Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

Составители О. А. Ганжа, Т. В. Соловьева

Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 001.8(075.8)
ББК 72я73
О 753

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат технических наук *А. В. Игнатьев*, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;

кандидат физико-математических наук *Н. А. Михайлова*, доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

О753 **Основы** научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. О. А. Ганжа, Т. В. Соловьева. — Электронные текстовые данные (1,6 Кбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения: 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. — Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-98276-566-6

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов-магистров, аспирантов, соискателей всех специальностей и форм обучения. В учебном пособии представлены основы научного знания; средства, методы и этапы научного исследования; статистическая обработка экспериментальных исследований; элементы дисперсионного анализа. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением примеров и задач.

УДК 001.8(075.8)
ББК 72я73

Учебное издание
ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Учебное пособие
Составили **Ганжа** Ольга Александровна, **Соловьева** Татьяна Викторовна

Публикуется в авторской редакции.
Подписано в свет 16.05.2013. Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 4,0. Объем данных 1,6 Кбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

Оглавление

Введение

Наука — это непрерывно развивающаяся система знаний объективных законов природы, общества и мышления, получаемых и превращаемых в непосредственную производительную силу общества в результате специальной деятельности людей. Понятие «наука» имеет несколько основных значений.

Во-первых, под **наукой** (греч. episteme, лат. scientia) мы понимаем сферу человеческой деятельности, направленную на выработку и теоретическую схематизацию объективных знаний о действительности.

Во-вторых, наука выступает как результат этой деятельности — система полученных научных знаний.

В-третьих, термин "наука" употребляется для обозначения отдельных отраслей научного знания.

Наука – эта та область деятельности, где основной целью является получение самого научного знания. Наука и определяется как сфера человеческой деятельности, функцией которой является выработка и теоретическая систематизация объективных знаний о действительности. В узком смысле термин «наука» употребляется также для обозначения отдельных отраслей научного знания.

1. Основы научного знания

Знание — это проверенный практикой результат познания действительности. Верное ее отражение в сознании человека.

Главной функцией знания является идеальное воспроизведение в языковой форме обобщенных представлений о закономерных связях объективного мира.

Функциями знаниями являются:

- обобщение разрозненных представлений о закономерностях природы общества и мышления;
- хранение в обобщенных представлениях всего того, что может быть передано в качестве устойчивой основы практических действий.

Знание является продуктом общественной деятельности людей, направленной на преобразование действительности.

Познанием называют процесс движения человеческой мысли от незнания к знанию.

В основе познания лежит отражение объективной действительности в сознании человека в процессе его общественной, производственной и научной деятельности, именуемой **практикой**. Потребности практики выступают основной и движущей силой развития познания, его целью.

Человек познает законы природы, чтобы овладеть силами природы и поставить их себе на службу; он познает законы общества, чтобы в соответствии с ними воздействовать на ход исторических событий. Познание выpacтает из практики, но затем само направляется на практическое овладение действительностью:

$$\textit{Практика} \Rightarrow \textit{познание} \Rightarrow \textit{практическое овладение действительностью}.$$

От практики к теории и от теории к практике:

$$\textit{Практика} \rightarrow \textit{теория} \rightarrow \textit{практика}.$$

От действия к мысли и от мысли к действительности. Такова общая закономерность отношений человека в окружающей действительности.

Практика является началом и одновременно естественным завершением всякого процесса познания. Следует отметить, что завершение познания всегда относительно, так как в процессе познания возникают новые проблемы и задачи, которые были подготовлены и поставлены предшествующим развитием научной мысли. Решая эти задачи и проблемы, наука должна опережать практику и. таким образом сознательно направлять ее развитие.

Вся наука, все человеческое познание направлены к достижению **истинных знаний**, верно отражающих действительность.

В противоположность истинному знанию **заблуждение** представляет собой неверное, иллюзорное отражение мира.

Истинные знания существуют в виде законов науки, теоретических положений и выводов, учений, подтвержденных практикой и существующих объективно, независимо от трудов и открытий ученых. Поэтому истинное научное знание объективно. Основной целью познания является достижение истинных знаний, которые реализуются в виде теоретических положений и выводов, законов и учений, подтвержденных практикой и существующих объективно, независимо от нас.

Научное знание может быть относительным и абсолютным.

Относительное знание — это знание, которое, будучи в основном верным отражением действительности, отличается некоторой неполнотой совпадения образа с объектом.

Абсолютное знание — это полное, исчерпывающее воспроизведение обобщенных представлений об объекте, обеспечивающее абсолютное совпадение образа с объектом. Абсолютное знание не может быть опровергнуто или изменено в будущем.

Различают два вида познания — чувственное и рациональное (рис. 1.1–1.3).

Элементы чувственного познания выражаются через ощущение, восприятие, представление и воображение (табл. 1.1).

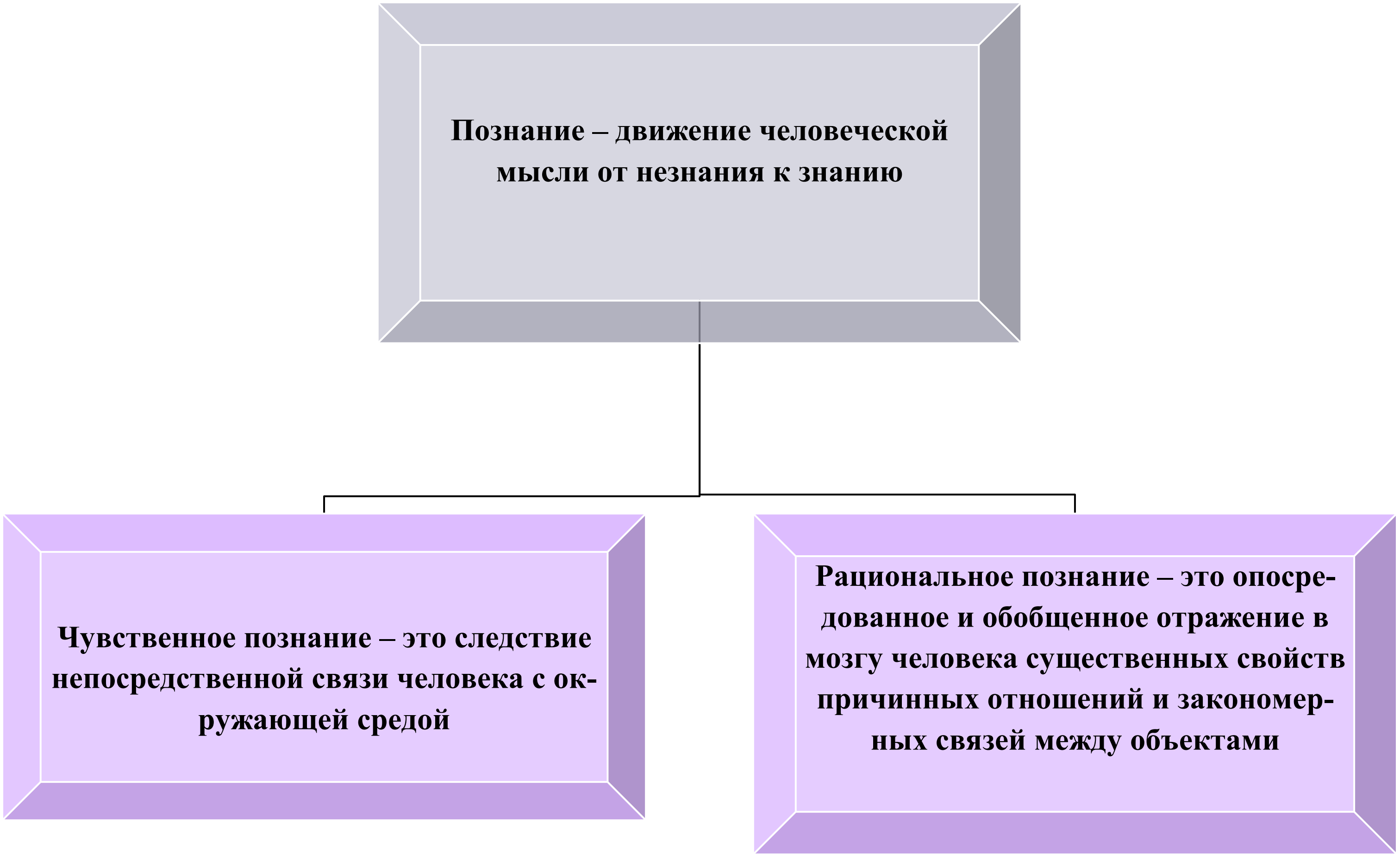


Рис. 1.1. Структурная схема процесса познания

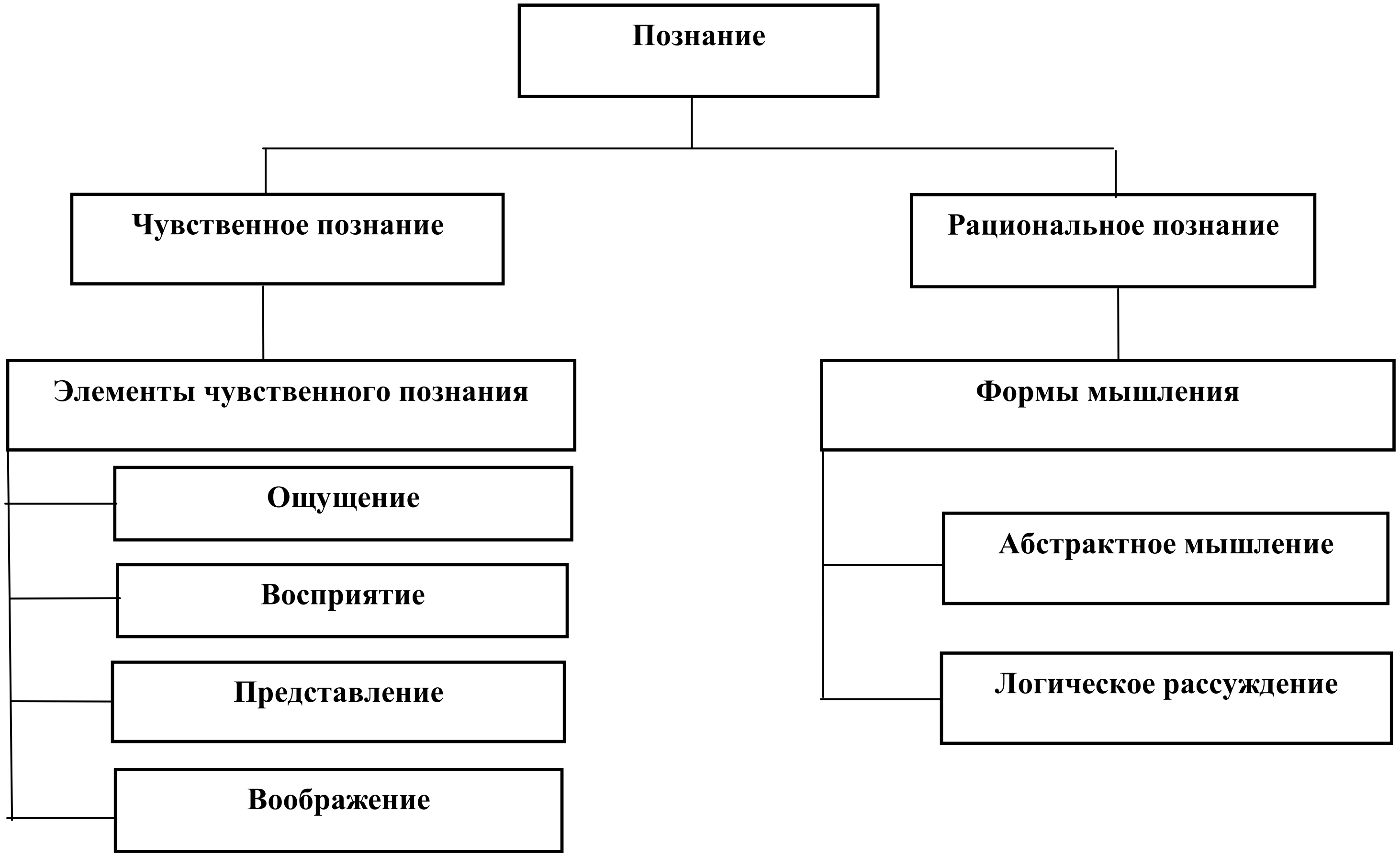


Рис. 1. 2. Схема иерархической структуры процесса познания

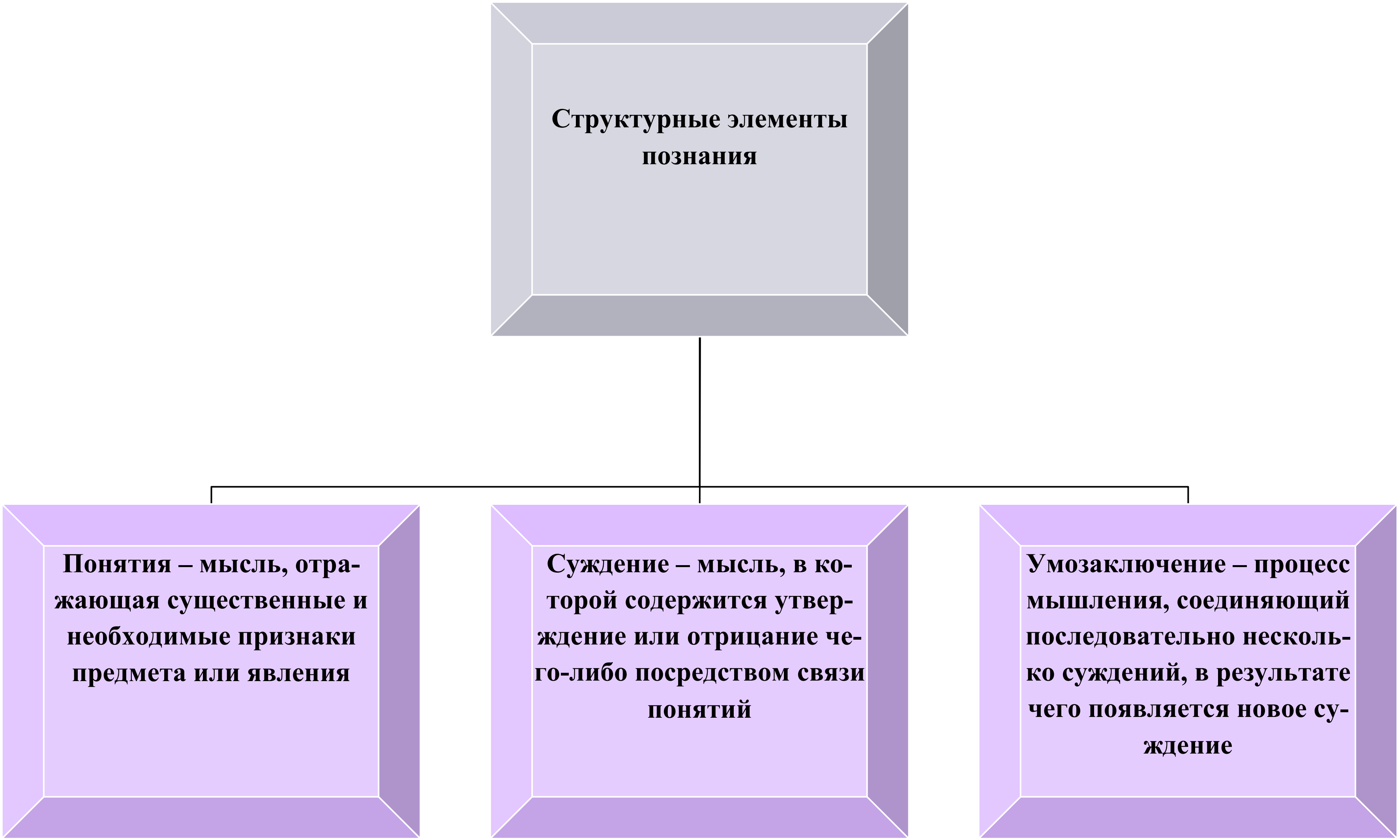


Рис. 1.3. Структурные элементы познания (абстрактного мышления и логического рассуждения)

Таблица 1.1

Вид познания	Элемент познания
Чувственное познание	*Ощущение* — это отражение мозгом человека свойств предметов или явление объективного мира, которые воспринимаются его органами чувств.
	Восприятие — это отражение мозгом человека свойств предметов или явлений в целом, воспринимаемых его органами чувств в какой-либо отрезок времени, и дает первичный чувственный образ предмета или явления. *Представление* — это вторичный образ предмета или явления, которые в данный момент времени не действуют на органы чувств человека, но обязательно действовали ранее.
	Воображение — это преобразование различных представлений в мозгу человека, соединение их в целую картину образов.
Рациональное познание	*Понятие* — это мысль, отражающая существенные и необходимые признаки предмета или явления.
	Суждение — это мысль, в которой содержится утверждение или отрицание чего-либо посредством связи понятий.
	Умозаключение — это процесс мышления, соединяющий последовательность двух или более суждений, в результате чего появляется новое суждение.

Рациональное познание дополняет и опережает чувственное познание, способствует осознанию сущности происходящих процессов, вскрывает закономерности их развития. Формой рационального познания является абстрактное мышление, логическое рассуждение человека, а структурными элементами — понятия, суждения, умозаключения (рис. 1.3., табл. 1.1).

Понятия бывают общими, конкретными, абстрактными, относительными и абсолютными и др.

Общие понятия связаны с некоторым множеством предметов или явлений, единичные относятся только к одному, конкретные относятся к конкретным предметам или явлениям.

Абстрактные — к отдельно взятым их признакам, относительные понятия всегда представляются попарно, а абсолютные не содержат парных отношений.

Суждения бывают утвердительными и отрицательными, общими и частными, условными и разделительными и др.

Умозаключение, по существу, является выводом, который дает возможным переход от мышления к практическим действиям. В непосредственных умозаключениях приходят от одного суждения к другому, а в опосредованных переход от одного суждения к другому осуществляется посредством третьего.

Процесс познания осуществляется от научной идеи к гипотезе, превращаясь впоследствии в закон или теорию.

2. Средства и методы научного исследования

Формой существования и развития науки является **научное исследование**. В Федеральном законе Российской Федерации от 23 августа 1996 г. «О науке и государственной научно-технической политике» **научно-исследовательская деятельность** определена как деятельность, направленная на получение и применение новых знаний.

Цель научного исследования — определение конкретного объекта и всестороннее, достоверное изучение его структуры, характеристик, связей на основе разработанных в науке принципов и методов познания, а также получение полезных для деятельности человека результатов, внедрение в производство с дальнейшим экономическим эффектом.

Объектом научного исследования являются материальная или идеальная системы, а предметом — структура системы, взаимодействие ее элементов, различные свойства, закономерности развития.

Результаты научных исследований оцениваются тем выше, чем выше научность сделанных выводов и обобщений, чем достовернее они и эффективнее. Они должны создавать основу для новых научных разработок. Одним из важнейших требований, предъявляемых к научному исследованию, является научное обобщение, которое позволит установить зависимость и связь между изучаемыми явлениями и процессами и сделать научные выводы. Чем глубже выводы, тем выше научный уровень исследования.

В науке можно выделить **эмпирический и теоретический уровни исследования и организации знания**.

Теоретический уровень научного знания предполагает наличие особых абстрактных объектов *(конструктов)* и связывающих их теоретических законов, создаваемых с целью идеализированного описания и объяснения эмпирических ситуаций, т.е. с целью познания сущности явлений. Цель их — расширить знания общества и помочь более глубоко понять законы природы.

Такие разработки используют в основном для дальнейшего развития новых теоретических исследований, которые могут быть долгосрочными, бюджетными и др.

Элементами эмпирического знания являются факты, получаемые с помощью наблюдений и экспериментов и констатирующие качественные и количественные характеристики объектов и явлений. Устойчивая повторяемость и связи между эмпирическими характеристиками выражаются с помощью эмпирических законов, часто имеющих вероятностный характер.

Итак, теоретический уровень исследования характеризуется преобладанием логических методов познания.

На этом уровне полученные факты исследуются, обрабатываются с помощью логических понятий, умозаключений, законов и других форм мышления. Здесь исследуемые объекты мысленно анализируются, обобщаются, постигается их сущность, внутренние связи, законы развития. На этом уровне познание с помощью органов чувств *(эмпирия)* может присутствовать, но оно является подчиненным.

Структурными компонентами теоретического познания являются проблема, гипотеза и теория.

Под **проблемой** понимают сложную теоретическую или практическую задачу, способы решения которой неизвестны или известны не полностью.

Гипотеза — это требующее проверки и доказательства предположение о причине, которая вызывает определенное следствие, о структуре исследуемых объектов и характере внутренних и внешних связей структурных элементов. Гипотеза является научной лишь в том случае, если она подтверждается фактами, и она может существовать лишь до тех пор, пока не противоречит достоверным фактам опыта, в противном случае она становится просто фикцией. Гипотеза верифицируется (проверяется) соответствующими фактами опыта, в особенности экспериментом, получая характер истины. Таким образом, научная гипотеза должна отвечать следующим требованиям:

1) релевантности, т.е. относимости к фактам, на которые она опирается;
2) проверяемости опытным путем (исключение составляют непроверяемые гипотезы);
3) совместимости с существующим научным знанием;
4) обладания объяснительной силой, т.е. из гипотезы должно выводиться некоторое количество подтверждающих ее фактов, следствий. Большей объяснительной силой будет обладать та гипотеза, из которой выводится наибольшее количество фактов;
5) простоты, т.е. она не должна содержать никаких произвольных допущений, субъективистских наслоений.

Факты опыта какой-либо ограниченной научной области вместе с осуществленными, строго доказанными гипотезами, образуют теорию.

Теория представляет собой целостную систему достоверных знаний. Она является наиболее высокой формой обобщения и систематизации знаний.

Теория — это учение об обобщенном опыте (практике), формулирующее научные принципы и методы, которые позволяют обобщить и познать существующие процессы и явления, проанализировать действие на них разных факторов и предложить рекомендации по использованию их в практической деятельности людей.

Теория не только описывает совокупность фактов, но и объясняет их, т.е. выявляет происхождение и развитие явлений и процессов, их внутренние и внешние связи, причинные и иные зависимости. Все содержащиеся в теории положения и выводы обоснованы, доказаны. Структуру теории образуют понятия, суждения, законы, научные положения, учения, идеи и другие элементы.

Принцип — это сходные положения какой-либо отрасли науки. Они являются начальной формой систематизации знаний (аксиомы евклидовой геометрии, постулат Бора в квантовой механике и т. д.).

Аксиома — это положение, которое является исходным, недоказуемым, и из которого по установленным правилам выводятся другие положения. Логическими аксиомами являются, например, закон тождества, закон противоречия, закон исключения третьего.

Закон — положение, выражающее всеобщий ход вещей в какой-либо области; высказывание относительно того, каким образом что-либо является необходимым или происходит с необходимостью. Законы объективны и выражают наиболее существенные, устойчивые, причинно обусловленные связи и отношения между явлениями и процессами.

Законы могут быть классифицированы по различным основаниям. Так, по основным сферам реальности можно выделить законы природы, общества, мышления и познания. По объему действия — всеобщие, общие и частные. Научный закон — это знание, формулируемое людьми в понятиях, которое, однако, имеет свое основание в природе, объективном мире.

Положение — научное утверждение, сформулированная мысль.

Учение — совокупность теоретических положений о какой-либо области явлений действительности.

Идея — это интуитивное объяснение явления без промежуточной аргументации и осознания всей совокупности связей, на основе которой делается вывод, т.е. новое интуитивное объяснение события или явления и определяющее стержневое положение в теории. Идея раскрывает ранее незамеченные закономерности явления, основываясь на уже имеющихся о нем знаниях.

Концепция — это система теоретических взглядов, объединенных научной идеей (научными идеями).

Эмпирический уровень исследования характеризуется преобладанием чувственного познания (изучения внешнего мира посредством органов чувств). На этом уровне формы теоретического познания присутствуют, но имеют подчиненное значение.

Взаимодействие эмпирического и теоретического уровней исследования заключается в том, что:

- совокупность фактов составляет практическую основу теории или гипотезы;
- факты могут подтверждать теорию или опровергать ее;
- научный факт всегда пронизан теорией, поскольку он не может быть сформулирован без системы понятий, истолкован без теоретических представлений;
- эмпирическое исследование в современной науке предопределяется, направляется теорией.

Формирование теоретического уровня науки приводит к качественному изменению эмпирического уровня. Если до формирования теории эмпирический материал, послуживший её предпосылкой, получался на базе обыденного опыта и естественного языка, то с выходом на теоретический уровень он "видится" сквозь призму смысла теоретических концепций, которые начинают направлять постановку экспериментов и наблюдений — основных методов эмпирического исследования.

Структуру эмпирического уровня исследования составляют факты, эмпирические обобщения и законы (зависимости). Понятие **«факт»** употребляется в нескольких значениях:

- объективное событие, результат, относящийся к объективной реальности (факт действительности) либо к сфере сознания и познания (факт сознания);
- знание о каком-либо событии, явлении, достоверность которого доказана (истина);
- предложение, фиксирующее знание, полученное в ходе наблюдений и экспериментов.

Эмпирическое обобщение — это система определенных научных фактов, на основании которой можно сделать определенные выводы или выявить недочеты и ошибки.

Эмпирические законы отражают регулярность в явлениях, устойчивость в отношениях между наблюдаемыми явлениями. Эти законы теоретическим знанием не являются. В отличие от теоретических законов, которые раскрывают существенные связи действительности, эмпирические законы отражают более поверхностный уровень зависимостей.

Метод или путь исследования представляет собой способ достижения определенной цели, совокупность приемов и операций практического или теоретического освоения действительности.

В области науки метод есть путь познания, который исследователь прокладывает к своему предмету. Таким образом, метод научного исследования — это способ познания объективной действительности.

К методам эмпирического уровня относят наблюдение, описание, сравнение, счет, измерение, анкетный опрос, собеседование, тестирование, эксперимент, моделирование и т.д.

К методам теоретического уровня причисляют аксиоматический, гипотетический (гипотетико-дедуктивный), формализацию, абстрагирование, общелогические методы (анализ, синтез, индукцию, дедукцию, аналогию) и другие.

Все общенаучные методы целесообразно распределить на три группы (рис. 2.1).

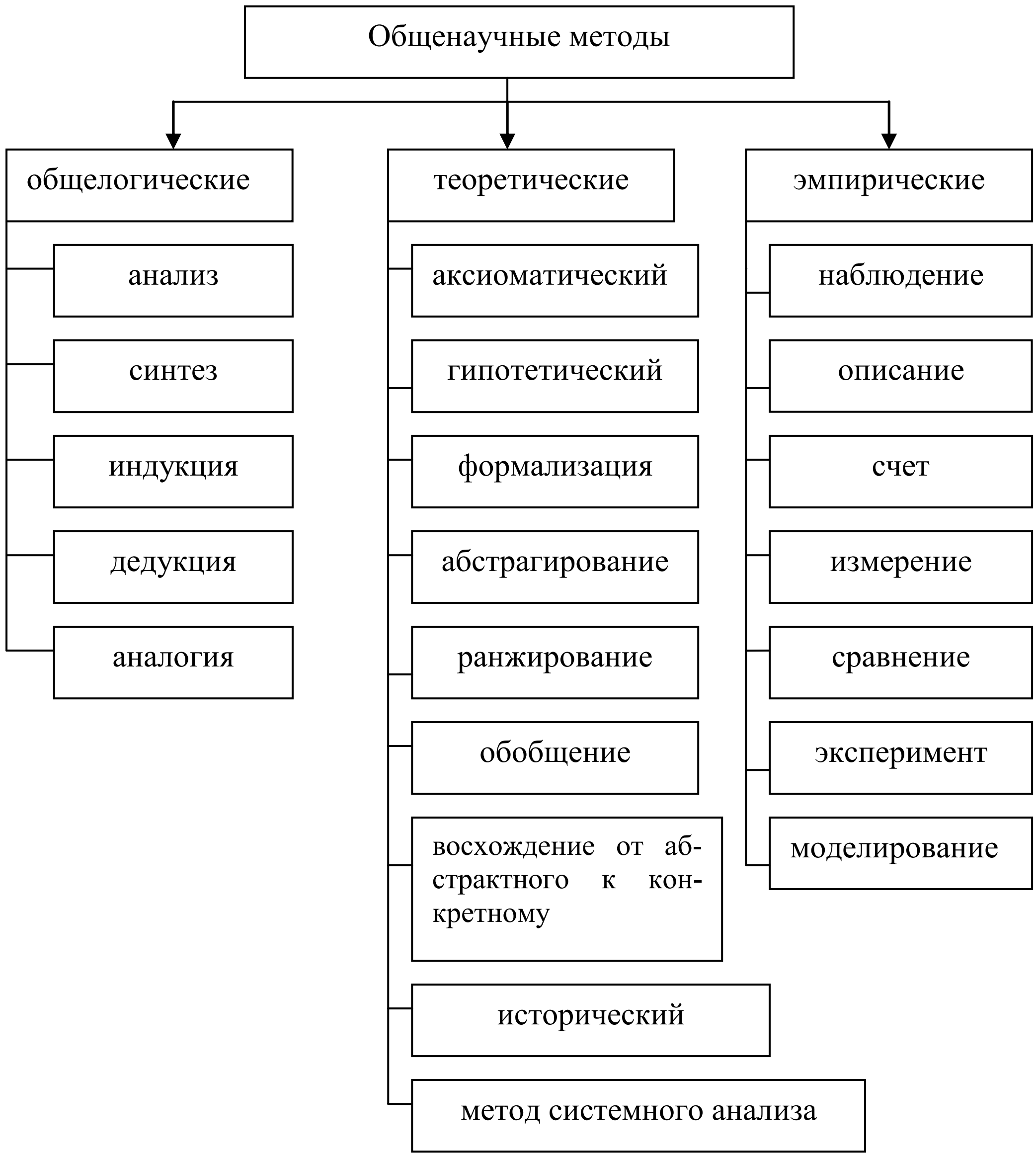


Рис. 2.1. Классификация общенаучных методов

Любое научное исследование осуществляется определенными приемами и способами, по определенным правилам.

Способ — это действие или система действий, применяемых при исполнении какой-либо работы, при осуществлении чего-либо.

Методику можно определить как совокупность способов и приемов познания.

Методика — это совокупность мыслительных и физических операций, размещенных в определенной последовательности, в соответствии с которой достигается цель исследования.

При разработке методики необходимо:

– проведение предварительного наблюдения над изучаемым объектом (явлением) с целью определения исходных данных (гипотез, выбора варьирующих факторов);
– создание условий, в которых возможно проведение эксперимента (подбор объектов для экспериментального воздействия, устранение влияния случайных факторов);
– определение пределов измерений;
– систематическое наблюдение за ходом развития изучаемого явления и точные описания фактов;
– проведение систематической регистрации измерений и оценок фактов различными средствами и способами;
– создание повторяющихся ситуаций, изменение характера условий и перекрестные воздействия;
– переход от эмпирического изучения к логическим обобщениям, к анализу и теоретической обработке полученного фактического материала.

2.1. Общелогические методы

Анализ — метод исследования, с помощью которого изучаемое явление или процесс мысленно расчленяются на составные элементы с целью изучения каждого в отдельности. Разновидностями анализа являются классификация и периодизация.

Синтез — метод исследования, предполагающий мысленное соединение составных частей или элементов изучаемого объекта, его изучение как единого целого. Методы анализа и синтеза взаимоувязаны, их одинаково используют в научных исследованиях.

Индукция — это движение мысли (познания) от фактов, отдельных случаев к общему положению. Индукция приводит к всеобщим понятиям и законам, которые могут быть положены в основу дедукции.

Дедукция — это выведение единичного, частного из какого-либо общего положения; движение мысли (познания) от общих утверждений к утверждениям об отдельных предметах или явлениях. Посредством дедуктивных умозаключений «выводят» определенную мысль из других мыслей.

Аналогия — это способ получения знаний о предметах и явлениях на основании того, что они имеют сходство с другими; рассуждение, в котором из сходства изучаемых объектов в некоторых признаках делается заключение об их сходстве и в других признаках.

Под *аналогией* понимается подобие, сходство каких-то свойств, признаков или отношений у различных в целом объектов. В основе метода аналогии лежит сравнение. Если делается логический вывод о наличии какого-то свойства, признака у изучаемого объекта на основании его сходства с другими объектами, то этот вывод называется умозаключением по аналогии.

Например, объект *А* имеет свойства P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}; объект *Б* имеет свойства P_1, P_2, ..., P_n. На основании сходства ряда свойств (P_1, P_2, ..., P_n) у обоих объектов делается предположение о наличии свойства P_{n+1} у объекта *Б*.

Степень правильности умозаключения по аналогии тем выше, чем больше общих свойств у сравниваемых объектов, существеннее обнаруженные у них общие свойства, глубже познана взаимная закономерная связь этих сходных свойств.

Метод аналогии применяется в самых разных науках: в математике, физике, химии, в гуманитарных дисциплинах и т.д. Существуют различные типы выводов по аналогии. Но общим для них является то, что во всех случаях непосредственному исследованию подвергается один объект, а вывод делается о другом, т.е. происходит перенос информации с одного объекта на другой. При этом объект, который подвергается исследованию, именуется моделью, а другой объект, на который переносится информация, полученная в результате исследования модели, называется оригиналом, т.е. модель выступает как аналогия.

2.2. Методы теоретического уровня

Аксиоматический метод заключается в том, что некоторые утверждения (аксиомы, постулаты) принимаются без доказательств и затем по определенным логическим правилам из них выводятся остальные знания.

Гипотетический метод основан на разработке гипотезы, научного предположения, содержащего элементы новизны и оригинальности.
Гипотеза должна полнее и лучше объяснить явления и процессы, подтверждаться экспериментально и соответствовать общим законам диалектики и естествознания. Этот метод исследования является основным и наиболее распространенным в прикладных науках.

Формализация состоит в том, что основные положения процессов и явлений представляют в виде формул и специальной символики. Путем операций с формулами можно получать новые формулы, доказывать истинность какого-либо положения. Формализация является основой для алгоритмизации и программирования, без которых не может обойтись компьютеризация знания и процесса исследования. Применение символов и других знакомых систем позволяет установить закономерности между изучаемыми фактами.

Абстрагирование — отвлечение от второстепенных фактов с целью сосредоточиться на важнейших особенностях изучаемого явления.
Например, при исследовании работы какого-либо механизма анализируют расчетную схему, которая отображает основные, существенные свойства механизма.

Ранжирование. Иногда при анализе явлений и процессов возникает потребность рассмотреть большое количество фактов (признаков). Здесь важно уметь выделить главное. В этом случае может быть применен способ ранжирования, с помощью которого исключают все второстепенное, не влияющее существенно на рассматриваемое явление.

Обобщение — установление общих свойств и отношений предметов и явлений; определение общего понятия, в котором отражены существенные, основные признаки предметов или явлений данного класса. Вместе с тем обобщение может выражаться в выделении не существенных, а любых признаков предмета или явления. Этот метод научного исследования опирается на философские категории общего, особенного и единичного.

Исторический метод позволяет исследовать возникновение, формирование и развитие процессов и событий в хронологической последовательности с целью выявить внутренние и внешние связи, закономерности и противоречия. Данный метод исследования используется преимущественно в общественных и, главным образом, в исторических науках. В прикладных же науках он применяется, например, при изучении развития и формирования тех или иных отраслей науки и техники.

Восхождение от абстрактного к конкретному, как метод научного познания состоит в том, что исследователь вначале находит главную связь изучаемого предмета (явления). Затем, прослеживая, как она видоизменяется в различных условиях, открывает новые связи и таким путем отображает во всей полноте его сущность.

Метод системного анализа. В основе системного анализа лежит понятие системы, под которой понимается множество объектов (компонентов), обладающих определенными свойствами с фиксированными между ними отношениями. На базе этого понятия производится учет связей, используются количественные сравнения альтернатив, для того, чтобы наилучшее решение, оцениваемое каким-либо критерием, измеримостью, эффективностью, надежностью, качеством и т.п.

Системный анализ складывается из основных трех этапов:

- первый заключается в постановке задачи: определяют объект, цели и задачи исследования, а также критерии для изучения и управления объектом;
- второй этап — определение границ изучаемой системы и определяется ее структура: объекты и процессы, имеющие отношение к поставленной цели, разбиваются собственно на изучаемую систему и внешнюю среду;
- третий этап — составление математической модели исследуемой системы: сначала производят параметризацию системы, описывают выделенные элементы системы и их взаимодействие.

Методы системного анализа: метод анализа иерархий (МАИ), методы теории нечетких множеств, метод «мозговая атака», метод сценариев, метод экспертных оценок, метод ранжирования, метод парного сравнения, метод множественного сравнения и др.

Системные методы используются при исследовании сложных систем с многообразными связями, характеризуемыми как непрерывностью и детерминированностью, так и дискретностью и случайностью (исследование операций, теория массового обслуживания, теория управления, теория множеств и др.).

2.3. Методы эмпирического уровня

Первичными в познании физической и экономической сущности процессов выступают наблюдения.

Наблюдение — это способ познания, основанный на непосредственном восприятии свойств предметов и явлений при помощи органов чувств.

Каждое наблюдение может зафиксировать лишь некоторые факторы. Для того чтобы наиболее полно понять процесс, необходимо иметь большое количество наблюдений. Как метод научного исследования, наблюдение применяется, например, для сбора социологической информации в области экономики.

В зависимости от положения исследователя по отношению к объекту изучения различают простое и включенное наблюдение.

Первое состоит в наблюдении со стороны, когда исследователь — постороннее по отношению к объекту лицо, не являющееся участником деятельности.

Второе характеризуется тем, что исследователь открыто или инкогнито включается в деятельность в качестве участника.

Если *наблюдение* проводилось в естественной обстановке, то его называют *полевым*.

Если условия окружающей среды, ситуация были специально созданы исследователем, то оно будет считаться *лабораторным*.

Результаты наблюдения могут фиксироваться в протоколах, дневниках, карточках, на кинопленках и другими способами.

Эксперимент является наиболее важной составной частью научных исследований. Это один из основных способов получить новые научные знания. От обычного, пассивного наблюдения эксперимент отличается активным воздействием исследователя на изучаемое явление.

Основной целью эксперимента является проверка теоретических положений (подтверждение рабочей гипотезы), а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования. Эксперимент должен быть проведен по возможности в кратчайший срок с минимальными затратами при самом высоком качестве полученных результатов. Различают эксперименты естественные и искусственные.

Естественные эксперименты характерны при изучении социальных явлений (социальный эксперимент) в обстановке, например, производства, быта и т. п.

Искусственные эксперименты широко применяются во многих естественнонаучных исследованиях.

Экспериментальные исследования бывают лабораторные и производственные.

Лабораторные экспериментальные исследования в форме *опытов* проводят с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т. д. Эти исследования позволяют наиболее полно и доброкачественно, с требуемой повторяемостью изучить влияние одних характеристик при варьировании других. Лабораторные опыты в случае достаточно полного научного обоснования эксперимента (математическое планирование) позволяют получить хорошую научную информацию с минимальными затратами. Однако такие эксперименты не всегда полностью моделируют реальный ход изучаемого процесса, поэтому возникает потребность в проведении производственного эксперимента.

Производственные экспериментальные исследования имеют целью изучить процесс в реальных условиях с учетом воздействия различных случайных факторов производственной среды.

Описание — это фиксация признаков исследуемого объекта, которые устанавливаются, например, путем наблюдения, измерения или эксперимента. Описание бывает:

1) *непосредственным*, когда исследователь непосредственно воспринимает и указывает признаки объекта;

2) *опосредованным*, когда исследователь отмечает признаки объекта, которые воспринимались другими лицами.

Счет (количественный метод) — это определение количественных соотношений объектов исследования или параметров, характеризующих их свойства. Так, экономическая статистика изучает количественную сторону экономически значимых явлений и процессов, т.е. их величину, степень распространенности, соотношение отдельных составных частей, изменение во времени и пространстве.

Сравнение — это сопоставление признаков, присущих двум или нескольким объектам, установление различия между ними или нахождение в них общего. В научном исследовании этот метод применяется, например, для сравнения экономических систем, институтов различных государств.

Выделить главное и затем глубоко исследовать процессы или явления с помощью обширной, но не систематизированной информации затруднительно. Поэтому такую информацию стремятся "сгустить" в некоторое абстрактное понятие — "модель".

Под *моделью* понимают искусственную систему, отображающую основные свойства изучаемого объекта — оригинала. Модель — это изображение в удобной форме многочисленной информации об изучаемом объекте.

Она находится в определенном соответствии с последним, может заменить его при исследовании и позволяет получить информацию о нем.

Метод моделирования, изучение явлений с помощью моделей, — один из основных в современных исследованиях.

Различают физическое и математическое моделирование.

Под *моделированием* понимается изучение моделируемого объекта, базирующееся на взаимно однозначном соответствии определенной части свойств оригинала.

Моделирование включает в себя построение модели, изучение ее, и перенос полученных сведений на моделируемый объект-оригинал. В зависимости от характера используемых моделей различают несколько видов моделирования.

При физическом моделировании физика явлений в объекте и модели и их математические зависимости одинаковы.
Физическое моделирование широко используется для разработки и экспериментального изучения различных сооружений (плотин электростанций, оросительных систем и т.п.), машин (аэродинамические качества самолетов), для лучшего понимания каких-то природных процессов и т.д.

При математическом моделировании физика явлений может быть различной, а математические зависимости должны быть одинаковыми. Математическое моделирование приобретает особую ценность, когда возникает необходимость изучить очень сложные процессы. При построении модели свойства и сам объект обычно упрощают, обобщают. Чем ближе модель к оригиналу, тем удачнее она описывает объект, тем эффективнее теоретическое исследование и тем ближе полученные результаты к принятой гипотезе исследования.

Символическое (*знаковое*) *моделирование* связано с условно-знаковым представлением каких-то свойств, отношений объекта-оригинала (в виде графиков, номограмм, схем; химической символики – структурных формул химических соединений). Важной разновидностью символического моделирования является математическое моделирование (математические уравнения: дифференциальные, интегральные и их системы вместе с известными данными для их решения);

Численное моделирование на ЭВМ предполагает исследование математической модели изучаемого объекта с помощью предварительно составленных программ.

Модели могут быть физические, математические, натурные.

Физические модели позволяют наглядно представлять протекающие в натуре процессы. С помощью физических моделей можно изучать влияние отдельных параметров на течение физических процессов.

Математические модели позволяют количественно исследовать явления, трудно поддающиеся изучению на физических моделях.

Натурные модели представляют собой масштабно изменяемые объекты, позволяющие наиболее полно исследовать процессы, протекающие в натурных условиях.
Стандартных рекомендаций по выбору и построению моделей не существует.

Модель должна отображать существенные явления процесса. Мелкие факторы, излишняя детализация, второстепенные явления и т. п. лишь усложняют модель, затрудняют теоретические исследования, делают их громоздкими, нецеленаправленными. Поэтому модель должна быть оптимальной по своей сложности, желательно наглядной, но главное — достаточно **адекватной,** т. е. описывать закономерности изучаемого явления с требуемой точностью.

Для построения наилучшей модели необходимо иметь глубокие и всесторонние знания не только по теме и смежным наукам, но и хорошо знать практические аспекты исследуемой задачи.

3. Этапы проведения научного исследования

Для успеха научного исследования его необходимо правильно организовать, спланировать и выполнять в определенной последовательности.

План и последовательность действий зависят от вида, объекта и целей научного исследования. Так, если оно проводится по технической тематике, то вначале разрабатывается основной предплановый документ — *технико-экономическое обоснование*, а затем осуществляются *теоретические и экспериментальные исследования*, составляется научно-технический отчет и результаты работы внедряются в производство. Применительно к работам студентов и аспирантов можно наметить следующие последовательные этапы их выполнения:

- подготовительный этап;
- проведение теоретических и эмпирических исследований;
- работа над рукописью и её оформление;
- внедрение результатов научного исследования.

Первый (подготовительный) **этап** включает: выбор темы; обоснование необходимости проведения исследования по ней; определение гипотез, целей и задач исследования; разработку плана или программы научного исследования; подготовку средств исследования (инструментария).

Вначале формулируется тема научного исследования, и обосновываются причины её разработки. Путем предварительного ознакомления с литературой и материалами ранее проведенных исследований выясняется, в какой мере вопросы темы изучены и каковы полученные результаты. Особое внимание следует уделить вопросам, на которые ответов вообще нет либо они недостаточны.

Составляется список нормативных актов, отечественной и зарубежной литературы, составляется картотека опубликованной научной литературы по данной тематике.

Разрабатывается методика исследования, подготавливаются средства научно-исследовательских работ в виде программ наблюдения, методик проведения измерений и др. Для проверки их годности могут проводиться пилотажные исследования.

Второй (исследовательский) **этап** состоит из систематического изучения научной литературы по теме, статистических сведений и архивных материалов; проведения теоретических и эмпирических исследований, в том числе сбора, обработки, обобщения и анализа полученных данных; объяснения новых научных фактов, аргументирования и формулирования положений, выводов и практических рекомендаций и предложений.

Третий этап включает: определение композиции (построения, внутренней структуры) работы; уточнение заглавия, названий глав и параграфов; подготовку черновой рукописи и еѐ редактирование; оформление текста, в том числе списка использованной литературы и приложений.

Четвертый этап состоит из внедрения результатов исследования в практику и авторского сопровождения внедряемых разработок. Научные исследования не всегда завершаются этим этапом, но иногда научные работы студентов (например, дипломные работы) рекомендуются для внедрения в практическую деятельность (на различных стадиях проектирования нефтепромысловых сооружений, на этапах технологического процесса монтажа оборудования и в учебный процесс).

3.1. Формулирование темы научного исследования

Подготовительным этапом научно-исследовательской работы является выбор темы научного исследования. Тема научно-исследовательской работы может быть отнесена к определенному научному направлению или к научной проблеме.

Под *научным направлением* понимают сферу научных исследований научного коллектива, посвященных решению каких-либо крупных, фундаментальных теоретических и экспериментальных задач в определенной отрасли науки. Например, научные исследования, выполняемые инженерами в области нефтегазовой отрасли, охватывают отрасль науки «Наука о Земле» (технические науки, геолого-минералогические, физико-математические, географические). Внутри исследования можно выделить конкретные направления, основой которых являются:

– общая и региональная геология,

– геотектоника и геодинамика, гидрогеология, геофизика,
– геофизические методы поиска полезных ископаемых,
– поиски и разведка нефтяных и газовых месторождений,
– технология бурения и освоения скважин,
– горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика,
– разработка и эксплуатаций нефтяных и газовых месторождений,
– технология освоения морских месторождений полезных ископаемых,
– строительство и эксплуатация нефтегазопроводов, баз и хранилищ.

Структурными единицами направления являются комплексные проблемы, темы и вопросы. Комплексная проблема включает в себя несколько проблем.

Научное направление⇒научная проблема⇒тема⇒научные вопросы⇒задача исследования.

Научная проблема — это совокупность сложных теоретических или практических задач; совокупность тем научно-исследовательской работы. Проблема охватывает значительную область исследования и имеет перспективное значение. Проблема может быть отраслевой, межотраслевой, глобальной. Проблема состоит из ряда тем.

Тема — это научная задача, охватывающая определенную область научного исследования. Она базируется на многочисленных исследовательских вопросах.

Под *научными вопросами* понимают более мелкие научные задачи, относящиеся к конкретной области научного исследования. Результаты решения этих задач имеют не только теоретическое, но, главным образом, и практическое значение, поскольку можно сравнительно точно установить ожидаемый экономический эффект.

Темы могут быть теоретическими, практическими и смешанными.

Теоретические темы разрабатываются преимущественно с использованием литературных источников.

Практические темы разрабатываются на основе изучения, обобщения и анализа фактов.

Смешанные темы сочетают в себе теоретический и практический аспекты исследования.

При разработке темы или вопроса выдвигается конкретная задача в исследовании — разработать новую конструкцию, прогрессивную технологию, новую методику и т. д.

Выбору темы предшествует тщательное ознакомление с отечественными и зарубежными источниками данной и смежной специальности.

Постановка (выбор) проблем или тем является трудной, ответственной задачей, включает в себя ряд этапов: формулирование проблем; разработка структуры проблемы; установка актуальности проблемы.

Формулирование проблем: на основе анализа противоречий исследуемого направления формулируют основной вопрос — проблему и определяют в общих чертах ожидаемый результат.

Разработка структуры проблемы: выделяют темы, подтемы, вопросы. Композиция этих компонентов должна составлять древо проблемы (или комплексной проблемы). По каждой теме выявляют ориентировочную область исследования.

Установка актуальности проблемы, т. е. ценность ее на данном этапе для науки и техники. Для этого по каждой теме выставляют несколько возражений и на основе анализа, методом исследовательского приближения, исключают возражения в пользу реальности данной темы. После такой "чистки" окончательно составляют структуру проблемы и обозначают условным кодом темы, подтемы, вопросы.

При выборе важно уметь отличать псевдопроблемы от научных проблем. Псевдопроблемы (ложные, мнимые), какую бы не имели внешнюю форму, в основе своей имеют антинаучный характер.

После обоснования проблемы и установления ее структуры научный работник (или коллектив), как правило, самостоятельно приступает к выбору темы научного исследования. По мнению некоторых ученых, выбрать тему зачастую более сложно, чем провести само исследование. К теме предъявляют ряд требований:

1) Тема должна быть актуальной, важной, требующей разрешения в настоящее время. Это требование одно из основных. Критерия для установления степени актуальности пока нет. Так, при сравнении двух тем теоретических исследований, степень актуальности может оценить крупный ученый данной отрасли или научный коллектив. При оценке актуальности прикладных научных разработок ошибки не возникают, если более актуальной окажется та тема, которая обеспечит наибольший экономический эффект.

2) Тема должна решать новую научную задачу. Это значит, что тема в такой постановке никогда не разрабатывалась и в настоящее время не разрабатывается, т. е. дублирование исключается. Дублирование возможно только в том случае, когда по заданию руководящих организаций одинаковые темы разрабатывают два конкурирующих коллектива в целях разрешения важнейших государственных проблем в кратчайшие сроки. Таким образом, оправданное дублирование тем (разработок) иногда может быть одним из требований.

3) Тема должна быть экономически эффективной и должна иметь значимость. Любая тема прикладных исследований должна давать экономический эффект в народном хозяйстве. Это одно из важнейших требований.

На стадии выбора темы исследования ожидаемый экономический эффект может быть определен, как правило, ориентировочно. Иногда экономический эффект на начальной стадии установить вообще нельзя. В таких случаях для ориентировочной оценки эффективности можно использовать аналоги (близкие по названию и разработке темы).

При разработке теоретических исследований требование экономичности может уступать требованию значимости. Значимость, как главный критерий темы, имеет место при разработке исследований, определяющих престиж отечественной науки или составляющих фундамент для прикладных исследований.

3.2. Планирование научной работы

Планирование научно-исследовательской работы (НИР) имеет значение для ее рациональной организации.

Научно-исследовательские организации и образовательные учреждения разрабатывают планы работы на год на основе целевых комплексных программ, долгосрочных научных и научно-технических программ, хозяйственных договоров и заявок на исследования, представленных заказчиками.

В целях планирования НИР разрабатывается рабочая программа поведения научных исследований.

Рабочая программа — это изложение общей концепции исследования в соответствии с его целями и гипотезами. Она состоит, как правило, из двух разделов: методологического и процедурного.

Этапы работы над научным исследованием (НИ) приведены на рис. 3.1 и 3.2.

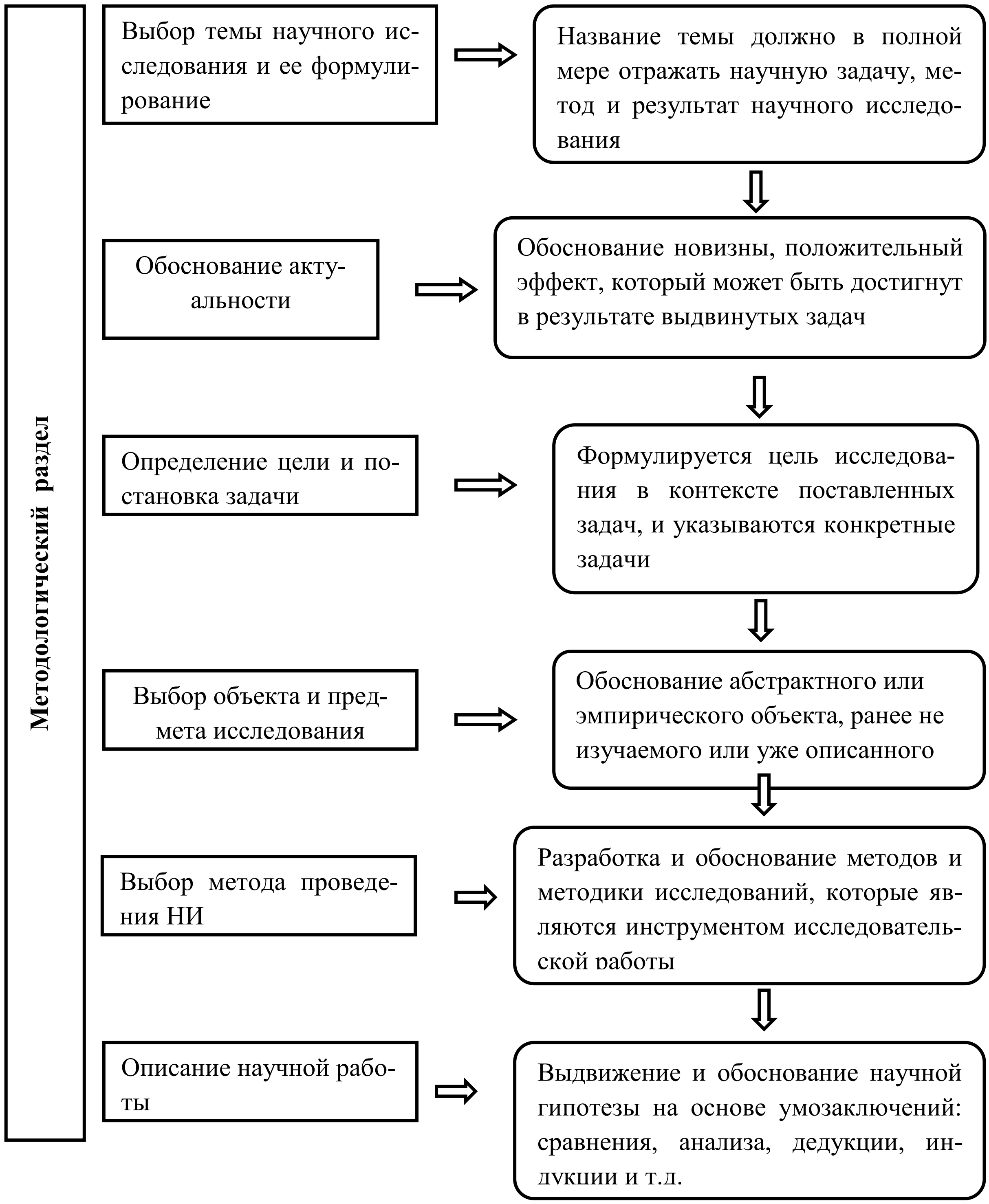


Рис. 3.1. Этапы процесса проведения научного исследования

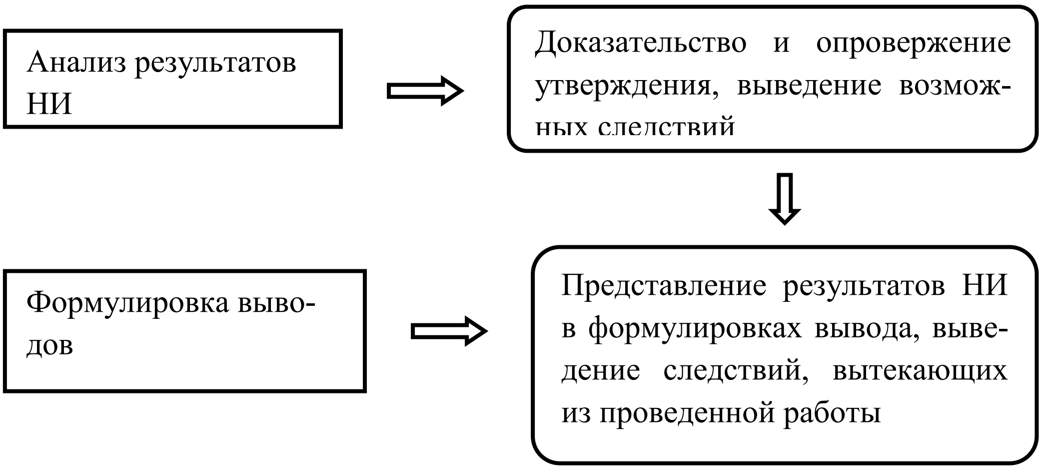


Рис. 3.2. Этапы процесса проведения научного исследования (продолжение)

Методологический раздел включает:

1) формулировку проблемы или темы;
2) определение объекта и предмета исследования;
3) определение цели и постановку задач исследования;
4) указание методов исследования;
5) описание научной работы.

Формулировка проблемы (темы) — это определение задачи, которая требует решения.

Объект исследования — это процесс или явление, порождающее проблемную ситуацию и избранное для изучения. Предмет — это то, что находится в границах объекта. Именно предмет исследования определяет тему исследования и доведение его до логического завершения.

Цель исследования — это общая его направленность на конечный результат. Задачи исследования — это то, что требует решения в процессе исследования; вопросы, на которые должен быть получен ответ.

Основу научной задачи составляют разработка и обоснование методов и методики исследования, которые являются инструментом в добывании фактического материала, являясь необходимым условием достижения поставленной в работе цели.

Описание научной работы подразумевает, кроме освещения элементов методов и техники исследования, также анализ предмета исследования с представлением результатов в виде цифрового материала и графиков, а также предусматривает работу по обоснованию практических рекомендаций , их экспериментальную проверку и экономическую оценку.

Гипотеза как научное предположение, выдвигаемое для объяснения каких-либо фактов, явлений и процессов, является важным инструментом успешного решения исследовательских задач. Программа исследования может быть ориентирована на одну или несколько гипотез. Конкретное научное исследование осуществляется по плану, который строится в зависимости от количества информации об объекте исследования.

Планы бывают разведывательные, аналитические (описательные) и экспериментальные.

Разведывательный план применяется, если об объекте и предмете исследования нет ясных представлений и трудно выдвинуть рабочую гипотезу. Цель составления такого плана — уточнение темы (проблемы) и формулировка гипотезы. Обычно он применяется, когда по теме отсутствует литература или ее очень мало.

Описательный план используется тогда, когда можно выделить объект и предмет исследования и сформулировать описательную гипотезу. Цель плана — проверить эту гипотезу, описать факты, характеризующие объект исследования.

Экспериментальный план включает проведение эксперимента. Он применяется тогда, когда сформулированы научная проблема и объяснительная гипотеза. Цель плана — определение причинно-следственных связей в исследуемом объекте. В процедурной части программы обосновывается выбор методов исследования, показывается связь данных методов с целями, задачами и гипотезами исследования.

3.3. Анализ теоретико-экспериментальных исследований и формулирование выводов

Основой совместного анализа теоретических и экспериментальных исследований является сопоставление выдвинутой рабочей гипотезы с опытными данными наблюдений.

Теоретические и экспериментальные данные сравнивают методом сопоставления соответствующих графиков.

Критериями сопоставления могут быть минимальные, средние и максимальные отклонения экспериментальных результатов от данных, установленных расчетом на основе теоретических зависимостей. Возможно также вычисление среднеквадратического отклонения и дисперсии. Однако, наиболее достоверными следует считать критерии адекватности (соответствия) теоретических зависимостей экспериментальным.

В результате теоретико-экспериментального анализа могут возникнуть три случая:

1) установлено полное или достаточно хорошее совпадение рабочей гипотезы, теоретических предпосылок с результатами опыта. При этом до-

полнительно группируют полученный материал исследований таким образом, чтобы из него вытекали основные положения разработанной ранее рабочей гипотезы, в результате чего последняя гипотеза превращается в доказанное теоретическое положение, в теорию;

2) экспериментальные данные лишь частично подтверждают положение рабочей гипотезы и в той или иной ее части противоречат ей. В этом случае рабочую гипотезу изменяют и перерабатывают так, чтобы она наиболее полно соответствовала результатам эксперимента. Чаще всего производят дополнительные корректировочные эксперименты с целью подтвердить изменения рабочей гипотезы, после чего она также превращается в теорию;

3) рабочая гипотеза не подтверждается экспериментом. Тогда ее критически анализируют и полностью пересматривают. Затем проводят новые экспериментальные исследования с учетом новой рабочей гипотезы. Отрицательные результаты научной работы, как правило, не являются бросовыми, они во многих случаях помогают выработать правильные представления об объектах, явлениях и процессах.

После выполненного анализа принимают окончательное решение, которое формулируют как заключение, выводы или предложения. Эта часть работы требует высокой квалификации, поскольку необходимо кратко, четко, научно выделить то новое и существенное, что является результатом исследования, дать ему исчерпывающую оценку и определить пути дальнейших исследований.

Обычно по одной теме не рекомендуется составлять много выводов (не более 5–10). Если же помимо основных выводов, отвечающих поставленной цели исследования, можно сделать еще и другие, то их формулируют отдельно, чтобы не завуалировать конкретного ответа на основную задачу темы.

3.4. Теоретические исследования

Теоретическое исследование заключается в установлении закономерности, описывающей какое-либо явление аналитическим путем и решение поставленной задачи.

Целью теоретических исследований является выделение в процессе синтеза знаний существующих связей между исследуемым объектом и окружающей средой, объяснение и обобщение результатов эмпирического исследования, выявление общих закономерностей и их формализация.

Задачами теоретического исследования являются:

- обобщение результатов исследования;
- нахождение общих закономерностей путем обработки и интерпретации опытных данных;

- расширение результатов исследования на ряд подобных объектов без повторения всего объема исследования;
- изучение объекта, недоступного для непосредственного исследования;
- повышение надежности экспериментального исследования объекта (обоснования параметров и условий наблюдения, точности измерений).

Решение практических задач математическими методами последовательно осуществляется путем математической формулировки задачи (разработки математической модели), выбора метода проведения исследования полученной математической модели, анализа полученного математического результата.

Математическая формулировка задачи представляется в виде чисел, функций, геометрических образов, систем уравнений и т.д. Описание объекта (явления) может быть представлено непрерывной или дискретной, детерминированной или стохастической (вероятностной) или др. математическими формами.

Математическая модель представляет собой систему математических соотношений – формул, функций, уравнений, систем уравнений, описывающих те или иные стороны изучаемого объекта, явления, процесса.

Установление общих характеристик объекта позволяет выбрать математический аппарат, на базе которого строится математическая модель. Выбор математического аппарата может быть осуществлен в соответствии со схемой (рис. 3.3).

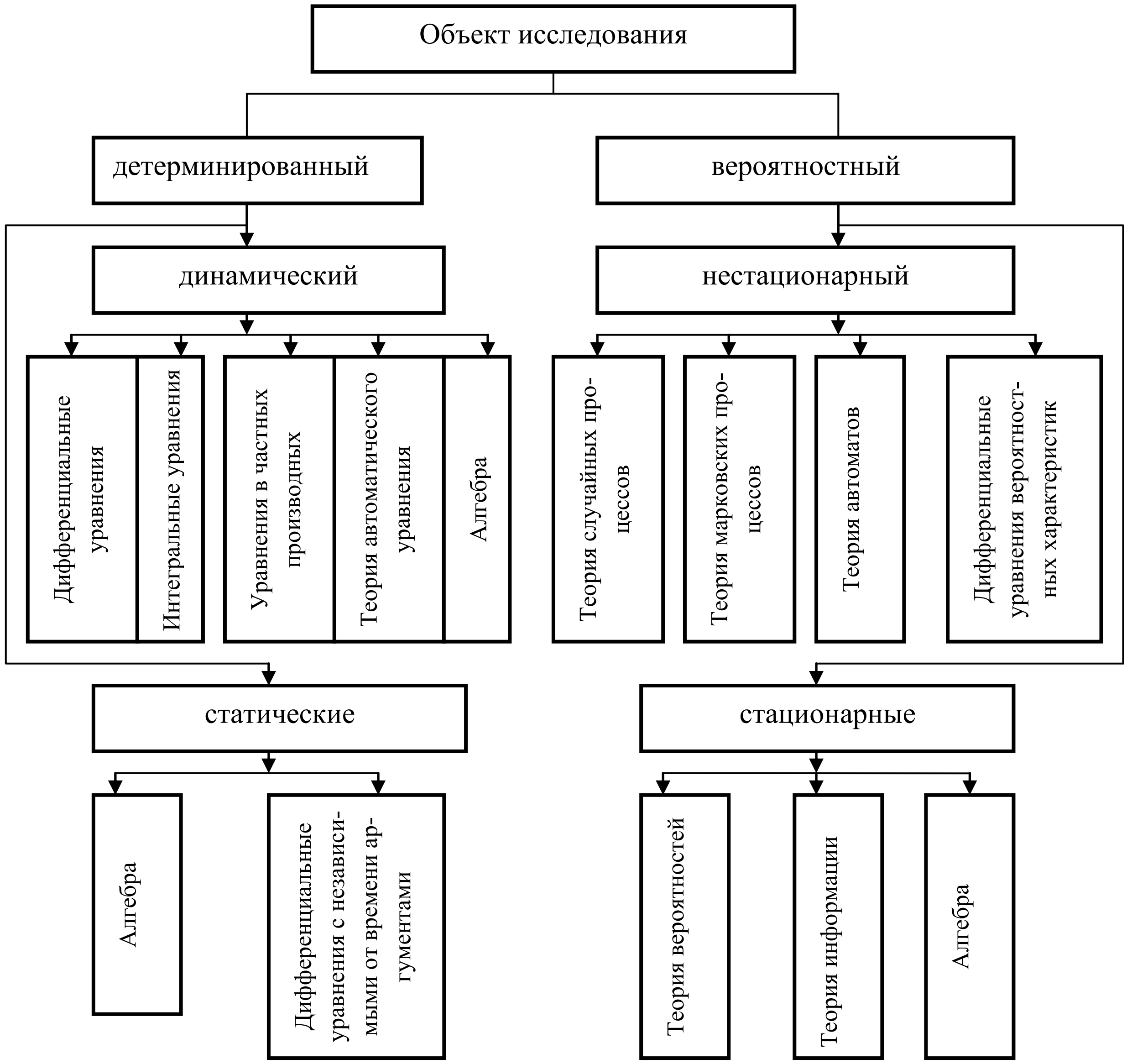


Рис. 3.3. Схема выбора математической модели

На этапе моделирования устанавливается признаки объекта или процесса:

– линейность или нелинейность;
– динамичность или статичность;
– стационарность или нестационарность;
– детерминированность или стохастичность.

В системном подходе к исследованию систем и построению моделей представление системы описывается как черный ящик с определенными функциями на входе и выходе (рис. 3.4). Эта максимально простая модель подчеркивает два системных свойства целостность и обособленность от среды.

Рис. 3.4. Схема «черного ящика»

$X_1, X_2, \ldots X_n$ — входные сигналы, факторные признаки;

$У_1, У_2, \ldots У_n$ — выходные сигналы, результативные признаки.

Входные сигналы — это факторы внешнего воздействия (факторный признак).

Выходные сигналы — это реакции на внешние воздействия, (результативный признак).

Линейность устанавливается по характеру статической характеристики исследуемого объекта.

Под статической характеристикой объекта понимается связь между величиной внешнего воздействия на объект (величиной входного сигнала) и максимальной величиной его реакции на внешнее воздействие (максимальной амплитудой выходной характеристики системы).

Под выходной характеристикой системы понимается изменение выходного сигнала во времени.

Если статическая характеристика исследуемого объекта оказывается линейной, то моделирование объекта осуществляется линейной функцией.

Нелинейность устанавливается по статической характеристике и наличию запаздывания в реагировании объекта на внешнее воздействие, что является признаком нелинейности объекта. В этом случае принимается нелинейная математическая модель.

Динамичность и статичность устанавливается по поведению исследуемых показателей объекта во времени.

Признаки стационарности или нестационарности применяют к вероятностным объектам при выборе модели. О стационарности или нестационарности вероятностных объектов судят по изменению во времени параметров законов распределения случайных величин.

Результаты поискового эксперимента и априорный информационный массив позволяют установить схему взаимодействия объекта с внешней окружающей средой по соотношению входных и выходных величин. В принципе возможно установление четырех схем взаимодействия:

1) одномерно – одномерная схема. На объект воздействует только один фактор, а его поведение рассматривается по одному показателю (один входной сигнал, рис. 3.5).

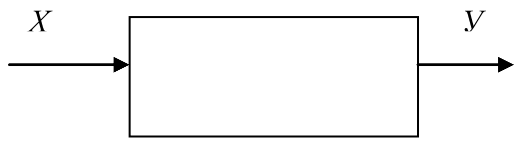


Рис. 3.5

При данном взаимодействии статически стационарного детерминированного объекта с внешней средой постоянное входное воздействие связывается с постоянным выходным сигналом через постоянный коэффициент.

Если объект является нестационарным, то указанная связь описывается различными функциями $y = f(x)$. Чаще всего данная функция является полиномом.

Также для нестационарного взаимодействия алгебраические функции могут представлять собой решение дифференциальных уравнений.

2) одномерно – многомерная схема. На объект воздействует один фактор, а его поведение оценивается по нескольким показателям (рис.3.6)

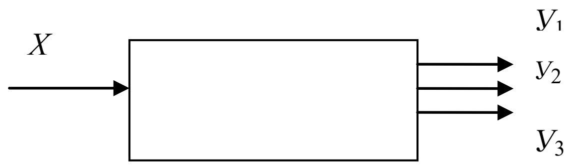


Рис. 3.6

При данной схеме воздействия статический стационарный и нестационарный объект описывается аналогично одномерно-одномерной схеме взаимодействия статического стационарного объекта с внешней средой. При этом определяются отдельно математические модели входного воздействия с каждым выходным сигналом. Выходные сигналы считаются независимыми.

Также для нестационарного взаимодействия алгебраические функции могут представлять собой решение дифференциальных уравнений.

3) многомерно – одномерная схема. На объект воздействует множество факторов и его поведение оценивается по одному показателю (рис. 3.7).

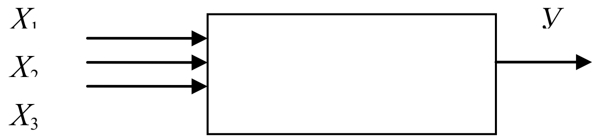


Рис. 3.7

Статически одномерный детерминированный объект описывается следующей моделью:

а) при равнозначности внешних воздействий $y = a\sum_{i=1}^{m} x_i$;

б) при неравнозначности внешних воздействий $y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$,

где a_i — постоянный коэффициент; m — число внешних воздействий (факторов).

Для статистически нестационарного объекта часто используется модель в виде полного степенного полинома:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_2}\sum_{v=1}^{m_2} a_{ijv} x_i x_j x_v + \ldots$$

где m_1, m_2 — число парных и тройных сочетаний факторов ($m_1 = C_m^2$; $m_2 = C_m^3$);

4) многомерно – многомерная схема. На объект воздействует множество факторов и его поведение оценивается по множеству показателей (рис. 3.8).

Рис. 3.8

При данной схеме взаимодействие сводится к многомерно-одномерному и математическая модель объекта принимается аналогично изложенной как при одномерно-многомерной схеме.

В процессе решения практической задачи исследования осуществляют выбор математической модели и методов исследования модели (аналитических или вероятностно-статистических).

Выбор метода исследования математической модели связан с понятиями внешнее правдоподобие и внутреннее правдоподобие исследования.

Под *внешним правдоподобием* исследования понимается ожидаемая степень адекватности математической модели реальному объекту по интересующим свойствам.

Под *внутренним правдоподобием* исследования понимается ожидаемая степень точности решения полученных уравнений, которые приняты за математическую модель.

При проведении теоретических исследований используют множество математических методов:

1. математический анализ: дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория рядов и теория дифференциальных уравнений;
2. теория вероятностей: основные законы распределения, законы больших чисел и предельные теоремы, теория массового обслуживания;
3. математическая статистика: математическая теория выборочного метода, проверка статистических гипотез, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ.

Статические системы, представленные при помощи алгебраических уравнений, исследуются с помощью определителей, методов Крамера и Гаусса, а в случае затруднений с аналитическими решениями используются приближенные методы: графический метод, метод хорд, метод касательных, метод итераций.

Динамические системы, представленные в классе дифференциальных уравнений, исследуются с помощью данных уравнений, используя метод разделения переменных, метод подстановки, метод интегрирующего множителя, метод качественного анализа и др. Для приближенных решений используют метод приближений, метод функциональных рядов, метод Рунге-Кутта, численные методы интегрирования и т.п. Для более подробного изучения моделей динамических систем, построенных в классе дифференциальных уравнений, используются качественная теория дифференциальных уравнений.

В строительстве ряд задач исследуется с помощью интегральных уравнений. Причем, решение дифференциального уравнения первой степени является интегральным уравнением. Многие задачи исследуются с помощью вариационного исчисления, метода конечных разностей, теории функций комплексных переменных, методы преобразования исходных уравнений (логарифмирование, преобразований Лапласа, Фурье и т.д.).

Вероятностно-статистические методы используются при исследовании вероятностных (стохастических) процессов. Обычно технологические процессы выполняются в условиях непрерывно меняющейся обстановки: неравномерная работа транспорта, вынужденные простои машин, непрерывное изменение внешних факторов (температура, давление, влажность и т.д.). Те или иные события могут произойти или не произойти. В связи с этим необходимо анализировать случайные события, вероятностные (стохастические) связи, в которых каждому аргументу соответствует множество значений функции.

Наблюдения показывают, что, не смотря на случайный характер связи, рассеивание значений показателей имеют определенные значения. Для таких статистических законов теория вероятностей позволяет представить исход не одного какого-либо события, а средний результат случайных событий и тем точнее, чем больше число анализируемых событий.

Теория вероятностей рассматривает теоретические распределения случайных величин и их характеристики.

Математическая статистика занимается способами обработки и анализа эмпирических событий.

Эти две родственные науки составляют единую математическую теорию массовых случайных процессов.

При исследовании вероятностных систем широкое распространение получили дисперсионный, регрессионный, корреляционный и спектральный анализы, также их различные комбинации (например, корреляционно - регрессионный).

В исследованиях часто возникает необходимость выявления факторов или их комбинаций, существенно влияющих на исследуемый процесс, так как при измерении какой-либо величины результаты зависят от многих факторов. Для установления основных факторов и их влияния на исследуемый процесс используется:

- дисперсионный одно и многофакторный анализ;
- теория надежности.

Под *надежностью* понимают свойство изделия (объекта) выполнять заданные функции (сохранять эксплуатационные показатели) в течение требуемого периода времени. В теории надежности отказы рассматривают как случайные события. Для количественного описания отказов применяют математические модели — функции распределения вероятностей интервалов времени. Наиболее часто применяют законы нормального и экспоненциального распределения, закон Вейбулла и др. Основной задачей теории надежности является прогнозирование (предсказание с той или иной вероятностью) различных показателей безотказной работы (долговечности, срока службы и т.д.);

Для наиболее сложных процессов вероятностного характера применяют метод Монте-Карло, с помощью которого отыскивается наилучшее решение из множества рассматриваемых вариантов. Этот метод статистического моделирования основан на использовании случайных чисел, моделирующих вероятностные процессы. Результаты решения метода позволяют установить эмпирические зависимости исследуемых процессов. Математической основой метода является закон больших чисел, разработанный П.Л.Чебышевым.

При исследовании процессов и объектов в системе «требование – обслуживание» применяют методы, основанные на теории массового обслуживания (ТМО). Система состоит из числа (потока) требований, обслуживающего прибора (канала) и выходящего потока. В зависимости от условий функционирования системы число требований (заявок) создает очередь на обслуживание. Основными характеристиками ТМО являются: интенсивность поступления заявок λ; интенсивность обслуживания (пропускная способность прибора) μ; интенсивность нагрузки канала $\varphi = \lambda / \mu$; время ожидания в очереди до обслуживания; длительность обслуживания в системе; число заявок в очереди; математическое ожидание числа требований в системе. Задачей ТМО является установление наиболее достоверных зависимостей между интенсивностью потока заявок и пропускной способностью, количеством заявок и эффективностью обслуживания системы.

Теория игр используется для оптимизации процессов. Она рассматривает развитие процессов в зависимости от случайных ситуаций. Теорию игр можно назвать математической теорией конфликтов, связанных с тем, что интересы двух сторон не совпадают. Примером конфликтной ситуации являются спортивные игры. Как правило, теория игр рассматривает конфликтные ситуации при частичном или полном отсутствии данных об обстановке. Поэтому могут быть случайные ходы, эффект от которых можно оценить в среднем математически ожиданием.

Например, принятие решений в условиях неопределенности на основе теории игр — процесс принятия решения по обеспечению безопасности или снижения последствий аварийных ситуаций. При оценке риска приходится сталкиваться с задачами принятия решения в условиях неопределенности. С помощью теории игр можно оценивать наиболее благоприятные и неблагоприятные ситуации и на их основе принимать оптимальное решение на данных условиях.

3.5. Методы экспериментальных исследований

Составной частью научных исследований является **эксперимент,** основой которого является научно поставленный опыт с точно учитываемыми и управляемыми условиями. Слово эксперимент происходит от лат. experimentum – проба, опыт. В научном языке и исследовательской работе термин «эксперимент» используется в значении: опыт, наблюдение, воспроизведение объекта познания, организация особых условий существования, проверка предсказания. Понятие «эксперимент» означает действие, направленное на создание условий для осуществления того или иного явления и по возможности наиболее частого, т.е. не осложненного другими явлениями.

Цель эксперимента — выявление свойств исследуемых объектов, проверка справедливости гипотез и на этой основе глубокое изучение темы научного исследования.

Постановка и организация эксперимента определяется его назначением. Эксперименты, проводимые в различных отраслях наук, являются химическими, биологическими, физическими, психологическими, социальными и т.д.

Эксперименты различаются по способу формирования условий — естественных и искусственных.

Эксперименты различают по целям исследования — преобразующие, констатирующие, контролирующие, поисковые, решающие.

Эксперименты различают по организации проведения — лабораторные, натурные, полевые, производственные, вычислительные и т.д. По структуре изучаемых объектов и явлений — простые и сложные. По характеру внешних воздействий на объект исследования — вещественные, энергетические, информационные. По характеру взаимодействия средства экспериментального исследования с объектом исследования (обычный и модельный). По типу моделей, исследуемых в эксперименте (материальный и мысленный). По контролируемым величинам — пассивный и активный. По числу варьируемых факторов – однофакторный и многофакторный. По характеру изучаемых объектов или явлений — технологические, социометрические и т.д.

Для проведения эксперимента необходимо:

– разработать гипотезу, подлежащую проверке;
– создать программу экспериментальных работ;
– определить способы и приемы вмешательства в объект исследования;
– обеспечить условия для осуществления процедуры экспериментальных работ;

– разработать приемы фиксирования хода и результатов эксперимента;
– подготовить средства эксперимента (приборы, установки, модели и т.п.);
– обеспечить эксперимент необходимым обслуживающим персоналом.

Особое значение имеет разработка методики эксперимента. Перед каждым экспериментом составляется план (программа), которая включает:

1) цель и задачи эксперимента: количество задач не должно быть слишком большим (лучше 3 или 4, максимально 8 – 10);

2) выбор варьирующих факторов. Установить основные и второстепенные характеристики, влияющие на исследуемый процесс, проанализировать расчетные (теоретические) схемы процесса. На основе анализа все факторы классифицируются, и составляется из них убывающий по важности для данного эксперимента ряд;

3) обоснование объема эксперимента;

4) определение числа опытов (закрепление раннее утвержденными и апробированными методиками или есть необходимость установления числа опытов – таблицы больших чисел по величине вероятности P, вероятности появления события p и величины допускаемой ошибки $m_{доп}$). Под минимальным количеством измерений понимают такое количество измерений, которое в данном опыте обеспечивает устойчивое среднее значение измеряемой величины, удовлетворяющей заданной степени точности;

5) порядок реализации опытов;

6) определение последовательности изменения факторов;

7) выбор шага изменения факторов, задание интервалов между будущими экспериментальными точками;

8) обоснование средств измерений. Знакомство с измерительной аппаратурой, установление точности измерений и погрешностей. Методы измерений должны базироваться на законах метрологии, изучающей средства и методы измерений;

9) описание проведения эксперимента;

10) обоснование способов обработки и анализа результатов эксперимента.

Обработка данных сводится к систематизации всех цифр, классификации, анализу. Результаты эксперимента обычно оформляют в виде таблиц, графиков, формул, номограмм. Все переменные должны быть оценены в единой системе единиц физических величин.

Из числа названных признаков *естественный эксперимент* предполагает проведение опытов в естественных условиях существования объекта исследования (чаще всего используется в биологических, социальных, педагогических и психологических науках).

Искусственный эксперимент предполагает формирование искусственных условий (широко применяется в естественных и технических науках). Преобразующий (созидательный) эксперимент включает активное изменение структуры и функций объекта исследования в соответствии с выдвинутой гипотезой, формирование новых связей и отношений между компонентами объекта или между исследуемым объектом и другими объектами. Исследователь в соответствии со вскрытыми тенденциями развития объекта исследования преднамеренно создает условия, которые должны способствовать формированию новых свойств и качеств объекта.

Констатирующий эксперимент используется для проверки определенных предположений. В процессе этого эксперимента констатируется наличие определенной связи между воздействием на объект исследования и результатом, выявляется наличие определенных фактов.

Контролирующий эксперимент сводится к контролю результатов внешних воздействий на объект исследования с учетом его состояния, характера воздействия и ожидаемого эффекта.

Поисковый эксперимент проводится в том случае, если затруднена классификация факторов, влияющих на изучаемое явление вследствие отсутствия достаточных предварительных (априорных) данных. По результатам поискового эксперимента устанавливается значимость факторов, осуществляется отсеивание незначимых.

Решающий эксперимент ставится для проверки справедливости основных положений фундаментальных теорий в том случае, когда две или несколько гипотез одинаково согласуются со многими явлениями. Это согласие приводит к затруднению, какую именно из гипотез считать правильной. Решающий эксперимент дает такие факты, которые согласуются с одной из гипотез и противоречат другой.

Примером решающего эксперимента служат опыты по проверке справедливости ньютоновской теории истечения света и волнообразной теории Гюйгенса. Эти опыты были поставлены французским ученым Фуко (1819 – 1868). Они касались вопроса о скорости распространения света внутри прозрачных тел. Согласно гипотезе истечения, скорость света внутри таких тел должна быть больше, чем в пустоте. Но Фуко своими опытами доказал обратное, т.е. что в менее плотной среде скорость света большая. Этот опыт Фуко и был тем решающим опытом, который решил спор между двумя гипотезами (в настоящее время гипотеза Гюйгенса заменена электромагнитной гипотезой Максвелла).

Другим примером решающего эксперимента может служить спор между Птолемеем и Коперником о движении Земли. Решающий опыт Фуко с маятником окончательно решил спор в пользу теории Коперника.

Лабораторный эксперимент проводится в лабораторных условиях с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т.д. Чаще всего в лабораторном эксперименте изучается не сам объект, а его образ. Этот эксперимент позволяет доброкачественно, с требуемой повторностью изучить влияние одних характеристик при варьировании других, получить хорошую научную информацию с минимальными затратами времени и ресурсов. Однако такой эксперимент не всегда полностью моделирует реальный ход изучаемого процесса, поэтому возникает потребность в проведении натурного эксперимента.

Натурный эксперимент проводится в естественных условиях и на реальных объектах. Этот вид эксперимента часто используется в процессе натурных испытаний изготовленных систем. В зависимости от места проведения испытаний натурные эксперименты подразделяются на производственные, полевые, полигонные, полунатурные и т. п. Натурный эксперимент всегда требует тщательного продумывания и планирования, рационального подбора методов исследования. Практически во всех случаях основная научная проблема натурного эксперимента — обеспечить достаточное соответствие (адекватность) условий эксперимента реальной ситуации, в которой будет работать впоследствии создаваемый объект. Поэтому центральными задачами натурного эксперимента являются: изучение характеристик воздействия среды на испытуемый объект; идентификация статистических и динамических параметров объекта; оценка эффективности функционирования объекта и проверка его на соответствие заданным требованиям.

Эксперименты могут быть *открытыми* и *закрытыми*, они широко распространены в психологии, социологии, педагогике.

В открытом эксперименте задачи открыто объясняются испытуемым. В закрытом эксперименте — в целях получения объективных данных эти задачи скрываются от испытуемого.

Любая форма открытого эксперимента влияет (часто активизирует) на субъективную сторону поведения испытуемых. В этой связи открытый эксперимент целесообразен только тогда, когда имеются возможность и достаточная уверенность в том, что удастся вызвать у испытуемого живое участие и субъективную поддержку намечаемой работе.

Закрытый эксперимент характеризуется тем, что его тщательно маскируют; испытуемый не догадывается об эксперименте, и работа протекает внешне в естественных условиях. Такой эксперимент не вызывает у испытуемых повышенной настороженности и излишнего самоконтроля, стремления вести себя не так, как обычно.

Простой эксперимент используется для изучения объектов, не имеющих разветвленной структуры, с небольшим количеством взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, выполняющих простейшие функции.

В *сложном* эксперименте изучаются явления или объекты с разветвленной структурой (можно выделить иерархические уровни) и большим количеством взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, выполняющих сложные функции. Высокая степень связности элементов приводит к тому, что изменение состояния какого-либо элемента или связи влечет за собой изменение состояния многих других элементов системы. В сложных объектах исследования возможно наличие нескольких разных структур, нескольких разных целей. Но все же конкретное состояние сложного объекта может быть описано. В очень сложном эксперименте изучается объект, состояние которого по тем или иным причинам до сих пор не удается подробно и точно описать. Например, для описания требуется больше времени, чем то, которым располагает исследователь между сменами состояний объекта или когда современный уровень знаний недостаточен для проникновения в существо связей объекта (либо они непонятны).

Информационный эксперимент используется для изучения воздействия определенной (различной по форме и содержанию) информации на объект исследования (чаще всего информационный эксперимент используется в биологии, психологии, социологии, кибернетике и т.п.). С помощью этого эксперимента изучается изменение состояния объекта исследования под влиянием сообщаемой ему информации.

Вещественный эксперимент предполагает изучение влияния различных вещественных факторов на состояние объекта исследования. Например, влияние различных добавок на качество стали и т.п.

Энергетический эксперимент используется для изучения воздействия различных видов энергии (электромагнитной, механической, тепловой и т.д.) на объект исследования. Этот тип эксперимента широко распространен в естественных науках.

Обычный (или классический) эксперимент включает экспериментатора как познающего субъекта; объект или предмет экспериментального исследования и средства, (инструменты, приборы, экспериментальные установки), при помощи которых осуществляется эксперимент. В обычном эксперименте экспериментальные средства непосредственно взаимодействуют с объектом исследования. Они являются посредниками между экспериментатором и объектом исследования.

Модельный эксперимент в отличие от обычного имеет дело с моделью исследуемого объекта. Модель входит в состав экспериментальной установки, замещая не только объект исследования, но часто и условия, в которых изучается некоторый объект. Модельный эксперимент при расширении возможностей экспериментального исследования одновременно имеет и ряд недостатков, связанных с тем, что различие между моделью и реальным объектом может стать источником ошибок и, кроме того, экстраполяция результатов изучения поведения модели на моделируемый объект требует дополнительных затрат времени и теоретического обоснования правомочности такой экстраполяции.

Различие между орудиями эксперимента при моделировании позволяет выделить *мысленный* и *материальный* эксперимент. Орудиями мысленного (умственного) эксперимента являются мысленные модели исследуемых объектов или явлений (чувственные образы, образно-знаковые модели, знаковые модели). Для обозначения мысленного эксперимента иногда пользуются терминами: идеализированный или воображаемый эксперимент.

Мысленный эксперимент является одной из форм умственной деятельности познающего субъекта, в процессе которой воспроизводится в воображении структура реального эксперимента. Структура мысленного эксперимента включает: построение мысленной модели объекта исследования, идеализированных условий эксперимента и воздействий на объект; сознательное и планомерное изменение, комбинирование условий эксперимента и воздействий на объект; сознательное и точное применение на всех стадиях эксперимента объективных законов науки, благодаря чему исключается абсолютный произвол. В результате такого эксперимента формируются выводы.

Материальный эксперимент имеет аналогичную структуру. Однако в материальном эксперименте используются материальные, а не идеальные объекты исследования. Основное отличие материального эксперимента от мысленного состоит в том, что реальный эксперимент представляет собой форму объективной материальной связи сознания с внешним миром, между тем как мысленный эксперимент является специфической формой теоретической деятельности субъекта.

Сходство мысленного эксперимента с реальным в значительной мере определяется тем, что всякий реальный эксперимент, прежде чем быть осуществленным на практике, сначала проводится человеком мысленно в процессе обдумывания и планирования. Поэтому мысленный эксперимент нередко выступает в роли идеального плана реального эксперимента, в известном смысле предваряя его.

Мысленный эксперимент имеет более широкую сферу применения, чем реальный эксперимент, так как применяется не только при подготовке и планировании последнего, но и в тех случаях, когда проведение реальных опытов представляется невозможным. Так, Галилей в мысленном эксперименте пришел к выводу о существовании движения по инерции, опрокинувшему аристотелевскую точку зрения, согласно которой движущееся тело останавливается, если сила, его толкающая, прекращает свое действие. Этот вывод мог быть получен только с помощью мысленного эксперимента. По этому поводу А. Эйнштейн говорил следующее: «Мы видели, что закон инерции нельзя вывести непосредственно из эксперимента, его можно вывести лишь умозрительно — мышлением, связанным с наблюдением. Этот эксперимент никогда нельзя выполнить в действительности, хотя он ведет к глубокому пониманию действительных экспериментов».

Мысленный эксперимент, заменяя собой реальный, расширяет границы познания, ибо обеспечивает получение такой информации, которую иными средствами добыть невозможно. Мысленный эксперимент позволяет преодолеть неизбежную ограниченность реального опыта путем абстрагирования от действия нежелательных, затемняющих причин, полное устранение которых в реальном эксперименте практически недостижимо.

Мысленный эксперимент является существенным моментом всякой творческой деятельности. А. Эйнштейн в автобиографических воспоминаниях в связи с разработкой специальной теории относительности писал: «В этом году в Аарау у меня возник вопрос: если бы можно было погнаться за световой волной со скоростью света, то мы имели бы перед собой не зависящее от времени волновое поле. Но все-таки это кажется невозможным! Это было первым детским мысленным экспериментом, который относится к специальной теории относительности. Открытие не является делом логического мышления, даже если конечный продукт связан с логической формой».

Мысленный эксперимент используется не только учеными, но и писателями, художниками, педагогами, врачами. Мысленное экспериментирование ярко проявляется в мышлении шахматистов. Огромна роль мысленного эксперимента в техническом конструировании и изобретательстве. Результаты мысленного эксперимента находят отражение в формулах, чертежах, графиках, набросках, эскизных проектах и т. п.

Пассивный эксперимент предусматривает измерение только выбранных показателей (параметров, переменных) в результате наблюдения за объектом без искусственного вмешательства в его функционирование. Примерами пассивного эксперимента является наблюдение за интенсивностью, составом, скоростями движения транспортных потоков; за числом заболеваний вообще или какой-либо определенной болезнью; за работоспособностью определенной группы лиц; за показателями, изменяющимися с возрастом; за числом дорожно-транспортных происшествий и т. п.

Пассивный эксперимент, по существу, является наблюдением, которое сопровождается инструментальным измерением выбранных показателей состояния объекта исследования.

Активный эксперимент связан с выбором специальных входных сигналов (факторов) и контролирует вход и выход исследуемой системы.

Однофакторный эксперимент предполагает выделение нужных факторов; стабилизацию мешающих факторов; поочередное варьирование интересующих исследователя факторов.

Стратегия *многофакторного эксперимента* состоит в том, что варьируются все переменные сразу и каждый эффект оценивается по результатам всех опытов, проведенных в данной серии экспериментов.

Технологический эксперимент направлен на изучение элементов технологического процесса (продукции, оборудования, деятельности работников и т.п.) или процесса в целом.

Социометрический эксперимент используется для измерения существующих межличностных социально-психологических отношений в малых группах с целью их последующего изменения

Приведенная классификация экспериментальных исследований не может быть признана полной, поскольку с расширением научного знания расширяется и область применения экспериментального метода. Кроме того, в зависимости от задач эксперимента различные его типы могут объединяться, образуя комплексный или комбинированный эксперимент.

Большинство экспериментов подразделяются на эксперименты по выяснению механизма явлений и экстремальные эксперименты (оптимальные).

При постановке *экстремальных экспериментов* решается задача нахождения таких значений входных переменных, при которых выходной показатель процесса принимает экстремальное значение.

Оптимальный эксперимент базируется на экспериментально-статистических методах. Значение этих методов состоит в следующем:

- они позволяют по данным исследования объекта получить математическую модель, даже если внутренние закономерности явлений в объекте не ясны;
- с помощью этих методов количество возможных опытов, а следовательно, затраты времени и средства сокращаются;
- вместо субъективных оценок они дают достаточно надежные статистические оценки;
- применение полиномиальных математических моделей позволяет получить многомерную геометрическую интерпретацию зависимостей, существующих в объекте и выявить неизведанные стороны процесса;
- эти методы способствуют созданию информационного языка, удобного для использования ЭВМ.

Вычислительным экспериментом называется методология и технология исследований, основанные на применении прикладной математики и ЭВМ как технической базы при использовании математических моделей.

Вычислительный эксперимент основывается на создании математических моделей изучаемых объектов, которые формируются с помощью некоторой особой математической структуры, способной отражать свойства объекта, проявляемые им на различных экспериментальных условиях.

Математические структуры превращаются в модели в случае, когда элементам структуры дается физическая интерпретация, устанавливается соотношение между параметрами математической структуры и экспериментально определенными свойствами объекта, характеристики элементов модели и самой модели соответствуют свойствам объекта.

Таким образом, математические структуры вместе с описанием соответствия экспериментально обнаруженным свойствам объекта и являются моделью изучаемого объекта, отражая в математической, символической форме существующие в природе зависимости, связи и законы.

Каждый вычислительный эксперимент основывается как на математической модели, так и на приемах вычислительной математики.

На основе математического моделирования и методов вычислительной математики создавались теория и практика вычислительного эксперимента, технологический цикл которого разделяется на следующие этапы:

1 этап. Для исследуемого объекта строится модель, обычно физическая, фиксирующая разделение всех факторов на основные и второстепенные. Одновременно формулируются допущения и условия применимости модели, границы, в которых будут справедливы полученные результаты. Модель записывается в математических терминах.

2 этап. Разрабатывается метод расчета сформулированной математической задачи. Эта задача представляется в виде вычислительного алгоритма.

Вычислительный эксперимент имеет многовариантный характер, так как решения поставленных задач зависят от многочисленных входных параметров. Создаются однотипные варианты задачи, отличающиеся значением некоторых параметров. Поэтому при организации вычислительного эксперимента используют численные методы.

3 этап. Разрабатывается алгоритм и программа решения задачи на ЭВМ.

4 этап. Проведение расчетов на ЭВМ. Результатом вычислений является цифровой материал, который необходимо проанализировать. Точность информации определяется достоверностью модели, положенной в основу модели.

5 этап. Обработка результатов расчета, их анализ и выводы.

Вычислительный эксперимент имеет исключительное значение в тех случаях, когда натурные эксперименты и построение физической модели оказываются невозможными.

Например, моделирование климатических условий при создании математической модели, описывающей эволюцию климатической системы (предсказание погоды, атмосферных явлений и т.д.); анализ сценариев появления риска пожаров и взрывов на объектах добычи и транспортировки нефти и нефтепродуктов, рудных полезных ископаемых и т.д.

По завершению эксперимента накапливается статистический материал, представляющий собой результаты измерений и вычислений и требующий осуществления их обработки.

Статистическое наблюдение — первая стадия каждого статистического исследования, представляющая собой научно организованный по разработанной программе учет факторов, характеризующих явления и процессы, и сбор полученных данных. В задачу наблюдения входит получение достоверной и полной информации. Наблюдение должно быть планомерным, массовым и систематическим.

Планомерность наблюдения означает, что наблюдение готовится и проводится по разработанному плану, включающему вопросы методологии, организации, техники сбора информации, контроля качества собранного материала, его достоверности, оформления итоговых результатов.

Массовость — это, когда наблюдение охватывает данные, характеризующие не только отдельные единицы, но и совокупность в целом.

Периодичность означает, что статистическое наблюдение должно проводиться либо систематически, либо регулярно, либо непрерывно.

Основные требования, предъявляемые к наблюдению:

– полнота статистических данных (охват единиц изучаемой совокупности, сторон того или иного явления, полнота охвата во времени);
– достоверность, точность, единообразие и сопоставимость данных.

Методология статистического наблюдения заключается в определении цели, единицы и программы исследования. Цель наблюдения — сбор информации о рассматриваемом процессе и явлении. Объект наблюдения — совокупность единиц изучаемого явления, подлежащая статистическому изучению. Установить объект наблюдения — это значит точно определить состав и границы совокупности. Программа наблюдения представляет собой перечень вопросов, на которые необходимо получить ответ в процессе наблюдения. При составлении программы наблюдений следует соблюдать следующие правила: включать только вопросы, которые необходимы для решения поставленной цели; не следует включать вопросы, на которые невозможно получить ответ удовлетворительного качества; нельзя включать вопросы, которые могут быть оценены опрашиваемыми как вмешательство в сферу личных интересов.

Каждая единица наблюдения должна быть охарактеризована совокупностью признаков, предусмотренных программой наблюдений. Виды признаков и их характеристики приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Признаки наблюдения	**Характеристики**
Количественные	Выражаются числом (возраст, вес, уровень шума, скорость движения и т.д.)
Качественные (атрибутивные)	Характеризуют качественное состояние явления (пол, специальность, образование и т.д.)
Факторные	Характеризуют условия, определяющие размер того или иного явления
Результативные	Характеризуют результаты влияния факторных признаков (например, уровень шума – результативный, скорость автотранспортных средств, плотность жилой застройки, интенсивность транспортного потока – факторные признаки)
Натуральные	Характеризуют явления в натуральном выражении (тонны, метры, килограммы, и т.д.)
Стоимостные	Характеризуют явления в денежном выражении (рублей, тысячи рублей и т.д.)

4. Статистическая обработка данных экспериментальных исследований

Методика выполнения прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями приведена в ГОСТ 8.207-79 «Порядок обработки результатов наблюдений при многократных измерениях» состоит из ряда последовательно выполняемых этапов:

- определение точечных оценок параметров, описывающих законы распределения результатов измерений;
- оценка закона распределения по статистическим критериям согласия;
- определение доверительных интервалов случайной погрешности;
- определение границ не исключенной систематической погрешности результата измерений;
- определение доверительной границы погрешности результата измерения;
- формирование результата измерений.

4.1. Погрешности измерений

Результаты измерения используются в случае, когда известна погрешность или степень достоверности этого измерения. Измерение не может быть выполнено абсолютно точно, его результат всегда содержит некоторую ошибку. В задачу измерений входит не только измерений контролируемой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности. Причиной возникновения погрешностей являются инструментальные, методические и субъективные измерения (рис. 4.1).

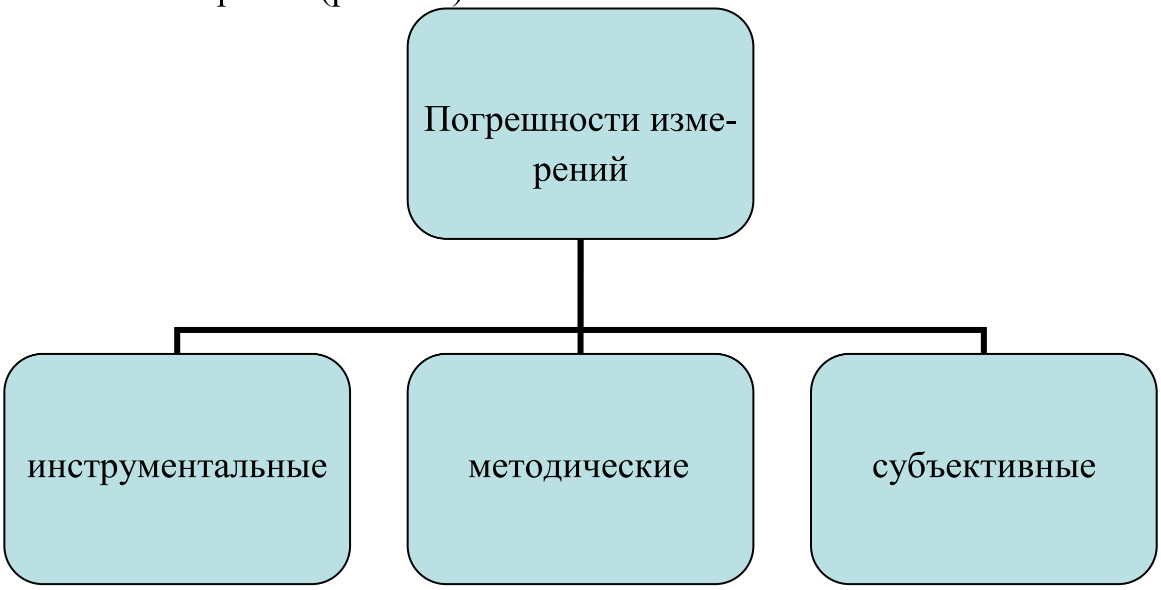


Рис. 4.1. Группы погрешностей измерений

Инструментальные погрешности — этот вид погрешностей зависит от погрешностей применяемых средств измерений, от изменений внешних условий. Они являются следствием недостатков конструкции измерительных приборов, несоблюдением технологии их изготовления, несовершенства применяемых материалов, трением в механизмах и т.п. Данные погрешности могут быть частично устранены регулировкой прибора. Инструментальная погрешность находится в допустимых пределах, если приборы подвергаются поверке.

Методические погрешности являются следствием неточности метода измерения или недостаточного знания всех обстоятельств, сопровождающих измерение. Данные погрешности установить заранее нельзя.

Субъективные погрешности зависят от индивидуальных особенностей лица, производящего измерение (недостаточно точное отсчитывание показаний, отвлечение во время снятия показаний и т.п.). Данные ошибки невозможно прогнозировать.

Статические погрешности измерения, в зависимости от причин появления, подразделяют на систематические, грубые и случайные (рис. 4.2).

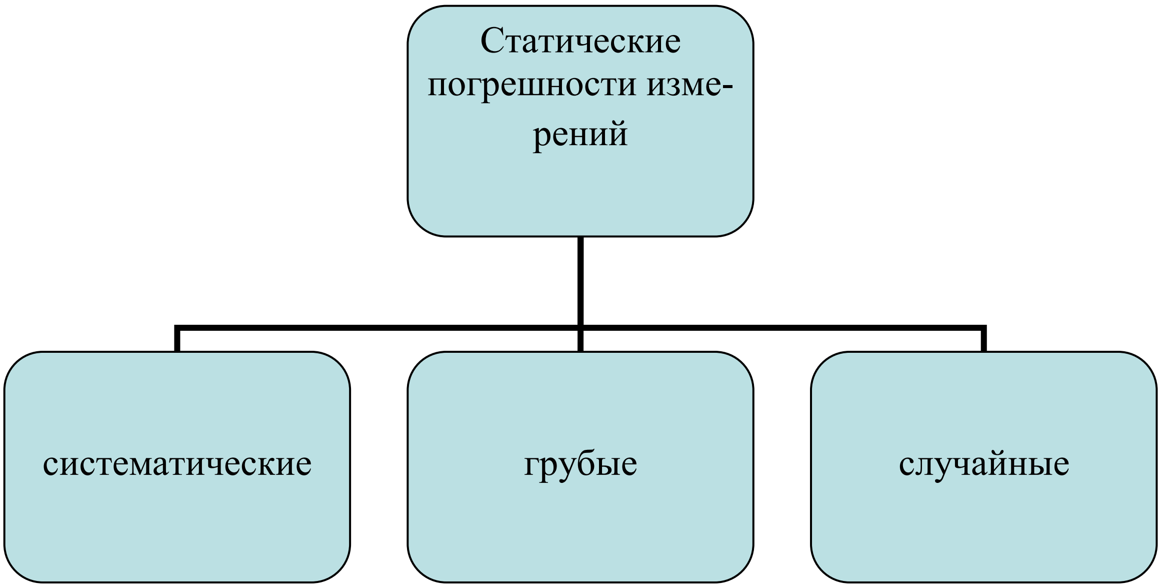


Рис. 4.2. Группы статических погрешностей измерений

Систематическими погрешностями называются погрешности, величина которых одинакова во всех измерениях, проводящихся одним и тем же методом с использованием одних и тех же измерительных приборов. Данные погрешности обусловлены методом измерений или вносятся измерительным прибором (инструментом). К систематическим погрешностям относятся инструментальные, погрешности, вызванные неправильной установкой прибора или неправильными действиями оператора, производящего измерения. Если все систематические погрешности учтены, то и в этом случае результаты измерений не свободны от случайных погрешностей.

Грубыми называются погрешности, которые явно искажают результат измерения. Данные погрешности вызываются неверными отсчетами или неправильными зависимостями показаний приборов, просчетами при вычислениях, являются следствием недостатка внимания и усталости оператора. При обнаружении грубой ошибки, измерения повторяются. Существуют статистические методы, позволяющие с высокой вероятностью обнаружить грубые погрешности.

Случайными называются погрешности, не подчиняющиеся какой-либо известной закономерности. Данные погрешности возникают в результате влияния на процесс случайных факторов (вибрации прибора, электромагнитных полей и т.п.). Случайные погрешности не могут быть исключены опытным или расчетным путем. Для учета влияния случайных погрешностей на результат измерения одну и ту же величину измеряют многократно. Для оценки величины случайной погрешности используют величины средней арифметической и средней квадратической погрешностей.

Средняя арифметическая погрешность определяется формулой

$$\delta = \frac{|\Delta_1| + ... + |\Delta_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i|}{n}, \quad \Delta_i = Q_{cp} - x_i, \quad Q_{cp} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

где x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — значения, полученные при измерении величины Q, включающие в себя только случайные погрешности, подчиненные нормальному закону распределения; n – число отсчетов при измерении.

В формуле суммируются абсолютные значения величин (Δ_i). Если число наблюдений очень велико, то при $n \to \infty$ $Q_{cp} \to Q$.

Средняя квадратическая погрешность вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n-1}}.$$

При очень большом числе наблюдений величина S стремится к некоторому постоянному значению σ, которое называется статистическим пределом S, $\sigma = \lim_{n \to \infty} S$. Этот предел и называется средней квадратической погрешностью, а σ^2 называется дисперсией измерений.

4.2. Представление экспериментальных данных

Методология исследования массовых статистических явлений в зависимости от полноты охвата изучаемого объекта или явления различает *сплошное* и *несплошное* наблюдение. При сплошном наблюдении изучаются все объекты совокупности, например, перепись населения, охватывающая все население страны. Разновидностью *несплошного* наблюдения является *выборочное*, которое в условиях развития современных выборочных отношений находит все более широкое применение.

Под *выборочным* наблюдением понимается метод статистического исследования, при котором обобщающие показатели изучаемой совокупности устанавливаются по некоторой еѐ части (выборке) на основе положений случайного отбора.

Вся подлежащая изучению совокупность объектов, или, точнее, совокупность значений какого-то признака объектов, называется *генеральной совокупностью*.

Часть объектов, которая отобрана случайным образом для непосредственного изучения из генеральной совокупности, называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*.

Количество объектов в генеральной или выборочной совокупности называется их *объемами*. Выборку можно рассматривать как некий эмпирический аналог генеральной совокупности.

Выборочный метод наблюдения имеет ряд преимуществ по сравнению со сплошным наблюдением:

- позволяет существенно экономить затраты ресурсов (материальных, трудовых, временных);
- является единственно возможным в случае бесконечной генеральной совокупности или, когда исследование связано с уничтожением объектов;
- при тех же затратах ресурсов дает возможность проведения более углубленного исследования за счет расширения программы исследования;
- позволяет снизить ошибки регистрации, т.е. расхождения между истинным и зарегистрированным значениями признака.

Основной недостаток выборочного метода — ошибки исследования, называемые *ошибками репрезентативности*.

Выборка должна быть *представительной* (репрезентативной), чтобы по ней можно было судить о генеральной совокупности.

Репрезентативность означает, что объекты выборки должны достаточно хорошо представлять генеральную совокупность.

Репрезентативность выборки достигается в результате выполнения некоторых предварительных условий, а именно:

- каждый член генеральной совокупности должен иметь равную вероятность попасть в выборку;
- отбор единиц из генеральной совокупности необходимо производить независимо от изучаемого признака;
- отбор единиц должен производиться из однородных совокупностей;
- число единиц генеральной совокупности, отобранных для обследования, должно быть достаточно большим.

Предупреждение систематических ошибок выборочного обследования достигается также в результате применения научно обоснованных способов формирования выборочной совокупности, в зависимости, от которых выборка может быть:

- собственно–случайной;
- механической;
- типической;
- серийной.

Собственно–случайная выборка состоит в том, что выборочная совокупность образуется в результате случайного отбора отдельных единиц из генеральной совокупности. Именно принцип случайности попадания любой единицы генеральной совокупности в выборку предупреждает возникновение систематических ошибок.

Механическая выборка состоит в том, что объекты из генеральной совокупности отбираются через определенный интервал. Например, если объем выборки должен составлять 20% генеральной совокупности, то отбирается каждый 20-й еѐ элемент.

Типическая выборка состоит в том, что объекты из генеральной совокупности отбираются случайным образом из типических групп, на которые по некоторому признаку разбивается генеральная совокупность.

Серийная выборка состоит в том, что объекты из генеральной совокупности отбираются случайным образом не по одному, а целыми группами (сериями), а сами серии подвергаются сплошному наблюдению.

Любая выборка может быть осуществлена по схемам *повторного* и *бесповторного отбора*.

Повторный отбор предполагает возвращение элемента в генеральную совокупность, после того, когда он был случайно отобран в выборку и обследован, т.е. один и тот же элемент может быть включен в выборку два раза и более. *Бесповторный отбор* исключает такую возможность.

При исследовании объектов можно фиксировать или измерять значение одного или нескольких признаков. Соответственно говорят об *одномерной*, *двумерной*, *трехмерной* и т.д. выборках. Рассмотрим обработку одномерных выборок.

Выбор объекта из генеральной совокупности и измерение значения признака называется *статистическим наблюдением*. Результаты наблюдений оформляются в виде таблиц и статистических рядов распределения.

Различные значения признака (случайной величины X) называют *вариантами* и обозначают их через x.

Выборка будет намного наглядней, если все еѐ элементы упорядочить (ранжировать) по возрастанию или убыванию. Такой ряд распределения называется *статистическим*. Он характеризует структуру исследуемого явления, позволяет судить об однородности совокупности, границах еѐ изменения, закономерностях развития наблюдаемого объекта.

В выборке варианта может встречаться несколько раз, и поэтому целесообразно результаты оформить в виде таблицы, в первой строке (столбце) которой записаны всевозможные значения (варианты) x_i, а во второй — числа n_i, т.е. частоты появления i–го значения. Такую таблицу называют *вариационной таблицей* или *вариационным рядом*. Во второй строке таблицы можно записывать *частости* или *относительные частоты* — это отношение частоты к объему выборки, т.е. $w_i = n_i / n$, где n — объем выборки. Частоты и частости называются *весами*.

Если количество вариантов слишком велико или близко к объему выборки, то целесообразно составить *вариационный интервальный ряд*.

Согласно формуле Стерджеса рекомендуемое число интервалов $l = [1 + 3{,}322 \lg n]$, а длина интервала $h = \frac{R_x}{l}$, где $R_x = x_{\max} - x_{\min}$ называется *размахом выборки*, а $x_{\max}$, $x_{\min}$ — наибольшее и наименьшее значения признака. В качестве частот n_i берут числа, показывающие, сколько раз встречаются варианты из данного интервала, причем $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Интервальный вариационный ряд записывают в виде таблицы (табл. 4.1), в которой использованы следующие формулы: $\alpha_0 = x_{\min}$; $\alpha_i = \alpha_{i-1} + h$; $\alpha_l = x_{\max}$; $x_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$; i = 1, 2,…, l.

Таблица 4.1

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частота n_i	Частость w_i
1	$[\alpha_0; \alpha_1)$	x_1	n_1	w_1
2	$[\alpha_1; \alpha_2)$	x_2	n_2	w_2
…	…	…	…	…
l	$[\alpha_{l-1}; \alpha_l)$	x_l	n_l	w_l

Удобнее всего ряды распределения анализировать с помощью их графического изображения, позволяющего судить о форме распределения. Наглядное представление о характере изменения частот вариационного ряда дают полигон и гистограмма.

Полигон частот используется для изображения дискретных вариационных рядов и представляет собой ломаную линию, в которой концы отрезков прямой имеют координаты (x_i, n_i), i =1, 2,…, l.

Гистограмма служит для изображения интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значения признака $\alpha_i = x_{i+1} - x_i$, i =1, 2,…, l, и высотами, равными частотам n_i (частостям w_i) интервалов.

При необходимости гистограмма может быть преобразована в полигон, для этого нужно соединить середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямой.

При построении гистограммы вариационного ряда с неравными интервалами высоту прямоугольников определяют пропорционально не частотам, а показателям плотности распределения значений изучаемого признака в соответствующих интервалах: $\frac{n_i}{h_i}$, где h_i — длина i–го интервала.

На практике нередко возникает потребность в преобразовании рядов распределения в *кумулятивные ряды*, строящиеся по накопленным частотам $n_i^{\text{нак}}$. Накопленная частота показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака меньшим x. Кумулятивные ряды позволяют определять структурные средние и наблюдать за процессом концентрации изучаемого явления.

Для дискретного ряда кумулята представляет ломаную, соединяющую точки с координатами $\left(x_i, n_i^{\text{нак}}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Для интервального вариационного ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината — накопленной частоте, равной нулю. Другие точки этой ломаной соответствуют концам интервала.

Пример 1. Построить полигон по распределению жилого фонда городского района по типу квартир (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Группы квартир по числу комнат	1	2	3	4	5
Число квартир (тыс.ед), частота n_i	15	35	30	15	5

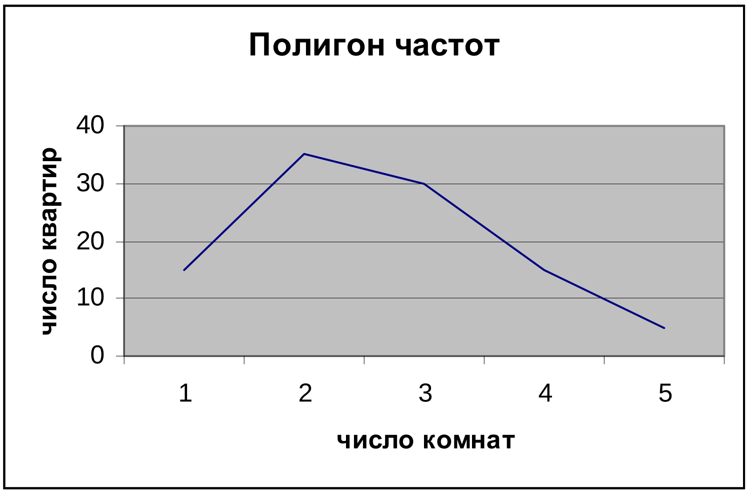


Рис. 4.3

Пример 2. По интервальному ряду распределения семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека, построить гистограмму и кумуляту (табл. 4.3).

Таблица 4.3

№	Размер жилой площади, приходящейся на одного человека, м^2	Число семей с данным размером жилой площади (частота)	Число семей с нарастающим итогом (накопленная частота)
1	3 — 5	10	10
2	5 — 7	20	30 (10 + 20)
3	7 — 9	40	70 (30 + 40)
4	9 — 11	30	100 (70 + 30)
5	11 — 13	20	120 (100 + 20)
	Всего	120	

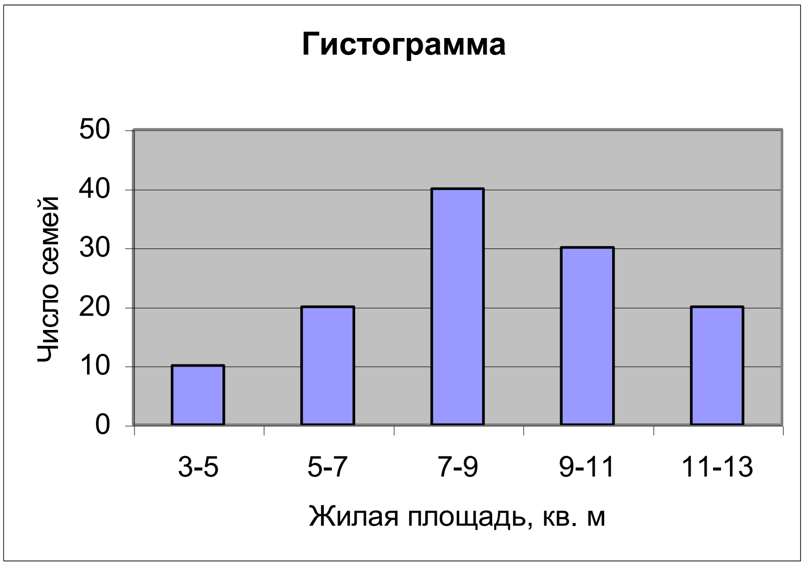


Рис. 4.4

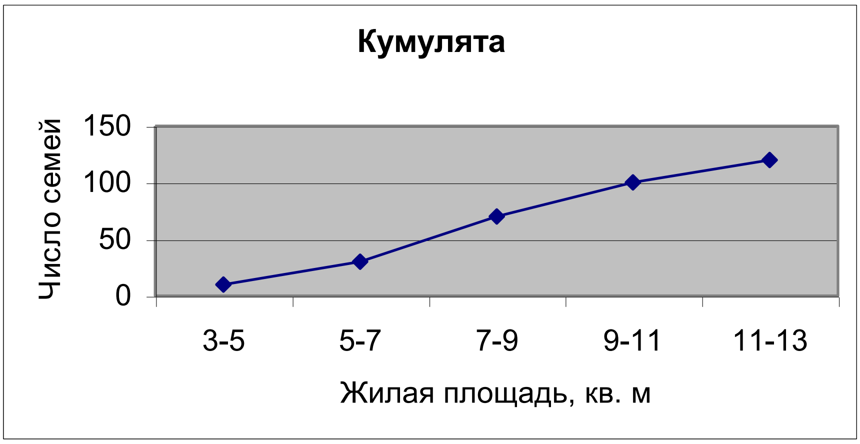


Рис. 4.5

Важнейшей задачей выборочного метода является оценка параметров (характеристик) генеральной совокупности по данным выборки. Теоретическую основу выборочного метода составляет закон больших чисел, согласно которому при неограниченном увеличении объема выборки практически достоверно, что случайные выборочные характеристики как угодно близко приближаются к определенным параметрам генеральной совокупности.

Имеется два способа оценивания параметров генеральной совокупности: точечный и интервальный. Точечные методы указывают лишь точку, около которой находится неизвестный оцениваемый параметр. С помощью интервальных методов определяют интервал, в котором с некоторой, как правило, большой (выбираемой самим исследователем) вероятностью находится неизвестное значение параметра. Рассмотрим точечные оценки параметров распределения.

Оценка называется *точечной*, если она определяется одним числом.

Любая точечная оценка должна обладать свойствами *несмещенности, состоятельности и эффективности*.

Рассмотрим подробнее перечисленные свойства. Пусть Q – неизвестный параметр генеральной совокупности. Требуется на основании опытных данных найти для Q подходящую оценку. Пусть в результате n опытов наблюдались следующие значения: x_1, x_2,…, x_n. На основании этих значений можно вычислить величину Q^*, которая является оценкой для Q. Величину Q^* можно рассматривать как функцию от $x_1, x_2, ...x_n$ в силу случайного выбора этих значений, т.е. $Q^* = Q^*(x_1, x_2, …, x_n)$. Значит, Q^* — случайная величина, закон распределения которой зависит от закона распределения случайной величины X и от числа опытов n.

Оценка Q^* называется *несмещенной,* если математическое ожидание этой оценки равно оцениваемому параметру Q: $M(Q^*) = Q$. В противном случае оценка называется *смещенной*.

Оценка Q^* называется *состоятельной,* если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при неограниченном возрастании числа опытов, т.е. для любого бесконечно малого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Q^* - Q\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Для удовлетворения этого требования необходимо, чтобы дисперсия несмещенной оценки стремилась к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} D\left(Q^*(x_1, ..., x_n)\right) = 0.$$

Оценка называется *эффективной,* если она имеет минимальную дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок неизвестного параметра, вычисленных по выборкам одного и того же объема.

В качестве статистических оценок параметров генеральной совокупности желательно использовать оценки, удовлетворяющие одновременно требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности.

4.3. Показатели описательной статистики

Статистическая информация представляется совокупностью данных, для характеристики которых используются разнообразные показатели, называемые показателями *описательной статистики*. Уровень образования, прожиточный минимум, средний балл по математике на ЕГЭ, средняя заработная плата по стране, средний курс доллара и мера его колебания за определенный интервал времени — все это показатели описательной статистики. Показатели описательной статистики можно разбить на несколько групп.

1. *Показатели положения* описывают положение данных на числовой оси. К ним относятся минимальный и максимальный элемент выборки (первый и последний элементы вариационного ряда), верхний и нижний квартили (ограничивают зону, в которую попадают 50% центральных элементов выборки). Сведения о середине совокупности дают средняя арифметическая, среднее геометрическое значение, средняя гармоническая, мода, медиана.

Средняя арифметическая (выборочная средняя) является наиболее распространенным видом средних величин. В зависимости от характера имеющихся данных средняя арифметическая может быть *невзвешенной* (простой) и *взвешенной*.

Значение *невзвешенной* средней арифметической рассчитывается по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

где x_i — варианты дискретного ряда, а n — объем выборки.

Однако на практике наиболее часто приходится иметь дело со *взвешенной* средней арифметической, которая рассчитывается по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i n_i}{n},$$

где x_i — варианты дискретного ряда или середины интервалов интервального вариационного ряда, n_i — соответствующие им частоты, а n — объем выборки, $n = \sum_{i=1}^{l} n_i$.

При решении практических задач могут применяться и другие формы средней, которые можно получить из средней степенной m–го порядка:

$$\bar{x}_m = \left(\frac{\sum_{i=1}^{l} x_i^m n_i}{n} \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ где } x_i > 0.$$

Легко убедиться, что при $m = 1$ получаем формулу средней арифметической, а при $m = -1$, получаем формулу

$$\bar{x}_{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{l} x_i^{-1} n_i}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{x_i}} \text{ — \textit{средней гармонической},}$$

т.е. величину обратную к среднему арифметическому обратных величин.

Формула средней гармонической применяется, когда статистическая информация не содержит частот по отдельным вариантам совокупности, а представлена как их произведение.

Величина, определяемая формулой

$$\bar{x}_0 = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}, \text{ где } x_i > 0,$$

называется *средней геометрической*, которую можно использовать, например, для вычисления темпов роста, если задан составной доход с переменными ставками. Средний темп роста является свободной обобщающей характеристикой интенсивности изменения уровней ряда динамики. Он показывает, во сколько раз в среднем за единицу времени изменился уровень динамического ряда.

Модой (*Mo*) называется чаще всего встречающаяся варианта или то значение признака, которое соответствует максимальной точке теоретической кривой распределения.

Мода широко используется в коммерческой практике при изучении покупательского спроса (при определении ходовых размеров одежды и обуви, наиболее употребляемых продуктов питания и т.п.).

Для дискретного вариационного ряда *мода* — это варианта с наибольшей частотой. По данным, приведенным в табл. 4.2, *Mo* = 2, т.е. 2-х комнатных квартир в городском районе наибольшее количество.

В отличие от дискретного вариационного ряда *для интервального ряда* находят модальный интервал, имеющий наибольшую частоту, а значение *моды* определяют по формуле

$$Mo = \alpha_{Mo} + h\frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}},$$

где α_{Mo} — нижняя граница модального интервала;
h — длина модального интервала;
n_{Mo} — частота модального интервала;
n_{Mo-1} — частота интервала, предшествующего модальному;
n_{Mo+1} — частота интервала, следующего за модальным.

По данным табл. 4.3 имеем, интервал [7 – 9) — модальный интервал, так как ему соответствует наибольшая частота 40,

$$n_{Mo} = 40,\ n_{Mo-1} = 20,\ n_{Mo+1} = 30,\ \alpha_{Mo} = 7,\ h = 2, \text{ тогда}$$

$$Mo = 7 + 2\cdot\frac{40-20}{2\cdot 40 - 20 - 30} = 8{,}3.$$

Из чего следует, что наибольшее количество семей имеет 8,3 м^2 жилой площади на одного человека.

Медианой (*Me*) называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной совокупности. Для ранжированного ряда с нечетным числом элементов медианой является варианта, расположенная в центре ряда. Для ранжированного ряда с четным числом элементов медианой будет средняя арифметическая из двух смежных вариант. Таким образом, медиану можно вычислить по формуле

$$Me = \begin{cases} x_{k+1}, \text{если} \quad n = 2k+1, \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \quad \text{где } k \in N.$$

Главное свойство медианы заключается в том, что сумма отклонений вариант от медианы есть величина наименьшая: $\sum\limits_{i=1}^{l}\left| x_i - Me \right| = \min$.

Для интервального вариационного ряда находят медианный интервал, на который приходится середина ряда, т.е. интервал, где накопленная частота составляет половину или больше половины всей суммы частот. Медиану вычисляют по формуле:

$$Me = \alpha_{Me} + h\frac{0{,}5n - (n_1 + n_2 + ... + n_{Me-1})}{n_{Me}},$$

где α_{Me} — нижняя граница медианного интервала;

h — длина медианного интервала;

n_{Me} — частота медианного интервала;

$n_1 + n_2 + ... + n_{Me-1}$ — сумма частот интервалов, предшествующих медианному интервалу.

В табл. 4.3 медианным интервалом будет интервал [7 – 9), так как середина объема выборки равна 60 и данное число попадает в этот интервал. Имеем $n_{Me} = 40$, $n_{Me-1} = 20$, $n_1 = 10$, $\alpha_{Mo} = 7$, $h = 2$,

$$Me = 7 + 2 \cdot \frac{60 - 30}{40} = 8{,}5.$$

Медиана распределения семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека, равна 8,5 м^2.

Квартили представляют собой значения признака, делящие ранжированную совокупность на четыре равновеликие части. Различают квартиль нижний (Q_1, 25% квартиль), отделяющий 1/4 часть совокупности с наименьшими значениями признака, и квартиль верхний (Q_3, 75% квартиль), отделяющий 1/4 часть с наибольшими значениями признака. Средним квартилем (Q_2, 50% квартиль) является медиана. Квартиль часто используется при анализе продаж, чтобы разбить генеральную совокупность на группы.

2. *Показатели разброса* описывают степень разброса относительно своего центра. К ним в первую очередь относятся: среднее линейное отклонение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, размах выборки (разность между максимальным и минимальным элементом), межквартильный размах (разность между верхней и нижней квартилью).

Средним линейным отклонением вариационного ряда называется средняя арифметическая абсолютных величин отклонений вариантов от их средней арифметической:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{l} |x_i - \bar{x}| n_i}{n}.$$

Данный показатель в статистической практике применяется редко, так как во многих случаях не устанавливает степень рассеивания.

Дисперсия — числовая характеристика случайной величины, характеризующая рассеяние её возможных значений около среднего значения.

Дисперсией вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от их средней арифметической.

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n} \quad \text{(простая дисперсия);}$$

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 n_i}{n} \quad \text{(взвешенная дисперсия).}$$

Дисперсию нельзя выбирать в качестве оценки генеральной дисперсии, так как она является смещенной оценкой, поэтому вводят понятие *исправленной дисперсии* s^2:

$$s^2=\frac{n}{n-1}D=\frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 n_i}{n-1}.$$

Исправленная дисперсия является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной дисперсии.

Дисперсия имеет размерность квадрата вариант. Для наглядной характеристики меры вариации удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью вариант. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется *стандартным отклонением* $\sigma=\sqrt{D}$ (иначе, *средним квадратическим отклонением*).

Формулы для стандартного отклонения имеют вид:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}} \quad \text{(простое стандартное отклонение);}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 n_i}{n}} \quad \text{(взвешенное стандартное отклонение),}$$

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{l}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 n_i}{n-1}} \quad \text{(исправленное стандартное отклонение).}$$

Стандартное отклонение выражается в тех же единицах измерения, что и признак.

3. *Показатели, описывающие закон распределения*, дают представление о законе распределения данных. Сюда относятся, например, таблицы частот, таблицы частостей, полигоны, кумуляты, гистограммы.

В статистике широко используются различные виды теоретических распределений — нормальное, показательное, биномиальное, распределение Пуассона и др. Каждое из теоретических распределений имеет специфику и свою область применения.

Например, при анализе случайных дискретных процессов используют распределение Пуассона (закон распределения Пуассона — закон редких событий), т.е. при большом числе опытов и малой вероятности события.

Для исследования количественных характеристик некоторых процессов (время обслуживания автомобилей на стации техобслуживания, время отказов машин и изделий и т.д.) применяется показательный закон распределения.

Исследуя процессы, связанные с постепенным снижением параметров (ухудшением свойств материалов во времени, деградация конструкций, процессы старения, износ и отказы в машинах и т.п.) применяют закон гамма распределения.

При исследовании многих процессов, связанных с установлением расчетных характеристик материалов и т.п. используют закон распределения Пирсона.

Чаще всего в качестве теоретического распределения используется *нормальное распределение* (называемое законом Гаусса), так как в статистике оно имеет широкий круг применения.

Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся условиях.

Доказано, что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким-либо законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Основное ограничение, налагаемое на суммируемые величины, состоит в том, что они все должны играть в общей сумме относительно малую роль.

Нормальный закон распределения часто применяется еще и в тех случаях, когда истинный закон распределения известен, но вычисления по этому закону затруднительны, а аппроксимация его нормальным распределением допустима.

Уравнение для *плотности нормального распределения* с параметрами a и σ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение. В статистике оценкой параметра a является среднее арифметическое $\bar{x}$, а параметра σ — исправленное среднее квадратическое отклонение s.

Кривую нормального закона распределения называют *нормальной* или *гауссовой кривой*. На рис. 4.6 изображена нормальная кривая с параметрами $a=5, \quad \sigma=2$.

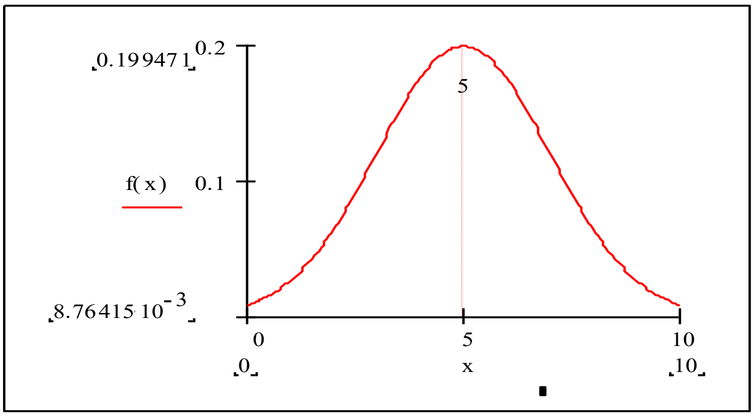


Рис. 4.6

Максимальная ордината кривой соответствует точке $x = a = Mo = Me$, при $x \to \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Изменение параметра a при постоянном σ приводит к перемещению кривой вдоль оси абсцисс, не меняя её формы (рис. 4.7). С увеличением σ кривая становится более пологой, с уменьшением σ — более острой (рис. 4.8). Таким образом, параметр a характеризует положение, а параметр σ — форму нормальной кривой. Площадь, заключенная под кривой, асимптотически приближающейся к оси абсцисс, равна единице.

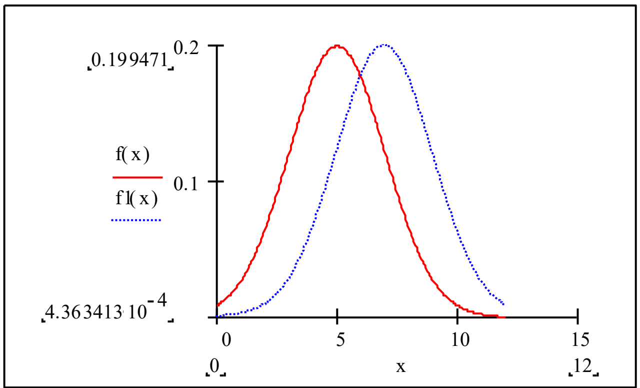


Рис. 4.7

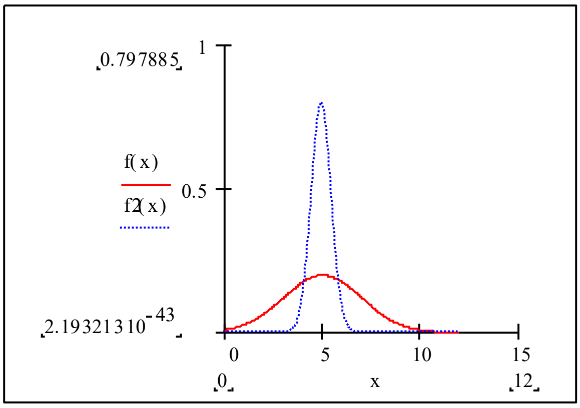


Рис. 4.8

Нормальный закон распределения с параметрами $a = 0, \sigma = 1$ называется *стандартным* или *нормированным*, а соответствующая нормальная кривая — стандартной или нормированной кривой.

Функция распределения нормального закона определяется формулой:

$F(x) = \frac{1}{2} + \phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — интегральная функция Лапласа, для определения значений которой имеются таблицы практически во всех учебниках по теории вероятностей и теории статистики.

Весьма важной практической задачей является определение вероятности того, что случайная величина попадает на заданный интервал вещественной оси (α, β). Для нормального распределения она определяется формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Формула для вычисления вероятности попадания случайной величины на отрезок, симметричный относительно математического ожидания, имеет вид:

$$P(|x - a| \le \Delta) = 2\phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

В качестве границ интервалов часто берутся точки, отстоящие от математического ожидания на целое число стандартных отклонений. Приведем значения вероятности попадания нормально распределенной величины в интервалы с такими границами.

Границы интервала	Вероятность
$a-\sigma;\ a+\sigma$	0,6827
$a-2\sigma;\ a+2\sigma$	0,9545
$a-3\sigma;\ a+3\sigma$	0,9973

Отсюда вытекает «*правило трех сигм*»: если случайная величина имеет нормальный закон с параметрами a и σ, то с практической достоверностью можно утверждать, что её значения заключены в интервале $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$.

4. *Показатели формы кривой распределения* характеризуют симметричность распределения данных около своего центра, а также островершинность или плосковершинность распределения. К ним относятся коэффициент асимметрии, эксцесс, положение медианы относительно среднего.

Определение формы кривой является важной задачей, так как статистический материал в обычных условиях дает по определенному признаку характерную для него кривую распределения. Всякое искажение формы кривой означает нарушение или изменение нормальных условий возникновения статистического материала. Выяснение общего характера распределения предполагает оценку степени его однородности, а также вычисление показателей асимметрии и эксцесса.

Симметричным является распределение, в котором частоты любых двух вариантов, равноотстоящих в обе стороны от центра распределения, равны между собой.

Для симметричных распределений средняя арифметическая, мода и медиана равны между собой, $\bar{x} = Mo = Me$. С учетом этого показатель асимметрии основан на соотношении показателей центра распределения: чем больше разница между $\bar{x}$, *Mo*, *Me*, тем больше асимметрия ряда. При этом если $Mo < Me$, асимметрия правосторонняя, если $Mo > Me$ — асимметрия левосторонняя.

Коэффициентом асимметрии вариационного ряда называется число, определяемое формулой:

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^{l}(x_i - \bar{x})^3 n_i}{n \cdot s^3}.$$

Применение этого показателя дает возможность определить величину асимметрии в генеральной совокупности. Если $A_s = 0$, то распределение имеет симметричную форму, если $A_s > 0$— асимметрия правосторонняя (положительная), если $A_s < 0$— асимметрия левосторонняя (отрицательная). Для нормального закона $A_s = 0$.

Эксцесс характеризует так называемую «крутость», т.е. островершинность или плосковершинность распределения. Он может быть рассчитан для любых распределений, но в большинстве случаев вычисляется только для симметричных. Это объясняется тем, что за исходную принята кривая нормального распределения, относительно вершины, которой и определяется выпад вверх или вниз вершины эмпирической кривой распределения.

Эксцессом вариационного ряда называется число

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^{l}(x_i - \bar{x})^4 n_i}{n \cdot s^4} - 3.$$

Для нормального закона $E_k = 0$. Если $E_k > 0$, то распределение островершинное (полигон вариационного ряда имеет более крутую вершину), если $E_k < 0$ — плосковершинную (полигон вариационного ряда имеет более пологую вершину) по сравнению с нормальной кривой.

4.4. Определение интервальных оценок. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки

Одна из основных задач выборочного исследования состоит в том, чтобы на основе характеристик выборочной совокупности, получить достоверные суждения об этих характеристиках в генеральной совокупности. Возможные расхождения между характеристиками выборочной и генеральной совокупностей измеряются разностью между значением характеристики в генеральной совокупности и её значением, вычисленному по результатам выборочного наблюдения. Для средней арифметической это расхождение определяется по формуле

$$\Delta_{\bar{x}} = | x_г - \bar{x} |.$$

Зная выборочную среднюю величину признака $\bar{x}$ и предельную ошибку выборки $\Delta_{\bar{x}}$, можно определить границы, в которых заключена генеральная средняя $x_г$:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \le x_г \le \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}$$

Интервал $(\bar{x} - \Delta_{\bar{x}}; \bar{x} + \Delta_{\bar{x}})$ получил название *доверительного интервала*, а вероятность γ, с которой данный интервал содержит в себе достоверную, но не известную наблюдателю характеристику $\bar{x}$, называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки, т.е.

$$P\left(\left| x_г - \bar{x} \right| \le \Delta_{\bar{x}}\right) = \gamma .$$

Предельная ошибка выборки $\Delta_{\bar{x}}$ фактически определяет длину доверительного интервала. Доверительная вероятность γ задается обычно значением, близким к единице, например, 0,95; 0,98; 0,99.

Доверительная вероятность γ, предельная ошибка выборки $\Delta_{\bar{x}}$ и объем выборки n связаны между собой. Предельная ошибка выборки $\Delta_{\bar{x}}$ связана со средней ошибкой выборки $\sigma_{\bar{x}}$ соотношением $\Delta_{\bar{x}} = t\sigma_{\bar{x}}$, где t — коэффициент доверия (определяется в зависимости от того, с какой доверительной вероятностью нужно гарантировать результаты выборочного обследования).

Средняя ошибка выборки определяется по формулам

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}} \text{ (для повторной выборки),}$$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \text{ (для бесповторной выборки),}$$

где N — объем генеральной совокупности.

Известный русский математик А. М. Ляпунов дал выражение конкретных значений множителя t для различных значений доверительной вероятности γ в виде функции Лапласа:

$$P\left(\left| x_г - \bar{x} \right| \le \Delta_{\bar{x}}\right) = \phi(t) = \gamma .$$

При этом достаточно сложной проблемой является определение необходимого (оптимального) объема выборки. Доказано, что необходимый объем собственно-случайной выборки определяется соотношениями

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\Delta_{\bar{x}}^2} \text{ (для повторной выборки),}$$

$$n = \frac{N t^2\sigma^2}{t^2\sigma^2 + N\Delta_{\bar{x}}^2} \text{ (для бесповторной выборки),}$$

где σ^2 — дисперсия генеральной совокупности.

Затруднительным моментом применения данных формул на практике является расчет генеральной дисперсии. Для её оценки пользуются или материалами предыдущих исследований, или проводят пробное обследование, по результатам которого оценивают значение генеральной дисперсии, или используют исправленную выборочную дисперсию, т.е. $\sigma^2 \approx s^2$.

При большом объеме выборки $(n > 100)$ распределение случайных ошибок выборочной средней в соответствии с теоремой Ляпунова нормально или приближается к нормальному закону по мере увеличения числа наблюдений. Вероятность выхода ошибки за определенные пределы оценивается, как мы уже видели, с помощью интегральной функции Лапласа.

Однако на практике статистических исследований часто приходится сталкиваться с так называемыми малыми выборками, объем которых не превышает 30 единиц.

Разработка теории малой выборки была начата в 1908 г. английским статистом Госсетом, печатавшимся под псевдонимом Стьюдент (Student). Он доказал, что оценка расхождения между средней выборки малого объема и генеральной средней имеет особый закон распределения, получивший название *распределение Стьюдента*.

Доверительный интервал для генеральной средней по малой выборке будет иметь вид:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \le x_г \le \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}, \text{ где предельная ошибка } \Delta_{\bar{x}} = \frac{t_{\gamma, n-1} s}{\sqrt{n-1}}.$$

Величину $t_{\gamma, n-1} = t(\gamma, k)$ находят по таблице t критерия Стьюдента, которая имеется практически во всех учебниках по теории вероятностей и теории статистики. *Число* k называется *числом степеней свободы*. Оно определяется как общее число наблюдений n случайной величины X минус число уравнений j, связывающих эти наблюдения, т.е. $k = n - j$. В нашем случае $k = n - 1$, так как n наблюдений связаны одним уравнением при определении выборочной средней $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i n_i}{n} \right)$.

Доверительный интервал для генеральной дисперсии определяется формулой

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma_г^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2},$$

а для среднего квадратического отклонения:

$$\frac{\sqrt{n}\, s}{\chi_2} < \sigma_г < \frac{\sqrt{n}\, s}{\chi_1}.$$

Величины χ_1^2 и χ_2^2 имеют распределение χ^2 (хи в квадрате) с числом степеней свободы $k = n$.

Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение суммы квадратов k независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормированному закону.

Распределение χ^2 не зависит от неизвестных параметров случайной величины, а зависит лишь от числа степеней свободы. Плотность вероятности распределения χ^2 имеет сложный вид и интегрирование её является очень трудоемким процессом. В связи с этим составлены таблицы для вычисления вероятности того, что случайная величина, имеющая распределение χ^2 с k степенями свободы, превысит некоторое критическое значение $\chi^2_{\alpha,k}$, т.е. $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}\right) = \alpha$.

Величины χ_1^2 и χ_2^2 выбирают таким образом, чтобы вероятности событий $\chi^2 < \chi_1^2$ и $\chi^2 > \chi_2^2$ были одинаковы, т.е. $P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \dfrac{1-\gamma}{2}$.

При использовании таблиц вероятностей $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}\right)$ необходимо учитывать, что $P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = 1 - P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right)$.

Значения χ_1^2 и χ_2^2 находят по таблице из равенств:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \frac{1+\gamma}{2}, \quad P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\gamma}{2},$$

при числе степеней свободы $k = n - 1$.

Таблицы $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}\right)$ составлены при числе степеней свободы k от 1 до 30. При $k > 30$ надо полагать $\chi_1^2 = 0{,}5\left(\sqrt{2k-1} - t\right)^2$, $\chi_2^2 = 0{,}5\left(\sqrt{2k-1} + t\right)^2$, где t определяют из равенства $\phi(t) = \gamma$.

4.5. Статистические гипотезы и методы их проверки

С теорией статистического оценивания параметров тесно связана проверка статистических гипотез. Она используется всякий раз, когда на основе результатов наблюдений необходимо проверить, например, различные предположения о характеристиках конкретного массового явления или о типе его закона распределения.

Под *статистической гипотезой* понимают всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке. Процедуру сопоставления высказанной гипотезы с выборочными данными называют *проверкой статистической гипотезы*.

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько основных типов:

- о типе закона распределения исследуемой случайной величины;
- об однородности двух или нескольких выборок (т.е. принадлежности их одной и той же генеральной совокупности);
- о числовых значениях параметров исследуемой генеральной совокупности;
- о равенстве числовых характеристик генеральной совокупности.

Проверяемую статистическую гипотезу принято называть *основной* или *нулевой* гипотезой и обозначать H_0, а противоречащую ей гипотезу — *альтернативной* или *конкурирующей* гипотезой и обозначать H_1.

При проверке статистических гипотез приходится иметь дело со статистическим материалом, поэтому, отвергая или принимая нулевую гипотезу, можно совершить ошибку двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза, когда на самом деле она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что нулевая гипотеза не отвергается, когда она в действительности неверна.

Проверка статистических гипотез осуществляется с помощью различных статистических критериев.

Правило, по которому нулевая гипотеза отвергается или принимается, называется *статистическим критерием К*.

В качестве критерия используется специально подобранная случайная величина, точное или приближенное распределение которой известно. Во множестве возможных значений критерия выбирается подмножество, называемое *критической областью*.

Принцип проверки статистической гипотезы состоит в том, что если вычисленное значения критерия принадлежит критической области, то нулевая гипотеза отвергается. Критическая область выбирается таким образом, чтобы вероятность совершить ошибку первого рода не превосходила некоторого заранее определенного положительного числа α. Это число α называют *уровнем значимости* и говорят: «нулевая гипотеза отвергается на уровне значимости α». В качестве уровня значимости обычно берут одно из чисел: 0,05; 0,01; 0,001. Если, например, $\alpha = 0{,}01$, то это означает, что в одном из 100 случаев мы рискуем допустить ошибку первого рода.

Вероятность совершить ошибку второго рода обозначается β. *Вероятность* $(1 - \beta)$ не допустить ошибку второго рода, т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна, называется *мощностью критерия*.

Чаще всего множество возможных значений критерия принадлежит некоторому интервалу, тогда *критическая область* будет представлять собой тоже *интервал*. Множество всех возможных значений критерия можно разбить на два непересекающихся подмножества: *критическую область* (нулевая гипотеза отвергается) и *область принятия гипотезы* или *область допустимых значений* (нулевая гипотеза принимается).

Граничные точки критической области *называются критическими точками* $K_{кр}$, они отделяют критическую область от области принятия гипотезы. Критические точки выбираются таким образом, чтобы при выбранном уровне значимости α *мощность критерия* $(1 - \beta)$ *была наибольшей*.

Возможны три вида расположения критической области в зависимости от вида нулевой и альтернативной гипотез, вида распределения статистического критерия *К*:

1) правосторонняя критическая область представляет интервал $(K_{кр}; +\infty)$, где точка $K_{кр}$ определяется из условия $P(K > K_{кр}) = \alpha$;

2) левосторонняя критическая область представляет интервал $(-\infty; K_{кр})$, где точка $K_{кр}$ определяется из условия $P(K < K_{кр}) = \alpha$;

3) двусторонняя критическая область состоит из двух интервалов $(-\infty; K_{\text{кр.1}})$ и $(K_{\text{кр.2}}; +\infty)$, где точки $K_{\text{кр.1}}$ и $K_{\text{кр.2}}$ определяются из условий $P(K < K_{\text{кр.1}}) = P(K > K_{\text{кр.2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Критические точки находят по таблицам распределения критерия, т.е. считается, что закон распределения генеральной совокупности известен. Наиболее распространенными являются критерии, в основе которых лежат известные распределения: χ^2, Стьюдента, Фишера. Для этих критериев составлены таблицы, в которых указаны критические точки, соответствующие уровню значимости и числу степеней свободы.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

- определение гипотез H_0 и H_1;
- выбор критерия и задание уровня значимости α;
- определение по таблицам, по уровню значимости α и по альтернативной гипотезе H_1 критической области;
- вычисление по выборке значения критерия;
- сравнение значения критерия с критической областью;
- принятие решения: если значение критерия не входит в критическую область, то принимается гипотеза H_0 и отвергается гипотеза H_1, а если входит в критическую область, то отвергается гипотеза H_0 и принимается гипотеза H_1.

Результаты проверки статистической гипотезы нужно интерпретировать следующим образом, если приняли гипотезу H_1, то можно считать её доказанной, а если приняли гипотезу H_0, то признали, что она не противоречит результатам наблюдений. Следует помнить, что, принимая гипотезу H_0, необходимо проводить еще дополнительные исследования. На практике для большей уверенности принятия гипотезы её проверяют другими способами или повторяют эксперимент, увеличив объем выборки.

Одной из *важнейших задач математической статистики* является установление *теоретического закона распределения* случайной величины, характеризующей изучаемый признак по опытному распределению, представляющему вариационный ряд. Для решения этой задачи необходимо определить вид и параметры закона распределения.

Предположение о виде закона распределения может быть выдвинуто исходя из теоретических предпосылок, опыта аналогичных предшествующих исследований и, наконец, на основании графического изображения эмпирического распределения (полигон, гистограмма, функция распределения). Параметры распределения, как правило, неизвестны, поэтому их заменяют наилучшими оценками по выборке. Как бы хорошо ни был подобран теоретический закон распределения, между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они связаны с тем, что теоретиский закон подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос и служат *критерии согласия*.

Критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения генеральной совокупности называется *критерием согласия*.

Для проверки гипотез о виде функции распределения экспериментальных данных используют следующие критерии согласия: Пирсона, Мизеса-Смирнова, составной критерий $\bar{d}$.

При числе наблюдений $n > 50$ для идентификации нормального закона распределения используется критерий Пирсона (χ^2 (хи)-квадрат) или критерий Мизеса-Смирнова (ω^2).

При $15 < n < 50$ для проверки нормального закона распределения применяется составной критерий (d -критерий), приведенный в ГОСТ 8.207-76.

При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному закону не проверяется. При этом нахождение доверительных границ случайной погрешности результата измерения по методике, предусмотренной ГОСТ 8.207-76 и описываемый далее, возможно, в том случае, если заранее известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению. В случае если гипотеза о принадлежности полученных результатов к нормальному закону распределения не подтверждается, то проводится приближенная оценка параметров законов распределения (идентификацией формы и вида закона распределения соответствующему теоретическому).

Рассмотрим критерий согласия χ^2 – Пирсона. Основное преимущество χ^2 критерия — это его гибкость. Этот критерий можно применять для проверки допущения о любом распределении, даже не зная параметров распределения. Как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости α её согласие или несогласие с данными наблюдений.

Суть критерия χ^2 Пирсона состоит в сравнении эмпирических и теоретических частот, т.е. в качестве проверки нулевой гипотезы используют случайную величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}, \text{ где}$$

n_i — эмпирические частоты;

n_i' — *теоретические или выравнивающие* частоты, которые определяются по формулам $n_i' = np_i$, где p_i — вероятность попадания случайной величины в i-ый интервал, вычисленная при допущении, что случайная величина имеет предполагаемый закон распределения.

Доказано, что при $l \to \infty$, закон распределения этой величины (независимо от того, по какому закону распределена генеральная совокупность) стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. С этим обстоятельством связан и выбор обозначения случайной величины и название критерия.

Число степеней свободы находят из равенства $k = l - 1 - r$, где l — количество интервалов, на которые разбита выборка, r — количество неизвестных параметров предполагаемого распределения.

Чем меньше значение критерия χ^2 в опытах, тем меньше отличие эмпирических и теоретических частот, и, следовательно, выбранный критерий характеризует близость эмпирических и теоретических распределений.

Поскольку односторонний критерий более жестко отвергает гипотезу H_0 чем двусторонний, то строят правостороннюю критическую область исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область была равна выбранному уровню значимости $P(K > K_{\text{кр}}) = \alpha$. Обозначим значения критерия, вычисленные по выборке, через $\chi^2_{\text{набл}}$.

Правило применения критерия согласия χ^2 Пирсона

1. Формулируются гипотеза H_0 о предполагаемом законе распределения и альтернативная гипотеза H_1.
2. Задается уровень значимости α.
3. По выборке рассчитываются значения теоретических частот n_i' и критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}.$$

4. Вычисляется число степеней свободы $k = l - 1 - r$. Используя значения α и k, по таблице критических точек распределения χ^2 находят значения $\chi^2_{\text{кр}}$.
5. Строят правостороннюю критическую область.
6. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, — нулевая гипотеза отвергается.

Если предполагается, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, то $r = 2$, так как нормальный закон характеризуется двумя параметрами (математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением). Тогда число степеней свободы $k = l - 3$.

Вычислим n_i' для нормального закона распределения, используя формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a - \alpha}{\sigma}\right).$$

Считая $a \approx \bar{x}$, $\sigma = s$, получим

$$n_i' = np_i = nP\left(\alpha_{i-1} < X < \alpha_i\right) = n \cdot \left(\phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{x}}{s}\right) - \phi\left(\frac{\alpha_{i-1} - \bar{x}}{s}\right)\right),$$

где $\phi(x)$ — интегральная функция Лапласа, а α_{i-1}, α_i — границы интервального вариационного ряда. Вычисленные значения теоретических частот n_i' обычно отличаются от значений эмпирических частот n_i. Правильность расчета n_i' можно проверить, учитывая, что $\sum_{i=1}^{l} n_i' = n$ (практически получается приближенное равенство).

Замечание. Гипотеза H_0 о нормальном законе распределении обычно выдвигается, если:

1) точечные оценки для $M(X)$, $Mo(X)$ *и* $Me(X)$ близки между собой (а для нормального закона они равны);

2) точечные оценки для коэффициентов асимметрии и эксцесса близки к нулю (для нормального закона они равны нулю);

3) вид полигона и гистограммы частот напоминают кривую Гаусса.

4.6. Корреляционный анализ

Для описания, анализа и прогнозирования явлений и процессов применяют математические модели в форме уравнений или функций. Модель процесса, отражая основные его свойства и абстрагируясь от второстепенных, позволяет судить о его поведении в определенных конкретных условиях.

Математическая модель процесса представляется чаще всего, как функция влияющих на него факторов. Некоторые из них оказывают существенное влияние на результат, другие — весьма незначительное. Как правило, существенных факторов немного, в то время как несущественных достаточно большое число, поэтому последними полностью пренебрегать нельзя. Как известно, источником любого богатства является труд (прошлый или настоящий). Поэтому к числу основных факторов, например, при изучении экономического процесса, относят обычно настоящий труд (или трудовые ресурсы в той или иной мере), прошлый труд (энергия, сырье, материалы, оборудование, здания, сооружения и т.д.). Вместе с тем труд прилагается при определенном состоянии внешней среды, т.е. при определенных природных условиях, поэтому соответствующие факторы также должны найти отражение в модели. Рассмотрим двумерную модель.

Предположим, что требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины от одного фактора, являющегося также случайной величиной.

Любые две случайные величины могут быть связаны либо функциональной, либо стохастической зависимостью, либо быть независимыми.

Функциональная зависимость между двумя случайными величинами характеризуется тем, что каждому значению одной случайной величины соответствует определенное значение другой. Такой зависимостью связаны, например, количество купленного одноименного товара и его стоимость; количество потребленной абонентом электроэнергии и плата за нее.

Однако встречаются величины, когда каждому значению одной величины соответствует целое множество значений другой. Например, рост человека и его вес, урожайность определенной сельскохозяйственной культуры и количество внесенных удобрений и т.д.

Множество значений случайной величины *Y*, соответствующих фиксированному значению случайной величины *X*, будем рассматривать как соответствующее ему распределение случайной величины *Y*.

Зависимость между величинами называется *стохастической*, если каждому значению одной случайной величины соответствует определенное распределение другой случайной величины, меняющееся с изменением величины *X* и по вариантам и по частотам.

Если стохастическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой, то эту зависимость называют *корреляционной*.

Уточним это понятие, для чего сначала введем понятие условной средней.

Условной средней $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значений случайной величины *Y*, соответствующее фиксированному значению случайной величины *X*.

Если каждому значению *X* соответствует единственное значение условной средней $\overline{y}_x$, то очевидно, что условная средняя есть функция от *x*.

Корреляционной зависимостью *Y* от *X* называют функциональную зависимость условной средней $\overline{y}_x$ от *x* и обозначают

$$\overline{y}_x = f(x).$$

Это уравнение называют уравнением регрессии *Y* по *X*. Функцию *f*(*x*) называют функцией регрессии *Y* по *X*, а ее график — линией регрессии *Y* по *X*. Аналогично определяется уравнение регрессии *X* по *Y* :

$\overline{x}_y = \varphi(y)$, где $\overline{x}_y$ — условная средняя величины *X*.

Оценка тесноты *линейной связи* между случайными величинами *Y* и *X*, то есть оценка степени рассеивания значений *X* около линии регрессии, для разных значений случайной величины *Y* (или наоборот) осуществляется с помощью коэффициента корреляции, формулу для вычисления которого получил Пирсон в начале 90-х гг. XIX в.

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \text{где}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_j, \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \overline{y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad \sigma_x = \sqrt{\overline{x}^2 - (\overline{x})^2}, \ \sigma_y = \sqrt{\overline{y}^2 - (\overline{y})^2},$$

(x_i, y_i) — элементы двумерной выборки; n — объем выборки.

Линейный коэффициент корреляции характеризует степень тесноты не всякой, а только линейной зависимости. При нелинейной зависимости между явлениями для измерения тесноты связи применяют так называемое корреляционное отношение, известное также под названием «индекс корреляции».

Линейная вероятностная зависимость случайных величин заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать или убывать по линейному закону. Эта тенденция может быть более или менее ярко выраженной, т.е. более или менее приближаться к функциональной зависимости. Рассмотрим свойства линейного коэффициента корреляции при достаточно большом объеме выборки.

1. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке [–1; 1]. Знак r характеризует направление корреляционной зависимости. Если $r_{yx} > 0$, то увеличение признака X в среднем приводит к увеличению признака Y. Если $r_{yx} < 0$, то с увеличением признака X в среднем признак Y уменьшается.

2. Если случайные величины X и Y связаны точной линейной функциональной зависимостью $y = ax + b$, то $r_{yx} = \pm 1$. При этом линии регрессии Y по X и X по Y совпадают.

3. Если $r_{yx} = 0$, то линейная корреляционная связь отсутствует, а линии регрессии Y по X и X по Y параллельны осям координат.

Для качественной оценки тесноты линейной корреляционной связи величин X и Y можно воспользоваться шкалой Чеддока (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Теснота связи	Значение коэффициента корреляции при наличии:	
	прямой связи	обратной связи
Слабая	0,1 — 0,3	(–0,3) — (–0,1)
Умеренная	0,3 — 0,5	(–0,5) — (–0,3)
Заметная	0,5 — 0,7	(–0,7) — (–0,5)
Высокая	0,7 — 0,9	(–0,9) — (–0,7)
Весьма высокая	0,9 — 0,99	(–0,99) — (–0,9)

Можно показать, что $r_{xy} = r_{yx} = r$.

На практике коэффициент корреляции находят по выборочным данным, следовательно, он будет отличаться от коэффициента корреляции генеральной совокупности. В связи с этим необходимо определить точность показателей корреляции и границы доверительных интервалов.

Выборочный коэффициент корреляции r представляет собой случайную величину, поэтому его распределение можно считать нормальным или приближенно нормальным, если:

– переменные X и Y имеют совместное нормальное или приближенно нормальное распределение;

– $r \neq \pm 1$;

– объем выборки достаточно велик.

Пусть полученное значение выборочного коэффициента корреляции $r \neq 0$. Закономерен вопрос: объясняется ли это действительно существующей линейной корреляционной связью между переменными X и Y в генеральной совокупности или является следствием случайного отбора элементов в выборку (т.е. при другом отборе возможно, что $r = 0$). Обычно в этих случаях проверяется гипотеза H_0 об отсутствии линейной корреляционной связи между переменными в генеральной совокупности, т.е. H_0: $\rho = 0$ (ρ — коэффициент корреляции генеральной совокупности) при конкурирующей гипотезе H_1: $\rho \neq 0$ и заданном уровне значимости α.

При справедливости нулевой гипотезы вычисляют статистику

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

которая имеет t-распределение Стьюдента с $k = n-2$ степенями свободы. Поэтому при данном уровне значимости α и k степенях свободы по таблице t-критерия Стьюдента находят критическое значение случайной величины $t_{\text{кр}} = t(\alpha, k)$. Строят двустороннюю критическую область. Тогда при $|t| \geq t_{\text{кр}}$ гипотеза H_0 должна быть отвергнута, т.е. выборочный коэффициент корреляции значимо (существенно) отличен от нуля. В этом случае можно принять, что в генеральной совокупности случайные величины X и Y с вероятностью $\gamma = 1-\alpha$ *коррелированны*.

При $|t| < t_{\text{кр}}$ нет основания отвергать гипотезу H_0, поэтому отклонение выборочного коэффициента корреляции от нуля может носить чисто случайный характер.

Для статистически значимого линейного коэффициента корреляции целесообразно найти доверительный интервал (интервальную оценку), который с заданной надежностью $\gamma = 1-\alpha$ содержит неизвестный генеральный коэффициент корреляции ρ. Для построения такого интервала необходимо знать выборочное распределение коэффициента корреляции, которое с ростом объема выборки очень медленно приближается к нормальному распределению. В таких случаях прибегают к специально подобранным функциям от r, которые сходятся к хорошо изученным распределениям. Чаще всего для подбора функции применяют z–преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Распределение z уже при небольших значениях n является приближенно нормальным с математическим ожиданием

$$M(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$$

и дисперсией $$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}.$$

Поэтому вначале строят доверительный интервал для $M(z)$:

$$z - t_{1-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n-3}} \le M(z) \le z + t_{1-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n-3}},$$

где $t_{1-\alpha}$ — нормированное отклонение z, определяемое с помощью функции Лапласа $\phi(t_{1-\alpha}) = \gamma = 1 - \alpha$.

При определении границ доверительного интервала для ρ, т.е. для перехода от z к ρ, существуют специальная таблица. При её отсутствии переход может быть осуществлен по формуле

$$r = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

4.7. Регрессионный анализ

Наряду с корреляционным анализом обычно проводится и *регрессионный анализ*, который заключается в определении аналитического выражения связи зависимой случайной величины Y (называемой также *результативным признаком*) с независимыми случайными величинами $X_1, X_2,\ldots, X_m$ (называемыми также *факторами*).

Форма связи результативного признака Y с факторами $X_1, X_2,\ldots, X_m$ получила название *уравнения регрессии*. В зависимости от типа выбранного уравнения различают *линейную* и *нелинейную* регрессию (в последнем случае возможно дальнейшее уточнение: квадратичная, логарифмическая, показательная и т.д.). В зависимости от числа взаимосвязанных признаков различают *парную* и *множественную* регрессию. Если исследуется связь между двумя признаками (результативным и факторным), то регрессия называется *парной*. Если между тремя и более признаками, то регрессия называется *множественной* или *многофакторной*.

При изучении регрессии следует придерживаться определенной последовательности этапов:

1. Задание аналитической формы уравнения регрессии и определение параметров регрессии.
2. Определение в регрессии степени стохастической взаимосвязи результативного признака и факторов, проверка общего качества уравнения регрессии.
3. Проверка статистической значимости каждого коэффициента уравнения регрессии и определение их доверительных интервалов.

Этап 1. Выбор вида уравнения регрессии (очень важный этап анализа) производится на основании опыта предыдущих исследований, литературных источников, других соображений профессионально-теоретического характера, а также визуального наблюдения расположения «облака» точек корреляционного поля. Рассмотрим линейную модель множественной регрессии. Тогда уравнение множественной линейной регрессии может быть записано в виде:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m, \text{ где}$$

$\tilde{y}$ — теоретические значения результативного признака, полученные путем подстановки соответствующих значений факторных признаков в уравнение регрессии;

$x_1, x_2, ..., x_m$ — значения факторных признаков;

$a_0, a_1, ..., a_m$ — параметры уравнения (коэффициенты регрессии).

Параметры уравнения регрессии могут быть определены, например, с помощью метода наименьших квадратов. Данный метод заключается в нахождении параметров уравнения регрессии, при которых минимизируется сумма квадратов отклонений эмпирических (фактических) значений результативного признака от теоретических, полученных по выбранному уравнению регрессии.

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_{1_i} - a_2 x_{2_i} - ... - a_m x_{m_i}\right)^2 \to \min.$$

Рассматривая S в качестве функции параметров a_i и проводя математические преобразования (нахождение частных производных и равенство их нулю), получаем систему линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + ... + a_m \sum x_m = \sum y; \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^{\,2} + a_2 \sum x_2 x_1 + ... + a_m \sum x_m x_1 = \sum y x_1; \\ .... \\ a_0 \sum x_m + a_1 \sum x_1 x_m + a_2 \sum x_2 x_m + ... + a_m \sum x_m^{\,2} = \sum y x_m, \end{cases}$$

где n — число наблюдений, т.е. объем выборки;

m — число факторов в уравнении регрессии.

Решив систему уравнений, определяют значения параметров a_i, являющихся коэффициентами искомого теоретического уравнения регрессии.

Этап 2. Для определения величины степени стохастической взаимосвязи результативного признака Y и факторов X необходимо знать следующие дисперсии:

- *общую дисперсию* результативного признака, отображающую влияние как основных, так и остаточных факторов $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$, где

$\bar{y}$ — среднее значение результативного признака Y;

- *факторную дисперсию* результативного признака, отображающую влияние только основных факторов $\sigma_ф^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i - \bar{y})^2$;
- *остаточную дисперсию* результативного признака, отображающую влияние только остаточных факторов $\sigma_o^2 = \frac{1}{n-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2$.

При корреляционной связи признака Y и факторов X выполняется соотношение $\sigma_ф^2 < \sigma_y^2$, при этом $\sigma_y^2 = \sigma_ф^2 + \sigma_o^2$.

Для анализа общего качества уравнения линейной многофакторной регрессии используют *множественный коэффициент детерминации* R^2, называемый также квадратом *коэффициента множественной корреляции* R или *квадратом эмпирического корреляционного отношения* Y по X. Множественный коэффициент детерминации рассчитывается по формуле

$$R^2 = \frac{\sigma_{ф}^2}{\sigma_y^2}$$

и определяет долю вариации результативного признака, обусловленную изменением факторных признаков, входящих в многофакторную регрессионную модель.

Так как уравнение регрессии приходится строить на основе выборочных данных, то возникает вопрос об адекватности построенного уравнения генеральным данным. Для этого проводится проверка статистической значимости коэффициента детерминации R^2 на основе F–критерия Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

Примечание. Если в уравнении регрессии свободный член $a_0 = 0$, то числитель $n - m - 1$ надо увеличить на 1, т.е. он будет равен $n - m$.

В математической статистике доказывается, что если справедлива гипотеза H_0: $R^2 = 0$, то величина F имеет F–распределение с числом степеней свободы $k_1 = m$ и $k_2 = n - m - 1$.

Используя таблицу критерия Фишера – Снедекора, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k_1 и k_2 определяют критическую точку $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$.

Если $F > F_{кр}$, то гипотеза H_0 о незначимости коэффициента детерминации отвергается, в противном случае принимается.

При значениях $R^2 > 0{,}7$ считается, что вариация результативного признака Y обусловлена в основном влиянием включенных в регрессионную модель факторов X.

Для оценки адекватности уравнения регрессии часто используют показатель средней ошибки аппроксимации:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - \tilde{y}_i|}{y_i} \cdot 100\%.$$

Этап 3. Возможна ситуация, когда часть вычисленных коэффициентов регрессии не обладает необходимой степенью значимости, т.е. значения данных коэффициентов будут меньше их стандартной ошибки. В этом случае такие коэффициенты должны быть исключены из уравнения регрессии. Поэтому проверка адекватности построенного уравнения регрессии наряду с проверкой значимости коэффициента детерминации включает в себя также проверку значимости каждого коэффициента уравнения регрессии. Значимость коэффициентов регрессии проверяется с помощью t – критерия Стьюдента:

$$t = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}},$$

где σ_{a_i} — стандартное значение ошибки для коэффициента регрессии a_i.

В математической статистике доказывается, что если гипотеза H_0: $a_i = 0$ выполняется, то величина t имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - m - 1$. По таблице значений t – критерия Стьюдента по заданной надежности γ и числу степеней свободы k определяют критическую точку $t_{кр}(\gamma, k)$. Гипотеза H_0: $a_i = 0$ о незначимости коэффициента регрессии отвергается, если $|t| > |t_{кр}|$. Кроме того, зная $t_{кр}$, можно найти границы доверительных интервалов для коэффициентов регрессии по формулам:

$$a_i - t_{кр}\sigma_{a_i} < a_i < a_i + t_{кр}\sigma_{a_i}.$$

При экономической интерпретации уравнения регрессии широко используются *частные коэффициенты эластичности*, показывающие, на сколько процентов в среднем изменится значение результативного признака при изменении значения соответствующего факторного признака на 1%, и определяемые по формуле:

$$Э_{x_i} = a_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}},$$

где $\bar{x}_i$ — среднее значение соответствующего факторного признака;
$\bar{y}$ — среднее значение результативного признака Y;
a_i — коэффициент регрессии при соответствующем факторном признаке.

Если имеет место парная регрессия, то выборочное уравнение линейной регрессии может быть записано в виде:

$$\tilde{y} = \bar{y} + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}).$$

Можно доказать, что это уравнение является точечной оценкой для линии регрессии генеральной совокупности $\bar{y}_x = f(x)$.

В качестве оценки дисперсии σ_y^2 случайной величины Y в генеральной совокупности выступает остаточная дисперсия, определяемая выражением

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2.$$

Деление на $(n-2)$ приводит к тому, что s_y^2 становится несмещенной оценкой дисперсии σ_y^2.

Между остаточной дисперсией s_y^2 и коэффициентом корреляции r существует зависимость, выражающая связь между линейной регрессией и линейной корреляцией

$$s_y^2 = \sigma_y^2\left(1 - r^2\right).$$

4.8. Понятие о многомерном корреляционном анализе

Многие явления чаще всего описываются многофакторными моделями. Поэтому возникает необходимость обобщить двумерную корреляционную модель на случай нескольких переменных.

Пусть имеется совокупность случайных переменных $X_1,\ X_2,...,X_p$, имеющих совместное нормальное распределение, т.е. результирующий показатель Y является функцией некоторых p факторов: $Y = F(X_1, X_2,\dots, X_p)$.

В многомерном корреляционном анализе рассматривают две основные задачи:

– определение тесноты связи одной из переменных с совокупностью остальных переменных, включенных в анализ;

– определение тесноты связи между переменными при фиксировании или исключении влияния остальных q переменных, где $q \le p-2$.

Эти задачи решаются с помощью множественных и частных коэффициентов корреляции.

Количественно тесноту линейной связи одной переменной с совокупностью других переменных можно оценить с помощью множественного коэффициента корреляции R. Для расчѐта коэффициента корреляции необходимо определить парные коэффициенты корреляции r_{yx_i} между всеми факторами, входящими в модель, и результирующим показателем Y и все парные коэффициенты корреляции $r_{x_ix_j}$ между факторами. Все коэффициенты корреляции записываются в виде квадратной симметричной матрицы.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yx_3} & \cdots & r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \cdots & r_{x_1x_p} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1 & r_{x_2x_3} & \cdots & r_{x_2x_p} \\ - & - & - & - & - & - \\ r_{yx_p} & r_{x_1x_p} & r_{x_2x_p} & r_{x_3x_p} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Множественный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{\Delta_{11}}},$$

где Δ — определитель матрицы парных коэффициентов корреляции Q;
Δ_{11} — определитель матрицы Q с вычеркнутыми первой строкой и первым столбцом.

Выведем формулу множественного коэффициента корреляции R для случая зависимости от двух факторов X_1 и X_2. Тогда

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & r_{yx_1} & r_{yx_2}\\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2}\\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & r_{x_1x_2}\\ r_{x_1x_2} & 1\end{vmatrix}-r_{yx_1}\begin{vmatrix}r_{yx_1} & r_{x_1x_2}\\ r_{yx_2} & 1\end{vmatrix}+$$

$$+r_{yx_2}\begin{vmatrix}r_{yx_1} & 1\\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2}\end{vmatrix}=1-r_{x_1x_2}^2-r_{yx_1}^2-r_{yx_2}^2+2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}.$$

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix}1 & r_{x_1x_2}\\ r_{x_1x_2} & 1\end{vmatrix}=1-r_{x_1x_2}^2;$$

$$1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=1-\frac{1-r_{x_1x_2}^2-r_{yx_1}^2-r_{yx_2}^2+2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1-r_{x_1x_2}^2}=$$

$$=\frac{r_{yx_1}^2+r_{yx_2}^2-2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1-r_{x_1x_2}^2};$$

$$R=\sqrt{\frac{r_{yx_1}^2+r_{yx_2}^2-2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1-r_{x_1x_2}^2}}.$$

Множественный коэффициент корреляции заключен в пределах $0\le R\le 1$. Он не меньше, чем абсолютная величина любого парного или частного коэффициента корреляции. С помощью множественного коэффициента корреляции (по мере приближения R к 1) делается вывод о тесноте взаимосвязи, но не о её направлении. Величина R^2, называемая множественным коэффициентом детерминации, показывает, какую долю вариации исследуемой переменной объясняет вариация остальных переменных.

Можно показать, что множественный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, если значение статистики

$$F=\frac{R^2(n-p)}{\left(1-R^2\right)(p-1)}>F_{\alpha,k_1,k_2},$$

где F_{α,k_1,k_2} — табличное значение F– критерия на уровне значимости α при числе степеней свободы $k_1=p-1$ и $k_2=n-p$.

Если переменные коррелируют друг с другом, то на величине парного коэффициента корреляции частично сказывается влияние других переменных. В связи с этим часто возникает необходимость исследовать *частную корреляцию* между переменными при исключении влияния одной или нескольких других переменных. Для этих целей используется частный коэффициент корреляции, который определяется формулой:

$$r_{y/x_i}=\frac{\Delta_{1i}}{\sqrt{\Delta_{11}\cdot\Delta_{ii}}},$$

где Δ_{1i} – определитель матрицы Q с вычеркнутой 1-ой строкой и столбцом, соответствующему фактору x_i;

Δ_{11} – определитель матрицы Q с вычеркнутой 1-ой строкой и 1-ым столбцом;

Δ_{ii} – определитель матрицы Q с вычеркнутой строкой и столбцом, соответствующих фактору x_i.

Вычислим частный коэффициент корреляции первого фактора при множественной корреляции от двух факторов:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2_{x_1x_2}; \quad \Delta_{1i} = \begin{vmatrix} r_{yx_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & 1 \end{vmatrix} = r_{yx_1} - r_{x_1x_2} r_{yx_2};$$

$$\Delta_{ii} = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_2} \\ r_{yx_2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2_{yx_2}; \quad r_{y/x_1} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}.$$

Аналогично, для второго фактора

$$r_{y/x_2} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}.$$

Частный коэффициент корреляции отражает “чистое” влияние фактора на результирующий показатель и отличается от коэффициента парной корреляции, так как на его величине частично сказывается влияние других переменных. Частный коэффициент корреляции может принимать значения от –1 до 1.

Значимость частного коэффициента корреляции оценивают, используя статистику

$$t = \frac{r_{y/x_i}\sqrt{n-p}}{\sqrt{1 - r^2_{y/x_i}}},$$

которая имеет t-распределение Стьюдента с $k = n - p$ степенями свободы. Строится двухсторонняя критическая область.

Если $|t| > t_{\text{кр}}(\alpha, k)$, то гипотеза H_0: коэффициент корреляции равен нулю, отвергается, т.е. частный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

Задача научного исследования состоит в отыскании *причинных зависимостей*. Только знание истинных причин явлений позволяет правильно истолковать наблюдаемые закономерности. Однако *корреляция как формальное статистическое понятие* сама по себе не вскрывает причинного характера связи. С помощью корреляционного анализа нельзя указать, какую переменную принимать в качестве причины, а какую — в качестве следствия. Иногда при наличии корреляционной связи ни одна из переменных не может рассматриваться причиной другой, например, зависимость между ростом и весом человека.

Кроме того, не существует *критерия проверки* определяющего требования корреляционного анализа — нормального закона для многомерного распределения переменных. Учитывая свойства теоретической модели, обычно полагают, что отнесение к совместному нормальному закону возможно, если частные одномерные распределения переменных не противоречат нормальным распределениям (для этого можно использовать критерии согласия).

При линейной форме связи множественный коэффициент корреляции является оценкой точности аппроксимации и равен корреляционному отношению η. При нелинейных формах связи для оценки точности аппроксимации применяют также корреляционное отношение, которое определяется формулой:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2}}.$$

5. Элементы дисперсионного анализа

Дисперсионный анализ определяется как статистический метод, предназначенный для оценки влияния различных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов.

Первоначально (1918 г.) дисперсионный анализ был разработан английским математиком — статистом Р.А. Фишером для обработки результатов агрономических опытов по выявлению условий получения максимального урожая различных сортов сельскохозяйственных культур.

По числу факторов, влияние которых исследуется, различают однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Однофакторный дисперсионный анализ применяют, чтобы установить, оказывает ли существенное влияние некоторый *качественный* фактор F, который имеет m уровней $F_1, F_2, \ldots, F_m$ на изучаемую величину X.

Например, пусть требуется установить, какой вид удобрений наиболее эффективен для получения наибольшего урожая, то фактор F — удобрение, а его уровни — виды удобрений.

В качестве фактора может быть рассмотрена организация производства на различных производственных участках, оснащенных примерно одинаковым оборудованием. Тогда различия в выпуске продукции в расчете на одного работающего определяются различиями в способах организации производства на разных участках.

Основная идея дисперсионного анализа состоит *в сравнении «факторной дисперсии»*, порождаемой воздействием фактора, и *«остаточной дисперсии»*, обусловленной случайными причинами. Если различие между этими дисперсиями значимо, то фактор оказывает существенное влияние на X; в этом случае *средние* наблюдаемых значений на каждом уровне (*групповые средние*) различаются также значимо.

Если же установлено, что фактор существенно влияет на X, а требуется выяснить, какой из уровней оказывает наибольшее воздействие, то дополнительно производят попарное сравнение *средних*.

Иногда дисперсионный анализ применяют для установления однородности нескольких совокупностей, дисперсии этих совокупностей одинаковы по предположению. Если дисперсионный анализ покажет, что и математические ожидания одинаковые, то в этом смысле совокупности однородны. Тогда однородные совокупности можно объединить в одну и тем самым получить о ней более полную информацию, а, следовательно, и более надежные выводы. Рассмотрим однофакторную дисперсионную модель.

5.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Для составления однофакторной дисперсионной модели получим формулы факторной и остаточной дисперсий.

Пусть на количественный *нормально распределенный признак* X воздействует фактор F, который имеет m постоянных уровней. Будем предполагать, что из каждого уровня сделана выборка из n элементов. Общее количество выбранных элементов обозначим $N = m \cdot n$. Вся выборка будет представлять собой матрицу

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Результаты наблюдений оформим в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	…	F_m
1	x_{11}	x_{12}	…	$x_{1\mathrm{m}}$
2	x_{21}	x_{22}	…	$x_{2\mathrm{m}}$
…	…	…	…	….
n	$x_{\mathrm{n}1}$	$x_{\mathrm{n}2}$		x_{nm}
Групповая средняя	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$		$\bar{x}_m$

Введем следующие суммы:

1) *общую сумму квадратов* отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\bar{x}$:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2 ,$$

где $\bar{x} = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$;

2) *факторную сумму квадратов* отклонений групповых средних от общей средней, которая характеризует рассеяние между группами:

$$S_{\text{факт}} = n \sum_{j=1}^{m} \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 ,$$

где $\bar{x}_j = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$, $j = 1, 2, ..., m$ — групповые средние;

3) *остаточную сумму квадратов* отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние внутри групп:

$$S_{\text{ост}} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 .$$

Эта сумма характеризует влияние остальных неучтенных факторов.
Легко убедиться в справедливости равенства: $S_{\text{общ}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}$.
Из полученного равенства вытекает важное следствие: $S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}}$, т.е. нет необходимости вычислять остаточную сумму, достаточно найти общую и факторную.

Разделив суммы квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную дисперсии:

$$S^2_{\text{общ}} = \frac{S_{\text{общ}}}{mn-1}; \quad S^2_{\text{факт}} = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1}; \quad S^2_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{m(n-1)} .$$

Запишем таблицу однофакторного анализа (табл. 5.2)

Таблица 5.2

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсии
общая	$S_{\text{общ}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x})^2$ $\bar{x} = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$	$mn-1$	$S^2_{\text{общ}} = \dfrac{S_{\text{общ}}}{mn-1}$
факторная (межгрупповая)	$S_{\text{факт}} = n \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$ $\bar{x}_j = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}$	$m-1$	$S^2_{\text{факт}} = \dfrac{S_{\text{факт}}}{m-1}$
остаточная (внутригрупповая)	$S_{\text{ост}} = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$	$mn - m = m(n-1)$	$S^2_{\text{ост}} = \dfrac{S_{\text{ост}}}{m(n-1)}$

Рассмотрим следующую задачу. Полагая, что выборка сделана из нормально распределенной генеральной совокупности, и задавая уровень значимости α, проверим гипотезу о равенстве средних значений на всех уровнях фактора, т.е. проверим нулевую гипотезу H_0: $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$. При альтернативной гипотезе H_1 не все средние значения должны быть равными. Другими словами требуется установить значимо или незначимо отличаются средние значения. Покажем, что решение этой задачи сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсий по критерию Фишера, в котором в качестве статистики используют величину $F_{\text{набл}} = \dfrac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}}$.

Если нулевая гипотеза верна, то случайная величина F имеет F-распределение со степенями свободы $k_1 = m - 1$ и $k_2 = N - m = m(n-1)$. При проверке H_0 используют правостороннюю критическую область, определяемую условием $P(F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}) = \alpha$, где $F_{\text{кр}} = F(\alpha, k_1, k_2)$ находят по таблице критических точек распределения F. Нулевая гипотеза отвергается, если $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, и принимается, если $F_{\text{набл}} \le F_{\text{кр}}$.

1. Пусть нулевая гипотеза о равенстве нескольких средних (будем называть их групповыми средними) правильна. В этом случае факторная и остаточная дисперсии являются несмещенными оценками неизвестной генеральной дисперсии и, следовательно, различаются незначимо. Если сравнить эти оценки по критерию F, то он укажет, что нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий следует принять. Таким образом, если нулевая гипотеза о равенстве групповых средних правильна, то верна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

2. Пусть нулевая гипотеза о равенстве групповых средних ложна. В этом случае с возрастанием расхождения между групповыми средними увеличивается факторная дисперсия, а вместе с ней и отношение $F_{\text{набл}} = \dfrac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}}$. В итоге $F_{\text{набл}}$ окажется больше $F_{\text{кр}}$ и гипотеза о равенстве дисперсий будет отвергнута.

Вывод. Для того чтобы проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних нормально распределенных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, достаточно проверить по критерию F нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

В этом и состоит метод дисперсионного анализа.

Замечание. Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то уже отсюда следует справедливость гипотезы о равенстве групповых средних и, значит, нет надобности прибегать к критерию F.

Рассмотрим пример решения задачи при одинаковом количестве элементов на всех уровнях.

Пример 1. По данной выборке при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве средних значений. Выборка задана в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	-19	-31	-35	-31
2	-28	-33	-32	-27
3	-39	-35	-26	-28
4	-36	-25	-35	-35
5	-44	-28	-30	-40
6	-39	-31	-17	-31

В нашем случае количество уровней $m = 4$, $n = 6$, следовательно, $N = 4 \cdot 6 = 24$.

Обычно все вычисления в дисперсионном анализе оформляют в виде таблиц, поэтому можно проводить все расчеты в Excel. Для вычисления факторной суммы квадратов составим табл. 5.4.

Таблица 5.4

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	-19	-31	-35	-31
2	-28	-33	-32	-27
3	-39	-35	-26	-28
4	-36	-25	-35	-35
5	-44	-28	-30	-40
6	-39	-31	-17	-31
$Q_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$	-205	-183	-175	-192
Групповые средние $\bar{x}_j = Q_j / n$	-34,17	-30,50	-29,17	-32,00
Общая средняя $\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} Q_j / N$	-31,46			
$(\bar{x}_j - \bar{x})^2$	7,34	0,92	5,25	0,29
Факторная сумма квадратов $S_{\text{факт}} = n \sum_{j=1}^{m} \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$	82,79			

Для вычисления общей суммы квадратов составим табл.5.5.

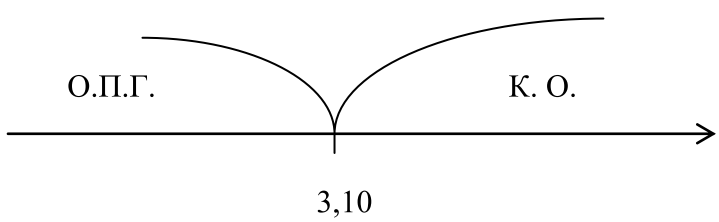
Таблица 5.5

Номер испытания	$(x_{i1}-\bar{x})^2$	$(x_{i2}-\bar{x})^2$	$(x_{i3}-\bar{x})^2$	$(x_{i4}-\bar{x})^2$
1	155,21	0,21	12,54	0,21
2	11,96	2,38	0,29	19,88
3	56,88	12,54	29,79	11,96
4	20,63	41,71	12,54	12,54
5	157,29	11,96	2,13	72,96
6	56,88	0,21	209,04	0,21
$R_j=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$	458,84	69,01	266,34	117,76
Общая сумма квадратов $S_{\text{общ}}=\sum\limits_{j=1}^{m}R_j$	911,96			
Остаточная сумма квадратов $S_{\text{ост}}=S_{\text{общ}}-S_{\text{факт}}$	829,17			

Вычислим факторную и остаточную дисперсии:

$$S^2_{\text{факт}}=\frac{S_{\text{фак}}}{m-1}=\frac{82,79}{4-1}=27,63;\quad S^2_{\text{ост}}=\frac{S_{\text{ост}}}{m(n-1)}=\frac{829,17}{4(6-1)}=41,46.$$

Тогда статистика $F_{\text{набл}}=\dfrac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}}=\dfrac{27,63}{41,46}=0,67$. Найдем критическую точку $F_{\text{кр}}=F(\alpha,k_1,k_2)=F(\alpha,m-1,N-m)=F(0,05;3;20)$, используя готовую функцию FРАСПОБР (в Excel). Получим $F_{\text{кр}}=3,10$. Построим правостороннюю критическую область:



Значение статистики не входит в критическую область, поэтому нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве средних значений по уровням. Таким образом, влияние фактора незначимо.

Рассмотрим решение задачи при неодинаковом количестве элементов на различных уровнях.

Пусть число испытаний на различных уровнях различно, а именно: произведено n_1 испытаний на уровне F_1, n_2 испытаний на уровне F_2, …, n_m — испытаний на уровне F_m. В этом случае общую сумму квадратов отклонений находят по формуле:

$$S_{\text{общ}} = (Q_1 + Q_2 + ... + Q_m) - \frac{(R_1 + R_2 + ... + R_m)^2}{n},$$

где $Q_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^2$, $Q_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^2$,…, $Q_m = \sum_{i=1}^{n_m} x_{im}^2$ — суммы квадратов наблюдавшихся значений признака соответственно на уровнях F_1, F_2, …, F_m;

$R_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}$, $R_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}$,…, $R_m = \sum_{i=1}^{n_m} x_{im}$ — суммы наблюдавшихся значений признака соответственно на уровнях F_1, F_2, …, F_m;
$n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ — общее число испытаний, т.е. объем выборки.

Факторную сумму квадратов находят по формуле:

$$S_{\text{факт}} = \left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + ... + \frac{R_m^2}{n_m} \right) - \frac{(R_1 + R_2 + ... + R_m)^2}{n}.$$

Остальные вычисления производят, как и в случае одинакового числа испытаний:

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}}; \quad S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1}; \quad S_{\text{ост}}^2 = \frac{S_{\text{ост}}}{n-m}.$$

Пример 2. Рассмотрим обследование производительности труда рабочих одниковых профессий на четырех однотипных заводах разных городов. Производительность выражена в относительных величинах по отношению к базовой, принятой за единицу. Требуется установить, существенно ли различаются производительности труда рабочих рассматриваемых профессий на четырех заводах. Исходные данные приведены в табл. 5.6, считать уровень значимости α = 0,05.

Таблица 5.6

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1,3	1,4	1,44	1,27
2	1,27	1,3	1,4	1,05
3	1,21	1,28	1,28	1,24
4	1,09	1,27	1,28	1,22
5	1,03	1,24	1,06	
6	1,01	1,08		
7	1,09			

Таким образом, для проверки влияния на производительность труда одного качественного фактора (организация труда) имеем четыре группы наблюдений: $n_1 = 7$, $n_2 = 6$, $n_3 = 5$, $n_4 = 4$ — общим числом $n = 22$. Для вычисления общей суммы квадратов и факторной суммы квадратов составим табл. 5.7 и табл. 5.8.

Таблица 5.7

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	1,3	1,4	1,44	1,27
2	1,27	1,3	1,4	1,05
3	1,21	1,28	1,28	1,24
4	1,09	1,27	1,28	1,22
5	1,03	1,24	1,06	
6	1,01	1,08		
7	1,09			
$R_j = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$	8	7,57	6,46	4,78
$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2$	718,7761			

Таблица 5.8

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	x_{i1}^2	x_{i2}^2	x_{i3}^2	x_{i4}^2
1	1,69	1,96	2,0736	1,6129
2	1,6129	1,69	1,96	1,1025
3	1,4641	1,6384	1,6384	1,5376
4	1,1881	1,6129	1,6384	1,4884
5	1,0609	1,5376	1,1236	
6	1,0201	1,1664		
7	1,1881			
$Q_j = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2$	9,2242	9,6053	8,434	5,7414
$(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$	33,0049			

Тогда

$$S_{\text{общ}} = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) - \frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2}{n},$$

$$S_{\text{общ}} = 33{,}0049 - \frac{718{,}7761}{22} = 0{,}3333;$$

$$S_{\text{факт}} = \left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \frac{R_3^2}{n_3} + \frac{R_4^2}{n_4} \right) - \frac{(R_1 + R_2 + ... + R_m)^2}{n},$$

$$S_{\text{факт}} = \left(\frac{8^2}{7} + \frac{7{,}57^2}{6} + \frac{6{,}46^2}{5} + \frac{4{,}78^2}{4} \right) - \frac{718{,}7761}{22} = 0{,}0805.$$

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}} = 0{,}3333 - 0{,}0805 = 0{,}2528.$$

Вычислим факторную и остаточную дисперсии:

$$S^2_{\text{факт}} = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1} = \frac{0{,}0805}{3} = 0{,}0268; \quad S^2_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{n-m} = \frac{0{,}2528}{22-4} = 0{,}0140.$$

Тогда статистика $F_{\text{набл}} = \dfrac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}} = \dfrac{0{,}0268}{0{,}0140} = 1{,}9094$.

Найдем критическую точку

$$F_{\text{кр}} = F(\alpha, k_1, k_2) = F(\alpha, m-1, n-m) = F(0{,}05; 3; 18) = 3{,}1599.$$

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то гипотеза о влиянии уровня организации производства на производительность труда отвергается. Следовательно, можно считать, что производительность труда рабочих изучаемой профессии на всех четырех заводах одинакова. Если бы в результате статистического анализа было принято противоположное решение, то необходимо исследовать отдельно, какие попарно заводы отличаются по производительности труда. Выяснить причины этого отклонения. Если причины отклонения устранить в сложившихся условиях нельзя, то на разных заводах должны быть использованы различные нормы выработки для рабочих данной профессии.

5.2. Двухфакторный дисперсионный анализ

Предположим, что на результирующий признак Y оказывают влияние два фактора A и B различной природы. Такие задачи характерны как для промышленных и технологических экспериментов, так и для гуманитарных исследований. Логика однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализа во многом схожа и состоит в следующем.

Пусть a_i — математическое ожидание результативного признака Y при уровне $A^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m_A$); b_j — математическое ожидание результативного признака Y при уровне $B^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, m_B$). Если при изменении уровня фактора A групповые математические ожидания не изменяются, т.е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m_A}$, то считаем, что результативный признак не зависит от A, в противном случае такая зависимость имеется. Аналогично, если при изменении уровня фактора B сохраняется равенство $b_1 = b_2 = \ldots = b_{m_B}$, то Y не зависит от фактора B. Но поскольку числовые значения математических ожиданий неизвестны, возникает задача проверки гипотез:

$$H_A\colon\ a_1 = a_2 = \ldots = a_{m_A};$$

$$H_B\colon\ b_1 = b_2 = \ldots = b_{m_B}.$$

Проверять эти гипотезы можно только при соблюдении следующих требований:

1) при различных сочетаниях уровней факторов A и B наблюдения независимы;

2) при каждом сочетании уровней факторов A и B результативный признак Y имеет нормальный закон с постоянной для различных сочетаний генеральной дисперсией.

Основой проведения двухфакторного дисперсионного анализа служит комбинационная группировка по двум факторам с последующим разложение дисперсии результативного признака σ_Y^2 по формуле:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_O^2,$$

где σ_Y^2 — *общая выборочная дисперсия* — показатель вариации наблюдаемых значений результативного признака Y, вызванной влиянием фактора A, фактора B и остаточных факторов;

σ_A^2 — *дисперсия групповых средних по фактору A* — показатель вариации наблюдаемых значений результативного признака Y, вызванной влиянием фактора A;

σ_B^2 — *дисперсия групповых средних по фактору B* — показатель вариации наблюдаемых значений результативного признака Y, вызванной влиянием фактора B;

σ_O^2 — *средняя групповых дисперсий* — показатель вариации наблюдаемых значений результативного признака Y, вызванной влиянием остаточных факторов.

На основе данного разложения для генеральной дисперсии находят четыре несмещенные оценки: S_O^2, S_A^2, S_B^2, S_Y^2.

Проверка гипотезы H_A основывается на сравнении дисперсий S_A^2 и S_O^2 по критерию Фишера: $F_{\text{набл}}^A = \dfrac{S_A^2}{S_O^2}$, строится правосторонняя критическая область. Аналогичным образом рассчитывается величина $F_{\text{набл}}^B = \dfrac{S_B^2}{S_O^2}$.

Двухфакторный дисперсионный анализ может иметь две разновидности: без повторений и с повторениями. В первом случае каждому уровню факторов соответствует только одна выборка данных, во втором — определенным уровням факторов может соответствовать более одной выборки данных.

Рассмотрим двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями.

Предположим, что на результирующий признак Y оказывают влияние два фактора A и B различной природы, каждый из которых может иметь несколько уровней. Все имеющиеся данные представим в виде табл. 5.9, в которой по строкам — уровни A_i фактора A, по столбцам — уровни B_j фактора

B, а в соответствующих клетках, или ячейках, таблицы находятся значения показателя качества x_{ijk} ($i = 1, 2,\ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, l$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

Таблица 5.9

A/B	B_1	B_2	…	B_l
A_1	$x_{111}, x_{112},\ldots, x_{11k}$	$x_{121}, x_{122},\ldots, x_{12k}$	…	$x_{1l1}, x_{1l2},\ldots, x_{1lk}$
A_2	$x_{211}, x_{212},\ldots, x_{21k}$	$x_{221}, x_{222},\ldots, x_{22k}$		$x_{2l1}, x_{2l2},\ldots, x_{2lk}$
…	…	…	…	…
A_m	$x_{m11}, x_{m12},\ldots, x_{m1k}$	$x_{m21}, x_{m22},\ldots, x_{m2k}$	…	$x_{ml1}, x_{ml2},\ldots, x_{mlk}$

Для вычисления дисперсий находят групповые средние по формулам:

1. в ячейке — $\bar{x}_{ij*} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ijk}$;
2. по строке — $\bar{x}_{i**} = \dfrac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{l} \bar{x}_{ij*}$;
3. по столбцу — $\bar{x}_{*j*} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij*}$;
4. общая средняя — $\bar{x} = \dfrac{1}{ml}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{l} \bar{x}_{ij*}$.

Таблица дисперсионного анализа примет вид (табл. 5.10).

Таблица 5.10

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсии
Межгрупповая (фактор A)	$Q_1 = l \cdot n\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\bar{x}_{i**} - \bar{x}\right)^2$	$m-1$	$S_A^2 = \dfrac{Q_1}{m-1}$
Межгрупповая (фактор B)	$Q_2 = m \cdot n\sum\limits_{j=1}^{l}\left(\bar{x}_{*j*} - \bar{x}\right)^2$	$l-1$	$S_B^2 = \dfrac{Q_2}{l-1}$
Взаимодействие	$Q_3 = n\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{l}\left(\bar{x}_{ij*} - \bar{x}_{i**} - \bar{x}_{*j*} + \bar{x}\right)^2$	$(m-1)(l-1)$	$S_{AB}^2 = \dfrac{Q_3}{(m-1)(l-1)}$
Остаточная	$Q_4 = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{l}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij*}\right)^2$	$mln - ml$	$S_{\text{ост}}^2 = \dfrac{Q_4}{nml - ml}$
Общая	$Q = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{l}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_{ijk} - \bar{x}\right)^2$	$mln-1$	—

Проверка нулевых гипотез H_A, H_B, H_{AB} об отсутствии влияния на рассматриваемую случайную величину факторов A, B и их взаимодействия AB осуществляется сравнением отношений

$$\frac{S_A^2}{S_{\text{ост}}^2},\ \frac{S_B^2}{S_{\text{ост}}^2},\ \frac{S_{AB}^2}{S_{\text{ост}}^2}$$

с соответствующими табличными значениями F–критерия Фишера.

Если $\dfrac{S_A^2}{S_{\text{ост}}^2} > F_{\text{кр}}\left(\alpha,\, m-1,\, ml(n-1)\right)$, то H_A отвергается.

Если $\dfrac{S_B^2}{S_{\text{ост}}^2} > F_{\text{кр}}\left(\alpha,\, l-1,\, ml(n-1)\right)$, то H_B отвергается.

Если $\dfrac{S_{AB}^2}{S_{\text{ост}}^2} > F_{\text{кр}}\left(\alpha,\, (m-1)(l-1),\, ml(n-1)\right)$, то H_{AB} отвергается.

Замечание. Если n = 1, т.е. при одном наблюдении в ячейке, выпадает компонента Q_3 из общей суммы квадратов отклонений, а с ней и дисперсия S_{AB}^2, т.е. не может быть речи о взаимодействии факторов. В этом случае число степеней свободы для остаточной дисперсии вычисляется как разность между числом степеней свободы, соответствующему общей дисперсии, и суммы числа степеней свободы, соответствующим дисперсиям факторов A и B: $mln - 1 - (m - 1) - (l - 1)$.

С помощью гипотез в дисперсионном анализе можно получить очень полезные выводы. Например, убедившись в отсутствии взаимодействия, можно говорить об адитивности влияния факторов, а в такой ситуации на основе сравнения главных эффектов какого-то признака уже можно определенно судить о том, какое из его значений наиболее предпочтительно.

В случае частичного заполнения клеток таблицы возможны неполные разновидности дисперсионного анализа.

Пример 3. В табл. 5.11 приведены суточные привесы (г) отобранных для исследования 18 поросят в зависимости от метода их содержания (фактор А) и качества их кормления (фактор B). Необходимо оценить достоверность влияния каждого фактора и их взаимодействия на суточный привес поросят.

Таблица 5.11

Количество голов в группе (фактор A)	Содержание протеина в корме, г (фактор В)	
	B_1 = 80	B_2 = 100
A_1 = 30	530, 540, 550	600, 620, 580
A_2 = 100	490, 510, 520	550, 540, 560
A_1 = 300	430, 420, 450	470, 460, 430

Имеем m = 3, l = 2, n = 3. Определим средние значения привеса (в г) и поместим их в табл. 5.12.

Таблица 5.12

В ячейке		По строке
$\bar{x}_{11*} = \dfrac{530+540+550}{3} = 540$	$\bar{x}_{12*} = 600$	$\bar{x}_{1**} = \dfrac{540+600}{2} = 570$
$\bar{x}_{21*} = 506{,}7$	$\bar{x}_{22*} = 550$	$\bar{x}_{2**} = 528{,}4$
$\bar{x}_{31*} = 433{,}3$	$\bar{x}_{32*} = 453{,}3$	$\bar{x}_{3**} = 443{,}3$
По столбцу		Общая

$\bar{x}_{*1*} = \dfrac{540+506{,}7+433{,}3}{3} =$ $= 493{,}3$	$\bar{x}_{*2*} = 534{,}4$	$\bar{x} = \dfrac{493{,}3+534{,}4}{2} = 513{,}9$

Из табл. 5.12 следует, что с увеличением количества голов в группе средний суточный привес поросят в среднем уменьшается, а при увеличении содержания протеина в корме — в среднем увеличивается. Необходимо убедится, является ли эта тенденция достоверной или это объясняется случайными факторами. Вычислим необходимые суммы квадратов отклонений и дисперсии. Все результаты вычислений сведем в табл. 5.13.

Таблица 5.13

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсии
Межгрупповая (фактор *A*)	$Q_1 = 2\cdot 3((570-513{,}9)^2 + (528{,}4-513{,}9)^2 + (443{,}3-513{,}9)^2) = 50011{,}1$	2	$S_A^2 = 25005{,}5$
Межгрупповая (фактор *B*)	$Q_2 = 3\cdot 3((493{,}3-513{,}9)^2 + (534{,}4-513{,}9)^2) = 7605{,}6$	1	$S_B^2 = 7605{,}6$
Взаимодействие	$Q_3 = 3((540-570-493{,}3+513{,}9)^2 + \ldots + (453{,}3-443{,}3-534{,}4+513{,}9)^2) = 1211{,}1$	2	$S_{AB}^2 = 605{,}6$
Остаточная	$Q_4 = 3000$	12	$S_{\text{ост}}^2 = 250$
Общая	$Q = 61827{,}8$	17	—

$Q_4 = (530–540)^2 + \ldots+(550–540)^2 + (600–600)^2+\ldots+(580–600)^2 +\ldots+$
$+(470–453{,}3)^2+\ldots+(430–453{,}3)^2 = 3000;$
$Q = (530–513{,}9)^2 + (540–513{,}9)^2 + \ldots+ (430–513{,}9)^2 = 61827{,}8.$

Для проверки существенности влияния факторов *A*, *B* и их взаимодействия *AB* найдем соотношения:

$$F_A = \frac{S_A^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{25005{,}5}{250} = 100\,; \quad F_B = \frac{S_B^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{7605{,}6}{250} = 30{,}4\,;$$

$$F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{605{,}6}{250} = 2{,}42\,.$$

Определим для каждого случая критические точки, используя либо таблицы, либо в Excel функцию FРАСПОБР:

$$F_{\text{Акр}} = F(0{,}05;\,2;\,12) = 3{,}88\,; \quad F_{\text{Вкр}} = F(0{,}05;\,1;\,12) = 4{,}75\,;$$

$$F_{\text{АВкр}} = F(0{,}05;\,2;\,12) = 3{,}88\,.$$

Так как $F_A > F_{\text{Акр}}$ и $F_B > F_{\text{Вкр}}$, то влияние метода содержания поросят и качества их кормления является существенным. В силу того $F_{AB} < F_{\text{АВкр}}$ взаимодействие указанных факторов незначимо на 5% уровне.

Пример 4. Выборочные данные о разрывной нагрузке пряжи, изготовленной на разных станках и из отличающегося некоторым образом друг от друга сырья. Требуется, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, выяснить влияют ли на качество пряжи, измеряемое величиной разрывной нагрузки, тип станка и вид сырья, из которого производится пряжа. Исходные данные приведены в табл. 5.14.

Таблица 5.14

Тип станка	Вид сырья	
	Шелк натуральный	Шелк искусственный
1	10	50
2	20	60
3	30	100

В нашем случае имеем двухфакторную дисперсионную модель без повторений, имеем $m = 3$, $l = 2$, $n = 1$. Определим средние значения по строкам и столбцам и поместим их в табл. 5.15. , и составим табл. 5.16.

Таблица 5.15

Средние значения			По строке
1	10	50	30
2	20	60	40
3	30	100	65
По столбцу	20	70	$\bar{x} = 45$

Таблица 5.16

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсии
Межгрупповая (фактор A)	$Q_1 = 2 \cdot ((30-45)^2 + (40-45)^2 + (65-45)^2) = 1300$	2	$S_A^2 = 650$
Межгрупповая (фактор B)	$Q_2 = 3 \cdot ((20-45)^2 + (70-45)^2) = 3750$	1	$S_B^2 = 3750$
Остаточная	$Q_4 = 5350 - 1300 - 3750 = 300$	2	$S_O^2 = 150$
Общая	$Q = (10-45)^2 + (20-45)^2 + \ldots + (100-45)^2 = 5350$	5	—

$$F_A = \frac{S_A^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{650}{150} = 4{,}33\,;\; F_B = \frac{S_B^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{3750}{150} = 25\,;$$

Определим для каждого случая критические точки:

$$F_{\text{Акр}} = F(0{,}05;\,2;\,2) = 19\,;\; F_{\text{Вкр}} = F(0{,}05;\,1;\,2) = 18{,}51\,;$$

Так как F_A не попадает в критическую область, то принимаем гипотезу H_A, т.е. влияние типа станков на качество пряжи не подтвердилось. Расчетное значение F_B попадает в критическую область, то гипотезу H_B отвергаем, т.е. считаем, что вид сырья влияет на качество пряжи.

6. Список литературы

1. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования.- М.: Книжный дом «Либроком», 2010. – 280 с.
2. Коробко В.И. Лекции по курсу «Основы научных исследований»: учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов / В.И. Коробко.- М: Изд-во АСВ стран СНГ, 2000. – 218 с.
3. Акулич М.В. Статистика в таблицах, формулах и схемах.- СПб.: Питер, 2009. – 129 с.
4. ГОСТ 8.207-79 «Порядок обработки результатов наблюдений при многократных измерениях».
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2001 — 478 с.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002 — 543 с.
7. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel: Учеб. Пособие.– М.: Финансы и статистика, 2006 — 368 с.
8. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:, Высш. шк., 2000 — 276 с.
9. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций. М.: Дашков и К^0, 2007 — 400 с.