой описывается в произвольных криволинейных координатах.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Частица массой  $m_1$ , к которой на нерастяжимом и невесомом стержне длиной  $l$  присоединена частица массой  $m_2$ , движется по окружности радиуса  $a$ , расположенной в вертикальной плоскости  $xOy$ .





Предполагая, что частица массой  $m_2$  также все время остается в плоскости  $xOy$ , написать уравнения связей системы, определить число степеней свободы и ввести обобщенные координаты.

*Решение.* Вследствие того, что система состоит из двух частиц, будучи свободной, она имела бы 6 степеней свободы. Но обе частицы могут двигаться только в плоскости  $xOy$  и эти ограничения вводятся двумя уравнениями связей

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Возможность 1-ой частице двигаться только по окружности радиуса  $a$  приводит еще к одному уравнению связи

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2 = 0.$$

И, наконец, тот факт, что обе частицы все время соединены стержнем длиной  $l$ , накладывает на координаты частиц еще одно ограничение, выражаемое уравнением связи

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Как видим, все найденные четыре уравнения являются уравнениями голономных и стационарных связей. Таким образом,  $N = 2$ ,  $s = 4$  и в соответствии с выражением (5.7) из шести исходных степеней свободы у системы со связями остается только две. В качестве обобщенных координат, характеризующих поведение системы, целесообразно использовать два угла: один угол, скажем,  $\varphi$ , который радиус-вектор частицы с массой  $m_1$  образует с осью  $x$ , и второй угол, например,  $\psi$ , который стержень, соединяющий частицы, составляет с вертикалью.

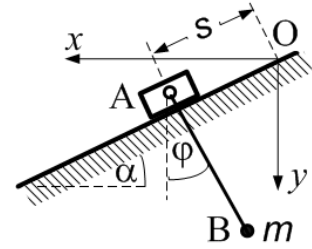
В соответствии с (5.8) окончательно *введем* обобщенные координаты  $\varphi$  и  $\psi$ , выразив через них компоненты исходных радиус-векторов частиц,

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad y_1 = a \sin \varphi, \quad x_2 = a \cos \varphi + l \sin \psi, \quad y_2 = a \sin \varphi - l \cos \psi.$$

Разумеется, этот выбор не является однозначным<sup>1</sup> и его целесообразность обусловлена наиболее простым видом функции Лагранжа и простотой уравнений Лагранжа.

<sup>1</sup> В качестве обобщенных координат можно использовать, например,  $x_1, x_2; x_1, y_2; x_1, \psi$  и т.д.

**Задача 2.** Груз  $A$  веса  $P$  движется по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту. К грузу  $A$  прикреплен математический маятник с массой  $m$  в точке  $B$ . Длина нити маятника равна  $l$ . Полагая, что движение происходит в одной вертикальной плоскости, ввести обобщенные координаты системы и найти соответствующие им обобщенные силы.



*Решение.* Вычисление обобщенных сил материальной системы является одним из существенных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода, поэтому рассмотрим подробно их вычисление различными способами. Анализируемая система имеет две степени свободы и для описания ее поведения удобно использовать в качестве одной обобщенной координаты перемещение  $s$  груза  $A$  вдоль наклонной плоскости, отсчитываемое от начала в точке  $O$ , и в качестве другой – угол  $\varphi$ , который нить маятника образует с вертикалью.

*Способ (а).* Для нахождения соответствующих этим координатам обобщенных сил  $Q_s$  и  $Q_\varphi$  воспользуемся вначале формулой (5.11). На систему действуют две активные силы:  $\mathbf{F}_1$ , равная по модулю весу  $P$  груза  $A$ , и  $\mathbf{F}_2$  – вес маятника, равный по модулю  $mg$ , обе направлены вертикально вниз. Вводя декартовую систему координат, как показано на рисунке, и проектируя на ее оси силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  и радиус-векторы груза  $A$  ( $\mathbf{r}_1$ ) и частицы ( $\mathbf{r}_2$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(0, P), & \quad \mathbf{F}_2(0, mg) \\ \mathbf{r}_1(s \cos \alpha, s \sin \alpha), & \quad \mathbf{r}_2(s \cos \alpha - l \sin \varphi, s \sin \alpha + l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Для проекций частных производных по обобщенным координатам от радиус-векторов найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s}(\cos \alpha, \sin \alpha), & \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial s}(\cos \alpha, \sin \alpha), \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \varphi}(0, 0), & \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi}(-l \cos \varphi, -l \sin \varphi). \end{aligned}$$

Вычисляя суммы необходимых скалярных произведений, из (5.11) получаем требуемые обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_s &= P \sin \alpha + mg \sin \alpha = (P + mg) \sin \alpha, \\ Q_\varphi &= 0 - mgl \sin \varphi = -mgl \sin \varphi. \end{aligned}$$

*Способ (б).* Используем теперь наиболее распространенный прием вычисления обобщенных сил как коэффициентов при вариациях обобщенных координат в выражении суммы элементарных работ активных сил на виртуальных перемещениях (5.12). Дадим системе два независимых обобщенных виртуальных перемещения:  $\delta s$ , направленное параллельно наклонной плоскости в сторону возрастания координаты  $s$ , т.е. вниз, и  $\delta\varphi$  – в сторону возрастания угла  $\varphi$ , т.е. против часовой стрелки от вертикального направления. Учитывая независимость виртуальных перемещений  $\delta s$  и  $\delta\varphi$ , при вычислении суммы работ активных сил будем давать системе виртуальное перемещение, соответствующее искомой обобщенной силе, а второе виртуальное перемещение будем при этом считать равным нулю. Так, для определения обобщенной силы  $Q_s$  дадим системе виртуальное перемещение  $\delta s$ , а  $\delta\varphi$  будем считать равным нулю. Это значит, что при фиксированном значении угла поворота маятника  $\varphi$  вся система, состоящая из груза и маятника, перемещается поступательно на  $\delta s$ .

На виртуальном перемещении  $\delta s$  сумма работ активных сил имеет вид

$$\delta A = P \delta s \sin\alpha + mg \delta s \sin\alpha = (P + mg) \sin\alpha \delta s. \quad (5.24)$$

Обобщенной силой  $Q_s$  является коэффициент пропорциональности, стоящий при  $\delta s$  в формуле (5.24), т.е.

$$Q_s = (P + mg) \sin\alpha.$$

Для определения обобщенной силы  $Q_\varphi$  дадим системе виртуальное перемещение  $\delta\varphi$ , а  $\delta s$  будем считать равным нулю. Это значит, что груз  $A$  находится на наклонной плоскости в покое, а нить маятника отклоняется на угол  $\delta\varphi$  против часовой стрелки. Сумма работ активных сил на виртуальном перемещении  $\delta\varphi$  равна:

$$\delta A = - mg l \sin\varphi \delta\varphi. \quad (5.25)$$

Обобщенной силой  $Q_\varphi$  является коэффициент пропорциональности, стоящий при  $\delta\varphi$  в формуле (5.25), т.е.

$$Q_\varphi = - mg l \sin\varphi.$$

*Способ (в).* Вследствие того, что обе активные силы, действующие на систему, носят потенциальный характер, интересующие нас обобщенные си-

лы могут быть вычислены еще одним способом. Согласно формуле (5.13) обобщенные силы являются частными производными с обратным знаком от потенциальной энергии системы. В данном случае обобщенные силы  $Q_s$  и  $Q_\varphi$  мы можем найти по формулам:  $Q_s = -\frac{\partial U}{\partial s}$ ,  $Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ . Для этого предварительно следует вычислить потенциальную энергию системы  $U(s, \varphi)$ . Принимая за нуль потенциала его значение в точке  $O$ , для потенциальной энергии системы будем иметь

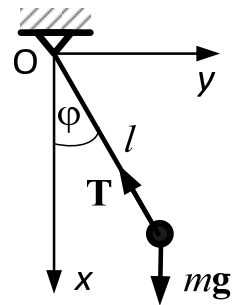
$$U(s, \varphi) = -Ps \sin \alpha - mg(s \sin \alpha + l \cos \varphi) = -(P + mg)s \sin \alpha - mgl \cos \varphi.$$

Дифференцируя функцию  $U(s, \varphi)$  частным образом по  $s$  и по  $\varphi$ , для соответствующих обобщенных сил найдем величины

$$Q_s = (P + mg) \sin \alpha, \quad Q_\varphi = -mgl \sin \varphi,$$

совпадающие с полученными выше выражениями.

**Задача 3.** Частица массы  $m$  подвешена на невесомой и нерастяжимой нити длины  $l$ , прикрепленной в неподвижной точке  $O$ , и может совершать движение в вертикальной плоскости  $xOy$ . Предполагая, что система находится в поле силы тяжести, найти закон движения частицы и натяжение нити  $T$ , используя для этой цели уравнения Лагранжа 1-го рода.



*Решение.* Поскольку частица, образующая маятник, все время находится в плоскости  $xOy$  и на одном и том же расстоянии, равном  $l$ , от точки  $O$ , то два уравнения связи, наложенные на нее, имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= z = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Записывая уравнения Лагранжа 1-го рода в соответствии с (5.6), получаем

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg + \lambda_1 2x, \\ m\ddot{y} = \lambda_1 2y, \\ m\ddot{z} = \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \\ f_2(x, y, z) = z = 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

систему пяти уравнений для определения пяти неизвестных:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ . Так как  $z = 0$ , то из третьего уравнения находим  $\lambda_2 = 0$ , а из второго уравнения имеем  $\lambda_1 = \frac{m\ddot{y}}{2y}$ . После умножения первого уравнения системы (5.27) на  $y$  и вычитания из него второго уравнения, умноженного на  $x$ , получим

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy. \quad (5.28)$$

Выразим координаты  $x$  и  $y$  через угол  $\varphi$ , который нить маятника образует с осью  $Ox$ ,

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi.$$

Используя эту замену и вычисляя производные

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \ddot{x} &= -l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l\ddot{\varphi} \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l\ddot{\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

уравнению (5.28) можно придать известную форму дифференциального уравнения колебаний математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Записав уравнение в виде

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi = \frac{g}{l} d(\cos \varphi)$$

и интегрируя его при начальных условиях: при  $t = 0$   $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ , будем иметь

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos \varphi). \quad (5.29)$$

Кстати сказать, это уравнение мы можем получить и из закона сохранения энергии. Дальнейшее интегрирование этого нелинейного уравнения представляет известные трудности, поэтому решим исходное уравнение приближенно, допустив, что колебания малы. Разлагая  $\sin \varphi$  в ряд вблизи точки  $\varphi = 0$  и сохраняя только первый член разложения, уравнению придадим вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Решая его, находим

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t,$$

где величина  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  является частотой малых колебаний частицы. Возвращаясь к исходным переменным, получаем в этом приближении координаты частицы  $x$  и  $y$  как функции времени

$$x(t) = l \cos(\dot{\varphi}_0 \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t), \quad y(t) = l \sin(\dot{\varphi}_0 \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t).$$

Найдем теперь натяжение нити. В соответствии с формулами (5.5) получаем

$$\begin{cases} T_x = \lambda_1 2x = m\ddot{y} \frac{x}{y}, \\ T_y = \lambda_1 2y = m\ddot{y}, \\ T_z = 0 \end{cases}$$

и, следовательно, величина натяжения нити определяется выражением

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} = ml \left| \frac{\ddot{y}}{y} \right|,$$

или

$$T = ml \left| \dot{\varphi}^2 - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \ddot{\varphi} \right|.$$

Так как

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi,$$

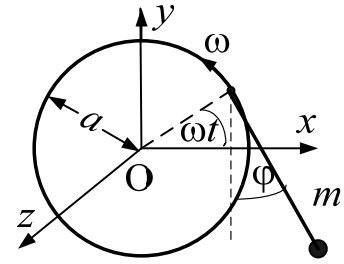
а  $\dot{\varphi}^2$  определяется формулой (5.29), то

$$T = ml \left| \dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos \varphi) + \frac{g}{l} \cos \varphi \right| = ml \left| \dot{\varphi}_0^2 - \frac{g}{l}(2 - 3 \cos \varphi) \right|.$$

Из этого уравнения следует, что связь в виде нити будет удерживающей, если  $T \geq 0$  при  $\varphi = \pi$ . Это условие выполняется, когда начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}_0$  удовлетворяет неравенству

$$\dot{\varphi}_0^2 \geq \frac{5g}{l} = 5\omega_0^2.$$

**Задача 4.** Найти функцию Лагранжа и составить уравнения Лагранжа 2-го рода плоского маятника, точка подвеса которого равномерно вращается по вертикальной окружности с постоянной частотой  $\omega$ . Радиус окружности равен  $a$ , и частица с массой  $m$  подвешена на нити длиной  $l$ .



*Решение.* Вследствие того, что движение является плоским и точка подвеса маятника движется по заданному закону, система обладает одной степенью свободы. За обобщенную координату примем угол  $\varphi$ , который нить образует с вертикалью. Будем для конкретности полагать, что в начальный момент  $t = 0$  точка подвеса маятника находилась на оси  $Ox$ . На систему действует только одна сила – сила тяжести частицы с массой  $m$ , и она потенциальна. Функция Лагранжа  $L$  будет равна разности кинетической и потенциальной энергии частицы. Из-за того, что связь, вынуждающая точку подвеса маятника вращаться по окружности, является нестационарной, кинетическая энергия системы будет содержать нулевой, линейный и квадратичный члены по обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$  (5.19). Для их нахождения мы можем воспользоваться выражениями (5.20) и (5.21), приняв во внимание тот факт, что частица в системе всего одна и эти выражения будут значительно упрощены. Проектируя радиус-вектор частицы на оси  $x$  и  $y$ , будем иметь

$$\mathbf{r}(a \cos \omega t + l \sin \varphi, a \sin \omega t - l \cos \varphi).$$

Для частных производных найдем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(l \cos \varphi, l \sin \varphi).$$

Следовательно, кинетическая энергия будет иметь вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{ma^2\omega^2}{2} - mal\omega\dot{\varphi}(\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} = \\ &= \frac{ma^2\omega^2}{2} - mal\omega\dot{\varphi}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}. \end{aligned}$$

Этот же вид кинетической энергии можно получить иначе, не используя выражений (5.19)–(5.21), а просто, взяв формулу  $T = mv^2/2$ , подставив в нее квадрат скорости частицы в декартовой системе координат

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ , предварительно найдя проекции скорости на декартовы оси как производные от выражений декартовых координат, представленных через обобщенную координату  $\varphi$ . Записывая координаты и вычисляя скорости

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t + l \sin \varphi, & \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\y &= a \sin \omega t - l \cos \varphi, & \dot{y} &= a\omega \cos \omega t + l\dot{\varphi} \sin \varphi,\end{aligned}$$

для кинетической энергии получаем то же самое выражение

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mal\omega\dot{\varphi}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{ma^2\omega^2}{2}.$$

Записав потенциальную энергию частицы (при выборе нуля потенциала на уровне оси  $Ox$ )

$$U = mg(a \sin \omega t - l \cos \varphi)$$

и вычитая ее из кинетической энергии, для функции Лагранжа получим выражение

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mal\omega\dot{\varphi}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{ma^2\omega^2}{2} - mg(a \sin \omega t - l \cos \varphi).$$

Составленную функцию Лагранжа можно существенно упростить, если иметь в виду, что к ней согласно (5.23) можно присоединить полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, и такая трансформация ее ни к каким физическим последствиям не приведет.<sup>1</sup> Так как в этот разряд возможных присоединяемых слагаемых попадают все константы и все слагаемые, зависящие только от времени, то их сразу в функции Лагранжа можно опустить. В нашем случае таковыми являются члены:  $ma^2\omega^2/2$  и  $-mga \sin \omega t$ . Более того, если мы вычислим полную производную по времени от выражения  $mal\omega \cos(\omega t - \varphi)$

$$\frac{d}{dt}[mal\omega \cos(\omega t - \varphi)] = -mal\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + mal\omega\dot{\varphi} \sin(\omega t - \varphi),$$

то обнаружим, что слагаемое  $-mal\omega\dot{\varphi} \sin(\omega t - \varphi)$  нашей функции Лагранжа можно представить в виде

<sup>1</sup> Но может существенно изменить вид функции Лагранжа и упростить получение уравнений Лагранжа.



$$-mal\omega\dot{\varphi}\sin(\omega t - \varphi) = -mal\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) - \frac{d}{dt}[mal\omega\cos(\omega t - \varphi)],$$

в котором первый член в правой части имеет более простой вид (вместо обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$  в качестве множителя содержит постоянную угловую скорость  $\omega$ ), а второй член опять является полной производной по времени от функции координат и времени и его можно тоже беспрепятственно опустить. Имея все эти рассуждения в виду, найденной выше функции Лагранжа можно, без ущерба для существа дела, придать следующий, более простой по сравнению с первоначально полученным, вид

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mal\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + mgl \cos \varphi.$$

Для составления уравнения Лагранжа 2-го рода в виде (5.15) вычисляем частную производную от функции Лагранжа по обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$  и затем полученное выражение полным образом дифференцируем по

времени, получаем  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$ . Далее вычисляем частную производ-

ную от функции Лагранжа по обобщенной координате

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mal\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) - mgl \sin \varphi.$$

Из полученного первого результата вычитаем второй и составленную разность приравняем нулю. Получаем уравнение Лагранжа

$$ml^2\ddot{\varphi} - mal\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) + mgl \sin \varphi = 0,$$

которое после сокращения на  $ml$  приобретает окончательный вид

$$l\ddot{\varphi} - a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) + g \sin \varphi = 0.$$

**Задача 5.** Составить функцию Лагранжа и получить уравнения Лагранжа для следующих свободных систем:

- а) свободно двигающаяся частица;
- б) линейный гармонический осциллятор;
- в) частица, двигающаяся в центрально симметричном поле под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстояния до силового центра.

*Решение.* а) Так как на свободную частицу не действуют никакие силы, то ее функция Лагранжа будет состоять только из кинетической энергии. Рассматривая в качестве обобщенных координат обычные декартовы координаты  $x, y, z$  (мы это можем сделать, поскольку никаких связей нет), для функции Лагранжа будем иметь

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

найдем

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Видим, что уравнения Лагранжа являются обычными уравнениями движения свободной частицы в декартовых координатах, из которых с начальными условиями (при  $t = 0$   $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ) получаем закон движения свободной частицы

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

б) Линейным гармоническим осциллятором называют частицу массы  $m$ ,двигающуюся по одной прямой под действием силы вида  $F = -kx$ , где  $k$  – постоянный положительный коэффициент. Найдем потенциальную энергию, соответствующую данной потенциальной силе. Имеем

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U(x) = -\nabla U(x) = -(dU(x)/dx)\mathbf{e}_x = -kx\mathbf{e}_x.$$

Отсюда получаем  $\frac{dU(x)}{dx} = kx$  и поэтому

$$U(x) = \frac{kx^2}{2},$$

если полагать, что потенциал равен нулю при  $x = 0$ . Так как кинетическая энергия осциллятора

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

то для функции Лагранжа найдем

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Составляя уравнение Лагранжа, будем иметь

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Определяя частоту  $\omega^2 = k/m$ , получаем известное уравнение движения осциллятора в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

в) В силу того, что частица в любом центрально симметричном поле движется в плоскости, перпендикулярной сохраняющемуся угловому моменту, для описания ее движения на плоскости  $xOy$  удобно ввести полярные координаты  $\rho$  и  $\phi$ , которые и будут играть роль обобщенных координат. Так как сила притяжения, действующая на частицу, обратно пропорциональна квадрату расстояния до силового центра, который будем считать находящимся в начале координат, то ее можно записать в виде

$$\mathbf{F}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho,$$

где  $\alpha$  – константа взаимодействия. Полагая потенциал равным нулю в бесконечно удаленной точке от силового центра, для потенциальной энергии частицы найдем

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

Так как квадрат скорости частицы в полярной системе координат имеет вид  $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2$ , то для функции Лагранжа получим выражение

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{\rho}. \quad (5.30)$$

Составляя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0,$$

найдем уравнения **второго** порядка

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0, \quad m\rho^2\ddot{\phi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi} = 0, \quad (5.31)$$

которые являются обычными уравнениями движения частицы в полярной системе координат

$$mw_\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2}, \quad mw_\varphi = 0,$$

где  $w_\rho$  и  $w_\varphi$  – радиальное и угловое ускорения частицы.

*Замечание.* Полученные уравнения движения (5.31) можно существенно упростить, если заметить, что обобщенная координата  $\varphi$  не входит явным образом в функцию Лагранжа (5.30), т.е. является циклической. Это приводит к закону сохранения соответствующего обобщенного импульса  $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi} = m\rho^2 \dot{\varphi}$ , в данном случае совпадающего с проекцией момента импульса  $M_z$ . Циклической переменной является также и время  $t$ , что ведет к

сохранению обобщенной энергии  $H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L$ , которая в данном случае

совпадает с обычной полной энергией  $E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho}$ . Таким

образом, учет циклических переменных для центрального поля приводит к известным уравнениям **первого** порядка (см. раздел 3)

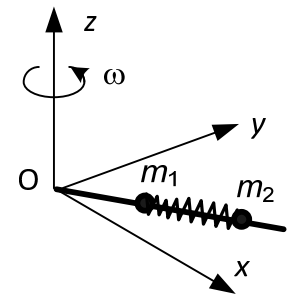
$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} - \frac{\alpha}{\rho} + \frac{M_z^2}{2m\rho^2} = 0 \quad \text{и} \quad m\rho^2 \dot{\varphi} = M_z.$$

Подробнее о циклических переменных и обобщенной энергии см. разд. 9–10.

## Задачи

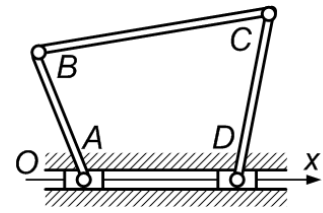
### Обязательные задачи

5.1. Стержень, находящийся в плоскости  $xOy$ , на котором могут свободно двигаться две материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные между собой пружиной, вращается вокруг вертикальной оси  $Oz$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Написать уравнения связей системы, определить число ее степеней свободы и ввести обобщенные координаты.



$$[z_1 = z_2 = 0, \quad x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t = 0, \quad x_2 \sin \omega t - y_2 \cos \omega t = 0; \quad n = 2]$$

- 5.2. Найти число степеней свободы  $n$  плоского трехзвенного механизма ABCD, у которого точки A и D могут перемещаться только по оси Ox. Как изменится результат для неплоского механизма?



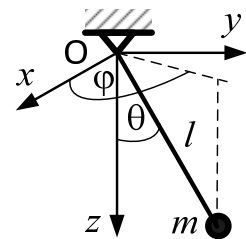
$$[n = 3]$$

- 5.3. Свободная материальная точка движется под действием силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$ . Найти выражения для обобщенных сил, если в качестве обобщенных координат выбираются:

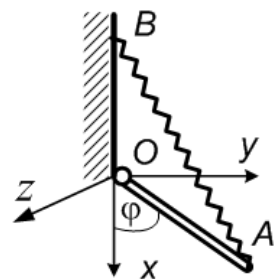
- a) цилиндрические координаты,  
 б) сферические координаты.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{б) } Q_r = F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi + F_z \cos \theta, \\ Q_\theta = r(F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi) \cos \theta - r F_z \sin \theta, \\ Q_\varphi = r \sin \theta (F_y \cos \varphi - F_x \sin \varphi) \end{array} \right]$$

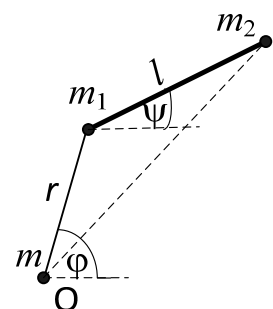
- 5.4. Для сферического маятника длины  $l$  и массы  $m$ , изображенного на рисунке, с использованием в качестве обобщенных координат сферических углов  $\theta$  и  $\varphi$  найти обобщенные силы  $Q_\theta$  и  $Q_\varphi$ .



- 5.5. Однородный стержень OA, вес которого  $P$ , может вращаться вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси Oz без трения. К концу A стержня прикреплена пружина BA, точка B крепления которой находится на оси Ox и отстоит от точки O по вертикали вверх на расстоянии  $BO = OA = a$ . Длина пружины в ненапряженном состоянии равна  $l_0$ . Используя в качестве обобщенной координаты системы угол  $\varphi$ , который стержень образует с вертикалью, получить выражение соответствующей ему обобщенной силы, полагая, что коэффициент жесткости пружины равен  $c$ .

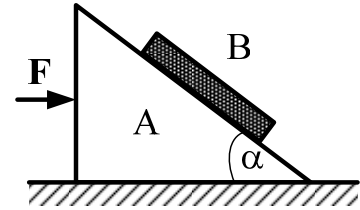


- 5.6. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные между собой жестким стержнем длины  $l$ , притягиваются к неподвижной частице массы  $m$  по закону

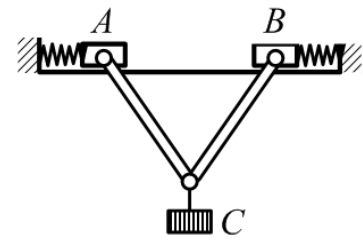


всемирного тяготения. Пренебрегая массой стержня, найти обобщенные силы, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и рассматривая в качестве обобщенных координат расстояние  $r$  и углы  $\varphi$  и  $\psi$ .

- 5.7. Наклонная призма А веса  $P$  движется под действием горизонтальной силы  $F$  по гладкой горизонтальной плоскости. Вдоль наклонной плоскости призмы, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту, скользит доска В веса  $Q$ . Предполагая, что коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен  $f$ , выбрать обобщенные координаты системы и определить соответствующие им обобщенные силы.

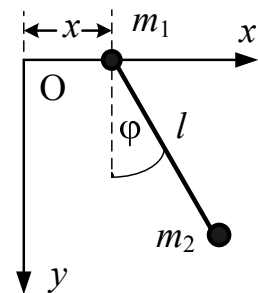


- 5.8. Найти обобщенные силы для материальной системы, изображенной на рисунке. Веса грузов А, В и С, соответственно, равны  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Грузы А и В перемещаются по гладкой горизонтальной поверхности. Стержни длины  $l$  невесомы и соединены с грузами А и В и между собой идеальными цилиндрическими шарнирами и вся система движется в одной вертикальной плоскости. Жесткости пружин, действующих на грузы А и В, равны соответственно  $c_1$  и  $c_2$ .



- 5.9. Найти функцию Лагранжа плоского маятника длиной  $l$  и массы  $m_2$ , точка подвеса которого (с массой  $m_1$  в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой.

$$\left[ L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 gl \cos \varphi \right]$$



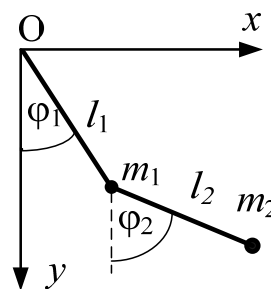
- 5.10. Показать, что добавление к функции Лагранжа  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  полной производной по времени

$$\frac{df(q_1, q_2, \dots, q_n, t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}$$

от некоторой произвольной функ-

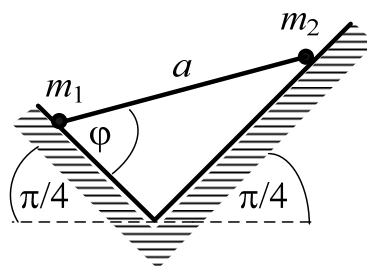
ции  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  обобщенных координат и времени не меняет уравнений Лагранжа.

- 5.11. Составить функцию Лагранжа двойного плоского маятника, изображенного на рисунке, состоящего из двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , которые подвешены на нитях длиной  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.



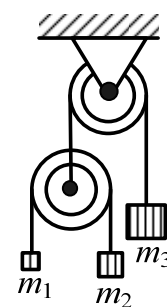
$$\left[ L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 l_2 g \cos \varphi_2 \right]$$

- 5.12. Составить функцию Лагранжа системы двух точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся в плоскости  $xOy$  по прямым, образующим углы  $\pi/4$  с горизонталью. Предполагать, что на точки действует сила тяжести и что они все время находятся на неизменном расстоянии, равном  $a$ , друг от друга.

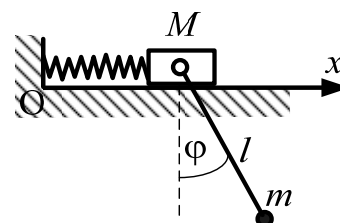


- 5.13. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанные пружиной жесткости  $c$ , могут двигаться без трения по сторонам прямого угла  $xOy$ , сторона  $Oy$  которого вертикальна. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна  $l_0$ . Составить уравнения Лагранжа системы.

- 5.14. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута нить, на одном конце которой подвешена гиря массой  $m_3$ , а на другом конце – невесомый блок. Через этот блок также перекинута нить, на концах которой подвешены гири массами  $m_1$  и  $m_2$ . Предполагая, что трением при движении грузов можно пренебречь, составить уравнения Лагранжа системы и определить ускорение, с которым будет двигаться гиря массой  $m_3$ .

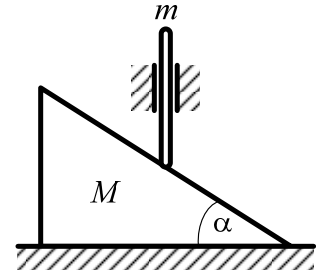


- 5.15. Тело массы  $M$ , соединенное с пружиной жесткости  $c$ , другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться по горизонтальной плоскости вдоль направления

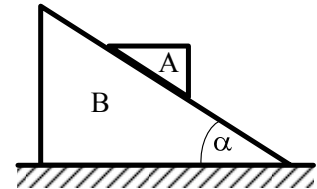


оси  $Ox$ . К телу прикреплен математический маятник массы  $m$  и длины  $l$ . Составить уравнения Лагранжа системы.

- 5.16. Стержень массы  $m$  может перемещаться без трения в вертикальной неподвижной муфте. Нижним концом он опирается на гипотенузу абсолютно гладкого клина массы  $M$ , который лежит на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Вследствие давления на него стержня клин движется горизонтально, а стержень при этом опускается. Используя уравнения Лагранжа, найти законы движения обоих тел.

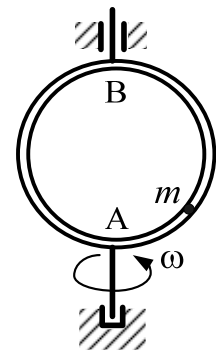


- 5.17. Призма А веса  $Q$  скользит по гладкой боковой грани призмы В весом  $P$ , образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Определить движение обеих призм, предполагая, что трением между призмой В и горизонтальной плоскостью можно пренебречь.

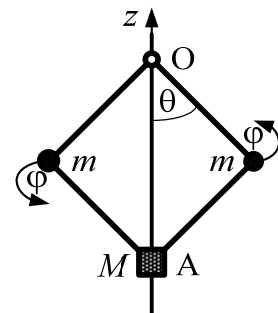


$$\left[ w_B = g \frac{Q \sin 2\alpha}{2(P + Q \sin^2 \alpha)} \right]$$

- 5.18. Материальная точка массы  $m$  движется по круговой рамке радиуса  $R$ , которая вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикального диаметра АВ. Составить уравнения движения точки.



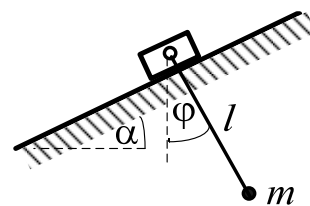
- 5.19. Центробежный регулятор состоит из 4-ех одинаковых невесомых стержней, длиной  $l$  каждый, двух шаров массы  $m$  и муфты А массой  $M$ , которая может скользить без трения по вертикальной оси  $Oz$ . Предполагая, что соединения стержней шарнирные, точка  $O$  неподвижна и вся система может сжиматься или разжиматься по вертикали и вращаться без трения вокруг оси  $Oz$ , составить функцию Лагранжа системы.





Задачи средней трудности

- 5.20. Составить уравнение движения математического маятника длины  $l$  и массы  $m$ , точка подвеса которого совершает гармоническое движение по закону  $a \sin \omega t$  с амплитудой  $a$  и постоянной частотой  $\omega$  в вертикальной плоскости вдоль прямой, наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту.

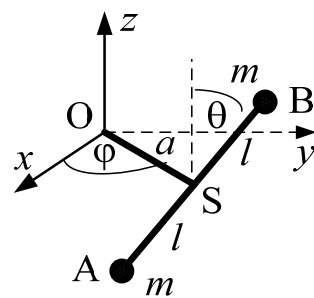


$$\left[ \ddot{\varphi} - \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \cos(\varphi - \alpha) + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \right]$$

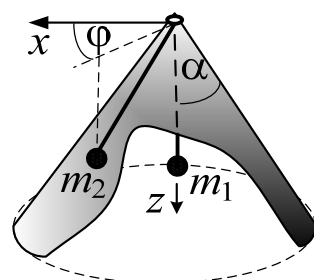
- 5.21. Материальная точка массы  $m$  скользит без трения по гладкой проволоке, изогнутой в виде некоторой четной функции  $f(x)$ . Проволока, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $Oy$ , совпадающей с осью симметрии функции  $f(x)$ . Найти функцию Лагранжа такой системы и выражение для силы реакции  $\mathbf{R}$ , действующей со стороны проволоки на материальную точку, для случаев: а)  $f(x)$  – окружность, б)  $f(x)$  – парабола, в)  $f(x)$  – прямая.

$$\left[ L = \frac{m}{2} [1 + f'^2(\rho)] \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 - mgf(\rho) \right]$$

- 5.22. Невесомый стержень АВ длины  $2l$ , на концах которого закреплены шарики с массами  $m$ , может свободно вращаться в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси  $OS$ . Ось  $OS$  может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости  $xOy$  (модель флюгера). Составить функцию Лагранжа системы и найти интегралы движения, предполагая, что  $OS = a$ .



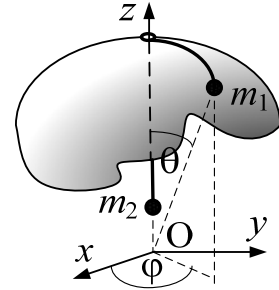
- 5.23. Составить функцию Лагранжа для системы двух шаров, связанных между собой нерастяжимой нитью длины  $l$ . Шар с массой  $m_1$  движется в вертикальном направлении, шар с массой  $m_2$  может двигаться без трения по поверхности конуса с углом раствора  $2\alpha$ . Найти циклические координаты.



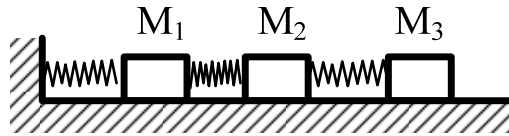
наты системы и качественно исследовать ее движение.

$$\left[ L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + \frac{m_2}{2}(l - z)^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha + gz(m_1 - m_2 \cos \alpha) \right]$$

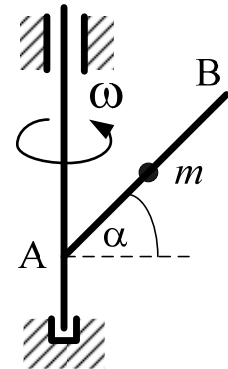
- 5.24. Частица массой  $m_1$ ,двигающаяся по поверхности гладкой сферы радиуса  $R$ , и частица массой  $m_2$ ,двигающаяся вертикально, связаны невесомой нерастяжимой нитью, пропущенной через малое отверстие в наивысшей точке сферы, как показано на рисунке. Составить уравнения Лагранжа системы и найти интегралы движения.



- 5.25. Составить уравнения движения системы, схема которой показана на рисунке. Плоскость, по которой вдоль одного направления движутся грузы  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ , абсолютно гладкая. Массы грузов соответственно равны  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , а жесткости пружин  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ .



- 5.26. Материальная точка массы  $m$  движется под действием силы тяжести ( $P = mg$ ) по прямой АВ, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси; прямая АВ образует угол  $\alpha$  с горизонталью. Найти закон движения точки, если ее начальная скорость была равна нулю, а начальное расстояние  $r_0$  до оси по прямой АВ было равно  $a$ . Вычислить силу реакции, действующую со стороны стержня АВ на частицу.



$$\left[ r(t) = \left( a - \frac{g \sin \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} \right) \text{ch}(\omega t \cos \alpha) + \frac{g \sin \alpha}{\omega^2 \cos^2 \alpha} \right]$$

- 5.27. Найти функцию Лагранжа и составить уравнение движения заряженной частицы в поле магнитного диполя с моментом  $\mu$ .

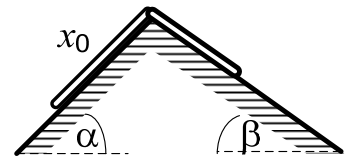
$$\left[ m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \text{rot} \frac{[\mu\mathbf{r}]}{r^3} \right]$$

Задачи повышенной трудности

- 5.28. Шайба без начальной скорости скатывается с вершины полусферы радиуса  $R$ . Движение шайбы считать одномерным. Определить угол отрыва от полусферы. Найти закон ее движения (в последнем случае считать начальный угол  $\theta_0$  не нулевым, хотя и достаточно малым, и определить соответствующую начальную скорость  $\dot{\theta}_0$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} \theta_{\text{отрыва}} = \arccos(2/3) \\ \theta(t) = 4 \operatorname{arctg}[\exp(kt) \operatorname{tg}(\theta_0/4)], \quad k = \sqrt{g/R}, \quad \text{где } \theta_0 < \theta < \arccos(2/3) \end{array} \right]$$

- 5.29. Однородная цепочка длины  $l$  и массы  $m$  перекинута через горизонтальное ребро прямоугольной призмы и может скользить без трения в вертикальной плоскости по наклонным сторонам ее, которые составляют углы  $\alpha$  и  $\beta$  с горизонтом. Найти закон движения цепочки, предполагая, что в начальный момент она покоилась, и с левой стороны свешивался конец длины, равный  $x_0$ .



$$\left[ x(t) = \left( x_0 - \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \right) \operatorname{ch} \left( t \sqrt{\frac{(\sin \alpha + \sin \beta)}{l} g} \right) + \frac{l \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \right]$$

- 5.30. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в электромагнитном поле. Напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электрического и магнитного полей могут быть выражены через скалярный  $U(x, y, z, t)$  и векторный  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$

потенциал при помощи соотношений  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ,

где  $c$  – скорость света. Показать, что уравнения движения частицы

$m \ddot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$ , где  $\mathbf{v}$  – ее скорость, представляют собой уравнения

Лагранжа, в которых в качестве функции Лагранжа следует использовать выражение

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - e U + \frac{e}{c} (\mathbf{A} \mathbf{v}).$$

- 5.31. Показать, что если в качестве активных сил, действующих на систему  $N$  заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле, рассматривать силы Лоренца, то обобщенные силы  $Q_j$ , соответствующие обоб-

щенным координатам  $q_j$ , являются обобщенно-потенциальными силами с обобщенным потенциалом, имеющим вид

$$V = \sum_{i=1}^N e_i \left[ U(\mathbf{r}_i, t) - \frac{1}{c} (\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \mathbf{v}_i) \right],$$

где  $c$  – скорость света,  $e_i$  – заряды частиц,  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  – их радиус-векторы и скорости, а  $U$  и  $\mathbf{A}$  – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля соответственно.

5.32. Частица массы  $m$  и заряда  $e$  движется в аксиально-симметричном неоднородном магнитном поле вида  $\mathbf{H}(\rho) = H_0 \Phi(\rho/a) \mathbf{e}_z$ . Составить функцию Лагранжа и найти закон движения частицы в квадратурах для случаев:

а)  $\Phi(\rho/a) = \rho/a$ , б)  $\Phi(\rho/a) = a/\rho$ , в)  $\Phi(\rho/a) = a \sin(\rho/a)/\rho$ .

$$\left[ L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e\rho\dot{\phi}}{c} A_\phi(\rho/a), \quad A_\phi(\rho/a) = \frac{H_0 a^2}{\rho} \int_{\rho_0/a}^{\rho/a} \xi \Phi(\xi) d\xi \right]$$

## Раздел 6. Движение твердого тела. Неинерциальные системы отсчета

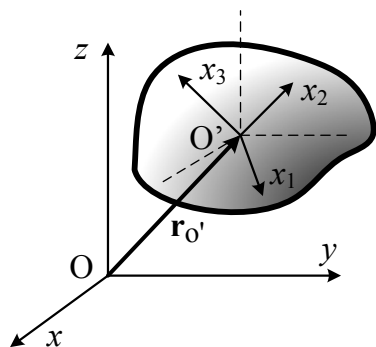
### Минимальные теоретические сведения

#### Кинематика движения твердого тела

Твердым телом в механике называют систему материальных точек, для которой расстояния между двумя любыми ее точками не изменяются в течение всего движения. Неизменность расстояний между точками приводит к тому, что твердое тело обладает шестью степенями свободы. Это число не зависит от количества точек и остается тем же даже в предельном случае непрерывного сплошного тела.

Для описания поведения твердого тела вводят неподвижную инерциальную систему координат  $Oxyz$  и подвижную систему координат  $O'x_1x_2x_3$ , жестко связанную с твердым телом. Система  $O'x_1x_2x_3$  полностью определяет положение твердого тела (см. рисунок). Для задания радиус-вектора начала подвижной системы координат  $\mathbf{r}_{O'}$  необходимо указать три координаты точки  $O'$ :  $x_{O'}$ ,  $y_{O'}$  и  $z_{O'}$ . Тогда остальные три обобщенные координаты будут определять ориентацию осей  $x_1x_2x_3$  относительно системы, начало которой находится в точке  $O'$ , а оси параллельны осям  $xuz$ . Ориентацию системы координат  $O'x_1x_2x_3$  относительно системы, имеющей с ней общее начало, а оси которой параллельны осям неподвижной системы координат (система изображенная на рисунке штрихованными линиями), можно задать с помощью матрицы ортогонального преобразования (матрицы пере-

хода)  $\mathbf{A}$ , которая представляет собой совокупность направляющих косинусов ортов осей  $x_1x_2x_3$  относительно ортов осей  $xuz$



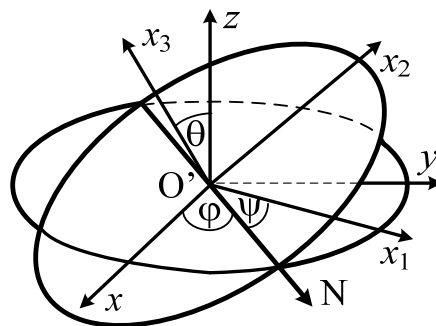
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_z) \\ (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_x) & (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_y) & (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_z) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где  $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$  – скалярное произведение соответствующих ортов. Так как между девятью элементами матрицы (6.1) существует шесть соотношений

$$\sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{il} = \delta_{kl},$$

то ее можно выразить через три независимых параметра, в качестве которых можно использовать, например, углы Эйлера.

Для определения углов Эйлера перенесем оси неподвижной системы координат  $xuz$  в точку  $O'$ , и допустим, что в исходном положении оси подвижной системы  $x_1x_2x_3$  в точности совпадают с осями  $xuz$ . Повернем систему  $O'x_1x_2x_3$  вокруг оси  $O'z$  на угол  $\varphi$  так, что ось  $O'x_1$  полученной промежуточной системы станет направленной по линии узлов  $O'N$  (см. рисунок). Далее осуществим поворот полученной системы около линии узлов  $O'N$  на угол  $\theta$ , в результате чего ось  $x_3$  займет положение, изображенное на рисунке. Наконец, совершим поворот новой промежуточной системы  $O'x_1x_2x_3$  вокруг оси  $O'x_3$  на угол  $\psi$ . При этом повороте оси  $x_1$  и  $x_2$  займут свои окончательные положения. Угол прецессии  $\varphi$  и угол собственного вращения  $\psi$  изменяются в пределах от 0 до  $2\pi$ , а угол нутации  $\theta$  изменяется в пределах от 0 до  $\pi$ .



Матрица перехода (6.1), выраженная через эйлеровы углы  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ , имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, совокупность трех независимых координат точки  $O'$ :  $x_{O'}$ ,  $y_{O'}$  и  $z_{O'}$ , характеризующих поступательное движение, и совокупность трех углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ , характеризующих вращательное движение твердого тела вокруг начала  $O'$ , образуют шесть обобщенных координат, полностью определяющих положение твердого тела в пространстве. Соответственно производные по времени от этих координат характеризуют обобщенные скорости движения твердого тела.

Вместе с тем, в соответствии с известной теоремой Эйлера, изменение ориентации твердого тела можно осуществить одним поворотом вокруг определенной оси на определенный угол и поэтому появляется возможность для характеристики скорости вращения твердого тела вместо трех скалярных производных  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  использовать один вектор угловой скорости  $\mathbf{\Omega}$ , задающий изменения со временем ортов подвижной системы координат  $O'x_1x_2x_3$  посредством соотношений

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_1], \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_2], \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{e}_3]. \quad (6.2)$$

Тогда скорость  $\mathbf{v}_i$  любой  $i$ -ой точки твердого тела, положение которой относительно неподвижной системы координат задается радиус-вектором

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_i, \quad (6.3)$$

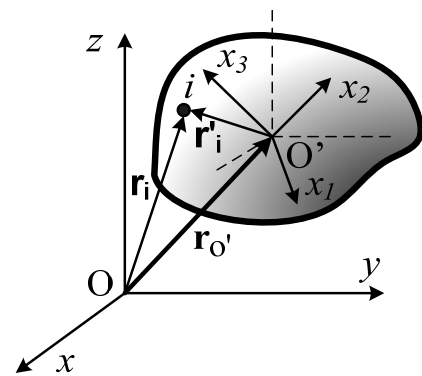
в общем случае поступательного и вращательного движения твердого тела будет определяться выражением

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_{O'} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}'_i], \quad (6.4)$$

где  $\mathbf{r}'_i$  – радиус-вектор  $i$ -ой точки твердого тела относительно подвижной системы координат  $O'x_1x_2x_3$ , а  $\mathbf{v}_{O'}$  – скорость поступательного движения последней. И если скорость  $\mathbf{v}_{O'}$  зависит от выбора начала подвижной системы координат, то угловая скорость вращения  $\mathbf{\Omega}$  остается одной и той же при любом выборе точке  $O'$ . Начало подвижной системы координат удобно выбирать в центре инерции твердого тела. Центром инерции (или центром масс) любой системы  $N$  материальных точек называется воображаемая точка, которая как бы обладает массой всей системы и положение которой определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (6.5)$$

где  $m_i$  и  $\mathbf{r}_i$  – масса и радиус-вектор  $i$ -ой точки системы, а  $m$  – масса всей



системы. Если твердое тело можно рассматривать как сплошное с плотностью  $\rho(x,y,z)$ , то в определении (6.5) сумма заменяется интегралом по объему тела  $V$ , и тогда имеем

$$\mathbf{R} = \int_V \rho(x,y,z) \mathbf{r} dV. \quad (6.6)$$

Скорость поступательного движения тела  $\mathbf{v}_O$ , когда начало подвижной системы координат помещено в его центр инерции, будем далее обозначать через  $\mathbf{V}$ .

Если твердое тело совершает произвольное движение, в каждый момент времени меняется как абсолютная величина, так и направление угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$ . Проекции вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  на оси подвижной системы координат  $O'x_1x_2x_3$  связаны с эйлеровыми углами  $\varphi, \theta, \psi$  и соответствующими им обобщенными скоростями  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

которые называются кинематическими уравнениями Эйлера.

### Уравнения движения твердого тела

В соответствии с шестью степенями свободы уравнения движения свободного твердого тела должны содержать шесть независимых уравнений и их можно представить в виде, определяющем производные по времени от двух векторов: импульса и момента импульса. Первое из этих уравнений получается просто путем суммирования уравнений движения  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$  для каждой из составляющих тело частиц. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = m\mathbf{V}$$

и полную силу, действующую на тело,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i,k=1}^N \mathbf{F}_{ki} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ex}} = \mathbf{F}^{\text{ex}},$$

получаем



$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ex}}, \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{F}^{\text{ex}}$  – сумма всех внешних сил, так как сумма всех внутренних сил  $\mathbf{F}_{ki}$  превращается в ноль. Одно векторное уравнение (6.8) или три скалярных уравнения

$$\dot{P}_x = F_x^{\text{ex}}, \quad \dot{P}_y = F_y^{\text{ex}}, \quad \dot{P}_z = F_z^{\text{ex}} \quad (6.9)$$

описывают поступательное движение твердого тела в неподвижной инерциальной системе координат  $Oxyz$ .

Если начало подвижной системы координат поместить в центр масс, то момент импульса твердого тела относительно начала неподвижной системы координат можно представить в виде суммы двух частей

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R}\mathbf{P}] + \mathbf{M}' = m[\mathbf{R}\mathbf{V}] + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}'_i]. \quad (6.10)$$

Первая часть представляет собой момент импульса тела в предположении, что вся его масса сосредоточена в центре масс. Вторая часть есть момент импульса, возникающий вследствие вращения тела относительно центра инерции. Дифференцируя по времени момент  $\mathbf{M}'$ , обусловленный вращением по отношению к центру масс, получаем второе уравнение движения твердого тела в виде

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i] = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}] = \mathbf{L}^{\text{ex}}, \quad (6.11)$$

где  $\mathbf{L}^{\text{ex}}$  есть сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, поскольку сумма моментов всех внутренних сил превращается в ноль. Векторное уравнение (6.11) или три соответствующих скалярных уравнения

$$\dot{M}'_x = L_x^{\text{ex}}, \quad \dot{M}'_y = L_y^{\text{ex}}, \quad \dot{M}'_z = L_z^{\text{ex}} \quad (6.12)$$

описывают вращательное движение твердого тела в осях неподвижной инерциальной системы координат  $Oxyz$ . Следует однако иметь в виду, что и момент импульса  $\mathbf{M}'$ , и момент всех внешних сил  $\mathbf{L}^{\text{ex}}$  в (6.11) и в (6.12) определены по отношению к центру масс тела.

При таком выборе начала в определении момента  $\mathbf{M}'$  (6.10) в качестве скорости  $i$ -ой точки  $\mathbf{v}'_i$  будет фигурировать только та часть скорости (6.4),

которая обусловлена вращением подвижной системы координат, поэтому для  $\mathbf{M}'$  будем иметь<sup>1</sup>

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i]] = \sum_{i=1}^N m_i \{ \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\Omega}) \}.$$

Проектируя  $\mathbf{M}$  на ось  $x_\alpha$  подвижной системы координат и раскрывая скалярные произведения векторов, получим

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \sum_{i=1, \beta=1, \gamma=1}^{N, 3, 3} m_i \{ x_{i\gamma}^2 \Omega_\alpha - x_{i\alpha} x_{i\beta} \Omega_\beta \} = \\ &= \sum_{i=1, \beta=1, \gamma=1}^{N, 3, 3} m_i \{ x_{i\gamma}^2 \delta_{\alpha\beta} \Omega_\beta - x_{i\alpha} x_{i\beta} \Omega_\beta \} = \sum_{\beta=1}^3 J_{\alpha\beta} \Omega_\beta \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6.13)$$

где введенный тензор

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{i=1, \gamma=1}^{N, 3} m_i \{ x_{i\gamma}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta} \} \quad (6.14)$$

называется тензором инерции или тензором моментов инерции.

Как видно из определения, тензор инерции симметричен, т.е. он не меняет своего вида при перемене мест его индексов

$$J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}.$$

Свойство симметричности приводит к тому, что из девяти компонент тензора независимыми являются только шесть. Записывая его компоненты в явном виде, получаем

$$\mathbf{J} = (J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1} x_{i2} & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1} x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2} x_{i1} & \sum_{i=1}^N m_i (x_{i3}^2 + x_{i1}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2} x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_{i3} x_{i1} & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i3} x_{i2} & \sum_{i=1}^N m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix} =$$

<sup>1</sup> Так как в последующем изложении радиусы-векторы  $\mathbf{r}_i$  и их составляющие по неподвижным осям будут встречаться редко, то для простоты обозначений штрихи у  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{r}_i$  и их составляющих по подвижным осям мы будем опускать.

$$= \mathbf{J} = (J_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Компоненты  $J_{11}$ ,  $J_{22}$ ,  $J_{33}$  называются моментами инерции относительно соответствующих осей. Остальные элементы этой матрицы называются центробежными моментами инерции. Тензор инерции очевидно аддитивен: моменты инерции всего тела равны суммам моментов инерции его частей.

В формулах (6.14) и (6.15) компоненты тензора  $J_{\alpha\beta}$  записаны для твердого тела, являющегося совокупностью дискретных частиц. Для непрерывных тел вместо массы частиц необходимо писать плотность вещества  $\rho(x,y,z)$ , умноженную на элемент объема  $dV$ , и суммирование заменить интегрированием по объему тела. Выражение (6.14) тогда примет вид

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \int \rho(x,y,z) (x_\gamma^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dV. \quad (6.16)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду

$$J_{lk} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

путем соответствующего выбора новых направлений осей координат. Эти новые направления осей называются главными направлениями инерции, а диагональные элементы тензора  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  называются главными моментами инерции. Главные моменты инерции в общем случае определяются как корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} J_{11} - J & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - J & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - J \end{vmatrix} = 0, \quad (6.18)$$

а направляющие косинусы  $a_{k\beta}$  главного направления инерции, характеризующего ортом  $\mathbf{e}_k$ , по отношению к ортам исходной системы координат  $\mathbf{e}_\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ) определяются из решения следующей системы уравнений

$$\sum_{\beta=1}^3 (J_{\alpha\beta} - J_k \delta_{\alpha\beta}) a_{k\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\sum_{\beta=1}^3 |a_{k\beta}|^2 = 1.$$
(6.19)

Ясно, что орты всех главных направлений ортогональны между собой. Однако, во многих частных случаях, когда твердое тело обладает той или иной симметрией, о главных направлениях (осях) тензора инерции можно судить непосредственно по его виду.

Тензор инерции  $J_{\alpha\beta}$  в (6.14) определен по отношению к системе координат с началом в центре инерции, но иногда может оказаться удобным предварительно вычислить аналогичный тензор

$$J'_{\alpha\beta} = \sum_{i=1, \gamma=1}^{N, 3} m_i \{x'_{i\gamma}{}^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta}\},$$
(6.20)

определенный по отношению к другому началу  $O'$ . Если положение нового начала  $O'$  по отношению к центру инерции  $O$  задается вектором  $\mathbf{r}_{oo'} = \mathbf{r}_{o'} - \mathbf{r}_o = \mathbf{a}$ , то оба тензора  $J_{\alpha\beta}$  и  $J'_{\alpha\beta}$  оказываются связанными соотношением (*теорема Штейнера*)

$$J'_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta} + m(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta),$$
(6.21)

где  $m$  – масса тела,  $a^2$  – квадрат длины вектора  $\mathbf{a}$ , а  $a_\alpha, a_\beta$  – его проекции на оси координат.

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют *асимметрическим волчком*. Если два главных момента инерции равны друг другу, т.е., если  $J_1 = J_2 \neq J_3$ , то такое твердое тело называют *симметрическим волчком*. Для него выбор главных направлений тензора инерции в плоскости  $x_1 x_2$  является произвольным. Если же все три главных момента инерции совпадают, т.е., если  $J_1 = J_2 = J_3$ , то тело называют *шаровым волчком*. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции: в качестве их можно взять три любые взаимно перпендикулярных направления.

Если тензор инерции приведен к главным осям, то выражения (6.13) для компонент момента импульса приобретают вид

$$M_1 = J_1 \Omega_1, \quad M_2 = J_2 \Omega_2, \quad M_3 = J_3 \Omega_3. \quad (6.22)$$

В частности, для шарового волчка имеем

$$\mathbf{M} = J \boldsymbol{\Omega}, \quad (6.23)$$

т.е. вектор момента импульса пропорционален вектору угловой скорости и имеет одинаковое с ним направление. В общем случае произвольного тела вектор  $\mathbf{M}$  не совпадает по своему направлению с вектором  $\boldsymbol{\Omega}$ , и лишь при вращении тела вокруг какой-либо из главных осей инерции векторы  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  имеют одинаковое направление.

Обе группы уравнений движения твердого тела (6.8) и (6.11) могут быть записаны и в форме уравнений Лагранжа. Чтобы составить уравнения Лагранжа (5.18), необходимо записать функцию Лагранжа в виде разности кинетической энергии и обобщенного потенциала (5.17) как функций независимых переменных и, кроме того, знать силы непотенциального характера.

Если начало подвижной системы координат поместить в центре инерции тела, то в неподвижной системе координат его кинетическая энергия представится в виде суммы двух слагаемых

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1, \beta=1}^3 J_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta. \quad (6.24)$$

Здесь первый член соответствует кинетической энергии поступательного движения тела

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2), \quad (6.25)$$

где  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  – проекции скорости центра масс на оси неподвижной системы координат. Второе слагаемое в (6.24) есть кинетическая энергия вращения тела с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  вокруг оси, проходящей через центр масс. Если в качестве обобщенных координат, характеризующих вращение тела, использовать эйлеровы углы, а оси подвижной системы координат  $x_1 x_2 x_3$  направить по главным осям инерции, то для кинетической энергии вращательного движения в соответствии с (6.7) можно получить выражение

$$\begin{aligned}
T_{\text{вращ}} &= \frac{1}{2}(J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2) = \\
&= \frac{1}{2}[J_1(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 + J_2(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + \\
&\quad + J_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2].
\end{aligned} \tag{6.26}$$

В частности, для симметричного волчка будем иметь

$$T_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}[J_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2]. \tag{6.27}$$

Если рассматриваемое тело является свободным, то для определения его движения потребуется полная система из шести уравнений движения: для трех декартовых координат центра масс  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и трех эйлеровых углов  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial L}{\partial X} &= Q'_X, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Y} &= Q'_Y, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Z} &= Q'_Z, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= Q'_\varphi, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q'_\theta, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= Q'_\psi,
\end{aligned} \tag{6.28}$$

где  $Q'$  – обобщенные непотенциальные силы, которые не могут быть включены в функцию Лагранжа.

Однако, если на движение твердого тела будут наложены дополнительные связи, то число необходимых уравнений будет сокращено. Например, рассматриваемое движение может оказаться плоскопараллельным, т.е. таким, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Тогда число поступательных степеней свободы сократится до двух, а направление оси вращения будет все время перпендикулярным плоскости и для характеристики вращения понадобится не три угла, а только один. Или может случиться, что одна точка тела будет закреплена, и тогда поступательные степени свободы вообще будут исключены. Хотя формально уравнения Лагранжа и достаточны для решения такой задачи, в случае тела с одной неподвижной точкой часто удобнее пользоваться другими уравнениями, известными под названием динамических уравнений Эйлера. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned}
J_1' \frac{d\Omega_1}{dt} + (J_3' - J_2')\Omega_2\Omega_3 &= L_1^{\text{ex}}, \\
J_2' \frac{d\Omega_2}{dt} + (J_1' - J_3')\Omega_3\Omega_1 &= L_2^{\text{ex}}, \\
J_3' \frac{d\Omega_3}{dt} + (J_2' - J_1')\Omega_1\Omega_2 &= L_3^{\text{ex}}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Здесь  $J_1', J_2', J_3'$  – главные моменты инерции относительно неподвижной точки, а  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\Omega_3$  – проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат  $O'x_1x_2x_3$ . Производные по времени  $\frac{d\Omega_i}{dt}$  вычисляются в подвижной системе координат (орты  $e_i$  подвижной системы координат считаются при вычислении постоянными),  $L_i$  – проекции вектора суммарного момента внешних сил относительно неподвижной точки на оси подвижной системы координат.

Динамические уравнения Эйлера (6.29) вместе с кинематическими уравнениями Эйлера (6.7) образуют систему шести дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения шести функций:  $\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t), \varphi(t), \theta(t)$  и  $\psi(t)$ , описывающих движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

Число степеней свободы твердого тела может быть уменьшено также, если оно соприкасается с другим телом. При движении соприкасающихся тел появляются силы реакций, состоящие из нормальных реакций и сил диссипативного характера – сил трения. Возможны два типа движения соприкасающихся тел: скольжение и качение. При скольжении нормальные реакции перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям, а силы трения направлены по касательным к ним. Чистое качение характеризуется тем, что в точках соприкосновения нет относительного движения тел. При этом направление силы реакции произвольно, т.е. не обязательно нормально к соприкасающимся поверхностям. Трение же при качении проявляется в виде дополнительного момента сил, препятствующего качению.

Если при скольжении трение настолько мало, что им можно пренебречь, то поверхности тел называют абсолютно гладкими. Если свойства поверхности допускают лишь чистое качение тел без скольжения, а трени-

ем при качении можно пренебречь, то поверхности называют абсолютно шероховатыми.

В случае качения твердого тела связи, налагаемые на его движение, носят неголономный характер и определение движения тела становится сложной задачей, однако при линейной зависимости связей от скоростей она может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа.

### Движение в неинерциальной системе отсчета

Система координат, по отношению к которой изолированная материальная точка либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно, называется инерциальной. Любая система отсчета, которая движется по отношению к инерциальной равномерно и прямолинейно, также является инерциальной. Система координат, двигающаяся по отношению к инерциальной системе ускоренно, называется неинерциальной системой отсчета.

При рассмотрении движения материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета в правой части уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{I}_e + \mathbf{I}_K \quad (6.30)$$

к силе  $\mathbf{F}_0$ , имеющейся в инерциальной системе и обусловленной взаимодействием точки с другими материальными объектами, добавляются две силы инерции  $\mathbf{I}_e$  и  $\mathbf{I}_K$ . Сила инерции переносного движения

$$\mathbf{I}_e = -m(\mathbf{W} + [\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]]) \quad (6.31)$$

определяется ускорением поступательного движения неинерциальной системы отсчета  $\mathbf{W}$ , угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  и угловым ускорением  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  ее вращения. Сила инерции Кориолиса

$$\mathbf{I}_K = -2m[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] \quad (6.32)$$

зависит от скорости движения частицы  $\mathbf{v}$ . Часть силы инерции переносного движения

$$\mathbf{I}_{цб} = m[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]] \quad (6.33)$$

называется центробежной силой инерции. Она расположена в плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$ , перпендикулярно оси вращения (т.е. вектору  $\boldsymbol{\Omega}$ ) и направлена в сторону от оси.



## Примеры решения задач

**Задача 1.** Вычислить главные моменты инерции тонкой однородной пластинки массы  $m$ , имеющей форму равнобедренного треугольника с высотой  $h$  и стороной основания  $a$ .

*Решение.* Так как пластинка является плоской, то ясно что центр инерции ее расположен в плоскости пластинки.

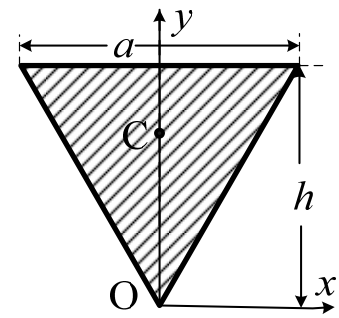
В силу наличия у пластинки оси симметрии (равнобедренный треугольник) центр инерции расположен на этой оси в точке  $C$ ,  $X$  координата которой равна нулю, а для вычисления координаты  $Y$  в соответствии с формулой (6.6), где объемную плотность вещества мы должны заменить на поверхностную  $\sigma(x,y) = 2m/ah$  и интеграл вычислять по поверхности пластинки, будем иметь

$$Y = \frac{1}{m} \int_S \sigma(x,y) y dS.$$

В силу аддитивности выражения для координаты центра масс интегрирование можно провести по половине площади пластинки и затем удвоить полученный результат. Для упрощения вычисления координаты  $Y$  начало исходной системы координат удобно поместить в вершине пластинки, а оси направить так, как показано на рисунке. При вычислении интеграла по половине площади пластинки, расположенной в положительном квадранте  $xOy$ , получаем

$$Y = \frac{4}{ah} \int_0^{a/2} \left( \int_{2hx/a}^h y dy \right) dx = \frac{2}{ah} \int_0^{a/2} \left[ h^2 - \left( \frac{2hx}{a} \right)^2 \right] dx = \frac{2}{ah} \left[ \frac{ah^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{4h^2}{a^2} \frac{a^3}{8} \right] = \frac{2}{3} h.$$

Зная положение центра инерции, мы, тем не менее, не будем в него переносить начало системы координат, а вычислим тензор инерции пластинки  $J'_{\alpha\beta}$  в этой же исходной системе координат. Из-за симметрии пластинки одна из главных ее осей инерции будет совпадать с осью  $Oy$ , следовательно, вторая будет направлена параллельно оси  $Ox$ . Так как пластинка является плоской, то третья главная ось инерции будет направлена перпендикулярно ее плоскости. Для плоского тела (см. задачу 6.7) момент инерции относительно оси, перпендикулярной его плоскости (у нас ось  $Oz$ ) ра-



вен сумме моментов относительно двух других главных осей, поэтому нам достаточно вычислить только моменты  $J'_x$  и  $J'_y$ . Для  $J'_y$  получаем

$$J'_y = \frac{4m}{ah} \int_0^{a/2} \left( \int_{2hx/a}^h dy \right) x^2 dx = \frac{4m}{ah} \int_0^{a/2} \left( h - \frac{2hx}{a} \right) x^2 dx = \frac{4m}{ah} \left[ \frac{a^3 h}{24} - \frac{a^3 h}{32} \right] = \frac{1}{48} ma^2.$$

Аналогично для  $J'_x$  имеем

$$J'_x = \frac{4m}{ah} \int_0^{a/2} \left( \int_{2hx/a}^h y^2 dy \right) dx = \frac{4m}{3ah} \int_0^{a/2} \left[ h^3 - \left( \frac{2hx}{a} \right)^3 \right] dx = \frac{4m}{3ah} \left[ \frac{ah^3}{2} - \frac{ah^3}{8} \right] = \frac{1}{2} mh^2.$$

Теперь переносим начало системы координат в центр инерции пластинки для того, чтобы найти главные моменты инерции относительно центра инерции. Так как вектор  $\mathbf{a}$ , связывающий новое начало со старым, имеет только одну компоненту, отличную от нуля  $a_y = -2h/3$ , то в соответствии с теоремой Штейнера (6.21) находим

$$J_x = J'_x - \frac{4}{9} mh^2 = \frac{1}{2} mh^2 - \frac{4}{9} mh^2 = \frac{1}{18} mh^2, \quad J_y = J'_y = \frac{1}{48} ma^2.$$

И для момента относительно оси  $Oz$  получаем

$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{18} mh^2 + \frac{1}{48} ma^2 = \frac{m}{144} (3a^2 + 8h^2).$$

**Задача 2.** Система состоит из 4-ех частиц с массами  $m$ , расположенных в точках с координатами:  $-a, 3a, 5a$ ;  $-3a, 8a, -5a$ ;  $-a, -3a, -3a$ ;  $-3a, -8a, 7a$ . Определить главные моменты и главные направления инерции.

*Решение.* Пользуясь формулами (6.5), для дискретной системы частиц находим положение центра инерции в исходной системе координат

$$X = -\frac{1}{4} 8a = -2a, \quad Y = 0, \quad Z = a.$$

Помещаем центр новой системы координат в центр инерции данной системы, а оси оставляем направленными параллельно старым осям координат. В соответствии с формулой (6.3) находим координаты всех частиц в новой системе координат:  $a, 3a, 4a$ ;  $-a, 8a, -6a$ ;  $a, -3a, -4a$ ;  $-a, -8a, 6a$ . В этой системе координат вычисляем компоненты тензора инерции (6.14). Получаем

$$J_{xx} = 250ma^2, \quad J_{xy} = 0, \quad J_{xz} = 0, \quad J_{yy} = 108ma^2, \quad J_{yz} = 72ma^2, \quad J_{zz} = 150ma^2.$$

Найденный тензор инерции приводим к главным осям. Для этого составляем характеристическое уравнение (6.18)

$$\begin{vmatrix} 250ma^2 - J & 0 & 0 \\ 0 & 108ma^2 - J & 72ma^2 \\ 0 & 72ma^2 & 150ma^2 - J \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$(250ma^2 - J)[(108ma^2 - J)(150ma^2 - J) - 5178m^2a^4] = 0.$$

Решая его, находим главные моменты инерции системы

$$J_1 = 250ma^2, \quad J_2 = 204ma^2, \quad J_3 = 54ma^2.$$

Так как компоненты  $J_{12}$  и  $J_{13}$  тензора инерции равны нулю, для главного направления, соответствующего главному моменту инерции  $J_1 = 250ma^2$ , получаем орт  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ , совпадающий с ортом исходной оси  $Ox$ . Для направляющих косинусов второго главного направления в соответствии с (6.19) имеем систему уравнений

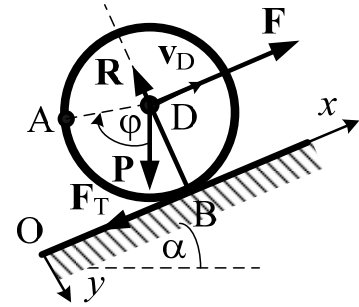
$$\begin{aligned} 46a_{2x} &= 0, & -96a_{2y} + 72a_{2z} &= 0, \\ 72a_{2y} - 54a_{2z} &= 0, & |a_{2x}|^2 + |a_{2y}|^2 + |a_{2z}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Из решения ее получаем:  $a_{2x} = 0$ ,  $a_{2y} = (3/4)a_{2z}$ ,  $|a_{2z}| = 4/5$ . Поэтому второе главное направление определяется, например, ортом  $\mathbf{e}_2 = (3/5)\mathbf{e}_y + (4/5)\mathbf{e}_z$ . Обратим внимание на то, что из вышеприведенной системы мы можем определить лишь модули направляющих косинусов, поэтому и орт главного направления определяем с точностью до знака. Для нахождения третьего главного направления можно систему (6.19) не выписывать, а просто воспользоваться тем фактом, что орты всех трех главных направлений должны быть ортогональны между собой. Ортогональность искомого орта первому орту свидетельствует о том, что орт  $\mathbf{e}_3$ , также как и орт  $\mathbf{e}_2$ , должен располагаться в плоскости  $Oyz$ , а из ортогональности орту  $\mathbf{e}_2$  находим орт третьего главного направления в виде  $\mathbf{e}_3 = (4/5)\mathbf{e}_y - (3/5)\mathbf{e}_z$ .

**Задача 3.** При подъеме автомашины в гору, склон которой расположен под углом  $\alpha$  к горизонту, к центру инерции  $D$  ведомого колеса приложена постоянная сила  $\mathbf{F}$ , параллельная склону. Предполагая, что движение проис-

ходит в одной вертикальной плоскости, определить закон движения центра инерции колеса. Колесо считать однородным кольцом веса  $P$  и радиуса  $r$ . Полагать, что в начальный момент автомашина находилась в покое, колесо катится без скольжения и сопротивлением качения пренебречь.

*Решение.* Поскольку колесо движется плоскопараллельно, то для описания его поведения на плоскости  $xOy$  потребуется три координаты. В качестве таковых будем использовать декартовы координаты центра инерции колеса  $X$  и  $Y$  и угол  $\varphi$  поворота колеса вокруг своей оси. Выберем координатные оси как показано на рисунке. В соответствии с направлением осей положительным направлением отсчета угла  $\varphi$  будем считать направление по часовой стрелке. Сам угол поворота колеса определим как угол между вертикалью и помеченным на колесе радиусом  $AD$ .



К колесу приложены внешние силы:  $P$  – вес колеса,  $F$  – движущая сила,  $R$  – нормальная сила реакции наклонной поверхности Земли и  $F_T$  – сила трения колеса о Землю.

Запишем уравнения для плоскопараллельного движения колеса: два уравнения типа (6.9) для описания поступательного движения и одно уравнение типа (6.12) для описания вращения. Имеем в нашем случае

$$\frac{P}{g} \ddot{X} = F - P \sin \alpha - F_T, \quad \frac{P}{g} \ddot{Y} = P \cos \alpha - R, \quad \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi} = F_T r. \quad (6.34)$$

Момент силы трения в последнем уравнении системы (6.34) положителен, потому что его направление совпадает с направлением положительного отсчета угла  $\varphi$ .

Так как при движении колеса координата  $Y = -r$  постоянна, и  $\ddot{Y} = 0$ , то из второго уравнения системы (6.34) находим  $R = P \cos \alpha$ . Для определения движения центра инерции  $D$  колеса необходимо проинтегрировать первое уравнение системы (6.34). Однако в правую часть этого уравнения входит неизвестная по модулю сила трения  $F_T$ . Для исключения  $F_T$  следует обратиться к третьему уравнению системы (6.34), одновременно используя условие качения колеса без скольжения

$$\dot{X} = r\dot{\varphi} \quad (6.35)$$

(мгновенная ось вращения колеса проходит через точку В соприкосновения колеса с дорогой). Беря в (6.35) производную по времени от  $\dot{X}$ , получим

$$\ddot{X} = r\ddot{\varphi}. \quad (6.36)$$

После подстановки выражения (6.36) в первое уравнение системы (6.34) и деления его на третье уравнение находим

$$\frac{F - P \sin \alpha - F_T}{F_T} = 1,$$

откуда

$$F_T = \frac{1}{2}(F - P \sin \alpha). \quad (6.37)$$

Теперь первое уравнение системы (6.34) после подстановки в него значения  $F_T$  из (6.37) принимает вид

$$\ddot{X} = \frac{g}{2P}(F - P \sin \alpha).$$

Интегрируя его при начальных условиях задачи: при  $t = 0$   $X_0 = 0$ ,  $\dot{X}_0 = 0$ , получаем искомый закон движения центра инерции D ведомого колеса

$$X = \frac{g}{4P}(F - P \sin \alpha)t^2.$$

Нетрудно отсюда видеть, что колесо будет катиться вверх при выполнении условия  $F - P \sin \alpha > 0$ , т.е. при  $F > P \sin \alpha$ .

*Замечание.* Часто, решая подобные задачи, ошибочно полагают, что качение колеса без скольжения может происходить при отсутствии силы трения  $F_T$ . Нетрудно видеть, что при таком предположении третье уравнение системы (6.34) принимает вид

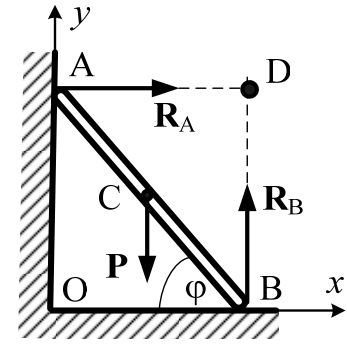
$$\frac{P}{g}r^2\ddot{\varphi} = 0, \text{ т.е. } \ddot{\varphi} = 0. \text{ Учитывая, что при}$$

$t = 0$   $\varphi_0 = 0$  и  $\dot{\varphi}_0 = 0$ , получим  $\varphi = 0$  и это означает, что при отсутствии силы трения качение колеса будет невозможно.

**Задача 4.** Однородный стержень АВ длиной  $2a$  и весом  $P$  движется под действием своего веса, скользя концами А и В по гладкой вертикальной стене и гладкому горизонтальному полу. Предполагая, что движение происходит в одной вертикальной плоскости, определить угловое ускорение и

угловую скорость стержня, а также найти угол  $\varphi_1$ , который стержень будет составлять с горизонтом, когда он отойдет от стены.

*Решение.* Стержень в своем плоскопараллельном движении обладает всего одной степенью свободы, поскольку поступательное движение его центра инерции полностью определяется его вращением.



Расположим оси системы координат как показано на рисунке. В качестве обобщенной координаты возьмем угол  $\varphi$ , который стержень образует с горизонтальным полом. Для нахождения движения стержня воспользуемся уравнениями Лагранжа (6.28), из которых нам потребуется всего одно. Вследствие того, что верхний конец стержня А движется вдоль вертикальной стены, а нижний конец В – вдоль горизонтального пола, на движение стержня в любой момент времени можно смотреть как на чистое вращение около оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через точку D, находящуюся на пересечении линий, перпендикулярных к скорости конца А и к скорости конца В. Это мгновенное вращение происходит с той же угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ , с которой стержень поворачивается около оси, проходящей через точку В, так как угловая скорость вращения твердого тела не зависит от выбора начала подвижной системы координат и тело вокруг всех параллельных осей вращается с одной и той же угловой скоростью. Так как расстояние от центра инерции стержня до мгновенной оси вращения равно  $a$  ( $CD = CB$ ), момент инерции относительно мгновенной

оси согласно теореме Штейнера (6.21) равен  $J_D = \frac{m}{12}(2a)^2 + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2$ .

Отсюда для кинетической энергии стержня будем иметь  $T = 2ma^2\dot{\varphi}^2 / 3$ . Полагая, что нуль потенциальной энергии соответствует уровню пола, для потенциальной энергии стержня найдем  $U = mga \sin \varphi$ . Тогда функцию Лагранжа запишем в виде

$$L = T - U = \frac{2}{3}ma^2\dot{\varphi}^2 - mga \sin \varphi.$$

Из уравнения Лагранжа  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$  получаем  $\frac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi} + mga \cos \varphi = 0$ .

Из последнего уравнения находим угловое ускорение стержня

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \cos \varphi. \quad (6.38)$$

Представляя это выражение в виде  $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{3g}{4a} d \sin \varphi$  и интегрируя с использованием начальных условий (при  $\varphi = \varphi_0$   $\dot{\varphi} = 0$ ), получаем

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \Big|_0^{\varphi} = -\frac{3g}{4a} \sin \varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi}. \text{ Отсюда находим угловую скорость стержня}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}. \quad (6.39)$$

Отметим, что этот результат можно было получить, применив закон сохранения энергии стержня.

Для определения значения угла  $\varphi_1$ , при котором конец стержня А отойдет от стены, запишем уравнение движения центра инерции стержня в горизонтальном направлении

$$\frac{P}{g} \ddot{X} = R_A. \quad (6.40)$$

Из рисунка видно, что  $X = a \cos \varphi$ . Дифференцируя по времени, находим

$$\dot{X} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{X} = -a\ddot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (6.41)$$

Стержень отделится от стены в тот момент, когда сила реакции  $R_A$  обратится в нуль и в этот же момент согласно (6.40)  $\ddot{X}$  тоже становится равным нулю. Тогда из (6.41) находим, что в момент отделения стержня от стены

$$\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 = 0.$$

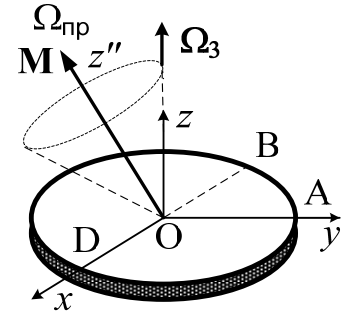
Подставляя в это соотношение значения  $\ddot{\varphi}_1$  и  $\dot{\varphi}_1^2$  соответственно из формул (6.38) и (6.39), после простых преобразований получим

$$[\sin \varphi_1 - 2(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1)] \cos \varphi_1 = 0.$$

Из условия задачи следует, что  $\cos \varphi_1 \neq 0$ , поэтому  $\sin \varphi_1 - 2(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) = 0$ . Из этого уравнения и определяем значение угла  $\varphi_1$ , при котором стержень отойдет от стены

$$\varphi_1 = \arcsin \left( \frac{2}{3} \sin \varphi_0 \right).$$

**Задача 5.** В момент метания диска радиуса  $r$  плоскость диска горизонтальна и три его точки А, В и D (см. рисунок) имеют скорости  $v_A = 0$ ,  $v_B = v_0$ ,  $v_D = \sqrt{2}v_0$ , причем вектор  $\mathbf{v}_B$  лежит в плоскости диска. Предполагая, что на диск действует сила тяжести, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти движение диска.



*Решение.* Будем рассматривать в качестве неподвижной инерциальной системы координат  $Oxyz$ , изображенную на рисунке, т.е. допустим, что в начальный момент времени центр инерции диска находился в начале координат ( $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $Z_0 = 0$ ). Для установления начальных скоростей движения диска запишем начальные скорости точек А, В и D в этой системе координат. Согласно (6.4) имеем

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{r}'_A], \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{r}'_B], \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{V}_0 + [\boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{r}'_D].$$

Так как радиус-векторы этих точек в подвижной системе координат  $O'x_1x_2x_3$ , в начальный момент совпадающей с неподвижной системой  $Oxyz$ , имеют вид

$$\mathbf{r}'_A(0, r, 0), \quad \mathbf{r}'_B(-r, 0, 0), \quad \mathbf{r}'_D(r, 0, 0),$$

то для скоростей точек найдем

$$\mathbf{v}_A(V_{0x} - r\Omega_{0z}, V_{0y}, V_{0z} - r\Omega_{0x}),$$

$$\mathbf{v}_B(V_{0x}, V_{0y} - r\Omega_{0z}, V_{0z} + r\Omega_{0y}),$$

$$\mathbf{v}_D(V_{0x}, V_{0y} + r\Omega_{0z}, V_{0z} - r\Omega_{0y}).$$

Далее учитывая, что по условию задачи вектор  $\mathbf{v}_B$  лежит в плоскости диска и его модуль равен  $v_0$ , а модули векторов  $\mathbf{v}_A$  и  $\mathbf{v}_D$  равны соответственно 0 и  $\sqrt{2}v_0$ , получаем систему шести уравнений

$$V_{0z} + r\Omega_{0y} = 0, \quad V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + r^2\Omega_{0z}^2 - 2rV_{0y}\Omega_{0z} = v_0^2,$$

$$V_{0x} - r\Omega_{0z} = 0, \quad V_{0y} = 0, \quad V_{0z} + r\Omega_{0x} = 0,$$

$$V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + r^2\Omega_{0z}^2 + 2rV_{0y}\Omega_{0z} + V_{0z}^2 + r^2\Omega_{0y}^2 - 2rV_{0z}\Omega_{0y} = 2v_0^2$$

для определения трех компонент вектора  $\mathbf{V}_0$  и трех компонент вектора  $\boldsymbol{\Omega}_0$ .



Разрешая эту систему, находим

$$\mathbf{v}_0 \left( \frac{v_0}{\sqrt{2}}, 0, \frac{v_0}{2} \right), \quad \boldsymbol{\Omega}_0 \left( -\frac{v_0}{2r}, -\frac{v_0}{2r}, \frac{v_0}{\sqrt{2}r} \right).$$

Для определения поступательного движения диска воспользуемся уравнениями (6.9), характеризующими изменение импульса твердого тела. Из второго уравнения системы (6.9) для координаты  $Y$  центра инерции

$$m\ddot{Y} = 0$$

с начальными условиями  $Y_0 = 0$  и  $\dot{Y}_0 = 0$  заключаем, что  $Y = 0$  и, следовательно, центр инерции диска движется в плоскости  $xOz$ . Из уравнений (6.9) для координат  $X$  и  $Z$

$$m\ddot{X} = 0, \quad m\ddot{Z} = -mg$$

с начальными условиями  $X_0 = 0$ ,  $Z_0 = 0$ ,  $\dot{X}_0 = v_0 / \sqrt{2}$ ,  $\dot{Z}_0 = v_0 / 2$  находим движение центра инерции диска

$$X = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t, \quad Z = \frac{v_0}{2}t - \frac{g}{2}t^2.$$

При определении вращательного движения диска обратим внимание на то, что момент всех действующих на диск сил  $\mathbf{L}^{\text{ex}}$  равен нулю, поэтому согласно (6.11) момент импульса диска  $\mathbf{M}$  относительно центра инерции будет интегралом движения, т.е. в процессе движения не будет меняться. В таком случае мы можем его найти, вычислив в начальный момент времени. В начальный момент времени имеем в соответствии с (6.22) и задачей 6.9в

$$M_1 = J_1\Omega_1 = J_1\Omega_{0x} = -\frac{mrv_0}{8}, \quad M_2 = M_1, \quad M_3 = J_3\Omega_3 = J_3\Omega_{0z} = \frac{mrv_0}{2\sqrt{2}}.$$

Отсюда для модуля углового момента найдем

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}mrv_0. \quad (6.42)$$

Направление его в системе  $O'x'y'z'$ , оси которой во все время движения параллельны осям неподвижной системы отсчета  $Oxyz$ , будет определяться ортом

$$\mathbf{e} \left( -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Выберем теперь новую ось  $z''$  неподвижной системы координат в направлении постоянного углового момента  $\mathbf{M}$  (см. рисунок). Ось  $x_3$  подвижной системы направим по оси симметрии диска, а ось  $x_1$  пусть совпадает в рассматриваемый момент времени с линией узлов  $O'N$  (см. определение эйлеровых углов). Для кинетических уравнений Эйлера (6.7) можно получить более простой вид с использованием произвольности выбора главных направлений инерции в случае симметричного волчка

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (6.43)$$

С помощью этих формул для компонент вектора  $\mathbf{M}$  найдем

$$M_1 = \frac{mr^2}{4} \dot{\theta}, \quad M_2 = \frac{mr^2}{4} \dot{\phi} \sin \theta, \quad M_3 = \frac{mr^2}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

С другой стороны, так как ось  $x_1$  (линия узлов) перпендикулярна к оси  $z''$ , имеем

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M \sin \theta, \quad M_3 = M \cos \theta.$$

Приравнявая друг другу эти выражения, с учетом (6.42) получим следующие уравнения

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{\sqrt{10} v_0}{2 r}, \quad \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{\sqrt{10} v_0}{4 r} \cos \theta. \quad (6.44)$$

Первое из этих уравнений дает  $\theta = \text{const}$ , т.е. постоянство угла наклона оси диска к направлению момента  $\mathbf{M}$ . Отсюда заключаем, что ось диска во время его полета прецессирует вокруг направления момента. Из второго уравнения получаем угловую скорость этой прецессии  $\Omega_{\text{пр}} = \dot{\phi}$ . Из третьего уравнения системы (6.44) можно определить угловую скорость вращения диска вокруг собственной оси  $\Omega_3$  и получить эйлерову угловую скорость  $\dot{\psi}$ , если найти постоянный угол  $\theta$ , который ось диска составляет с направлением момента  $\mathbf{M}$ . В начальный момент времени

$$M_3 = \frac{mrv_0}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{8} mrv_0 \cos \theta, \text{ отсюда получаем } \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ и находим}$$

$$\Omega_3 = \frac{v_0}{\sqrt{2}r}, \quad \dot{\psi} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}r}.$$

**Задача 6.** Принимая во внимание неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, и считая скорость вращения Земли постоянной, найти от-

клонение от вертикали свободно падающей с высоты  $h$  материальной точки массы  $m$ . Начальную скорость точки полагать равной нулю, а поле силы тяжести Земли считать однородным.

*Решение.* Будем определять движение точки относительно лабораторной системы отсчета  $Oxyz$ , связанной с Землей (см. рисунок). Ось  $Ox$  этой системы направим по касательной к меридиану на юг, ось  $Oy$  – по касательной к параллели на восток, ось  $Oz$  направим по вертикали вверх. Вертикальным направлением будем называть направление нити отвеса. Это направление, вообще говоря, не совпадает с направлением радиуса Земли, так как отвес направлен по равнодействующей силы тяготения к центру Земли  $F_3$  и центробежной силы инерции (6.33)

$$mg = F_3 + m[\Omega[r\Omega]].$$

Направление силы тяжести  $mg$  (направление нити отвеса) будет противоположным направлению оси  $Oz$ . Угол  $\varphi$ , образованный вертикалью с плоскостью экватора, называется географической широтой местности на поверхности Земли. Проектируя векторное уравнение движения точки

$$m\ddot{\mathbf{r}} = mg + \mathbf{I}_K = mg - 2m[\Omega\mathbf{v}]$$

на оси выбранной системы координат, найдем

$$m\ddot{x} = -2m(\Omega_y\dot{z} - \Omega_z\dot{y}), \quad m\ddot{y} = -2m(\Omega_z\dot{x} - \Omega_x\dot{z}), \quad m\ddot{z} = -2m(\Omega_x\dot{y} - \Omega_y\dot{x}).$$

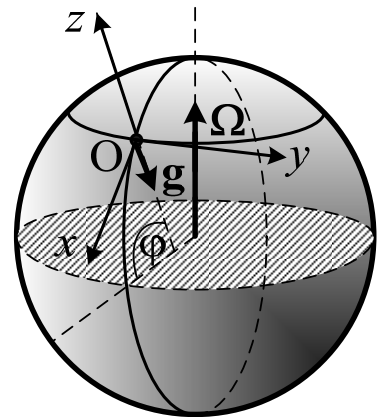
Проекция вектора угловой скорости Земли  $\Omega$  на координатные оси выражаются так

$$\Omega_x = -\Omega \cos \varphi, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi,$$

поэтому уравнения движения приобретают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega\dot{y} \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -2\Omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega\dot{y} \cos \varphi. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Интегрируя эту систему один раз с начальными условиями: при  $t=0$   $x_0 = y_0 = 0$ ,  $z_0 = h$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ , получаем систему



$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\Omega y \sin \varphi, \\ \dot{y} &= -2\Omega(x \sin \varphi + z \cos \varphi), \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega y \cos \varphi,\end{aligned}\tag{6.46}$$

которая является системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Для ее решения исключим  $\dot{x}$  и  $\dot{z}$  из второго уравнения системы (6.45). Найдем

$$\ddot{y} + 4\Omega^2 y = 2\Omega g t \cos \varphi.$$

Интегрируем это уравнение с вышеуказанными начальными условиями. Получим

$$y = \frac{gt \cos \varphi}{2\Omega} - \frac{g \cos \varphi}{\Omega^2} \sin 2\Omega t.\tag{6.47}$$

Подставляя найденное значение  $y$  в первое и последнее уравнения системы (6.46), интегрируя их, будем иметь

$$\begin{aligned}x &= g \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\Omega t}{4\Omega^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi, \\ z &= h - \frac{gt^2}{2} + g \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\Omega t}{4\Omega^2} \right) \cos^2 \varphi.\end{aligned}\tag{6.48}$$

Принимая теперь во внимание, что частота вращения Земли очень мала:  $\Omega$  порядка  $0,00007 \text{ сек}^{-1}$ , и предполагая, что время падения  $t$  невелико, полученные выше выражения (6.47) и (6.48) можно упростить. Разлагая правые части этих выражений по степеням  $\Omega t$  и сохраняя в них первые члены, отличающиеся от нуля, найдем

$$\begin{aligned}x &= \Omega^2 \frac{gt^4}{6} \sin \varphi \cos \varphi + \dots, \\ y &= \Omega \frac{gt^3}{3} \cos \varphi + \dots, \\ z &= h - \frac{gt^2}{2} + \Omega^2 \frac{gt^4}{6} \cos^2 \varphi + \dots\end{aligned}$$

Следовательно, влияние вращения Земли на движение материальной точки, свободно падающей в пустоте, проявляется в том, что траектория

точки отклоняется на восток и на юг. Отклонение на восток пропорционально первой степени угловой скорости вращения Земли и кубу времени, а отклонение на юг – квадрату угловой скорости и четвертой степени времени. Конечно, отклонение на юг очень мало. В местности с северной широтой  $60^\circ$  отклонение на восток при падении с высоты, равной 490 м, составляет примерно 12 см. Отклонение на восток проверялось экспериментально, причем наблюдалось удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

## Задачи

### Обязательные задачи

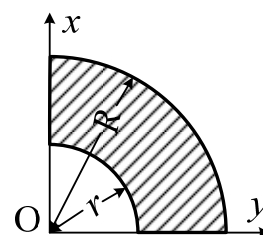
- 6.1. Найти положение центра инерции трехатомной молекулы, имеющей вид равнобедренного треугольника с высотой  $h$  и основанием  $a$ , если в вершине против основания расположен атом с массой  $m_1$ , а в основании атомы с массой  $m_2$ .

$$[X = 0, Y = m_1 h / (m_1 + 2m_2)]$$

- 6.2. Найти положение центра инерции четырехатомной молекулы с атомами, расположенными в вершинах правильной треугольной пирамиды с высотой  $h$  и ребром основания  $a$ . В вершинах основания располагаются атомы с массой  $m_2$ , а в верхней вершине – атом с массой  $m_1$ .

$$[X = 0, Y = 0, Z = m_1 h / (m_1 + 3m_2)]$$

- 6.3. Определить координаты центра инерции четверти плоского однородного тонкого кольца, показанного на рисунке.

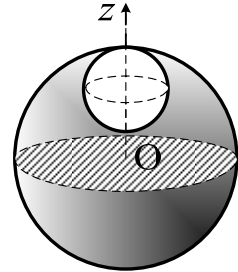


- 6.4. Показать, что при определении положения центра инерции системы материальных точек любую подсистему можно заменить одной точкой, масса которой равна массе подсистемы и которая расположена в центре инерции этой подсистемы.
- 6.5. Используя утверждение предыдущей задачи, методом выделения подсистем показать, что при наличии у твердого тела
- плоскости материальной симметрии,
  - оси материальной симметрии,

в) центра материальной симметрии  
 центр инерции тела лежит соответственно а) в плоскости симметрии, б) на оси симметрии, в) в центре симметрии.

6.6. Найти центр инерции:

- а) однородного полушара радиуса  $R$ ,  
 б) однородной полусферы радиуса  $R$ ,  
 в) однородного шара радиуса  $R$ , в котором вырезана полость радиуса  $r$ , как показано на рисунке.



$$\left[ \text{в) } X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -r^3(R-r)/(R^3 - r^3) \right]$$

6.7. Доказать, что для любой плоской фигуры в системе координат  $Oxyz$ , где оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости фигуры, тензор инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & 0 \\ J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{xx} + J_{yy} \end{pmatrix}.$$

6.8. Определить главные моменты инерции молекулы (рассматривая ее как систему жестко связанных частиц):

- а) состоящей из  $N$  атомов массой  $m$ , расположенных на одной прямой на расстоянии  $a$  друг от друга;  
 б) имеющей вид равнобедренного треугольника с высотой  $h$  и основанием  $a$ , в вершинах которого расположены один атом с массой  $m_1$  и два атома с массами  $m_2$  (в основании);  
 в) с атомами, расположенными в вершинах правильной треугольной пирамиды с высотой  $h$  и стороной основания  $a$ . Масса атома в вершине равна  $m_1$ , а атомов в основании —  $m_2$ .

6.9. Определить главные моменты инерции следующих сплошных тонких однородных тел с массой  $m$ :

- а) стержень длиной  $l$ ;  
 б) круговое кольцо радиуса  $R$ ;  
 в) круглый диск радиуса  $R$ ;  
 г) сферическая оболочка радиуса  $R$ ;  
 д) цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  и высоты  $h$ .

$$\left[ \text{в) } J_1 = J_2 = \frac{mR^2}{4}, J_3 = \frac{mR^2}{2}; \quad \text{з) } J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{3}mR^2 \right]$$

6.10. Определить главные моменты инерции следующих сплошных однородных тел с массой  $m$ :

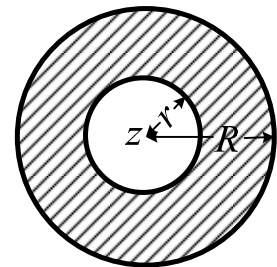
а) шар радиуса  $R$ ;

б) круговой цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $h$ ;

в) прямоугольный параллелепипед с длинами ребер  $a, b, c$ .

6.11. Вычислить момент инерции тонкого однородного полудиска массы  $m$  и радиуса  $r$  относительно оси, проходящей вдоль диаметра, ограничивающего полудиск.

6.12. В тонком однородном круглом диске радиуса  $R$  высверлено концентрическое отверстие радиуса  $r$ . Вычислить момент инерции этого диска массы  $m$  относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска.

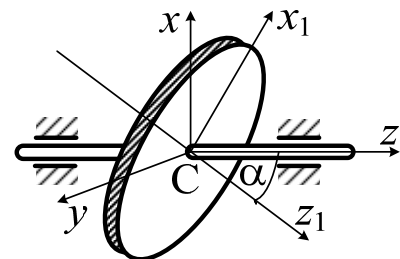


6.13. Найти главные моменты инерции полого шара массы  $m$  с внешним радиусом  $R$  и внутренним радиусом  $r$ .

6.14. Найти главные моменты инерции полого цилиндра массы  $m$  с внешним радиусом  $R$  и внутренним радиусом  $r$ .

$$\left[ J_1 = J_2 = m \left( \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right), \quad J_3 = m(R^2 + r^2) / 2 \right]$$

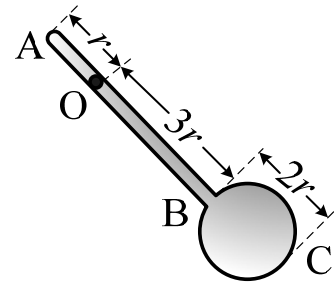
6.15. Однородный круглый диск массы  $m$  насажен на ось  $z$ , проходящую через его центр инерции  $C$ . Ось симметрии диска  $z_1$  лежит в вертикальной плоскости  $xz$  и образует с осью  $z$  угол  $\alpha$ . Радиус диска равен  $R$ . Вычислить компоненты тензора инерции диска  $J_{xz}, J_{yz}, J_{xy}$  (оси координат показаны на рисунке).



$$\left[ J_{xy} = J_{yz} = 0, \quad J_{xz} = \frac{mR^2}{8} \sin 2\alpha \right]$$

6.16. Маятник состоит из тонкого однородного стержня АВ массы  $m$ , к концу которого прикреплен тонкий однородный диск С массы  $M$ .

Длина стержня равна  $4r$ , где  $r$  – радиус диска. Вычислить момент инерции маятника относительно оси привеса  $O$ , перпендикулярной плоскости маятника и отстоящей на расстоянии  $r$  от конца стержня.



$$\left[ J_O = \frac{14m + 99M}{6} r^2 \right]$$

- 6.17. Получить выражение момента инерции  $J_n$  относительно оси, параллельной единичному вектору  $\mathbf{n}$  и проходящей через центр инерции тела, через компоненты тензора инерции, вычисленного в системе координат  $Oxyz$ .
- 6.18. Определить момент импульса:
- шара, вращающегося вокруг одного из своих диаметров;
  - куба, вращающегося вокруг одного из ребер;
  - куба, вращающегося вокруг одной из главных диагоналей.
- Угловую скорость вращения полагать равной  $\omega$ .
- 6.19. Массивный диск радиуса  $R$  и веса  $Q$  вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . С какой силой надо нажать тормоз, чтобы остановить диск, дав ему сделать только один оборот, если коэффициент трения тормоза о диск равен  $f$ .

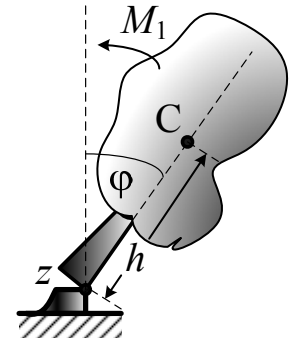
$$\left[ F = \frac{QR\omega^2}{8\pi fg} \right]$$

- 6.20. Твердое тело, находящееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси силой, имеющей постоянным момент, равным  $L$ , при этом возникает момент сил сопротивления  $L_1$ , пропорциональный угловой скорости вращения твердого тела:  $L_1 = -\alpha\dot{\phi}$ . Найти закон изменения угловой скорости, полагая, что момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен  $J$ .
- 6.21. Определить с какой угловой скоростью  $\omega$  упадет на землю спиленное дерево массы  $M$ , если его центр инерции  $D$  расположен на расстоянии  $h$  от основания, а силы сопротивления воздуха создают мо-



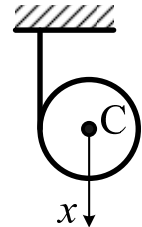
мент сопротивления  $L_1$ , причем  $L_{1z} = -\alpha\dot{\phi}^2$ , где  $\alpha$  – постоянный коэффициент. Момент инерции дерева относительно оси  $z$ , совпадающей с осью, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен  $J$ .

$$\left[ \omega = \sqrt{\frac{2MghJ}{J^2 + 4\alpha^2} \left( e^{-\alpha\pi/J} + 2\frac{\alpha}{J} \right)} \right]$$



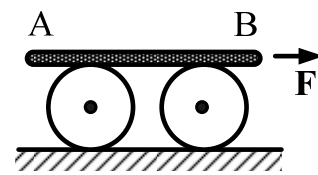
- 6.22. Цилиндр веса  $P$  обмотан посредине нитью, конец которой прикреплен к потолку. Цилиндр, разматывая нить, падает без начальной скорости. Предполагая, что движение цилиндра плоскопараллельно и нить не отклоняется от вертикали, найти ускорение его центра инерции и натяжение нити.

$$\left[ w_C = \frac{2}{3}g, T = \frac{1}{3}P \right]$$



- 6.23. Однородный тяжелый шар скатывается под действием своего веса без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Предполагая, что движение шара плоскопараллельно и трение при движении отсутствует, определить ускорение центра инерции шара.

- 6.24. Стержень АВ лежит на двух одинаковых цилиндрах, которые могут катиться по абсолютно шероховатому горизонтальному полу. Скольжение между стержнем и цилиндрами отсутствует. На стержень вдоль его оси действует сила  $F$  и приводит в движение всю систему. Цилиндры имеют вес  $Q$  и радиус  $R$ , а вес стержня равен  $P$ . Определить ускорение стержня.

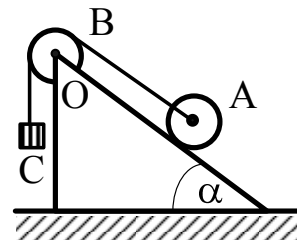


$$\left[ w = \frac{4F}{3Q + 4P}g \right]$$

- 6.25. Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести по наклонной шероховатой плоскости с коэффициентом трения  $f$ . Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра, предполагая, что при движении цилиндра

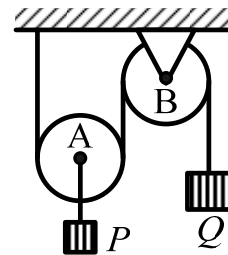
скольжение отсутствует. Соппротивлением качения пренебречь. Найти также силу реакции, с которой плоскость действует на цилиндр.

- 6.26. Каток А массы  $m_1$ , скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает груз С массы  $m_2$  посредством нерастяжимой и невесомой нити, переброшенной через блок В. При этом блок В вращается вокруг неподвижной оси О, перпендикулярной его плоскости. Каток А и блок В – однородные круглые диски одинаковой массы и радиуса. Наклонная плоскость образует угол  $\alpha$  с горизонтом. Определить ускорение оси катка.



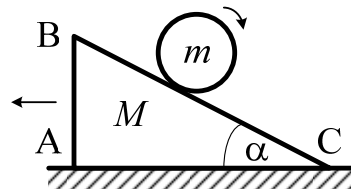
$$\left[ w = g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{2m_1 + m_2} \right]$$

- 6.27. Решить задачу 5.14, предполагая, что оба блока являются однородными тонкими дисками с одинаковой массой  $m$  и радиусом  $R$ .
- 6.28. Нить, один конец которой прикреплен к потолку, охватывает подвижный блок А, к которому подвешен груз весом  $P$ , и неподвижный блок В. К другому концу нити привязан груз весом  $Q$ . Определить ускорение груза веса  $Q$ , считая блоки одинаковыми однородными дисками массы  $m$ .



$$\left[ w_Q = g \frac{4(2Q - P - mg)}{8Q + 2P + 7mg} \right]$$

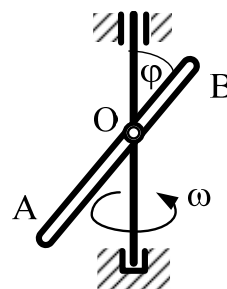
- 6.29. На гладкой горизонтальной плоскости может скользить без трения треугольная призма ABC массы  $M$ . По грани BC призмы, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, катится без скольжения однородный круглый цилиндр массы  $m$ . Определить ускорение призмы.



$$\left[ w = g \frac{m \sin 2\alpha}{3(M + m) - 2m \cos^2 \alpha} \right]$$

- 6.30. Тонкий прямолинейный однородный стержень АВ шарнирно соединен с вертикальным валом в точке О. Вал вращается с постоянной

угловой скоростью  $\omega$ . Определить угол отклонения стержня от вертикального направления  $\varphi$ , если  $OA = a$  и  $OB = b$ .



$$\left[ \cos \varphi = \frac{3g}{2\omega^2} \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \right]$$

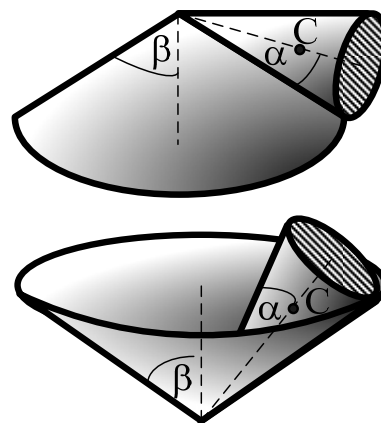
6.31. Взяв в качестве обобщенных координат твердого тела углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ , показать, что обобщенные импульсы  $p_\varphi$ ,  $p_\theta$  и  $p_\psi$  являются соответственно проекциями углового момента тела на ось  $z$  неподвижной системы координат, на линию узлов и ось  $x_3$  подвижной системы координат, связанной с твердым телом.

6.32. Определить кинетическую энергию конуса с массой  $m$ , высотой  $h$  и углом раствора  $\alpha$ , который вращается без скольжения:

а) по внешней стороне другого неподвижного конуса с углом раствора  $\beta$ ;

б) по внутренней стороне этого конуса.

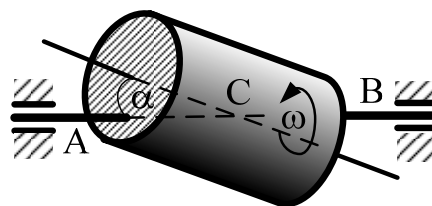
Считать, что вершина движущегося конуса, расположенная на расстоянии  $a$  от его центра инерции, совпадает с вершиной неподвижного конуса и не смещается во время движения.



$$\left[ \text{а) } T = \frac{mh^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{2} \left( \frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{20} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{27}{80} \right), \text{ где } \varphi \text{ — угол поворота} \right]$$

оси подвижного конуса относительно оси неподвижного конуса

6.33. Прямой однородный круглый цилиндр, имеющий массу  $m$ , высоту  $h$  и радиус основания  $R$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси АВ, проходящей через его центр масс С и образующей угол  $\alpha$  с его осью симметрии. Определить движение цилиндра.



6.34. Составить и проинтегрировать уравнения движения симметричного волчка, вдоль оси симметрии которого приложен постоянный момент

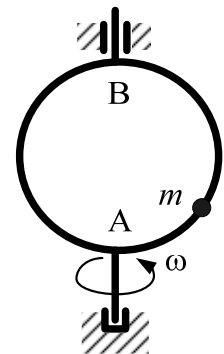
внешних сил  $L$ . Равнодействующая всех внешних сил равна нулю и в начальный момент, при  $t = 0$ , проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции были таковы:  $\Omega_1 = \Omega$ ,  $\Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 = \omega$ .

- 6.35. Шарик массы  $m$ , перемещающийся по гладкому стержню, соединен пружиной жесткости  $c$  и пренебрежимо малой массы с некоторой точкой этого стержня. Предполагая, что длина пружины в ненапряженном состоянии равна  $l_0$  и стержень движется с постоянным ускорением  $w$ , направленным под углом  $\alpha$  к оси стержня, найти функцию Лагранжа и закон движения шарика.

$$\left[ L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mw(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \frac{1}{2}c(x - l_0)^2 \right]$$

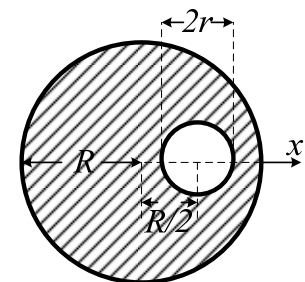
- 6.36. Клин ABC движется по гладкой горизонтальной плоскости (см. рис. к задаче 6.29) с постоянным ускорением  $w$ . На наклонную грань BC клина, образующую угол  $\alpha$  с горизонтом, помещается с нулевой относительной скоростью однородный круглый цилиндр радиуса  $r$  и массы  $m$ , который может катиться по этой грани без скольжения. Какова должна быть величина ускорения  $w$  для того, чтобы центр O цилиндра двигался вверх по клину?

- 6.37. Шарик движется по гладкой окружности радиуса  $a$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром окружности. Используя неинерциальную систему отсчета, связанную с вращающейся окружностью, найти закон движения шарика.



### Задачи средней трудности

- 6.38. Определить положение центра инерции однородного тонкого диска с круглым отверстием, предполагая, что радиус диска равен  $R$ , радиус отверстия равен  $r$ , а центр этого отверстия находится на расстоянии  $R/2$  от центра диска.



$$\left[ X = -\frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)} \right]$$

- 6.39. Определить главные моменты инерции кругового конуса с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ .

$$\left[ J_1 = J_2 = \frac{3}{20} \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right), J_3 = \frac{3}{10} m R^2 \right]$$

- 6.40. Вычислить тензор инерции тонкого однородного диска радиуса  $R$  и массы  $m$  в системе координат, оси которой образуют одинаковые углы с плоскостью диска, а начало совпадает с его центром.

- 6.41. Найти главные моменты инерции однородного шара радиуса  $R$ , в котором вырезана полость радиуса  $r$ , как показано на рисунке к задаче 6.6в.

$$\left[ J_1 = J_2 = \frac{m}{(R^3 - r^3)} \left( \frac{2}{5} (R^5 - r^5) - \frac{(R-r)R^3 r^3}{(R^3 - r^3)} \right), J_3 = \frac{m}{(R^3 - r^3)} \frac{2}{5} (R^5 - r^5) \right]$$

- 6.42. Тензор инерции твердого тела в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  имеет

$$\text{вид } \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & D \\ 0 & D & C \end{pmatrix}, \text{ где } D \neq 0. \text{ Найти главные оси инерции тела и мо-}$$

менты инерции относительно этих осей.

- 6.43. Определить момент импульса кругового конуса с углом раствора  $\alpha$ , вращающегося вокруг своей образующей с угловой скоростью  $\omega$ .

$$\left[ M = \omega \sqrt{J_1'^2 \sin^2 \alpha + J_3'^2 \cos^2 \alpha}, \quad (\mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\omega}) = |\alpha - \beta|, \right]$$

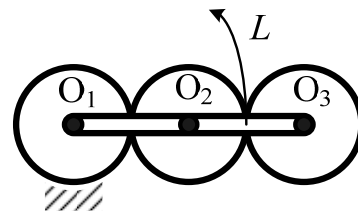
где угол  $\beta$  определяется равенством  $\text{tg} \beta = \frac{J_1'}{J_3'} \text{tg} \alpha$

- 6.44. Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно  $l$ ; верхний груз имеет массу  $m_1$ , нижний – массу  $m_2$ . Определить, на каком расстоянии  $x$  от нижнего груза нужно поместить ось подвеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьшим; массой стержня пренебречь и грузы считать материальными точками.

$$\left[ x = l \sqrt{m_1} \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} \right]$$

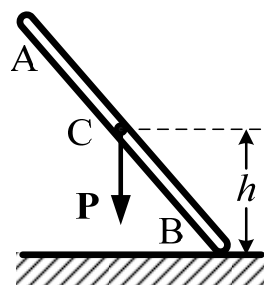
- 6.45. В механизме, показанном на рисунке, колесо с осью  $O_1$  неподвижно; к рукоятке  $O_1O_3$  приложен вращающий момент силы  $L$ , механизм

расположен в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой рукоятки и считая колеса однородными дисками с одинаковыми массами  $m$  и радиусами  $R$ , определить угловое ускорение рукоятки.



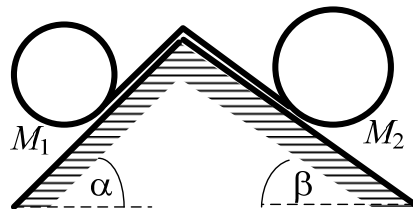
$$\left[ \varepsilon = \frac{L}{22mR^2} \right]$$

- 6.46. Однородный стержень АВ длиной  $2a$  движется под действием своего веса, скользя концом В по гладкому горизонтальному полу. Предполагая, что движение происходит в одной вертикальной плоскости, определить скорость центра тяжести стержня С в зависимости от его высоты над полом  $h$ . Считать, что в начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое.



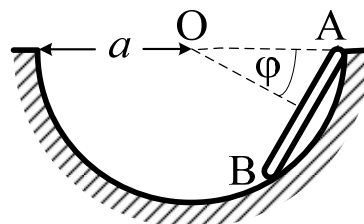
$$\left[ v = (a-h) \sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}} \right]$$

- 6.47. Два цилиндрических вала массы  $M_1$  и  $M_2$  скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы  $\alpha$  и  $\beta$  с горизонтом. Валы соединены нерастяжимой и невесомой нитью, концы которой намотаны на валы и к ним прикреплены. Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами.



$$\left[ w = g \frac{M_1 \sin \alpha - M_2 \sin \beta}{M_1 + M_2}, \quad T = g \frac{M_1 M_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{3(M_1 + M_2)} \right]$$

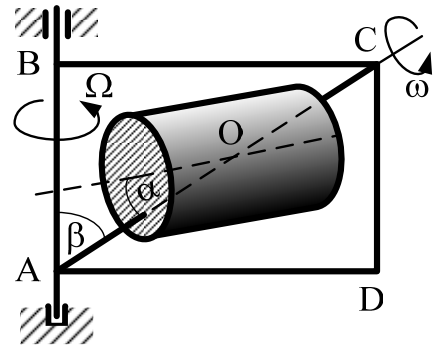
- 6.48. Тяжелый однородный стержень АВ движется в шаровой чаше радиуса  $a$ , оставаясь в вертикальной плоскости, проходящей через центр чаши О. Начальное положение стержня указано на рисунке. Найти угловую ско-



рость стержня в тот момент, когда он достигает горизонтального положения. Длина стержня равна радиусу чаши.

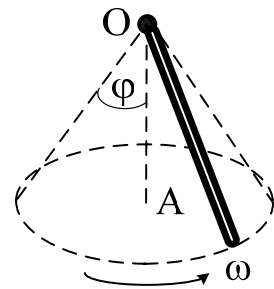
$$\left[ \dot{\phi} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} g}{5 a}} \right]$$

- 6.49. Однородный круговой цилиндр массы  $m$ , радиуса  $R$  и высоты  $h$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $AC$ , проходящей через центр масс цилиндра  $O$  и образующей угол  $\alpha$  с его осью симметрии. Ось  $AC$  совпадает с диагональю прямоугольной рамы  $ABCD$ , которая вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Найти кинетическую энергию цилиндра, если  $AB = a$ ,  $\angle BAC = \beta$ ,  $AO = OC$ .



$$\left[ T = \frac{m}{2} \left\{ \Omega^2 \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \beta + \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) [\omega \sin \alpha + \Omega \sin(\alpha + \beta)]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2}{2} [\omega \cos \alpha + \Omega \cos(\alpha + \beta)]^2 \right\} \right]$$

- 6.50. Тонкий прямолинейный однородный стержень массы  $m$  и длины  $l$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около неподвижной точки  $O$  (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью  $OA$  и вершиной в точке  $O$ . Вычислить угол  $\varphi$  отклонения стержня от вертикального направления, а также величину  $N$  давления стержня на шарнир  $O$ .



$$\left[ \varphi = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}, \quad N = \frac{1}{2} ml\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2\omega^4}} \right]$$

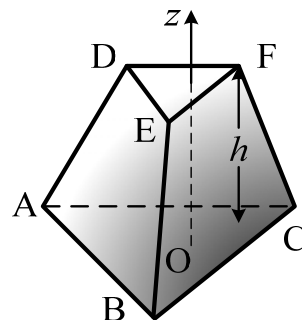
- 6.51. Ось полого однородного цилиндра радиуса  $R$  и массы  $m$  служит легкий стержень, предназначенный для крепления маятника. В начальный момент цилиндр покоился на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, а математический маятник длины  $l$  и массы  $m$ , подвешенный к середине оси цилиндра, был отклонен от вертика-

ли перпендикулярно оси цилиндра на угол  $\alpha$ . Найти амплитуду колебаний центра масс цилиндра.

$$\left[ x_{\max} = \frac{2ml \sin \alpha}{2M + m} \right]$$

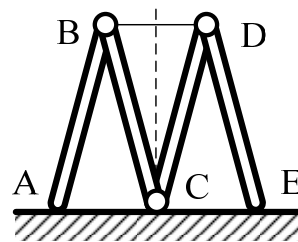
Задачи повышенной трудности

6.52. Для однородного тетраэдра ABCDEF, усеченного параллельно основанию, даны площадь основания  $ABC = a$ , площадь сечения  $DEF = b$ , расстояние между ними  $h$ . Найти расстояние  $Z$  до центра инерции данного усеченного тетраэдра от основания ABC.

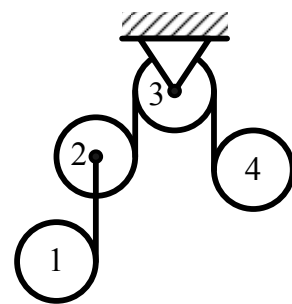


$$\left[ Z = \frac{h}{4} \frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$$

6.53. "Гармошка" ABCDE из четырех шарнирно соединенных однородных стержней длины  $l$  и массы  $m$  каждый стоит на гладком горизонтальном полу и удерживается в равновесии стяжкой BD. После разрыва стяжки гармошка начинает падать. Предполагая, что движение происходит в вертикальной плоскости, найти зависимость скорости точки B от ее высоты  $h$  над полом, если в начальный момент эта высота была равна  $h_0$ .



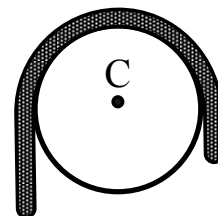
6.54. Используя уравнения Лагранжа, найти движение четырех одинаковых однородных цилиндров радиуса  $r$ , соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями, как показано на рисунке. Нити по цилиндрам не скользят, центры цилиндров 1, 2, 4 перемещаются по вертикали.



$$\left[ \begin{array}{l} \text{Центры масс цилиндров 1, 2 и 4 движутся с постоянными} \\ \text{ускорениями } w_1 = \frac{72}{79}g, w_2 = \frac{58}{79}g, w_4 = \frac{52}{79}g. \\ \text{Угловое ускорение цилиндра 3 составляет } \varepsilon_3 = \frac{2}{79} \frac{g}{r} \end{array} \right]$$



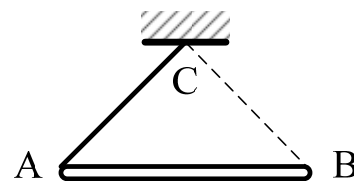
- 6.55. На цилиндр, ось  $C$  которого горизонтальна, положена цепочка, расположенная в плоскости, перпендикулярной к оси. Радиус цилиндра  $R$ , длина цепочки  $l$ . Масса цилиндра вдвое больше массы цепочки. В начальный момент с одной стороны цилиндра свешивался вдвое больший отрезок цепочки, чем с другой, и цепочка находилась в покое. Предполагая, что цепочка движется без скольжения, и пренебрегая силами трения, определить скорость цепочки в тот момент, когда конец короткого отрезка подойдет к цилиндру.



$$\left[ v = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2g}{l}} (l - \pi R) \right]$$

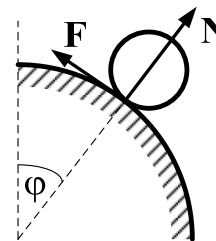
- 6.56. Однородный круглый диск, описанный в задаче 6.15, равномерно вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Определить угловой момент диска относительно точки  $O$ .

- 6.57. Однородный стержень  $AB$  массы  $m$  подвешен в точке  $C$  на двух нитях равной с ним длины. Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



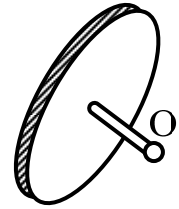
*Указание.* Составить уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом обрыва нити, пренебрегая изменением направления стержня и изменением расстояния центра масс стержня от другой нити.

- 6.58. Однородный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$  свободно скатывается с неподвижного цилиндра радиуса  $R$ . Движение начинается из состояния покоя из наивысшего положения. Коэффициент трения скольжения равен  $f$ . Найти все значения угла  $\varphi$ , при которых качение происходит без скольжения. Для этих значений угла  $\varphi$  найти скорости точек оси цилиндра  $v(\varphi)$ , нормальную реакцию  $N(\varphi)$  и силу трения  $F(\varphi)$ . Доказать, что катящийся без скольжения цилиндр не может оторваться от неподвижного цилиндра при конечном значении  $f$  раньше, чем начнется качение со скольжением.



*Указание.* Найти величину угла, которая бы соответствовала отрыву при качении без скольжения, и показать, что при всех конечных значениях  $f$  она превышает величину угла, при которой начинается скольжение.

- 6.59. Центр однородного диска радиуса  $R$  и массы  $m$  жестко соединен с тонким невесомым стержнем длины  $l = R/2$ . Другой конец стержня, образующего прямой угол с плоскостью диска, закреплен сферическим шарниром в точке  $O$ . Определить движение диска в однородном поле тяжести при следующих начальных условиях:  $\psi_0 = 0$ ,  $\dot{\psi}_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi/4$ ;  $\dot{\psi}_0 = (1/3)\sqrt{g/R}$ ,  $\dot{\phi}_0 = 3\sqrt{g/R}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ , где  $\phi$ ,  $\theta$  и  $\psi$  – эйлеровы углы.

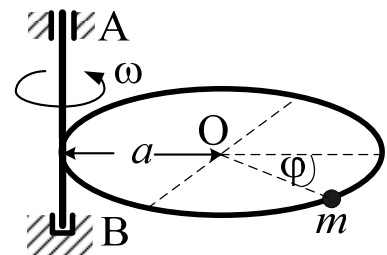


- 6.60. Показать, что уравнения движения свободной материальной точки массы  $m$  относительно неинерциальной системы отсчета можно записать в форме уравнений Лагранжа с обобщенно-потенциальными силами с обобщенным потенциалом

$$U = -m([\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]\mathbf{v}) + m(\mathbf{W}\mathbf{r}) - \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки,  $\mathbf{v}$  – ее скорость,  $\mathbf{W}$  – ускорение поступательного движения неинерциальной системы отсчета, а  $\mathbf{\Omega}$  – угловая скорость ее вращения.

- 6.61. Материальная точка массы  $m$  движется по гладкой окружности радиуса  $a$ , которая вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси  $AB$ , проходящей через одну из точек окружности, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Используя неинерциальную систему отсчета, связанную с вращающейся окружностью, составить уравнения движения точки.



$$\left[ \ddot{\phi} + \omega^2 \sin \phi = 0 \right]$$

- 6.62. Тело брошено из некоторой точки поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0$ . Принимая во внимание вращение Земли и считая угловую скорость ее вращения постоянной и малой, найти отклонение траектории движения тела от плоскости.

## Раздел 7. Условия равновесия системы

### Минимальные теоретические сведения

Если материальные точки и твердые тела, составляющие систему, не двигаются, а находятся в покое, то возникает вопрос о получении условий равновесия системы. Изучением условий равновесия занимается раздел механики, именуемый статикой.

Условия равновесия материальной точки очень просты: материальная точка находится в равновесии, если результирующая всех сил, действующих на нее, равна нулю, т.е., если

$$\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k = 0, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{F}_k$  – силы, действующие на материальную точку. Так как твердое тело может двигаться не только поступательно, но и вращаться, условия равновесия твердого тела можно сформулировать в виде равенства нулю полной силы и полного момента сил

$$\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k = 0, \quad \mathbf{L} = \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k] = 0. \quad (7.2)$$

Суммирование в (7.1) и (7.2) производится по всем приложенным к телу внешним силам,  $\mathbf{r}_k$  – радиус-вектор "точки приложения" силы  $\mathbf{F}_k$ . При этом, точка, относительно которой определяется момент силы  $\mathbf{L}$ , может быть выбрана произвольным образом, так как при  $\mathbf{F} = 0$  значение момента силы не зависит от этого выбора. Если в рассматриваемой системе твердые тела соприкасаются друг с другом, то при равновесии условия (7.2) должны выполняться для каждого из тел в отдельности. Разумеется, в число сил должны быть тогда включены также и силы, действующие на данное тело со стороны остальных соприкасающихся с ним тел, т.е. силы реакции. Ясно, что для каждых двух тел их взаимные силы реакции равны по величине и противоположны по направлению. В общем случае, как величины, так и направления реакций, определяются в результате совместного решения уравнений равновесия (7.1), (7.2) для всей системы материальных точек и

твердых тел. В некоторых случаях, однако, направления сил реакции задаются уже условиями задачи.<sup>1</sup>

В том случае, если силы реакции не представляют интереса и требуется найти лишь координаты точек и тел при равновесии системы, то для решения статических задач целесообразно использовать принцип виртуальных перемещений. Принцип виртуальных перемещений, или статический принцип Даламбера, гласит, что необходимым и достаточным условием равновесия голономной материальной системы, подчиненной только идеальным связям, является равенство нулю работы всех активных сил на любом виртуальном перемещении точек материальной системы

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i) = 0. \quad (7.3)$$

Суммирование производится по всем  $N$  точкам системы. В случае несвободных систем вместо радиус-векторов точек можно использовать обобщенные координаты, тогда выражение для работы (7.3) приобретает вид

$$\delta A = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j, \quad (7.4)$$

где  $n$  – число степеней свободы системы,  $Q_j$  – обобщенные силы, а  $\delta q_j$  – вариации обобщенных координат. Так как вариации обобщенных координат могут принимать любые значения независимо друг от друга, то соотношение (7.4) может быть выполнено, если все обобщенные силы одновременно будут равны нулю, т.е.

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (7.5)$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием равновесия голономной материальной системы, подчиненной только идеальным связям, является равенство нулю всех ее обобщенных сил.

Не каждое состояние равновесия, определяемое условиями (7.1), (7.2) или принципом виртуальных перемещений (7.3), (7.4), можно, однако,

---

<sup>1</sup> Так, например, силы натяжения нитей направлены вдоль нитей; силы реакций гладких поверхностей перпендикулярны поверхностям; силы трения шероховатых поверхностей направлены по касательным к поверхностям и т.д.

практически реализовать. Реализуются состояния, так называемого, "устойчивого равновесия". Положения равновесия материальной системы, для которых небольшие отклонения от этих положений равновесия или небольшие начальные скорости точек системы не приводят к выходу материальной системы из достаточно малой окрестности положения равновесия, называются устойчивыми. Для голономной системы в случае консервативности действующих в системе сил (т.е. силы являются потенциальными и стационарными), можно сформулировать достаточный признак устойчивости равновесия<sup>1</sup>: положение равновесия такой системы устойчиво, если потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет минимум. В силу того, что для потенциальных сил

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (7.6)$$

поэтому в положении равновесия потенциальная энергия  $U$  системы имеет экстремальное значение, достаточный признак устойчивости равновесия можно сформулировать так: равновесие устойчиво, если в положении равновесия  $\mathbf{q}_{(0)}(q_{1(0)}, q_{2(0)}, \dots, q_{n(0)})$  все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } c_{kl} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{(0)}} \quad (7.7)$$

вторых частных производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам положительны. Иными словами, для положения устойчивого равновесия должны одновременно выполняться следующие неравенства

$$|c_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (7.8)$$

Все сказанное выше о равновесии и его устойчивости для голономных и консервативных систем справедливо, если они рассматриваются относительно инерциальных систем отсчета. Однако, в силу того, что часть сил

<sup>1</sup> Вытекающий из теоремы Лагранжа–Дирихле.

инерции переносного движения, появляющихся при рассмотрении движения в неинерциальных системах отсчета, носит консервативный характер,<sup>1</sup> эти же критерии будут иметь место и для неинерциальных систем отсчета, если в них вместо потенциальной энергии активных сил  $U$  анализировать, так называемую, "эффективную потенциальную энергию"

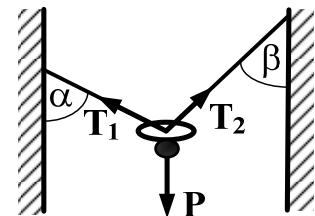
$$U_{\text{eff}} = U + \sum_i m_i \left\{ (\mathbf{W}\mathbf{r}_i) - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_i]^2 \right\}, \quad (7.9)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -ой точки,  $\mathbf{W}$  – постоянное ускорение поступательного движения неинерциальной системы отсчета, а  $\boldsymbol{\Omega}$  – постоянная угловая скорость ее вращения. В таких случаях речь будет идти уже о положениях относительного равновесия и их устойчивости или об устойчивости движения.

Если в положении равновесия потенциальная энергия системы не имеет минимума, то исследование устойчивости состояния равновесия становится очень сложной задачей, которая решается применением теорем А.М. Ляпунова.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Между двумя вертикальными стенами на двух веревках висит фонарь веса  $P$ . Левая из веревок образует со стеной угол  $\alpha$ , а правая – угол  $\beta$ . Найти натяжение обеих веревок.



*Решение.* Для решения любой задачи по статике прежде всего необходимо четко представить себе все силы, действующие на тело, находящееся в равновесии. Затем следует ввести систему координат, на оси которой эти силы удобно проектировать. Далее написать уравнения равновесия в проекциях на выбранные оси. И, наконец, из полученной системы уравнений найти необходимые величины. В данной задаче речь идет о равновесии материальной точки, на которую действуют три силы: сила веса фонаря  $P$ , направленная вертикально вниз, сила натяжения левой веревки  $T_1$ , направленная вверх под углом  $\alpha$  к вертикали, и сила натяжения правой веревки

<sup>1</sup> Таковыми являются сила инерции поступательного движения при постоянном ускорении и центробежная сила инерции при постоянной угловой скорости вращения.

$T_2$ , направленная вверх под углом  $\beta$  к вертикали. Ось  $x$  системы координат направляем горизонтально направо, а ось  $y$  – вертикально вниз. Проектируя уравнение (7.1) на оси, получаем

$$\text{для оси } x: -T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 0,$$

$$\text{для оси } y: -T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta + P = 0.$$

Решая систему этих уравнений

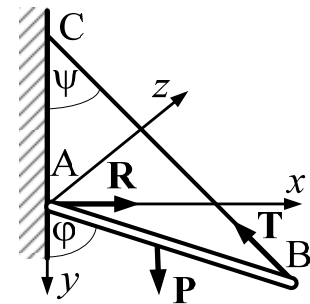
$$T_2 = T_1 \sin\alpha / \sin\beta, \quad -T_1 \cos\alpha - (T_1 \sin\alpha \cos\beta / \sin\beta) + P = 0,$$

получаем интересующие нас величины

$$T_1 = P \sin\beta / \sin(\alpha + \beta), \quad T_2 = P \sin\alpha / \sin(\alpha + \beta)$$

натяжений обеих веревок.

**Задача 2.** Однородный тяжелый брусок  $AB$  длиной  $2l$  опирается концом  $A$  на вертикальную гладкую стену, а за конец  $B$  удерживается в равновесии нитью  $BC = a$ , которая укреплена в точке  $C$ . Найти зависимость между углами  $\psi$  и  $\varphi$ , которые нить и брусок соответственно образуют со стеной при равновесии бруска.



*Решение.* В данной задаче мы имеем дело с равновесием твердого тела, поэтому к уравнению равновесия для сил необходимо будет добавить еще и уравнение равновесия для моментов сил (7.2). В остальном методика решения задачи аналогична предыдущей. На тяжелый брусок действуют силы: вес  $P$ , направленный вертикально вниз и, в силу однородности бруска, приложенный к его центру, натяжение нити  $T$ , приложенное к точке  $B$  и направленное по нити, т.е. вверх под углом  $\psi$  к вертикали, и реакция  $R$  в точке  $A$ , направленная направо горизонтально в силу гладкости стены. Выбираем оси координат, направляя оси  $x$  и  $y$  так же, как и в предыдущей задаче: ось  $x$  – горизонтально направо, ось  $y$  – вертикально вниз, а ось  $z$ , как показано на рисунке (правая система координат). Начало системы координат совместим с точкой  $A$ . Проектируя первое из уравнений (7.2) на оси, получаем

$$R - T \sin\psi = 0, \quad (7.10)$$

$$P - T \cos\psi = 0. \quad (7.11)$$

Для записи уравнения на моменты сил выпишем проекции всех приложенных к бруску сил и проекции радиус-векторов их точек приложения. Имеем

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R}(R, 0, 0), & \mathbf{r}_R(0, 0, 0), \\ \mathbf{P}(0, P, 0), & \mathbf{r}_P(l \sin \varphi, l \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{T}(-T \sin \psi, -T \cos \psi, 0), & \mathbf{r}_T(2l \sin \varphi, 2l \cos \varphi, 0). \end{array}$$

Вычисляя необходимые проекции векторных произведений векторов сил и их точек приложения на выбранные нами оси координат, получаем

$$\begin{array}{lll} [\mathbf{r}_R \mathbf{R}]_x = 0, & [\mathbf{r}_R \mathbf{R}]_y = 0, & [\mathbf{r}_R \mathbf{R}]_z = 0, \\ [\mathbf{r}_P \mathbf{P}]_x = 0, & [\mathbf{r}_P \mathbf{P}]_y = 0, & [\mathbf{r}_P \mathbf{P}]_z = Pl \sin \varphi, \\ [\mathbf{r}_T \mathbf{T}]_x = 0, & [\mathbf{r}_T \mathbf{T}]_y = 0, & [\mathbf{r}_T \mathbf{T}]_z = 2Tl(\sin \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \psi). \end{array}$$

Покомпонентное суммирование приводит к единственному уравнению для проекции момента на ось  $z$

$$L_z = Pl \sin \varphi + 2Tl(\sin \psi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \psi) = 0. \quad (7.12a)$$

Решаем полученную систему трех уравнений (7.10) – (7.12a). Из уравнения (7.11) имеем  $T = P/\cos \psi$ . Подставляя это выражение в уравнение (7.12a), получаем

$$2Pl \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cos \varphi - 2Pl \sin \varphi + Pl \sin \varphi = 0,$$

откуда после сокращения на  $Pl$  и деления на  $\cos \varphi$  находим искомое соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \psi.$$

К полученному результату можно прийти несколько быстрее, если прежде, чем записывать уравнение для момента сил, обратить внимание на то, что и силы и радиус-векторы точек приложения сил все лежат в плоскости  $xAy$ , поэтому моменты всех сил и результирующий момент  $\mathbf{L}$  будут перпендикулярны этой плоскости, т.е. будут направлены по оси  $z$ . Для того чтобы решить вопрос о том, будет он направлен в положительном или в отрицательном направлении, мы обратим внимание на то, что система координат правая. Тогда по правилу правого винта момент, который будет стремиться повернуть тело в направлении от оси  $x$  к оси  $y$ , будем считать положительным и будем считать его отрицательным в противном случае. Следующий вопрос, который мы должны решить, это вопрос о выборе



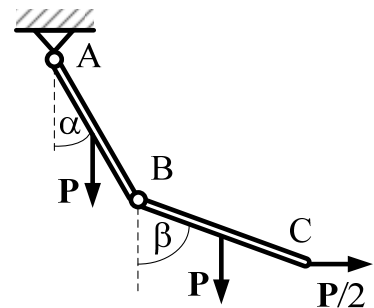
точки, по отношению к которой будем вычислять моменты сил. Еще раз напомним, что выбор этой точки безразличен в силу того, что результирующая сила равна нулю. Чтобы использовать этот произвол, обычно момент вычисляют относительно такой точки, через которую проходит наибольшее количество сил, так как моменты этих сил будут тогда равны нулю. В нашей задаче момент удобно вычислять относительно точек А, В и С, но в этом отношении все они эквивалентны, поскольку через каждую из них проходит по одной силе. При получении уравнения (7.12а) мы вычисляли моменты всех сил относительно точки А. Вычислим сейчас их относительно точки В. Имея в виду соглашение о знаках и записывая моменты как произведение силы на плечо, получаем:

$$2Rl \cos \varphi - Pl \sin \varphi = 0. \quad (7.12б)$$

Опять решаем полученную систему трех уравнений (7.10), (7.11) и (7.12б). Из уравнения (7.10) имеем  $R = T \sin \psi$ . С использованием (7.11) далее получаем  $R = P \operatorname{tg} \psi$  и, наконец, из (7.12б) находим то же соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \psi.$$

**Задача 3.** Два одинаковых стержня АВ и ВС веса  $P$  и длины  $2l$  скреплены шарниром В. Конец А закреплен в неподвижном шарнире, к концу С приложена горизонтальная сила  $P/2$ . Положение равновесия системы определяется двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые стержни АВ и ВС образуют с вертикалью. Найти углы  $\alpha$  и  $\beta$ .



*Решение.* В этой задаче нас не интересуют реакции в шарнирах, а требуется найти только углы  $\alpha$  и  $\beta$  при равновесии системы, поэтому для ее решения можем воспользоваться принципом виртуальных перемещений. Система обладает двумя степенями свободы, и оба угла  $\alpha$  и  $\beta$  удобно выбрать в качестве обобщенных координат. В силу того, что все силы, действующие на систему, являются консервативными, обобщенные силы, соответствующие углам  $\alpha$  и  $\beta$ , можно найти, просто продифференцировав потенциальную энергию по обобщенным координатам. Для потенциальной энергии системы имеем (если за нуль потенциала взять значение потенци-

альной энергии на уровне неподвижного шарнира А):

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta) &= -Pl \cos \alpha - Pl(2 \cos \alpha + \cos \beta) - Pl(\sin \alpha + \sin \beta) = \\ &= -Pl(3 \cos \alpha + \cos \beta + \sin \alpha + \sin \beta). \end{aligned}$$

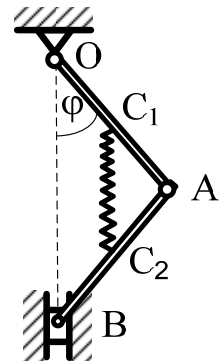
Здесь в первоначальном выражении 1-ый член представляет потенциальную энергию стержня АВ, второй – стержня ВС и последний соответствует потенциальной энергии, обусловленной горизонтальной силой  $P/2$ . Дифференцируя  $U(\alpha, \beta)$  частным образом по  $\alpha$  и по  $\beta$  и приравнявая полученные обобщенные силы в соответствии с (8.5) нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha - \cos \alpha &= 0, \\ \sin \beta - \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Из нее находим равновесные значения углов  $\alpha$  и  $\beta$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = 1.$$

**Задача 4.** Стержень ОА длины  $a$  и массы  $m$  может свободно вращаться вокруг точки О. К концу А стержня шарнирно прикреплен такой же стержень АВ. Его нижний конец В шарнирно скреплен с поршнем массы  $M$ , который может двигаться по вертикали, проходящей через точку О. Середины стержней ОА и АВ соединены невесомой пружиной жесткости  $c$ . Длина пружины в ненапряженном состоянии  $l_0 < a$ . Пренебрегая трением и полагая, что весь механизм расположен в вертикальной плоскости, найти положения равновесия системы и условия их устойчивости.



*Решение.* Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол  $\varphi$ , который стержень ОА образует с вертикалью. Потенциальная энергия системы записывается как

$$U = -mgx_{C_1} - mgx_{C_2} - Mgx_B + \frac{1}{2}c\lambda^2,$$

где  $x_{C_1} = \frac{a}{2} \cos \varphi$ ,  $x_{C_2} = \frac{3a}{2} \cos \varphi$ ,  $x_B = 2a \cos \varphi$ , а  $\lambda = C_1C_2 - l_0$  – удлинение пружины ( $C_1$  и  $C_2$  – точки крепления пружины). Так как  $C_1C_2 = a \cos \varphi$ , то

$\lambda = a \cos \varphi - l_0$ , поэтому

$$U = -2(m + M)ga \cos \varphi + \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - l_0)^2.$$

Дифференцируя по  $\varphi$ , получаем

$$\frac{dU}{d\varphi} = U' = 2(M + m)ga \sin \varphi - ac(a \cos \varphi - l_0) \sin \varphi,$$

и, следовательно, обобщенная сила имеет вид

$$Q = -U' = -2(M + m)ga \sin \varphi + ac(a \cos \varphi - l_0) \sin \varphi.$$

При равновесии системы  $Q = 0$ , поэтому получаем

$$[-2(m + M)ga + ac(a \cos \varphi - l_0)] \sin \varphi = 0.$$

Это равенство может быть удовлетворено, если

$$\text{либо } \sin \varphi = 0, \quad \text{либо } -2(m + M)ga + ac(a \cos \varphi - l_0) = 0. \quad (7.13)$$

Из первой возможности следует, что  $\varphi_1 = 0$  является одним из равновесных состояний системы. Из второй возможности (7.13) находим второе равновесное значение угла

$$\cos \varphi_2 = \frac{2(m + M)g + cl_0}{ca}.$$

В силу того, что  $\cos \varphi \leq 1$ , положение равновесия, определяемое этим выражением, может существовать, только если

$$2(m + M)g \leq c(a - l_0).$$

Таким образом, если  $2(m + M)g > c(a - l_0)$ , то у системы существует одно состояние равновесия  $\varphi_1 = 0$ . При  $2(m + M)g \leq c(a - l_0)$  существуют два состояния равновесия

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{2(m + M)g + cl_0}{ca}.$$

Для исследования устойчивости найденных положений равновесия вычислим вторую производную от потенциальной энергии по обобщенной координате. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\varphi^2} = U'' &= 2(m + M)ga \cos \varphi + ca^2 \sin^2 \varphi - ac(a \cos \varphi - l_0) \cos \varphi = \\ &= a[2(m + M)g + cl_0] \cos \varphi + ca^2(1 - 2\cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Для первого положения равновесия  $\varphi_1 = 0$

$$U'' = a[2(m+M)g - c(a-l_0)],$$

и при  $2(m+M)g > c(a-l_0)$  вторая производная положительна, т.е. потенциальная энергия имеет минимум и, следовательно, состояние равновесия  $\varphi = 0$  при этом условии устойчиво.

При  $2(m+M)g < c(a-l_0)$   $U'' < 0$ , и, следовательно, состояние равновесия  $\varphi = 0$  при этом условии неустойчиво. При

$$\varphi = \varphi_2 = \arccos \frac{2(m+M)g + cl_0}{ca}$$

$$U'' = [2(m+M)g + c(a+l_0)][c(a-l_0) - 2(m+M)g] / c.$$

Если  $2(m+M)g < c(a-l_0)$ , то  $U'' > 0$  и состояние равновесия  $\varphi = \varphi_2$  устойчиво.

Таким образом, при выполнении условия

$$2(m+M)g > c(a-l_0)$$

существует одно устойчивое состояние равновесия при  $\varphi = 0$ . При выполнении же условия

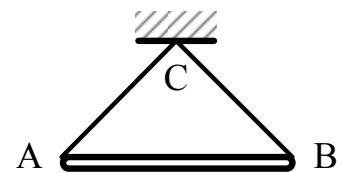
$$2(m+M)g < c(a-l_0)$$

существуют два состояния равновесия: неустойчивое при  $\varphi = 0$  и устойчивое при  $\varphi = \varphi_2$ .

## Задачи

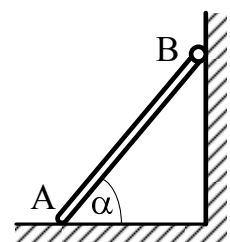
### Обязательные задачи

- 7.1. Однородный стержень АВ веса  $P$  и длины  $2l$  подвешен в точке С на двух тросах АС и СВ одинаковой длины, равной  $a$ . Определить натяжение тросов.



$$\left[ T = P / 2\sqrt{(a^2 - l^2) / a^2} \right]$$

- 7.2. Однородная балка АВ, расположенная в вертикальной плоскости, прикрепена верхним концом при помощи шарнира В к вертикальной стене, а нижним

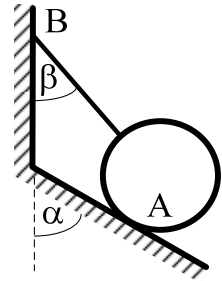


концом А опирается на гладкий пол. Даны вес балки  $P$ , ее длина  $2a$  и угол наклона  $\alpha$ . Найти реакцию пола и полную реакцию шарнира.

$$[R_A = P/2, \quad R_B = P/2 \text{ и направлена вверх}]$$

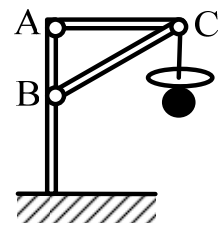
- 7.3. Шар весом  $P$  привязан нитью к неподвижной точке В, а в точке А опирается на гладкую наклонную плоскость. Определить величину реакции в точке А и натяжение нити, если углы  $\alpha$  и  $\beta$  известны.

$$\left[ T = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad R = \frac{P \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)} \right]$$



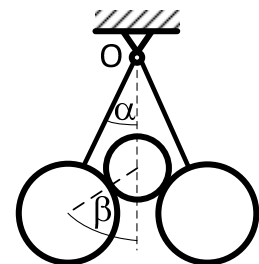
- 7.4. Уличный фонарь весом  $P$  подвешен к столбу с горизонтальной поперечиной  $AC = a$  и подкосом  $BC = b$ . Найти реакции  $R_A$  и  $R_B$  в стержнях  $AC$  и  $BC$ , считая крепления в точках А, В и С шарнирными.

$$\left[ R_A = aP / \sqrt{b^2 - a^2}, \quad R_B = bP / \sqrt{b^2 - a^2} \right]$$



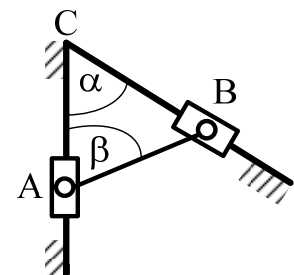
- 7.5. Два одинаковых гладких цилиндра веса  $P$  каждый подвешены в неподвижной точке О на двух одинаковых нитях и поддерживают третий цилиндр веса  $Q$ . Вся система находится в равновесии. Найти зависимость между углами  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$[\operatorname{tg} \beta = [(2P/Q) + 1] \operatorname{tg} \alpha]$$

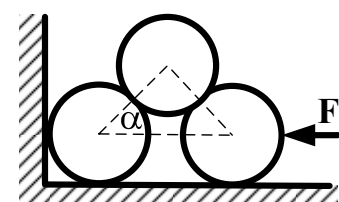


- 7.6. Втулка А веса  $P$  соединена с втулкой В веса  $Q$  гибкой нерастяжимой нитью  $AB = l$ . Определить угол  $\beta$  при равновесии системы, если известен постоянный угол  $\alpha$  между стержнями  $AC$  и  $BC$ , расположенными в вертикальной плоскости.

$$[\operatorname{tg} \beta = [(P + Q) / P] \operatorname{ctg} \alpha]$$



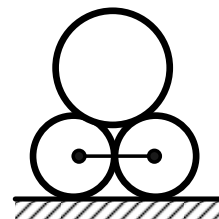
- 7.7. У стены здания положены три одинаковых трубы, как указано на рисунке. Какую горизонтальную силу  $F$  надо приложить к правой нижней трубе, чтобы удержать трубы в равно-



весии. Сила  $F$  должна пересекать ось трубы. Радиус сечения труб равен  $r$ , вес каждой трубы  $P$ , линии, соединяющие центры сечений образуют равнобедренный треугольник с углом  $\alpha$  при основании.

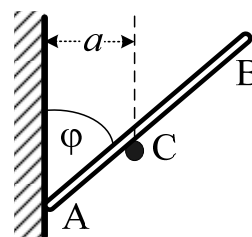
$$[ F = (P/2)\operatorname{ctg}\alpha ]$$

- 7.8. На двух одинаковых круглых однородных цилиндрах радиусом  $r$  и весом  $P$  каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и связанных за центры нерастяжимой нитью, покоится третий однородный цилиндр радиуса  $R$  и веса  $Q$ . Определить натяжение нити  $T$ , давление цилиндров на плоскость  $P_n$  и взаимное давление цилиндров  $P_b$ .



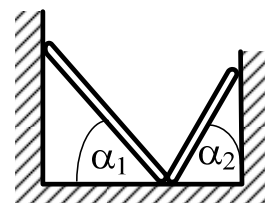
$$\left[ T = \frac{Qr}{2\sqrt{R^2 + 2rR}}, \quad P_n = P + \frac{Q}{2}, \quad P_b = \frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2 + 2rR}} \right]$$

- 7.9. Однородный стержень АВ, длиной  $2l$  упирается нижним концом А в вертикальную гладкую стену, составляя с ней угол  $\varphi$ . Стержень опирается также на гвоздь С, параллельный стене. Гвоздь отстоит от стены на расстоянии  $a$ . Определить угол  $\varphi$  в положении равновесия стержня.



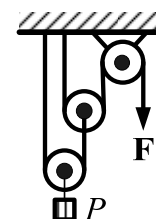
$$[ \sin \varphi = \sqrt[3]{a/l} ]$$

- 7.10. Два расположенных в вертикальной плоскости однородных стержня опираются нижними концами на гладкую горизонтальную плоскость и друг на друга, а верхними концами – на две вертикальные гладкие стены. Длины стержней  $2a_1$  и  $2a_2$ , веса их  $P_1$  и  $P_2$ . Найти зависимость между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  наклона стержней к горизонту при равновесии системы.



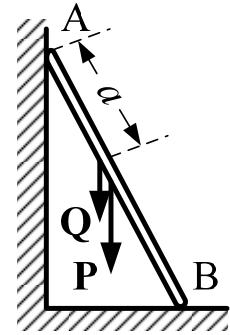
$$[ \operatorname{tg}\alpha_1/\operatorname{tg}\alpha_2 = P_1/P_2 ]$$

- 7.11. Определить силу, необходимую для поднятия груза веса  $P$  посредством системы трех одинаковых невесомых блоков, изображенной на рисунке.



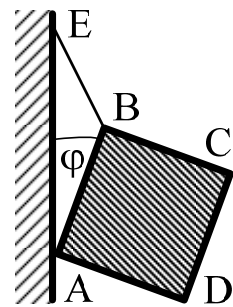
$$[ F = P/4 ]$$

- 7.12. Лестница АВ нижним своим концом опирается на горизонтальный гладкий пол, а на верхнем своем конце снабжена двумя крючками, накинутыми на металлический стержень, протянутый вдоль стены, параллельно полу. Найти реакцию стержня и реакцию пола, если вес лестницы равен  $P$ , длина ее равна  $l$ , и на лестнице стоит человек на расстоянии  $a$  от верхнего конца. Вес человека равен  $Q$ .



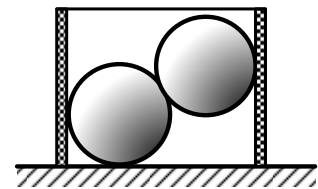
$$[R_A = P/2 + aQ/l, \quad R_B = P/2 + (l - a)Q/l]$$

- 7.13. Квадратная доска ABCD весом  $P$  подвешена на веревке BE. Вершиной A она опирается на неподвижную гладкую вертикальную стену EA. Определить реакцию стены в точке A, натяжение  $T$  веревки и угол  $\varphi$ , если  $AB = BE = a$ .



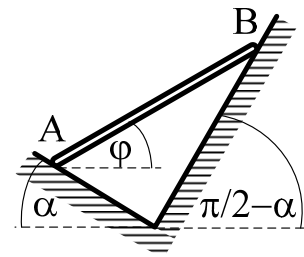
$$[R_A = P/3, \quad T = P\sqrt{10}/3, \quad \text{tg } \varphi = 1/3]$$

- 7.14. Два одинаковых однородных шара радиуса  $r$ , каждый из которых имеет вес  $P$ , положены внутрь полого, открытого с обоих концов прямого цилиндра радиуса  $R$ , стоящего на горизонтальном шероховатом столе. Определить наименьший вес  $Q$  цилиндра, при котором шары не в состоянии опрокинуть его. Толщиной стенок цилиндра пренебречь.



$$[Q = 2P(1 - r/R)]$$

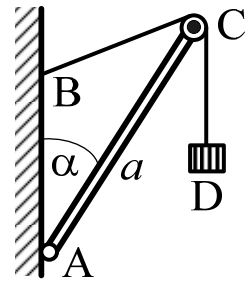
- 7.15. Однородный стержень АВ длиной  $2l$  и весом  $P$  находится в равновесии в вертикальной плоскости, опираясь концами на две наклонные гладкие плоскости, образующие между собой прямой угол. Найти угол  $\varphi$  стержня с горизонтом, если известно, что нижняя из плоскостей образует с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha$ .



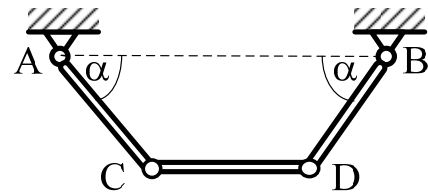
$$[\varphi = \pi/2 - 2\alpha]$$

Задачи средней трудности

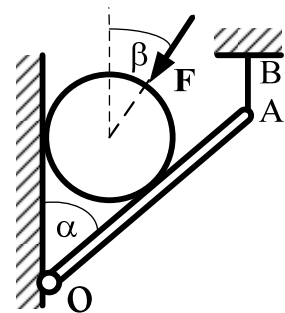
- 7.16. Кран состоит из однородного стержня  $AC$  весом  $P$ , вращающегося на шарнире  $A$  и привязанного к закрепленной точке  $B$  цепью  $BC$ . К концу  $C$  стержня подвешен груз  $D$  весом  $Q$ . Определить натяжение цепи  $T$  и реакцию шарнира  $A$ , если известны угол  $\alpha$  и длина стержня  $AC = a$ .



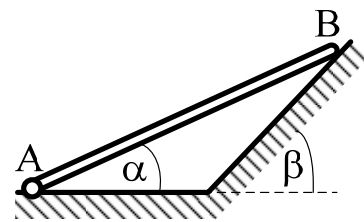
- 7.17. Два одинаковых стержня  $AC$  и  $BD$  весом  $P$  каждый, вращающихся на шарнирах  $A$  и  $B$ , соединены шарнирами  $C$  и  $D$  с третьим горизонтальным стержнем  $CD$ , весом  $Q$ . Вся система находится в равновесии в вертикальной плоскости. Определить реакции шарниров  $A$  и  $C$ , если угол  $\alpha$  известен.



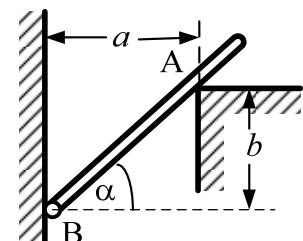
- 7.18. На шар веса  $Q$ , опирающийся на вертикальную стенку и наклонную балку  $OA$ , действует сила  $F$ . Однородная балка  $OA$  веса  $P$  закреплена в точке  $O$  шарнирно и удерживается в наклонном положении при помощи вертикального троса  $AB$ . Определить, пренебрегая трением, давление шара на балку и стену, реакцию шарнира и натяжение троса, если известны углы  $\alpha$  и  $\beta$ , длина балки  $OA = l$  и радиус шара  $r = l/4$ .



- 7.19. Однородный стержень  $AB$  весом  $P$  нижним своим концом  $A$  прикреплен к полу при помощи шарнира, а верхним концом опирается на гладкую наклонную стену, образующую угол  $\beta$  с горизонтом. Найти реакцию шарнира и реакцию стены, если известно, что стержень образует с полом угол  $\alpha$ .



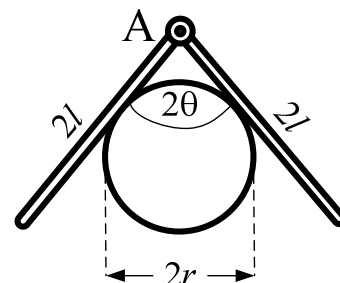
- 7.20. Однородный стержень длиной  $2l$  и весом  $P$  прикреплен шарниром  $B$  к вертикальной стене, а в точке  $A$  опирается на ребро другой стены. Найти





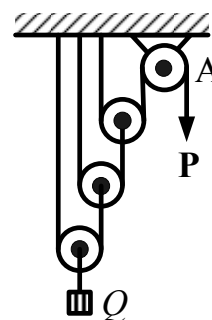
реакции в точках А и В, а также угол  $\alpha$  при равновесии стержня, если известно, что точка А отстоит от первой стены на расстоянии  $a$  и находится на высоте, равной  $b$  над шарниром В.

- 7.21. На гладкий цилиндр радиуса  $r$  опираются два одинаковых весоных стержня, соединенных шарниром А. Длина каждого стержня равна  $2l$ . Определить угол  $\theta$  раствора стержней, соответствующий положению равновесия.



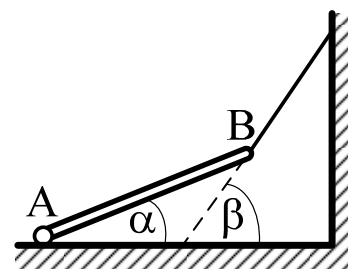
$$[ \operatorname{tg}^3 \theta - r \operatorname{tg}^2 \theta - r = 0 ]$$

- 7.22. Полиспаст состоит из неподвижного блока А и трех подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение поднимаемого груза  $Q$  к усилию  $P$ , прилагаемому к концу каната, сходящего с неподвижного блока А. Решить эту задачу в случае  $n$  подвижных блоков.



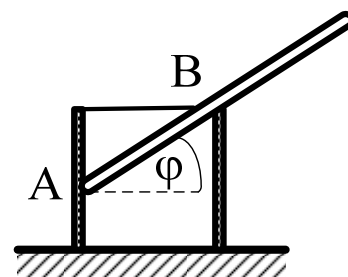
$$[ Q/P = 2^n ]$$

- 7.23. Однородный стержень АВ нижним своим концом А прикреплен к полу при помощи шарнира и удерживается под углом  $\alpha$  к горизонту при помощи привязанной к верхнему его концу В веревки, которая прикреплена



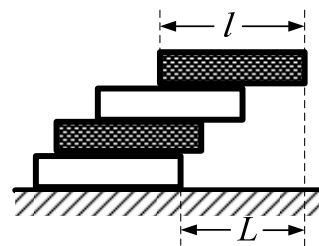
другим своим концом к вертикальной стене и образует угол  $\beta$  с горизонтом. Найти натяжение  $T$  веревки и реакцию шарнира, если вес стержня равен  $P$ .

- 7.24. На горизонтальный стол ставится абсолютно гладкий внутри цилиндр диаметра  $a$  и веса  $P$ . В него опускают однородную палочку длиной  $2l$  и весом  $Q$ , которая занимает некоторое положение равновесия под углом  $\varphi$  к горизонту. Найти наименьший вес палочки  $Q$ ,



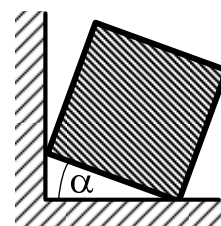
которая в состоянии опрокинуть цилиндр, угол  $\varphi$  палочки с горизонтом и реакции в точках А и В в начальный момент опрокидывания. Толщиной стенок цилиндра пренебречь.

- 7.25. Одинаковые гладкие пластины длины  $l$  укладываются одна на другую, как показано на рисунке. Найти такую длину "пролета"  $L$  (как функцию от числа пластин  $n$ ), чтобы система оставалась в положении равновесия.



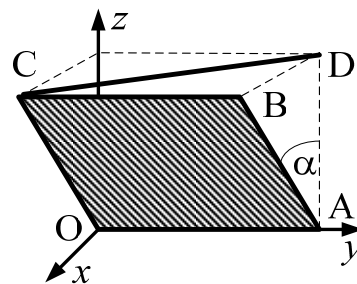
$$\left[ L = \frac{1}{2} l \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} \cong \frac{1}{2} l \ln n \right]$$

- 7.26. Куб массы  $m$  прислонен к стене в наклонном положении. Коэффициент трения между вертикальной стеной и ребром куба равен  $f_1$ , а между кубом и горизонтальным полом —  $f_2$ . Найти условие равновесия куба.



$$\left[ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - f_1 f_2}{1 + 2 f_2 + f_1 f_2} \right]$$

- 7.27. Однородная прямоугольная крышка веса  $P$  наклонена под углом  $\alpha$  к вертикальной плоскости  $yOz$  и удерживается в таком положении при помощи сферического шарнира  $O$ , цилиндрического шарнира  $A$  и нити  $CD$ , расположенной в горизонтальной плоскости. Определить реакции шарниров и натяжение нити, если  $OA = CB = a$ ,  $OC = AB = a/2$ .

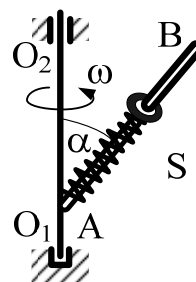


- 7.28. Материальная точка находится в поле тяжести на внутренней стороне гладкой поверхности, определяемой уравнением:

а)  $z = 4x^2 + 2xy + y^2$ , б)  $z = x^2 - xy + y^2$ , в)  $z = x^2 + xy - y^2$ ,  
 г)  $z = 4x^2 - 2xy + 2y^2$ , д)  $z = 2xy$ .

Найти положения равновесия материальной точки для каждого случая и исследовать их устойчивость (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх).

- 7.29. Стержень  $AB$ , образующий угол  $\alpha$  с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $O_1O_2$ . По стержню может двигаться без трения тяжелое колечко  $S$  массы  $m$ , соединенное с

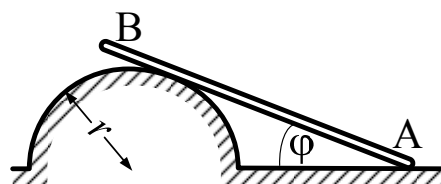


неподвижным концом стержня А пружиной жесткости  $c$ , причем длина пружины в недеформированном состоянии равна  $l$ . Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

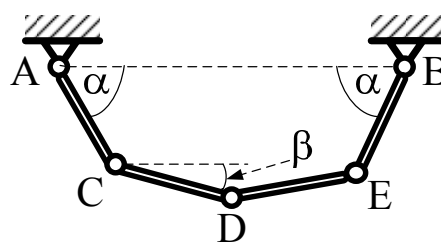
- 7.30. Тяжелый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по параболе  $x^2 = 2pz$  и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси Oz. Определить положение относительного равновесия шарика и исследовать его устойчивость.

Задачи повышенной трудности

- 7.31. Однородный стержень АВ длиной  $2a$  и весом  $P$  опирается на горизонтальную плоскость и неподвижный цилиндр радиуса  $r$ . Коэффициент трения стержня о цилиндр и о плоскость равен  $f$ . Каково наибольшее значение угла  $\varphi$ , при котором стержень находится в равновесии?

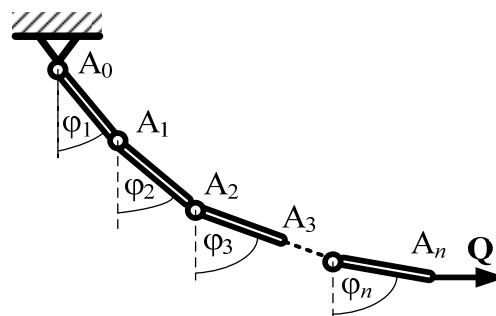


- 7.32. Четыре стержня равной длины и равного веса соединены друг с другом шарнирами С, D и E. Два крайних стержня вращаются в вертикальной плоскости на шарнирах около неподвижных точек А и В, лежащих на одной горизонтали. Определить зависимость между углами  $\alpha$  и  $\beta$  в положении равновесия системы.



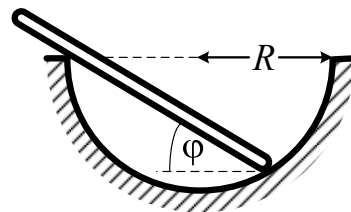
$$[ \operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta ]$$

- 7.33. Цепь, состоящая из  $n$  одинаковых однородных стержней массы  $m$  каждый, подвешена в вертикальной плоскости. Стержни соединены друг с другом с помощью шарниров. Один конец этой системы неподвижно закреплен, а на второй действует постоянная горизонтальная сила  $Q$ . Найти углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , которые стержни образуют с вертикалью в положении равновесия системы.

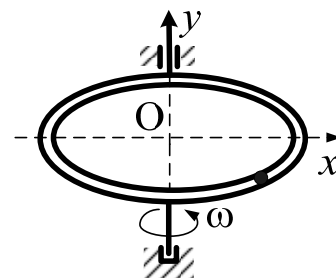


- 7.34. Найти условие устойчивого равновесия однородного тяжелого стержня длиной  $2l$  в полусферической гладкой чаше радиуса  $R$  и исследовать его устойчивость. Какая часть стержня при равновесии будет находиться вне чаши? (Полагается, что  $2R^2/3 < l^2 < 4R^2$ )

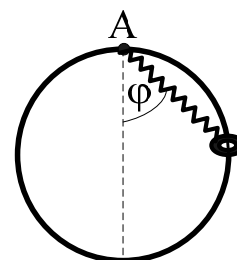
$$\left[ \cos \varphi = \left( l + \sqrt{l^2 + 32R^2} \right) / 8R \right]$$



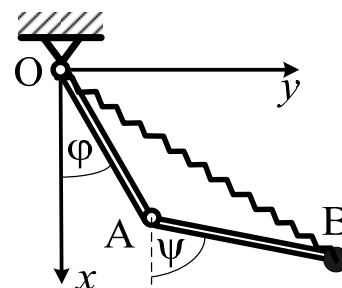
- 7.35. Материальная точка находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $Oy$ . Определить положения относительного равновесия точки и исследовать их устойчивость.



- 7.36. По гладкой проволочной окружности радиуса  $R$ , неподвижно закрепленной в вертикальной плоскости, может скользить тяжелое колечко массы  $m$ , соединенное с наивысшей точкой  $A$  окружности пружиной жесткости  $c$ . Длина пружины в недеформированном состоянии равна  $l_0$ . Найти положения равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



- 7.37. Невесомый стержень  $OA$  длины  $a$  может свободно вращаться вокруг точки  $O$ . К концу  $A$  стержня шарнирно прикреплен невесомый стержень  $AB$  длины  $a$ , на другом конце которого закреплен груз  $B$  массы  $m$ . Точка  $O$  и точка  $B$  соединены между собой пружиной жесткости  $c$ . Масса пружины пренебрежимо мала, длина пружины в ненапряженном состоянии равна  $a$ . Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость, считая, что система расположена в плоскости  $xOy$ .



## Раздел 8. Малые колебания механических систем

### Основные положения и формулы

Малыми называются колебания, совершающиеся вблизи точки равновесия данной механической системы  $\mathbf{q}_{(0)}(q_{(0)1}, q_{(0)2}, \dots, q_{(0)n})$ . При этом малыми величинами являются не только отклонения обобщенных координат от их значения в точке равновесия  $x_j = \Delta q_j = q_j - q_{(0)j}$ , но и соответствующие обобщенные скорости  $\dot{x}_j = \dot{q}_j$ . Существование указанных малых параметров позволяет разложить по ним исходную функцию Лагранжа  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  и получить приближенную функцию Лагранжа  $\tilde{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ . Часто в этом разложении можно ограничиться первыми неисчезающими квадратичными слагаемыми по величинам  $\dot{x}_j$  и  $x_j$ . В этом случае функция Лагранжа называется линеаризованной и порождает соответствующие уравнения Лагранжа: систему линейных дифференциальных уравнений. Эти приближенные уравнения, как правило, значительно более просты по сравнению с уравнениями, возникающими из исходной функции Лагранжа, они решаются стандартным образом и приводят к *гармоническим* колебаниям. При этом частоты получающихся *линейных* колебаний *не зависят* от их амплитуды.

Иногда для получения удовлетворительного решения квадратичного приближения бывает недостаточно, в этом случае рассматриваются следующие *ангармонические* члены разложения (кубический *ангармонизм*, *ангармонизм* четвертой степени). Здесь такие случаи разбираться не будут.

В присутствии сил трения (диссипативных сил) возможны *затухающие* колебания. При наличии внешней силы, меняющейся во времени, (*возбуждающей силы*) возможны вынужденные колебания, резонанс, автоколебания и другие интересные явления. В отсутствии сил трения и вынуждающих сил<sup>1</sup> колебания механических систем возможны в областях

---

<sup>1</sup> Консервативные системы: полная энергия сохраняется, и лагранжиан  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  от времени  $t$  явным образом не зависит.

финитного движения, и любое колебательное движение имеет периодический характер. Важными характеристиками такого движения являются собственные частоты  $\omega_\alpha$ , число которых для невырожденного случая совпадает с числом степеней свободы механической системы ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Вторым набором характерных величин являются нормальные координаты  $\theta_\alpha \sim \cos(\omega_\alpha t + \phi_{0\alpha})$  – линейные комбинации исходных смещений  $x_j$ , участвующие в колебании *только с одной* частотой  $\omega_\alpha$ .

Сначала рассмотрим более простой вариант движения системы с одной степенью свободы  $n = 1$ . В этом случае колебательное движение описывается только одной собственной частотой  $\omega$ .

### Линейные колебания в отсутствие диссипативных и вынуждающих сил

#### Алгоритм решения задач при $n = 1$

1. **Составление исходной функции Лагранжа** механической системы:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = T^{(2)}(q, \dot{q}) + T^{(1)}(q, \dot{q}) + T^{(0)}(q) - U(q),$$

где верхний индекс  $d$  у слагаемых кинетической энергии показывает степень обобщенной скорости  $\dot{q}$ , входящей в  $T^{(d)}(q, \dot{q})$  (см. (5.19)–(5.21)):

$$T^{(2)}(q, \dot{q}) = a(q)\dot{q}^2/2, \quad T^{(1)}(q, \dot{q}) = b(q)\dot{q}, \quad T^{(0)}(q) = T^{(0)}(q).$$

2. **Нахождение точек равновесия.** Для инерциальной системы координат мы должны найти точки минимума потенциальной энергии  $U(q)$ . Часто требуется провести решение в неинерциальной системе координат (например, вращающейся), в которой точки равновесия определяются минимумом эффективной потенциальной энергии  $U_{\text{eff}}(q) = U(q) - T^{(0)}(q)$  (см. также (7.9)). В общем случае точки равновесия  $q_{(0)}$  являются решениями следующего алгебраического уравнения<sup>1</sup>

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}(q)}{\partial q} = \frac{dU_{\text{eff}}}{dq} = 0. \quad (8.1)$$

Таких точек равновесия может быть несколько:  $q_{(01)}, q_{(02)}, \dots$ . Конечно, если  $T^{(0)}(q) \equiv 0$ , то вычисления проводятся в *исходной* инерциальной системе координат. Тогда здесь и ниже нужно положить  $U_{\text{eff}}(q) = U(q)$ .

<sup>1</sup> Для функции одной переменной ( $n = 1$ ) частная производная совпадает с обычной производной.

3. **Определение точек устойчивого равновесия** в неинерциальной системе координат. Вторая производная от  $U_{\text{eff}}(q)$  должна быть положительна, т.е.

$$c_{(0m)} = \left. \frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dq^2} \right|_{q=q_{(0m)}} = U''_{\text{eff}}(q_{(0m)}) > 0 \quad (8.2)$$

Колебания возможны только вблизи точек устойчивого равновесия, поэтому дальнейшее решение проводится по отдельности для каждой из них  $q_{(0m)}$ . Для простоты индекс точки равновесия  $m$  ниже мы опускаем:  $q_{(0m)} \rightarrow q_0$ , а  $c_{(0m)} \rightarrow c_0$ .

4. **Линеаризация функции Лагранжа.** Исходную функцию Лагранжа  $L(q, \dot{q})$  необходимо разложить в ряд Тейлора по малым скоростям  $\dot{x} = \dot{q}$  и смещениям от точки устойчивого равновесия  $x = q - q_0$ . При этом ограничиваются квадратичными слагаемыми по этим величинам. Кинетическая энергия с этой точностью<sup>1</sup> превращается в  $\tilde{T}_{\text{eff}}$

$$T_{\text{eff}}(q, \dot{q}) = T^{(2)}(q, \dot{q}) + T^{(1)}(q, \dot{q}) \approx \tilde{T}_{\text{eff}}(x, \dot{x}) = a_0 \dot{x}^2 / 2, \quad (8.2a)$$

где  $a_0 \approx a(q_0)$  – константа. Потенциальная энергия  $U_{\text{eff}}(q)$  превращается в  $\tilde{U}_{\text{eff}}$

$$U_{\text{eff}}(q) = U(q) - T^{(0)}(q) \approx \tilde{U}_{\text{eff}}(x) = \tilde{U}_{\text{eff}}(0) + c_0 x^2 / 2, \quad (8.2b)$$

постоянное значение  $\tilde{U}_{\text{eff}}$  в точке равновесия  $\tilde{U}_{\text{eff}}(0)$  не дает вклада в уравнение Лагранжа (5.23), следовательно,

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = a_0 \dot{x}^2 / 2 - c_0 x^2 / 2 \quad (a_0, c_0 - \text{константы}).$$

Таким образом, приближенная функция Лагранжа  $\tilde{L}$  является функцией Лагранжа линейного гармонического осциллятора.

5. **Решение** получающегося линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{или} \quad a_0 \ddot{x} + c_0 x = 0, \quad (8.2в)$$

ищем в стандартном виде<sup>2</sup>

$$x = A \cos(\omega t + \phi). \quad (8.2г)$$

<sup>1</sup> Легко убедиться, что линейные по обобщенной скорости члены разложения  $T^{(1)}$  вклада в линеаризованное уравнение Лагранжа с указанной точностью не дадут.

<sup>2</sup> Взята реальная часть стандартной подстановки  $x = \mathcal{A} e^{i\omega t}$ , где комплексная амплитуда  $\mathcal{A} = A e^{i\phi}$ .

После подстановки (8.2г) во второе уравнение (8.2в) получаем

$$-a_0\omega^2 + c_0 = 0,$$

откуда определяется собственная частота колебаний

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{c_0/a_0}. \quad (8.2\delta)$$

Константы интегрирования: амплитуда колебаний  $A$  и начальный сдвиг фазы  $\phi$ , могут быть найдены из известных начальных условий.

6. **Проверка и анализ решения.** Рассматривается физический смысл полученного решения, проверяются самые простые предельные случаи.

### Алгоритм решения задач при $n \geq 2$

Обобщим приведенный выше алгоритм ( $n = 1$ ) на многомерный случай, когда число степеней свободы механической системы  $n \geq 2$ .

1. **Составление исходной функции Лагранжа** механической системы (см. также (5.19)–(5.21))

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = T^{(2)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T^{(0)}(\mathbf{q}) - U(\mathbf{q}) = \\ &= T^{(2)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - (U(\mathbf{q}) - T_0(\mathbf{q})) = \frac{1}{2} \sum_{l,k}^n a_{kl}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_l - U_{\text{eff}}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Для простоты здесь положили  $T^{(1)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ .  $U_{\text{eff}}(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - T^{(0)}(\mathbf{q})$  – потенциальная энергия механической системы для неинерциальной системы координат. Для инерциальной системы координат  $U_{\text{eff}}(\mathbf{q}) \equiv U(\mathbf{q})$ .

2. **Нахождение положения равновесия** в неинерциальной системе координат. Точки равновесия  $\mathbf{q}_{(0)}(q_{(0)1}, q_{(0)2}, \dots, q_{(0)n})$  являются решениями следующей системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial q_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial q_n} = 0. \quad (8.4)$$

В общем случае положений равновесия ( $\mathbf{q}_{(01)}, \mathbf{q}_{(02)}, \dots$ ) может быть несколько. Дальнейшее решение проводится по отдельности для каждого из найденных положений равновесия  $\mathbf{q}_{(0m)}$ . Для простоты индекс  $m$  ниже опускаем.

3. **Определение положения устойчивого равновесия.** Матрица вторых производных  $\mathbf{U}_{\text{eff}}''$  (7.7), вычисленных в точке равновесия,



$$\mathbf{U}_{\text{eff}}''(\mathbf{q}_{(0)}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } c_{kl} = \left. \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{(0)}} \quad (8.5)$$

должна обладать определенными свойствами. Положение равновесия является устойчивым, если любой минор в (8.5) положителен. Достаточно проверить  $n$  таких определителей, например,

$$|c_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad |\mathbf{U}_{\text{eff}}''(\mathbf{q}_{(0)})| > 0 \quad (8.6)$$

4. **Линеаризация функции Лагранжа.** Исходную функцию Лагранжа  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  разлагаем в ряд Тейлора по малым скоростям  $\dot{x}_j = \dot{q}_j$  и смещениям от положения устойчивого равновесия  $x_j = q_j - q_{(0)j}$  с точностью до квадратичных слагаемых. Пренебрегая константой  $U_{\text{eff}}(\mathbf{q}_{(0)})$ , имеем

$$\tilde{T}^{(2)}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{l,k} a_{kl}^{(0)} \dot{x}_k \dot{x}_l, \quad \tilde{U}_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{l,k} c_{kl} x_k x_l. \quad (8.7)$$

Здесь константа  $a_{kl}^{(0)} = a_{kl}(\mathbf{q}_{(0)})$ , матричный элемент  $a_{kl}$  введен в (8.3) (см. также (5.21)), а постоянный элемент  $c_{kl}$  матрицы  $\mathbf{U}_{\text{eff}}''$  определен в (8.5).

5. **Решение** получающейся системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \{ a_{kj}^{(0)} \ddot{x}_k + c_{kj} x_k \} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8.8)$$

ищется в стандартном виде

$$x_j = \mathcal{A}_j \exp(i\omega t), \quad (8.9a)$$

где  $\mathcal{A}_j = A_j e^{i\phi_j}$  – комплексная амплитуда. Напомним, что физический смысл имеет реальная часть (8.9a), т.е.

$$\text{Re} \{ \mathcal{A}_j \exp(i\omega t) \} = A_j \cos(\omega t + \phi_j), \quad (8.9b)$$

где  $\phi_j$  – сдвиг фазы. Мы будем искать  $n$  вещественных амплитуд  $A_j$ .

6. **Собственные частоты.** Подставим (8.9) в (8.8). Решение получающейся системы  $n$  однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \left\{ -a_{kj}^{(0)} \omega^2 + c_{kj} \right\} A_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8.10)$$

ищется из условия нетривиальности (хотя бы две амплитуды  $A_k$  отличны от нуля), т.е. обращения в нуль определителя системы (8.10)

$$\det \left\{ -a_{kj}^{(0)} \omega^2 + c_{kj} \right\} = \begin{vmatrix} -a_{11}^{(0)} \omega^2 + c_{11} & \dots & -a_{1n}^{(0)} \omega^2 + c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}^{(0)} \omega^2 + c_{n1} & \dots & -a_{nn}^{(0)} \omega^2 + c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.11)$$

Из (8.11) получим уравнение порядка  $n$  на  $\omega^2$ , имеющее  $n$  корней – квадратов собственных частот рассматриваемой механической системы. Дальнейшее рассмотрение задачи зависит от степени вырождения каждого из корней.

## 7. Нормальные координаты.

7а. Невырожденный случай: все  $n$  полученных решений уравнения (8.11)

$\omega_\alpha^2$  – различные ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Каждый найденный корень  $\omega_\alpha^2$  необходимо подставить в систему (8.10)

$$\sum_{k=1}^n \left\{ -a_{kj}^{(0)} \omega_\alpha^2 + c_{kj} \right\} A_k^{(\alpha)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8.12)$$

Используя любые  $(n - 1)$  уравнений (8.12) и еще одно условие нормировки колебаний (после чего матрица  $\mathfrak{A}$  становится унитарной):

$$\sum_{k=1}^n \left| A_k^{(\alpha)} \right|^2 = \sum_{k=1}^n \left( A_k^{(\alpha)} \right)^2 = 1, \quad (8.13)$$

пренебрегая несущественными фазами, можно найти все значения вещественных амплитуд колебаний  $A_j^{(\alpha)}$ , относящиеся к данной частоте  $\omega_\alpha$  с точностью "до числа".<sup>1</sup> Перебрав все значения  $\alpha$  (и  $\omega_\alpha!$ ), найдем ортогональную матрицу амплитуд  $\mathbf{A} = \{ A_j^{(\alpha)} \}$  (нижний индекс – номер строки, верхний – номер столбца). Учитывая (8.9), запишем полное решение для смещения  $x_j$

<sup>1</sup> Если отказаться от необязательного условия (8.13), то значения амплитуд находятся с точностью до произвольной константы.

$$x_j = \sum_{\alpha=1}^n A_j^{(\alpha)} c_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8.14)$$

Здесь  $c_\alpha$  и  $\phi_\alpha$  – произвольные константы, которые можно определить из начальных условий. Смысл записи (8.14) можно выразить так: каждая обобщенная координата  $x_j$  участвует одновременно в колебаниях с различными частотами  $\omega_\alpha$ , или, вообще говоря, во всех *модах* колебаний.

Возникает вопрос: нельзя ли найти такую линейную комбинацию исходных смещений  $x_j$ , которая участвовала бы в колебании только с одной частотой  $\omega_\alpha$ ?

Для нахождения таких комбинаций (или **нормальных координат**  $\theta_\alpha$ ) обратим соотношение (8.14). Введем **нормальные координаты**

$$\theta_\alpha = c_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (8.15)$$

и перепишем (8.14) в векторной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} &\xrightarrow[\text{слева на } \mathbf{A}^{-1}]{\text{умножим}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \\ &\xrightarrow{\text{обратим}} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Здесь учтено, что для ортогональной матрицы *обратная* матрица совпадает с *транспонированной* или  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ . Нормальную координату  $\theta_\alpha$  можно записать и в матричной форме

$$\theta_\alpha = \sum_{j=1}^n A_\alpha^{(j)} x_j \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (8.17)$$

Таким образом, матрица амплитуд, найденная с помощью (8.12)–(8.13), полностью определяет нормальные координаты.

- 7б. Случай вырождения: среди  $n$  полученных решений уравнения (8.11) есть  $r$  совпадающих  $\omega_{\alpha_1}^2 = \omega_{\alpha_2}^2 = \dots = \omega_{\alpha_r}^2$ . Такие частоты  $\omega_{\alpha_m}$  называются *вырожденными*, а число  $r$  называется *кратностью вырождения*. Для таких частот описанная выше процедура нахождения нормальных частот не может быть проведена однозначно. Возникает проблема выбора решений. Это связано с тем, что при подстановке частот в систему уравнений (8.10) число независимых уравнений определяется разностью  $n - r$ , и, следовательно, при  $r \geq 2$  уравнений (8.12) – (8.13) стано-

вится недостаточно для однозначного определения амплитуд  $A_j^{(\alpha_m)}$  с точностью до числа. Остается  $(r - 1)$  свободных параметров. Для нахождения полного набора решений  $A_j^{(\alpha_m)}$  на них дополнительно к условиям нормировки (8.13) обычно налагаются еще и условия ортогональности

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(\alpha_m)} A_k^{(\alpha_l)} = 0, \quad m \neq l. \quad (8.18)$$

**8. Проверка и анализ решения.** Рассматривается физический смысл полученного решения, проверяются самые простые предельные случаи.

### Вынужденные и затухающие линейные колебания

Кратко рассмотрим колебания системы вблизи положения устойчивого равновесия в присутствии сил трения и вынуждающих сил.

Для простоты рассмотрим системы с одной степенью свободы ( $n = 1$ ). В рамках принятого линейного приближения действующая на систему диссипативная (*непотенциальная*) сила должна линейно зависеть от обобщенной скорости  $\dot{q}$ . С учетом уравнений (5.18) в линейном приближении по смещениям от точки равновесия  $x$  и скоростям смещений  $\dot{x}$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.19)$$

где  $\omega_0^2$  – собственная частота колебаний (см. 8.2a-e),  $\mu$  – положительная величина, называемая *коэффициентом затухания*. С помощью стандартной подстановки  $x = \exp(\lambda t)$  находим решение, которое в случае слабого затухания ( $\mu < \omega_0$ ) выглядит следующим образом

$$x = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi), \quad (8.20)$$

где частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}. \quad (8.21)$$

Вещественные константы  $a$  и  $\phi$  определяются из начальных условий. Таким образом, *появление трения* в системе не только *уменьшает* со временем *амплитуду колебаний*, но и *сдвигает частоту* затухающих колебаний  $\omega$  в область более *низких частот*.

Рассмотрим вынужденные малые колебания в системе, на которую действует некоторое достаточно слабое переменное внешнее поле. В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией  $c_0x^2/2$  система обладает еще потенциальной энергией  $U^{\text{ex}}(x,t)$ . Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины  $x$ , получим

$$U^{\text{ex}}(x,t) \approx U^{\text{ex}}(0,t) - xF(t), \text{ где } F(t) = -\left. \frac{dU^{\text{ex}}}{dx} \right|_{x=0} \text{ — вынуждающая "сила".}$$

Первый член  $U^{\text{ex}}(0,t)$  в этом разложении является функцией только времени и может быть опущен в функции Лагранжа (как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции времени). Приближенная функция Лагранжа  $\tilde{L}$  системы приобретает вид

$$\tilde{L}(x,\dot{x},t) = a_0\dot{x}^2/2 - c_0x^2/2 + xF(t).$$

Уравнение движения для вынужденных колебаний в линейном приближении тогда записывается в таком виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = \Phi(t), \quad (8.22)$$

где введены собственная частота колебаний  $\omega_0$  и  $\Phi(t) = F(t)/a_0$  (см. 8.2a-d).

Для решения неоднородного уравнения (8.22) осталось определить только частное решение  $x_{\text{ч.р.}}$ , поскольку решение соответствующего однородного уравнения (8.2в) уже известно (см. 8.2г)

$$x(t) = A\cos(\omega_0t + \phi) + x_{\text{ч.р.}} \quad (8.23)$$

Для простых зависимостей  $\Phi(t)$  в большинстве задач, приведенных ниже, поиск  $x_{\text{ч.р.}}$  не представляет особой сложности. Тем не менее, уравнение (8.22) может быть проинтегрировано и в самом общем случае при помощи подстановки  $\xi = \dot{x} + i\omega_0x$ . Тогда

$$\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} \int_0^t \Phi(\tau) e^{-i\omega_0 \tau} d\tau, \quad (8.24)$$

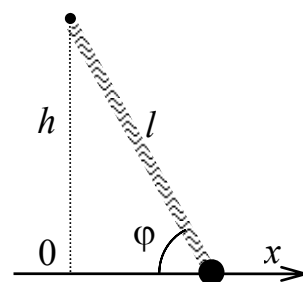
где  $\xi_0 = \dot{x}_0 + i\omega_0 x_0$  определяется начальными условиями, а решение —

$$x(t) = \text{Im}(\xi/\omega_0).$$

Разберем приведенные схемы решения задач на типичных примерах.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Частица массы  $m$  способна двигаться по гладкой горизонтальной прямой. К частице прикреплена пружина жесткости  $k$ , другой конец которой закреплен на расстоянии  $h$  от прямой. Длина пружины в ненапряженном состоянии  $l_0$ . Найти частоту малых колебаний частицы.



*Решение.* Предварительно замечаем, что слово "гладкая" означает "отсутствие сил трения" (см. раздел 6). Обычно сила тяжести направлена *вертикально* вниз, поэтому слово "горизонтальная" означает, что силу тяжести в задаче можно не учитывать. Число степеней свободы  $n = 1$ , воспользуемся приведенным выше алгоритмом.

- Составление исходной функции Лагранжа.** Ось  $x$  направим вдоль прямой (см. рис.). В качестве обобщенной координаты  $q$  можно выбрать либо  $x$ , либо длину пружины  $l$ , либо угол между пружиной и прямой  $\varphi$ , и т.д. Решения во всех случаях должны привести к одинаковым частотам. Выберем  $q = \varphi$  и найдем лагранжиан частицы  $L(\varphi, \dot{\varphi}) = T(\varphi, \dot{\varphi}) - U(\varphi)$ . Для удобства запишем кинетическую энергию  $T$  сначала в декартовых координатах<sup>1</sup>  $T(\dot{x}) = m\dot{x}^2/2$ , а затем преобразуем в  $T(\varphi, \dot{\varphi})$ , используя связь  $x = h \operatorname{ctg} \varphi$ , и, следовательно,  $\dot{x} = d(h \operatorname{ctg} \varphi)/dt = -h\dot{\varphi}/\sin^2 \varphi$

$$T(\varphi, \dot{\varphi}) = a(\varphi)\dot{\varphi}^2/2, \quad a(\varphi) = mh^2/\sin^4 \varphi.$$

Потенциальная энергия пружины (упругой силы) зависит от удлинения пружины  $(l - l_0)$  и равна  $U(l) = k(l - l_0)^2/2$ . Используя  $l = h/\sin \varphi$ , получим

$$U(\varphi) = k(h - l_0 \sin \varphi)^2/(2 \sin^2 \varphi).$$

- Нахождение точек равновесия.** Система отсчета одна, она инерциальна: слагаемых  $T^{(0)}(\varphi)$  в кинетической энергии нет, поэтому эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{eff}}(\varphi) \equiv U(\varphi)$ . Точки равновесия  $\varphi_{(0)}$  являются решениями следующего алгебраического уравнения

$$\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = \frac{kh \cos \varphi (h - l_0 \sin \varphi)}{\sin(\varphi)(\cos^2 \varphi - 1)} = 0.$$

<sup>1</sup> Запись  $T$  в декартовых координатах практически никогда не вызывает затруднений.

Получаются три точки равновесия

$$\varphi_{(01)} = \pi/2, \quad \varphi_{(02)} = \arcsin(h/l_0), \quad \varphi_{(03)} = \pi - \varphi_{(02)}.$$

Заметим здесь, что две последние точки равновесия (справа и слева от нуля, см. рис.) имеют смысл лишь при  $h \leq l_0$  (аргумент функции  $\arcsin$  не может быть больше единицы).

3. **Определение точек устойчивого равновесия.** Проверяем положительность второй производной от  $U(\varphi)$

$$U''(\varphi) = \frac{d^2U}{d\varphi^2} = kh \frac{h(2\cos^2\varphi + 1) - l_0(\cos^2\varphi \sin\varphi + \sin\varphi)}{(\cos^2\varphi - 1)^2}$$

во всех точках равновесия:

$$c_{01} = U''(\varphi_{(01)}) = kh(h - l_0) > 0 \text{ при } h > l_0;$$

$$c_{02} = U''(\varphi_{(02)}) = k(l_0/h)^2(l_0^2 - h^2) > 0 \text{ при } l_0 > h;$$

$$c_{03} = U''(\varphi_{(03)}) = c_{02} = U''(\varphi_{(02)}) > 0 \text{ при } l_0 > h.$$

Следовательно, точка равновесия  $\varphi_{(01)} = \pi/2$  является устойчивой при  $h > l_0$  и неустойчивой при  $l_0 > h$ , симметричные точки  $\varphi_{(02),(03)}$  устойчивы только при  $l_0 > h$ .

4. **Линеаризация функции Лагранжа.** Разлагая кинетическую и потенциальную энергии в ряд по смещениям от точки равновесия  $\chi = \varphi - \varphi_{(0)}$  и скоростям  $\dot{\chi} = \dot{\varphi}$  и ограничиваясь квадратичными слагаемыми по этим малым величинам, получаем для разных точек равновесия

$$\tilde{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = a_{01}\dot{\varphi}^2/2 - c_{01}(\varphi - \pi/2)^2/2 = \tilde{L}(\chi, \dot{\chi}) = mh^2\dot{\chi}^2/2 - kh\chi^2(h - l_0)/2$$

при  $h > l_0$  ( $a_{01} = a|_{\varphi=\pi/2}$ );

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\varphi, \dot{\varphi}) &= a_{02}\dot{\varphi}^2/2 - c_{02}(\varphi - \arcsin(h/l_0))^2/2 = \\ &= \tilde{L}(\chi, \dot{\chi}) = ml_0^4\dot{\chi}^2/(2h^2) - k(l_0/h)^2\chi^2(l_0^2 - h^2)/2 \text{ при } h < l_0 \text{ (} a_{02} = a|_{\varphi=\arcsin(h/l_0)} \text{)}. \end{aligned}$$

5. **Решение** получающихся линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} mh^2\ddot{\chi} + kh(h - l_0)\chi &= 0, \text{ при } h > l_0, \\ m(l_0^4/h^2)\ddot{\chi} + k(l_0/h)^2(l_0^2 - h^2)\chi &= 0, \text{ при } h < l_0. \end{aligned}$$

Стандартная подстановка  $\chi = A\cos(\omega t + \phi)$  ведет к собственным частотам  $\omega_m$  и гармоническим решениям  $\varphi_m(t)$

$$\omega_1 = (c_{01}/a_{01})^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{h}\right)}, \quad \varphi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \pi/2, \quad \text{при } h > l_0;$$

$$\omega_{2,3} = (c_{02}/a_{02})^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{h^2}{l_0^2}\right)}, \quad \varphi_{2,3} = A_{2,3} \cos(\omega_{2,3} t + \phi_{2,3}) - \varphi_{(02,03)}, \quad \text{при } h < l_0.$$

При необходимости, константы интегрирования  $A_m$  и  $\phi_m$  могут быть найдены из известных начальных условий.

6. **Проверка и анализ решения.** Таким образом, при  $h > l_0$  колебания возможны только вблизи точки устойчивого равновесия  $\varphi_{(01)} = \pi/2$ . Это согласуется с физическим смыслом, так как при  $h > l_0$  пружинка все время натянута. Если же  $l_0 > h$ , пружинка при  $\varphi = \pi/2$  сжата, то малейшее отклонение от этой точки равновесия приводит к колебаниям вблизи либо  $\varphi_{(02)}$ , либо  $\varphi_{(03)}$ , а длина пружинки  $l$  будет периодически изменяться относительно своего равновесного значения  $l_0$ .

**Задача 2.** Частица массы  $m$  движется по окружности радиуса  $R$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через ее центр (см. рисунок к задаче 5.18 с учетом  $\omega \rightarrow \Omega$ ). Найти частоту малых колебаний частицы.

*Решение.* Слово "вертикальная" означает, что в задаче необходимо учитывать силу тяжести. Число степеней свободы  $n = 1$ . Задачи с вращением, как правило, решаются в неинерциальной, *вращающейся*, системе координат.

1. Начало координат расположим в центре окружности, ось  $z$  направим вверх вдоль оси вращения. В качестве обобщенной координаты  $q$  выберем угол  $\theta$  между радиус-вектором и осью  $z$ . Опять запишем лагранжиан сначала в декартовых координатах  $(x, y, z)$  неподвижной *инерциальной* системы координат, а затем преобразуем в  $L(\theta, \dot{\theta})$ , используя соотношения (см. сферическую систему координат в разделе 1:  $\varphi = \Omega t, r = R$ )

$$x = R \sin \theta \cos \Omega t, \quad y = R \sin \theta \sin \Omega t, \quad z = R \cos \theta.$$

Подставим эти декартовые координаты в стандартное выражение для кинетической энергии  $T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$  и в потенциальную энергию  $U(z) = mgz$ . После упрощений получим выражения в обобщенных координатах



$$T(\theta, \dot{\theta}) = mR^2\dot{\theta}^2/2 + mR^2\Omega^2\sin^2(\theta)/2 \text{ и } U(\theta) = mgR\cos\theta.$$

Во вращающейся системе координат эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{eff}}(\theta) = U(\theta) - T^{(0)}$ . Здесь второе слагаемое определяет вклад центробежной силы (6.33):  $U_{\text{eff}}(\theta) = mgR\cos\theta - mR^2\Omega^2\sin^2(\theta)/2$ , а  $T_{\text{eff}}(\dot{\theta}) = T^{(2)} = a\dot{\theta}^2/2$ , где  $a = mR^2$ .

2. **Точки равновесия**  $\theta_{(0)}$  являются решениями следующего алгебраического уравнения

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta} = -mgR\sin\theta - mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta = -mR\sin\theta(g + R\Omega^2\cos\theta) = 0.$$

Получается четыре точки равновесия  $\theta_{(0m)}$ :

$$\begin{aligned} \sin\theta = 0 &\rightarrow \theta_{(01)} = 0; \quad \theta_{(02)} = \pi; \\ \cos\theta = -g/(R\Omega^2) &\rightarrow \theta_{(03)} = \arccos\{g/(R\Omega^2)\}; \quad \theta_{(04)} = \pi - \arccos\{g/(R\Omega^2)\}. \end{aligned}$$

3. **Устойчивость положений равновесия.** Проверим положительность

$$U''_{\text{eff}}(\theta) = \frac{d^2U_{\text{eff}}}{d\theta^2} = -mgR\cos\theta - 2mR^2\Omega^2\cos^2\theta + mR^2\Omega^2$$

во всех точках равновесия:

$$\begin{aligned} c_1 = U''_{\text{eff}}(\theta_{(01)}) &= -mR^2(g/R + \Omega^2) < 0, \quad \rightarrow \theta_{(01)} = 0 \text{ неустойчива всегда;} \\ c_2 = U''_{\text{eff}}(\theta_{(02)}) &= mR^2(g/R - \Omega^2) > 0, \quad \rightarrow \theta_{(02)} = \pi \text{ устойчива при } \Omega^2 < g/R; \\ c_{3,4} = U''_{\text{eff}}(\theta_{(03),(04)}) &= mR^2\Omega^2 - m(g/R\Omega^2)^2 > 0, \\ &\rightarrow \theta_{(03),(04)} \text{ устойчивы при } \Omega^2 > g/R. \end{aligned}$$

Опускаем очевидные пп.4-5.

6. **Решение.** Частоты линейных колебаний вблизи соответствующих точек равновесия  $\theta_{(0m)}$  определяются соотношениями  $\omega_m = (c_m/a)^{1/2}$

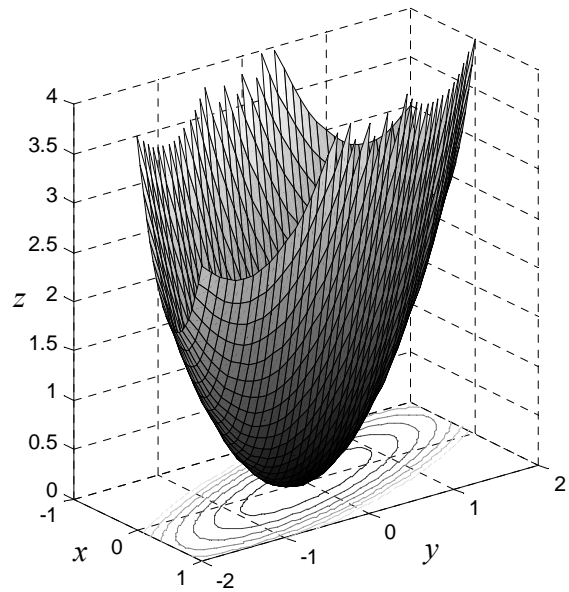
$$\omega_2 = \sqrt{g/R - \Omega^2} \text{ при } \Omega^2 < g/R; \quad \omega_{3,4} = \sqrt{\Omega^2 - g^2/(R\Omega)^2} \text{ при } \Omega^2 > g/R.$$

7. **Анализ.** Проверим самый простой случай – отсутствие вращения ( $\Omega = 0$ ). Тогда материальная точка колеблется только под действием силы тяжести около самой нижней точки окружности ( $\theta_0 = \pi$ ), а частота колебаний  $\omega_0 = \sqrt{g/R}$  совпадает с известной по школьному курсу физики частотой малых колебаний математического маятника. Другой предельный случай – отсутствие силы тяжести (вращение в невесомости), т.е.  $g = 0$ , при этом колебания происходят вблизи "экваториального" значе-

ния ( $\theta_1 = \pi/2$ ): материальная точка под действием центробежной силы стремится занять наиболее далекое от оси вращения положение, а частота определяется угловой скоростью вращения  $\omega_1 = \Omega$ . Таким образом, оба предельных случая согласуются и с полученными ответами, и с "физикой" задачи.

**Замечание:** попробуйте повторить решение при другом выборе обобщенной координаты ( $q = z$ ). Как вы объясните полученные при этом выборе результаты?

**Задача 3.** Найти общее решение задачи о малых колебаниях частицы массы  $m$ , способной двигаться по гладкой внутренней стороне поверхности  $z = 5x^2 + 3xy + y^2$ . Ось  $z$  – вертикальна (см. рисунок, внизу на плоскости  $xOy$  приведены линии уровня).



*Решение.* Задача имеет две степени свободы. Воспользуемся соответствующим алгоритмом и найдем общее решение, т.е. найдем *собственные частоты* и *нормальные координаты* этой системы.

1. В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты  $q_1 = x$  и  $q_2 = y$ , ось  $z$  направлена вверх, тогда потенциальная энергия силы тяжести запишется как

$$U(z) = mgz = mg(5x^2 + 3xy + y^2),$$

а кинетическая энергия как

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 = (m/2)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (10x\dot{x} + 3\dot{x}y + 3x\dot{y} + 2y\dot{y})^2].$$

2. **Точки равновесия**  $(x_{(0)}, y_{(0)})$  являются решениями следующей системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = mg(10x + 3y) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = mg(3x + 2y) = 0.$$

Решение одно:  $\mathbf{q}_{(0)} = (x_{(0)}, y_{(0)}) = (0, 0)$ .

3. Составляем матрицу вторых производных  $\mathbf{U}''$  (см. (8.5)–(8.6))

$$\mathbf{U}'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10mg & 3mg \\ 3mg & 2mg \end{pmatrix}$$

Как мы видим, вторые производные не зависят от  $x$  и  $y$ . Это произошло из-за того, что исходная потенциальная энергия была квадратичной функцией этих переменных. Тем не менее, проверяем положительность как любого диагонального элемента, так и полного определителя этой матрицы, что очевидно. Следовательно, единственная точка равновесия  $(0,0)$  – устойчива.

4. В силу указанной квадратичности потенциальной энергии и нулевых равновесных значений "разложение" потенциальной энергии в ряд по малым смещениям от точки равновесия носит формальный характер, тем не менее запишем

$$U(x, y) = \tilde{U}(x, y) = U(0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{l, k} c_{kl} \chi_k \chi_l = mg(5\chi_1^2 + 3\chi_1 \chi_2 + \chi_2^2).$$

Здесь для удобства записи мы перешли к индексированным переменным, имеющим смысл отклонения от точки равновесия  $\chi_j = q_j - q_{j0}$  (т.е. в данном случае  $\chi_1 = x$ ,  $\chi_2 = y$ ). Как мы видим, потенциальная энергия в данном случае имеет тот же квадратичный вид, что и исходное выражение. В принципе, при определенном навыке, мы могли бы сразу записать ее "приближенный" вид. Иначе дело обстоит с кинетической энергией: в ней присутствуют слагаемые, как квадратичные по малым переменным скоростям смещений  $\dot{\chi}_j$ , так и малые величины 4-ой степени по скоростям  $\dot{\chi}_j$  и смещениям  $\chi_j$ . Запись  $a_{kl}^{(0)} = a_{kl}(\mathbf{q}(0))$  в (8.7) соответствует тому, что мы должны подставить в кинетическую энергию  $x = x_0$  и  $y = y_0$

$$\begin{aligned} T(\dot{x}, \dot{y}) &= (m/2)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (10x\dot{x} + 3\dot{x}y + 3x\dot{y} + 2y\dot{y})^2] \approx \\ &\approx \tilde{T} = (m/2)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (10x_0\dot{x} + 3\dot{x}y_0 + 3x_0\dot{y} + 2y_0\dot{y})^2] = \\ &= \tilde{T}(\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2) = (m/2)(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2). \end{aligned}$$

5. Уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\chi}_j} \right) - \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \chi_j} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\chi}_1 + 10g\chi_1 + 3g\chi_2 = 0 \\ \ddot{\chi}_2 + 3g\chi_1 + 2g\chi_2 = 0 \end{cases}$$

6. После подстановки  $\chi_j = \mathcal{A}_j \exp(i\omega t) = A_j \exp(i\omega t + \varphi_j)$  (см. (8.9a) и (8.9б)) приходим к системе однородных алгебраических уравнений для амплитуд  $\mathcal{A}_j$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 10g)\mathcal{A}_1 + 3g\mathcal{A}_2 = 0 \\ 3g\mathcal{A}_1 + (-\omega^2 + 2g)\mathcal{A}_2 = 0 \end{cases} \quad (8.25)$$

Условие нетривиальности решения ведет к уравнению на *собственные частоты*  $\omega$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 10g & 3g \\ 3g & -\omega^2 + 2g \end{vmatrix} = \omega^4 - 12g\omega^2 + 11g^2 = 0.$$

Решениями биквадратного уравнения являются квадраты собственных частот  $\omega_1^2 = 11g$  и  $\omega_2^2 = g$ . Переходим к заключительному этапу.

7. **Нормальные координаты.** Поочередно подставим найденные частоты в систему уравнений на  $\mathcal{A}_j$  (8.25). Из двух уравнений независимым является только одно. Например, возьмем первое из них и при  $\omega^2 = \omega_1^2 = 11g$  получим связь между  $\mathcal{A}_j^{(1)}$ :  $\mathcal{A}_1^{(1)} = 3\mathcal{A}_2^{(1)}$  (верхний индекс в скобках соответствует номеру собственной частоты и является номером столбца). Для того, чтобы прийти "до числа", наложим еще одно условие нормировки (8.13)  $|\mathcal{A}_1^{(1)}|^2 + |\mathcal{A}_2^{(1)}|^2 = 1$ . Отбрасывая несущественный фазовый множитель, получаем для вещественных амплитуд  $A_1^{(1)} = 3/\sqrt{10}$  и  $A_2^{(1)} = 1/\sqrt{10}$ . Повторяем процедуру для второй частоты  $\omega^2 = \omega_2^2 = g$  и получаем матрицу амплитуд

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

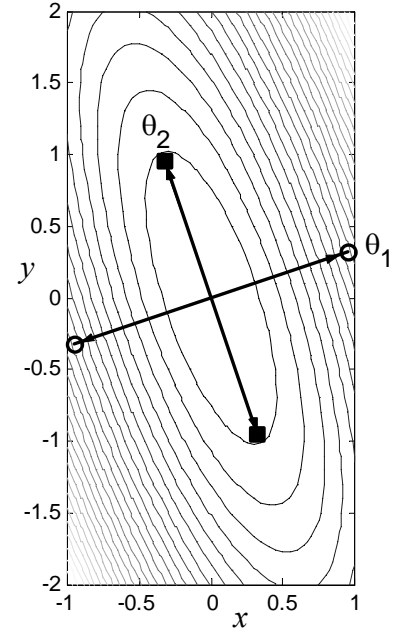
Основываясь на (8.15), введем нормальные координаты  $\theta_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$  нумерует частоты) и согласно (8.16)–(8.17) определим их следующим образом

$$\theta_1 = (3\chi_1 + \chi_2)/\sqrt{10}; \quad \theta_2 = (\chi_1 - 3\chi_2)/\sqrt{10};$$

или, вспоминая начальные обозначения,

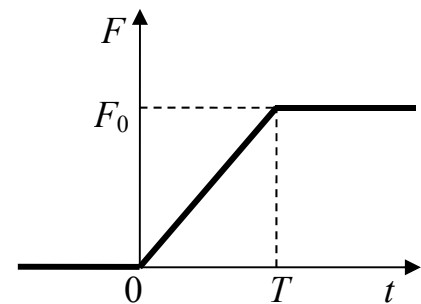
$$\theta_1 = (3x + y)/\sqrt{10}; \quad \theta_2 = (x - 3y)/\sqrt{10}.$$

8. **Анализ результатов.** На рисунке показаны проекции нормальных колебаний на плоскость  $xOy$ , на которой проведены линии уровня – изолинии высоты  $z$  (см. выше картинку данной поверхности<sup>1</sup>). Хорошо видна *ортogonalность* нормальных колебаний, что показывает их *независимость*. Видно также, что колебание  $\theta_1$  с большей частотой  $\omega_1 = \sqrt{11g}$  происходит по наиболее крутой части поверхности  $z = 5x^2 + 3xy + y^2$ ; колебанию  $\theta_2$  отвечает движение по пологой "долине" с частотой в  $\sqrt{11}$  раз меньше.



**Замечание:** Проверьте полученные результаты для частот, используя соображения размерностей. Каково ваше мнение по этому поводу? Где источник несоответствия?

**Задача 4.** Определить конечную амплитуду вынужденных колебаний частицы массы  $m$  после действия вынуждающей силы  $F(t)$ , меняющейся по закону  $F = 0$  при  $t < 0$ ;  $F = F_0 t/T$  при  $0 < t < T$ ;  $F = F_0 = \text{const}$  при  $t > T$ , предполагая, что в начальный момент  $t = 0$  частица покоится в положении равновесия ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ).



*Решение.* В задачах на вынужденные колебания полагается, что *вынуждающая* сила действует вместе с *упругой* силой  $F_{\text{упр}} = -cx$ . Часто этот факт даже не отражается в условии задачи. Запишем уравнение движения (8.22)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) / m, \tag{8.26}$$

<sup>1</sup> Здесь эти рисунки нарисованы для большего понимания, при решении задач воспроизведение таких картинок не является обязательным.

где собственная частота колебаний  $\omega_0^2 = c/m$ , а график зависимости вынуждающей силы  $F(t)$  приведен на рисунке.

Вид правой части уравнения (8.26) меняется в зависимости от  $t$ , поэтому решаем это дифференциальное уравнение отдельно для области  $I$  ( $0 < t < T$ ) и для области  $II$  ( $t > T$ ), а полученные решения "сшиваем" на границе  $t = T$ .

Решение неоднородного уравнения (8.26) для области  $I$  запишем в стандартном виде (8.23). Его частное решение  $x_{ч.р.} = F_0 t / m T \omega_0^2$  легко находится, и тогда полное решение после учета условий при  $t = 0$  имеет вид

$$x_I(t) = A_I \cos(\omega_0 t + \phi_I) + F_0 t / m T \omega_0^2 = F_0 (\omega_0 t - \sin \omega_0 t) / m T \omega_0^3,$$

где  $\phi_I = \pi/2$ .

Полное решение (8.26) для области  $II$  с учетом своего частного решения  $x_{ч.р.} = F_0 / m \omega_0^2$  записывается следующим образом

$$x_{II}(t) = A_{II} \cos(\omega_0 t + \phi_{II}) + F_0 / m \omega_0^2.$$

Из условия непрерывности  $x$  и  $\dot{x}$

$$x_I(T) = x_{II}(T) \rightarrow A_{II} \cos(\omega_0 T + \phi_{II}) = -F_0 \sin \omega_0 T / m T \omega_0^3,$$

$$\dot{x}_I(T) = \dot{x}_{II}(T) \rightarrow A_{II} \sin(\omega_0 T + \phi_{II}) = F_0 \cos \omega_0 T / m T \omega_0^3 - F_0 / m T \omega_0^3.$$

найдем искомую амплитуду  $A_{II}$ , сложив квадраты этих выражений

$$A_{II}^2 = 2 \left( \frac{F_0}{m T \omega_0^3} \right)^2 (1 - \cos \omega_0 T), \quad A_{II} = 2 \left( \frac{F_0}{m T \omega_0^3} \right) \left| \sin \frac{\omega_0 T}{2} \right|.$$

Отметим, что, если время действия "включения" вынуждающей силы удовлетворяет соотношению  $T = 2\pi n / \omega_0$  ( $n$  – целое), то такая сила полностью "гасит" исходные гармонические колебания в системе.

## Задачи

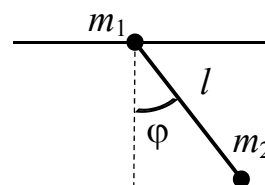
### Обязательные задачи

8.1. Найти частоту колебаний частицы с массой  $m$ , способной двигаться по горизонтальной прямой АВ и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке С на расстоянии  $L$  от прямой. Пружина, имея длину  $L$ , натянута с силой  $F_0$ . (В качестве обобщенной

координаты использовать либо координату  $x$  вдоль прямой АВ, либо длину пружины  $l$  в произвольный момент времени).

- 8.2. Найти частоту колебаний маятника массы  $m_2$  точка подвеса которого (с массой  $m_1$  в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении. Проверить случай обычного маятника, когда точка подвеса закреплена.

$$\left[ \omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 l} g} \right]$$

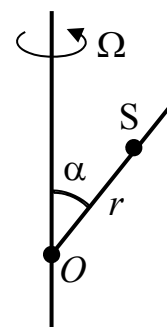


- 8.3. Найти частоту малых колебаний частицы массы  $m$  в поле  $U(x) = U_0 \cos \alpha x - F_0 x$ ,  $F_0 = \text{const}$ .

$$\left[ \omega^2 = \frac{U_0 \alpha^2}{m} \sqrt{1 - \left( \frac{F_0}{U_0 \alpha} \right)^2} \right]$$

- 8.4. Стержень, образующий угол  $\alpha$  с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси. По стержню может двигаться без трения тяжелое колечко S массы  $m$ . Найти положение равновесия колечка и частоту малых колебаний системы.

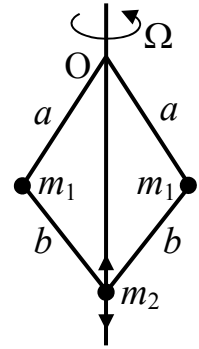
$$\left[ r_0 = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha} \right]$$



- 8.5. Найти частоту малых колебаний системы, описанной в задаче 5.5.
- 8.6. Колечко массы  $m$  может скользить по гладкому проволочному эллипсу. Уравнение эллипса в декартовой системе координат  $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ . Ось  $z$  – вертикальна. Найти частоту малых колебаний частицы: а) для неподвижного эллипса, б) для эллипса, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$  (см. также задачу 7.35).

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а) } \omega = \omega_0 = \frac{\sqrt{gb}}{a}; \quad \text{б) } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}, \text{ при } \Omega < \omega_0, \\ \omega = \Omega a \sqrt{\frac{\Omega^4 - \omega_0^4}{b^2 \Omega^4 + (a^2 - b^2) \omega_0^4}}, \text{ при } \Omega > \omega_0 \end{array} \right]$$

- 8.7. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рисунке и называемой паровым регулятором Уатта. Плоская система с шарнирными соединениями вращается в поле тяжести вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Тело массы  $m_2$  может двигаться вдоль вертикальной оси. Верхняя точка  $O$  закреплена. Рассмотрите только самый простой случай  $a = b = l$ ,  $m_1 = m_2 = m$  (см. также задачи 5.19 и 8.33).



$$\left[ \begin{array}{l} \omega^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}, \text{ при } \Omega > \Omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}}; \\ \omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega^2, \text{ при } \Omega < \Omega_0. \end{array} \right]$$

- 8.8. Решить задачу 8.4, если между колечком и точкой  $O$  имеется пружина жесткости  $c$  с длиной в ненапряженном состоянии  $l_0$  (см. также задачу 7.29).
- 8.9. Найти частоту малых колебаний  $\omega_0$  системы, описанной в задаче 5.20.
- 8.10. Найти частоту малых колебаний системы, описанной в задаче 5.23, если шар с массой  $m_2$  вращается с заданной угловой скоростью  $\dot{\phi} = \Omega = \text{const}$ .
- 8.11. Предполагая, что в начальный момент  $t = 0$  частица покоится в начале координат ( $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ) определить вынужденные колебания частицы под влиянием силы  $F(t)$  для случаев:

$$a) F = F_0 = \text{const}, \quad б) F = at, \quad в) F = F_0 e^{-\alpha t}, \quad г) F = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t.$$

(В последнем случае при решении удобно писать силу в комплексном виде  $F = F_0 e^{-\alpha t + i\beta t}$ )

$$\left[ в) x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + \alpha^2)} \left( e^{-\alpha t} - \cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right]$$

- 8.12. Определить конечную амплитуду колебаний линейного гармонического осциллятора частоты  $\omega_0$  после действия вынуждающей силы, меняющейся по закону:

$$a) t < 0, F = 0; \quad 0 < t < T, F = F_0 = \text{const}; \quad t > T, F = 0;$$



$$\text{б)} t < 0, F = 0; \quad 0 < t < T, F = F_0 t/T; \quad t > T, F = 0;$$

$$\text{в)} t < 0, F = 0; \quad 0 < t < \pi/\omega_0, F = F_0 \sin \omega_0 t; \quad t > \pi/\omega_0, F = 0,$$

предполагая, что при  $t = 0$ , осциллятор покоился в точке с координатой  $x = 0$ .

$$\left[ \text{в)} a = \frac{\pi F_0}{m \omega_0^2} \right]$$

- 8.13. Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если функция Лагранжа ее имеет вид  $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - \omega_0^2 (x^2 + y^2)/2 + \alpha xy$ , где  $\omega_0$  и  $\alpha$  – константы.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{собственные частоты: } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha; \\ \text{нормальные координаты: } \theta_1 = (x + y)/\sqrt{2}, \quad \theta_2 = (x - y)/\sqrt{2} \end{array} \right]$$

- 8.14. Определить колебания системы, изображенной на рисунке, пружины предполагаются одинаковыми, массы частиц равны  $m$ . Движение происходит вдоль вертикальной линии. Выразить функцию Лагранжа через нормальные координаты и соответствующие им скорости.



$$\left[ \omega_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5} c}{2 m} \right]$$

- 8.15. Найти общее решение задачи о малых колебаниях частицы массы  $m$ , способной двигаться по гладкой внутренней стороне поверхности (ось  $z$  – вертикальна).

$$\begin{array}{lll} \text{а)} z = x^2 + xy + y^2, & \text{б)} z = x^2 + \sqrt{5}xy + 2y^2, & \text{в)} z = 4x^2 + xy + 3y^2, \\ \text{г)} z = 3x^2 + 2xy + 2y^2, & \text{д)} z = 2x^2 + 4xy + 5y^2, & \text{е)} z = 3x^2 + 2xy + 3y^2, \\ \text{ж)} z = x^2 + 2xy + 4y^2, & \text{з)} z = x^2 + 2xy + 2y^2, & \text{и)} z = 5x^2 + xy + 4y^2, \\ \text{к)} z = 2x^2 + xy + 3y^2, & \text{л)} z = 2x^2 + 2xy + 3y^2, & \text{м)} z = 3x^2 + 6xy + 11y^2. \end{array}$$

### Задачи средней трудности

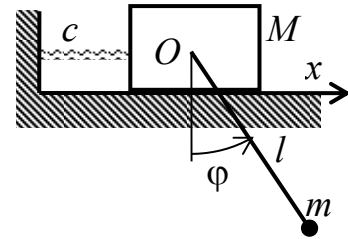
- 8.16. Предполагая, что потенциал взаимодействия двух атомов с массами  $m_1$  и  $m_2$  в двухатомной молекуле имеет вид

$$U = U_0 \{ \exp[-2(r - r_0)/a] - \beta \exp[-(r - r_0)/a] \},$$

где  $V$ ,  $r_0$ ,  $\beta$ ,  $a$  – константы, найти частоту колебаний невращающейся двухатомной молекулы.

- 8.17. Решить задачу о малых колебаниях маятника массы  $m$  с закрепленной точкой подвеса, если вместо нерастяжимого легкого стержня используется невесомая пружина с длиной  $l_0$  в ненапряженном состоянии и жесткостью  $c$ .

- 8.18. Маятник состоит из ползуна массы  $M$ , скользящего без трения по горизонтальной прямой, и шарика массы  $m$ , соединенного с ползунком невесомым стержнем длины  $l$ , способным вращаться в вертикальной плоскости относительно точки прикрепления стержня  $O$ . К ползуну присоединена пружина жесткости  $c$ , другой конец которой закреплен неподвижно (см. также задачу 5.15). Определить частоты малых колебаний системы.



$$\left[ \omega^4 - \left\{ c/M + (g/l)(m + M)/M \right\} \omega^2 + (c/M)(g/l) = 0 \right]$$

- 8.19. Показать, что потенциал  $U = \alpha x^{2n}$  порождает линейные колебания с независящей от амплитуды частотой только при  $n = 1$ .
- 8.20. Рассмотреть изменение положений точек равновесия одномерной нелинейной системы с потенциалом  $U = \alpha x^2/2 + \beta x^4/4$  ( $\beta = \text{const} > 0$ ) в зависимости от величины управляющего параметра  $\alpha$ .
- 8.21. В предположении  $x_i/R \ll 1$  найти собственные частоты системы двух осцилляторов, потенциальная энергия которой имеет вид

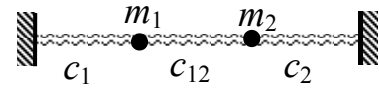
$$V = -\frac{e^2}{R - x_1} - \frac{e^2}{R + x_2} + \frac{e^2}{R + x_2 - x_1} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\alpha x_1^2 + \beta x_2^2),$$

где  $e$ ,  $R$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – константы.

- 8.22. Определить частоты малых колебаний двойного плоского маятника с массами  $m_1$  и  $m_2$  и длинами нитей  $l_1$  и  $l_2$  (см. задачу 5.11):

- а)  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ;      б)  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = 2l_2 = 2l$ ;  
 в)  $m_1 = 2m_2 = 2m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ;      г)  $m_1 \neq m_2$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ;  
 д)  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 \neq l_2$ ;      е)  $m_1 \neq m_2$ ;  $l_1 \neq l_2$ .

- 8.23. Определить нормальные частоты и координаты системы, состоящей из двух точечных масс  $m_1$  и  $m_2$ ,двигающихся вдоль горизонтальной прямой, и трех невесомых пружин с жесткостью  $c_1$ ,  $c_{12}$  и  $c_2$ . Решить задачу для самого простого случая  $m_1 = m_2 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c_{12} = c$ . Как изменится наименьшая частота колебаний системы, если одну из частиц неподвижно закрепить (эффект Релея)?



- 8.24. Тело массы  $m$ , прикрепленное к неподвижной стенке пружиной жесткости  $c$ , совершает движение вдоль горизонтальной направляющей  $Ox$  под действием силы  $F_x = m\Phi(t)$ , испытывая сопротивление  $-\beta\dot{x}$ , пропорциональное скорости. Найти движение тела при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  в следующих трех случаях:

$$a) \beta^2 = 2mc, \quad б) \beta^2 = 4mc, \quad в) \beta^2 = 6,25mc.$$

$$\left[ б) x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \alpha x_0)t]e^{-\alpha(t-\tau)} + \int_0^t (t-\tau)\Phi(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau, \alpha = \sqrt{\frac{c}{2m}} \right]$$

- 8.25. Для системы, описанной в предыдущей задаче,  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , ступенчатое воздействие  $\Phi(t)$  задано следующим образом:  $\Phi = 0$ , при  $t < 0$ ; и  $\Phi = a = \text{const}$ , при  $t > 0$ . Найти закон движения  $x(t)$  при  $t > 0$  во всех рассмотренных выше случаях (см. пп. а-в в 8.24).

$$\left[ б) x(t) = (a/\alpha^2)[1 - (1 + \alpha t_0) e^{-\alpha(t-\tau)}], \alpha = \sqrt{\frac{c}{2m}} \right]$$

- 8.26. Показать, что любое финитное движение системы с лагранжианом  $L = \frac{\dot{q}^2}{2q^4} - \frac{\omega^2}{2q^2} + \frac{\omega^2}{q}$  представляет собой периодическое движение с периодом  $2\pi/\omega$ . (При решении перейти к новой переменной  $z = 1/q$ .)

- 8.27. На линейный осциллятор с трением (собственная частота  $\omega_0$ , сила трения  $F_{\text{тр}} = -2\lambda m\dot{x}$ ) действует вынуждающая сила  $F(t)$ .

а) Найти при установившихся колебаниях условия резонанса и среднюю работу  $A$  силы  $F(t) = f_1 \cos \omega t + f_2 \cos 2\omega t$ .

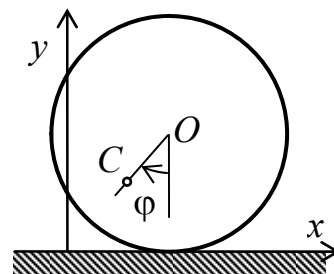
б) Найти условия резонанса и среднюю за большой промежуток времени работу  $\langle A \rangle$  силы  $F(t) = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t$  при установившихся колебаниях.

$$\left[ \text{б) } \langle A \rangle = \frac{\lambda}{m} \left\{ \frac{f_1^2 \omega_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2} + \frac{f_2^2 \omega_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_2^2} \right\} \right]$$

8.28. а) Решить задачу о малых колебаниях для системы, описанной в задаче 7.36.

б) Найти частоту малых колебаний для этой же системы в случае ее вращения с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через точку А.

8.29. Неоднородный диск радиуса  $R$  и массы  $m$ , центр инерции которого расположен на расстоянии  $a$  от его геометрического центра  $O$ , может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей. Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр инерции, равен  $J$ . Найти малые колебания вблизи положения устойчивого равновесия.

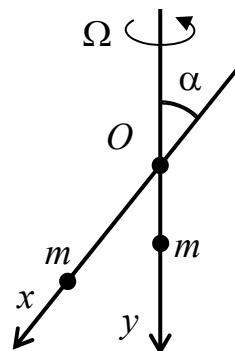


$$\left[ \varphi = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{mga}{m(R-a)^2 + J}} \right]$$

### Задачи повышенной трудности

8.30. Два шарика с массами  $m$  могут скользить по двум гладким горизонтальным прямым, образующим угол  $\pi/3$ . Шарик связаны между собой, а также с вершиной угла пружинами жесткости  $c$ . Пружины, закрепленные концами в вершине угла, в нерастяженном состоянии имеют длину  $l_1$ , а пружина, соединяющая шарик – длину  $l_2$ . Найти все точки равновесия и собственные частоты системы.

8.31. Система, состоящая из двух жестко связанных стержней  $Ox$  и  $Oy$ , образующих угол  $\alpha = \pi/3$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикального стержня  $Oy$ . По каждому из стержней может двигаться без трения колечко массы  $m$ . Колечки притягиваются друг к другу с силой, про-

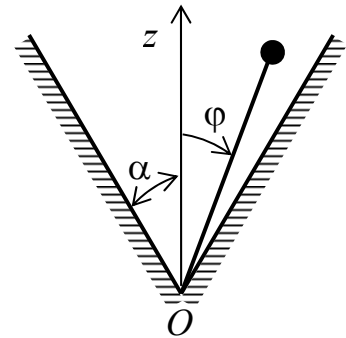


порциональному расстоянию между ними (коэффициент пропорциональности  $a = 9m\Omega^2/5$ ). Найти малые колебания системы в окрестности положения устойчивого равновесия.

$$\left[ \omega_1^2 = \frac{a}{4m}, \quad \omega_2^2 = \frac{4a}{3m} \right]$$

- 8.32. Обращенный математический маятник (см. рисунок) массы  $m$  и длины  $l$  может совершать колебания между преградами, образующими с вертикалью  $Oz$  малый угол  $2\alpha$ . Считая удар о преграду абсолютно упругим, найти приближенное значение периода  $T$  колебаний маятника.

$$\left[ \begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arsh} \frac{\alpha\sqrt{g}}{\sqrt{\dot{\phi}_0^2 l - \phi_0^2 g}}, \quad \text{при } \dot{\phi}_0^2 l > \phi_0^2 g \\ T &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arsh} \frac{\alpha\sqrt{g}}{\sqrt{\phi_0^2 g - \dot{\phi}_0^2 l}}, \quad \text{при } \dot{\phi}_0^2 l < \phi_0^2 g \end{aligned} \right]$$



- 8.33. Найти частоту малых колебаний системы в задаче 8.7 для более сложных случаев:

а)  $a = b = l, m_1 \neq m_2$ ;    б)  $a \neq b, m_1 = m_2 = m$ ;

в)  $a \neq b, m_1 \neq m_2$  (общий случай).

- 8.34. Определить нормальные частоты и координаты системы в задаче 8.23 для более сложных случаев:

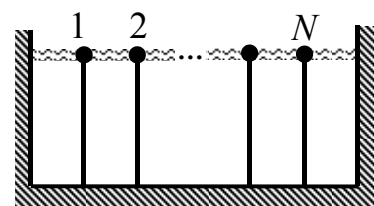
а)  $m_1 = m_2 = m, c_1 = c_2 = 2c_{12} = 2c$ ;

б)  $m_1 = 3m_2 = 3m, c_1 = c_2 = 2c_{12} = 2c$ ;

в)  $m_1 \neq m_2, c_{12} = c_1 = c_2 = 2c$ ;    г)  $m_1 \neq m_2, c_{12} \neq c_1 \neq c_2 \neq c_{12}$ .

- 8.35. Однородная горизонтальная прямоугольная тонкая пластинка со сторонами  $a$  и  $b$  опирается своими углами на четыре одинаковые пружины жесткости  $c$ . Предполагая, что масса пластины равна  $M$ , определить частоты ее свободных колебаний.

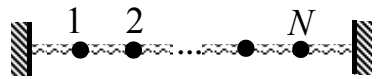
- 8.36. Найти собственные частоты колебаний системы маятников, изображенной на рисунке. Массы всех шариков равны  $m$ , длины всех стержней –  $l$ , и все пружины имеют одну и



ту же жесткость, равную  $c$ . Допустить, что углы отклонений стержней от вертикали подчиняются граничному условию  $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$ .

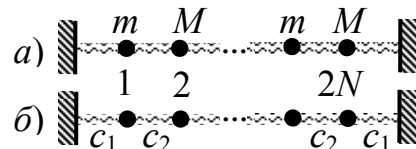
$$\left[ \omega_n^2 = -\frac{g}{l} + \frac{4c}{m} \sin^2 \frac{\pi n}{2(N+1)}, n = 1, 2, \dots, N \right]$$

- 8.37. Найти закон дисперсии системы  $N$  частиц массой  $m$ , двигающихся вдоль горизонтальной прямой и соединенных между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости  $c$ , предполагая, что отклонения частиц от положений равновесия подчиняются граничным условиям  $x_0 = x_{N+1} = 0$ .



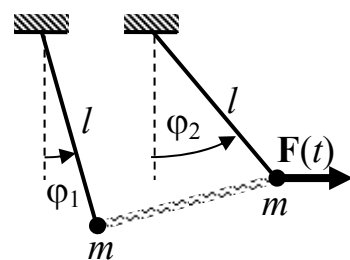
$$\left[ \omega_n = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{\pi n}{2(N+1)}, n = 1, 2, \dots, N \right]$$

- 8.38. Найти закон дисперсии: а) системы  $2N$  частиц с массами  $m$  и  $M$ , соединенных пружинами жесткости  $c$ ; б) системы  $2N$  частиц с массами  $m$ , соединенных пружинами жесткости  $c_1$  и  $c_2$ , как показано на рисунке.



$$\left[ \text{а) } \omega_{1,2}^2 = \frac{c}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \frac{\pi n}{2N+1}} \right), \mu = \frac{mM}{m+M}; n = 1, 2, \dots, N \right]$$

- 8.39. Два одинаковых маятника массы  $m$  и длины  $l$  соединены пружиной жесткости  $c$  (длина пружины в ненапряженном состоянии  $l_0$ ). К одному из них приложена сила  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ , направленная по горизонтали. Исследовать



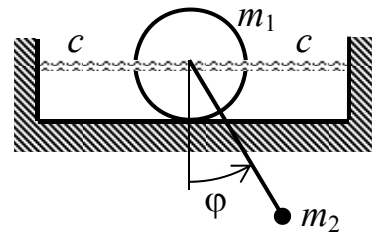
зависимость амплитуд линейных колебаний маятников  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) от частоты внешней силы  $\Omega$  (рассмотреть также предельные случаи очень большой и очень малой частоты  $\Omega$  по сравнению с другими характерными частотами задачи).

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2 - 2\Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \omega_{\text{пруж}}^2} \\ \omega_1^2 = \omega_{\text{маят}}^2 + 2\omega_{\text{пруж}}^2; \quad \omega_2^2 = \omega_{\text{маят}}^2 = g/l; \quad \omega_{\text{пруж}}^2 = c/m \end{array} \right]$$

- 8.40. Решить задачу о малых колебаниях системы, описанной в задаче 7.37.
- 8.41. Собственная частота линейного осциллятора без затухания равна  $\omega_0$ . Найти частоту *затухающих* колебаний этого же осциллятора в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, если за  $n$  колебаний его амплитуда уменьшается в  $k$  раз.

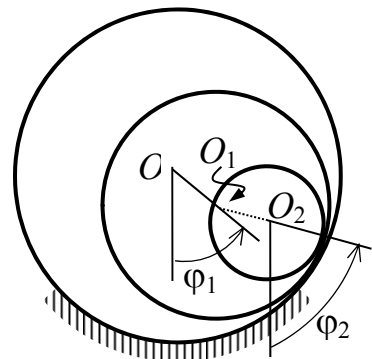
$$\left[ \omega = \omega_0 / \sqrt{1 + \left( \frac{\ln k}{2\pi n} \right)^2} \right]$$

- 8.42. Однородный диск радиуса  $R$  и массы  $m_1 = m$ , центр которого соединен с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости  $c$  каждая, может без проскальзывания катиться по горизонтальной прямой. К центру диска подвешен математический маятник длины  $l$  и массы  $m_2 = m/2$ . Считая, что  $cl = mg$ , найти малые колебания системы.



$$\left[ \omega_1^2 = 2g/3l, \quad \omega_2^2 = 2g/l \right]$$

- 8.43. Три цилиндрические трубы с радиусами  $R_0 = 3r$ ,  $R_1 = 2r$ ,  $R_2 = r$  вложены одна в другую, как показано на рисунке. Внешняя труба радиуса  $R_0$  неподвижна, проскальзывание между трубами отсутствует, а их массы равны соответственно  $m_1 = 3m$ ,  $m_2 = m$ . Найти малые колебания системы около положения устойчивого равновесия.



$$\left[ \omega_1^2 = g/3r, \quad \omega_2^2 = g/r \right]$$

- 8.44. Параметры системы, описанной в задаче 8.18, удовлетворяют условиям  $M = m$  и  $2mg = cl$ , а к ползуну приложена горизонтальная сила  $F_x(t) = F_0 \sin \Omega t$ .
- а) Найти малые колебания системы
- б) Определить ненулевую частоту воздействия  $\Omega$  и начальные значения  $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$ , при которых ползун во время движения будет непо-

движен. Найти закон изменения  $\varphi(t)$ .

$$\left[ \begin{array}{l} a) \quad x = C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A(g - l\Omega^2) \sin \Omega t; \\ l\varphi = -\sqrt{2}C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \sqrt{2}C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) - Al\Omega^2 \sin \Omega t; \\ \omega_{1,2} = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{l}}; A = \frac{F_0 l}{m(2g^2 - 4gl\Omega^2 + l^2\Omega^4)}; C_i, \phi_i - \text{константы} \end{array} \right]$$

8.45. Решить задачу о малых колебаниях механической системы, описанной в задаче 5.25 при следующих значениях параметров

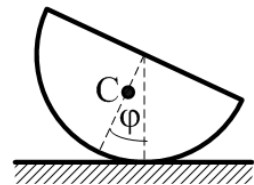
a)  $m_1 = m_2 = m_3 = m, c_1 = c_2 = c_3 = c;$

б)  $m_1 = m_3 = 2m_2 = 2m, 2c_1 = c_2 = c_3 = 2c;$

в) Рассмотреть предельные случаи, когда одна из масс обращается в бесконечность, а другие массы равны между собой.

8.46. Определить влияние, оказываемое вращением Земли, на малые колебания маятника (так называемый маятник Фуко).

8.47. Определить период малых колебаний однородного полукруглого диска радиуса  $R$ , находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может катиться без скольжения.



$$\left[ T = \frac{\pi}{2g} \sqrt{2g(9\pi - 16)R} \right]$$



## Раздел 9. Уравнения Гамильтона.

### Скобки Пуассона

#### Уравнения Гамильтона. Основные положения и формулы

Для механической системы с  $n$  степенями свободы существуют *уравнения Лагранжа* (5.15):  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка, содержащие  $\ddot{q}_j$ ,  $\dot{q}_j$  и  $q_j$ . Свойства механической системы заложены в *функции Лагранжа*  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U$ , зависящей от  $n$  независимых переменных: обобщенных *координат*  $\mathbf{q}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , а *обобщенный импульс*  $p_j$  определяется соотношением

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (9.1)$$

*Гамильтонов* формализм классической механики<sup>1</sup> связан с введением  $2n$  независимых обобщенных переменных: к обобщенным *координатам* добавлено  $n$  обобщенных *импульсов*  $\mathbf{p}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Свойства механической системы заложены в *функции Гамильтона*<sup>2</sup>  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  – обобщенной энергии системы. Движение механической системы в отсутствие диссипативных сил можно определить, решив соответствующие *уравнения Гамильтона*: систему  $2n$  дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9.2)$$

Окончательно, с учетом  $2n$  начальных условий  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  можно записать за-

<sup>1</sup> Для аналитического решения в случае простых систем лагранжевы подход часто оказывается более удобным. Однако в более сложных случаях – при переходе к квантовой механике, в статистической механике, при численном решении уравнений и т.д. – предпочтителен гамильтонов формализм.

<sup>2</sup> Часто функцию Гамильтона, особенно в квантовой механике, называют гамильтонианом.

кон движения данной системы как  $q_j = q_j(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$  и  $p_j = p_j(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ . Уравнения Гамильтона в записи (9.2) иногда называют **каноническими уравнениями движения**.

Таким образом, для решения уравнений движения в гамильтоновом формализме (9.2) необходимо определить процедуру нахождения функции Гамильтона для любой механической системы.

Покажем, как можно найти функцию Гамильтона, зная функцию Лагранжа. Проще всего воспользоваться определением обобщенной энергии системы  $H$  (см. также замечание к задаче 5 на странице 92)

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (9.3)$$

Справа в этом выражении присутствуют как "нужные" переменные  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ , так и "лишние" переменные  $\dot{q}_j$ . Чтобы найти, как эти "лишние" обобщенные скорости выражаются через "нужные" переменные, т.е.  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , необходимо воспользоваться определением (9.1)

$$p_j = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} = p_j(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9.4)$$

и решить полученную систему алгебраических уравнений относительно  $\dot{q}_j$ . После чего осталось подставить найденные соотношения  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  в выражение (9.3), привести подобные члены и получить искомую функцию Гамильтона.

Иногда возникает необходимость в решении обратной задачи, в нахождении функции Лагранжа по известной функции Гамильтона. Для этого воспользуемся (9.3)

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n, t), \quad (9.5)$$

а "лишние"  $p_j$  как функции "нужных" переменных  $p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  найдем из системы алгебраических уравнений (см. второе выражение в (9.2))

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9.6)$$

Подставим найденные импульсы  $p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  в (9.5) и, после приведения подобных слагаемых, получим функцию Гамильтона.

### Циклические переменные в гамильтоновом формализме

Если какая-либо обобщенная переменная (например,  $q_k$ ) не входит явным образом в функцию Гамильтона, т.е. является циклической координатой<sup>1</sup>, то соответствующий этой координате<sup>2</sup> обобщенный импульс  $p_k$  является интегралом движения, т.е. не меняется со временем.

Действительно, пусть  $H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; p_1, \dots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n, t)$ , тогда это напрямую следует из уравнений Гамильтона (см. первое выражение в (9.2))

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)}{\partial q_k} \equiv 0 \rightarrow p_k = \text{const}. \quad (9.7)$$

Циклической переменной может быть и время  $t$ , т.е.  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . В этом случае в отсутствие диссипативных сил сохраняется обобщенная энергия, т.е. функция Гамильтона  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const}$ , и механическая система является обобщенно-консервативной. Как мы видим, наличие циклических переменных упрощает решение уравнений Гамильтона.

Напомним также, что обобщенную энергию  $H$  можно записать как

$$H = T^{(2)} + U - T^{(0)} \quad (9.8)$$

(см. (5.19) и (5.20)). Отсюда видно, что, если на систему наложены только стационарные связи, то обобщенная энергия совпадает с обычной полной энергией системы:  $H = T^{(2)} + U = T + U = E$ .

В общем же случае, при наличии диссипативных  $Q_j^d$  либо других непотенциальных сил  $Q_j^{\text{нп}}$  первые  $n$  уравнений Гамильтона (9.2) приобретут вид

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j^{\text{нп}},$$

<sup>1</sup> Напомним, что циклическая координата не будет явно содержаться и в функции Лагранжа (см. замечание к задаче 5 на странице 92)

<sup>2</sup> Часто говорят "сопряженный этой координате" импульс, а  $q_j, p_j$  называют сопряженными переменными ( $j$  – любое).

а закон изменения обобщенной энергии системы записывается так

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)}{\partial t} + N^d, \quad (9.8)$$

где  $N^d = \sum_{j=1}^n Q_j^d \dot{q}_j$  – мощность диссипативных сил.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Найти функцию Гамильтона и провести анализ движения системы в гамильтоновом формализме для простейших механических систем:

- а) свободной частицы
- б) гармонического осциллятора;
- в) частицы в центральном поле.

*Решение.* Действуем по алгоритму:

- ✓ сначала находим функцию Лагранжа  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t)$  (для данных систем функция Лагранжа найдена в задаче 5 из раздела 5);
- ✓ затем выражаем с помощью (9.4) обобщенные скорости через координаты и импульсы;
- ✓ найденные выражения подставляем в определение (9.3).

а) Функция Лагранжа свободной частицы в декартовых координатах имеет вид  $L = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  (число степеней свободы  $n = 3$  и  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ). Находим соответствующие обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

(обобщенные импульсы совпадают с обычными, кинематическими импульсами!<sup>1</sup>), следовательно,  $\dot{x} = p_x/m$ ,  $\dot{y} = p_y/m$ ,  $\dot{z} = p_z/m$ . Подставляем полученные скорости в определение функции Гамильтона (9.3)

$$\begin{aligned} H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/m - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> В общем случае размерность обобщенных импульсов может не совпадать с размерностью кинематических импульсов (см., например,  $p_\phi$  ниже в пункте в данной задачи).

Допустима векторная запись:

$$\begin{aligned} L &= mv^2/2 = m(\mathbf{v}\mathbf{v})/2 = m(\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})/2 \rightarrow \\ \mathbf{p} &= \partial L/\partial \dot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}} \rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m \rightarrow \\ \rightarrow H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= (\mathbf{p}\dot{\mathbf{r}}) - m\dot{\mathbf{r}}^2/2 = p^2/m - p^2/2m = p^2/2m. \end{aligned}$$

Поскольку в гамильтониан координаты вообще не входят, то все компоненты импульса – интегралы движения. Уравнения Гамильтона (9.2) приобретают вид  $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{r} = 0$  и  $\dot{\mathbf{r}} = \partial H/\partial \mathbf{p} = \mathbf{p}/m$ . Их решения –  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 t/m + \mathbf{r}_0$ .

б) Функция Лагранжа одномерного линейного гармонического осциллятора  $L(x, \dot{x}) = m\dot{x}^2/2 - m\omega_0^2 x^2/2$ . Следовательно,  $p = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$  и  $\dot{x} = p/m$ . Тогда функция Гамильтона

$$H(x, p) = p\dot{x}(p) - L(x, \dot{x}(p)) = p^2/2m + m\omega_0^2 x^2/2$$

и она совпадает с *полной энергией* гармонического осциллятора  $E$ . Запись уравнений движения в гамильтоновом формализме также элементарно

$$\dot{p} = -\partial H/\partial x = -m\omega_0^2 x, \quad \dot{x} = \partial H/\partial p = p/m.$$

После дифференцирования по времени второго уравнения и подстановки  $\dot{p}$  в первое, мы имеем стандартное уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

с известным решением (см., например, раздел 8).

в) Лагранжиан частицы в центральном поле (две степени свободы:  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$  – полярная система координат):  $L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = m\dot{\rho}^2/2 + m\rho^2\dot{\varphi}^2/2 - U(\rho)$ . Попутно замечаем, что  $\varphi$  является циклической координатой в лагранжевом формализме, поскольку не входит в явном виде в функцию Лагранжа. Обобщенные импульсы, сопряженные координатам  $\rho$  и  $\varphi$  соответственно:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

Выражаем обобщенные скорости через импульсы и координаты

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}.$$

Эти выражения подставляем в определение функции Гамильтона (9.3) и решаем задачу, находя  $H = H(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi)$ ,

$$H = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{m}{2} \left( \frac{p_\rho}{m} \right)^2 - \frac{m\rho^2}{2} \left( \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \right)^2 + U(\rho) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho).$$

Подчеркнем, что  $\varphi$  является циклической координатой и в гамильтоновом формализме.<sup>1</sup> Это означает, что соответствующий обобщенный импульс  $p_\varphi$  (физический смысл:  $z$ -компонента момента импульса  $M_z$ !) является интегралом движения, что напрямую следует из уравнений Гамильтона и заметно упрощает их решение

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 &\rightarrow p_\varphi = p_{\varphi 0} = \text{const}; & \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho}; \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} = \frac{p_{\varphi 0}}{m\rho^2}; & \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}. \end{aligned}$$

Во всех рассмотренных выше случаях (*a*-*в*) циклической переменной является также и время, что приводит к сохранению обобщенной энергии<sup>1</sup> (функции Гамильтона)  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E = \text{const}$ , что в данном случае (в отличие от случаев *a*, *б*) действительно упрощает решение уравнений движения. После подстановок получаем известное уравнение, используемое для анализа движения частицы в центральном поле (см. раздел 3),

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m} \left[ E - U(\rho) - \frac{p_{\varphi 0}^2}{2m\rho^2} \right].$$

**Задача 2.** Найти функцию Гамильтона и написать канонические уравнения движения системы, функция Лагранжа которой имеет следующий вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2) + \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + q_3 (q_1 + q_2).$$

*Решение.* Система имеет три степени свободы. Сначала используем определение обобщенных импульсов (9.4) и найдем  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ( $j = 1, 2, 3$ )

<sup>1</sup> См. замечание на странице 92.

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \dot{q}_2 \\ p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = p_3 \\ \dot{q}_2 = \frac{p_2}{q_1^2} \\ \dot{q}_3 = p_1 - p_3 \end{cases}$$

Подставляем их в определение функции Гамильтона (9.3)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= p_1 p_3 + p_2 \frac{p_2}{q_1^2} + p_3 (p_1 - p_3) - \frac{1}{2} \left( p_3^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - p_3 (p_1 - p_3) + \\ &+ \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - q_3 (q_1 + q_2) = \frac{p_2^2}{2q_1^2} + p_3 \left( p_1 - \frac{p_3}{2} \right) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - q_3 (q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Канонические уравнения Гамильтона тогда запишутся как

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{p_2^2}{q_1^3} - q_1 + q_3; & \dot{p}_2 &= -q_2 + q_3; & \dot{p}_3 &= q_1 + q_2; \\ \dot{q}_1 &= p_3; & \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{q_1^2}; & \dot{q}_3 &= p_1 - p_3. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона системы имеет следующий вид

$$H = p_1 p_3 + \frac{p_2^2}{2q_1^2} + \frac{p_3^2}{2} + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - q_3 (q_1 + q_2).$$

*Решение.* По смыслу задача является обратной по отношению к предыдущей, а функция Гамильтона очень похожа на ответ предыдущей задачи. Отличие в одном знаке. Нам нужно исключить "лишние" импульсы, после чего воспользоваться соотношением (9.5).

С помощью уравнений Гамильтона, а именно,  $\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j$  составим уравнения на неизвестные  $p_j$  и найдем их

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_3 \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{q_1^2} \\ \dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = p_1 + p_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = -\dot{q}_1 + \dot{q}_3 \\ p_2 = q_1^2 \dot{q}_2 \\ p_3 = \dot{q}_1 \end{cases}$$

Функция Лагранжа (9.5)

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{q}_j - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) = (-\dot{q}_1 + \dot{q}_3) \dot{q}_1 + q_1^2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \\
 &\quad - (-\dot{q}_1 + \dot{q}_3) \dot{q}_1 - \frac{q_1^2 \dot{q}_2^2}{2} - \frac{\dot{q}_1^2}{2} - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_3(q_1 + q_2) = \\
 &\quad = -\frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{q_1^2 \dot{q}_2^2}{2} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_3(q_1 + q_2).
 \end{aligned}$$

Разница с функцией Лагранжа в задаче 2 также в одном знаке.

## Задачи

### Обязательные задачи

9.1. Составить функцию Гамильтона:

- а) свободной материальной точки в цилиндрических и сферических координатах;
- б) частицы, двигающейся в однородном поле тяжести;
- в) частицы в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ .

9.2. Найти функцию Гамильтона для частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$ , двигающейся в неоднородном электромагнитном поле со скалярным потенциалом  $\varphi$  и векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ .

$$\left[ H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi \right]$$

9.3. а) Найти функцию Гамильтона математического маятника, функция Лагранжа которого ( $\omega$  – константа)  $L = \dot{\varphi}^2/2 - \omega^2(1 - \cos\varphi)$ .

б) Найти функцию Гамильтона этого математического маятника, выбирая в качестве обобщенной координаты  $x = [(1 - \cos\varphi)/2]^{1/2}$ .

$$[ \text{б) } H = p^2(1 - x^2/4)/2 + \omega^2 x^2/2 ]$$

9.4. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения механической системы, лагранжиан которой имеет вид ( $a$ ,  $b$  – константы)

$$\text{а) } L = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/2 - a(q_1 - q_2)^2/4 - b(q_1 + q_2)^2/4;$$



$$\text{б)} L = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/4a + (q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)/2a + (q_1^2 + q_2^2)/4a;$$

$$\text{в)} L = \dot{q}_1^2/2 + (\dot{q}_2^2/2)\sin^2 q_1 + a\cos q_1;$$

$$\text{г)} L = (q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2a)/2;$$

$$\text{д)} L = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2.$$

9.5. Найти функцию Лагранжа механической системы, гамильтониан которой имеет вид ( $a, b, c$  – константы)

$$\text{а)} H = \frac{p^2}{2m} + (\mathbf{a}\mathbf{p}) + U(r), \mathbf{a} \text{ – постоянный вектор};$$

$$\text{б)} H = p_1^2/6 + p_2^2/2 + q_1^2 + q_2^2/2 + q_1q_2;$$

$$\text{в)} H = [p_1^2 + 5p_2^2 - 2p_1p_2\cos(q_1 - q_2)]/\{2[4 + \sin^2(q_1 - q_2)]\} - \\ - 3\cos q_1 - \cos q_2;$$

$$\text{г)} H = (p_1 + p_2)^2/(2at^2) + p_2^2/2 + a\cos q_2;$$

$$\text{д)} H = p_1^2/(4a) + p_2^2/[4(c^2 + b^2\cos^2 q_1)];$$

$$\text{е)} H = 2(q_1p_1^2 + q_2p_2^2)/(q_1 + q_2) + p_3^2/(2q_1q_2) - a/(q_1 + q_2) + b(q_1 - q_2);$$

$$\text{ж)} H = p_1^2 + p_2^2 + 3p_3^2 + 3p_4^2 - 2p_1p_3 - 2p_2p_4)/2 + 2(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2) + \\ + (q_3^2 + q_4^2)/4;$$

9.6. Найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H(x,p) = p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2 + \lambda(p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2)^2.$$

$$[x = a\cos(\omega t + \varphi), p = -a\omega_0\sin(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega = \omega_0(1 + 2\lambda A), A = a^2\omega_0^2/2]$$

9.7. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения для механических систем, описанных в задачах:

а) Задача 4, решенная в разделе 5 (уравнения Лагранжа);

б) 5.9;                      в) 5.11;                      г) 5.12;                      д) 5.14;

е) 5.15;                      ж) 5.16;                      з) 5.19;                      и) 5.23.

9.8. С помощью уравнений Гамильтона найти закон движения для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , двигающейся

а) в постоянном однородном электрическом поле с потенциалом  $\varphi$ ;

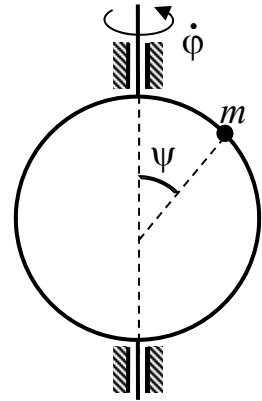
б) в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$  с векторным

потенциалом  $\mathbf{A} = xH\mathbf{e}_y$ ;

в) одновременно в постоянных однородных электрическом и магнитном полях.

- 9.9. Тяжелое колечко массы  $m$  может скользить по гладкой проволочной окружности массы  $M$  и радиуса  $R$ , которая вращается вокруг своего вертикального диаметра. Написать функцию Гамильтона и составить канонические уравнения системы.

$$\left[ H = \frac{p_\phi^2}{R^2(M + 2m \sin^2 \psi)} + \frac{p_\psi^2}{2mR^2} + mgR \cos \psi \right]$$



- 9.10. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы  $m$ , двигающейся по гладкой сфере радиуса  $R$  в однородном поле тяжести.

$$\left[ H = \frac{1}{2mR^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR \cos \theta \right]$$

### Задачи средней трудности

- 9.11. Составить функцию Гамильтона свободно двигающегося симметричного волчка (главные моменты инерции  $J_1, J_2 = J_1, J_3$ ), используя в качестве координат эйлеровы углы  $\phi, \theta, \psi$ .

$$\left[ H = p_\theta^2/2J_1 + (p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2/2J_1 \sin^2 \theta + p_\phi^2/2J_3 \right]$$

- 9.12. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения для механических систем, описанных в задачах:

а) 5.25; б) 5.30.

- 9.13. Найти функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого  $L = \dot{x}^2/2 - \omega^2 x^2/2 - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2$ ,  $\omega, \alpha, \beta$  – константы.

$$\left[ H = p^2/[2(1 + 2\beta x)] + \omega^2 x^2/2 + \alpha x^3 \right]$$

- 9.14. а) Найти уравнения движения частицы, функция Гамильтона которой имеет следующий вид:  $H = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})}$ , где  $c$  – константа, а  $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  – произвольная функция радиус-вектора  $\mathbf{r}$  и импульса частицы  $\mathbf{p}$ .

*Примечание.* Данный гамильтониан описывает распространение света в прозрачной среде с показателем преломления  $n$ . "Частицей" является волновой пакет,  $\mathbf{r}(t)$  – закон его движения,  $\dot{\mathbf{r}}$  – его групповая скорость, а вектор  $\mathbf{p}$ , перпендикулярный волновому фронту, определяет волновой вектор.

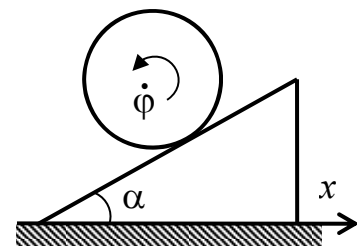
$$\left[ \dot{\mathbf{r}} = \frac{c\mathbf{p}}{np} - \frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

б) Найти траекторию, если  $n(\mathbf{r}) = ax$  ( $a$  – константа).

$$[x = C_1 \operatorname{ch}(y/C_1 + C_2)]$$

Задачи повышенной трудности

9.15. Треугольная призма массы  $M$  может скользить по гладкой горизонтальной плоскости. Однородный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$  может катиться без проскальзывания по боковой грани призмы, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найти функцию Гамильтона системы, составить канонические уравнения движения и решить их.



$$\left[ H = \frac{3mr^2 p_x^2 + 2(m+M)p_\phi^2 - 4mrp_x p_\phi \cos \alpha}{2mr^2 [3M + m(1 + \sin^2 \alpha)]} - mgr\phi \sin \alpha \right]$$

9.16. Записать функцию и уравнения Гамильтона для механических систем, описанных в задачах:

а) 5.27; б) 5.33.

9.17. Найти функцию Лагранжа частицы, функция Гамильтона которой имеет следующий вид  $H = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{r})}$ , где  $c$  – константа, а  $n(\mathbf{r})$  – произвольная функция радиус-вектора (см. выше задачу 9.14).

9.18. Составить канонические уравнения пространственного движения однородного стержня массы  $m$  и длины  $2l$  в однородном поле тяжести. Найти первые интегралы движения.

9.19. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения движения двойного плоского маятника, состоящего из двух одинаковых стержней массы  $m$  и длины  $l$ .

## Скобки Пуассона. Основные положения

Пусть  $f$  и  $g$  – произвольные функции обобщенных координат, импульсов и времени:  $f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n, t)$ ,  $g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n, t)$ . **Скобка Пуассона** определяется следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right). \quad (9.9)$$

### Основные свойства скобок Пуассона

(здесь  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  – функции, а  $\alpha_k$  – константы)

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$   | (4) $\left\{ \prod_k f_k, g \right\} = \sum_l \left( \prod_{k \neq l} f_k \right) \{f_l, g\}$  |
| (a) $\{f, f\} = 0$   | (a) $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}$   |
| (2) $\{f, \alpha\} = \{\alpha, g\} = 0$                                    | (5) $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$ |
| (3) $\left\{ \sum_k \alpha_k f_k, g \right\} = \sum_k \alpha_k \{f_k, g\}$ | (6) $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$  |
| (a) $\{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\}$                                    | (тождество Якоби)  |
| (b) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$                           |  |

Очень просто вычисляются элементарные, или **фундаментальные**, скобки Пуассона:

$$\{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}. \quad (9.10)$$

### Зачем нужны скобки Пуассона?

а. С их помощью можно единообразным способом записать уравнения Гамильтона (9.2)

$$\dot{q}_j = \{H, q_j\}, \quad \dot{p}_j = \{H, p_j\}. \quad (9.11)$$

б. Для произвольной функции  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  уравнения движения (полная производная по времени) имеют похожий вид

$$\frac{df(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (9.12)$$

Так, например, подставив вместо  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  гамильтониан  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  и воспользовавшись следствием а первого свойства скобок Пуассона, мы мгновенно получаем соотношение (9.8).

в. Если  $f$  и  $g$  – интегралы движения, то их скобка Пуассона,  $\{f, g\}$ , – также интеграл движения (теорема Пуассона). В ряде случаев это помогает находить дополнительные интегралы движения и упрощает решение задач.

г. Наконец, скобка Пуассона является классическим аналогом коммутатора, играющего важную роль в квантовой механике.

## Примеры решения задач

**Задача 4.** Вычислить скобки Пуассона:

$$(a) \{x, M_y\}; \quad (б) \{\varphi, \psi\}, \text{ где } \varphi = \cos \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right], \psi = \sin \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^3 + q_j^2) \right].$$

*Решение.* Можно сразу вычислить скобку Пуассона, "в лоб", исходя из определения (9.9), а можно найти скобку Пуассона, используя свойства этих скобок и постепенно сводя искомую скобку к более простым и даже известным. На примере (а) покажем оба варианта.

(а) В задаче предполагается 3 степени свободы: обобщенные координаты совпадают с обычными декартовыми ( $q_1 = x_1 = x$ ,  $q_2 = x_2 = y$ ,  $q_3 = x_3 = z$ ), обобщенные импульсы ( $p_1 = p_x$ ,  $p_2 = p_y$ ,  $p_3 = p_z$ ) – с компонентами обычного импульса. Компонента момента импульса  $M_y = [\mathbf{r} \mathbf{p}]_y = M_2 = zp_x - xp_z = x_3p_1 - x_1p_3$ .

I способ – вычисление "в лоб":

$$\begin{aligned} \{x, M_y\} &= \{x_1, M_2\} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_1}{\partial p_j} \frac{\partial M_2}{\partial x_j} - \frac{\partial x_1}{\partial x_j} \frac{\partial M_2}{\partial p_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \left( -\frac{\partial x_1}{\partial x_j} \frac{\partial M_2}{\partial p_j} \right) = \\ &= -\sum_{j=1}^3 \delta_{1j} \frac{\partial M_2}{\partial p_j} = -\frac{\partial M_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial}{\partial p_1} (x_3p_1 - x_1p_3) = -x_3 = -z \end{aligned}$$

II способ – использование свойств, сведение к известным скобкам.

$$\begin{aligned} \{x, M_y\} &= \{x_1, M_2\} = \{x_1, x_3p_1 - x_1p_3\} \stackrel{(3)}{=} \{x_1, x_3p_1\} - \{x_1, x_1p_3\} \stackrel{(4a)}{=} \\ &= x_3 \underbrace{\{x_1, p_1\}}_{=-1} + p_1 \underbrace{\{x_1, x_3\}}_{=0} - x_1 \underbrace{\{x_1, p_3\}}_{=0} - p_3 \underbrace{\{x_1, x_1\}}_{=0} = -x_3 = -z \end{aligned}$$

В данном случае мы свели все к фундаментальным скобкам (9.10), их значения написаны под скобками. Над знаками равенства приведены номера свойств, которые были применены при вычислениях. Теперь можно при

решении других задач использовать полученный результат и считать  $\{x, M_y\}$  – "известной" скобкой Пуассона.<sup>1</sup>

(б) В этой задаче главное не ошибиться при вычислении частных производных от сложных функций  $\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  и  $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = -\sin \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right] \sum_{j=1}^n 2p_j \delta_{jk} = -2p_k \sin \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right];$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} = -3q_k^2 \sin \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right];$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_k} = 3p_k^2 \cos \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^3 + q_j^2) \right]; \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = 2q_k \cos \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^3 + q_j^2) \right].$$

Подставим их в определение (9.9), в котором поменяем индекс суммирования ( $j \rightarrow k$ )

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \right) = \sin \left[ 2 \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right] \sum_{k=1}^n \left( \frac{9}{2} p_k^2 q_k^2 - 2 p_k q_k \right).$$

**Задача 5.** Показать, что, если функция Гамильтона зависит от переменных  $q_1$  и  $p_1$  лишь опосредовано через функцию  $f(q_1, p_1)$ , т.е.

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \dots, q_n, p_n),$$

то  $f(q_1, p_1)$  – интеграл движения.

*Решение.* Другими словами нужно показать, что  $f(q_1, p_1)$  не изменяется во времени, т.е. является константой. С помощью скобок Пуассона решение укладывается в одну строчку. Воспользуемся определением

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = \left( \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} - \left( \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) = 0,$$

тогда первых два члена, где вычислены производные от сложной функции  $H = H(f, q_2, p_2, \dots, q_n, p_n)$ , отличаются только знаками, а в последней сумме производные от  $f$  тождественно равны 0. Отсюда следует, что  $f(q_1, p_1) = \text{const}$ . Более того, очевидно обобщение этого результата:

<sup>1</sup> Из соображений симметрии, кстати, сразу следует, что  $\{y, M_z\} = -x$ ,  $\{z, M_x\} = -y$ .

если функция Гамильтона имеет вид

$$H = H(f(q_1, p_1, \dots, q_k, p_k), q_{k+1}, p_{k+1}, \dots, q_n, p_n),$$

то  $f(q_1, p_1, \dots, q_k, p_k)$  – интеграл движения.

## Задачи

### Обязательные задачи

9.20. Вычислить скобку Пуассона  $\{\varphi, \psi\}$ , где

а)  $\varphi = q^2 + p^2, \psi = \arctg(p/q);$

б)  $\varphi = \varphi(q^2 + p^2), \psi = \arctg(p/q);$

в)  $\varphi = \varphi(q^2 + p^2), \psi = \psi(\arctg(p/q));$

г)  $\varphi = q_j, \psi = \psi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t);$

д)  $\varphi = p_j, \psi = \psi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t);$

е)  $\varphi = \varphi(q_1, p_1), \psi = \psi(\varphi(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, t);$

ж)  $\varphi = \varphi(g((q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t))), \psi = \psi(g((q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)));$

з)  $\varphi = \cos \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^2) \right], \psi = \sin \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^2) \right];$

и)  $\varphi = \varphi \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right], \psi = \psi \left[ \sum_{j=1}^n (p_j^2 + q_j^3) \right].$

9.21. Вычислить скобки Пуассона:

а)  $\{M_i, x_j\},$  б)  $\{M_i, p_j\},$  в)  $\{M_i, M_j\},$  г)  $\{M^2, M_j\},$

где  $x_j, p_j$  – декартовы координаты и компоненты импульса частицы,  $M_j$  – компоненты ее момента импульса относительно начала координат, а  $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ ;

д)  $\{(\mathbf{a}p), (\mathbf{b}r)\},$  е)  $\{(\mathbf{a}M), (\mathbf{b}r)\},$  ж)  $\{(\mathbf{a}M), (\mathbf{b}M)\},$  з)  $\{(\mathbf{a}M), (\mathbf{b}p)\},$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – постоянные векторы.

*Примечание.* При вычислениях удобно использовать элементы единичного антисимметричного тензора 3 ранга  $e_{ijk}$ , которые обладают следующими свойствами:  $e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = -e_{jik} = -e_{kji} = -e_{ikj}$ . Вследствие чего элементы, имеющие хотя бы 2 одинаковых индекса, обращаются в нуль. Среди оставшиеся 6 элементов с разными индексами элементы с "правильной" последовательностью индексов равны единице, т.е.  $e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1$ , а

элементы с "неправильной" последовательностью индексов имеют значение  $-1$ , т.е.  $e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1$ . С помощью единичного антисимметричного тензора 3 ранга легко записывается в матричном виде векторное произведение  $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mathbf{C}]$ :  $\mathbf{A} = \sum_{i,j,k} e_{ijk} B_i C_j \mathbf{e}_k$ , где  $\mathbf{e}_k$  — соответствующий единичный орт, и его компонента —  $A_k = \sum_{i,j} e_{ijk} B_i C_j$ .

единичный орт, и его компонента —  $A_k = \sum_{i,j} e_{ijk} B_i C_j$ .

$$\left[ \begin{array}{llll} a) - \sum_k e_{ijk} x_k, & б) - \sum_k e_{ijk} p_k, & в) - \sum_k e_{ijk} M_k, & г) 0; \\ \delta) (\mathbf{ab}), & е) - ([\mathbf{ab}]\mathbf{r}), & ж) - ([\mathbf{ab}]\mathbf{M}), & з) - ([\mathbf{ab}]\mathbf{p}) \end{array} \right]$$

9.22. Вычислить скобку Пуассона  $\{\varphi, \psi\}$ , где  $\varphi = q \cos \omega t + (p/\omega) \sin \omega t$ ,  $\psi = p \cos \omega t - q \omega \sin \omega t$ . Рассмотреть два случая: а)  $n = 1$  и б)  $n > 1$ , когда  $p$  и  $q$  суть модули векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Здесь  $n$  — число степеней свободы.

### Задачи средней трудности

9.23. а) Доказать, что значение любой функции координат и импульсов системы  $f[p(t), q(t)]$  выражается через значения  $p$  и  $q$  в момент времени  $t = 0$  формулой

$$f[p(t), q(t)] = f + \frac{t}{1!} \{H, f\} + \frac{t^2}{2!} \{H, \{H, f\}\} + \dots,$$

где  $f = f[p(0), q(0)]$ ,  $H = H[p(0), q(0)]$ . (Ряд предполагается сходящимся.)

Вычислить с помощью этой формулы  $q(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q^2(t)$ ,  $p^2(t)$  для:

б) частицы в однородном поле  $\mathbf{F} = -\partial U / \partial \mathbf{r} = \text{const}$ ,

в) гармонического осциллятора.

9.24. Показать, что три функции  $f = p_x^2 + y^2$ ,  $g = x^2 + p_y^2$ ,  $h = \{f, g\}$  являются независимыми первыми интегралами системы с двумя степенями свободы, описываемой гамильтонианом  $H = p_x p_y + xy$ .

9.25. Вычислить скобки Пуассона  $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ , где

$$\alpha_1 = (x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2)/4,$$

$$\alpha_2 = (xy + p_x p_y)/2,$$

$$\alpha_3 = (x p_y - y p_x)/2,$$

$$\alpha_4 = x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \{\alpha_i, \alpha_j\} = - \sum_{k=1}^3 e_{ijk} \alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_4\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{array} \right]$$



Задачи повышенной трудности

9.26. Найти  $\{v_i, v_j\}$  для частицы в магнитном поле  $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$ .

$$\left[ -\frac{e}{mc^2} \sum_{k=1}^3 e_{ijk} H_k \right]$$

9.27. В квантовой теории гармонического осциллятора важную роль играют следующие комплексно-сопряженные комбинации координат и импульсов  $a = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x + ip)$ ,  $a^* = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x - ip)$  (им соответствуют операторы уничтожения и рождения квантов).

а) Найти скобку Пуассона  $\{a, a^*\}$ . Выразить через  $a$  и  $a^*$  функцию Гамильтона гармонического осциллятора  $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ .

б) Повторить вычисления для величин  $ae^{i\omega t}$ ,  $a^*e^{-i\omega t}$ .

9.28. Показать, что:

а)  $\{\varphi, M_z\} = 0$ , где  $\varphi$  – любая скалярная функция радиус-вектора и импульса частицы;

б)  $\{\mathbf{f}, M_z\} = [\mathbf{e}_z \mathbf{f}]$ , где  $\mathbf{f}$  – векторная функция радиус-вектора и импульса частицы, а  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси Oz.

9.29. Вычислить скобки Пуассона  $\{\mathbf{f}, (\mathbf{aM})\}$  и  $\{(\mathbf{fM}), (\mathbf{gM})\}$ , где  $\mathbf{a} = \mathbf{const}$ , а  $\mathbf{f}$  – векторная функция радиус-вектора и импульса частицы.

9.30. Для частицы в центральном поле  $U = -\alpha/r$  существует интеграл движения  $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \alpha\mathbf{r}/r$  (см. задачу 3.2).

а) Вычислить скобки Пуассона  $\{A_i, x_j\}$ ,  $\{A_i, p_j\}$ ,  $\{A_i, M_j\}$ ,  $\{A_i, A_j\}$ .

б) В случае финитного движения ( $H = E < 0$ ) для векторов  $\mathbf{J}_{1,2} = [\mathbf{M} \pm (m/2|E|)^{1/2}\mathbf{A}]$  вычислить скобки Пуассона  $\{H, \mathbf{J}_{1,2}\}$ ,  $\{J_{1i}, J_{2j}\}$ ,  $\{J_{1i}, J_{1j}\}$ ,  $\{J_{2i}, J_{2j}\}$  и сравнить их со скобками Пуассона для компонент момента импульса  $\mathbf{M}$  (задача 9.21б). Выразить гамильтониан задачи  $H$  через  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$ .

## Раздел 10. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби

### Канонические преобразования

Особую ценность гамильтонову формализму в классической механике придает наличие в ней более широкого (по сравнению, например, с лагранжевым формализмом) класса преобразований, относительно которого уравнения Гамильтона ковариантны.

Задание преобразований в гамильтоновом формализме означает задание правил, по которым меняются обобщенные переменные (импульсы и координаты). Запишем пока произвольное преобразование от "старых" переменных к "новым":  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . В общем случае, это  $2n$  соотношений

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (10.1)$$

Конечно преобразования (10.1) можно записать и в обратном порядке  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , т.е. в виде выражений "старых" переменных через "новые". Главное – это то, что среди всех преобразований типа (10.1) существует специальный класс так называемых **канонических преобразований**, которые не только сохраняют вид уравнений движения,<sup>1</sup> но и обладают целым рядом других полезных свойств.

**Канонические преобразования** порождаются так называемыми *производящими функциями*, зависящими от  $2n$  независимых переменных ( $n$  "старых" и  $n$  "новых") и времени  $t$ , причем *время* выступает в роли *параметра*. Таким образом, всего существует четыре различных типа производящих функций:

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \quad F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \quad F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t),$$

<sup>1</sup> При этом уравнения Гамильтона (9.2) не меняют своего вида в новых переменных, хотя сам гамильтониан в новых переменных имеет другой вид  $H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  (см. ниже (10.8)).

зная которые можно получить явные соотношения связи старых и новых переменных типа (10.1), т.е. *найти канонические преобразования*.

Правила, с помощью которых это делается, можно найти из соотношений следующего вида

$$dF_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \sum_{j=1}^n (p_j dq_j - P_j dQ_j) + [H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt. \quad (10.2)$$

Здесь независимыми являются "старые" и "новые" координаты:  $\{q_j\}$  и  $\{Q_j\}$  соответственно. Для перехода к другой функции, например, к  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , где независимыми являются "старые" координаты  $\{q_j\}$  и "новые" импульсы  $\{P_j\}$ , подставим в (10.2) соотношение

$$P_j dQ_j = d(P_j Q_j) - Q_j dP_j \quad (10.2a)$$

и получим

$$\begin{aligned} dF_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= d \left[ F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \sum_{j=1}^n Q_j P_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n (p_j dq_j + Q_j dP_j) + [H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Из (10.2) сразу следуют правила, с помощью которых по производящей функции первого типа  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  можно восстановить канонические преобразования:

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t): \quad p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}. \quad (10.4)$$

Из (10.3) следует

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t): \quad p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}. \quad (10.5)$$

Аналогично можно получить

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t): \quad q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}. \quad (10.6)$$

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t): \quad q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}. \quad (10.7)$$

Каждая из этих записей (10.4)–(10.7) представляет собой систему  $2n$  алгебраических уравнений с  $2n$  неизвестными  $Q_j$  и  $P_j$ , разрешая которые можно

по известной производящей функции  $F_m(\dots, \dots, t)$  ( $m = 1 \div 4$ ) получить соотношения типа (10.1). Более того, во всех перечисленных случаях гамильтониан в новых переменных  $H'$  записывается следующим образом

$$H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \left( H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_m}{\partial t} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}} \quad (m = 1 \div 4) \quad (10.8)$$

(см. ниже примеры решения задач).

Естественно, если преобразование (10.1):  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  – каноническое, то обратное преобразование  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  – также каноническое.

Важным свойством скобок Пуассона является их инвариантность относительно канонических преобразований.

Пусть  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  и  $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  – некоторые функции "старых" переменных  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $t$ . Эти же функции в "новых" переменных запишутся как  $f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = f(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t)$  и  $g(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = g(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t)$  соответственно. Таким образом, если преобразование  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  – каноническое, то выполняется равенство

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{f, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}. \quad (10.9)$$

Здесь индексы означают, что скобки Пуассона (9.9) слева вычисляются по "старым" переменным  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , а справа – по "новым"  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{P}$ .

Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (10.1) является выполнение следующих равенств, связанных с фундаментальными скобками Пуассона

$$\{Q_j, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0, \quad \{P_j, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0, \quad \{P_j, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \delta_{jk}. \quad (10.10)$$

Можно восстановить вид производящей функции, если известны преобразования типа (10.1) и доказана их каноничность. Для решения этой своеобразной "обратной задачи" нужно проинтегрировать систему уравнений с частными производными (10.4)–(10.7). Этим же приемом можно воспользоваться и для нахождения производящей функции одного типа  $F_k$ , если задана производящая функция другого типа  $F_j$ : сначала по  $F_j$  находят канонические преобразования (10.1), а затем по ним восстанавливается  $F_k$ .

Хотя для решения последней задачи ( $F_j \rightarrow F_k$ ) более эффективен способ, основанный на соотношениях типа (10.2)–(10.3). Так, например, из (10.3) сразу следует, что

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \left( F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) + \sum_{j=1}^n Q_j P_j \right) \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)},$$

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \left( F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \sum_{j=1}^n Q_j P_j \right) \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}.$$

Аналогично можно найти и другие переходы. Например, для перехода от  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  к  $F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$  нужно перейти от независимых "старых" и "новых" координаты ( $\{q_j\}$  и  $\{Q_j\}$ ) к независимым "старым" и "новым" импульсам ( $\{p_j\}$  и  $\{P_j\}$ ), т.е.

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = \left( F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) - \sum_{j=1}^n q_j p_j + \sum_{j=1}^n Q_j P_j \right) \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)}}.$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Найти канонические преобразования, порождаемые следующими производящими функциями:

$$a) F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_j q_j P_j; \quad б) F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_j f_j(\mathbf{q}, t) P_j; \quad в) F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \sum_j q_j Q_j.$$

*Решение.* а) Воспользуемся соотношениями (10.5), предварительно поменяв индекс суммирования с  $j$  на  $k$ ,

$$P_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n q_k P_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial q_j} P_k = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} P_k = P_j,$$

аналогично

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial P_k}{\partial P_j} = q_j.$$

Таким образом, это тождественное преобразование:  $P_j = p_j$ ,  $Q_j = q_j$ .

б) Опять поменяем индекс суммирования с  $j$  на  $k$ , чтобы не возникло путаницы при вычислениях, и воспользуемся (10.5)

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{q}, t) \frac{\partial P_k}{\partial P_j} = f_j(\mathbf{q}, t); \quad p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} P_k.$$

Первое соотношение описывает точечное преобразование координат, относительно которого ковариантны уравнения Лагранжа, и это является

лишь частным случаем канонических преобразований в гамильтоновом формализме. Это показывает более общий характер последнего.

в) Воспользуемся соотношениями (10.4) (опять под знаком суммы  $j \rightarrow k$ )

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial q_j} Q_k = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} Q_k = Q_j, \text{ аналогично } P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -\sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial Q_k}{\partial Q_j} = -q_j.$$

Данное преобразование взаимозаменяет обобщенные импульсы и координаты:  $P_j = -q_j$ ,  $Q_j = p_j$ . Это показывает, что в гамильтоновом методе деление переменных на импульсы и координаты носит достаточно условный характер.

**Задача 2.** Для гармонического осциллятора найти канонические преобразования, порождаемые производящей функцией  $F_1 = -(m/2)\omega_0 q^2 \operatorname{tg} Q$ , и новый гамильтониан  $H'(Q,P)$ .

*Решение.* Воспользуемся соотношениями (10.4)

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -m\omega_0 q \operatorname{tg} Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = m\omega_0 q^2 / (2\cos^2 Q).$$

Отсюда найдем выражения "старых" переменных через "новые"

$$q = \sqrt{2P / m\omega_0} \cos Q, \quad p = -\sqrt{2m\omega_0 P} \sin Q;$$

это нам потребуется для нахождения вида гамильтониана в "новых" переменных (10.8). Гамильтониан гармонического осциллятора (см. типичную задачу 1б раздела 9) –  $H(q,p) = p^2/2m + m\omega_0^2 q^2/2$ . Подставим найденные преобразования  $q(Q,P)$  и  $p(Q,P)$  и гамильтониан в (10.8), тогда получим

$$H'(Q,P) = \left( H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{q} = \mathbf{q}(Q,P,t) \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(Q,P,t)}} = \omega_0 P.$$

Интересно, что задача о законе движения гармонического осциллятора в новых переменных решается "на пальцах". Новый гамильтониан не зависит от времени, следовательно,  $H = E = \text{const}$ ,  $Q$  – также циклическая координата, следовательно,  $P = P_0 = E/\omega_0$  – интеграл движения, константа. Из уравнений Гамильтона сразу следует, что

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega_0, \text{ и } Q = \omega_0 t + Q_0,$$

где  $Q_0$  определяется начальными условиями, а найденные канонические

преобразования дают закон движения в "старых" переменных

$$q = \sqrt{2E / m\omega_0^2} \cos(\omega_0 t + Q_0); \quad p = -\sqrt{2mE} \sin(\omega_0 t + Q_0).$$

Здесь полная энергия  $E$  также определена начальными условиями.

## Задачи

### Обязательные задачи

10.1. По производящей функции  $F_m$  найти каноническое преобразование:

$$а) F_1 = \sum_{j=1}^n f_j(t) q_j^n Q_j^m; \quad б) F_1 = \sum_{j=1}^n \sin(q_j t + Q_j); \quad в) F_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i Q_j;$$

$$г) F_1 = \sum_{j=1}^n [\ln(q_j t) - t] Q_j^m; \quad д) F_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \ln(q_i t) \exp(b_j P_j); \quad е) F_2 = \sum_{j=1}^n q_j \ln P_j;$$

$$ж) F_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cos(q_i t) \sin(P_j t); \quad з) F_3 = \sum_{j=1}^n \operatorname{tg}(Q_j t + p_j); \quad у) F_3 = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(t) p_i Q_j;$$

$$к) F_3 = \sum_{j=1}^n \sin(p_j t) \exp(a_j Q_j t); \quad л) F_4 = \sum_{j=1}^n f_j(t) p_j^n P_j^m;$$

$$м) F_4 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \ln(p_i t) \exp(P_j t); \quad н) F_4 = \sum_{j=1}^n (p_j + P_{j+1})^2, \text{ где } P_{n+1} = P_n.$$

10.2. Установить каноничность следующих преобразований

$$а) Q = pe^q, P = q + e^{-q} + \ln p; \quad б) Q = qe^{-p} + p, P = e^p + \ln q.$$

10.3. Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией  $F_1(q, Q, t) = (m/2)\omega(t)q^2 \operatorname{ctg} Q$  и записать уравнения движения для "гармонического осциллятора" с частотой  $\omega(t)$  в новых переменных  $Q$  и  $P$ .

$$\left[ \begin{array}{l} q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \\ \dot{Q} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2Q, \quad \dot{P} = -P \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2Q \end{array} \right]$$

10.4. По производящей функции  $F_2(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = (\mathbf{rP}) - (\mathbf{uP})t + m(\mathbf{ru})$  ( $\mathbf{u} = \text{const}$ ) найти каноническое преобразование  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$  и новую функцию Гамильтона для свободной частицы.

- 10.5. Каким условиям должны удовлетворять матрицы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , чтобы преобразование вида  $p_i = \sum_j u_{ij} P_j + \sum_j v_{ij} Q_j$ ,  $q_i = \sum_j v_{ij} P_j + \sum_j u_{ij} Q_j$  было каноническим?

$$[\mathbf{u}\mathbf{u}^T - \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{E}, \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}, \text{ здесь } \mathbf{E} - \text{единичная матрица}]$$

- 10.6. Дана производящая функция  $F_2(q, P) = q^2 e^P$  найти функцию, приводящую к тому же самому каноническому преобразованию:

$$a) F_1(q, Q); \quad б) F_3(p, Q); \quad в) F_4(p, P).$$

- 10.7. Для переходов от "старых" цилиндрических и сферических координат к "новым" декартовым

$$a) x = f_1(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad y = f_2(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi, \quad z = f_3(z) = z;$$

$$б) x = f_1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = f_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = f_3(r, \theta) = r \cos \theta$$

найти соответствующие формулы  $P_x = P_x(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3, t), \dots$  — преобразования обобщенных импульсов. Установить каноничность преобразований и найти их производящие функции  $F_2$  и  $F_1$ .

$$\left[ \begin{array}{l} a) P_x = p_\rho \cos \varphi - \frac{p_\varphi}{\rho} \sin \varphi, \quad P_y = p_\rho \sin \varphi + \frac{p_\varphi}{\rho} \cos \varphi, \quad P_z = p_z; \\ F_1 = 0; \quad F_2 = \sum_j f_j(\rho, \varphi, z) P_j \end{array} \right]$$

- 10.8. Какому условию должна удовлетворять функция  $f(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ , чтобы ее можно было использовать в качестве производящей функции канонического преобразования  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ . Проверить  $f = P \ln q$ ,  $f = P^2 + q^2$ ,  $f = (P + q)^2$ .

$$[\det(|\partial^2 f / \partial q_j \partial P_k|) \neq 0]$$

### Задачи средней трудности

- 10.9. Показать, что закон движения свободной частицы массы  $m$  в однородном поле тяжести можно рассматривать как каноническое преобразование  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$ . Найти производящую функцию этого преобразования и функцию Гамильтона частицы в новых переменных  $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$ .

$$[F_2 = (\mathbf{p}_0 \mathbf{r}) - mgtz + gt^2 p_{z0}/2 - p_0^2 t/2m, \quad H' = 0]$$



10.10. Выяснить смысл канонических преобразований, задаваемых производящими функциями:

$$a) F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{rP}) + (\delta\mathbf{aP}), \quad б) F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{rP}) + (\delta\phi[\mathbf{rP}]).$$

[a] сдвиг на вектор  $\delta\mathbf{a}$ , б) поворот на угол  $\delta\phi$

10.11. Показать, что уравнения Гамильтона сохраняют свой вид относительно канонических преобразований.

10.12. Прямым вычислением показать, что скобки Пуассона  $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ ,  $\{p_i, p_j\} = 0$ ,  $\{q_i, q_j\} = 0$  инвариантны по отношению к каноническим преобразованиям.

### Задачи повышенной трудности

10.13. Для задачи 9.27 показать, что

$$a) Q = a, P = ia^*$$

$$б) Q = ae^{i\omega t}, P = ia^*e^{-i\omega t}$$

являются каноническими переменными. Найти гамильтониан гармонического осциллятора в новых переменных  $H'(Q, P, t)$ .

10.14. Показать, что преобразование

$$x = (m\omega)^{-1/2}[(2P_1)^{1/2}\sin Q_1 + P_2], \quad p_x = (m\omega)^{1/2}[(2P_1)^{1/2}\cos Q_1 - Q_2]/2,$$

$$y = (m\omega)^{-1/2}[(2P_1)^{1/2}\cos Q_1 + Q_2], \quad p_y = (m\omega)^{1/2}[-(2P_1)^{1/2}\sin Q_1 + P_2]/2$$

является каноническим. Найти уравнения Гамильтона частицы в магнитном поле  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ , заданном векторным потенциалом  $\mathbf{A}(-Hy/2, Hx/2, 0)$  в новых переменных. Здесь  $\omega = eH/mc$ .

## Уравнение Гамильтона-Якоби

До этого мы имели дело с уравнениями движения в форме систем дифференциальных уравнений с обычными производными по времени от искомым величин. Интегрирование этих уравнений (уравнений Ньютона, уравнений Лагранжа I и II рода, уравнений Гамильтона) вкпе с использованием начальных условий сразу приводило к законам движения механической системы.

Уравнение Гамильтона-Якоби представляет собой одно дифференциальное уравнение в частных производных на производящую функцию  $S$ . После решения этого уравнения и нахождения  $S$  – *полного интеграла* уравнения Гамильтона-Якоби, законы движения механической системы  $q_j = q_j(t)$  находятся из решения системы алгебраических уравнений. По физическому смыслу функция  $S$  является действием.

*Уравнение Гамильтона-Якоби* выглядит следующим образом

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (10.11)$$

а его полный интеграл

$$S = f(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + \alpha_{n+1} \quad (10.12)$$

зависит от  $n$  обобщенных координат, времени и  $(n + 1)$  константы. Одна из констант,  $\alpha_{n+1}$ , – аддитивна, поэтому несущественна, и можно записать, что

$$S = f(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \quad (10.13)$$

### Основные свойства уравнения Гамильтона-Якоби

#### (a) Консервативность системы

Если гамильтониан не зависит явным образом от времени, т.е.  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E = \text{const}$  – *интеграл движения*, тогда полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби  $S$  записывается как

$$S = S_0(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - Et, \quad (10.14)$$

где  $E$  – обобщенная энергия системы,  $S_0(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – независящее от времени укороченное действие системы. Заметим, что после этой под-

становки одна из констант  $\alpha_j$  равна  $E$ ! Упрощенное уравнение на укороченное (сокращенное) действие  $S_0$  имеет следующий вид

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n}) = E. \quad (10.15)$$

(б) Цикличность координат

Если гамильтониан не зависит явным образом от какой-либо координаты  $q_k$ , т.е.  $H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ , и, следовательно, соответствующий обобщенный импульс  $p_k$  – *интеграл движения*, тогда полный интеграл  $S$  записывается как

$$S = \tilde{S}_k(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, t) + \alpha_k q_k, \quad (10.16)$$

где константа  $\alpha_k$  имеет смысл сохраняющегося обобщенного импульса  $p_k$ , сопряженного циклической координате  $q_k$ . Упрощенное уравнение на сокращенное действие  $\tilde{S}_k$  имеет следующий вид

$$H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial q_{k-1}}, \alpha_k, \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial q_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial q_n}) + \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial t} = 0. \quad (10.17)$$

Если циклических координат несколько ( $k$  принимает несколько значений), то они появляются в полном интеграле  $S$  в виде линейной комбинации

$$S = \tilde{S}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, t) + \sum_k \alpha_k q_k. \quad (10.18)$$

Здесь и ниже знак "~" над координатами и константами означает "все, кроме  $k$ -тых". Все соответствующие производные в уравнении на сокращенное действие  $\tilde{S}$  заменяются на константы, как в (10.16).

(в) Разделение переменных

Это самый общий метод, как частное он включает в себя и (а), и (б). Пусть в уравнение Гамильтона-Якоби (10.11)

$$\Phi(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, \frac{\partial S}{\partial t}, t) = H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (10.19)$$

какая-либо переменная и соответствующая частная производная (например,  $q_m$  и  $\partial S / \partial q_m$ ) входят в виде подфункции (комбинации)<sup>1</sup>  $\phi(q_m, \partial S / \partial q_m)$ , не

<sup>1</sup> См. также разобранную задачу 5 из раздела 9 (скобки Пуассона).

содержащей других переменных  $\tilde{\mathbf{q}}$  (и времени) и производных по ним (условно запишем эти производные как  $\partial S/\partial\tilde{\mathbf{q}}$ ). Т.е.

$$\Phi = \Phi\left(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{\partial S}{\partial\tilde{\mathbf{q}}}, \frac{\partial S}{\partial t}, t; \phi\left(q_m, \frac{\partial S}{\partial q_m}\right)\right) = 0. \quad (10.20)$$

Тогда эта функция  $\phi\left(q_m, \frac{\partial S}{\partial q_m}\right)$  является *интегралом движения*, а полный интеграл  $S$  запишется в виде суммы

$$S(\mathbf{q}, t) = \tilde{S}_m(\tilde{\mathbf{q}}, t) + S_m(q_m). \quad (10.21)$$

В этом случае уравнение (10.19) распадется на два

$$\begin{cases} \phi\left(q_m, \frac{dS_m}{dq_m}\right) = C_m = \text{const}, \\ \Phi\left(\tilde{\mathbf{q}}, \frac{\partial\tilde{S}_m}{\partial\tilde{\mathbf{q}}}, \frac{\partial\tilde{S}_m}{\partial t}, t; C_m\right) = 0, \end{cases} \quad (10.22)$$

первое из которых является простым дифференциальным уравнением первого порядка относительно  $S_m(q_m)$ , а независящая от  $q_m$  часть определяется вторым *упрощенным* уравнением в частных производных на *сокращенное* действие  $\tilde{S}_m$ , порядок которого на единицу меньше по сравнению с исходным уравнением Гамильтона-Якоби (10.20).

Как и в предыдущем пункте (б), процедура (10.21)–(10.22), может быть проведена несколько раз.

**Замечание:** Естественно, что все эти свойства (а), (б), (в) могут быть применимы одновременно, но общее число независимых констант  $(E, \alpha_k, C_m)$ , найденных с помощью этих свойств, не должно превышать числа степеней свободы системы  $n$ .

### Закон движения в формализме Гамильтона-Якоби

После решения уравнения Гамильтона-Якоби, его полный интеграл  $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  записывается в виде (10.13), где в качестве констант  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  выступают как константы  $(E, \alpha_k, C_m)$ , найденные с помощью

свойств (а), (б), (в), так и неаддитивные константы, появившиеся при непосредственном интегрировании *упрощенного* дифференциального уравнения на *сокращенное* действие  $S_0$  или  $\tilde{S}$ .

По физическому смыслу функция  $S$  является производящей функцией канонического преобразования, связывающего текущие координаты  $q_j$  и импульсы  $p_j$  в момент времени  $t$  с их начальными значениями в момент времени  $t_0$  (которые, в формализме уравнений Гамильтона-Якоби, как правило, и являются константами  $\beta_j$  и  $\alpha_j$ , соответственно). Для нахождения законов движения  $q_j = q_j(t)$  и  $p_j = p_j(t)$  воспользуемся свойствами полной функции действия  $S$  как производящей функции, а именно:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (10.23)$$

Здесь  $\beta_j$  – константы. Первый набор соотношений ("производная по константе дает константу") дает алгебраические уравнения, решение которых

$$q_j = q_j(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (10.24)$$

и есть искомый закон движения  $q_j = q_j(t)$ . Общее число констант  $\alpha_j, \beta_j$  как раз достаточно, чтобы удовлетворить начальным условиям.

#### Алгоритм решения задач в формализме Гамильтона-Якоби

1. **Находится гамильтониан** механической системы  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ .
2. **Записывается уравнение Гамильтона-Якоби** (10.11) на функцию действия  $S$ . Здесь в функции Гамильтона все обобщенные *импульсы* заменены *частными производными* по соответствующим обобщенным *координатам*:  $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ .
3. **Упрощение уравнения Гамильтона-Якоби** в соответствие со всеми возможными *интегралами движения* (свойства (а)–(в)).
4. **Решение** получающегося упрощенного уравнения Гамильтона-Якоби на сокращенную функцию действия ( $S_0$  или  $\tilde{S}$ ). Нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби  $S$ .
5. **"Производная по константе дает константу"** – использование (10.23) и начальных условий для нахождения **законов движения**.

## Примеры решения задач

**Задача 3.** Записать уравнение Гамильтона-Якоби для простейших механических систем:

- а) свободной частицы;
- б) гармонического осциллятора;
- в) частицы в центральном поле.

*Решение.* Функции Гамильтона этих систем найдены в задаче 1 раздела 9.

а) Функция Гамильтона свободной частицы (число степеней свободы  $n=3$ )

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

Исходное уравнение Гамильтона-Якоби для полной функции действия  $S$  –

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Пользуемся цикличностью координат  $y, z$  и времени  $t$ , получаем связь

$$S = \tilde{S}(x) + \alpha_2 y + \alpha_3 z - Et$$

и упрощенное уравнение для сокращенного действия  $\tilde{S}(x)$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{d\tilde{S}}{dx} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2m} = E.$$

б) Функция Гамильтона гармонического осциллятора ( $n=1$ )

$$H(x, p) = p^2/2m + m\omega_0^2 x^2/2$$

Исходное уравнение Гамильтона-Якоби для полной функции действия  $S$  –

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Пользуемся консервативностью системы (цикличностью времени  $t$ ) и переходим к укороченному действию  $S_0$

$$S = S_0(x) - Et.$$

Для  $S_0$  получаем упрощенное уравнение

$$\left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2 = 2mE - m^2\omega_0^2 x^2.$$

в) Функция Гамильтона частицы в центральном поле ( $n = 2$ )

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho).$$

Исходное уравнение Гамильтона-Якоби для полной функции действия  $S$  –

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2m\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + U(\rho) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Пользуемся цикличностью  $\varphi$  и  $t$ , выражаем полный интеграл  $S$  через сокращенное действие  $\tilde{S}$

$$S = \tilde{S}(\rho) + \alpha_\varphi \varphi - Et.$$

Упрощенное уравнение для  $\tilde{S}(\rho)$  выглядит следующим образом

$$\left( \frac{d\tilde{S}}{d\rho} \right)^2 = 2mE - 2mU(\rho) - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2}.$$

**Задача 4.** Найти закон движения тела массы  $m$  брошенного с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\varphi$  к горизонту в поле силы тяжести.

*Замечание:* Перед решением этой известной школьной задачи с помощью уравнения Гамильтона-Якоби вспомните ее решение "обычным" способом с помощью второго закона Ньютона.

*Решение.* Введем декартовую систему координат. Для описания движения тела достаточно 2 координаты  $x$  и  $y$ . Ось  $y$  направим *вертикально* вверх, ось  $x$  – горизонтально. Начальные условия:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{x0} = v_0 \cos \varphi$ ,  $v_{y0} = v_0 \sin \varphi$ . Далее действуем по алгоритму.

1. **Гамильтониан.** Задача имеет две степени свободы:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ . Кинетическая энергия –  $T = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = T^{(2)}$  – квадратична по скоростям, потенциальная –  $U = mgy$  – имеет обычный вид. Следовательно, функция Лагранжа

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T - U = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$

Обобщенные импульсы (в данном случае они совпадают с обычными!)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

Начальные условия в гамильтоновом формализме при  $t = t_0 = 0$

$$x = x_0 = 0, \quad y = y_0 = 0; \quad p_x = p_{x0} = mv_0 \cos \varphi, \quad p_y = p_{y0} = mv_0 \sin \varphi. \quad (10.25)$$

Запишем функцию Гамильтона

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = T^{(2)} + U = p_x^2 / 2m + p_y^2 / 2m + mgy.$$

2. **Уравнение Гамильтона-Якоби** для полной функции действия  $S(x, y, t)$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

3. **Упрощение (интегралы движения).** Функция Гамильтона не зависит от времени  $t$  и от  $x$ . Следовательно, сохраняются обобщенная энергия  $H$  (свойство  $a$ ) и импульс  $p_x$  (свойство  $b$ ). Для их определения воспользуемся начальными условиями (10.25)

$$H = p_x^2 / 2m + p_y^2 / 2m + mgy = p_{x0}^2 / 2m + p_{y0}^2 / 2m = mv_0^2 / 2 = E, \quad (10.26)$$

$$p_x = p_{x0} = mv_0 \cos \varphi = \alpha_x. \quad (10.27)$$

Полное действие  $S(x, y, t)$  в соответствии со свойствами (10.14) и (10.16) имеет вид

$$S = \tilde{S}(y, \alpha_x, E) + \alpha_x x - Et, \quad (10.28)$$

а упрощенное уравнение для сокращенного действия  $\tilde{S}(q_2)$  –

$$\frac{\alpha_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} \right)^2 + mgy = E. \quad (10.29)$$

4. **Решение** уравнения Гамильтона-Якоби. Поскольку  $\tilde{S}$  функция только одной переменной  $y$ , то, заменив частную производную в (10.29) обычной производной  $d\tilde{S}/dy$  и разрешив относительно нее уравнение (10.29), имеем

$$\frac{d\tilde{S}}{dy} = \sqrt{2mE - 2m^2 gy - \alpha_x^2}.$$

Находим решение, в котором опускаем аддитивную константу

$$\tilde{S} = - \frac{(2mE - 2m^2 gy - \alpha_x^2)^{3/2}}{3m^2 g}. \quad (10.30)$$

Подставляя (10.30) в (10.28), получаем полный интеграл уравнения Га-



мильтона-Якоби – функцию, зависящую от 2 координат ( $x$  и  $y$ ), 2 констант ( $\alpha_x$  и  $E$ ) и времени  $t$

$$S(x, y, \alpha_x, E, t) = -\frac{(2mE - 2m^2gy - \alpha_x^2)^{3/2}}{3m^2g} + \alpha_x x - Et. \quad (10.31)$$

5. **Закон движения – "производная по константе дает константу"**. Подставляем найденный полный интеграл (10.31) в первые из соотношений (10.23) и получаем

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = \frac{\alpha_x (2mE - 2m^2gy - \alpha_x^2)^{1/2}}{m^2g} + x = \beta_1, \quad (10.32a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{(2mE - 2m^2gy - \alpha_x^2)^{1/2}}{mg} - t = \beta_2. \quad (10.32б)$$

Константы  $\alpha_x = \alpha_1$  и  $E = \alpha_2$  определены выше в (10.26), (10.27). Используем начальные условия для нахождения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , для этого подставим в (10.32)  $t = t_0 = 0$  и применим (10.25) – (10.27)

$$\beta_1 = \frac{\alpha_x (2mE - \alpha_x^2)^{1/2}}{m^2g} = \frac{v_0^2 \cos \varphi \sin \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g}, \quad (10.33)$$

$$\beta_2 = -\frac{(2mE - \alpha_x^2)^{1/2}}{mg} = -\frac{v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Теперь все константы определены, решаем систему алгебраических уравнений (10.32) относительно неизвестных  $x$  и  $y$

$$\frac{\alpha_x}{m} \sqrt{g^2 \beta_2^2 - 2gy} + gx = g\beta_1, \quad (10.34)$$

$$\sqrt{g^2 \beta_2^2 - 2gy} + gt = g\beta_2.$$

Из второго уравнения определяем значение  $\sqrt{g^2 \beta_2^2 - 2gy}$ , которое подставляем в первое уравнение, и находим

$$x = \beta_2 - (\alpha_x/m)(\beta_1 - t) = \alpha_x t/m = v_0 t \cos \varphi. \quad (10.35)$$

Из второго уравнения (10.34) находим  $y$

$$g^2\beta_2^2 - 2gy = g^2\beta_2^2 - 2g^2\beta_2t + g^2t^2,$$

$$y = g\beta_2t - gt^2/2 = v_0t\sin\varphi - gt^2/2. \quad (10.36)$$

Естественно, что полученный закон движения совпал со "школьными ответом": равномерное движение по горизонтали со скоростью  $v_x = v_0\cos\varphi$  и равнозамедленное движение по вертикали с начальной скоростью  $v_y = v_0\sin\varphi$  и ускорением свободного падения  $g$ . Исключив из (10.35), (10.36) время  $t$ , можно получить известное выражение для траектории – параболу.

## Задачи

### Обязательные задачи

- 10.15. Найти действие одномерного гармонического осциллятора, проходящего через точки  $x_1 = x(t_1)$  и  $x_2 = x(t_2)$ .
- 10.16. Записать уравнение Гамильтона-Якоби для механических систем, описываемых функциями Лагранжа (задачи 9.4а-д). Упростить его, использовать при этом все возможные интегралы движения.
- 10.17. Записать уравнение Гамильтона-Якоби для систем, описываемых данными функциями Гамильтона (задача 9.5а-ж). Упростить его, использовать при этом все возможные интегралы движения.
- 10.18. Записать уравнения Гамильтона-Якоби для систем, описываемых в задачах а) 9.9; б) 9.10; в) 9.11; г) 9.12. Упростить их, используя при этом все возможные интегралы движения.
- 10.19. Составить уравнение Гамильтона-Якоби для линейного гармонического осциллятора. Найти его полный интеграл и закон движения.
- 10.20. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби материальной точки массой  $m$ , движущейся в однородном поле тяжести.

$$\left[ S = -Et + \alpha_1x + \alpha_2y - \frac{1}{3m^2g} \left[ 2m(E - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \right]^{3/2} \right]$$

- 10.21. Составить уравнения Гамильтона-Якоби для механических систем, описанных в задачах:

- а) Задача 4, решенная в разделе 5 (Уравнения Лагранжа);  
 б) 5.9; в) 5.11; г) 5.12; д) 5.14; е) 5.15; ж) 5.16; з) 5.19; и) 5.23.  
 Упростить их, используя все возможные интегралы движения.

Задачи средней трудности

- 10.22. Вычислить действие для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$ , движущейся в однородном магнитном поле напряженности  $H$  ( $\omega = eH/mc$ ).

$$\left[ S = \frac{m}{2} \left\{ \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \frac{\omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} \left[ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] + \omega(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right\} \right]$$

- 10.23. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для электрона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

$$\left[ S = -Et + \alpha_1 x + \alpha_2 z + \int \left[ 2mE - \alpha_2^2 - \left( \alpha_1 - \frac{e}{c} Hy \right)^2 \right]^{1/2} dy, \quad \mathbf{A} = Hy \mathbf{e}_x \right]$$

- 10.24. Материальная точка массы  $m$  движется в поле центральной силы с потенциалом  $U(\rho) = -\alpha/\rho$ , где  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\alpha > 0$ . С использованием уравнения Гамильтона-Якоби найти траекторию движения точки.

- 10.25. Составить уравнения Гамильтона-Якоби для механических систем, описанных в задачах: а) 5.25; б) 5.27; в) 5.30; г) 5.33 д) 9.16.

Задачи повышенной трудности

- 10.26. Какому условию должен удовлетворять потенциал для того, чтобы уравнение Гамильтона-Якоби, описывающее движение частицы с массой  $m$ , допускало полное разделение переменных:

- а) в декартовых координатах, б) в цилиндрических координатах,  
 в) в сферических координатах.

- 10.27. Найти (в квадратурах) с помощью уравнения Гамильтона-Якоби за-

кон движения системы, гамильтониан которой  $H = \frac{p_1^2 + q_1^2}{p_2^2 + q_2^2}$ .

$$\left[ \begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 \sin(2t / \alpha_2^2 + \beta_1), & q_2 &= \alpha_2 \sin(\beta_2 - 2\alpha_1^2 t / \alpha_2^4) \\ p_1 &= \alpha_1 \cos(2t / \alpha_2^2 + \beta_1), & p_2 &= \alpha_2 \cos(\beta_2 - 2\alpha_1^2 t / \alpha_2^4) \end{aligned} \right]$$

10.28. Найти (в квадратурах) с помощью уравнения Гамильтона-Якоби за-

кон движения системы с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2} [p_1^2 (p_2^2 + q_2^2) + q_1^2]$ .

$$\left[ \begin{array}{l} q_1 = \alpha_1 \sin(\alpha_2 t + \beta_1), \quad q_2 = \alpha_2 \sin \left\{ \frac{\alpha_1^2}{2\alpha_2^3} t + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^3} \sin[2(\alpha_2 t + \beta_1)] + \beta_2 \right\} \\ p_1 = (\alpha_1/\alpha_2) \cos(\alpha_2 t + \beta_1), \quad p_2 = \alpha_2 \cos \left\{ \frac{\alpha_1^2}{2\alpha_2^3} t + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^3} \sin[2(\alpha_2 t + \beta_1)] + \beta_2 \right\} \end{array} \right]$$

10.29. Написать уравнение Гамильтона-Якоби в параболических координатах и показать, что полное разделение переменных будет иметь

место, если потенциал  $U = \frac{a(\xi) + b(\eta)}{\xi + \eta}$ , ( $a(\xi)$  и  $b(\eta)$  – произвольные

функции указанных переменных). Вычислить действие в этом случае. (Переход к параболическим координатам осуществляется по

формулам  $z = (\xi - \eta)/2$ ,  $\rho = \sqrt{\xi\eta}$ ,  $\varphi = \varphi$ , где  $0 < \xi, \eta < \infty$ .)

$$\left[ \begin{array}{l} S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \left[ \frac{mE}{2} + \frac{\beta - ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\varphi^2}{4\xi^2} \right]^{1/2} d\xi + \\ \quad + \int \left[ \frac{mE}{2} + \frac{\beta - mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\varphi^2}{4\eta^2} \right]^{1/2} d\eta, \\ \text{где } E, p_\varphi, \beta \text{ – произвольные константы} \end{array} \right]$$

## Приложение 1.

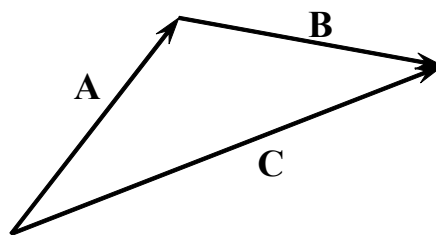
### Минимум сведений по математике, необходимых для решения задач по теоретической механике

#### Векторы и действия над ними

**Вектор** в трехмерном евклидовом пространстве (окружающем нас пространстве) определяется как направленный отрезок (говоря неформальным языком, это стрелка). Два направленных отрезка считаются одним и тем же вектором, если они могут быть совмещены параллельным переносом (т.е. после параллельного переноса стрелки должны полностью совпасть: по длине и по направлению). Также говорят, что при параллельном переносе вектор не меняется. Итак, вектор характеризуется *направлением* и *длиной* (длина также называют *величиной* или *модулем* вектора).<sup>1</sup>

По определению результатом произведения вектора  $\mathbf{A}$  на число  $s$  является вектор  $\mathbf{B}=s\mathbf{A}$ , длина которого в  $|s|$  раз больше, чем у вектора  $\mathbf{A}$  (т.е.  $B=|s|A$ ), а направление либо совпадает, либо противоположно вектору  $\mathbf{A}$  в зависимости от знака числа  $s$ : если  $s>0$ , направление  $s\mathbf{A}$  совпадает с направлением  $\mathbf{A}$ ; если  $s<0$ , направление  $s\mathbf{A}$  противоположно направлению  $\mathbf{A}$ .

Сумма двух векторов  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$  определяется правилом параллелограмма или треугольника (см. рисунок). Вычитание векторов  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  определяется как сложение векторов  $\mathbf{A}$  и  $-\mathbf{B}$ :



$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (\text{П1.1})$$

<sup>1</sup> В пособии векторы обозначаются жирными буквами без наклона (например,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  – векторы). Длины векторов обозначаются знаком модуля (например,  $|\mathbf{A}|$  – длина вектора  $\mathbf{A}$ ), однако следует иметь в виду, что для краткости длины векторов часто обозначаются теми же буквами, что и сами векторы, но нежирными, с наклоном, т.е.  $|\mathbf{A}| \equiv A$ . Например,  $\mathbf{b}$  – вектор,  $b$  – длина вектора  $\mathbf{b}$ .

Скалярное произведение  $(\mathbf{A} \mathbf{B})$  двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть число (скаляр), определяемое следующим образом

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) = A B \cos(\gamma), \quad (\text{П1.2})$$

где  $\gamma$  – угол между перемножаемыми векторами ( $0 \leq \gamma \leq \pi$ ). Для скалярного произведения также можно встретить обозначения  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ,  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ .

Два вектора взаимно ортогональны (перпендикулярны) друг другу тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \mathbf{A}), \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}) = A^2, \quad |(\mathbf{A} \mathbf{B})| \leq AB, \quad (\text{П1.3a})$$

$$((s\mathbf{A}) \mathbf{B}) = (\mathbf{A} (s\mathbf{B})) = s(\mathbf{A} \mathbf{B}), \quad (\text{П1.3б})$$

$$(\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C})) = (\mathbf{A} \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \mathbf{C}), \quad ((\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \mathbf{C}). \quad (\text{П1.3в})$$

Свойства (П1.3a) и (П1.3б) являются очевидными следствиями определения (П1.2). Свойство (П1.3в) было доказано в курсе аналитической геометрии.

Применяя (П1.3в) и (П1.3a) можно получить *теорему косинусов*

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - 2(\mathbf{A} \mathbf{B}) = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\gamma). \quad (\text{П1.3г})$$

Векторное произведение  $[\mathbf{A} \mathbf{B}]$  двух векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть вектор, направленный перпендикулярно к векторам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в ту же сторону, в которую происходит смещение *правого винта* при его закручивании в плоскость или выкручивании из плоскости векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , когда вращение винта соответствует *кратчайшему* повороту вектора  $\mathbf{A}$  к вектору  $\mathbf{B}$ ; *длина* же вектора  $[\mathbf{A} \mathbf{B}]$  определяется равенством

$$|[\mathbf{A} \mathbf{B}]| = A B \sin(\gamma), \quad (\text{П1.4})$$

где  $\gamma$  – угол между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  ( $0 \leq \gamma \leq \pi$ ) (т.е. *модуль* векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах). Другие обозначения для векторного произведения:  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ ,  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

Два вектора параллельны или антипараллельны друг другу тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю-вектору.

Свойства векторного произведения

$$[\mathbf{A} \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \mathbf{A}], \quad [\mathbf{A} \mathbf{A}] = \mathbf{0} \text{ (нуль-вектор)}, \quad (\text{П1.5a})$$

$$[(s\mathbf{A}) \mathbf{B}] = [\mathbf{A} (s\mathbf{B})] = s[\mathbf{A} \mathbf{B}], \quad (\text{П1.5б})$$

$$[\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C})] = [\mathbf{A} \mathbf{B}] + [\mathbf{A} \mathbf{C}], \quad [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C}] = [\mathbf{A} \mathbf{C}] + [\mathbf{B} \mathbf{C}]. \quad (\text{П1.5в})$$

Свойства (П1.5а) и (П1.5б) являются очевидными следствиями определения векторного произведения. Свойство (П1.5в) было доказано в курсе аналитической геометрии.

Базисом называется любая тройка векторов, не лежащих в одной плоскости. Декартовым базисом называется любая тройка векторов  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , обладающая следующими свойствами:

- а) векторы взаимно-перпендикулярны друг другу;
- б) длины всех векторов равны единицы (такие векторы называют *единичными* или *ортами*);
- в) тройка *правая* (то есть, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{e}_z$ , то кратчайший поворот вектора  $\mathbf{e}_x$  к вектору  $\mathbf{e}_y$  выглядит происходящим против часовой стрелки).

Векторы декартового базиса удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1, \quad (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y) = (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z) = 0, \quad (\text{П1.6а})$$

$$[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x] = [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_y] = [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z] = 0, \quad [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_x, \quad [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_y. \quad (\text{П1.6б})$$

Любой вектор можно однозначно разложить по любому базису. Разложение по декартову базису записывается так:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z, \quad (\text{П1.7})$$

где коэффициенты  $A_x, A_y, A_z$  называются декартовыми координатами вектора  $\mathbf{A}$  в базисе  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  (или проекциями вектора  $\mathbf{A}$  на базисные векторы  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ). Декартовы координаты  $A_x, A_y, A_z$  вектора  $\mathbf{A}$  можно записать в виде скалярных произведений:

$$A_x = (\mathbf{A} \mathbf{e}_x), \quad A_y = (\mathbf{A} \mathbf{e}_y), \quad A_z = (\mathbf{A} \mathbf{e}_z). \quad (\text{П1.8})$$

Скалярное произведение через декартовы координаты выражается как

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{П1.9})$$

Эту формулу можно получить, разложив векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  по декартовому базису  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , применив затем свойства (П1.3б) и (П1.3в) скалярного произведения и свойства (П1.6а) декартовых базисных векторов.

Длину (модуль или величину) вектора через декартовы координаты можно вычислить по формуле

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{A})} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (\text{П1.10})$$

Угол между двумя векторами может быть выражен через декартовы координаты векторов как

$$\cos(\gamma) = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{B})}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}. \quad (\text{П1.11})$$

Разложение векторного произведения по декартовому базису:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}\mathbf{B}] &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{e}_z = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Это выражение можно получить, разложив векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  по декартовому базису  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , применив затем свойства (П1.5б) и (П1.5в) векторного произведения и свойства (П1.6б) декартового базиса.

Смешанное (векторно-скалярное) произведение:

$$(\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]) = (\mathbf{B} [\mathbf{C}\mathbf{A}]) = (\mathbf{C} [\mathbf{A}\mathbf{B}]). \quad (\text{П1.13а})$$

Эти равенства выражают следующее свойство: в смешанном произведении *можно циклически переставлять векторы*, не меняя положение квадратных скобок, обозначающих векторное произведение. Также бывает удобно использовать свойство-следствие

$$(\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]) = ([\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{C}), \quad (\text{П1.13б})$$

которое словами формулируется так: в смешанном произведении *можно смещать квадратные скобки*, обозначающие векторное произведение, не меняя порядка следования векторов.

Двойное векторное произведение и его раскрытие:

$$[\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \quad (\text{правило "бац минус цаб"}), \quad (\text{П1.13в})$$

Используя (П1.13абв), можно получить следующие равенства

$$([\mathbf{A}\mathbf{B}][\mathbf{C}\mathbf{D}]) = (\mathbf{A}\mathbf{C})(\mathbf{B}\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\mathbf{D})(\mathbf{B}\mathbf{C}), \quad (\text{П1.13г})$$

$$([\mathbf{A}\mathbf{B}])^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{A}\mathbf{B})^2, \quad (\text{П1.13д})$$

$$\begin{aligned} [[\mathbf{A}\mathbf{B}][\mathbf{C}\mathbf{D}]] &= (\mathbf{A} [\mathbf{C}\mathbf{D}])\mathbf{B} - (\mathbf{B} [\mathbf{C}\mathbf{D}])\mathbf{A} = \\ &= ([\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{D})\mathbf{C} - ([\mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{C})\mathbf{D}. \end{aligned} \quad (\text{П1.13е})$$



Решение некоторых векторных уравнений

Система	Решение
$(\mathbf{A} \mathbf{X}) = p$ $[\mathbf{A} \mathbf{X}] = \mathbf{B}$	$\mathbf{X} = \mathbf{A} \frac{p}{A^2} + [\mathbf{B} \mathbf{A}] \frac{1}{A^2} \quad (\text{П1.14a})$
$(\mathbf{A} \mathbf{X}) = p$ $(\mathbf{B} \mathbf{X}) = q$ $(\mathbf{C} \mathbf{X}) = r$	$\mathbf{X} = \frac{p}{(\mathbf{A}[\mathbf{B} \mathbf{C}])} [\mathbf{B} \mathbf{C}] + \frac{q}{(\mathbf{B}[\mathbf{C} \mathbf{A}])} [\mathbf{C} \mathbf{A}] + \frac{r}{(\mathbf{C}[\mathbf{A} \mathbf{B}])} [\mathbf{A} \mathbf{B}] \quad (\text{П1.14б})$ <p>(Предполагается, что <math>(\mathbf{A} [\mathbf{B} \mathbf{C}]) \neq 0</math>)</p>

Дифференцирование векторов

Опыт показывает, что затруднение вызывает дифференцирование векторных функций по скалярному аргументу. Поэтому ниже приводим основные правила дифференцирования таких функций.

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \pm \mathbf{w}(t)] = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \pm \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}; \quad \frac{d}{dt} [a\mathbf{v}(t)] = a \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (a = \text{const});$$

$$\frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{df(t)}{dt} \mathbf{v}(t) + f(t) \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}(t) \mathbf{w}(t)) = \left( \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \mathbf{w}(t) \right) + \left( \mathbf{v}(t) \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}[f(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{df} \frac{df(t)}{dt}; \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \mathbf{w}(t)] = \left[ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \mathbf{w}(t) \right] + \left[ \mathbf{v}(t) \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right];$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) [\mathbf{v}(t) \mathbf{w}(t)]) = \\ & = \left( \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} [\mathbf{v}(t) \mathbf{w}(t)] \right) + \left( \mathbf{u}(t) \left[ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \mathbf{w}(t) \right] \right) + \left( \mathbf{u}(t) \left[ \mathbf{v}(t) \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right] \right) = \\ & = \left( \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} [\mathbf{v}(t) \mathbf{w}(t)] \right) + \left( \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} [\mathbf{w}(t) \mathbf{u}(t)] \right) + \left( \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} [\mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t)] \right). \end{aligned}$$

Дифференцирование ортов

- (а) Если орт не меняет свое направление в пространстве с течением времени, то его производная по времени равна нулю.
- (б) Если орт меняет свое направление в пространстве (поворачивается), то его производная по времени перпендикулярна ему самому, а по величине она равна угловой скорости поворота орта. Рассмотрим, напри-

мер, вектор скорости, который представим в виде  $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}(t)$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = [\boldsymbol{\omega}(t) \mathbf{e}(t)] \text{ и } \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{v(t)\mathbf{e}(t)\} = \dot{v}(t)\mathbf{e}(t) + [\boldsymbol{\omega}(t) \mathbf{v}(t)]. \quad (\text{П1.15})$$

Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  направлен (по правилу правого винта) вдоль оси поворота вектора скорости  $\mathbf{v}(t)$  и имеет длину, равную угловой скорости поворота вектора  $\mathbf{v}(t)$ . Если вектор скорости не изменяется по длине, то вектора скорости и ускорения перпендикулярны друг другу.

Диагонализация симметричных матриц и соответственно невырожденных симметрических квадратичных форм сводится к следующим операциям:

1. Нахождения собственных значений исходной матрицы соответствующего порядка путем решения характеристического уравнения.
2. Нахождение ортонормированных собственных векторов матрицы для каждого вычисленного собственного значения.
3. Переход от начальных базисных векторов к найденным собственным векторам исходной матрицы, задающей квадратичную форму, приводит ее к диагональному виду.

## Интегрирование элементарных функций

Стандартные методы замены переменной, интегрирование по частям и табличные интегралы от элементарных функций здесь не приводятся. В теоретической механике часто встречаются интегралы от дробно-рациональных выражений и интегралы, содержащие корень от квадратного трехчлена. Интегралы первого типа после выделения корней полинома, соответствующего знаменателю сводятся к стандартным интегралам вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int \frac{Mx+N}{(Ax^2+Bx+C)^p}.$$

Рационализация подынтегрального выражения в интегралах подобного типа  $\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$  осуществляется с помощью одной из следующих трех подстановок, определяемых в математике как *подстановки Эйлера*:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bx+cx^2} &= xt \pm \sqrt{a} \quad (a > 0), \quad \sqrt{a+bx+cx^2} = t \pm x\sqrt{c} \quad (c > 0), \\ \sqrt{c(x-x_1)(x-x_2)} &= t(x-x_1). \end{aligned}$$

## Основные дифференциальные уравнения и методы их решения

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y), \quad (\text{П1.16})$$

где справа стоят известные функции. Требуется найти функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую начальному условию  $y(x_0) = y_0$ . После разделения переменных уравнение принимает вид  $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ . Интегрируя правую часть в

пределах от  $x_0$  до  $x$  и левую – в пределах от  $y_0$  до  $y$ , получим равенство

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx, \quad (\text{П1.17})$$

из которого можно алгебраическим путем найти функцию  $y(x)$ .

Произвольное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) = g(x) \quad (\text{П1.18})$$

имеет решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , которое можно записать в общем виде:

$$y(x) = y_0 e^{-F(x, x_0)} + \int_{x_0}^x g(\tau) e^{-F(x, \tau)} d\tau, \quad \text{где } F(x, x') = \int_{x'}^x f(\eta) d\eta. \quad (\text{П1.19})$$

Покажем, как можно получить решение в такой форме.

Попробуем найти решение в виде  $y(x) = y_1(x)y_2(x)$ , что приводит исходное уравнение к

$$\left[ \frac{dy_1(x)}{dx} + f(x)y_1(x) \right] y_2(x) + y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} = g(x).$$

Потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю, тогда получим два уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + f(x)y_1(x) = 0, \quad (\text{П1.20a})$$

$$y_1(x) \frac{dy_2(x)}{dx} = g(x). \quad (\text{П1.20б})$$

Разделяя переменные в первом уравнение (П1.20а), получаем

$$\int_{y_1(x_0)}^{y_1(x)} \frac{dy_1}{y_1} = - \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Откуда находим

$$y_1(x) = y_1(x_0) \exp \left[ - \int_{x_0}^x f(\eta) d\eta \right] = y_1(x_0) e^{-F(x, x_0)}. \quad (\text{П1.21})$$

Здесь мы сменили обозначение у переменной интегрирования, чтобы она отличалась от буквы в верхнем пределе интеграла (иначе в дальнейшем может возникнуть путаница). Также мы ввели функцию

$$F(x, x') = \int_{x'}^x f(\eta) d\eta. \quad (\text{П1.22})$$

Разделяя переменные во втором уравнение (П1.20б), получаем

$$\int_{y_2(x_0)}^{y_2(x)} dy_2 = \int_{x_0}^x \frac{g(x)}{y_1(x)} dx.$$

Откуда находим

$$y_2(x) = y_2(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{g(\tau)}{y_1(\tau)} d\tau,$$

где мы сменили обозначение переменной интегрирования. Подставляя сюда найденную функцию  $y_1(x)$  (П1.21), имеем

$$y_2(x) = y_2(x_0) + \frac{1}{y_1(x_0)} \int_{x_0}^x g(\tau) e^{F(\tau, x_0)} d\tau. \quad (\text{П1.23})$$

Перемножая найденные  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , получаем искомое решение

$$y(x) = y_1(x_0) e^{-F(x, x_0)} \left[ y_2(x_0) + \frac{1}{y_1(x_0)} \int_{x_0}^x g(\tau) e^{F(\tau, x_0)} d\tau \right] = \quad (\text{П1.24})$$

$$\begin{aligned}
&= y_1(x_0)y_2(x_0)e^{-F(x,x_0)} + \int_{x_0}^x g(\tau)e^{F(\tau,x_0)-F(x,x_0)}d\tau = \\
&= y(x_0)e^{-F(x,x_0)} + \int_{x_0}^x g(\tau)e^{-F(x,\tau)}d\tau,
\end{aligned}$$

где учтено, что  $y(x_0) = y_1(x_0)y_2(x_0)$ ,  $F(\tau, x_0) - F(x, x_0) = -F(x, \tau)$ .

### Уравнение Бернулли

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq 1) \quad (\text{П1.25a})$$

подстановкой  $u(x) = y^{1-\alpha}$  сводится к линейному уравнению

$$u' + (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x) = 0, \quad (\text{П1.25б})$$

решение которого находится в квадратурах с помощью формулы (П1.19).

Отыскание решения *системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$y'_p = a_{p1}y_1 + \dots + a_{pn}y_n \quad (p = 1, \dots, n), \quad (\text{П1.26})$$

и *дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = F(x), \quad (\text{П1.27})$$

с *постоянными коэффициентами*  $\{a_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и правой частью  $F(x)$ , выражаемой тригонометрическими, степенными и другими функциями, сводится к следующим основным операциям.

1. Сведение дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям с помощью замены переменной  $y = e^{\lambda x}$ .
2. Отыскание всех корней получившегося полинома

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (\text{П1.28})$$

для уравнения (П1.27) или нахождения корней характеристического уравнения для системы (П1.26). Общее решение для случая  $n$  различных корней записывается в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x}. \quad (\text{П1.29})$$

Совокупность констант  $C_k$ , входящих в последнее уравнение находится из начальных условий.

3. Если правая часть уравнения *не равна* нулю и выражается в виде тригонометрических или степенных функций, то решение неоднородного уравнения ищется в виде *этих же функций* с неопределенными коэффициентами. Эти неизвестные коэффициенты находятся из тождественного условия сравнения левого и правого частей уравнения (П1.27).

В заключение этого математического приложения приведем один общий способ интегрирования нормальной системы из двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y), \quad (\text{П1.30})$$

правые части которых удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{П1.31})$$

Здесь  $x$  и  $y$  – искомые вещественные функции от вещественной переменной  $t$ . Введем в рассмотрение *комплексную* переменную  $z$ , положив

$$z = x + iy, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}.$$

Тогда, умножая второе из уравнений системы (П1.30) на комплексную единицу и складывая его с первым, получаем

$$\frac{dz}{dt} = u(x, y) + iv(x, y) \equiv f(z). \quad (\text{П1.32})$$

Из последнего уравнения получаем

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z)} = t + C, \quad (\text{П1.33})$$

где  $C = C_1 + iC_2$  – произвольная комплексная постоянная. Отделяя в последнем уравнении вещественную и мнимую части, найдем  $x(t)$  и  $y(t)$ .

*Пример.* Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = mx + ny, \quad \frac{dy}{dt} = -nx + my,$$

где  $m$  и  $n$  – константы. Нетрудно убедиться, что условия (П1.31) выполнены, и система сводится к одному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = bz, \quad b = m - in.$$

Интегрируя это уравнение и отделяя вещественную и мнимую части, получим окончательно

$$x(t) = e^{mt} (C_1 \cos(nt) + C_2 \sin(nt)), \quad y(t) = e^{mt} (C_2 \cos(nt) - C_1 \sin(nt)).$$

## Приложение 2.

### Цилиндрические и сферические координаты.

#### Криволинейные ортогональные координаты

Приложение состоит из трех частей. В первых двух наглядно вводятся цилиндрические и сферические координаты и соответствующие базисные векторы, проводится разложение векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  по цилиндрическому и сферическому базисам. В последнем пункте проводится разложение этих векторов в общем виде по базису произвольных криволинейных ортогональных координат.

#### Цилиндрические координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по цилиндрическому базису

Цилиндрические координаты (ЦК)  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  представлены на рис. П2.1. Координата  $z$  совпадает с декартовой координатой,  $-\infty < z < \infty$ . Координата  $\rho$  определяется расстоянием от данной точки пространства до декартовой оси  $z$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ . Угловая координата  $\varphi$  отсчитывается от положительной полуоси  $x$ , направление возрастания  $\varphi$  по определению совпадает с направлением кратчайшего поворота положительной полуоси  $x$  к положительной полуоси  $y$  (это отмечено стрелкой на рис. П2.1),  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Как следует из рис. П2.1, декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выражаются через цилиндрические  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  следующим образом:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (\text{П2.1})$$

При любом движении материальной точки функции  $\rho(t)$  и  $z(t)$  меняются непрерывно. Функция  $\varphi(t)$  терпит разрывы, когда

- 1) траектория пересекает полуплоскость  $zx$ ,  $x > 0$ ;
- 2) траектория пересекает декартову ось  $z$ .

В первом случае в момент времени, когда материальная точка пересекает указанную полуплоскость, функция  $\varphi(t)$  скачком меняет свое значение с  $2\pi$  на  $0$  или наоборот в зависимости от направления движения. Этого раз-



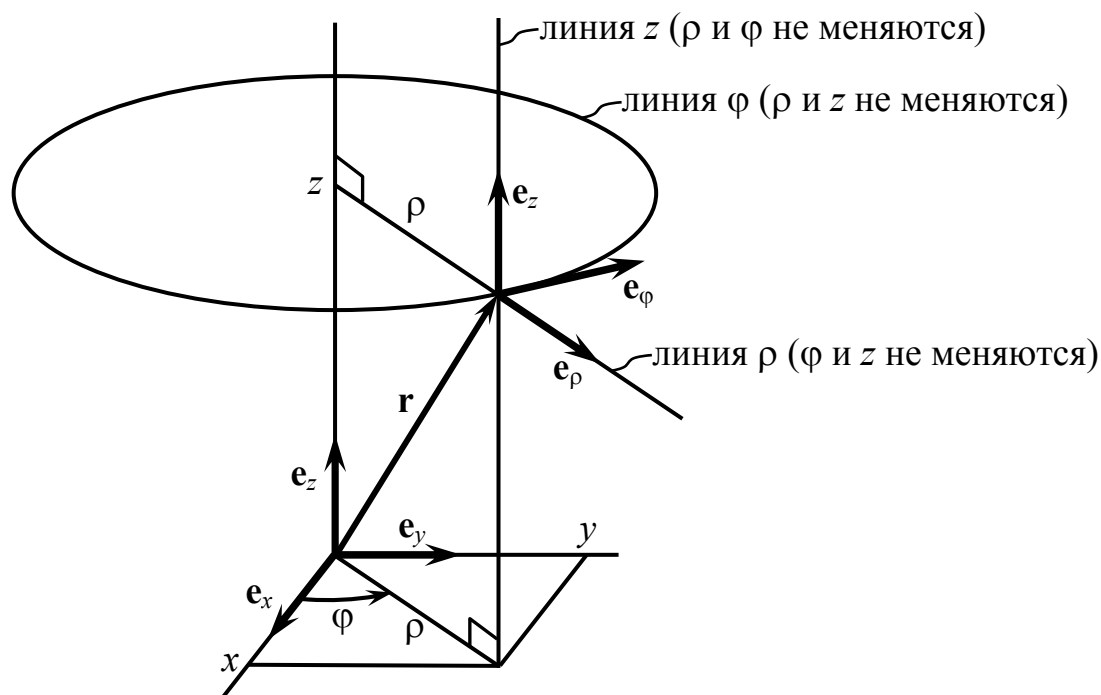


Рис. П2.1. Цилиндрические координаты, координатные линии, базис

рыва функции  $\varphi(t)$  можно избежать, расширив интервал возможных значений координаты  $\varphi$  до множества всех вещественных чисел  $-\infty < \varphi < \infty$ , как обычно и полагают. Во втором случае при использовании интервала значений  $0 \leq \varphi < 2\pi$  функция  $\varphi(t)$  изменяется на  $\pi$  в момент пересечения материальной точкой декартовой оси  $z$ : увеличивается на  $\pi$ , если в момент времени непосредственно перед пересечением  $\varphi(t) < \pi$ , и уменьшается на  $\pi$ , если перед самым пересечением  $\varphi(t) > \pi$ . Использование расширенного интервала значений  $-\infty < \varphi < \infty$  в данном случае не избавляет от скачкообразного изменения функции  $\varphi(t)$ , при этом лишь появляется некоторая свобода в выборе величины скачка: можно положить, что при каждом пересечении материальной точкой оси  $z$  функция  $\varphi(t)$  изменяется на какую-нибудь величину из множества  $(2k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии цилиндрической системы координат (рис. П2.1). Линия, соответствующая какой-либо цилиндрической координате, строится путем изменения этой координаты при неизменных значениях двух других координат. Так, линия  $r$  представляет собой луч, начинающийся на декартовой оси  $z$ , проходящий перпендикулярно этой оси через рассматриваемую точку про-

странства. Линия  $\varphi$  представляет собой окружность радиуса  $\rho$ , проходящую через рассматриваемую точку, центр окружности лежит на декартовой оси  $z$ , плоскость окружности перпендикулярна этой оси. Цилиндрическая линия  $z$  представляет собой прямую, проходящую через рассматриваемую точку параллельно декартовой оси  $z$ .

В каждой точке пространства можно построить цилиндрический базис (ЦБ), состоящий из трех векторов  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z$  единичной длины. По определению каждый базисный вектор направлен по касательной к соответствующей координатной линии в сторону возрастания соответствующей цилиндрической координаты. Как можно видеть из рис. П2.1, построенный таким образом ЦБ является *ортонормированным*, и это верно для любой точки пространства. Следует запомнить порядок следования векторов в ЦБ  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ , при таком порядке базис является *правым*.

Любой вектор можно разложить по ЦБ:  $\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z$ , где коэффициенты  $a_\rho$ ,  $a_\varphi$ ,  $a_z$  называются ЦК вектора  $\mathbf{a}$ . Поскольку ЦБ является *ортонормированным*, то скалярное произведение двух векторов выражается через их ЦК следующим образом:  $\mathbf{a}\mathbf{b} = a_\rho b_\rho + a_\varphi b_\varphi + a_z b_z$ . Поскольку ЦБ является *ортонормированным* и *правым*, то векторное произведение двух векторов может быть представлено в виде детерминанта:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ a_\rho & a_\varphi & a_z \\ b_\rho & b_\varphi & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П2.2})$$

В каждой точке пространства находится свой ЦБ. Какой-либо вектор, связанный с движущейся материальной точкой, следует раскладывать в каждый момент времени по ЦБ, который соответствует текущему положению материальной точки. Наглядно можно представить один ЦБ, движущийся вместе с материальной точкой и при этом поворачивающийся. В процессе этого движения цилиндрический вектор  $\mathbf{e}_z$  не меняет своего направления (он совпадает с декартовым вектором  $\mathbf{e}_z$ ), а векторы  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  поворачиваются вокруг него.

Так как векторы  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  меняют свои направления, то отличны от ну-

ля их производные по времени  $\dot{\mathbf{e}}_\rho$  и  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ , которые понадобятся нам в дальнейшем. Эти производные, очевидно, перпендикулярны вектору  $\mathbf{e}_z$ , как и сами  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$ . Поскольку длины векторов  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  не меняются, то  $\dot{\mathbf{e}}_\rho \perp \mathbf{e}_\rho$  и  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi \perp \mathbf{e}_\varphi$ .<sup>1</sup> Отсюда следует, что  $\dot{\mathbf{e}}_\rho \parallel \mathbf{e}_\varphi$  и  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi \parallel \mathbf{e}_\rho$ , т.е.  $\dot{\mathbf{e}}_\rho = \lambda \mathbf{e}_\varphi$  и  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \mu \mathbf{e}_\rho$ . Коэффициенты пропорциональности в последних равенствах несложно найти геометрическим способом, но мы поступим по-другому. Разложим векторы  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  по  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$ :

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (\text{П2.3})$$

Эти разложения легко получить, глядя на рис. П2.2, который соответствует рис. П2.1, но изменена позиция обзора (вид с конца вектора  $\mathbf{e}_z$ ). В равенствах (П2.3) от времени зависит  $\varphi$  (при движении материальной точки по траектории все ЦК как-то зависят от времени), векторы  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  со временем не меняются. С учетом этого продифференцируем (П2.3) по времени:

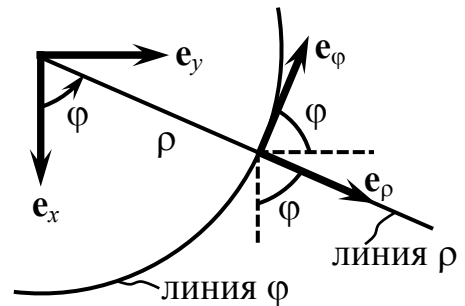


Рис. П2.2.

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_y. \quad (\text{П2.4})$$

Сравнивая (П2.4) и (П2.3), получаем искомые формулы

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho. \quad (\text{П2.5})$$

Теперь займемся разложением радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , вектора скорости  $\mathbf{v}$  и вектора ускорения  $\mathbf{w}$  по ЦБ. Как видно из рис. П2.1,

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z. \quad (\text{П2.6})$$

Дифференцируя это равенство по времени и учитывая (П2.5), получаем разложение вектора скорости по ЦБ:

<sup>1</sup> Если некоторый вектор  $\mathbf{a}(t)$  с течением времени меняет свое направление, но его длина при этом не меняется, то производная по времени от этого вектора перпендикулярна к нему самому в каждый момент времени, т.е.  $\dot{\mathbf{a}}(t) \perp \mathbf{a}(t)$ . Чтобы убедиться в этом, продифференцируем по времени равенство  $\mathbf{a}(t)^2 = |\mathbf{a}(t)|^2 = \text{const}$ , в результате получим  $2\mathbf{a}(t)\dot{\mathbf{a}}(t) = 0$ , откуда и следует, что  $\dot{\mathbf{a}}(t) \perp \mathbf{a}(t)$ .

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z + z \dot{\mathbf{e}}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z.$$

Введем обозначения  $v_\rho$ ,  $v_\phi$ ,  $v_z$  для цилиндрических координат скорости:

$$\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z, \quad v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\phi = \rho \dot{\phi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (\text{П2.7})$$

Дифференцируя по времени разложение  $\mathbf{v}$ , получаем с учетом (П2.5) разложение ускорения  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} &= \frac{d}{dt}(v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z) = \dot{v}_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{v}_\phi \mathbf{e}_\phi + v_\phi \dot{\mathbf{e}}_\phi + \dot{v}_z \mathbf{e}_z + v_z \dot{\mathbf{e}}_z = \\ &= (\dot{v}_\rho - v_\phi \dot{\phi}) \mathbf{e}_\rho + (\dot{v}_\phi + v_\rho \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \dot{v}_z \mathbf{e}_z = w_\rho \mathbf{e}_\rho + w_\phi \mathbf{e}_\phi + w_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Отсюда находим цилиндрические координаты ускорения  $w_\rho = \dot{v}_\rho - v_\phi \dot{\phi}$ ,  $w_\phi = \dot{v}_\phi + v_\rho \dot{\phi}$ ,  $w_z = \dot{v}_z$ , в которые следует подставить  $v_\rho$ ,  $v_\phi$ ,  $v_z$  из (П2.7).

Окончательно запишем:

$$\mathbf{w} = w_\rho \mathbf{e}_\rho + w_\phi \mathbf{e}_\phi + w_z \mathbf{e}_z, \quad w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \quad w_\phi = 2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}, \quad w_z = \ddot{z}. \quad (\text{П2.8})$$

Определим еще цилиндрические координаты секторной скорости, воспользовавшись (П2.2):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho \dot{\phi} & \dot{z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} z \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} (z \dot{\rho} - \rho \dot{z}) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z, \quad (\text{П2.9})$$

то есть

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\rho \mathbf{e}_\rho + \sigma_\phi \mathbf{e}_\phi + \sigma_z \mathbf{e}_z, \quad \sigma_\rho = -\frac{1}{2} z \rho \dot{\phi}, \quad \sigma_\phi = \frac{1}{2} (z \dot{\rho} - \rho \dot{z}), \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\phi}. \quad (\text{П2.10})$$

## Сферические координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по сферическому базису

Сферические координаты (СК)  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  представлены на рис. П2.3. Координата  $r$  является длиной радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , т.е. расстоянием между началом координат и рассматриваемой точкой пространства,  $0 \leq r < \infty$ . Координата  $\theta$  есть угол между вектором  $\mathbf{e}_z$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Угловая координата  $\phi$  совпадает с одноименной цилиндрической координатой (см. предыдущий подраздел). Отсчитывается  $\phi$  от положительной полуоси  $x$ , направление возрастания  $\phi$  по определению совпадает с

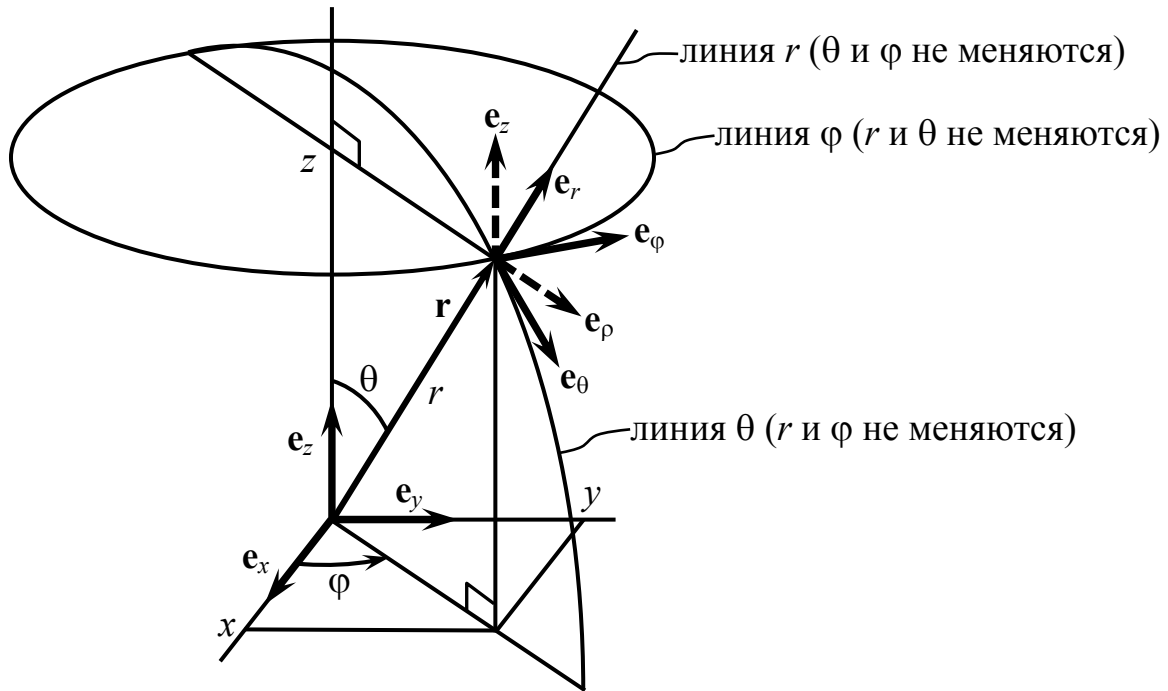


Рис. П2.3. Сферические координаты, координатные линии, базис

направлением кратчайшего поворота положительной полуоси  $x$  к положительной полуоси  $y$  (это отмечено стрелкой на рис. П2.3),  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Как следует из рисунка П2.3, декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  выражаются через сферические  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  следующим образом:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{П2.11})$$

При описании движения материальной точки обычно используют расширенный интервал значений  $-\infty < \varphi < \infty$ , что позволяет избежать скачкообразного изменения функции  $\varphi(t)$  в моменты времени, когда материальная точка пересекает полуплоскость  $zx$ ,  $x > 0$ . При таком интервале значений функция  $\varphi(t)$  терпит скачек только тогда, когда материальная точка пересекает декартову ось  $z$  (см. обсуждение  $\varphi$  на стр. 232 в предыдущем подразделе, посвященном цилиндрическим координатам). Функция  $\theta(t)$  терпит скачек только тогда, когда материальная точка проходит через начало координат. Если  $\theta_0$  – значение функции  $\theta(t)$  в момент времени непосредственно перед тем, как материальная точка оказалась в начале координат, то в момент времени сразу после прохождения начала координат функция  $\theta(t)$  принимает значение  $\pi - \theta_0$ .

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии сферической системы координат (рис. П2.3). Линия, соответствующая какой-либо сферической координате, строится путем изменения этой координаты при неизменных значениях двух других координат. Так, линия  $r$  представляет собой луч, исходящий из начала координат, проходящий через рассматриваемую точку пространства. Линия  $\theta$  является половиной окружности радиуса  $r$  с центром в начале координат, расположенной в плоскости, проходящей через декартову ось  $z$  и радиус-вектор. Линия  $\varphi$  есть окружность радиуса  $r \sin \theta$ , центр окружности лежит на декартовой оси  $z$ , плоскость окружности перпендикулярна к этой оси.

В каждой точке пространства можно построить сферический базис (СБ), состоящий из трех векторов  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  единичной длины. По определению каждый базисный вектор направлен по касательной к соответствующей координатной линии в сторону возрастания соответствующей сферической координаты. Как можно видеть из рис. П2.3, построенный таким образом СБ является *ортонормированным*, и это верно для любой точки пространства. Следует запомнить порядок следования векторов в СБ ( $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ), при таком порядке базис является *правым*. Благодаря этим свойствам базиса, скалярное и векторное произведения двух векторов  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{b} = b_r \mathbf{e}_r + b_\theta \mathbf{e}_\theta + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ , разложенных по СБ, могут быть найдены по формулам:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_r b_r + a_\theta b_\theta + a_\varphi b_\varphi, \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ a_r & a_\theta & a_\varphi \\ b_r & b_\theta & b_\varphi \end{vmatrix}. \quad (\text{П2.12})$$

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по некоторой траектории. В каждой точке траектории можно построить свой СБ. Наглядно можно представить себе один СБ, движущийся вместе с материальной точкой и при этом поворачивающийся. Поскольку при этом движении базисные векторы меняют свои направления, то отличны от нуля их производные по времени  $\dot{\mathbf{e}}_r$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ . Для дальнейших целей нам необходимо вычислить эти производные, а точнее, нам нужно разложить эти производные по сферическому же базису:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = 0\mathbf{e}_r + ?\mathbf{e}_\theta + ?\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = ?\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_\theta + ?\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = ?\mathbf{e}_r + ?\mathbf{e}_\theta + 0\mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{П2.13})$$

Здесь знаками вопроса отмечены неизвестные пока коэффициенты; нулевые коэффициенты являются следствиями соотношений  $\dot{\mathbf{e}}_r \perp \mathbf{e}_r$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\theta \perp \mathbf{e}_\theta$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi \perp \mathbf{e}_\varphi$ , которые сами следуют из неизменности длин векторов  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  (см. сноску на стр. 235).

Сначала разложим сферические векторы  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  по цилиндрическим векторам  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_z$ , которые отмечены на рисунках П2.3 и П2.4 штриховыми

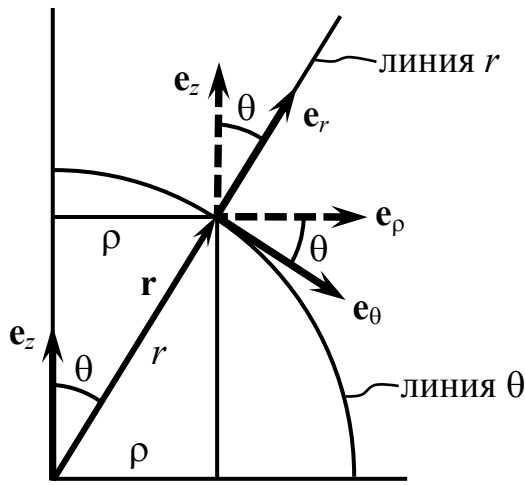


Рис. П2.4.

ми стрелками (цилиндрический базис рассмотрен в предыдущем пункте):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{П2.14})$$

Эти формулы легко получить, глядя на рис. П2.4, который соответствует рис. П2.3, но здесь плоскость векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{e}_z$  совмещена с плоскостью бумаги. Продифференцируем (П2.14) по времени:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}(\cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{e}_z) + \sin \theta \dot{\mathbf{e}}_\rho, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}(\sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z) + \cos \theta \dot{\mathbf{e}}_\rho.$$

Перепишем эти равенства с учетом (П2.14) и (П2.5):

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{П2.15})$$

Мы получили первые две формулы из (П2.13). Чтобы получить последнюю формулу из (П2.13), учтем, что  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho$  в соответствии с (П2.5). Далее с помощью рис. П2.4 разложим вектор  $\mathbf{e}_\rho$  по векторам  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$ :  $\mathbf{e}_\rho = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$ . В результате получим:

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta). \quad (\text{П2.16})$$

Теперь займемся разложением радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , вектора скорости  $\mathbf{v}$  и вектора ускорения  $\mathbf{w}$  по СБ. Очевидно, что

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (\text{П2.17})$$

Продифференцируем это равенство по времени и воспользуемся первой

формулой в (П2.15):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} r \mathbf{e}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Итак,

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (\text{П2.18})$$

Продифференцируем по времени разложение  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \dot{v}_r \mathbf{e}_r + v_r \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v}_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\theta \dot{\mathbf{e}}_\theta + \dot{v}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Подставляя сюда (П2.15) и (П2.16), находим сферические компоненты вектора ускорения  $\mathbf{w} = w_r \mathbf{e}_r + w_\theta \mathbf{e}_\theta + w_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ :

$$\begin{aligned} w_r &= \dot{v}_r - v_\theta \dot{\theta} - v_\varphi \dot{\varphi} \sin \theta = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \\ w_\theta &= \dot{v}_\theta + v_r \dot{\theta} - v_\varphi \dot{\varphi} \cos \theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \\ w_\varphi &= \dot{v}_\varphi + v_r \dot{\varphi} \sin \theta + v_\theta \dot{\varphi} \cos \theta = (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{П2.19})$$

Последние части этих равенств получены в результате подстановки компонент скорости из (П2.18).

### **Криволинейные ортогональные координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по криволинейному базису**

Рассмотренные выше цилиндрические координаты (ЦК) и сферические координаты (СК) являются примерами так называемых *криволинейных ортогональных координат*. Обозначим криволинейные координаты буквами  $q_1, q_2, q_3$ . Предполагается, что декартовы координаты выражаются через них:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (\text{П2.20})$$

Положение любой точки пространства задается радиус-вектором, который можно рассматривать как функцию криволинейных координат:

$$\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \quad (\text{П2.21})$$

где  $x, y, z$  – функции (П2.20). Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии (кривые). Координатную линию опишет



конец радиус-вектора (П2.21), если менять одну криволинейную координату при фиксированных двух остальных. Отсюда следует, что частные производные от (П2.21) по криволинейным координатам

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \quad (\text{П2.22})$$

направлены по касательным к координатным линиям. Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в каждой точке пространства координатные линии пересекаются под прямыми углами, или, что то же самое, в каждой точке пространства три вектора (П2.22) взаимно ортогональны. Тройку ортогональных векторов (П2.22) можно превратить в ортонормированный базис, если каждый вектор поделить на его длину. Длины векторов (П2.22) называются *коэффициентами Ламе*:

$$h_{q_1} \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right|, \quad h_{q_2} \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right|, \quad h_{q_3} \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right|. \quad (\text{П2.23})$$

Коэффициенты Ламе являются функциями криволинейных координат. Ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_{q_1} \equiv \frac{1}{h_{q_1}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}_{q_2} \equiv \frac{1}{h_{q_2}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad \mathbf{e}_{q_3} \equiv \frac{1}{h_{q_3}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \quad (\text{П2.24})$$

называется *локальным базисом криволинейных координат* или просто *криволинейным базисом*.

Формулу для вычисления коэффициентов Ламе получим, подставляя (П2.21) в (П2.23):

$$h_{q_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{e}_z \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}, \quad (\text{П2.25})$$

где  $i = 1, 2, 3$ , а  $x, y, z$  – функции (П2.20). Вычисленные по этой формуле с использованием (П2.1) и (П2.11) коэффициенты Ламе в случае ЦК таковы:

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1; \quad (\text{П2.26})$$

в случае СК коэффициенты Ламе имеют вид:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta. \quad (\text{П2.27})$$

Запишем разложение радиус-вектора по криволинейному базису:  $\mathbf{r} = r_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + r_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + r_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}$ . Коэффициенты этого разложения в силу орто-

нормированности базиса  $\mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{e}_{q_2}, \mathbf{e}_{q_3}$  можно вычислить как скалярные произведения  $r_{q_i} = \mathbf{r} \mathbf{e}_{q_i}$ , подстановка в которые (П2.24) дает

$$r_{q_i} = \mathbf{r} \mathbf{e}_{q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{2h_{q_i}} \frac{\partial r^2}{\partial q_i} = \frac{1}{2h_{q_i}} \frac{\partial |\mathbf{r}|^2}{\partial q_i}. \quad (\text{П2.28})$$

Итак,

$$\mathbf{r} = r_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + r_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + r_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}, \quad r_{q_i} = \frac{1}{2h_{q_i}} \frac{\partial r^2}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{П2.29})$$

где  $r^2 = |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , а  $x, y, z$  – функции (П2.20). В случае ЦК, вычисляя  $r^2$  с помощью (П2.1), получаем  $r^2 = \rho^2 + z^2$  и из (П2.29) находим  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$ , что совпадает с (П2.6). В случае СК (П2.29) дает  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ , что совпадает с (П2.17).

Найдем разложение скорости по криволинейному базису. Для этого выпишем полный дифференциал от радиус-вектора как функции криволинейных координат:

$$d\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3. \quad (\text{П2.30})$$

Перепишем  $d\mathbf{r}$  с учетом (П2.24):

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_{q_1} h_{q_1} dq_1 + \mathbf{e}_{q_2} h_{q_2} dq_2 + \mathbf{e}_{q_3} h_{q_3} dq_3. \quad (\text{П2.31})$$

Поделив (П2.31) на  $dt$ , получим  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{q_1} h_{q_1} \dot{q}_1 + \mathbf{e}_{q_2} h_{q_2} \dot{q}_2 + \mathbf{e}_{q_3} h_{q_3} \dot{q}_3$ . Итак, разложение скорости по криволинейному базису таково:

$$\mathbf{v} = v_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + v_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + v_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}, \quad v_{q_i} = h_{q_i} \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П2.32})$$

Сравните (П2.32) с (П2.7) и (П2.18). Квадрат величины скорости в силу ортонормированности базиса  $\mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{e}_{q_2}, \mathbf{e}_{q_3}$  дается формулой

$$v^2 = |\mathbf{v}|^2 = v_{q_1}^2 + v_{q_2}^2 + v_{q_3}^2 = h_{q_1}^2 \dot{q}_1^2 + h_{q_2}^2 \dot{q}_2^2 + h_{q_3}^2 \dot{q}_3^2. \quad (\text{П2.33})$$

В случае ЦК и СК, соответственно,

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (\text{П2.34})$$

Попутно выразим в криволинейных координатах элемент объема. Из (П2.31) и ортонормированности криволинейного базиса следует, что

$$dV = h_{q_1} dq_1 \cdot h_{q_2} dq_2 \cdot h_{q_3} dq_3 = h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{П2.35})$$

В случае ЦК  $dV = \rho dr d\varphi dz$ , в случае СК  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .

Теперь займемся разложением ускорения  $\mathbf{w}$  по криволинейному базису:  $\mathbf{w} = w_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + w_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + w_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}$ . Коэффициенты этого разложения в силу ортонормированности базиса  $\mathbf{e}_{q_1}$ ,  $\mathbf{e}_{q_2}$ ,  $\mathbf{e}_{q_3}$  можно вычислить как скалярные произведения  $w_{q_i} = \mathbf{w} \mathbf{e}_{q_i}$ , подстановка в которые (П2.24) дает

$$w_{q_i} = \mathbf{w} \mathbf{e}_{q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \right]. \quad (\text{П2.36})$$

Здесь мы также воспользовались очевидным тождеством

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a}\mathbf{b}) - \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt}. \quad (\text{П2.37})$$

Подставим в (П2.36) соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}, \quad (\text{П2.38})$$

которые мы докажем позже. В результате получим

$$w_{q_i} = \frac{1}{h_{q_i}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \right] = \frac{1}{2h_{q_i}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q_i} \right]. \quad (\text{П2.39})$$

Итак, разложение ускорения по криволинейному базису таково:

$$\mathbf{w} = w_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + w_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + w_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}, \quad w_{q_i} = \frac{1}{2h_{q_i}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial v^2}{\partial q_i} \right], \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{П2.40})$$

где  $v^2$  дается формулой (П2.33). В случае ЦК и СК вычисления по формуле (П2.40) с учетом (П2.34) приводят к полученным ранее результатам (П2.8) и (П2.19) соответственно.

Теперь докажем равенства (П2.38). Поделив (П2.30) на  $dt$ , имеем

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (\text{П2.41})$$

Беря от (П2.41) частную производную по  $\dot{q}_i$ , получим первое равенство в (П2.38). Докажем второе равенство в (П2.38), вычисляя производную по  $t$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_3 = \\
&= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 + \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right) \dot{q}_3 = \\
&= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{П2.42}$$

Для справочных целей также приведем без доказательства различные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\text{grad} U = \frac{1}{h_{q_1}} \frac{\partial U}{\partial q_1} \mathbf{e}_{q_1} + \frac{1}{h_{q_2}} \frac{\partial U}{\partial q_2} \mathbf{e}_{q_2} + \frac{1}{h_{q_3}} \frac{\partial U}{\partial q_3} \mathbf{e}_{q_3}, \tag{П2.43}$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_{q_2} h_{q_3} h_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_{q_3} h_{q_1} h_{q_2}) \right], \tag{П2.44}$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{q_1} & \mathbf{e}_{q_2} & \mathbf{e}_{q_3} \\ \frac{1}{h_{q_2} h_{q_3}} & \frac{1}{h_{q_3} h_{q_1}} & \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2}} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_{q_1} A_{q_1} & h_{q_2} A_{q_2} & h_{q_3} A_{q_3} \end{vmatrix}, \tag{П2.45}$$

$$\Delta U = \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2} h_{q_3}} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_{q_2} h_{q_3}}{h_{q_1}} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_{q_1} h_{q_3}}{h_{q_2}} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_{q_1} h_{q_2}}{h_{q_3}} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right]. \tag{П2.46}$$

В формуле для  $\text{rot} \mathbf{A}$  дифференциальные операторы  $\frac{\partial}{\partial q_i}$  действуют на элементы только нижней строки детерминанта.

## Библиография

1. Леушин А.М., Нигматуллин Р.Р. *Учебные задания по теоретической механике.* (Под ред. Кочелаева Б.И.) Казань: Лаб. оператив. полиграфии КГУ, 1988.
2. Ольховский И.И. *Курс теоретической механики для физиков.* М.: Наука, 1974.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика.* М.: Наука, 1965.
4. Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике.* М.: Физматлит, 2001.
5. Голдстейн Г. *Классическая механика.* М.: Наука, 1975.
6. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. *Задачи по теоретической механике для физиков.* М.: Изд. МГУ, 1978.
7. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. *Сборник задач по аналитической механике.* М.: Наука, 1980.
8. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. *Сборник задач по теоретической механике.* М.: Наука, 1969.
9. Мещерский И.В. *Сборник задач по теоретической механике.* М.: Наука, 1986.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. *Сборник задач по теоретической физике.* М.: Высшая школа, 1984.
11. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. *Аналитическая механика. Дополнительные вопросы.* Новосибирск: Изд. Новосибирского университета, 1988.
12. Павленко Ю.Г. *Задачи по теоретической механике.* М.: Изд. МГУ, 1988.
13. Невзглядов В.Г. *Теоретическая механика.* М.: ГИФМЛ, 1959.
14. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. *Теоретическая механика в примерах и задачах.* (Том I - II). М.: ГИФМЛ, 1961, Том III. М.: Наука, ГРФМЛ, 1973.
15. Мисюрёв М.А. *Методика решения задач по теоретической механике.* М.: Высшая школа, 1963.
16. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями.* М.: Мир, 1969.

17. Бутенин Н.В. *Введение в аналитическую механику*. М.: Наука, ГРФМЛ, 1971.
18. Кильчевский Н.А. *Курс теоретической механики*. (Том I). М.: Наука, ГРФМЛ, 1972.
19. Учайкин В.В. *Механика. Основы механики сплошных сред. Задачи и упражнения*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

## Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ .....	3
ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ .....	6
ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ .....	7
<b>РАЗДЕЛ 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....</b>	<b>8</b>
Минимальные теоретические сведения по кинематике .....	8
<i>Величины, соответствующие <math>n_d = 0</math>.</i> .....	8
<i>Величины, соответствующие <math>n_d = 1</math>.</i> .....	10
<i>Величины, соответствующие <math>n_d = 2</math>.</i> .....	11
<i>Сопровождающая система координат (естественный трехгранник)....</i>	12
<i>Преобразование координат, скоростей и ускорений</i> <i>при переходе к другой системе отсчета</i> .....	14
<i>Некоторые предварительные указания</i> <i>по решению задач по кинематике</i> .....	14
Примеры решения задач по кинематике .....	15
Задачи .....	19
<b>РАЗДЕЛ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....</b>	<b>25</b>
Минимальные теоретические сведения по динамике точки.....	25
<i>Методические указания к решению задач</i> <i>по динамике материальной точки</i> .....	27
Примеры решения задач по динамике .....	27
Задачи .....	36
<b>РАЗДЕЛ 3. МЕТОД ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ</b>	
<b>И ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ.....</b>	<b>42</b>
Минимальные теоретические сведения .....	42
<i>Законы изменения и сохранения физических величин</i> <i>и интегралы движения</i> .....	42
<i>Движение в центральном поле</i> .....	45
Примеры решения задач .....	46
Задачи .....	50
<b>РАЗДЕЛ 4. ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ И ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ</b>	
<b>И РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ.....</b>	<b>56</b>
Минимальные теоретические сведения .....	56

<i>Проблема двух тел</i> .....	56
<i>Теория столкновения и рассеяния частиц</i> .....	57
Примеры решения задач .....	62
Задачи .....	68
<b>РАЗДЕЛ 5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА.....</b>	<b>73</b>
Минимальные теоретические сведения .....	73
Примеры решения задач .....	80
Задачи .....	92
<b>РАЗДЕЛ 6. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.</b>	
<b>НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.....</b>	<b>101</b>
Минимальные теоретические сведения .....	101
<i>Кинематика движения твердого тела</i> .....	101
<i>Уравнения движения твердого тела</i> .....	104
<i>Движение в неинерциальной системе отсчета</i> .....	112
Примеры решения задач .....	113
Задачи .....	125
<b>РАЗДЕЛ 7. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>139</b>
Минимальные теоретические сведения .....	139
Примеры решения задач .....	142
Задачи .....	148
<b>РАЗДЕЛ 8. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>157</b>
Основные положения и формулы .....	157
<i>Линейные колебания в отсутствии диссипативных</i> <i>и вынуждающих сил</i> .....	158
Алгоритм решения задач при $n = 1$ .....	158
Алгоритм решения задач при $n \geq 2$ .....	160
<i>Вынужденные и затухающие линейные колебания</i> .....	164
Примеры решения задач .....	166
Задачи .....	174
<b>РАЗДЕЛ 9. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА. СКОБКИ ПУАССОНА.....</b>	<b>185</b>
Уравнения Гамильтона. Основные положения и формулы .....	185
<i>Циклические переменные в гамильтоновом формализме</i> .....	187
Примеры решения задач .....	188
Задачи .....	192
Скобки Пуассона. Основные положения .....	196



Примеры решения задач .....	197
Задачи .....	199
<b>РАЗДЕЛ 10. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.</b>	
<b>УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ.....</b>	<b>202</b>
Канонические преобразования.....	202
Примеры решения задач .....	205
Задачи .....	207
Уравнение Гамильтона-Якоби .....	210
<i>Основные свойства уравнения Гамильтона-Якоби.....</i>	<i>210</i>
<i>Закон движения в формализме Гамильтона-Якоби.....</i>	<i>212</i>
<i>Алгоритм решения задач в формализме Гамильтона-Якоби.....</i>	<i>213</i>
Примеры решения задач .....	214
Задачи .....	218
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. МИНИМУМ СВЕДЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ, НЕОБХОДИМЫХ</b>	
<b>ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.....</b>	<b>221</b>
Векторы и действия над ними.....	221
Интегрирование элементарных функций .....	226
Основные дифференциальные уравнения и методы их решения .....	227
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ.</b>	
<b>КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ .....</b>	<b>232</b>
Цилиндрические координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по цилиндрическому базису .....	232
Сферические координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по сферическому базису.....	236
Криволинейные ортогональные координаты, разложение радиус-вектора, векторов скорости и ускорения по криволинейному базису .....	240
<b>БИБЛИОГРАФИЯ.....</b>	<b>245</b>
<b>ОГЛАВЛЕНИЕ.....</b>	<b>247</b>

**Леушин Анатолий Максимович**  
**Нигматуллин Равиль Рашидович**  
**Прошин Юрий Николаевич**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**  
**МЕХАНИКА**  
**(ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС)**  
**ЗАДАЧНИК ДЛЯ ФИЗИКОВ**

2015