МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

Теоретическая механика

Часть 2

Кинематика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2013

Теоретическая механика

Часть 2

Кинематика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2013

УДК 531 (075)
ББК 22.3Я7
Т 338
Теоретическая механика. Ч.2. Кинематика: учебное пособие / сост.: М.В. Максименко, Н.В. Кузнецова, В.Е. Головко, С.Г. Петров, И.В.Клюшкин; СПбГТУРП. – СПб., 2013. – 57 с.

В учебном пособии рассматривается часть курса теоретической механики – кинематика. Учебное пособие соответствует программе курса теоретической механики и рассчитано на студентов очной, вечерней и заочной форм обучения. В пособии приведены цели и задачи теоретической механики, дана сводка основных понятий. Материал учебного пособия изложен так, что им можно пользоваться при изучении полного и краткого курса. Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 220400.62 «Управление в технических системах», 140400.62 «Электроэнергетика и электротехника», 220700.62 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Рецензенты:
Заслуженный работник высшей школы РФ д-р техн. наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) Холоднов В.А., канд. техн. наук, доцент кафедры прочности материалов и конструкций Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения Б.М.Аллахвердов.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

В В Е Д Е Н И Е

В разделе «Кинематика» курса теоретической механики мы приступаем к изучению движения тел. Понятие «*движение тела*» подразумевает изменение положения тела с течением времени относительно какого-либо другого тела. Характер наблюдаемого движения будет зависеть от того, по отношению к какому телу оно совершается. Движение в кинематике рассматривается только с геометрической точки зрения, т.е. причины возникновения движения и движущие силы, и их связь между собой не изучаются.

Механическим процессом называется изменение во времени состояния объекта, связанное с его перемещением в пространстве. Состояние объекта (материальной точки или твердого тела) в механике полностью характеризуется его положением в пространстве и быстротой изменения параметров, характеризующих это положение.

Системой отсчета, как правило, служит система трех осей, не лежащих в одной плоскости. По определению такая система отсчета (система координат) считается неподвижной. В кинематике, в отличие от динамики, такой выбор является произвольным.

Если в выбранной системе координат тело не перемещается, то говорят, что оно находится в покое. Поскольку сама система координат может произвольно перемещаться в пространстве, то понятия «движение» и «покой» являются относительными.

Рассматриваем общий случай движения тела: все его точки будут совершать различные движения (например, при вращении вала машины точки, лежащие на оси вращения, будут находиться в покое, а точки на поверхности вала - двигаться по окружности). Поэтому изучение кинематики начинается с изучения кинематики точки.

Совокупность геометрической и силовой картин полностью характеризует любые механические процессы. Взаимосвязь между геометрической и силовой картинами устанавливается при последующем изучении курса теоретической механики и имеет важное практическое значение для исследования различных механических процессов.

1. ПРЕДМЕТ КИНЕМАТИКИ. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Кинематика имеет весьма большое значение для изучения последнего раздела теоретической механики – динамики, где изучается движение тел под действием сил. С другой стороны, методы кинематики имеют самостоятельное практическое значение для исследования графических свойств движения частей различных механизмов и машин.

Развитие кинематики в XVIII веке связано с работами Леонарда Эйлера (1707-1783), который заложил основы кинематики твердого тела и создал аналитические методы решения задач механики.

Быстрое развитие техники в начале XIX века, в частности машиностроения, потребовало специального исследования геометрических свойств движения тел. Кинематика выделилась в самостоятельный раздел механики, причем особое значение приобрела кинематика механизмов. Крупные исследования в области кинематики механизмов и машин принадлежат французским ученым: Понселе, Шалю, Кориолису, а также русским и советским ученым: основоположнику русской школы теории механизмов и машин П.Л. Чебышеву, Л.В. Ассуру, Н.И. Мерцалову, Л.П. Котельникову, И.И. Артоболевскому и др.

Развитие кинематики в настоящее время также идет, главным образом, по пути ее приложения к конструированию и исследованию функционирования механизмов и машин.

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, все измерения в котором производятся на основании методов евклидовой геометрии. *Время* в механике рассматривается как универсальное, т.е. протекающее одинаково в любой точке пространства и во всех системах отсчета. Она рассматривается как непрерывно изменяющаяся монотонно возрастающая скалярная величина. Все кинематические характеристики движения тела и его отдельной точки (расстояния, скорости, ускорения, и т.д.) рассматриваются как функции времени. За единицу времени принимается одна секунда.

Хотя евклидово пространство и универсальное время и не отражают реальных свойств пространства и времени, тем не менее в механике при изучении движений со скоростями, далекими от скорости света, это дает достаточную для практики точность.

Механическим движением называется происходящее во времени и пространстве изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая системой отсчета. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной. При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему координатных осей, неизменно связанных с Землей.

Основной задачей кинематики является определение всех кинематических величин, характеризующих движение как отдельной точки, так и тела в целом (траектории, скорости, ускорения и т.п.).

2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Для решения основной задачи кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было задано (описано).

Задать движение точки (кинематически) – это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить положение этой точки относительно выбранной системы отсчета.

Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1. ***Векторный способ задания движения точки***

Положение точки M в пространстве однозначно определяется заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат O в точку M (рис. 1).

При движении точки M радиус-вектор $\vec{r}$ будет изменяться, т.е. $\vec{r}$ есть вектор-функция времени.

Значит, чтобы задать движение точки векторным способом, необходимо:

1) задать неподвижную точку O в пространстве;
2) задать радиус-вектор точки как векторную функцию времени, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет собой уравнение движения точки в векторной форме. Векторный способ задания движения точки удобен для получения теоретических выводов, т.е. позволяет описать движение точки одним векторным уравнением (1).

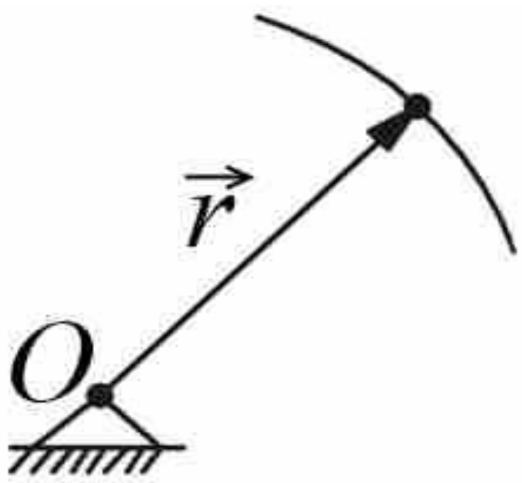

Рис. 1

Геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}$ движущейся точки *M* называется *траекторией* точки *M*.

2. ***Координатный способ задания движения точки***

Положение точки *M* в неподвижной системе отсчета O_{xyz} определяется тремя координатами *x,y,z* (рис. 2).

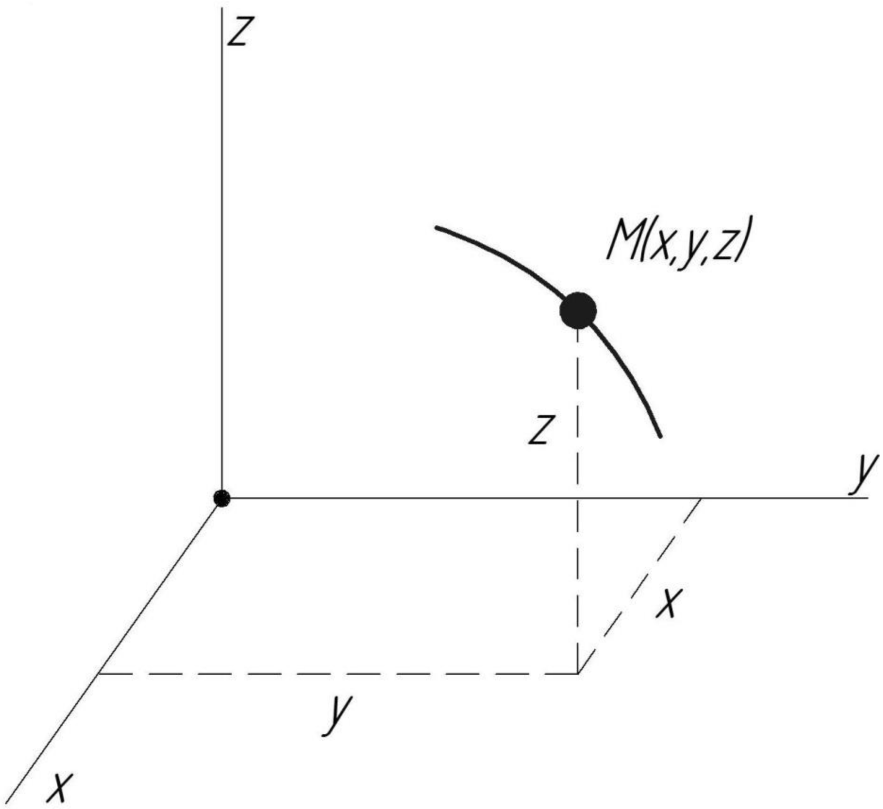

Рис. 2

При движении точки *M* ее координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы задать движение точки координатным способом, необходимо:

1) задать неподвижную систему отсчета O_{xyz};

2) задать координаты точки *M* как функции времени, т.е.

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t). \tag{2}$$

Уравнения (2) выражают уравнения движения точки в декартовых координатах.

Движение точки *M* в плоскости описывается двумя уравнениями, а прямолинейное движение – одним.

Координатный способ задания движения точки применяется для решения различных технических задач.

Уравнения (2), определяющие движение точки, одновременно являются уравнениями траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время *t*.

При исключении из этих уравнений параметра *t* получаются уравнения траектории точки в явной (координатной) форме.

Пример 1. Снаряд движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 t cos\alpha, \tag{3}$$

$$y = v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

Найти: траекторию снаряда.

Решение: из уравнения (3) находим параметр *t*

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}.$$

Подставив значение *t* в уравнение (4), получим:

$$y = v_0 sin\alpha \frac{x}{v_0 cos\alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = tg\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}.$$

Ответ: траекторией снаряда является парабола, ось симметрии которой параллельна оси *Oy*.

Пример 2. Точка движется согласно уравнениям:

$$x = 2\sin\pi t\,, \tag{5}$$

$$y = 3\cos\pi t. \tag{6}$$

Найти траекторию точки.

Решение: преобразуем уравнения (5) и (6):

$$\sin\pi t = \frac{x}{2}\,,$$

$$\cos\pi t = \frac{y}{3}.$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим уравнение траектории движения точки:

$$\sin^2\pi t + \cos^2\pi t = 1,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: траекторией точки является эллипс.

3. ***Естественный способ задания движения точки***

Если траектория точки известна, то выбрав на ней начало отсчета *O*, положение точки *M* на траектории можно определить криволинейной координатой *s* (рис. 3).

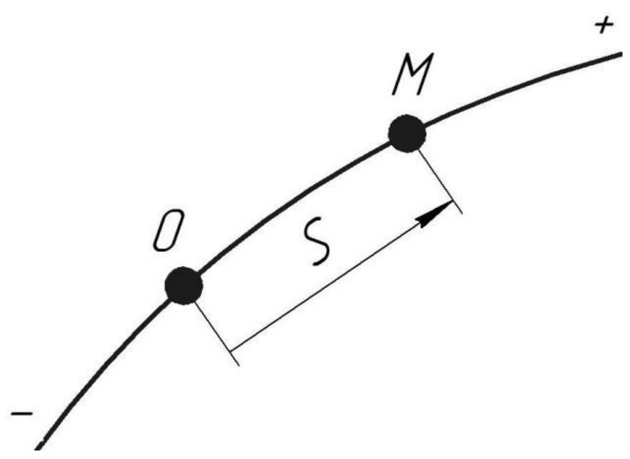

Рис. 3

При движении точки по траектории криволинейная координата непрерывно изменяется, т.е. координата s является функцией времени.

Значит, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо:

1) задать траекторию точки;
2) задать начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета криволинейной координаты;
3) задать криволинейную координату s как функцию времени, т.е.

$$s = s(t). \qquad (7)$$

Уравнение (7) является уравнением движения точки в естественной форме. Естественный способ задания движения точки применяется для решения различных технических задач в случаях, когда траектория точки заранее известна.

3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки является годографом ее радиус-вектора $\vec{r}$.

Скоростью точки называется вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета. Обозначается $\vec{v}$, основная размерность *м/с*.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M_1, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1$. Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overrightarrow{\mathrm{MM}_1}$, который называется вектором перемещения (рис. 4).

Из треугольника OOM_1:

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}_1} = \vec{r_1} - \vec{r} = \Delta\vec{r}.$$

Вектор перемещения точки $\overrightarrow{\mathrm{MM}_1}$ является приращением $\vec{r}$ радиус-вектора точки за промежуток времени Δt .

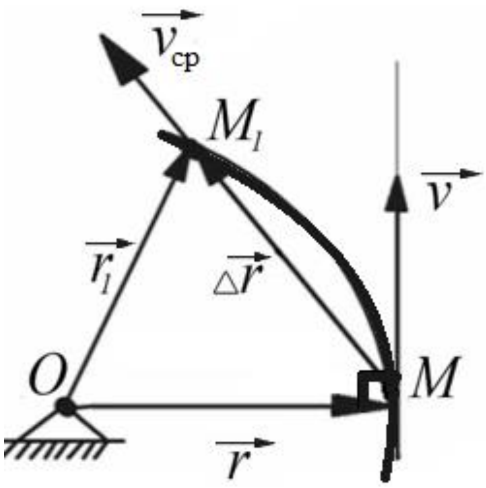

Рис. 4

Отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это перемещение произошло, представляет собой вектор средней скорости $\vec{v}_{ср}$ воображаемого движения точки *M* по хорде MM_1, т.е.

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора $\vec{v}_{ср}$, совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ перемещения точки.

Взяв предел средней скорости, при условии, что промежуток времени Δt стремится к нулю, получим вектор скорости точки в данный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{ср} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ ,$$

или

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (8)$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора точки по времени.

Поскольку предельным положением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения. Скорость точки является вектором, условимся в дальнейшем вместо термина «вектор скорости» употреблять термин «скорость».

Ускорение точки – это вектор, характеризующий быстроту изменения скорости, как по величине, так и по направлению в пространстве.

Если точка движется по траектории BC и в момент времени t ее скорость равна $\vec{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ равна $\vec{v_1}$ (рис. 5), то среднее ускорение точки за время Δt определяется по формуле:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{d\vec{v}}{\Delta t},$$

где $d\vec{v}$ – приращение скорости за время Δt

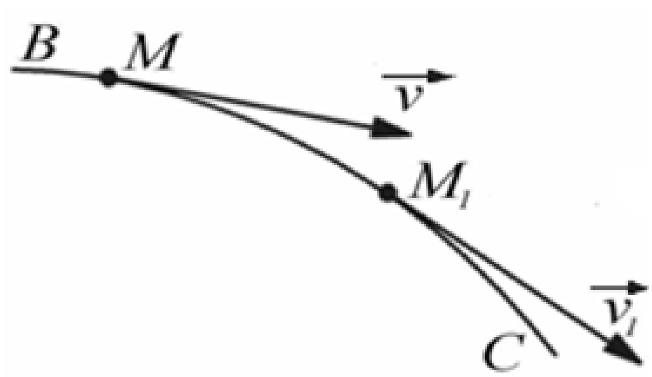

Рис. 5

Построим годограф скорости (рис. 6). Среднее ускорение точки $\vec{a}_{\text{ср}}$ направлено по $\Delta\vec{v}$.

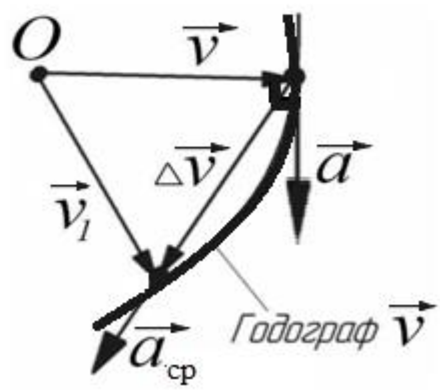

Рис. 6

Ускорение точки в данный момент времени определяется пределом, к которому стремится среднее ускорение $\vec{a}_{ср}$ при Δt, стремящемся к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \ ,$$

или

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \, . \qquad (9)$$

Ускорение точки в данный момент времени определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от радиус-вектора точки по времени дважды.

Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ ЗАДАНИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ КООРДИНАТНЫМ СПОСОБОМ

При координатном способе задания движения модуль и направление скорости точки определяются через проекции вектора скорости на оси координат.

Пусть движение точки задано координатным способом, т.е. заданы уравнения движения точки (2).

Представим радиус-вектор $\vec{r}$ точки *M* в следующем виде (рис. 7):

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы (орты), взятые на осях координат *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

Вектор скорости точки по определению равен производной от радиус-вектора точки по времени. Учитываем при этом, что единичные векторы

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянны по модулю и направлению.

Получим:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right) = \\ = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}. \tag{10}$$

С другой стороны, вектор скорости точки можно разложить на составляющие по осям координат следующим образом:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \tag{11}$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси координат.

Сравнивая равенства (10) и (11), заключаем, что коэффициенты при одинаковых единичных векторах в правых частях этих равенств должны быть равны, т.е.

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y};\ v_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}.$$

Проекции скорости точки на оси координат равны производным от соответствующих координат точки по времени.

По известным проекциям, модуль и направление скорости определяется по формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{i}}\right) = \frac{v_x}{v}; \cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{j}}\right) = \frac{v_y}{v};\ \cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{k}}\right) = \frac{v_z}{v}.$$

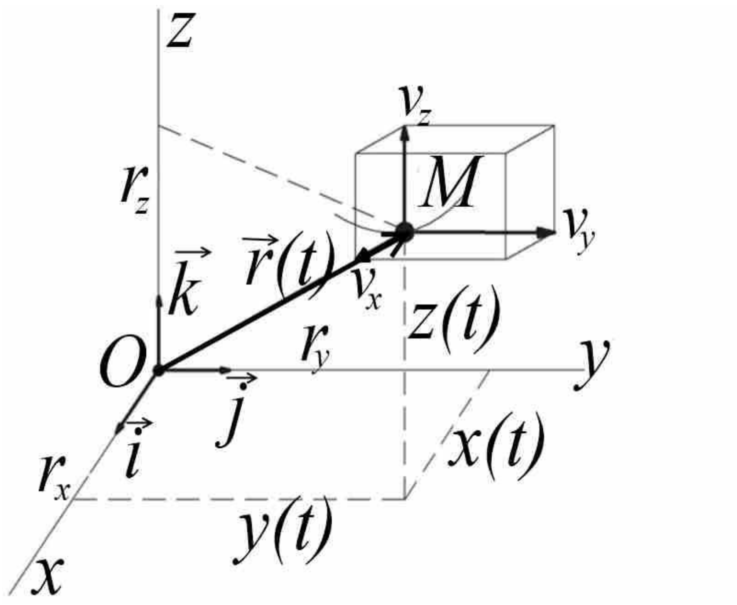

Рис. 7

Ускорение точки в этом случае также определяется через проекции на координатные оси. Проекции ускорения точки определяются первыми производными по времени от соответствующих проекций скорости или вторыми производными по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x},$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}.$$

По известным проекциям $a_x; a_y, a_z$ величина ускорения определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами:

$$cos(\widehat{\vec{a},\vec{\imath}}) = \frac{a_x}{a};\ cos(\widehat{\vec{a},\vec{\jmath}}) = \frac{a_y}{a};\ cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a}.$$

5. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Пусть движение точки задано естественным способом, т.е. известны: траектория точки, начало и направление отсчета криволинейной координаты и уравнение движения точки (рис. 8). В момент времени t точка занимает положение *M*, а ее координата $s = \overset{\frown}{OM}$. В момент времени $t_1 = t + \Delta t$ точка переместилась в положение M_1, определяемое криволинейной координатой $s_1 = s + \Delta s$, $\overset{\frown}{OM_1} = \overset{\frown}{OM} + \overset{\frown}{MM_1}$.

Приращение криволинейной координаты точки за время Δt

$$\Delta s = s_1 - s.$$

Проведем из произвольного неподвижного центра O_1 радиус-векторы в точки *M* и M_1. Теперь зависимость радиус-вектора точки от времени представляет собой сложную функцию $\vec{r}\big(s(t)\big)$.

Вектор скорости точки в данный момент времени определяем по теореме о дифференцировании сложной функции:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \qquad (12)$$

Выясним значение вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$. Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен вдоль вектора $\Delta\vec{r}$. При $\Delta S \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки *M* в сторону увеличения координаты *s*, а модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}\right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{\left|\overline{M_1 M}\right|}{\overset{\frown}{M_1 M}} = 1.$$

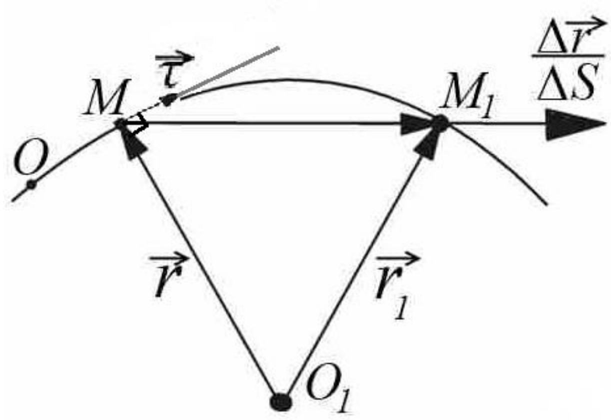

Рис. 8

Таким образом, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты.

Значит, этот вектор есть единичный вектор касательной, т.е.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

Тогда из равенства (12) получим векторное выражение скорости точки:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau},$$

где $\frac{ds}{dt}$ – проекция скорости на касательную, которая определяет алгебраическую величину скорости. Следовательно, алгебраическая величина скорости равна производной от криволинейной координаты точки по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Если $\dot{s} > 0$, то точка движется в сторону увеличивающихся значений координаты s, т.е. направление скорости $\vec{v}$ совпадает с направлением орта $\vec{\tau}$ касательной.

Если $\dot{s} < 0$, то точка движется в сторону уменьшающихся значений криволинейной координаты s, т.е. направление скорости $\vec{v}$ противоположно направлению орта $\vec{\tau}$ касательной.

Таким образом, знак алгебраической величины скорости указывает направление движения точки по траектории.

Вектор ускорения $\vec{a}$ при естественном способе задания движения имеет две составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau$ – касательное ускорение, $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение.

Касательное ускорение характеризует быстроту изменения величины скорости точки и находится по формуле:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Алгебраическое значение касательного ускорения

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки. Если v и $\frac{d^2 s}{dt^2}$ имеют одинаковые знаки, скорость и касательное ускорение направлены в одну сторону, а точка совершает ускоренное движение, в противном случае скорость и касательное ускорение направлены в противоположные стороны, а точка совершает замедленное движение.

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению и находится по формуле:

$$\vec{a}_n = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{\rho}.$$

Нормальное ускорение *всегда* положительно и направлено к центру кривизны траектории:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Заметим, что единичные векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны в любой момент времени. Тогда полное ускорение точки может быть найдено по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

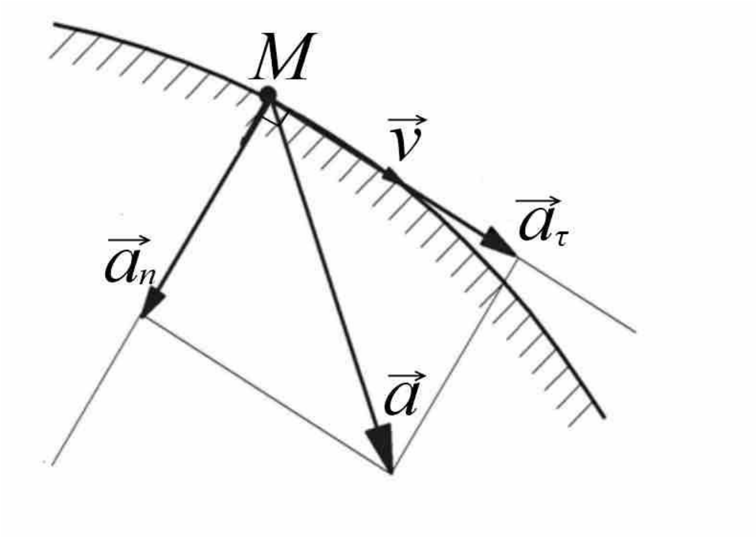

Рис. 9

6. ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Изучение движения твердого тела является более сложным и в общем случае не сводится к изучению движения отдельной точки тела. Знание кинематических характеристик, описывающих различные виды движения тела и отдельных его точек, позволяет решать задачи исследования движения сложных механических комплексов и их подсистем.

При изучении кинематики твердого тела сначала устанавливаются кинематические характеристики движения всего тела, а затем уже изучается движение каждой из его точек в отдельности.

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоское (или плоскопараллельное);

- движение тела вокруг неподвижной точки (или сферическое движение);
- общий случай движения тела.

Приступая к изучению движения тела, нужно прежде всего установить, к какому из указанных видов движения оно относится.

Поступательное и вращательное являются простейшими видами движения твердого тела, остальные – сложными.

7. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается параллельно самой себе.

Поступательное движение не следует путать с прямолинейным движением. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Примерами поступательного движения тела могут служить: движение кузова машины, движущейся по прямолинейному пути, движение поршня двигателя машины, движение ползуна кривошипно-шатунного механизма и т.д.

Свойства поступательного движения тела определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Для доказательства теоремы рассмотрим поступательное движение тела относительно системы координат *Oxyz* (рис. 10).

Выбираем две произвольные точки тела *A* и *B*, проведем вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий эти точки. Пусть в момент времени t тело занимало положение (I), а положение точек *A* и *B* определялось радиус-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ тело переместилось в положение (II), и радиус-векторы точек A_1 и B_1 стали $\vec{r}_{A1}$ и $\vec{r}_{B1}$.

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и его движение поступательное, то вектор $\overrightarrow{AB}$ при движении тела не меняет модуля и направления, т.е. в любой момент времени имеет место равенство:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = const.$$

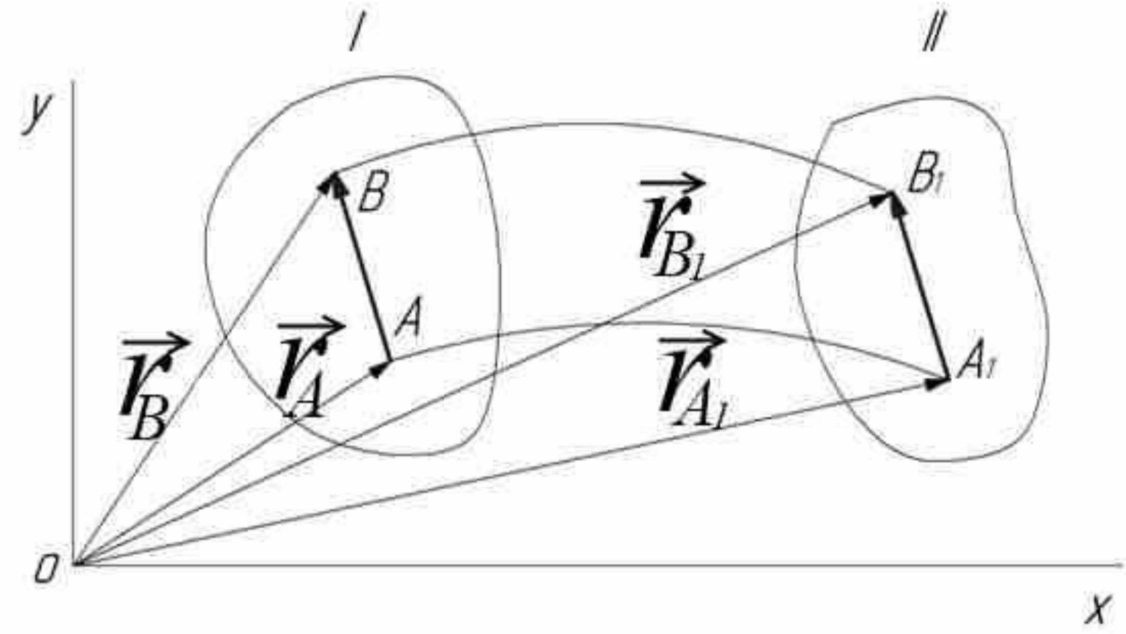

Рис. 10

Из этого следует, что траектория точки *B* получается из траектории точки *A* параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$, т.е. траектории точек *A* и *B* будут одинаковыми (при наложении совпадающими).

Из векторного треугольника *OAB* получаем

$$\vec{r}_{\mathrm{B}} = \vec{r}_{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}. \tag{13}$$

Дифференцируя равенство (13) по времени, найдем

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B\,, \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A, \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = 0, т.к\ \ \overrightarrow{AB} = const,$$

окончательно получаем

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A, \tag{14}$$

т.е. скорости точек A и B геометрически равны.

Аналогично, дифференцируя равенство (14) по времени, найдем ускорения точек A и B:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt},$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A ,$$

т.е. ускорения точек A и B геометрически равны. Теорема доказана.

Поскольку точки A и B выбраны произвольно, полученные результаты относятся ко все точкам тела. Установленные свойства поступательного движения позволяют свести его изучение к изучению движения отдельной точки тела, т.е. к задаче кинематики точки. Скорость и ускорение, общие для всех точек поступательно движущегося тела, называют скоростью и ускорением тела.

При любом другом движении тела его точки движутся с различными скоростями и ускорениями, поэтому понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении тела.

8. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ЗАКОН ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.

Для осуществления этого движения достаточно закрепить неподвижно две произвольные точки тела, лежащие на этой прямой, и они во все время движения будут оставаться неподвижными.

Для определения положения вращающегося тела зададим направление оси вращения Z и проведем через нее две полуплоскости: неподвижную полуплоскость H и подвижную полуплоскость $П$, связанную с телом и вращающуюся вместе с ним (рис. 11).

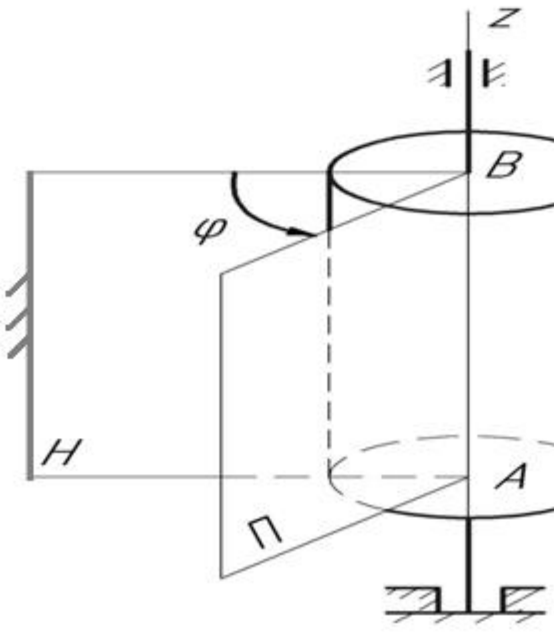

Рис. 11

Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости *Н* к подвижной полуплоскости *П*, называется углом поворота тела φ.

Угол поворота тела считается положительным, когда он отложен против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси вращения *Z*. Угол поворота тела обычно измеряется в радианах. Часто угол поворота тела выражают через число оборотов *N* тела.

Поскольку один оборот тела соответствует 2π радиан, то получаем

$$\varphi = 2\pi N.$$

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, поэтому, чтобы знать положение тела в любой момент времени, нужно знать зависимость угла поворота φ от времени t:

$$\varphi = \varphi(t). \qquad (15)$$

Уравнение (15) выражает закон вращательного движения тела. Оно полностью определяет положение тела в любой момент времени. Следовательно, вращательное движение тела имеет одну степень свободы.

9. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ТЕЛА

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются угловая скорость и угловое ускорение тела.

Угловой скоростью называется вектор, характеризующий быстроту и направление вращения тела. Обозначается $\vec{\omega}$, размерность

$$[\omega] = \frac{рад}{c} = \frac{1}{c} = \text{c}^{-1}.$$

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ приращение угла поворота составляет $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то отношение приращения угла поворота к промежутку времени, за который оно произошло, называется средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (16)$$

Переходя в равенстве (16) к пределу при стремлении промежутка времени к нулю, получим алгебраическую величину угловой скорости тела в данный момент времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi.$$

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна производной от угла поворота тела по времени.

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела:

- если угловая скорость $\omega > 0$, то тело вращается против хода часовой стрелки;
- если угловая скорость $\omega < 0$, то тело вращается по ходу часовой стрелки.

Вектор угловой скорости тела направлен вдоль оси вращения, так чтобы с его конца мы видели вращение тела происходящим против хода часовой стрелки. Вектор угловой скорости есть вектор скользящий, т.е. за его начало можно взять любую точку, лежащую на оси вращения тела.

Угловым ускорением называется вектор, характеризующий изменение с течением времени вектора угловой скорости тела.

Обозначается $\vec{\varepsilon}$, размерность

$$[\varepsilon] = \frac{рад}{с^2} = \frac{1}{с^2} = с^{-2}.$$

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который оно произошло, называется средним угловым ускорением тела за этот промежуток времени:

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{17}$$

Переходя в (17) к пределу при стремлении промежутка времени к нулю, получим алгебраическую величину углового ускорения тела в данный момент времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Знак углового ускорения дает возможность установить, является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным. Если знаки угловой скорости и углового ускорения одинаковы, тело вращается ускоренно, а если их знаки различны – замедленно.

Вектор углового ускорения тела также направлен вдоль оси вращения. При ускоренном вращении направления $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают, а при замедленном – противоположны (рис. 12).

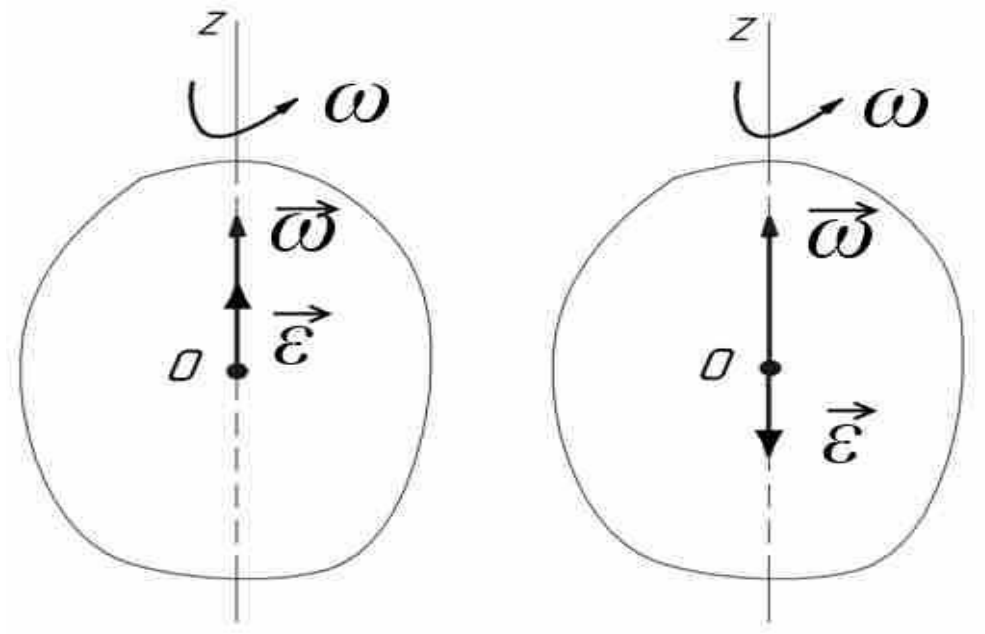

Рис. 12

10. РАВНОМЕРНОЕ И РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА

Равномерным называется вращение тела с постоянной угловой скоростью. Следовательно, для характерного равномерного вращения имеем:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const,$$

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \tag{18}$$

Проинтегрируем уравнение (18) в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0 = 0$, при котором угол поворота равен φ_0, и произвольному моменту времени t, при котором угол поворота равен φ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt\,;$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{19}$$

Уравнение (19) выражает *закон равномерного вращения тела*. Угловая скорость равномерного вращения тела равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине промежутка времени:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

В технике угловую скорость равномерного вращения обычно определяют числом оборотов в минуту и обозначают n.

Так как один оборот равен 2π радиан, то зависимость между угловой скоростью ω $[c^{-1}]$ и n [об/мин] имеет вид:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30};$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Равнопеременным называется вращение тела с постоянным угловым ускорением. Следовательно, для равнопеременного вращения имеем:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const,$$

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \tag{20}$$

Интегрируя уравнение (20) в пределах, соответствующих начальному и конечному моментам времени, получим:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt;$$

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t.$$

Последнее уравнение представляет собой закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{21}$$

Запишем уравнение (21) в виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \qquad (22)$$

Проинтегрируем уравнение (22) в соответствующих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t \cdot dt \;\; ;$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \; ;$$

Таким образом, получим закон равнопеременного вращения тела:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Если угловая скорость и угловое ускорение имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные – равнозамедленным.

Равномерное и равнопеременное вращения имеют большое значение в технике. Так, вал двигателя машины при пуске в ход совершает равноускоренное вращение; при достижении номинального числа оборотов – равномерное вращение и при выключении двигателя – равнозамедленное.

11. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

При вращательном движении тела все его точки описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Радиус каждой окружности равен расстоянию соответствующей точки тела от оси вращения. Скорость точки вращающегося тела называется вращательной или линейной скоростью этой точки.

Если за время dt тело повернулось на угол $d\varphi$, то точка *M* этого тела совершила элементарное перемещение вдоль траектории (окружности), равное (рис.13):

$$ds = \overset{\frown}{M_1M} = R \cdot d\varphi.$$

Вращательная скорость точки

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}R;$$

$$v = \omega \cdot R. \qquad (23)$$

Скорость точки вращающегося тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону вращения тела.

Из формулы (23) следует, что вращательные скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения.

Выберем на оси вращения произвольную точку *O* и проведем из нее радиус-вектор $\vec{r}$ точки *M* (рис. 13). Из треугольника *OCM* получаем:

$$R = r \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}).$$

Тогда модуль вращательной скорости точки *M*

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \cdot sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}).$$

Вычислим модуль векторного произведения векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}).$$

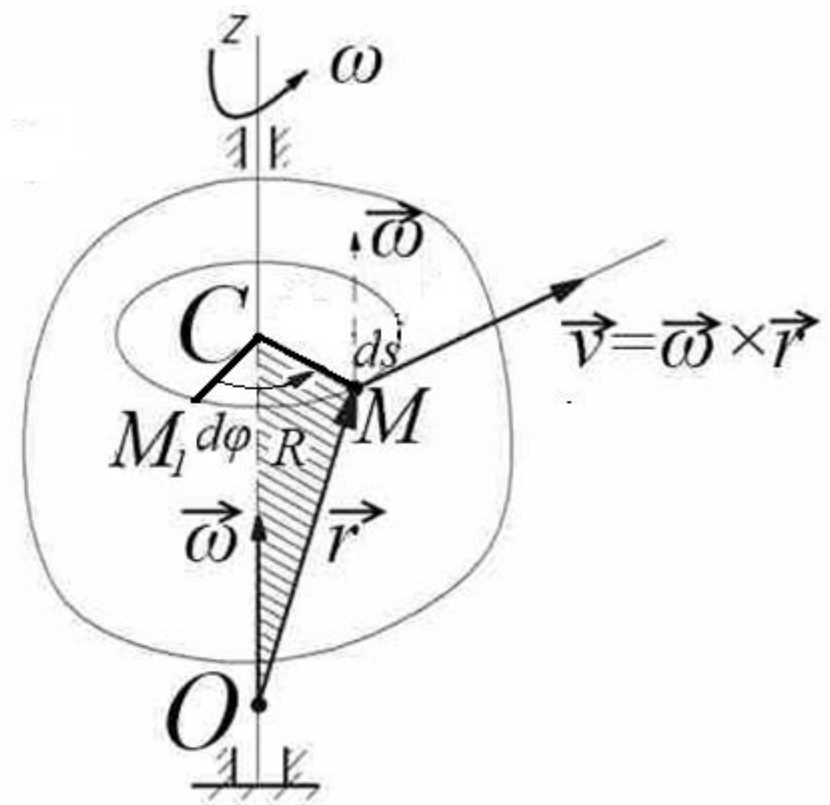

Рис. 13

Вращательная скорость $\vec{v}$ направлена перпендикулярно к плоскости треугольника *OCM*, т.е. к плоскости векторов сомножителей $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Если смотреть навстречу вектору $\vec{v}$, можно видеть поворот вектора $\vec{\omega}$ к вектору $\vec{r}$ на угол $(\widehat{\vec{\omega},\vec{r}})$ происходящим против хода часовой стрелки, т.е. направление вращательной скорости $\vec{v}$ совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega}\times\vec{r}$. Следовательно, векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}\times\vec{r}$ имеют равные модули и одинаковое направление, т.е. равны между собой:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{24}$$

Вращательная скорость точки вращающегося тела равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из любой точки оси вращения.

Равенство (24) является одним из основных соотношений кинематики твердого тела.

Ускорение точки *M* вращающегося тела определим по его составляющим: касательному ускорению, которое в этом случае называется вращательным ускорением и обозначается $\vec{a}^{\text{вр}}$, и нормальному ускорению, которое в этом случае называется центростремительным ускорением и обозначается $\vec{a}^{\text{ц}}$ (рис. 14).

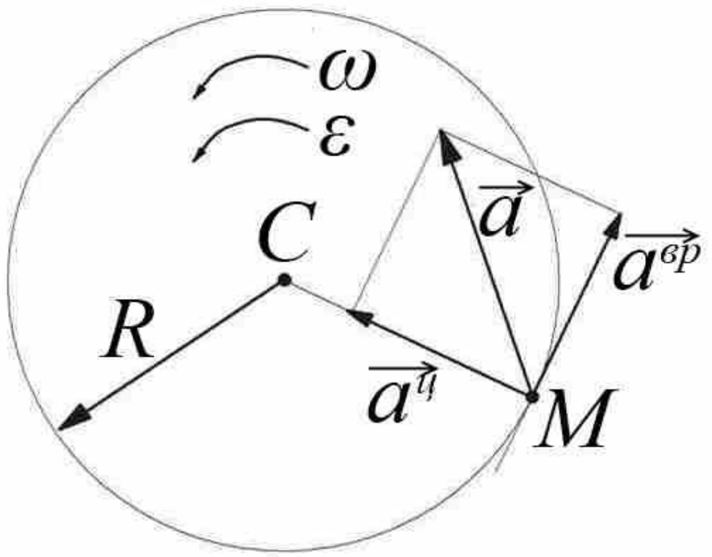

Рис. 14

По формулам для касательного ускорения точки получаем:

$$a^{\text{вр}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R.$$

Величина вращательного ускорения точки тела равна произведению углового ускорения тела на расстояние от этой точки тела до оси вращения:

$$a^{\text{вр}} = \varepsilon R. \tag{25}$$

Направление вращательного ускорения точки тела согласуется с направлением ее вращательной скорости в случае ускоренного вращения тела и противоположно ей в случае замедленного вращения тела.

Для центростремительного ускорения

$$a^{\text{ц}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Следовательно,

$$a^{\text{ц}} = \omega^2 R. \tag{26}$$

Модуль центростремительного ускорения точки тела равен произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлено центростремительное ускорение *всегда* к центру окружности, описываемой точкой.

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{(a^{\text{вр}})^2 + (a^{\text{ц}})^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно,

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (27)$$

Направление полного ускорения $\vec{a}$ определяется углом α между векторами ускорений полного $\vec{a}$ и центростремительного $\vec{a}^{\text{ц}}$ (радиусом окружности, описываемой точкой) по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^{\text{вр}}}{a^{\text{ц}}} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Анализируя выражения (25), (26) и (27), нетрудно убедиться в том, что полное ускорение точки вращающегося тела, так же, как и его составляющие – вращательное и центростремительное ускорения, прямо пропорционально расстоянию от точки тела до оси вращения.

Таким образом, в каждый момент времени при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки, лежащие на поверхностях концентрических цилиндров, оси симметрии которых совпадают с осью вращения, имеют равные по величине ускорения.

При равномерном вращении тела

$$\omega = const; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

а значит,

$$a^{\text{вр}} = \varepsilon R = 0.$$

Следовательно, при равномерном вращении ускорение точки тела совпадает с центростремительным ускорением, и его модуль

$$a = a^{ц} = \omega^2 R.$$

В этом случае полное ускорение $\vec{a}$ точки тела, так же, как и центростремительное, направлено к центру окружности, описываемой этой точкой.

12. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Описание механического движения зависит от выбора системы отсчета (неподвижной или подвижной). Во многих практически важных задачах материальная точка совершает движение одновременно вместе с подвижной системой (телом) относительно некоторой неподвижной системы отсчета и в подвижной системе отсчета.

Сложное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях. Сложное движение совершает и любая точка колеса движущейся машины, так как она одновременно участвует в двух движениях: движется по окружности колеса относительно корпуса машины и движется вместе с корпусом машины.

Рассмотрим движущееся тело *A* и точку *M*, не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое движение. Через произвольную точку движущегося тела проведем оси координат *Oxyz*, неизменно связанные с этим телом. Систему осей *Oxyz* называют подвижной системой отсчета.

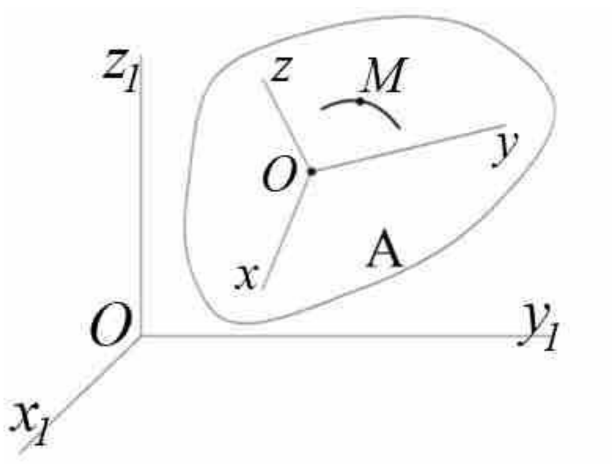

Рис. 15

Проведем также неподвижные оси координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связанные с Землей. Систему осей $Ox_1y_1z_1$ называют неподвижной системой отсчета (рис. 15).

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ называется *абсолютным движением*. В приведенном выше примере это движение точки обода колеса машины относительно Земли.

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением* точки и обозначают $\vec{v}_{абс}$, $\vec{a}_{абс}$.

Движение точки M относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *относительным движением*. В приведенном примере это движение точки обода колеса машины относительно корпуса машины.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют *относительной скоростью* и *относительным ускорением* точки и обозначают $\vec{v}_{отн}$, $\vec{a}_{отн}$.

Движение подвижной системы отсчета и неизменно связанного с ней тела A по отношению к неподвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ является для точки M переносным движением.

Переносным движением называется движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной системе. В приведенном примере это движение точки обода колеса машины вместе с корпусом машины.

Скорость и ускорение точки тела A, связанного с подвижной системой отсчета, совпадающей в данный момент времени с движущейся точкой M**,** называют *переносной скоростью* и *переносным ускорением* точки M и обозначаются $\vec{v}_{пер}$, $\vec{a}_{пер}$.

Приведем еще один пример: Пусть человек идет вдоль радиуса вращающейся платформы (рис.16). Свяжем подвижную систему отсчета с платформой, а с поверхностью Земли – неподвижную. Тогда движение платформы относительно Земли будет переносным, движение человека по отношению к платформе – относительным, а движение человека по отношению к Земле (вместе с платформой) – абсолютным.

Переносной скоростью человека $\vec{v}_{пер}$ и его переносным ускорением $\vec{a}_{пер}$ будет скорость и ускорение той точки платформы, где находится человек в данный момент времени.

Таким образом, абсолютное движение является сложным, состоящим из относительного и переносного движений точки.

Основная задача изучения сложного движения точки состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

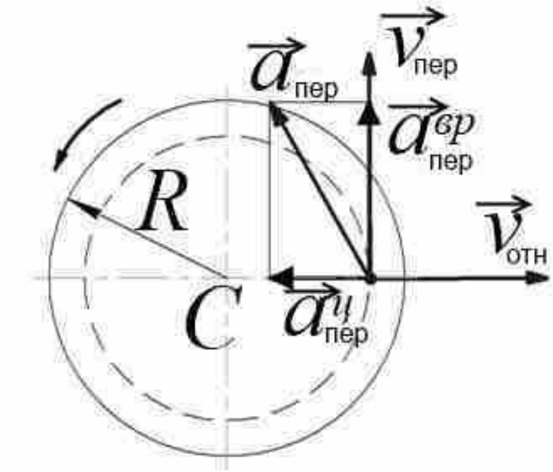

Рис. 16

13. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим точку M, совершающую сложное движение (рис. 17). Положение точки M в неподвижной системе отсчета будем определять радиус-вектором $\vec{r}_M$, а в подвижной – радиус-вектором $\vec{r}$. Радиус-вектор точки O начала подвижной системы координат обозначим $\vec{r}_o$.

Обозначим единичные векторы подвижных осей координат $Oxyz$ через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и разложим радиус-вектор $\vec{r}$ на составляющие по этим осям:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Из векторного треугольника OO_1M имеем:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_o + \vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (28)$$

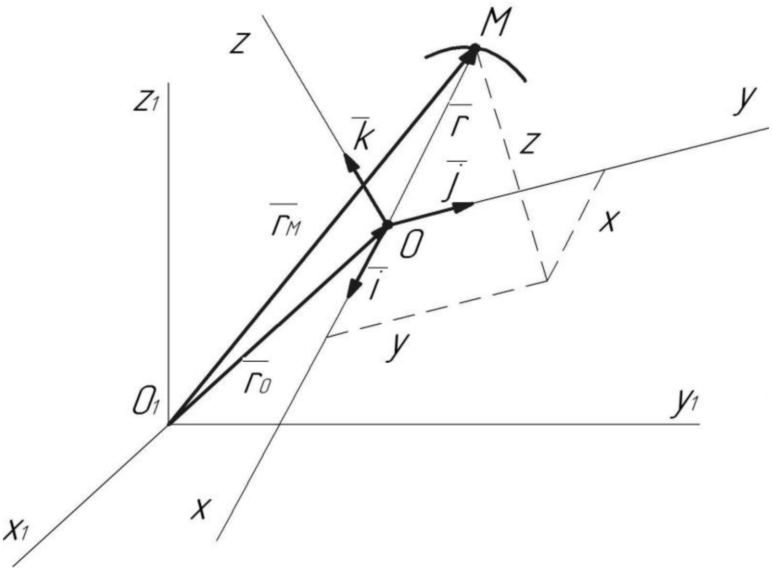

Рис. 17

Для определения относительной скорости точки M нужно мысленно остановить переносное движение, т.е. подвижную систему координат $Oxyz$, и считать векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ постоянными. В этом случае, дифференцируя равенство (28) по времени, получим:

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{29}$$

Для определения переносной скорости точки M, нужно мысленно остановить относительное движение точки и определить скорость ее как точки, неизменно связанной с подвижной системой. В этом случае, дифференцируя равенство (28) по времени, при условии, что координаты точки M постоянны, получим:

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{30}$$

Абсолютную скорость точки M найдем, дифференцируя по времени равенство (28), в котором все члены переменные:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r_0} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) =$$
$$= \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt} =$$
$$= \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) + \left(\frac{d\vec{r}_o}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right).$$

Сравнивая последнее равенство с равенствами (29) и (30), приходим к выводу, что в правой части этого равенства первое из двух выражений заключенных в скобки, представляет собой относительную скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ точки, а второе – переносную скорость точки $\vec{v}_{\text{пер}}$.

Следовательно,

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}. \tag{31}$$

Равенство (31) выражает *теорему о сложении скоростей*, которая формулируется следующим образом: абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей этой точки.

Абсолютная скорость $\vec{v}_{абс}$ точки определяется диагональю параллелограмма, построенного на относительной $\vec{v}_{отн}$ и переносной $\vec{v}_{пер}$ скоростях точки как на сторонах (рис. 18).

Модуль абсолютной скорости точки можно аналитически вычислить по формуле:

$$v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн}v_{пер}\cos\left(\widehat{\vec{v}_{отн}, \vec{v}_{пер}}\right)}.$$

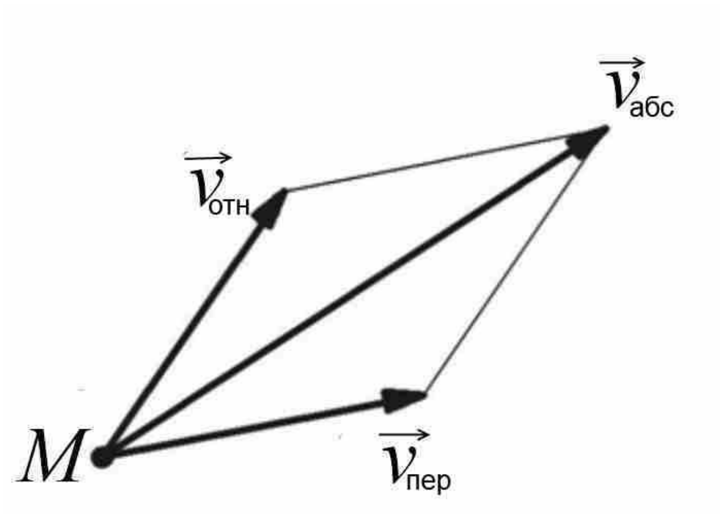

Рис. 18

14. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ

При сложном движении точки ее абсолютное ускорение определяется на основании теоремы Кориолиса (по имени французского ученого Coriolice).

Теорема Кориолиса: при непоступательном переносном движении абсолютное ускорение при сложном движении точки равно геометрической сумме относительного $\vec{a}_{отн}$, переносного $\vec{a}_{пер}$ и кориолисова $\vec{a}_{кор}$ ускорений:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \tag{32}$$

Доказательство: Рассмотрим точку *M*, совершающую сложное движение (рис. 17). Аналогично пункту 13 введем обозначения, определяющие положение точки *M* в неподвижной и подвижной системах отсчета радиус-вектором $\vec{r}_M$ и радиус-вектором $\vec{r}$.

соответственно. Радиус-вектор точки O начала подвижной системы координат обозначим $\vec{r}_o$. Единичные векторы подвижных осей координат $Oxyz$ обозначаются $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда радиус-вектор $\vec{r}_M$ представляется в виде (28):

$$\vec{r}_M = \vec{r}_o + \vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Чтобы найти абсолютное ускорение $\vec{a}_{\text{абс}}$ точки M, надо найти производную $\frac{d\vec{v}_{\text{абс}}}{dt}$ от абсолютной скорости этой точки по времени:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{v}_{\text{абс}}}{dt}.$$

С учетом формул (29), (30), (31) получим:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d^2\vec{r}_O}{dt} + +x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} +$$

$$+\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} +$$

$$+2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right).$$

Разделим слагаемые на три группы следующим образом:

$$\frac{d^2\vec{r}_O}{dt} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{a}_{\text{пер}};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \vec{a}_{\text{отн}};$$

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = \vec{a}_{\text{кор}} .$$

Рассмотрим каждое из приведенных выше равенств в отдельности. Переносное ускорение вычисляется в предположении, что точка *M* не двигается по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz* (*x=const*, *y=const*, *z=const*) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета. Поэтому ускорение $\vec{a}_{\text{пер}}$ представляет собой переносное ускорение точки *M*. Относительное ускорение вычисляется так, как если бы относительные координаты *x*, *y*, *z* изменялись с течением времени, а орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ оставались неизменными (подвижная система отсчета *Oxyz* как бы покоится, а точка *M* двигается). Поэтому ускорение $\vec{a}_{\text{отн}}$ представляет собой относительное ускорение точки *M*. В последнем равенстве преобразуем левую часть, используя формулы векторной алгебры и формулу (29):

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \ \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \ \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) =$$

$$= 2\left(\vec{\omega} \times \frac{dx}{dt}\vec{i} + \vec{\omega} \times \frac{dy}{dt}\vec{j} + \vec{\omega} \times \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) =$$

$$= 2\vec{\omega} \times \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}}.$$

Ускорение $\vec{a}_{\text{кор}}$ называется *ускорением Кориолиса* и вычисляется по формуле:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение точки *M* равно геометрической сумме ускорений:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

То есть $\vec{a}_{\text{абс}}$ определяется замыкающей стороной многоугольника ускорений. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, который не удовлетворяет условию теоремы Кориолиса.

Частный случай. В случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение при сложном движении точки равно геометрической сумме переносного $\vec{a}_{\text{пер}}$ и относительного $\vec{a}_{\text{отн}}$ ускорений этой точки:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}}.$$

Доказательство: Действительно, в случае, когда переносное движение является поступательным, переносное ускорение точки *M* совпадает с ускорением точки *O* в тот же момент времени. Используя формулы (29), (30) и (31), получим, что абсолютная скорость точки *M* складывается из скорости точки *O,* которая равна скорости точки *M* (переносное движение – поступательное) и относительной скорости точки *M*:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_O + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Дифференцируя данное равенство, а также учитывая, что при поступательном движении подвижных осей орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ остаются постоянными (не изменяются их модули и направление), получим выражение для определения абсолютной скорости точки *M*:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{v}_{\text{абс}}}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} =$$

$$= \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}}.$$

Таким образом, в случае поступательного переносного движения, абсолютное ускорение точки $\vec{a}_{\text{абс}}$ определяется диагональю параллелограмма, построенного на относительном $\vec{a}_{\text{отн}}$ и переносном $\vec{a}_{\text{пер}}$ ускорениях точки как на сторонах.

15. МОДУЛЬ И НАПРАВЛЕНИЕ КОРИОЛИСОВА УСКОРЕНИЯ

Пусть, например, точка M движется равномерно по прямолинейному стержню ОА, который, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{\text{пер}}$ вокруг неподвижной оси O. В момент времени t точка занимает положение M на радиусе OA, а в момент $t+\Delta t$ - положение M' на радиусе OA'.

Кориолисовым ускорением (открыто Кориолисом в 1831г.) называется составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного вращения и вектора относительной скорости точки:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\left(\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}\right). \tag{33}$$

Кориолисово ускорение существует только при сложном движении точки и только в случае, когда переносное движение непоступательное.

Кориолисово ускорение появляется в результате:

- изменения модуля и направления переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;
- изменения направления относительной скорости точки вследствие вращательного переносного движения.

Так как относительное движение равномерное и прямолинейное, то относительное ускорение точки $\vec{a}_{\text{отн}} = 0$. Однако за время Δt постоянная по модулю относительная скорость точки изменяется по направлению от $\vec{v}_{\text{отн}}$ до $\vec{v'}_{\text{отн}}$ вследствие переносного вращения стержня. За время Δt, вследствие относительного перемещения точки вдоль стержня из положения M в положение M', изменяется модуль переносной скорости от $v_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot OM$ до $v'_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot OM'$ и ее направление (рис. 19).

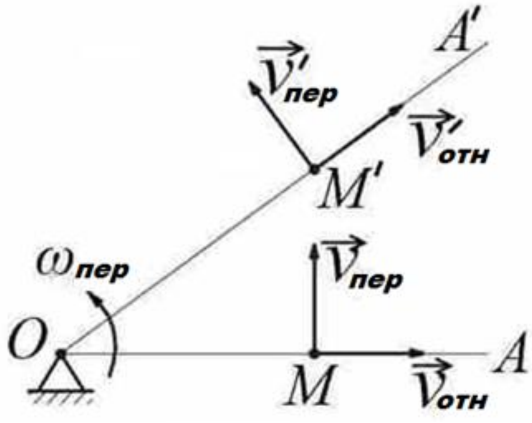

Рис. 19

Эти изменения $\vec{v}_{\text{отн}}$ и $\vec{v}_{\text{пер}}$ вызывают появление кориолисова ускорения, которое как бы поворачивает вектор относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ в направлении переносного вращения. По этой причине его называют поворотным ускорением (предложил русский ученый О. И. Сомов в 1872 г.).

Модуль кориолисова ускорения определяется как модуль векторного произведения (33):

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{v}_{\text{отн}}}\right). \quad (34)$$

Из формулы (34) следует, что кориолисово ускорение обращается в нуль в случаях:

1) если $\omega_{\text{пер}} = 0$, т.е. в случае поступательного переносного движения или в моменты, когда угловая скорость непоступательного переносного движения обращается в нуль;

2) если $v_{\text{отн}} = 0$, т.е. в случае, когда относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ точки параллельна оси переносного вращения.

Направление кориолисова ускорения определяется как направление векторного произведения (33). Вектор кориолисова ускорения $\vec{a}_{\text{кор}}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\omega_{\text{пер}}$ и $\vec{v}_{\text{отн}}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение векторов $\omega_{\text{пер}}$ и $\vec{v}_{\text{отн}}$ видно как происходящее против часовой стрелки.

Для определения направления кориолисова ускорения удобно пользоваться правилом профессора Жуковского: чтобы найти направление кориолисова ускорения, необходимо спроектировать относительную скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ точки на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на $90°$ в сторону переносного вращения (рис 20).

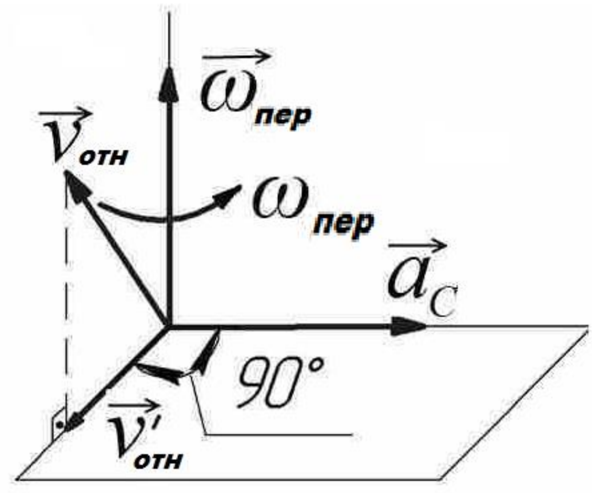

Рис. 20

16. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ПЛОСКОЕ) ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским, или плоскопараллельным, называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости *H* (рис. 21).

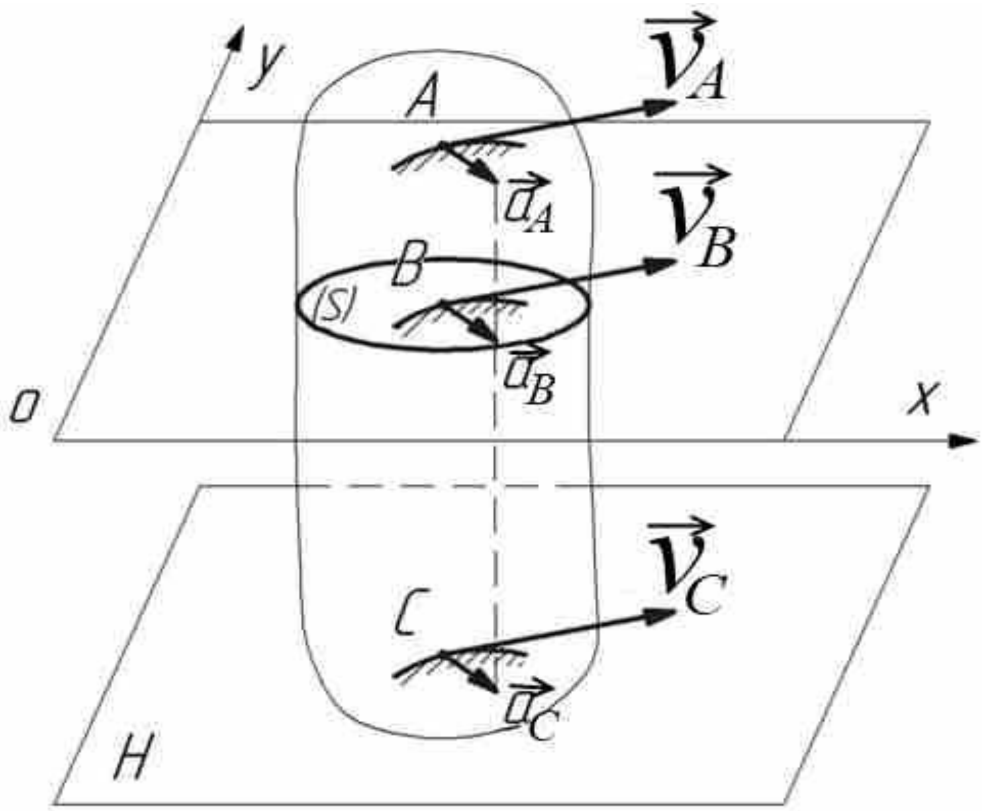

Рис. 21

Это движение имеет большое распространение в технике. Подавляющее большинство встречающихся на практике механизмов являются плоскими, т.е. представляют собой сочленение твердых тел, совершающих плоское движение. Таково, например, движение шатуна кривошипно-ползунного механизма двигателя машины. Плоское движение совершает колесо машины, движущейся по прямолинейному участку пути.

Рассмотрим сечение *S* тела какой-либо плоскостью *Oxy* параллельной неподвижной плоскости *H*. Из определения плоского движения следует, что любая прямая *AB*, проведенная в теле перпендикулярно к неподвижной плоскости *H* (а значит - к сечению *S*) будет перемещаться поступательно, т.е. все точки тела, лежащие на этой прямой, движутся одинаково, так же, как и точка B сечения S.

Траектории точек прямой AB тождественны и параллельны. Скорости этих точек геометрически равны:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C.$$

Ускорения также геометрически равны:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C.$$

Таким образом, для определения движения тела необходимо знать движение лишь одной точки на каждой прямой, проведенной перпендикулярно к плоскости H. Следовательно, плоское движение тела вполне определяется движением плоской фигуры, полученной при пересечения тела любой плоскостью Oxy, параллельной неподвижной плоскости H. В дальнейшем плоскость Oxy будем совмещать с плоскостью чертежа, а вместо всего тела изображать только плоскую фигуру S (рис. 22).

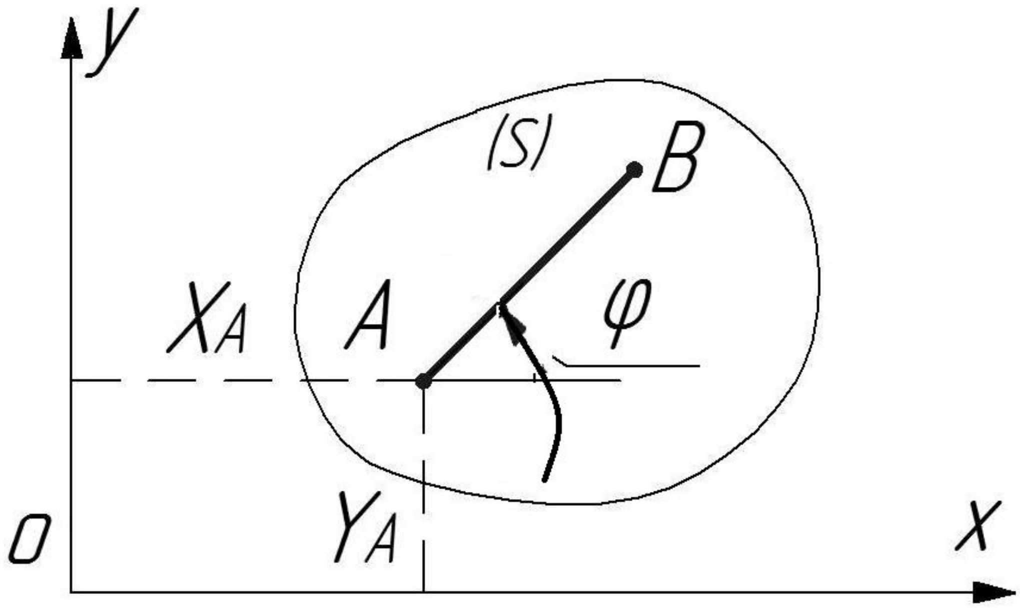

Рис. 22

Рассмотрим два произвольных положения плоской фигуры в плоскости (рис. 23). Положение плоской фигуры в плоскости определяется положением отрезка AB. Перемещение отрезка AB в положение A_1B_1 можно произвести, суммируя поступательное перемещение вместе с полюсом A (или B) и вращение вокруг полюса.

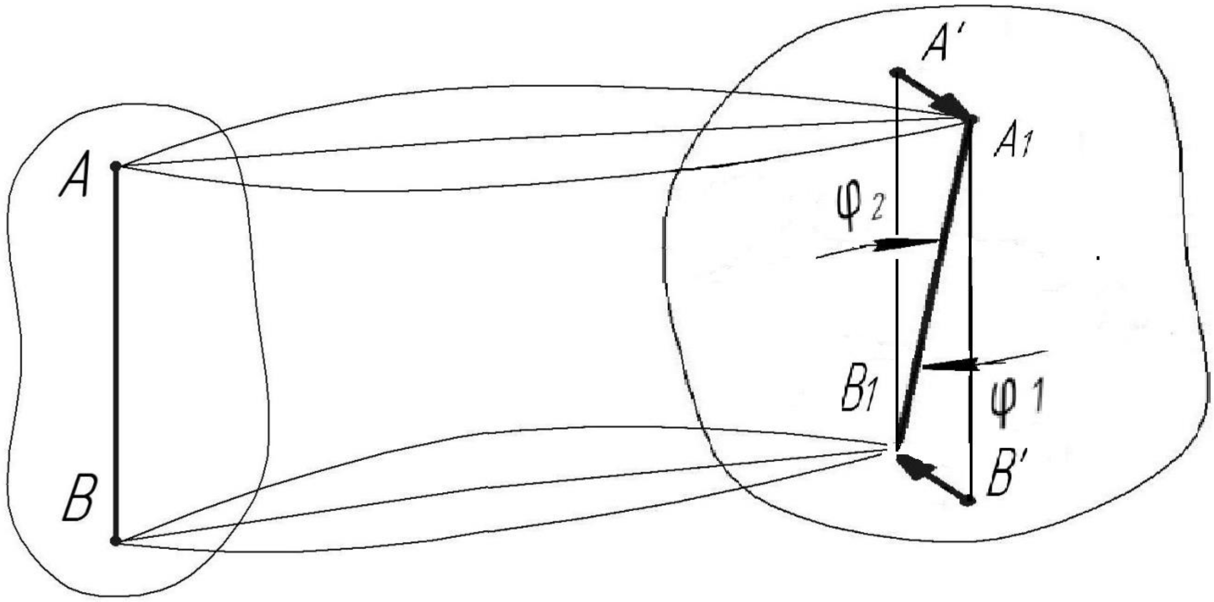

Рис. 23

Положение фигуры S в плоскости Oxy полностью определяется положением какого-либо отрезка AB, проведенного в этом сечении. В свою очередь, положение отрезка AB в плоскости Oxy определяется двумя координатами точки A, называемой полюсом, X_A, Y_A и углом φ, который отрезок AB образует с осью Ox.

При движении тела величины X_A, Y_A и φ будут изменяться, поэтому, чтобы знать положение тела в пространстве в любой момент времени, нужно знать эти параметры как функции времени, т.е.

$$X_A = X_A(t);\ \ Y_A = Y_A(t);\ \ \varphi_A = \ \varphi_A(t). \tag{35}$$

Уравнения (35) являются уравнениями плоского движения тела. Из этих уравнений следует, что плоское движение тела слагается из поступательного движения вместе с полюсом A (определяется первыми двумя уравнениями) и вращательного движения вокруг полюса (определяется третьим уравнением).

При изучении плоского движения за полюс можно выбирать любую точку тела. При этом характеристики поступательной части движения (скорость и ускорение полюса) зависят от выбора полюса, а характеристики вращательной части движения (угловая скорость и угловое ускорение тела) от выбора полюса не зависят, так как угол поворота φ тела от положения полюса не зависит.

17. ТЕОРЕМА О СКОРОСТЯХ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ И СЛЕДСТВИЕ ИЗ НЕЕ (ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ)

Примем произвольную точку *A* тела за полюс и совместим с ней начало системы координат Ax_1y_1, движущейся поступательно.

Выберем также неподвижную систему координат (рис.24). Определим скорость любой точки *M* тела. Для этого из точки *O* начала неподвижной системы координат проведем в точки *A* и *M* радиус-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_M$.

Проведем также радиус-вектор $\overrightarrow{AM}$ из полюса *A* в точку *M*. Поскольку этот радиус-вектор соединяет две точки абсолютно твердого тела, то за все время движения он вращается вокруг полюса *A* с угловой скоростью ω тела, не изменяясь по модулю.

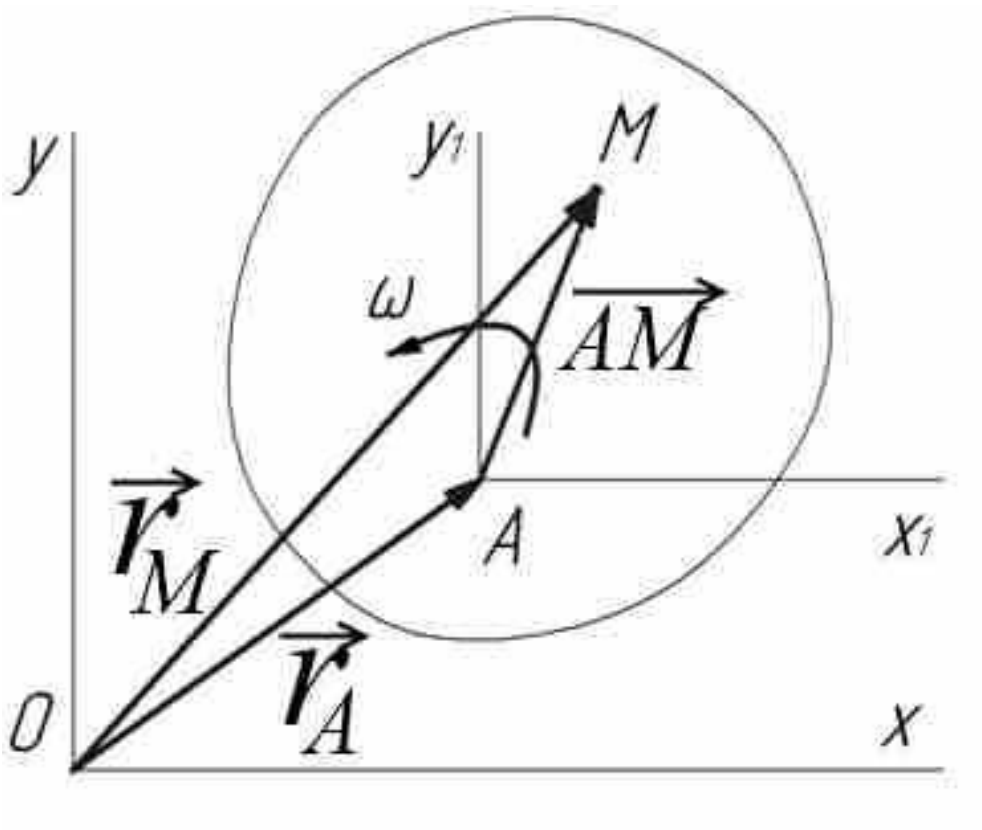

Рис. 24

Из векторного треугольника OAM следует

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AM}\right)}{dt}. \tag{36}$$

В равенстве (36):

1) скорость точки M тела при плоском движении

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M;$$

2) скорость поступательного движущегося полюса

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A;$$

3) вращательная скорость точки M при вращении тела вокруг полюса A

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AM}\right)}{dt} = \vec{v}_{MA}.$$

После подстановки в исходное равенство получаем:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}. \tag{37}$$

Равенство (37) выражает следующую теорему: *скорость любой точки тела при плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.*

Вращательная скорость $\vec{v}_{MA}$ направлена перпендикулярно к отрезку AM в сторону вращения тела и по модулю равна произведению угловой скорости тела на расстояние точки от полюса, т.е. модуль и направление вращательной скорости определяются формулой:

$$v_{MA} = \omega \cdot AM.$$

Причем $\vec{v}_{MA} \perp \overrightarrow{AM}$

Вращательную скорость $\vec{v}_{MA}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ тела на радиус-вектор $\overrightarrow{AM}$ точки *M,* проведенный из полюса *A*.

Скорость точки *M* при плоском движении тела изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке *M* на скорости полюса *A,* перенесенной в точку *M* вокруг полюса *A* (рис. 25):

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

где $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$.

Допустим, что для тела, совершающего плоское движение, известны модуль и направление скорости какой-либо точки *A* и направление движения другой произвольной точки *B* тела. Тогда, принимая точку *A* за полюс, получаем для скорости точки *B* следующее векторное равенство:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

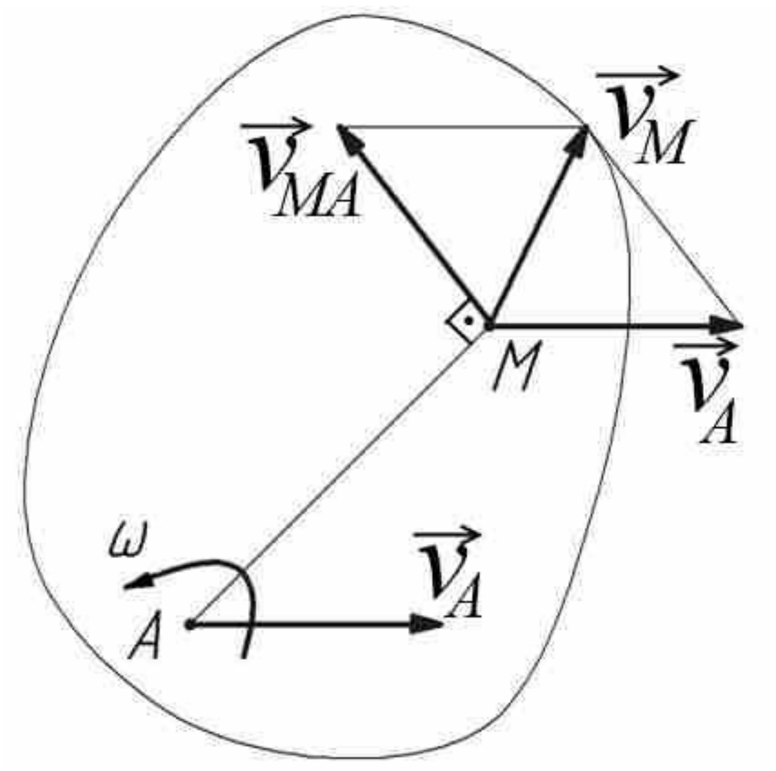

Рис. 25

Построим это векторное равенство при точке *B*, а затем спроецируем его на прямую AB (рис. 26)

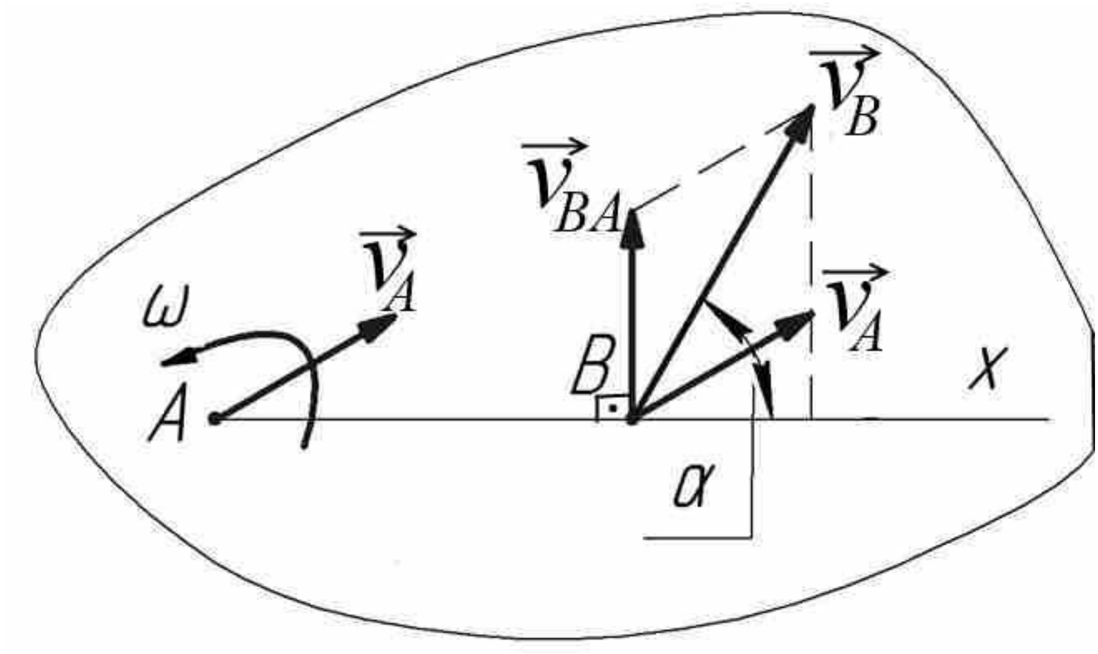

Рис. 26

Получим

$$v_B cos\beta = v_A cos\alpha + v_{BA} cos 90°.$$

Так как $v_{BA} \perp AB$, окончательно получим

$$v_B cos\beta = v_A cos\alpha \ ,$$

или

$$v_{BX} = v_{AX}. \qquad (38)$$

Равенство (38) выражает следующую теорему: *проекции векторов скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, алгебраически равны.* Эта теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление движения этой точки и вектор скорости какой-либо другой точки того же тела.

18. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ (МЦС)

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется связанная с плоской фигурой S точка P, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем, что при непоступательном движении плоской фигуры такая точка всегда существует и ее можно найти.

Пусть в данный момент времени скорость произвольной точки A тела равна $\vec{v}_A$, а угловая скорость тела $\vec{\omega} \neq 0$.

Повернем вектор $\vec{v}_A$ на 90° в сторону вращения тела и отложим в этом направлении отрезок AP:

$$\mathrm{AP} = \frac{v_A}{\omega}.$$

Примем точку A, скорость которой известна, за полюс. Тогда скорость точки P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Построив это векторное равенство при точке P (рис.27), видим, что скорость полюса $\vec{v}_A$ и вращательная скорость точки P тела $\vec{v}_{PA}$ направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Поэтому

$$v_P = v_A - v_{PA} = v_A - \omega \cdot AP = v_A - \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A - v_A = 0.$$

Следовательно, точка P есть МЦС плоской фигуры, так как скорость этой точки в данный момент времени равна нулю.

Таким образом, МЦС находится на перпендикуляре к вектору скорости полюса A на расстоянии от полюса, равном $\frac{v_A}{\omega}$. Направление перпендикуляра находится поворотом вектора $\vec{v}_A$ на 90° в сторону вращения плоской фигуры вокруг полюса.

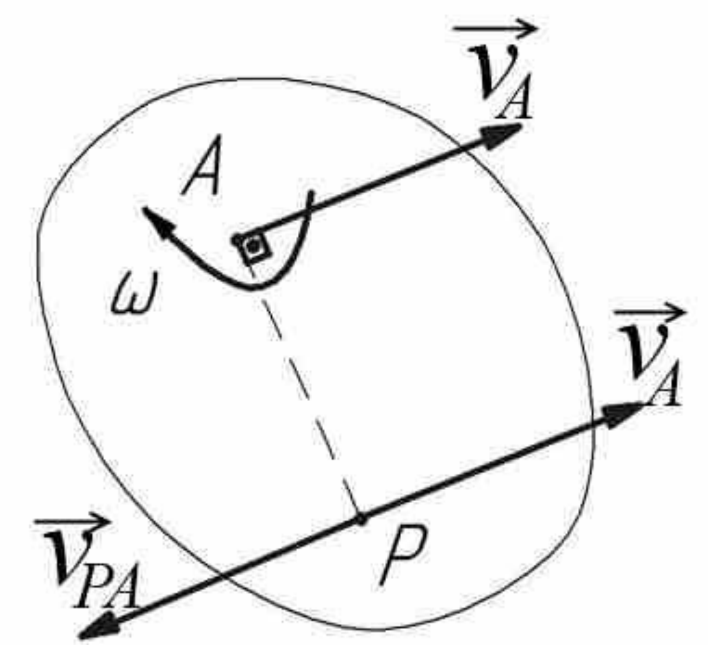

Рис. 27

19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

Примем за полюс мгновенный центр скоростей P и определим скорость движения произвольной точки A. По теореме о скоростях точек плоской фигуры при плоском движении

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP}, \qquad \vec{v}_P = 0.$$

Тогда

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{AP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}.$$

Скорость любой точки плоской фигуры при плоском движении равна вращательной скорости этой точки вокруг МЦС, т.е. равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из МЦС.

Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры распределяются так же, как и при вращательном движении. Скорость любой точки плоской фигуры по модулю равна произведению угловой скорости на расстояние от этой точки до МЦС и направлена перпендикулярно к отрезку, соединяющему точку с МЦС, в сторону вращения тела:

$$v_A = \omega \cdot AP, \qquad v_A \perp AP.$$

Исходя из этого, для различных точек тела

$$v_A = \omega \cdot AP, v_B = \omega \cdot BP, \ldots \ , v_N = \omega \cdot NP, \ldots \tag{39}$$

Деля почленно обе части первых двух равенств из (39), получим:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}.$$

Модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям этих точек от МЦС (рис. 28).

Таким образом, чтобы определить скорости точек тела при плоском движении при помощи МЦС, необходимо знать положение МЦС и угловую скорость тела.

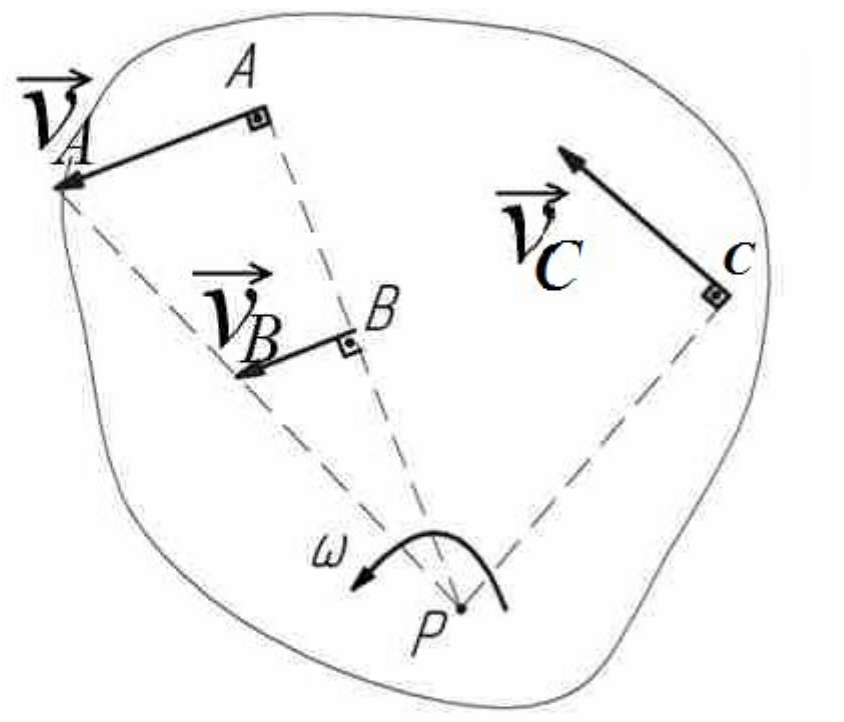

Рис. 28

20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

Случай 1. Плоское движение осуществляется путем качения без проскальзывания плоской фигуры по неподвижной плоской кривой (например, качения колеса по шоссе). В этом случае МЦС находится в точке *P* соприкосновения плоских кривых.

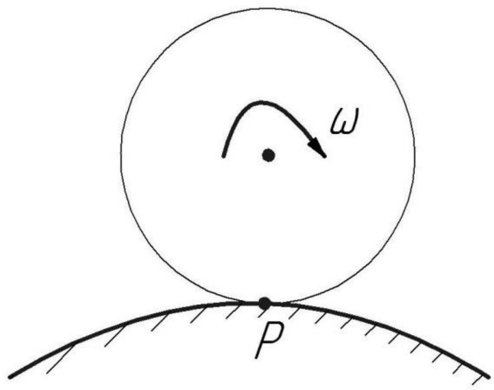

Рис. 29

Следовательно, скорость точки *P* равна нулю, и эта точка есть МЦС плоской фигуры, ограниченной подвижной плоской кривой (рис.29).

Случай 2. Известны направления скоростей точек *A* и *B* плоской фигуры.

В этом случае МЦС находится в точке *P* пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *B* к направлениям их скоростей (рис. 30).

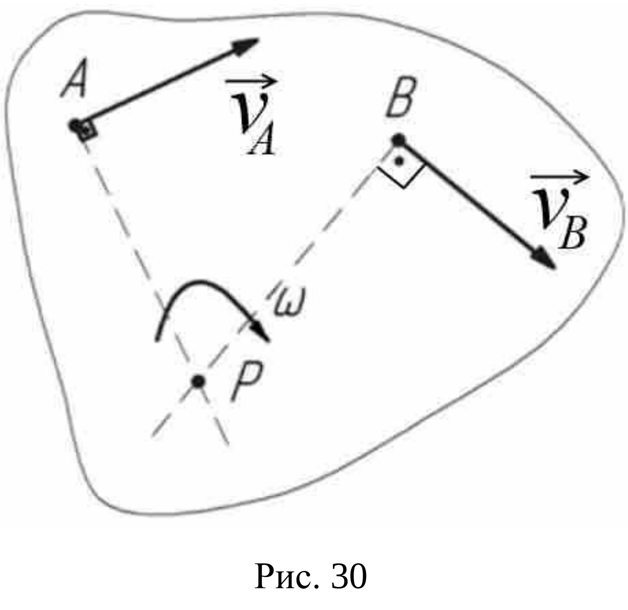

Рис. 30

Случай 3. Скорости двух точек A и B фигуры параллельны между собой и перпендикулярны к отрезку AB, не равны по модулю и направлены в одну или в разные стороны (рис. 31).

В этом случае МЦС находится в точке P пересечения отрезка AB или его продолжения с прямой, проходящей через концы векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Это следует из условия пропорциональности модулей скоростей точек A и B их расстояниям от МЦС, согласно которому концы векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ лежат на прямой, проходящей через МЦС. Пересечение этой прямой с прямой AB или ее продолжением определяет положение МЦС плоской фигуры.

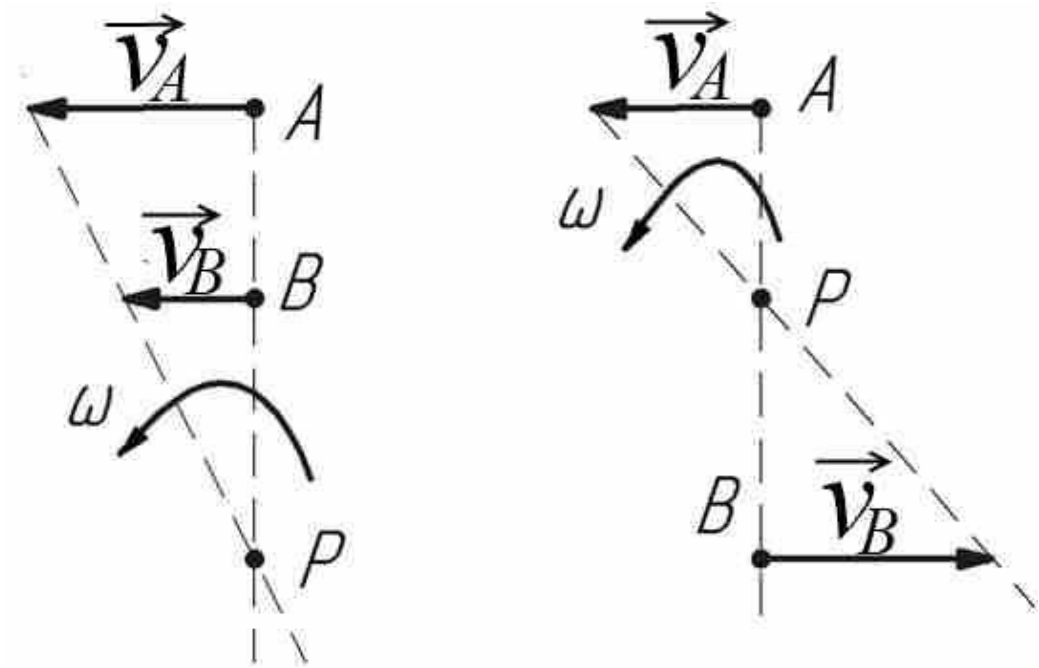

Рис. 31

Случай 4. Скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны между собой, равны по модулю и направлены в одну сторону (рис. 32).

В этом случае МЦС находится в бесконечности. Расстояния всех точек фигуры от МЦС равны между собой:

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \cdots = \infty.$$

Угловая скорость при этом равна нулю:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$

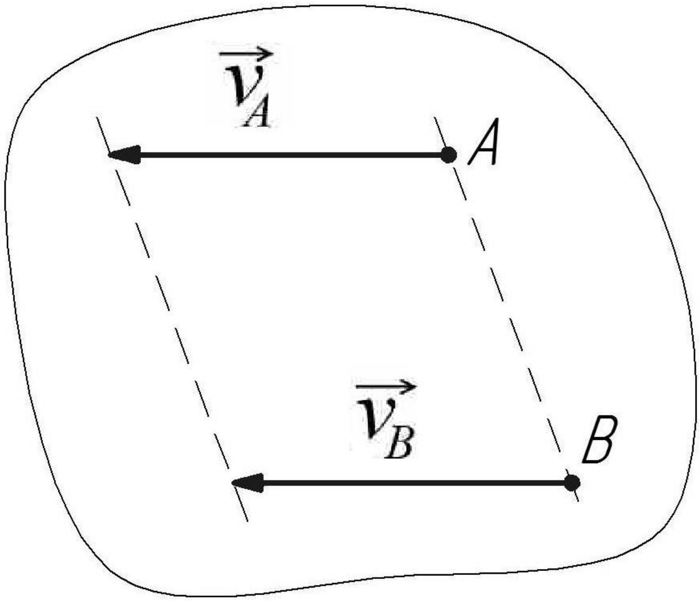

Рис. 32

Скорости точек плоской фигуры в рассматриваемый момент времени геометрически равны между собой, т.е. тело совершает поступательное движение.

21. ТЕОРЕМА ОБ УСКОРЕНИЯХ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется геометрической суммой ускорения полюса и ускорения во вращательном движении точки вокруг этого полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \qquad (40)$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса *A*, $\vec{a}_{BA}$ – ускорение во вращательном движении точки *B* вокруг полюса *A*.

Ускорение во вращательном движении $\vec{a}_{\text{BA}}$, в свою очередь, складывается из двух составляющих: центростремительного $\overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{ц}}}$ и вращательного $\overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{вр}}}$:

$$\vec{a}_{\text{BA}} = \overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{ц}}} + \overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{вр}}}. \tag{41}$$

Величины $\overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{ц}}}$ и $\overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{вр}}}$ определяются следующим образом:

$$a_{\text{BA}}^{\text{ц}} = \omega^2 \cdot AB,$$
$$a_{\text{BA}}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AB. \tag{42}$$

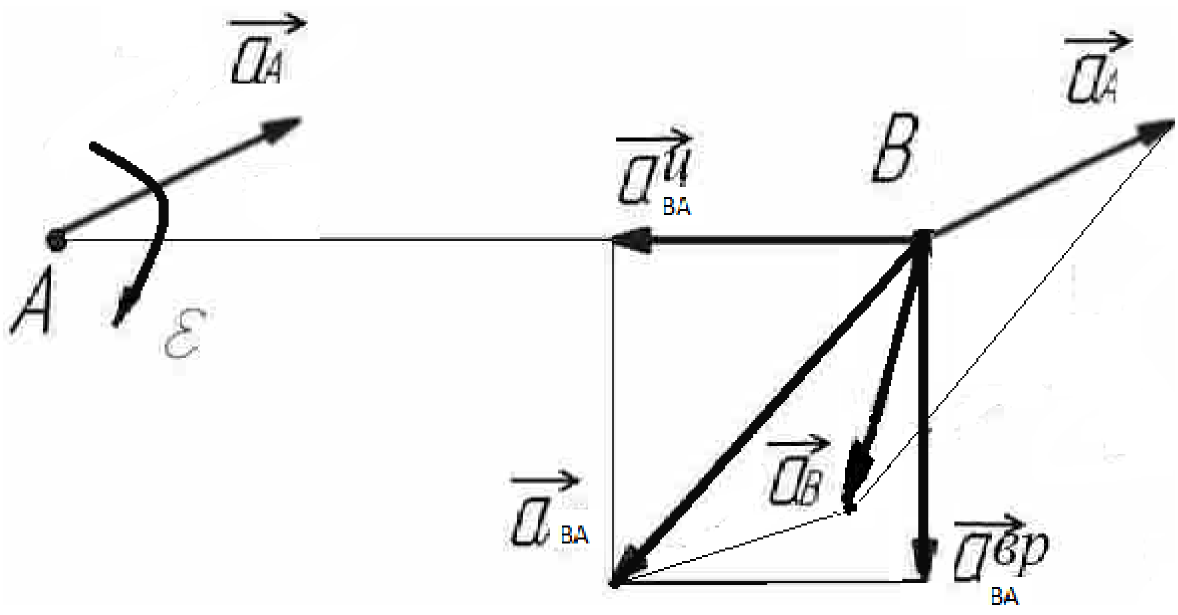

Рис. 33

С учетом (40), уравнение (41) принимает вид:

$$\vec{a}_{\text{B}} = \vec{a}_{\text{A}} + \overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{ц}}} + \overrightarrow{a_{\text{BA}}^{\text{вр}}}.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы (42), видим, что для определения ускорения точки *B* плоской фигуры необходимо знать ускорение полюса *A*, а также угловую скорость и угловое ускорение этой фигуры.

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2009.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – Москва: ЧеРо, 1999.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, 2009.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.

Содержание

Учебное издание

Маргарита Владимировна Максименко
Наталия Владимировна Кузнецова
Виктор Евгеньевич Головко
Сергей Гаррикович Петров
Иван Владимирович Клюшкин

Теоретическая механика

Часть 2

Кинематика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2013, поз.50

Подп. к печати 19.09.2013. Формат 60x84/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Объём 3,5 печ.л.; 3,5. уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Изд. № 52. Цена “ С”. Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, ул. Ивана Черных, 4.