

Введение

Прикладная механика, в отличие от теоретической, оперирует не с материальной точкой, а с деформированным твердым телом, и позволяет производить расчеты различных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость к вибрациям, ударам и другим механическим воздействиям.

Прочность конструкции — свойство конструкции сопротивляться разрушению (разделению на части) под действием внешних нагрузок.

Жёсткость — это способность конструкции сопротивляться деформации при внешнем воздействии.

Прикладная механика позволяет оценивать механические свойства не только больших строительных конструкций (как "сопротивление материалов"), но и малогабаритных, характерных для приборостроения.

1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1. Основная модель прикладной механики

В любой точной науке при аналитическом описании состояния или явлений используются модели, которые упрощают (идеализируют) реальные свойства объекта, отражая наиболее существенные. Прикладная механика использует модель деформируемого твердого тела (в отличие от теоретической механики, использующей модель абсолютно жесткого тела). Это *макроскопическая модель*, т. е. тело рассматривается как сплошное; молекулярное и атомарное строение не учитывается.

При построении модели идеализируются свойства материала, внешние нагрузки, форма тела и его закрепление.

1.1.1. Свойства материала

Считаем, что материал конструкции обладает следующими свойствами:

- сплошностью — способностью заполнять весь объём, без всяких пустот;
- однородностью — неизменностью физической структуры и химического состава малого объема, выделенного в окрестности любой точки тела;
- изотропностью — одинаковостью физических свойств во всех направлениях;

- упругой деформируемостью. Деформация, в общем случае, это изменение формы и (или) размеров тела под действием внешних нагрузок. Если деформация полностью исчезает после устранения вызвавшей ее причины, то она называется упругой, если нет – то остаточной или пластичной.

Указанная модель довольно значительно идеализирует свойства твердого тела, однако она позволяет эффективно решать многие практические задачи.

1.1.2. Внешние нагрузки

Под внешними нагрузками в прикладной механике понимаются силы и моменты сил (далее – просто моменты).

Сила в механике (как и в физике) – мера механического взаимодействия объектов.

Основное деление – силы, внешние по отношению к объекту, и внутренние. Внешние силы вызваны внешними факторами, например, ударом другого тела. Внутренние являются ответной реакцией на внешние. Физически они объясняются взаимодействием частиц тела (молекул, атомов), однако этот уровень строения вещества основная модель прикладной механики не рассматривает. Внутренние силы, в конечном счете, определяют прочность и жесткость конструкции, и им будут посвящены следующие разделы нашего курса.

Продолжим классификацию внешних сил. Силы бывают поверхностные и объемные.

Поверхностные силы – силы, приложенные к поверхности элементарного объёма сплошной среды и обусловленные взаимодействием с частицами среды в соседних элементарных объёмах. Поскольку поверхностные силы возникают при непосредственном механическом контакте между взаимодействующими элементами, их иногда называют также контактными силами.

Вектор поверхностной силы $\bar{P}_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta F}$, где $\Delta \bar{P}$ – равнодействующая всех сил, действующих на малую площадку ΔF в окрестности точки A , \bar{n} – нормаль к площадке ΔF в этой точке (рис.1.1). Поверхностная сила измеряется в Н/м².

Обычно задачи решают в декартовой системе координат (x, y, z) , и вместо вектора $\Delta \bar{P}$ рассматривают его проекции на оси координат P_x, P_y и P_z .

Примеры поверхностных сил: сила давления жидкости на погруженное

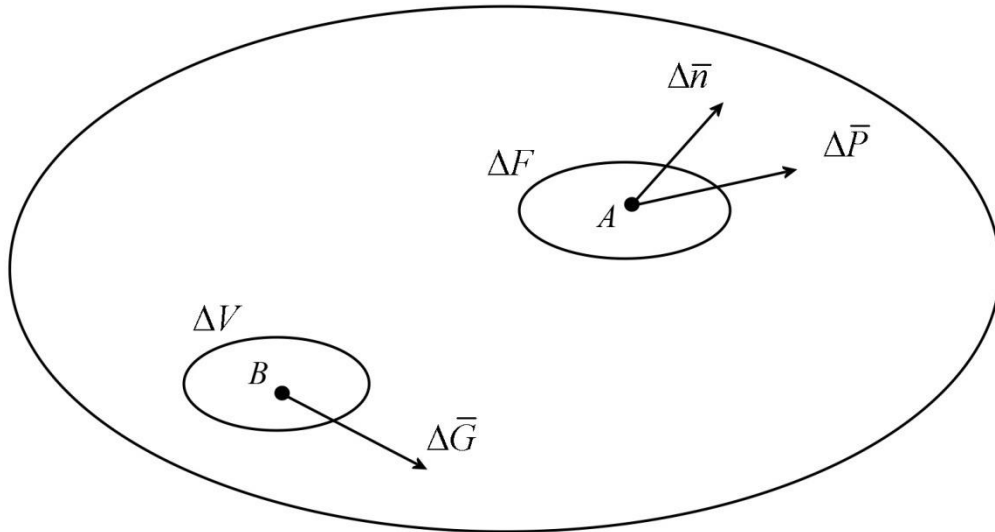


Рис. 1.1

тело; контактная сила при соударении тел.

Частными случаями поверхностной силы являются распределенная по длине нагрузка и сосредоточенная сила.

Распределенная по длине нагрузка – аналог поверхностной силы для плоского объекта (рис. 1.2). Вектор распределенной по длине нагрузки $\vec{q}_n = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta l}$, где

$\Delta \vec{P}$ – равнодействующая всех сил, действующих на отрезок Δl , \vec{n} – нормаль к этому отрезку. Проекции вектора \vec{q}_n на оси координат – q_{nx} , q_{ny} и q_{nz} . Если нормаль к отрезку Δl совпадает с одной из осей координат (например, z), то пишут вместо $q_{nz} = q_{zz}$ просто q_z . Интенсивность распределенной по длине нагрузки q измеряется в Н/м.

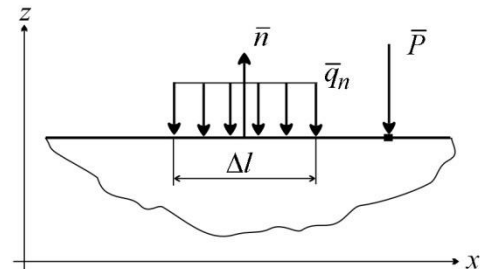


Рис. 1.2

Если площадка, на которой действует поверхностная сила, мала по сравнению с размерами объекта, то говорят о *сосредоточенной силе* (P на рис. 1.2). Единица измерения – Н.

Объемные силы действуют на любую точку тела, как на поверхности, так и внутри. Вектор объемной силы $\vec{g} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta V}$, где $\Delta \vec{G}$ – равнодействующая

ющая всех сил, действующих на малый объем ΔV (рис. 1.1). Измеряется объемная сила в Н/м^3 . Проекции вектора объемной силы на оси координат обозначаются g_x , g_y и g_z . Примеры объемных сил: сила тяжести; сила инерции, сила электростатического взаимодействия.

Момент силы. Момент силы относительно некоторой точки O – вектор, равный векторному произведению силы \vec{P} на радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы (рис. 1.3): $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{r}$. Модуль момента $M = Pr \cdot \sin\alpha = Ph$, где $h = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы. Единица измерения – $\text{Н}\cdot\text{м}$.

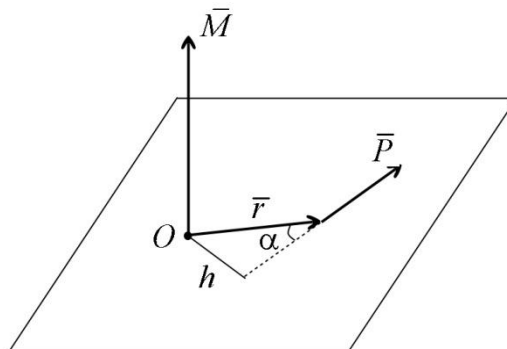


Рис. 1.3

По аналогии с распределенной по длине нагрузкой вводят распределенный по длине момент m ; единица измерения – $(\text{Н}\cdot\text{м})/\text{м}$.

Момент силы относительно оси M – скаляр, равный проекции вектора \vec{M} на соответствующую ось.

1.1.3. Форма тела

Реальные конструкции представляют собой сложные системы, состоящие из множества элементов, однако с точки зрения прикладной механики все элементы в соответствии с соотношением габаритных размеров можно разделить на три группы: стержни, оболочки и массивные тела.

Стержень – объект, у которого один из размеров много больше двух других.

Оболочка – объект, у которого один из размеров много меньше двух других; плоская оболочка называется пластиной.

Массивное тело – объект, у которого все размеры одного порядка.

В приборостроительных конструкциях около 80 % элементов являются стержнями, поэтому им мы будем уделять основное внимание в нашем курсе.

Стержень можно представить себе как тело, которое образуется при движении плоской фигуры в направлении, перпендикулярном плоскости фигуры; центр тяжести фигуры при этом прочерчивает линию, называемую осью стержня. Если ось стержня – прямая линия, то это *прямолинейный*

стержень. Если ось стержня – кривая линия, то его называют *криволинейным стержнем*.

Сечение стержня, перпендикулярное его оси, называется поперечным, остальные – наклонными. Если поперечное сечение при движении вдоль оси не изменяется, то тогда имеет место *стержень постоянного сечения*; в противном случае – *стержень переменного сечения*. Если поперечное сечение при движении вдоль оси вращается вокруг касательной к оси, то стержень называют *естественно-закрученным*. Примером прямого естественно-закрученного стержня постоянного сечения является рабочая часть сверла. Используются также и другие названия. В частности, стержень, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*, а стержень, передающий вращательное движение, – *валом*.

1.1.4. Закрепление стержня

Положение незакрепленного стержня на плоскости определяется тремя независимыми параметрами, называемыми степенями свободы (в пространстве – шестью степенями свободы). Простейшую конструкцию можно получить, ликвидировав одну степень свободы путем наложения связи. Чтобы конструкция была геометрически неизменяемой, число связей должно быть не меньше числа степеней свободы.

Обычно стержень закрепляют с помощью шарниров (рис. 1.4, *a*). Шарнирная связь в точке *B* запрещает движение стержня по вертикали, не препятствуя горизонтальному и вращательному движению. Такой шарнир называется подвижным.

Шарнирная связь в точке *A* не дает возможности двигаться стержню как по вертикали, так и по горизонтали, оставляя доступным вращательное движение. Такой шарнир называется неподвижным.

В целом стержень, показанный на рис. 1.4, *a* представляет собой геометрически неизменяемую конструкцию, поскольку три наложенные связи ликвидируют все три степени свободы стержня. Условное обозначение

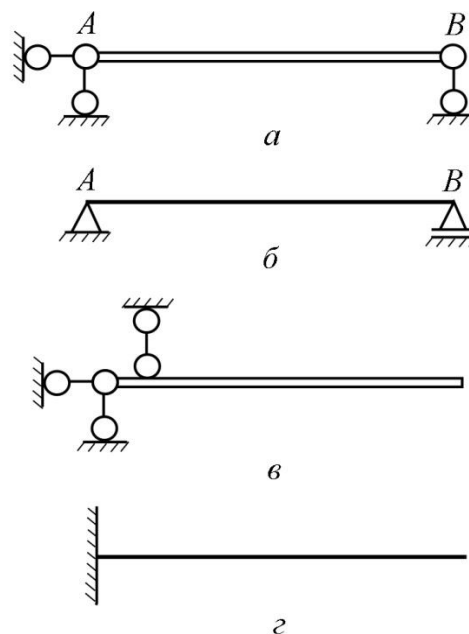


Рис. 1.4

стержня, закрепленного с помощью подвижного и неподвижного шарниров, показано на рис. 1.4, б.

Если все три связи находятся вблизи одного конца стержня (рис. 1.4, в), такое закрепление называется заделкой. Условное обозначение заделки показано на рис. 1.4, г.

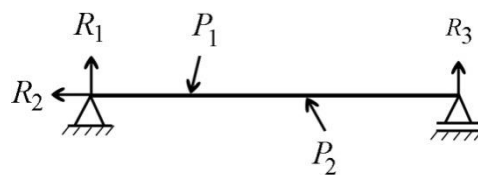


Рис. 1.5

При нагружении закрепленного стержня внешними силами и моментами в соответствии с третьим законом Ньютона в связях возникают усилия, называемые опорными реакциями. Они вместе с нагрузками образуют систему сил, внешнюю по отношению к стержню (рис. 1.5). Равнодействующая этой системы равна нулю, поскольку стержень находится в покое. Если число связей равно числу степеней свободы стержня, опорные реакции могут быть найдены из уравнений статики (сумма всех сил равна нулю и сумма всех моментов равна нулю). Если количество связей больше числа степеней свободы (рис. 1.6), такая система называется статически неопределимой и для нахождения опорных реакций необходимо рассматривать деформацию стержня.

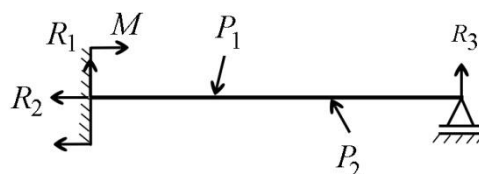


Рис. 1.6

1.2. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня в случае произвольного пространственного нагружения

Наличие внутренних усилий в поперечных сечениях стержня можно показать, используя метод сечений. Пусть стержень находится в равновесии под действием системы внешних сил (рис. 1.7, а). Мысленно разобьем его плоскостью 1-1, перпендикулярной оси стержня, на две части и отбросим, например, правую (рис. 1.7, б). Теперь система внешних сил изменилась; однако поскольку весь стержень находится в состоянии равновесия, и любая его часть также находится в состоянии равновесия. Равновесие левой части стержня сохраняется потому, что в поперечном сечении возникают внутренние усилия: главный вектор внутренних сил \bar{Q} и главный вектор моментов внутренних сил \bar{L} , которые уравновешивают оставшиеся внешние усилия.

Проекции вектора \bar{Q} на оси координат (рис. 1.7, в) имеют специальные названия: проекция на ось x – нормальная сила N , на оси y и z – перерезыва-

ющие силы Q_y и Q_z соответственно. Аналогично проекция вектора \bar{L} на ось x – M_x – называется крутящим моментом, проекции на оси y и z – M_y и M_z – изгибающими моментами (рис. 1.7, з).

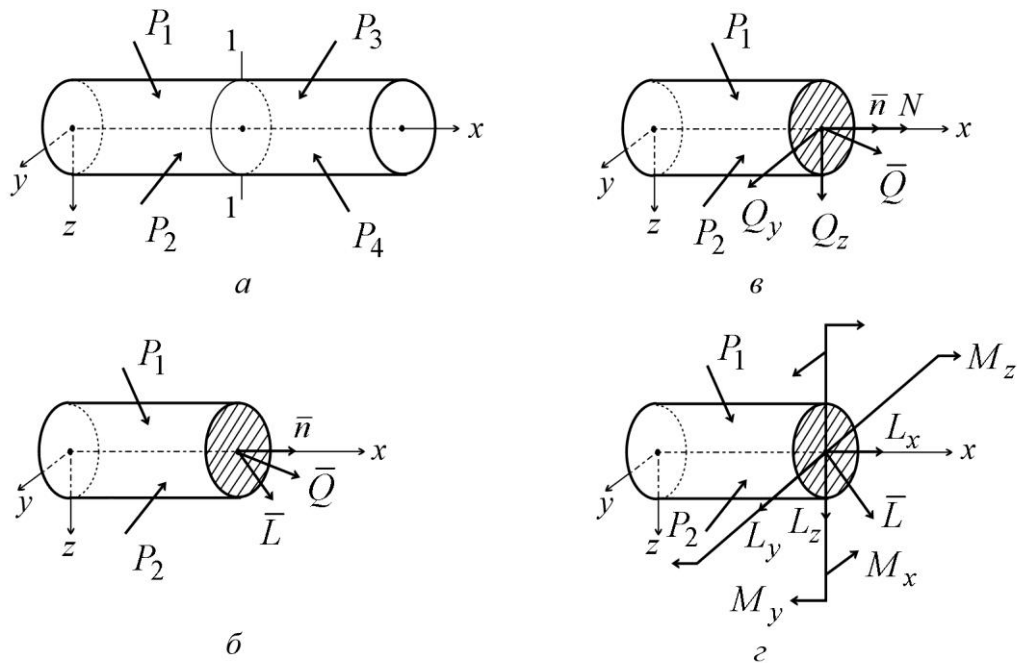


Рис. 1.7

Внутренние усилия подчиняются *правилу знаков*: если внешняя нормаль к поперечному сечению стержня совпадает с положительным направлением оси x , силы N , Q_y , Q_z положительны, если совпадают по направлению с соответствующими осями координат; моменты M_x , M_y , M_z положительны, если создают вращение против часовой стрелки при взгляде с положительного конца соответствующей оси.

На практике часто встречаются случаи, когда лишь некоторые внутренние усилия отличны от нуля. Случай, когда только нормальная сила $N \neq 0$, называется деформацией растяжения (сжатия). Если $M_x \neq 0$, это деформация кручения, если $M_y \neq 0$ или $M_z \neq 0$, это деформация чистого изгиба.

1.3. Дифференциальные зависимости между внешними силами и составляющими внутренних усилий. Эпюры внутренних усилий

Пусть на стержень, находящийся в состоянии равновесия, действуют внешние нагрузки в виде равномерно распределенных по длине сил

q_x , q_y , q_z и распределенного момента m_x . Рассмотрев малый отрезок этого стержня и записав для него уравнения статического равновесия, можно получить следующие уравнения, связывающие внешние нагрузки и внутренние усилия:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x, \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z,$$

$$\frac{dM_x}{dx} = -m_x, \quad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = q_y.$$

Полученные уравнения используются для определения функций, характеризующих распределение внутренних усилий по длине стержня. Характер функций и величины внутренних усилий определяют прочность и жесткость стержней как элементов конструкций. Эти функции для наглядности выполняются в виде соответствующим образом оформленных графиков, называемых эпюрами внутренних усилий. Пример эпюры нормальной силы N для стержня, испытывающего растяжение (сжатие), показан на рис. 1.8.

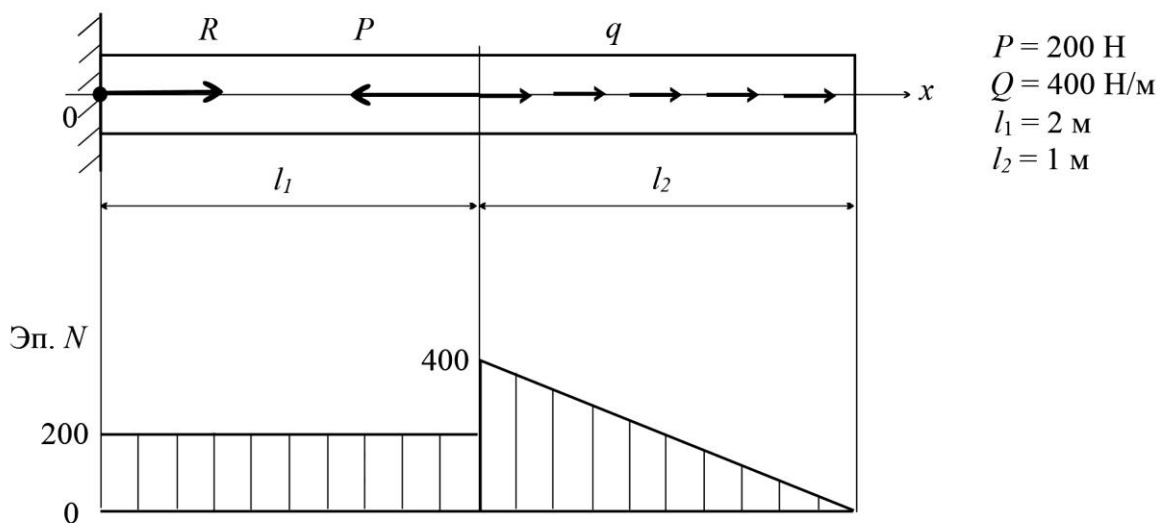


Рис. 1.8

2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1. Напряженное состояние в точке деформированного твердого тела.

Основные понятия

Внутренние усилия – интегральные силовые характеристики. Они действуют по всему сечению в целом, поэтому не могут дать полной информа-

ции о физико-технических эффектах, которые проявляются в твердом теле при его нагружении и деформации. Возможности в этом направлении значительно расширяются при использовании понятия механического напряжения в точке твердого тела.

Пусть тело под воздействием системы внешних сил находится в равновесии. Рассечем его плоскостью и отбросим правую часть (рис. 2.1). В сече-

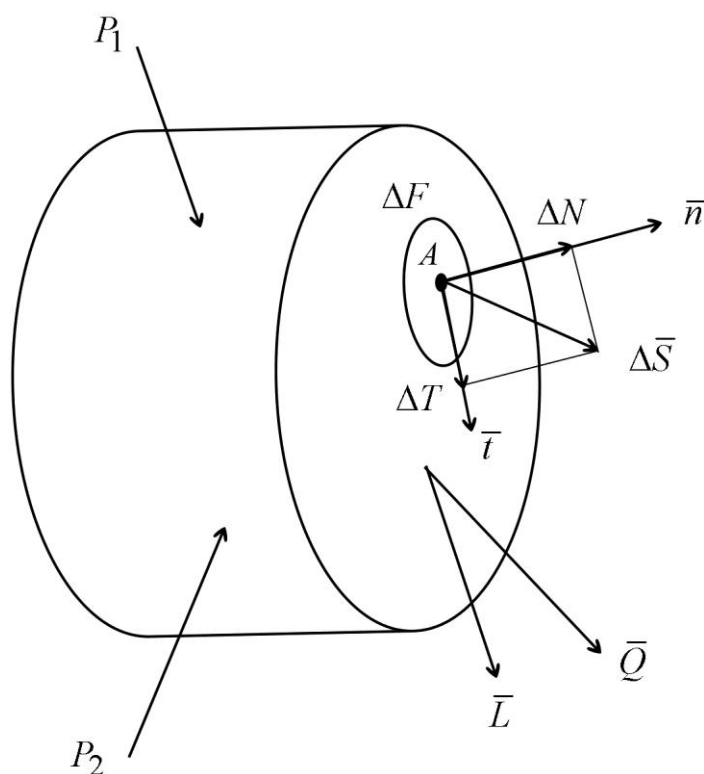


Рис. 2.1

нии действуют главный вектор внутренних сил \bar{Q} и главный вектор моментов внутренних сил \bar{L} . Рассмотрим какую-либо точку сечения (точка A на рис. 2.1) и выделим вокруг нее малую площадку ΔF . Проведем в точке нормаль к этой площадке \bar{n} и касательную \bar{t} . Вектор $\Delta \bar{S}$ – равнодействующая внутренних сил, действующих на площадке ΔF , ΔN и ΔT – проекции этого вектора на нормаль и касательную соответственно. Тогда вектор полного механического напряжения, действующего на площадке с нормалью \bar{n}

$\bar{\sigma}_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{S}}{\Delta F}$. Проецируя вектор $\bar{\sigma}_n$ на нормаль и касательную к площадке,

получим нормальное напряжение $\sigma_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F}$ и касательное

$\tau_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F}$. В декартовой системе координат проекции вектора $\bar{\sigma}_n$ на оси обозначаются σ_{nx} , σ_{ny} и σ_{nz} . Для квадрата модуля полного напряжения справедливы соотношения: $|\bar{\sigma}_n|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2$. Измеряется механическое напряжение в $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$.

Понятие механического напряжения позволяет оценивать распределение внутренних усилий по сечению, но при этом возникают вопросы, поскольку через точку тела можно провести бесконечное множество площадок. Ответить на эти вопросы можно с помощью более широкого понятия – напряженного состояния в точке деформированного твердого тела (ДТТ) – такого состояния, при котором можно указать хотя бы одну площадку, проходящую

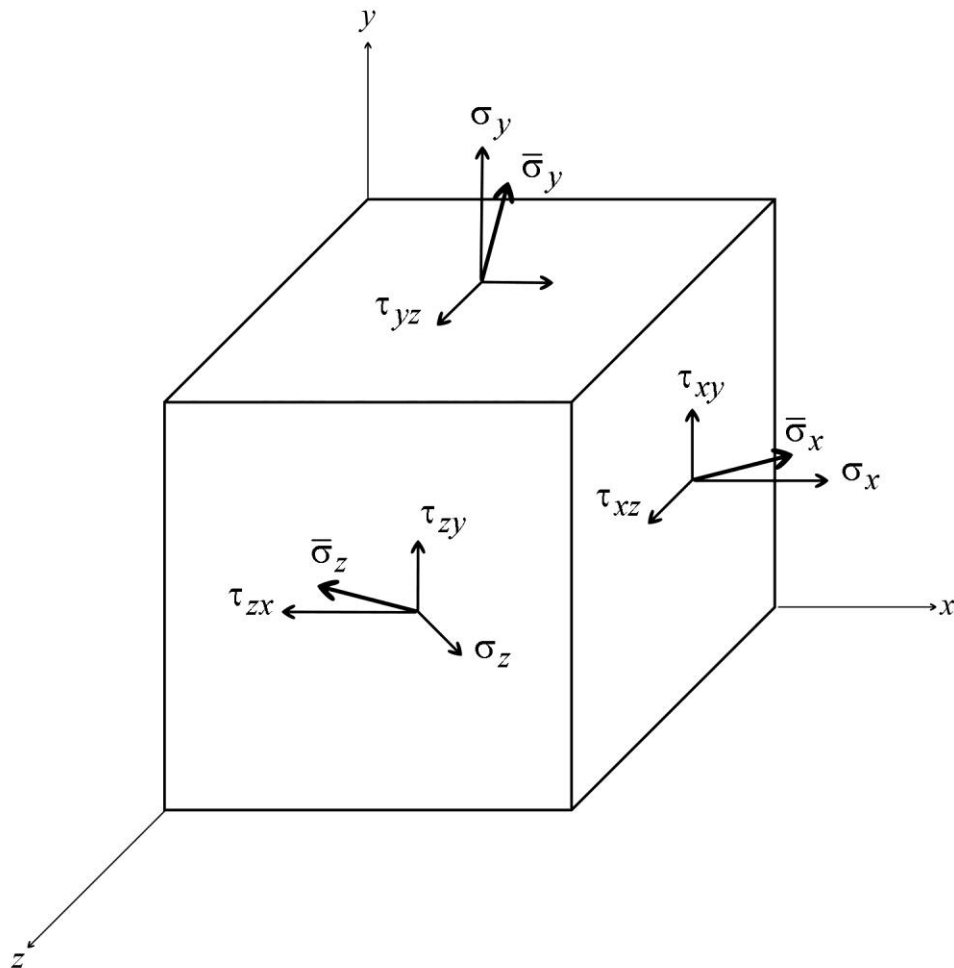


Рис. 2.2

через точку, где $|\bar{\sigma}_n|^2 \neq 0$.

Выделим в окрестности точки ДТТ малый объем в форме куба (рис. 2.2). Тогда, чтобы описать напряженное состояние в этой точке, достаточно рассмотреть напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках. Напряженное состояние характеризуется девятью скалярными величинами,

которые составляют тензор напряжений: $\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$.

Знаки составляющих тензора напряжений определяются по правилу знаков для внутренних усилий.

Если рассмотреть равновесие малого объема в форме тетраэдра внутри твердого тела, можно получить систему уравнений, связывающих проекции вектора полного напряжения на площадке с нормалью \bar{n} и составляющими тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_x c_{nx} + \tau_{yx} c_{ny} + \tau_{zx} c_{nz} \\ \sigma_{ny} = \tau_{xy} c_{nx} + \sigma_y c_{ny} + \tau_{zy} c_{nz} \\ \sigma_{nz} = \tau_{xz} c_{nx} + \tau_{yz} c_{ny} + \sigma_z c_{nz} \end{cases}$$

где c_{nx} , c_{ny} , c_{nz} – косинусы углов между нормалью и осями x , y и z соответственно.

Эти уравнения называются уравнениями равновесия элементарного тетраэдра, или уравнениями Коши (по имени ученого, который их впервые вывел).

На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения, перпендикулярные к линии пересечения площадок, равны между собой: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Это свойство называется свойством парности касательных напряжений. Таким образом, тензор напряжений имеет всего 6 независимых компонентов.

2.2. Главные площадки и главные напряжения.

Экстремальность главных напряжений

Площадки, проходящие через точку ДТТ и свободные от касательных напряжений, называются главными. Действующие на них полные напряжения называются главными. Главные напряжения – это нормальные напряжения.

Пусть существует главная площадка с нормалью \bar{n} , заданной направляющими косинусами c_{nx}, c_{ny}, c_{nz} . Главное напряжение на этой площадке обозначим σ . Проекции главного напряжения на оси x, y и z : $\sigma_{nx} = \sigma c_{nx}, \sigma_{ny} = \sigma c_{ny}, \sigma_{nz} = \sigma c_{nz}$. С другой стороны, выражения для проекций главного напряжения можно найти из уравнений Коши. Приравнивая правые части уравнений, получим:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)c_{nx} + \tau_{xy}c_{ny} + \tau_{xz}c_{nz} = 0 \\ \tau_{yx}c_{nx} + (\sigma_y - \sigma)c_{ny} + \tau_{yz}c_{nz} = 0 \\ \tau_{zx}c_{nx} + \tau_{zy}c_{ny} + (\sigma_z - \sigma)c_{nz} = 0 \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, приходим к уравнению третьей степени относительно σ . В прикладной механике это уравнение носит название кубического уравнения: $\sigma^3 - \theta_1\sigma^2 + \theta_2\sigma - \theta_3 = 0$,

$$\text{где } \theta_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad \theta_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ \theta_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Коэффициенты $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ называются инвариантами тензора напряжений, поскольку они не зависят от выбора системы координат.

Кубическое уравнение имеет три вещественных корня, которые обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Их физический смысл – нормальные напряжения, которые реализуются на главных площадках.

Если исследовать вопрос, на каких площадках нормальные напряжения имеют экстремальные значения, то получится система уравнений такая же, как и для нахождения главных напряжений. Отсюда можно сделать вывод, что главные напряжения являются и экстремальными.

В зависимости от величин главных напряжений различают следующие виды напряженного состояния:

- линейное, когда только одно главное напряжение отлично от нуля;

- плоское, когда два главных напряжения не равны нулю;
- объемное, когда все три главных напряжения не равны нулю.

Главные напряжения играют большую роль в теории разрушения, поскольку многие материалы разрушаются из-за действия экстремальных нормальных напряжений.

3. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

3.1. Деформированное состояние в окрестности точки тела. Основные понятия

Перемещение точек тела, связанное с деформацией, в прикладной механике обозначается векторной функцией $\bar{U}(x, y, z)$, а проекции этого вектора на оси $x, y, z - u_x, u_y, u_z$ соответственно.

Будем рассматривать упругие деформации, которые малы по сравнению с размером тела. Будем также считать, что деформации плавно изменяются при переходе от одной точки тела к другой, при этом производные деформаций $\ll 1$.

Если частицы тела представить в виде бесконечно малых кубиков, деформацию можно описать, задавая изменение линейных размеров ребер и изменение прямых углов между гранями. Поэтому при рассмотрении деформации тела в окрестности точки вводят два вида деформаций – относительное удлинение и относительный сдвиг.

Пусть в окрестности точки A на направлении \bar{r} выделен бесконечно малый отрезок dr (рис. 3.1). После деформации отрезок dr изменит длину и положение, превратившись в dr_1 . Относительным удлинением в точке A по направлению \bar{r} называется величина $\varepsilon_r = \frac{dr_1 - dr}{dr}$. Это безразмерная величина, положительная при удлинении и отрицательная при укорочении.

Выделим два взаимно перпендикулярных отрезка, проходящих через точку A .

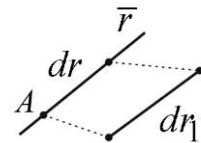


Рис. 3.1

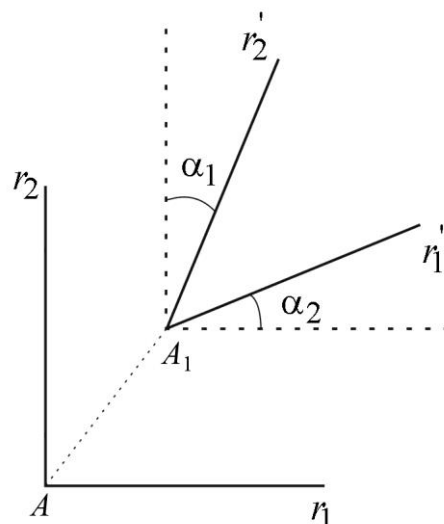


Рис. 3.2

После деформации точка A займет положение A_1 , а угол между отрезками изменится (рис. 3.2). Относительным сдвигом называется угол $\gamma_{r_1 r_2} = \alpha_1 + \alpha_2$. Единица измерения – радиан.

Рассматривая деформацию кубика, приходим к мысли о том, что для характеристики деформированного состояния в точке достаточно задать линейные деформации ребер кубика и относительные сдвиги между гранями. Таким образом, приходим к понятию тензора деформаций:

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

По аналогии с теорией напряжений, можно указать 3 взаимно перпендикулярные уравнения, сдвиги между которыми отсутствуют. На этих направлениях, называемых главными осями деформаций, реализуются экстремальные значения относительных удлинений, называемых главными деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Для изотропных материалов, к которым относится большинство конструкционных материалов, направления главных осей деформаций совпадают с направлениями нормалей к главным площадкам.

3.2. Закон Гука

Считаем, что деформируемое тело однородно и изотропно (в соответствии с основной моделью прикладной механики). В этом случае связи между деформацией и напряжением одинаковы в любой точке и главные оси деформаций совпадают с нормальными к главным площадкам. Тогда главные деформации являются функциями только главных напряжений. Впервые линейный характер этой зависимости экспериментально установил английский ученый Роберт Гук в XVII веке. Линейная зависимость справедлива практически для всех конструкционных материалов при малых деформациях.

Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающими силами (рис. 3.3).

$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$ – удлинение вдоль оси x , $\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$ – удлинение вдоль оси z . Введем

понятие коэффициента Пуассона $\nu = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right|$. Коэффициент Пуассона для всех

материалов лежит в пределах от 0 до 0,5 и зависит только от свойств самого

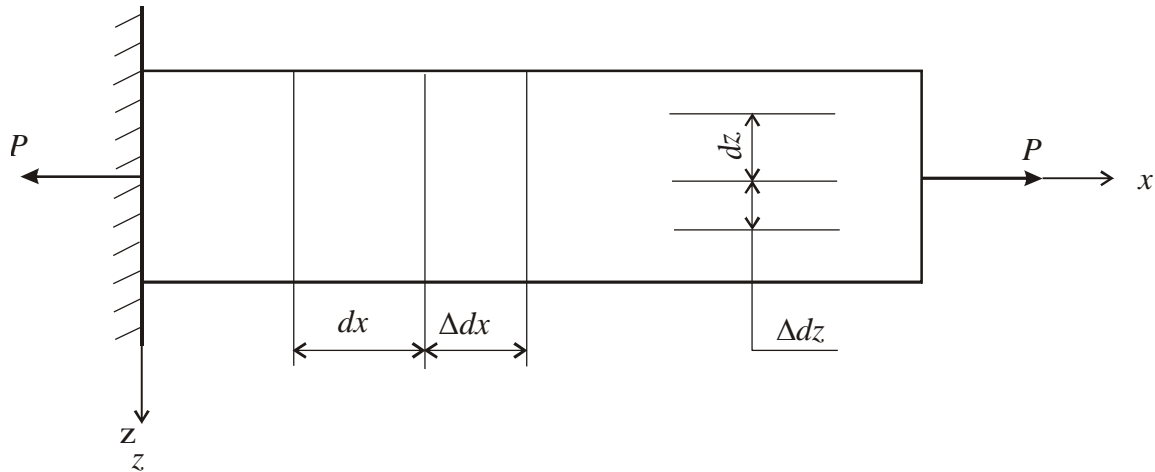


Рис. 3.3

материала.

В случае линейного напряженного состояния ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1 = \frac{-\nu \sigma_1}{E}.$$

В случае объемного напряженного состояния

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{cases}.$$

Это выражение носит название закона Гука в главных осях.

В произвольных осях закон Гука имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); & \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{cases}$$

В этих формулах G – модуль сдвига: $G = E/(2(1 + \nu))$.

Упругие постоянные E , ν и G определяются экспериментально. Закон Гука справедлив до определенных для каждого материала значений σ и ε (пока деформация остается упругой). Эти значения обычно находят из полученной в ходе эксперимента по растяжению образца диаграммы $\sigma - \varepsilon$.

4. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

4.1. Напряженное состояние в прямоосном призматическом стержне, нагруженном по торцам

Пусть прямоосный призматический стержень нагружен по торцам сила-

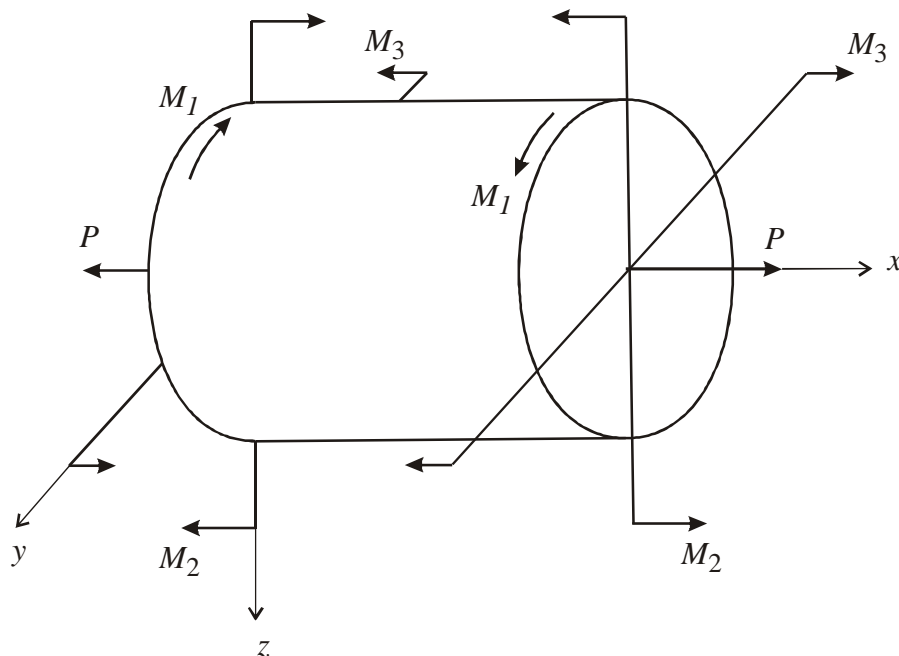


Рис. 4.1

ми P и моментами M_1, M_2, M_3 , как показано на рис. 4.1. В этом случае внутренние усилия $N = P, M_x = M_1, M_y = M_2, M_z = M_3, Q_y = Q_z = 0$. Нормальные и касательные напряжения в любой точке определяются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y; \quad \tau_{xy} = -\frac{M_x}{2J_y} z; \\ \sigma_y = 0; \quad \tau_{xz} = \frac{M_x}{2J_z} y; \\ \sigma_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \end{array} \right.$$

где $J_y = \iint_F z^2 dF$ – момент инерции сечения относительно оси y , $J_z = \iint_F y^2 dF$

– момент инерции сечения относительно оси z .

Выражения для касательных напряжений справедливы только для сечений в форме эллипса (в частном случае, круга). Для других форм сечения аналитического решения не существует, и задачу можно решить только численными методами. К счастью, в технике в 99% случаев используются круглые стержни, работающие на кручение.

Рассмотрим теперь расчеты на прочность при растяжении (сжатии), кручении и изгибе стержней.

4.2. Расчеты на прочность при растяжении (сжатии) стержня

При растяжении (сжатии) из всех внутренних усилий только $N \neq 0$; из формул предыдущего параграфа следует, что $\sigma_x = \frac{N}{F}$, а остальные напряжения равны нулю. Поскольку касательные напряжения отсутствуют, σ_x является главным напряжением.

Условие прочности имеет вид: $|\sigma_x|_{\max} \leq [\sigma]$, где $[\sigma] = \sigma_{\text{оп}}/n$ – максимально допустимое напряжение, которое может выдержать материал конструкции без разрушения с учетом коэффициента запаса n (обычно принимают $n = 1,5 \dots 3$); $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_T$ для пластичных материалов и $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_B$ для хрупких. Предел текучести σ_T и временное сопротивление σ_B определяются экспериментально.

При расчетах на прочность при растяжении (сжатии) следует учитывать такое явление как концентрация напряжений – сосредоточение больших напряжений на малых участках, прилегающих к местам с различного рода изменением формы поверхности или сечения деформированного тела.

Факторами, обуславливающими концентрацию напряжений (концентраторами напряжений), являются отверстия, полости, трещины, выточки, надрезы, углы, выступы, острые края, резьба, а также различные неровности поверхности (риски, царапины, метки, сварные швы и т. п.). Для распределения напряжений в зоне концентрации характерно резкое увеличение напряжения (в несколько раз), сопровождаемое быстрым затуханием при удалении от этой зоны (рис.

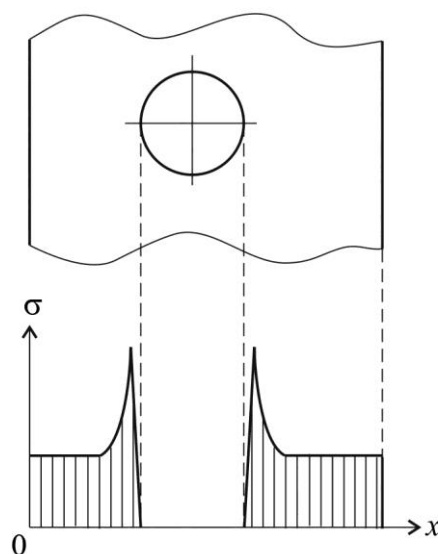


Рис. 4.2

4.2). Чтобы обеспечить выполнение условия прочности в этом случае, приходится значительно увеличивать площадь поперечного сечения конструкции, что ведет к дополнительному расходу материала. При данном виде деформации оптимальной является сплошная форма сечения без вышеназванных концентраторов напряжения.

4.3. Расчеты на прочность при кручении

Будем рассматривать стержень с эллиптическим (в частном случае,

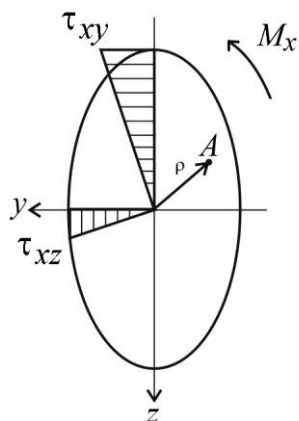


Рис. 4.3

круглом) сечением. При кручении отличны от нуля только касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} . Главные напряжения находим из кубического уравнения

$$\sigma^3 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\sigma = 0.$$

Решения:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_2 = 0.$$

Деформированное состояние стержня – плоское (чистый сдвиг). Распределение касательных напряжений по сечению показано на рис. 4.3.

Для круглого сечения $\tau_x = \frac{M_x}{J_p} \rho$, где ρ – радиус-вектор точки, где ищется напряжение τ_x ; J_p – полярный момент инерции сечения: $J_p = \iint_F \rho^2 dF$.

Для круга $J_p = \pi r^4 / 2$.

Максимальное значение напряжения τ_x реализуется на контуре сечения $\tau_{x \max} = \frac{M_x}{J_p} r$. Введем понятие момента сопротивления сечения при кручении $W_k = J_p / r$ (для круга $W_k = \pi r^3 / 2$). Тогда $\tau_{x \max} = \frac{M_x}{W_k}$. Условие прочности при кручении: $|\tau_{x \max}| \leq [\tau]$, где $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение при кручении (определяется экспериментально для каждого материала).

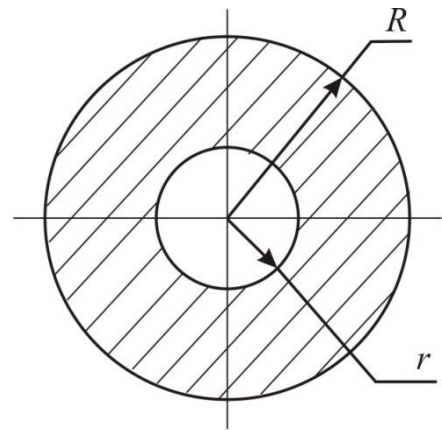


Рис. 4.4

Рассмотрим момент сопротивления сечения полого вала с внешним радиусом R и внутренним r (рис. 4.4): $W_k = \frac{\pi R^3}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)$. Например, при отношении $r/R = 0,6$ момент сопротивления сечения уменьшается всего лишь на 13%, зато получается значительная экономия материала, из которого изготовлен вал. Поэтому оптимальная форма сечения при кручении – кольцо.

4.4. Прочностные расчеты при изгибе

При чистом изгибе только напряжение σ_x отлично от нуля: $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$.

В этом случае реализуется линейное напряженное состояние. Распределение σ_x по высоте сечения показано на рис. 4.5. Видно, что максимальное по модулю напряжение действует на самой верхней и самой нижней частях сечения (при $z = \pm h/2$), при этом верх растягивается, низ сжимается, а центр не деформируется. Условие прочности в случае чистого изгиба выглядит анало-

гично растяжению (сжатию): $|\sigma_x|_{\max} \leq [\sigma]$, но $|\sigma_x|_{\max} = |M_y|_{\max} / W_y$, где

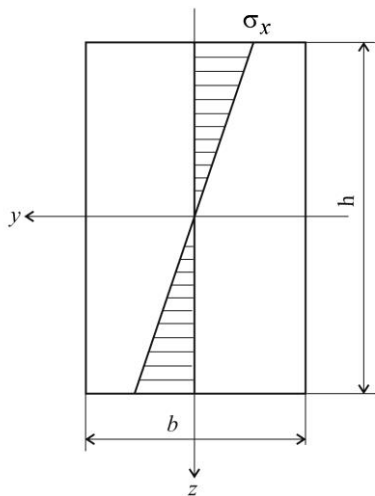


Рис. 4.5

$W_y = J_y / |z|_{\max}$ – момент сопротивления сечения при изгибе. Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h $J_y = (bh^3)/12$; $W_y = (bh^2)/6$, для круглого с радиусом r $J_y = (\pi r^4)/4$; $W_y = (\pi r^3)/4$.

На практике часто встречается случай плоского поперечного изгиба, когда кроме нормального напряжения σ_x действует еще и касательное τ_{xz} . В этом случае можно пользоваться при прочностных расчетах рассмотренными выше формулами как приближенными. Погрешность зависит от отношения поперечных размеров стержня к его длине и при соотношении $\leq 0,1$ не превышает долей процента.

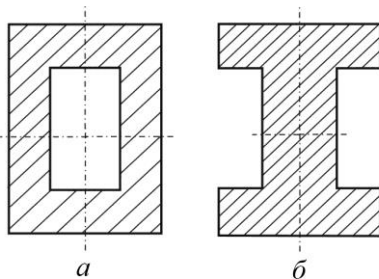


Рис. 4.6

С точки зрения экономии материала рациональной при изгибе является коробчатая форма сечения (рис. 4.6, а), однако по технологическим соображениям удобнее использовать близкую по характеристикам форму в виде двутавра (рис. 4.6, б).

5. УПРУГИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Важнейшее свойство конструкций – жесткость – способность сохранять свою форму при внешних силовых воздействиях. Для количественной оценки этого свойства нужно знать упругие перемещения, возникающие в конструкциях. Также знание перемещений необходимо при решении статически неопределимых задач.

5.1. Перемещение при растяжении-сжатии

Пусть на стержень действуют силы, направленные вдоль его оси (рис. 5.1). Рассмотрим перемещение i -го участка длиной l_i . Под воздействием сил длина этого участка изменится на Δl_i . По закону Гука относительное удлине-

ние $\varepsilon_x = \sigma_x/E$. Раскрыв ε_x и σ_x , получим: $\frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{N}{FE}$, где F – площадь поперечного сечения стержня. Отсюда находим перемещение i -го участка:

$$\Delta l_i = \frac{Nl_i}{FE}. \text{ В случае, если } N \text{ изменяется по длине стержня, } \Delta l_i = \frac{l_i}{FE} \int N(x)dx.$$

Если стержень имеет k участков, суммарное перемещение одного конца относительно другого $\Delta l_\Sigma = \sum_{i=1}^k \Delta l_i$.

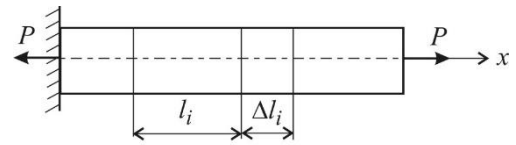


Рис. 5.1

Условие жесткости: $\Delta l_\Sigma \leq [\Delta l]$, где $[\Delta l]$ – допустимое перемещение, которое либо рассчитывается конструктором, либо принимается равным 1% от длины стержня.

5.2. Перемещение при кручении

Рассмотрим случай, когда к круглому валу, закрепленному с помощью заделки, приложены моменты относительно его оси (рис. 5.2). В этом случае все сечения вала поворачиваются на угол φ_i , оставаясь плоскими. Величина угла пропорциональна расстоянию от заделки до сечения:

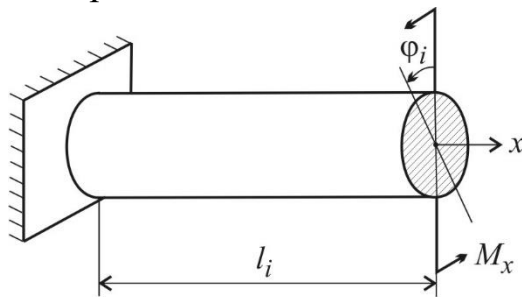


Рис. 5.2

сечения: $\varphi_i = \frac{M_x l_i}{GJ_p}$. Если момент M_x изменяется по длине стержня, $\varphi_i = \frac{l_i}{GJ_p} \int M_x(x)dx$.

Если стержень имеет k участков, угол закручивания конца стержня относительно заделки $\varphi_\Sigma = \sum_{i=1}^k \varphi_i$.

Условие жесткости: $|\varphi_\Sigma| \leq [\varphi]$, где $[\varphi]$ – максимально допустимый угол закручивания. Этот угол либо рассчитывается конструктором изделия, либо принимается равным 1° .

5.3. Перемещение при изгибе

При чистом изгибе перемещения вдоль осей x и y равны нулю; отлично от нуля только перемещение u_z , которое в технике называется прогибом и обозначается буквой w . Существуют различные методы нахождения прогиба; мы рассмотрим метод прямого интегрирования, метод начальных параметров и теорему Кастилиано. Основой первых двух методов является дифференци-

альное уравнение изогнутой оси стержня:
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EJ_y}.$$

Условие жесткости: $|w|_{\max} \leq [w]$, где $[w]$ – допустимый прогиб, которое либо рассчитывается конструктором, либо принимается равным 1% от длины стержня.

5.3.1. Метод прямого интегрирования

При использовании этого метода сначала записывают дифференциальное уравнение изогнутой оси закрепленного стержня, затем дважды интегрируют его по x . Полученные в результате интегрирования две постоянные интегри-



Рис. 5.3

рования находят из условий закрепления стержня на концах – граничных условий.

Для шарнирного закрепления стержня (рис. 5.3, а) граничные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x=0 & w(x)=0; \\ x=l & w(x)=0. \end{cases}$$

Для закрепления с помощью заделки (рис. 5.3, б):

$$\begin{cases} x=0 & w(x)=0; \\ x=0 & \frac{dw}{dx} = 0. \end{cases}$$

Недостатком метода является громоздкость получаемых выражений при большом количестве грузовых участков, поэтому на практике при числе участков три и более этот метод не применяют.

5.3.2. Метод начальных параметров

Пусть стержень закреплен с помощью двух шарнирных опор (рис. 5.4, а).

Под действием силы P ось стержня искривляется. Выберем оси координат. Начало координат расположим в крайнем левом сечении стержня. Ось x направим вдоль оси стержня, ось z – перпендикулярно оси x вниз, а ось y проведем так, чтобы система координатных осей оказалась правой (рис. 5.1, а).

Обозначим перемещение центра тяжести поперечного сечения с координатой x через w , а угол поворота сечения – через θ . Угол поворота сечения (рис. 5.4, а) – это угол между перпендикулярами к недеформированной и изогнутой осям стержня.

Сформулируем правило знаков для перемещений:

Линейное перемещение (прогиб) – $w > 0$, если оно происходит в положительном направлении оси z , а угол поворота сечения $\theta > 0$, если поперечное сечение поворачивается относительно своего первоначального положения против направления вращения часовой стрелки.

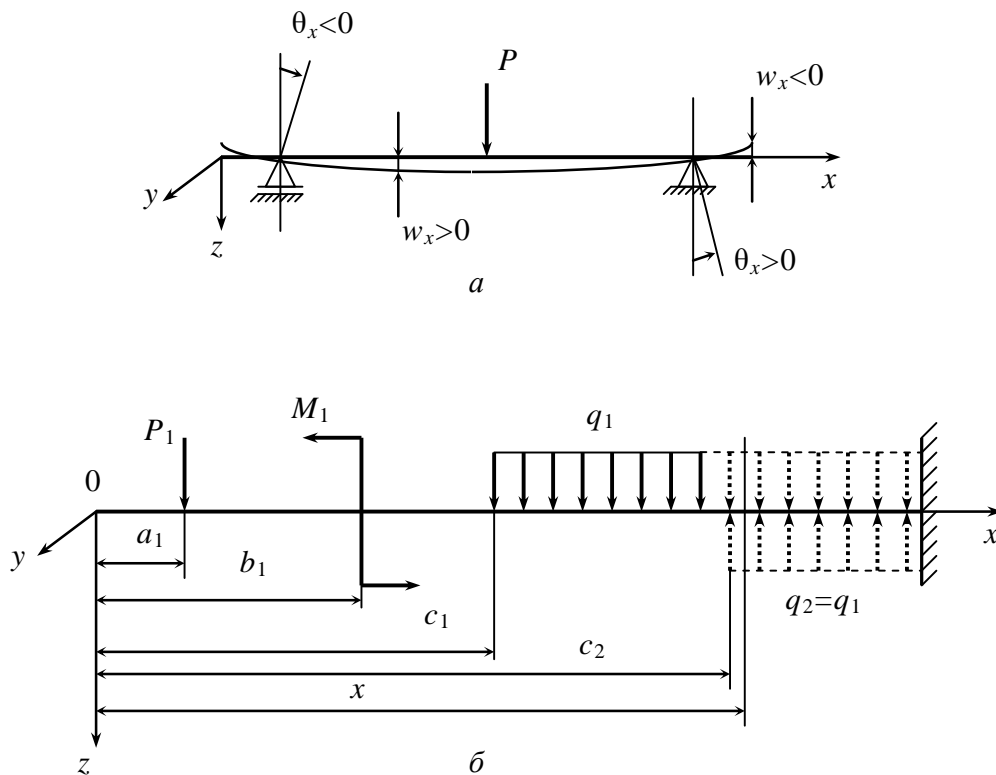


Рис. 5.4

Тогда для прогиба и угла поворота сечения при любом числе грузовых участков стержня справедливы следующие выражения:

$$w = w_0 - \theta_0 x + \sum_{k=0} \frac{P_k (x - a_k)^3}{6EJ_y} + \sum_{i=0} \frac{M_i (x - b_i)^2}{2EJ_y} + \sum_{j=0} \frac{q_j (x - c_j)^4}{24EJ_y}$$

$$\theta = \theta_0 + \sum_{k=0} \frac{P_k (x - a_k)^2}{2EJ_y} + \sum_{i=0} \frac{M_i (x - b_i)}{EJ_y} + \sum_{j=0} \frac{q_j (x - c_j)^3}{6EJ_y}.$$

При определении перемещений по этим формулам следует учитывать следующее (рис. 5.4, б):

1. Начало координат расположено в крайнем левом сечении стержня и ось \$z\$ направлена вниз.

2. a_k, b_i, c_j – расстояния от начала координат до соответствующего силового воздействия P_k, M_i, q_j .

3. Знаки каждого из слагаемых, стоящих под знаками суммы, соответствуют направлению внешних воздействий P_k, q_j вдоль оси z (вниз), а моментов M_i против направления вращения часовой стрелки.

4. Нагрузка интенсивностью q_j не должна изменяться до конца стержня. Если же нагрузка q_j распределена на части стержня так, что сечение, где она заканчивается, не является конечным сечением стержня, то последнее слагаемое распространяет эту нагрузку до конца стержня на той его части, где этой нагрузки нет.

Для того чтобы не изменить значение прогиба, необходимо приложить на этой части стержня такую же нагрузку интенсивностью q_j , но обратного направления, и учесть ее при определении перемещений.

5. Начальные параметры w_0 (прогиб в начале координат) и θ_0 (угол поворота сечения в начале координат) определяют из граничных условий (условий закрепления стержня).

6. При фиксированных в формулах учитывают только те слагаемые, в которых a_k, b_i, c_j меньше координаты x сечения, перемещения которого определяют.

Метод начальных параметров можно использовать только для однородных стержней с постоянным сечением ($EJ_y = \text{const}$).

5.3.3. Определение перемещений с помощью теоремы Кастилиано

Метод начальных параметров применим только для стержней с постоянной жесткостью EJ_y , т. е. однородных стержней с неизменными размерами поперечного сечения. Методы, основанные на энергетических соотношениях (теорема Кастилиано, метод Максвелла–Мора), позволяют снять это существенное ограничение.

Согласно теореме Кастилиано обобщенное перемещение равно частной производной потенциальной энергии деформации по обобщенной силе:

$$\delta_{об} = \frac{\partial U}{\partial P_{об}},$$

где $\delta_{об}$ – обобщенное перемещение; U – потенциальная энергия деформации упругой системы, $P_{об}$ – обобщенная сила.

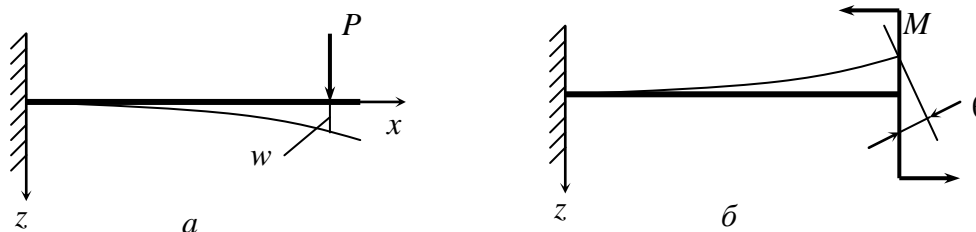


Рис. 5.5

Обобщенной силой может быть любая совокупность сил, приложенных к телу, например: сосредоточенная сила; сосредоточенная пара сил, вызывающая деформацию изгиба или кручения стержня; сосредоточенная сила вместе с вызываемыми этой силой опорными реакциями.

Обобщенное перемещение – соответствующее обобщенной силе перемещение, на котором обобщенная сила совершает работу (линейное или угловое).

При определении линейного перемещения за обобщенную силу следует принять сосредоточенную силу, действующую в сечении, где определяется перемещение (рис. 5.5, а).

При определении угла поворота сечения за обобщенную силу следует принять сосредоточенный момент (пару сил), действующий в сечении, где определяется угол поворота (рис. 5.5, б).

Обобщенное перемещение при изгибе находится по формуле

$$\delta_{об} = \int_l \frac{M_y}{EJ_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_{об}} dx.$$

Если требуется найти обобщенное перемещение в сечении, где нет обобщенной силы, необходимо в этом сечении приложить фиктивную силу $P_{об}^{\phi} = 0$. Затем в соответствии с вышеприведенной формулой следует записать интеграл с учетом $P_{об}^{\phi}$, после чего можно положить $P_{об}^{\phi} = 0$.

Лекция 6

6. Основы взаимозаменяемости

Современное массовое производство невозможно без обеспечения взаимозаменяемости деталей. Взаимозаменяемость – свойство элементов конструкции, изготовленных с определённой точностью геометрических, механических и иных параметров, обеспечивать заданные эксплуатационные показатели вне зависимости от времени и места изготовления при сборке, ремонте и замене этих элементов.

Взаимозаменяемость обеспечивается определенной точностью выполнения размеров, формы и расположения шероховатости поверхностей, выбором материала и покрытия.

6.1. Основные понятия

Реальная деталь отделяется от окружающей среды поверхностями. Следует различать сопрягаемые и несопрягаемые поверхности.

Сопрягаемые – это поверхности, по которым детали соединяются в сборочные единицы, а последние – в готовое изделие.

Несопрягаемые или *свободные* – это конструктивно необходимые поверхности, не предназначенные для соединения с поверхностями других деталей. На рис. 6.1 показан круглый стержень 1, перемещающийся в подшипнике 2. Наружная цилиндрическая поверхность стержня $\varnothing 3$ и внутренняя поверхность подшипника $\varnothing 3$

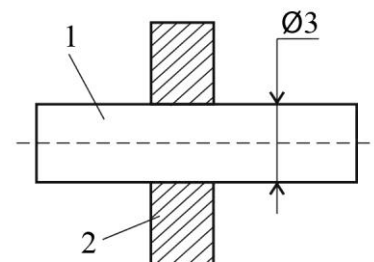


Рис. 6.1

являются сопрягаемыми поверхностями, а плоские торцы стержня и подшипника – несопрягаемыми.

Термины "вал" и "отверстие" распространяются не только на цилиндрические поверхности.

Вал– термин, условно применяемый для обозначений наружных элементов деталей, включая и нецилиндрические элементы.

Отверстие – термин, условно применяемый для обозначения внутренних

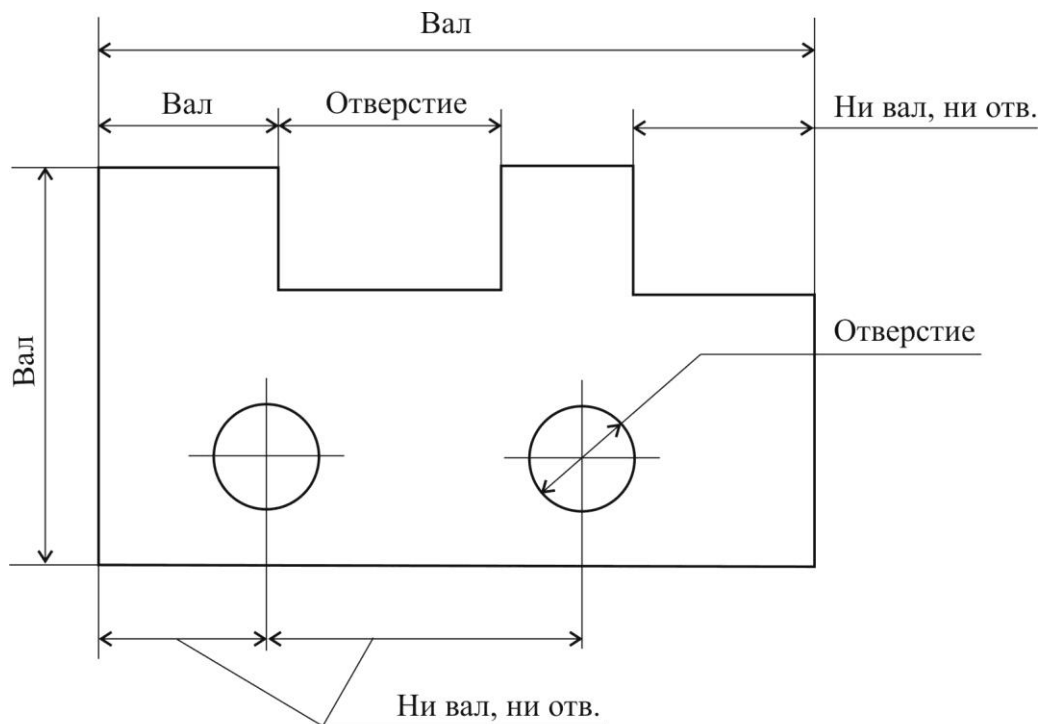


Рис. 6.2
элементов деталей, включая и нецилиндрические элементы.

На рис. 6.2 показаны примеры валов, отверстий и элементов, не относящихся ни к валам, ни к отверстиям.

Размеры (рис. 6.3)

Действительный размер – размер элемента, установленный измерением.

Предельные размеры – два предельно допустимых размера элемента, между которыми должен находиться (или которым может быть равен) действительный размер.

Наибольший предельный размер – наибольший допустимый размер элемента.

Наименьший предельный размер – наименьший допустимый размер элемента.

Номинальный размер – размер, относительно которого определяются отклонения. Номинальный размер существует только на чертеже. Значения номинальных размеров должны быть округлены и соответствовать ГОСТ 6636-69 (см. табл. 1). Не подлежат округлению значения, полученные расчетным путем, или размеры, полученные суммированием нескольких номинальных размеров.

Отклонения и допуски (рис.6.4)

Для указания точности выполнения размера используют предельные отклонения, которые определяются относительно номинального размера.

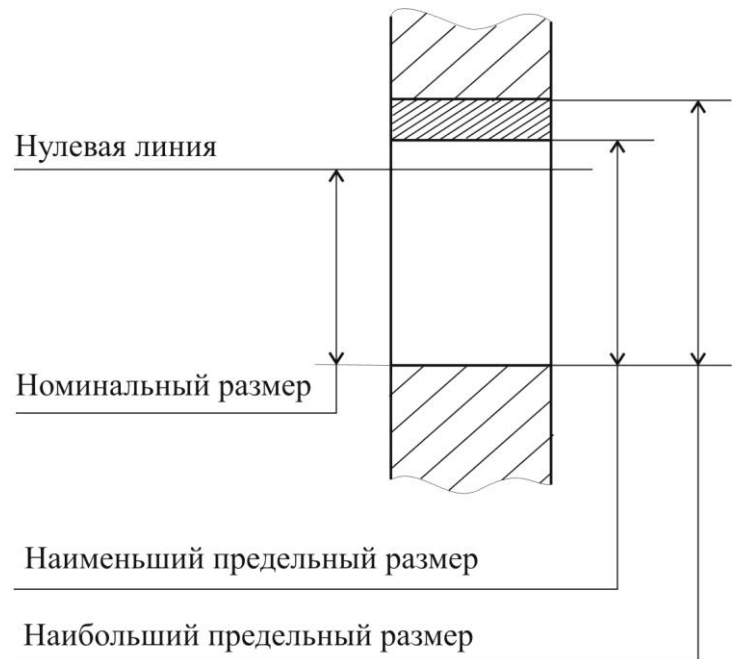


Рис. 6.3

Отклонение – алгебраическая разность между размером (действительным или предельным) и соответствующим номинальным размером.

Действительное отклонение – алгебраическая разность между действитель-

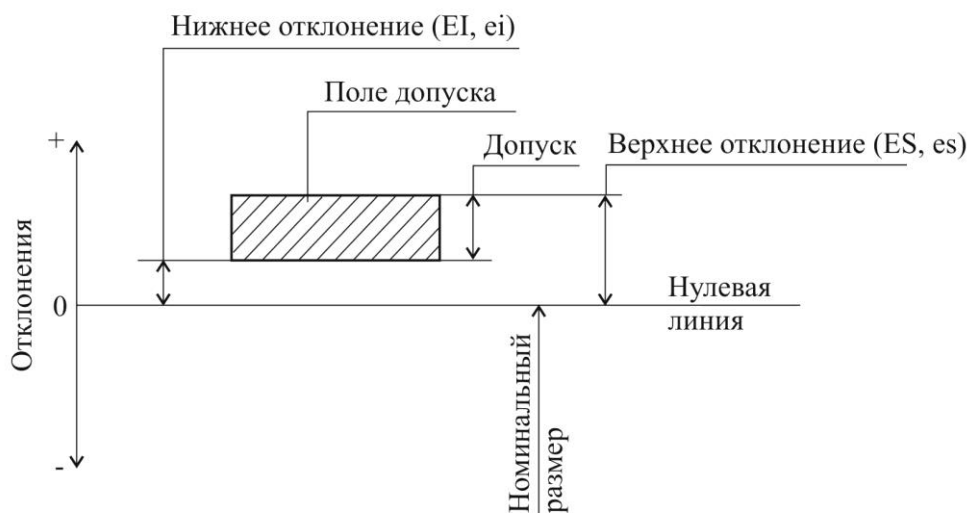


Рис. 6.4

ным и соответствующим номинальным размерами.

Предельное отклонение – алгебраическая разность между предельным и соответствующим номинальным размерами. Различают верхнее и нижнее предельные отклонения.

Верхнее отклонение(ES – отверстия, es – для вала) – алгебраическая разность между наибольшим предельным и соответствующим номинальным размерами.

Нижнее отклонение(EI – отверстия, ei – для вала) – алгебраическая разность между наименьшим предельным и соответствующим номинальным размерами.

Основное отклонение – одно из двух предельных отклонений (верхнее или нижнее), определяющее положение поля допуска относительно нулевой линии. В системе допусков и посадок основным является отклонение, ближайшее к нулевой линии.

Нулевая линия – линия, соответствующая номинальному размеру, от которой откладываются отклонения размеров при графическом изображении полей допусков и посадок. Если нулевая линия расположена горизонтально, то по-

ложительные отклонения откладываются вверх от нее, а отрицательные – вниз.

Допуск T – разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами или алгебраическая разность между верхним и нижним отклонениями. Допуск – это абсолютная величина без знака.

Стандартный допуск IT – любой из допусков, устанавливаемых данной системой допусков и посадок. В дальнейшем под термином “допуск” будем понимать “стандартный допуск”.

Поле допуска – поле, ограниченное наибольшим и наименьшим предельными размерами и определяемое величиной допуска и его положением относительно номинального размера. При графическом изображении поле допуска заключено между двумя линиями, соответствующими верхнему и нижнему отклонениям относительно нулевой линии.

Квалитет

Точность выполнения размеров определяется допуском: чем меньше допуск, тем выше точность. Для задания точности вводят понятие квалитета.

Квалитет (степень точности) – совокупность допусков, рассматриваемых как соответствующие одному уровню точности для всех номинальных размеров. Стандартная система допусков содержит 20 квалитетов, обозначаемых числами 01, 0, 1, 2...18. Чем меньше число, тем выше точность. Квалитеты 01, 0, 1, 2, 3, 4, 5 применяются преимущественно для изготовления мер длины и калибров. Величины допусков в зависимости от квалитета и номинального размера определяются из таблиц ГОСТ 25346-89.

Основные отклонения отверстий и валов (рис. 6.5)

ГОСТ 25346-89 устанавливает определенное положение полей допусков отверстий и валов относительно нулевой линии. Для каждого номинального размера установлен ряд полей допусков, образующихся сочетанием 20 квалитетов и 28 основных отклонений.

Основные отклонения обозначаются одной или двумя буквами латинского алфавита (заглавными – для отверстий, строчными – для валов), например: А, В...Z, ZA, ZB, ZC.

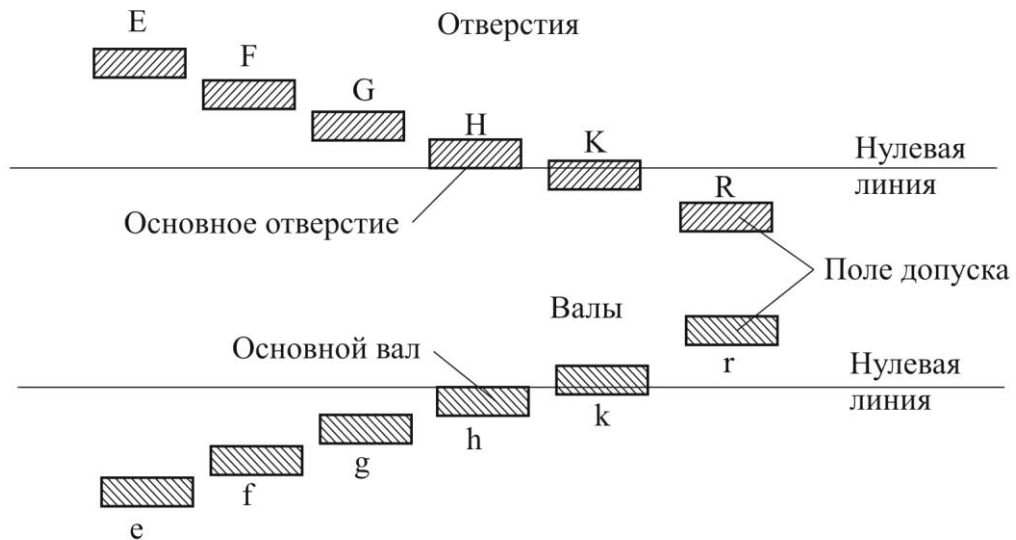


Рис. 6.5

Поля допусков обозначают сочетанием основного отклонения (буква) с допуском по качеству (число), например, H14 (отверстие), k8 (вал). Из всех возможных полей допусков на практике применяют их ограниченное число (см. таблицы ГОСТ 25346-89).

Обозначение предельных отклонений на чертежах

На чертеже все размеры, подлежащие выполнению по этому чертежу, должны иметь предельные отклонения, которые указывают сразу после номинального размера (в миллиметрах) в соответствии с ГОСТ 2.307-2011 одним из трех способов:

- 1) условными обозначениями – 20p6, $\varnothing 15H12$;
- 2) числовыми значениями в миллиметрах – $20^{+0,035}_{+0,022}$, $\varnothing 15^{+0,18}$, $30 \pm 0,05$;
- 3) условными обозначениями с указанием в скобках числовых значений – $20p6\left(\begin{smallmatrix} +0,035 \\ +0,022 \end{smallmatrix}\right)$, $\varnothing 15H12\left(+0,18\right)$.

Пояснения:

- при несимметричных отклонениях верхнее помещают над нижним и записывают шрифтом, размер которого меньше основного;
- число знаков в верхнем и нижнем отклонениях должно быть одинаковым;
- отклонения, равные нулю, допускается не указывать;
- симметричные отклонения указывают основным шрифтом.

На чертежах допустимые отклонения рекомендуется указывать первым способом. Допускается не указывать предельные отклонения для размеров фасок, радиусов скругления и гибки, ширину и глубину канавок для выхода инструмента, размеров зон шероховатости, термообработки, покрытия, рифления и насечки, а также справочных размеров.

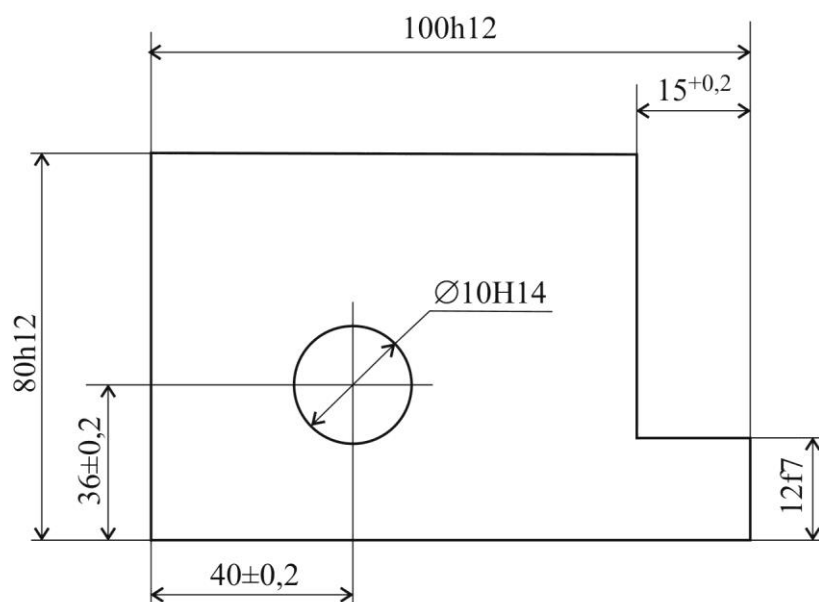


Рис. 6.6

На сборочных чертежах предельные отклонения указывают для всех присоединительных и установочных размеров. Габаритные размеры указывают без предельных отклонений.

Пример обозначения предельных отклонений показан на рис. 6.6.

Таблица 1

Ряд				Дополнительный размер
R _a 5	R _a 10	R _a 20	R _a 40	
1,0	1,0	1,0	1,0	1,25 1,35
		1,1	1,1	
		1,15	1,15	
		1,2	1,2	
	1,2	1,2	1,3	

		1,4	1,4 1,5	1,45 1,55
1,6	1,6	1,6	1,6 1,7 1,8 1,9	1,65 1,75 1,85 1,95
		2,0	2,0 2,2 2,4	2,05 2,15 2,3
2,5	2,5	2,5	2,5 2,6 2,8 3,0	2,7 2,9 3,1
		3,2	3,2 3,4 3,6 3,8	3,3 3,5 3,7 3,9
4,0	4,0	4,0	4,0 4,2 4,5 4,8	4,1 4,4 4,6 4,9
		5,0	5,0 5,3 5,6 6,0	5,2 5,5 5,8 6,2
6,3	6,3	6,3	6,3 6,7 7,1 7,5	6,5 7,0 7,3 7,8
		8,0	8,0 8,5 9,0 9,5	8,2 8,8 9,2 9,8

Лекция 7

6.2. Посадки

Реальные изделия состоят из сборочных единиц и деталей, соединенных между собой. В одних случаях детали должны соединяться между собой свободно (с зазором), в других – неподвижно (с натягом).

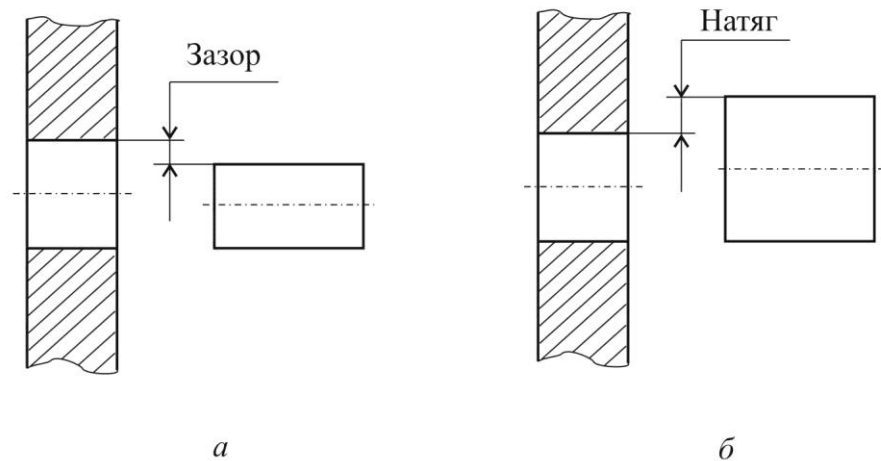


Рис. 6.7

Посадка – характер соединения двух деталей, определяемый разностью их размеров до сборки. Обе детали, входящие в посадку (вал и отверстие), должны иметь одинаковый номинальный размер.

Номинальный размер посадки – номинальный размер, общий для отверстия и вала, составляющих соединение.

Зазор S – разность между размерами отверстия и вала до сборки, если размер отверстия больше размера вала (рис. 6.7, *а*).

Натяг N – разность между размерами вала и отверстия до сборки, если размер вала больше размера отверстия (рис. 6.7, *б*).

Посадка с зазором – посадка, при которой всегда образуется зазор в соединении, т.е. наименьший предельный размер отверстия больше наибольшего предельного размера вала или равен ему. При графическом изображении поле допуска отверстия расположено над полем допуска вала (рис. 6.8, *а*).

Посадка с натягом – посадка, при которой всегда образуется натяг в соединении, т.е. наибольший предельный размер отверстия меньше наименьшего

предельного размера вала или равен ему. При графическом изображении поле допуска отверстия расположено под полем допуска вала (рис. 6.8, б).

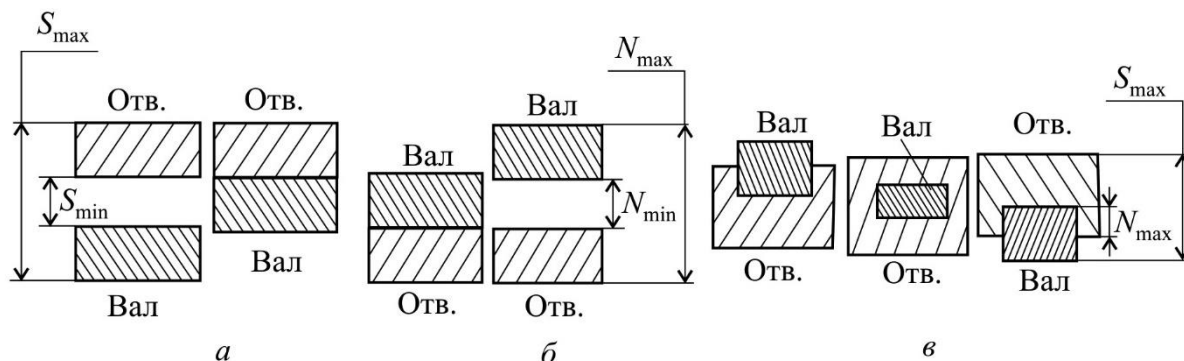


Рис. 6.8

Переходная посадка – посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга в соединении, в зависимости от действительных размеров отверстия и вала. При графическом изображении поля допусков отверстия и вала перекрываются полностью или частично (рис. 6.8, в). Для такой посадки

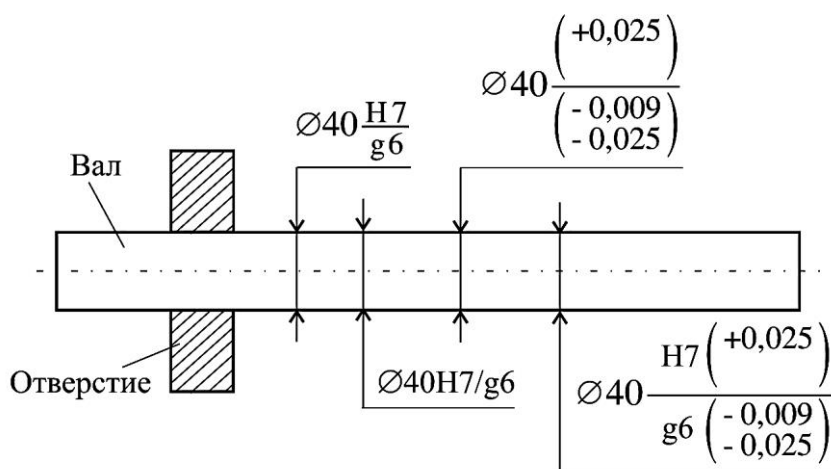


Рис. 6.9

$$S_{\min} = N_{\min} = 0.$$

На чертежах посадка обозначается дробью, в числителе которой указывается обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе обозначение поля допуска вала. Обозначение посадки указывается после номинального размера посадки. На рис. 6.9 показаны четыре варианта обозначения посадки.

6.3. Допуски формы и расположения поверхностей

Любая деталь ограничена поверхностями. В процессе изготовления возникают погрешности не только размеров, но и формы и взаимного расположения поверхностей.

Основные термины и определения (ГОСТ 31245-2004)

Элемент, геометрический элемент: точка, линия или поверхность.

Полный геометрический элемент: поверхность или линия на поверхности.

Производный геометрический элемент: средняя точка, средняя линия или средняя поверхность, которые произведены от одного или нескольких полных элементов.

Полный номинальный геометрический элемент: полный геометрический элемент, определенный чертежом или другими средствами (рис. 6.10, *a*).

Производный номинальный геометрический элемент: центр, ось или плоскость симметрии, которые произведены от одного или нескольких полных геометрических элементов (рис. 6.10, *a*).

Реальная поверхность детали: совокупность физически существующих геометрических элементов, которые отделяют всю деталь от окружающей среды.

Реальный полный геометрический элемент: полный геометрический элемент как часть реальной поверхности детали, ограниченная соседними реальными полными геометрическими элементами.

Выявленный геометрический элемент: приближенное представление реального полного геометрического элемента.

Выявленный производный элемент: центральная точка, средняя линия или средняя поверхность, произведенные от одного или нескольких реальных полных элементов (рис. 6.10, *в*).

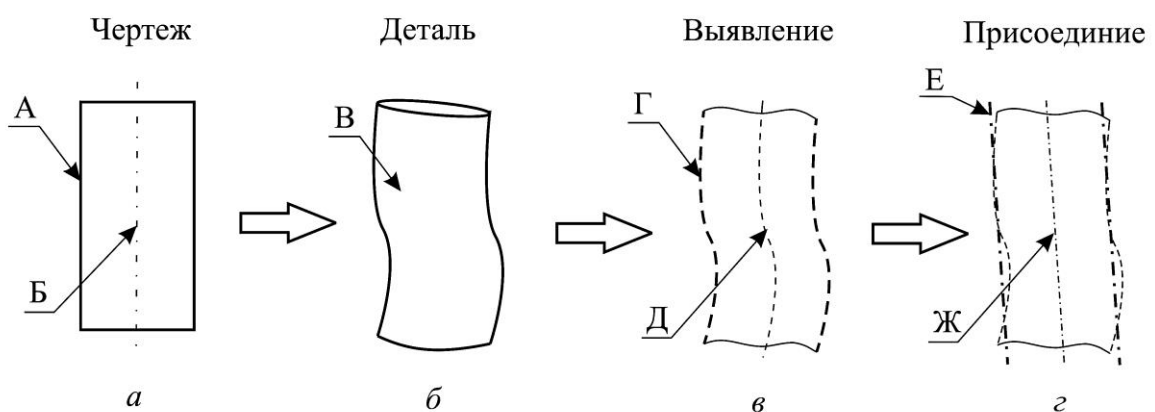
Примечания.

1. Производная средняя линия выявленной цилиндрической поверхности называется выявленной средней линией (выявленной осью).

2. Производная средняя поверхность двух противолежащих выявленных плоских поверхностей называется выявленной средней поверхностью.

Присоединенный полный элемент: полный элемент правильной формы, присоединенный (совмещенный) к выявленному полному элементу при соблюдении согласованных условий (рис. 6.10, з).

Присоединенный производный элемент: центр, ось или плоскость симметрии, произведенные от одного или нескольких присоединенных полных эле-



А - номинальный полный элемент; Б - номинальный производный элемент;
 В - реальный элемент; Г - выявленный полный элемент; Д - выявленный производный элемент; Е - присоединенный полный элемент; Ж - присоединенный производный элемент

Рис. 6.10

ментов (рис. 6.10, з).

Взаимосвязь определений геометрических элементов показана на рис. 6.10.

Указание на чертежах допусков формы и расположения поверхностей

Допуски формы и расположения поверхностей назначаются и указываются на чертежах, как правило, только в том случае, если они должны быть меньше допуска на соответствующий линейный размер.

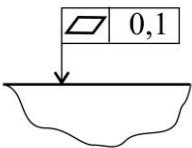
Условные обозначения допусков формы и расположения поверхностей в соответствии с ГОСТ Р 53442-2009 приведены в табл. 6.1.

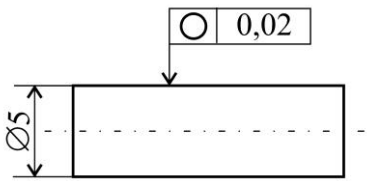
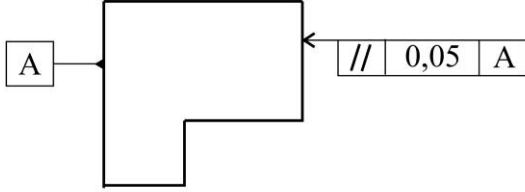
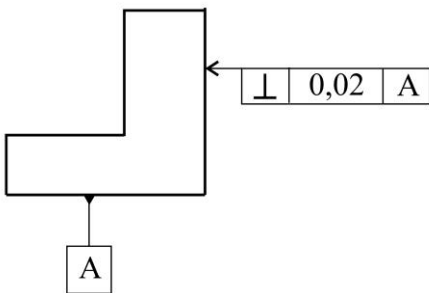
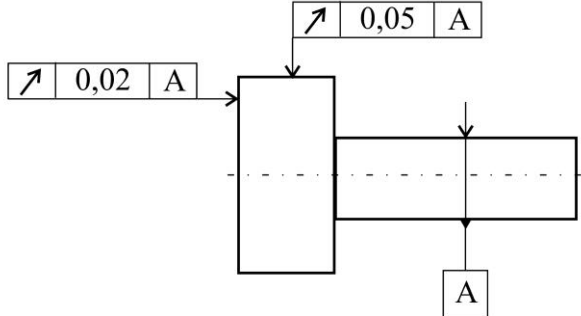
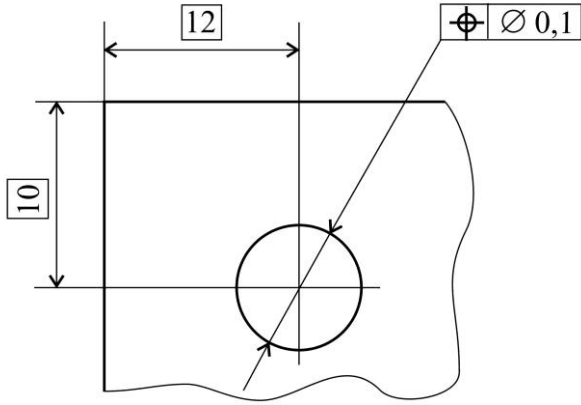
Таблица 6.1

Группа допусков	Геометрическая характеристика	Обозначение геометрической характеристики	Необходимость указания базы
Допуски формы	Прямолинейность	—	Нет
	Плоскостность		Нет
	Круглость	○	Нет
	Цилиндричность		Нет
Допуски ориентации	Параллельность	//	Да
	Перпендикулярность	⊥	Да
	Наклон	∠	Да
Допуски месторасположения	Позиционирование	⊕	Да или нет
	Концентричность (для точек)	⊙	Да
	Соосность (для осей)	⊙	Да
	Симметричность	≡	Да
Допуски биения	Биение		Да

В табл. 6.2 показаны примеры обозначения допусков формы и расположения поверхностей.

Таблица 6.2

Допуск	Обозначение
Допуск плоскостности поверхности 0,1 мм	

<p>Допуск круглости вала 0,02 мм</p>	
<p>Допуск параллельности поверхности относительно базовой поверхности A 0,05 мм</p>	
<p>Допуск перпендикулярности поверхности относительно базовой поверхности A 0,02 мм</p>	
<p>Допуск торцового биения относительно оси поверхности A 0,02 мм и радиального биения вала относительно оси поверхности A 0,05 мм</p>	
<p>Позиционный допуск оси отверстия Ø 0,1 мм</p>	

Лекция 8

6.4. Допуски расположения осей отверстий для крепежных деталей

Расстояние между осями реальных отверстий в соединяемых деталях всегда отличается от номинальной величины. При сборке деталей эти отверстия совпадают не полностью, что затрудняет установку в них крепежных деталей (винтов, болтов, заклепок). Для обеспечения достаточного просвета, необходимого для установки крепежной детали, следует выдерживать определенную точность расположения осей отверстий.

В ГОСТ 14140-81 приведена методика определения позиционного допуска T в диаметральном выражении. Величина допуска зависит от следующих условий:

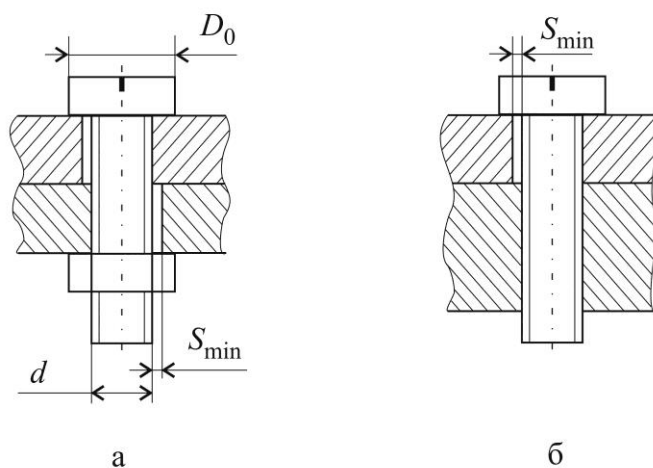


Рис. 6.11

- 1) типа соединения – A (рис. 6.11, a) или B (рис. 6.11, $б$);
- 2) величины зазора $S_{min} = D_0 - d$, где D_0 – наименьший предельный диаметр сквозного отверстия; d – наибольший предельный диаметр стержня крепежной детали.

D_0 выбирается из ряда ГОСТ 11284-75 в зависимости от диаметра винта (болта) d (табл. 6.3):

Табл. 6.3

d , мм	D_0 , мм	d , мм	D_0 , мм	d , мм	D_0 , мм
2	2,6	3	3,6	5	5,8
2,5	3,1	4	4,8	6	7,0

Позиционный допуск T обычно устанавливается одинаковым для обеих деталей соединения и рассчитывается по формулам:

$T = kS_{\min}$ – для соединения типа A , $T = 0.5kS_{\min}$ – для соединения типа B , где k – коэффициент использования зазора; $k = 1$ или $0,8$ – для соединений, не требующих регулировки взаимного расположения деталей после сборки; $k = 0,6$ или $0,8$ – при необходимости регулировки. Вычисленные значения позиционного допуска округляются до ближайшего значения из стандартного ряда: 0,1; 0,12; 0,16; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8. Другие значения ряда могут быть получены умножением вышеприведенных на 10 в целой степени.

На рис. 6.12 показаны примеры обозначения позиционного допуска. Знак M в

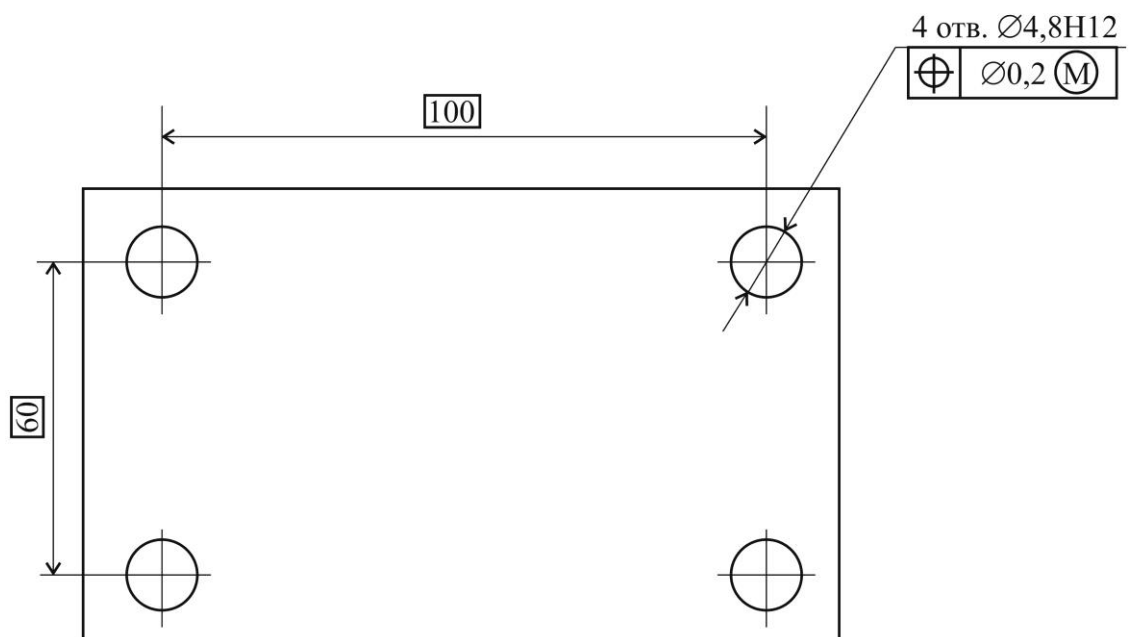


Рис. 6.12

кружке указывает на то, что допуск является зависимым и может быть расширен, так как действительный зазор между отверстием и стержнем может быть больше минимального из-за действительных отклонений отверстия и стержня.

6.5. Шероховатость поверхностей

На любой поверхности детали всегда имеются микронеровности. При увеличении профиль выглядит примерно так (рис. 6.13):

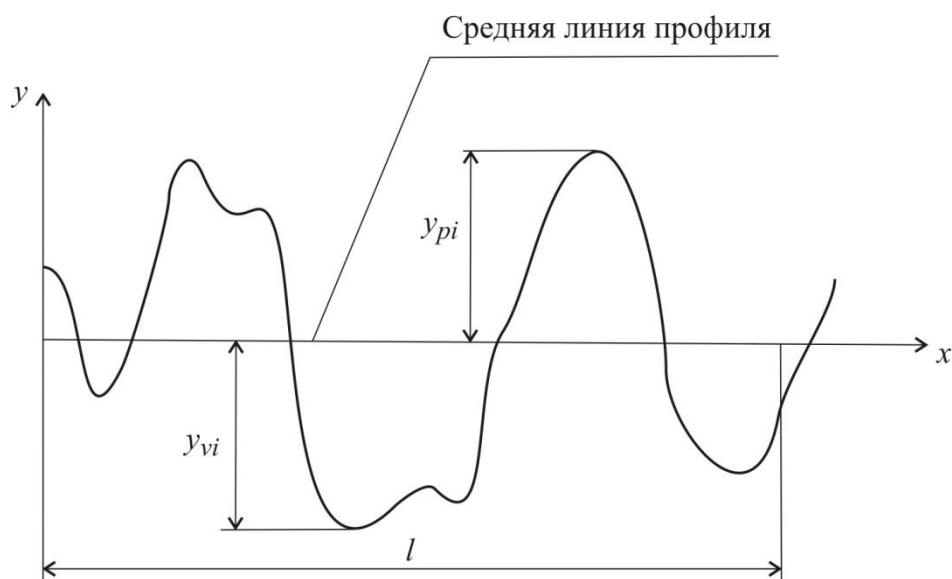


Рис. 6.13

На рисунке обозначены:

l – базовая длина, в пределах которой нормируется шероховатость;

y_{pi} – высота i -того выступа профиля;

y_{vi} – глубина i -той впадины профиля.

Согласно ГОСТ 25142-82, шероховатость поверхности определяется величиной и формой микронеровностей на базовой длине l и измеряется в микрометрах. Из всех параметров шероховатости чаще всего используют R_a и R_z .

R_a (среднее арифметическое отклонение профиля) – определяется по всем выступам и впадинам в пределах базовой длины: $R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx$.

R_z (высота неровностей профиля по десяти точкам) – определяется по 5-ти наибольшим выступам и 5-ти самым глубоким впадинам на базовой длине:

$$R_z = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 |y_{pi}| + \sum_{i=1}^5 |y_{vi}| \right).$$

Числовые значения R_a и R_z назначают из ряда: 1;

0,8; 0,63; 0,50; 0,40; 0,32; 0,25; 0,16; 0,125. Значения, выходящие из этого диапазона, получают умножением на 10 в целой степени.

Параметры шероховатости выбирают в зависимости от ряда факторов, например, от требований к внешнему виду детали, условий эксплуатации, от требований к соединению с другими деталями, технологического процесса обработки поверхности детали.

Обозначение шероховатости поверхности на чертежах (ГОСТ 2309-73). Величина шероховатости указывается на всех поверхностях, обрабатываемых по данному чертежу.

В обозначении шероховатости поверхности, способ обработки которой конструктором не устанавливается, применяют знак (рис. 6.14, а).

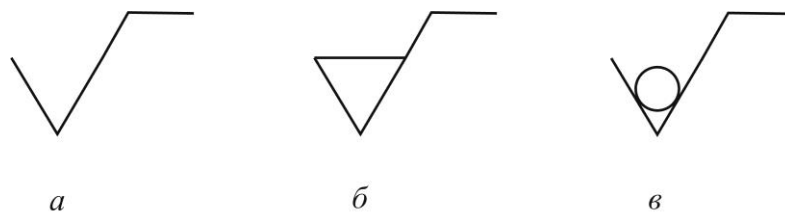


Рис. 6.14

В обозначении шероховатости поверхности, которая должна быть образована только удалением слоя материала, применяют знак (рис. 6.14, б).

В обозначении шероховатости поверхности, которая должна быть образована без удаления слоя материала или не обрабатывается по данному чер-

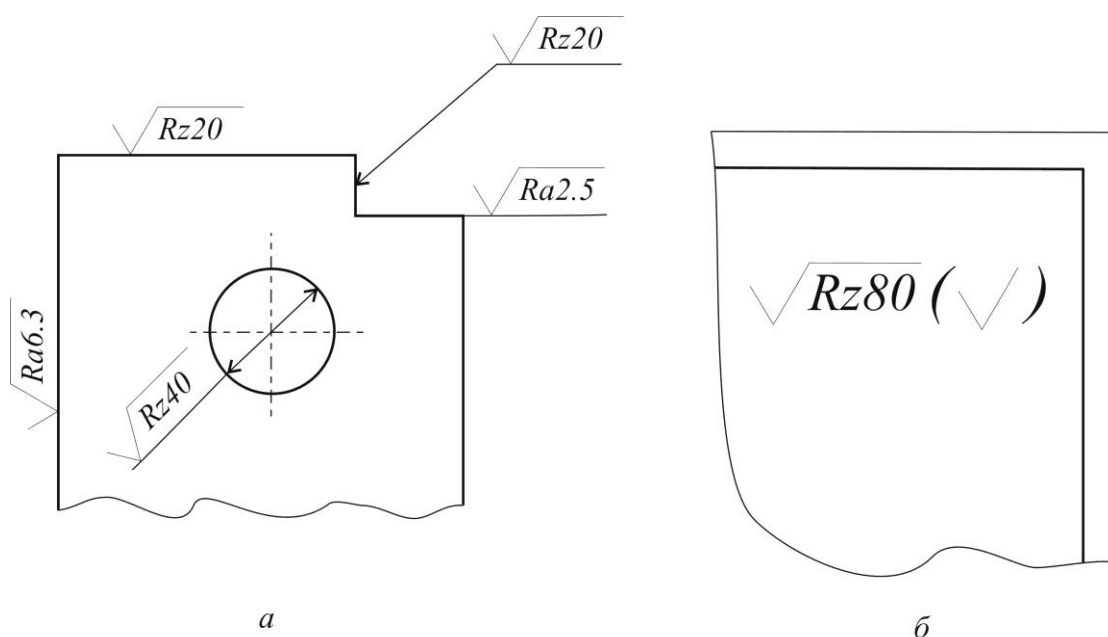


Рис. 6.15

тежу, применяют знак (рис. 6.14, в).

Знак ставится острием на обозначаемую поверхность детали или на выносную линию от этой поверхности. Параметр шероховатости и его численная величина указываются под полкой знака.

Примеры обозначения шероховатости показаны на рис. 6.15, а. Если большое количество поверхностей имеет одинаковую шероховатость, то ее обозначение на изображение не наносят, а в правом верхнем углу чертежа помещают общее обозначение шероховатости этих поверхностей (рис. 6.15, б).

6.6. Обозначения материалов и покрытий

Материал указывается на чертеже детали в соответствующей графе основной надписи. Обозначение материала должно содержать наименование материала, марку и номер стандарта. Если деталь должна быть изготовлена из сортового материала определенного профиля и размера, то такой материал записывают в соответствии с присвоенным ему в стандарте на сортамент обозначениями.

Примеры обозначений материала на чертеже:

Сталь 20 ГОСТ 1050-88

Сплав АЛ2 ГОСТ 1583-89

Лист В1.0 ГОСТ 19904-90
10кп ГОСТ 1050-88

Круг В16 ГОСТ 2590-88
30 ГОСТ 1050-88

Лист АМг6-1 ГОСТ 21631-76

Пруток Д16Т.КР.20Н ГОСТ 21488-76

Покрытия применяют для защиты материалов от старения и коррозии, а также для придания декоративных свойств изделию. Обычно применяют неорганические покрытия (для металлических деталей) и лакокрасочные (для металлических и неметаллических материалов).

Запись условного обозначения покрытия производится в технических требованиях чертежа по ГОСТ 9306-85 в следующем порядке: 1) способ получения покрытия; 2) обозначение материала покрытия; 3) толщина покрытия; 4) обозначение функциональных и декоративных свойств покрытия (при необходимости); 5) обозначение дополнительной обработки (при необходимости).

Примеры условных обозначений неорганических покрытий показаны в табл. 6.4.

Табл. 6.4

Материал детали	Покрытие	Обозначение покрытия
Сталь	Цинковое, толщиной 6 мкм, хромированное	Ц6.хр
	Никелевое блестящее, толщиной 15 мкм	Н15.б
	Медно-никелевое с подслоем меди толщиной 9 мкм и никеля 12 мкм	М9.Н12
	Никелевое, толщиной 9 мкм, получено химическим способом	Хим.Н9
Алюминиевые сплавы	Анодно-окисное хромированное	Ан.Окс.хр
Медь, медные сплавы	Горячее покрытие припоем ПОС61	Гор.ПОС61

Обозначения лакокрасочных покрытий записывают в следующем порядке (ГОСТ 9032-74): 1) обозначение лакокрасочного материала внешнего слоя

покрытия; 2) класс покрытия (I – IV); 3) обозначение условий эксплуатации в части воздействия климатических факторов и воздействия особых сред. Обозначение материала, класса покрытия и условий эксплуатации разделяют точками.

Пример обозначения.

Эмаль ПФ-115 серая.П.УЗ – покрытие серой эмалью ПФ-115 по II классу, для умеренного микроклиматического района, эксплуатация в закрытых помещениях с естественной вентиляцией.

Лекция 9

9. Анализ прочности и жесткости конструкций при динамических воздействиях

К наиболее распространенным динамическим воздействиям относятся вибрации и удары.

Вибрация – такой вид воздействия, при котором внешняя сила изменяется по гармоническому закону.

Удар – такой вид воздействия, при котором внешняя сила имеет вид коротких (единицы – десятки миллисекунд) импульсов.

При динамических воздействиях внутри конструкции возникают динамические (изменяющиеся во времени) напряжения. Разрушение наступает быстрее и зависит от количества циклов нагрузки и амплитудного значения ускорения. Причина - возникновение циклических пластических деформаций, которые, накапливаясь, вызывают "усталость" материала.

Основной характеристикой при динамических воздействиях является *предел выносливости* σ_{-1} – наибольшее по модулю напряжение цикла σ_{\max} , при котором конструкция не разрушается до базового количества циклов (обычно $1 \cdot 10^6 \dots 1 \cdot 10^7$). Так, например, для стали $\sigma_{-1} \approx 0,5\sigma_B$, для цветных металлов и пластмасс $\sigma_{-1} \approx (0,25 \dots 0,5)\sigma_B$.

Условие прочности при динамических воздействиях $|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]_{\text{д}} = \sigma_{-1} / k_3$, где $[\sigma]_{\text{д}}$ – максимально допустимое динамическое напряжение; k_3 – коэффициент запаса (обычно 1...3).

Условие жесткости: $|w_{\max}| \leq [w]_{\text{д}}$, где $|w_{\max}|$ – максимальный по модулю прогиб цикла, $[w]_{\text{д}}$ – допустимый динамический прогиб.

9.1. Расчетные схемы

Будем рассматривать конструкцию как колебательную систему с сосредоточенными параметрами (рис. 9.1). Баланс динамических сил при колебаниях: $P_{\text{и}} + P_{\text{с}} + P_{\text{у}} = P(t)$. С учетом выражений для сил $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = P(t)$. Рис. 9.1 соответствует силовому возбуждению, когда внешняя динамическая сила $P(t)$ приложена к инерционному элементу. На практике чаще встречается случай, когда внешняя сила приложена к основанию конструкции и вызывает

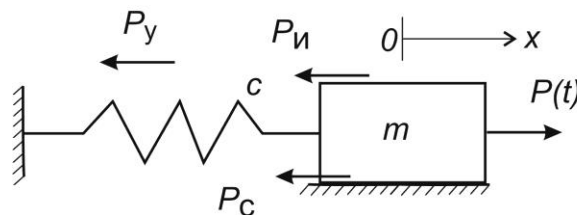


Рис. 9.1

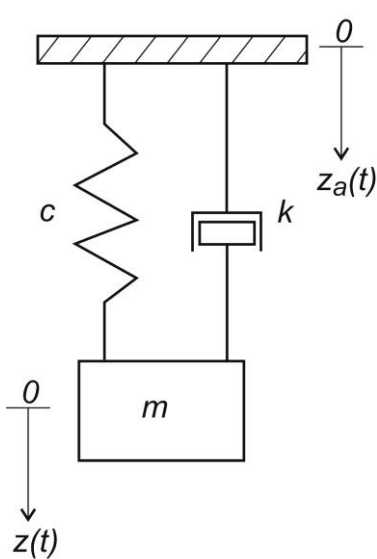


Рис. 9.2

его перемещение $z_a(t)$ – кинематическое возбуждение (рис. 9.2). Инерционный элемент испытывает перемещение $z(t)$. Опасным, однако, является перемещение инерционного элемента относительно основания: $z_1 = z - z_a$. В этом случае уравнение движения имеет вид: $m\ddot{z}_1 + k\dot{z}_1 + cz_1 = -m\ddot{z}_a$.

Рассмотрим сначала решение этого дифференциального уравнения для случая *свободных колебаний* без потерь ($\ddot{z}_a = 0$ и $k = 0$). Обозначим отношение $c/m = \omega_0^2$ (ω_0 называется частотой свободных колебаний). Тогда уравнение движения примет вид:

$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = 0$. Решением этого уравнения являются незатухающие колебания $z_1 = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$, где A – начальная амплитуда колебаний, α – начальная фаза.

Если в системе имеются механические потери ($k \neq 0$), то решением уравнения движения является функция $z_1 = A e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \alpha)$ (затухающие колебания), где $n = \frac{k}{2m}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$. При малых потерях $\omega_1 \approx \omega_0$.

Случай *вынужденных колебаний*. Уравнение движения имеет вид:
 $\ddot{z}_1 + 2n\dot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -\ddot{z}_a$.

9.2. Расчеты на прочность и жесткость при вибрациях

Вибрации. Ускорение внешней вынуждающей силы имеет вид: $\ddot{z}_a = \ddot{z}_{am} \sin \omega t$, где ω – частота вынуждающей силы. Решение уравнения движения: $z_1 = z_{1m} \sin(\omega t + \varphi) = \mu z_{am} \sin(\omega t + \varphi)$, где φ – начальная фаза,

$\mu = \frac{z_{1m}}{z_{am}}$ – коэффициент динамичности.

При вибрациях коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}}, \quad \text{где}$$

$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ – относительная частота,

$\gamma = \frac{2n}{\omega_0}$ – коэффициент механических потерь.

Графическая зависимость μ от η показана на рис. 9.3. Наибольшего значения μ достигает при резонансе, когда $\eta = 1$.

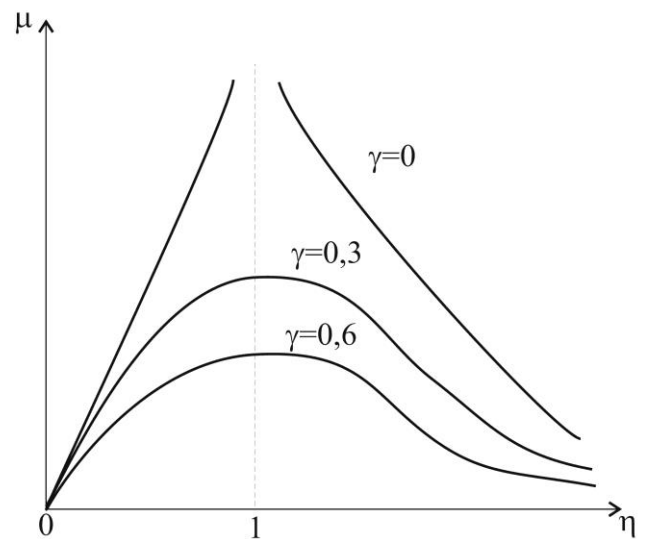


Рис. 9.3

При расчетах на прочность учитывают не только статическую силу, но и динамическую $P_d = m\ddot{z}_1 = m\mu\ddot{z}_{am}$.

При расчетах на жесткость статическое перемещение суммируют с динамическим $z_{1m} = \mu_{\max} z_{am} = \mu_{\max} \ddot{z}_{am} / \omega_0^2$.

9.3. Расчеты на прочность и жесткость при ударах

Будем считать, что ударное ускорение $\ddot{z}_a(t)$ воздействует на корпус прибора через основание, при этом трение учитывать не будем ($k=0$). В реальных конструкциях, где $k \neq 0$, возникающие динамические напряжения будут меньше, что эквивалентно введению дополнительного коэффициента запаса прочности. Стандартами на динамическую ударопрочность нормируются, как правило, два вида ударных импульсов – прямоугольный и синусоидальный (рис. 9.4, а и б).

Подход к решению уравнения движения такой же, как и при вибрациях, однако следует учитывать два различных интервала времени: 1) момент воз-

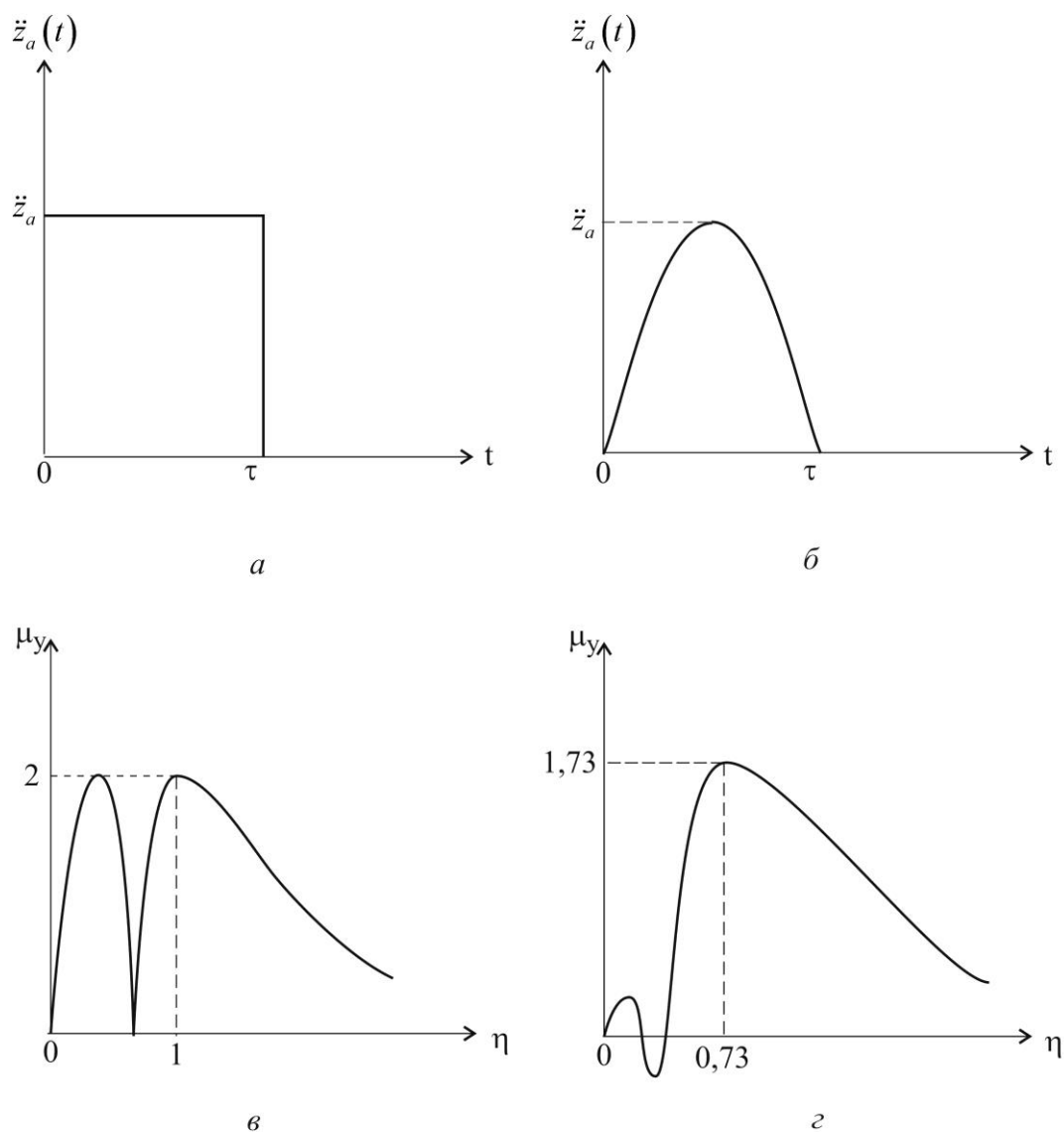


Рис. 9.4

действия ударного импульса $0 < t < \tau$, когда масса движется по закону вынужденных колебаний; 2) промежуток времени после окончания ударного импульса $t > \tau$, когда масса совершает свободные колебания.

Зависимость коэффициента динамичности при ударах μ_y от условной частоты ударного импульса $\eta = \frac{1}{2\tau f_0}$ для прямоугольного и синусоидального им-

пульсов показана на рис. 9.4, в и г соответственно. Аналитически эта зависимость выражается следующим образом: а) для прямоугольного импульса

$\mu_y = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2\eta} \right|$; б) для синусоидального импульса $\mu_y = \frac{2\eta}{\eta^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\eta}$. Далее расчет динамической прочности и жесткости ведется аналогично случаю вибраций.

динамической прочности и жесткости ведется аналогично случаю вибраций.

9.4. Общие методы повышения динамической прочности и жесткости

Для исключения резонанса необходимо вывести собственную частоту конструкции ω_0 из области возможных частот вибраций $\omega_{\min} \dots \omega_{\max}$, что обеспечит невысокое значение коэффициента динамичности μ_{\max} . Это можно сделать, например, изменив крепление детали на более жесткое (шарнир – заделка). Можно также установить дополнительное ребро жесткости, однако это усложнит конструкцию.

Эффективным также является применение антивибрационных покрытий с высоким коэффициентом механических потерь, но в этом случае конструкция становится неремонтопригодной.

Выбор конкретного метода остается за конструктором.