

М М
С С

В. Г. Вильке

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

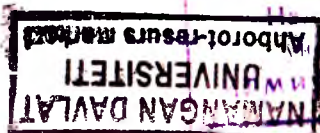
5

В.Г. ВИЛЬКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

2-е издание, переработанное
и дополненное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям «Математика», «Механика», «Прикладная математика и информатика», «Механика, прикладная математика», специальностям «Математика», «Механика», «Прикладная математика»



Издательство
Московского университета
1998

УДК 531 (6)+532.5+539.3

ББК 22.21

В46

Рецензенты:

кафедра теоретической механики МЭИ,
профессор В.Г. Демин

Вильке В.Г.

В46 Теоретическая механика: Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 272 с.

ISBN 5-211-03785-5

В учебнике удачно соединены классическая механика и механика сплошных сред, изложение которых ведется на базе современного математического аппарата, позволяющего в рамках единой аксиоматики описать системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Книгу отличают математическая строгость, краткость и единый подход к различным моделям классической механики и механики сплошных сред. Значительное место отводится лагранжевой и гамильтоновой механике, вариационным принципам, играющим основную роль при построении динамических моделей деформируемого твердого тела, жидкости и газа. В книге реализован ряд новых методических идей.

Для студентов механико-математических специальностей университетов, а также лиц, желающих изучить основные модели классической механики и механики сплошных сред.

ББК 22.21

ISBN 5-211-03785-5

© Вильке В.Г., 1998 г.

Сокращения и обозначения.....	7
Предисловие	8
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ	10
§ 1.1. Механические модели окружающего мира. Методология механики и ее влияние на научно-технический прогресс	10
§ 1.2. Основные этапы становления механики как точной науки. Роль отечественных ученых в развитии механики	12
Глава 2. КИНЕМАТИКА	14
§ 2.1. Траектория, закон движения, скорость и ускорение точки. Разложение скорости и ускорения по осям естественного трехгранника	15
§ 2.2. Криволинейные координаты. Скорость и ускорение точки в криволинейных координатах	16
§ 2.3. Сложное движение материальной точки. Лемма о производной ортогонального оператора. Теорема сложения скоростей	19
§ 2.4. Распределение скоростей при произвольном движении твердого тела. Угловая скорость твердого тела. Простейшие движения твердого тела: поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси	22
§ 2.5. Классификация мгновенных движений твердого тела. Уравнение винтовой оси	24
§ 2.6. Непрерывное движение твердого тела. Аксиоды	25
§ 2.7. Частные случаи движения тела: плоскопараллельное движение и вращение вокруг неподвижной точки	26
§ 2.8. Сложное движение твердого тела. Пара вращений	29
§ 2.9. Теорема сложения вращений. Углы Эйлера. Кинематические формулы Эйлера	31
§ 2.10. Ускорения точек твердого тела. Теорема сложения ускорений для материальной точки	33
Глава 3. ДИНАМИКА ТОЧКИ	36
§ 3.1. Основные определения и законы динамики	36
§ 3.2. Уравнения движения материальной точки в декартовой и криволинейной системах координат, в проекциях на оси естественного трехгранника	40
§ 3.3. Теоремы о количестве движения и о моменте количества движения. Первые интегралы	41
§ 3.4. Работа силы. Потенциальные силовые поля. Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения энергии	43
§ 3.5. Движение точки по прямой в сопротивляющейся среде. Метод фазовой плоскости	47
§ 3.6. Движение материальной точки в центральном поле сил. Формулы Бине	52
§ 3.7. Движение планет. Вывод закона всемирного тяготения из законов Кеплера	53

§ 3.8.	Движение планеты в центральном ньютоновском поле сил. Уравнение Кеплера. Связь между истинной и эксцентрической аномалиями	55
§ 3.9.	Движение несвободной материальной точки. Голономные связи. Конфигурационное пространство. Принцип освобожденности от связей	59
§ 3.10.	Уравнения движения точки по поверхности и по кривой. Аксиома идеальных связей. Уравнения Лагранжа первого рода с неопределенными множителями	61
§ 3.11.	Уравнения движения точки по поверхности и по кривой в независимых координатах. Определение реакций связей.....	62
§ 3.12.	Теорема об изменении кинетической энергии при движении несвободной материальной точки. Закон сохранения энергии. Движение по инерции	63
§ 3.13.	Математический маятник.....	64
§ 3.14.	Уравнения движения точки в неинерциальной системе координат. Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения энергии	68
§ 3.15.	Движение точки относительно Земли: относительное равновесие, падение точки в пустоте.....	71
§ 3.16.	Маятник Фуко.....	74
Глава 4.	ДИНАМИКА СИСТЕМЫ N ТОЧЕК	77
§ 4.1.	Система свободных материальных точек и уравнения ее движения. Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс	77
§ 4.2.	Момент количества движения относительно неподвижной точки и центра масс. Теоремы об их изменениях.....	80
§ 4.3.	Кинетическая энергия системы в абсолютном движении и в движении относительно центра масс. Теоремы об их изменении	83
§ 4.4.	Задача двух тел. Уточнение третьего закона Кеплера.....	85
§ 4.5.	Задача N тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Лемма Лагранжа—Якоби. Необходимое условие ограниченности взаимных расстояний	87
§ 4.6.	Движение системы несвободных N точек. Голономные связи. Конфигурационное многообразие системы. Возможные перемещения	89
§ 4.7.	Идеальные связи. Уравнения Лагранжа первого рода. Вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа.....	91
§ 4.8.	Вывод общих теорем динамики из принципа Д'Аламбера—Лагранжа	92
§ 4.9.	Уравнения Лагранжа второго рода	95
§ 4.10.	Первые интегралы уравнений Лагранжа второго рода. Теорема Нетер	99
§ 4.11.	Определение реакций связей с помощью уравнений Лагранжа второго рода	103
§ 4.12.	Равновесие системы материальных точек. Принцип возможных перемещений. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия	105
Глава 5.	ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	111
§ 5.1.	Движение свободного твердого тела. Поле реакций связей. Принцип Д'Аламбера—Лагранжа. Уравнения движения.....	111

§ 5.2.	Тензор инерции, моменты инерции, эллипсоид инерции твердого тела	115
§ 5.3.	Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера. Случай однородного силового поля	119
§ 5.4.	Случай Эйлера: вращение твердого тела вокруг центра масс ...	121
§ 5.5.	Геометрическая интерпретация Пуансо движения твердого тела с одной неподвижной точкой по инерции. Устойчивость стационарных вращений. Регулярная прецессия	125
§ 5.6.	Случай Лагранжа движения симметричного твердого тела	127
§ 5.7.	Вырожденные случаи движения тяжелого симметричного тела: регулярная прецессия. Вращение вокруг вертикали, асимптотические движения	131
§ 5.8.	Приближенное исследование движения тела в случае Лагранжа, псевдорегулярная прецессия	133
§ 5.9.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Определенные реакции	134
§ 5.10.	Физический маятник. Теорема Гюйгенса	137
Глава 6.	ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	140
§ 6.1.	Канонические уравнения Гамильтона. Первые интегралы	140
§ 6.2.	Вариационный принцип Гамильтона—Остроградского в конфигурационном и фазовом пространствах	144
§ 6.3.	Принцип наименьшего действия Лагранжа	147
§ 6.4.	Принцип наименьшего действия в форме Якоби. Уравнения Якоби	149
§ 6.5.	Оптико-механическая аналогия	151
§ 6.6.	Интегральный инвариант Пуанкаре—Картана. Условие гамильтоновости фазового потока	153
§ 6.7.	Понижение порядка канонических уравнений с помощью интеграла энергии. Уравнения Уиттекера	157
§ 6.8.	Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема	159
§ 6.9.	Теорема Пуанкаре о возвращении	161
§ 6.10.	Канонические преобразования. Производящая функция канонического преобразования	163
§ 6.11.	Критерий каноничности преобразования. Бесконечно малые канонические преобразования	166
§ 6.12.	Функция действия и ее свойства	168
§ 6.13.	Уравнение Гамильтона—Якоби. Теорема Якоби	170
§ 6.14.	Отыскание полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби методом разделения переменных	171
§ 6.15.	Скобки Пуассона и их свойства. Теорема Пуассона	176
§ 6.16.	Теорема Лиувилля о вполне интегрируемых гамильтоновых системах	178
§ 6.17.	Переменные действие—угол	181
§ 6.18.	Метод вариации произвольных постоянных в теории возмущений	185
§ 6.19.	Уравнения возмущенного движения в переменных действие—угол и метод усреднения. Эволюция переменной действие в задаче Ван дер Поля	186
§ 6.20.	Принцип наименьшего принуждения Гаусса. Уравнения движения голономных систем в форме Аппеля	190

§ 6.21. Неголономные связи. Уравнения Рауса с неопределенными множителями	193
§ 6.22. Уравнения Аппеля для неголономных систем. Задача о движении конька	196
Глава 7. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ	201
§ 7.1. Малые колебания системы около положения равновесия. Нормальные координаты. Свойства собственных частот	201
§ 7.2. Поведение собственных частот при изменении жесткостных или инерционных характеристик	206
§ 7.3. Поведение собственных частот при наложении связи	208
§ 7.4. Вынужденные колебания системы около положения равновесия	210
§ 7.5. Влияние диссипативных сил на малые колебания и устойчивость положения равновесия	211
Глава 8. ТЕОРИЯ УДАРА	213
§ 8.1. Ударный импульс. Основные уравнения и теоремы теории удара	213
§ 8.2. Удар в системе с идеальными голономными связями	216
§ 8.3. Удар твердого тела о поверхность	218
§ 8.4. Удар двух тел. Теорема Карно	221
§ 8.5. Удар при наложении идеальных голономных связей	223
§ 8.6. Удар по телу, вращающемуся вокруг оси. Центр удара	226
Глава 9. ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	228
§ 9.1. Модель упругого тела. Деформированное состояние упругого тела	228
§ 9.2. Малые деформации. Функционал потенциальной энергии малых деформаций	231
§ 9.3. Уравнения движения упругого тела. Тензор напряжений	233
§ 9.4. Продольные колебания упругого стержня	237
§ 9.5. Колебания струны и балки	240
§ 9.6. Собственные колебания упругих тел	244
§ 9.7. Волны в упругой среде	247
Глава 10. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА	249
§ 10.1. Вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа в задаче о движении идеальной несжимаемой жидкости. Поле реакций связей. Уравнение Эйлера	249
§ 10.2. Уравнения движения идеальной баротропной сжимаемой жидкости или газа	253
§ 10.3. Интегралы Бернулли, Коши и Бернулли—Эйлера	257
§ 10.4. Вихревые движения идеальной баротропной жидкости. Теорема Томсона и ее следствия	260
§ 10.5. Вихревые линии и трубки. Теоремы Гельмгольца	263
§ 10.6. Диссипация энергии при движении жидкости. Уравнение Навье—Стокса	265
Литература	271

О. — определение

С. — следствие

Т. — теорема

Л. — лемма

З. — замечание

П. — пример

▲ ▼ — начало и конец доказательства

R^n — n -мерное пространство

E^n — n -мерное евклидово пространство с евклидовой нормой и скалярным произведением

$a \Rightarrow b$ — из a следует b

$a \Leftrightarrow b$ — утверждение a и b эквивалентны

g^1 — однопараметрическая группа отображений

$\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{q}$ — векторы в R^n

$\mathbf{a}\mathbf{b}$ или (\mathbf{a}, \mathbf{b}) — скалярное произведение в E^n

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \nabla_r f$ — градиент функции, вектор в E^3 , если $\mathbf{r} \in E^3$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — векторное произведение в E^3

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}$ — оператор, действующий из R^n в E^3 , если $\mathbf{r} \in E^3, \mathbf{q} \in R^n$

${}^2_{qq}U(\mathbf{q})$ — оператор, задаваемый матрицей вторых производных и действующий из R^n в R^n

$\det \frac{\partial^2 S(\mathbf{q}, \alpha)}{\partial \mathbf{q} \partial \alpha}$ — матрица вторых производных

$\|a_{ij}\|, \det \|a_{ij}\|$ — матрица с элементами a_{ij} и ее определитель

$\nabla E[u]$ — градиент функционала $E[u]$, элемент сопряженного функционального пространства

(u, v) — скалярное произведение в гильбертовом пространстве, или скобка Пуассона двух функций

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник написан на основе лекций, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ для студентов специальности «Математика». Предлагаемый курс теоретической механики включает как механику систем с конечным числом степеней свободы, так и механику сплошных сред. Изложение материала строится на единой методической основе — вариационных принципах, из которых получаются уравнения движения и динамические граничные условия. Предполагается, что читатель знаком с математическими дисциплинами, соответствующими первым трем курсам специальностей «математика» или «прикладная математика». В настоящий курс вошли наиболее принципиальные, узловые вопросы, возникающие при построении моделей механических систем, и методы их исследования. При изложении материала автор стремился к краткости путем использования векторной и операторной форм записи соотношений.

Автор ставил перед собой задачу — познакомить профессионала-математика с идеями и методами классической механики, показать взаимосвязь математики и механики. Наиболее сложная задача, по мнению автора, — научить построению новых механических моделей, достаточно точно и просто описывающих механические явления. Решение этой задачи — цель университетского образования по специальности механика, достижение которой требует углубленного изучения механики и ряда физических дисциплин.

Вдумчивый читатель может заметить, что многие задачи, стоящие перед современной математикой, имеют непосредственное отношение к механическим моделям, поскольку в механике используются такие математические модели, как, например, конечные и бесконечномерные дифференцируемые многообразия, теория обобщенных решений дифференциальных уравнений в частных производных, теория групп, вариационное исчисление в целом, теория случайных процессов и так далее. Автор видит одну из своих

задач в том, чтобы помочь профессионалу-математику найти приложения и задачи в механике, соответствующие его математической специальности, облегчить чтение литературы по механике. В книге совершенно не затронуты вычислительные аспекты задач теоретической механики, которые составляют отдельный курс вычислительных методов.

Двойная нумерация формул в каждом параграфе сохраняется при ссылках внутри соответствующей главы. При ссылках на формулы из другой главы добавляется впереди еще одна цифра. Определения имеют двойную индексацию: параграф, порядковый номер в параграфе. Теоремы, леммы, следствия и примеры нумеруются при необходимости внутри параграфов одной цифрой. Для понимания текста рекомендуется ознакомиться со списком сокращений и обозначений.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам В.Г. Демину и В.А. Сарычеву, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний, способствовавших ее улучшению, а также доценту Н.П. Степаненко за помощь в оформлении рукописи. Автор надеется, что книга окажется полезной студентам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в областях теоретической и прикладной математики, собственно механикам, а также инженерам, желающим углубленно изучить современные методы теоретической механики.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА. МЕТОДОЛОГИЯ МЕХАНИКИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

Формирование человеческой цивилизации и ее развитие началось в ту эпоху, когда «человек разумный» (*homo sapiens*) обрел способность обобщать наблюдаемые факты, абстрагироваться от их непосредственной реализации и полученный опыт использовать в своей последующей деятельности. На начальном этапе развития существовало опытное понимание законов природы: брошенный камень или палка падают на Землю, дерево плавает в воде, а камень тонет, удар каменного топора разрушает ствол дерева и так далее. Человек понимал все это и умело пользовался в своей непростой жизни. В дальнейшем при переходе к более сложным видам деятельности (строительство морских парусных судов, каналов, зданий, пирамид) потребовалось первоначальное осмысление всего замысла, проектирование и расчет будущей конструкции. Это неотвратимо привело к созданию моделей окружающего мира, на основе которых можно было реализовать соответствующие замыслы. Возникла потребность в измерениях, счете, методах построения геометрических фигур, определении площадей и объемов. Человек столкнулся с необходимостью перемещать тяжелые предметы на значительные расстояния, разрушать горные породы и, наоборот, создавать необходимые по форме элементы строительных конструкций. Мореплавание и военное дело поставили на повестку дня вопросы навигации, измерения времени, баллистики пушечных ядер, вопросы управления парусным кораблем и т.д. Так зародились две древнейшие фундаментальные естественные науки — математика и механика. Их эволюция была длительной и порой противоречивой, но всегда запросы одной приводили к развитию другой, к взаимному обогащению.

Рабочий инструмент механики — модель, пригодная для описания определенного класса природных явлений. В механике изучается движение окружающего нас мира, изменение взаимного

расположения макроскопических материальных тел. Модель классической механики включает в качестве составляющих различные математические модели: евклидово пространство, множества, многообразия, дифференциальные уравнения и многое другое. Кроме того, формулируются механические законы взаимодействия введенных объектов, в результате чего возникает динамическая модель механической системы, позволяющая рассчитать ее движение. Встает законный вопрос: какое все это имеет отношение к окружающему нас миру? Этот вопрос решается на основе эксперимента: если поведение реального тела совпадает с достаточной степенью точности с поведением, предсказанным механической моделью, то мы должны констатировать, что созданная модель «правильно», точнее удовлетворительно, описывает окружающий нас мир. Другими словами, мы правильно определили те характерные свойства окружающих нас объектов и законы их поведения. Однако следует отдавать себе отчет в том, что созданная модель всегда является приближенной и невозможно доказать «теорему единственности», т.е. утверждение, что данная модель абсолютна, и невозможно другое приближенное описание явлений на основе другой модели. История физики и механики, в частности, подтверждает справедливость этого утверждения. Предпочтение следует отдавать наиболее простым моделям, кратчайшим путем приводящим к необходимому результату. Следует также всегда иметь в виду, что всякая модель имеет ограниченную область своего применения. Если говорить о классической механике, то она не описывает с нужной степенью точности движение материальных объектов со скоростями, близкими к скорости света, и объектов микромира. Здесь используются другие модели: теория относительности и квантовая механика.

Хотя в последнее время и возникли области современной техники, где требуется применение моделей, отличных от моделей классической механики, последняя не утратила своего значения как фундаментальная наука, являющаяся базой и основой прогресса современной техники. Речь идет о таких ее отраслях, как машиностроение, авиация, транспорт, космонавтика. Классическая механика не утратила своей роли и в формировании мировоззрения на проблемы возникновения и развития Вселенной. Законы механики прекрасно служат для описания природных процессов на Земле и других планетах Солнечной системы, для расчетов межпланетных космических полетов. Во всей этой обширной области явлений нет необходимости привлекать более сложные модели, так как вносимые ими поправки лежат в пределах требуемой точности.

В современном естествознании с успехом используются механические модели при описании соответствующих явлений. Это относится к ряду разделов физики, химии, биологии, геологии и географии.

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СТАНОВЛЕНИЯ МЕХАНИКИ КАК ТОЧНОЙ НАУКИ. РОЛЬ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ УЧЕНЫХ В РАЗВИТИИ МЕХАНИКИ

Отметим основные вехи развития механики. Длительный период ее развития характеризовался накоплением экспериментальных фактов, их обобщением, формированием простых законов статики. Переломным моментом следует считать 1687 г., когда появился знаменитый трактат И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», где были сформулированы основные законы механики, предложена динамическая модель движения тел. Появлению этого трактата предшествовали труды великих ученых, математиков и механиков, таких как И. Кеплер, Т. Браге, Г. Галилей, Р. Декарт, Х. Гюйгенс. Каждый из них внес свою крупицу знаний в общечеловеческую копилку. На фундаменте, заложенном И. Ньютоном, быстро начало строиться здание механики: в XVIII в. оформляется ряд научных центров в Англии, Франции, Италии, Германии и России. Значительный вклад в развитие механики в XVIII в. внесли Д. Бернуллы, И. Бернуллы, Л. Эйлер, П. Лаплас, Ж. Д'Аламбер. Девятнадцатый век охарактеризовался созданием Ж. Лагранжем аналитической механики. В это время происходит формирование таких разделов механики, как теория упругости, аэро- и гидромеханика. В аналитической механике осуществляется переход к гамильтоновой механике, углубляются и развиваются методы небесной механики. Ярчайший след в механике оставили труды В. Гамильтона, Г. Кирхгофа, С.В. Ковалевской, А.М. Ляпунова, М.В. Остроградского, А. Пуанкаре, Л. Пуансо, С. Пуассона, В. Томсона (Кельвина), П.Л. Чебышева, К. Якоби. Двадцатый век начался с создания А. Пуанкаре и А. Эйнштейном теории относительности. Однако очень скоро выяснилось, что ньютонова модель по-прежнему прекрасно описывает подавляющее большинство наблюдаемых движений, а разработанные математические методы с успехом могут быть применены в новых научных направлениях. Вместе с открытием теории относительности XX в. привел к революционному взрыву в развитии техники (авиастроение, воздухоплавание, кораблестроение, ракетостроение, робототехника и т.д.). Все эти новые направления потребовали создания новых механических теорий, описывающих

поведение современных материалов в сложных физических условиях. Современная механика, базирующаяся на новейших моделях математики, таких, как вариационное исчисление в целом, дифференциальная геометрия конечных и бесконечномерных многообразий, теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, представляет разветвленную область человеческих знаний о природе, охватить которую во всей ее глубине не представляется возможным одному человеку. Во второй половине двадцатого века механики получили новое мощное средство исследований — быстродействующие вычислительные машины, что привело к созданию специальных методов моделирования и исследования природных процессов, базирующихся на численном эксперименте.

Широк и многообразен вклад отечественных ученых в развитие механики — Л. Эйлера, М.В. Остроградского, С.В. Ковалевской, П.Л. Чебышева, Н.Е. Жуковского, А.М. Ляпунова, И.В. Мещерского, К.Э. Циолковского, А.Н. Крылова, Б.Н. Галеркина, С.П. Тимошенко, С.П. Королева, М.В. Келдыша.

В основе модели классической механики лежат представления о пространстве, времени и материи. Пространство и время суть формы существования материи.

1. Физическое пространство, заполненное материей, в классической механике моделируется однородным изотропным трехмерным евклидовым пространством E^3 . Однородность и изотропность пространства означают, что при выборе в нем системы координат все реперы равноправны независимо от их начала и ориентации.

2. Абсолютное время как характеристика длительности процессов одинаково во всех точках пространства и не зависит от каких-либо характеристик материи.

3. Материальная система характеризуется тремя объектами $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$, где Ω — множество в E^3 , $\Sigma(\Omega)$ — кольцо подмножеств множества Ω , μ — мера, отображающая кольцо $\Sigma(\Omega)$ в R^+ . Мера $\mu(A)$, где $A \in \Sigma(\Omega)$, определяет свойство инерционности материи и называется массой вещества, заключенного во множестве A .

4. Движение материальной системы есть непрерывная группа отображений Ω в E^3 , обозначаемая $g^t: \Omega \rightarrow E^3$, $t \in R^1$ и задаваемая в какой-либо системе координат функциями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r} \in E^3$, $\mathbf{r}_0 \in \Omega$, $t \in R^1$. Параметр t называется временем, а само понятие движения связывает две формы существования материи — пространство и время.

В классической механике изучаются механические системы, состоящие из конечной совокупности точек и твердых тел.

О.1. Материальной точкой называется геометрическая точка M , которой приписана масса $m \geq 0$. В этом случае $\Omega = M$, $\Sigma(\Omega) = \{\emptyset, M\}$, $\mu(M) = m$, $\mu(\emptyset) = 0$.

О.2. Твердым телом называется механическая система $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$, при движении которой не меняются расстояния между любыми ее точками, т.е. $|\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0^{(1)}) - \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0^{(2)})| = |\mathbf{r}_0^{(1)} - \mathbf{r}_0^{(2)}|$, $\forall \mathbf{r}_0^{(1)}, \mathbf{r}_0^{(2)} \in \Omega$, $t \in R^1$.

В кинематике изучаются характеристики движения как данного без объяснения причин, его вызывающих.

§ 2.1. ТРАЕКТОРИЯ, ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ. РАЗЛОЖЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ПО ОСЯМ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — декартова система координат в трехмерном евклидовом пространстве E^3 . Положение точки M относительно репера $Ox_1x_2x_3$ определяется в каждый момент времени радиусом-вектором \mathbf{r} с координатами (x_1, x_2, x_3) .

О.1.1. Отображение временной оси R^1 в евклидово пространство E^3 называется законом движения точки и задается в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r} \in E^3$, $t \in R^1$.

О.1.2. Траекторией движения точки называется множество точек L , через которые проходит точка в процессе движения.

Отметим два способа задания траектории — параметрический и функциональный. В первом случае $L = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u), u \in I \subset R^1\}$, где I — интервал в R^1 (I может совпадать со всей осью R^1). Во втором случае $L = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3, f_1(\mathbf{r}) = 0, f_2(\mathbf{r}) = 0\}$, где f_1, f_2 — дифференцируемые функции, градиенты которых линейно независимы в точках, принадлежащих L . Второй способ задания траектории годится только для случая, когда траектории — гладкие кривые.

Закон движения точки, когда известна ее траектория, может быть определен путем задания отображения $u = u(t)$, $u \in I$, $t \in R^1$, где параметр t играет роль времени.

О.1.3. Скоростью материальной точки называется вектор

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

В механике принято обозначать дифференцирование по времени точкой, т.е. $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$. В декартовой системе координат $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$.

О.1.4. Ускорением материальной точки называется вектор

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

с проекциями в декартовой системе координат $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)$.

П. Пусть вектор $\mathbf{r}(t)$ задан своими проекциями $x_1 = R \cos t$, $x_2 = R \sin t$, $x_3 = 1/2 at^2$, $t \geq 0$. Траектория точки есть винтовая линия на цилиндре радиусом R с переменным шагом. Скорость $\mathbf{v}(t)$ определяется координатами $\dot{x}_1 = -R \sin t$, $\dot{x}_2 = R \cos t$, $\dot{x}_3 = at$. Конец вектора $\mathbf{v}(t)$ описывает винтовую линию с постоянным шагом, которая называется годографом скорости. Вектор ускорения $\mathbf{w} =$

$= (-R \cos t, -R \sin t, a)$ описывает окружность радиусом R с центром на оси Ox_3 . Справедливо утверждение: ускорение точки равно скорости точки при ее движении по годографу, т.е. $\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$. Если взять другой параметр, например заменить t на t^3 , то закон движения изменится: $x_1 = R \cos t^3$, $x_2 = R \sin t^3$, $x_3 = 1/2at^6$, а траектория останется прежней.

С траекторией движения в каждый момент времени можно связать подвижную ортогональную систему координат $M\tau n b$, начало которой совпадает с точкой M , а осями являются касательная τ , главная нормаль \mathbf{n} и бинормаль $\mathbf{b} = \tau \times \mathbf{n}$. Здесь τ , \mathbf{n} , \mathbf{b} — единичные векторы по осям системы координат $M\tau n b$, называемой трехгранником Френе. Если s — естественный параметр траектории, означающий длину дуги MM_0 , где M_0 — какая-либо точка на кривой, то справедливы формулы Френе

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \quad \mathbf{n} = \rho(s) \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}$$

где $\rho(s)^{-1}$ — кривизна траектории. Зададим закон движения точки в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$, где s — естественный параметр, и представим скорость и ускорение точки в проекциях на оси естественного трехгранника выражениями

$$\mathbf{v} = v(t)\tau, \quad \mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}, \quad v(t) = \dot{s}(t)$$

§ 2.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим взаимно однозначное дифференцируемое отображение двух областей трехмерных пространств

$$\varphi: V \rightarrow U, \quad V \subset R^3, \quad U \subset E^3, \quad \mathbf{r} \in U, \quad \mathbf{q} \in V. \quad (2.1)$$

Отображение φ определяется заданием функций

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}) \Leftrightarrow x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

и будет взаимно однозначным, если якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$$

в области V . Область V вместе со своим дифференцируемым взаимно однозначным отображением на область U называется локальной картой, а набор (q_1, q_2, q_3) — криволинейными координатами в E^3 .

Движение точки в евклидовом пространстве E^3 можно задать с помощью отображений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}^1. \quad (2.3)$$

Тогда скорость точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right\|, \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3). \quad (2.4)$$

Построим в каждой точке области U базис (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , где

$$\xi_i = H_i^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right), \quad H_i = \left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \right)^{1/2},$$

и представим скорость точки в виде разложения по этому базису криволинейной системы координат в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \xi_i. \quad (2.5)$$

Величины H_i называются коэффициентами Ламе. Единичные векторы ξ_i направлены по касательным к координатным кривым, проходящим через рассматриваемую точку. Координатные кривые определяются равенствами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, когда изменяется одна из трех величин, а две другие постоянны. Формула (2.5) есть разложение скорости по базису криволинейной системы координат.

Если $\xi_i \xi_j = 0$ для любого $i \neq j$ в каждой точке области U , то криволинейная система координат называется ортогональной.

Для отыскания ортогональных проекций вектора ускорения на базисные векторы криволинейной системы координат рассмотрим функцию

$$T'(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2,$$

являющуюся квадратичной формой переменных $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. Имеем

$$w_i = \dot{\mathbf{v}} \xi_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.6)$$

Заметим, что из соотношений (2.5) вытекают равенства $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i}$. Представим (2.6) в виде

$$w_i = H_i^{-1} \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} - \mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right]$$

и, используя предыдущие равенства, окончательно найдем

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T'}{\partial q_i} \right]. \quad (2.7)$$

Величины w_i суть ортогональные проекции вектора ускорения на орты ξ_i криволинейной системы координат. Если криволинейная система координат ортогональна, то справедливо представление

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \xi_i.$$

П.1. Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) определяют положение точки в пространстве E^3 с помощью формул $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $x_3 = z$, $0 < \rho < \infty$, $\varphi \bmod 2\pi$. Далее,

$$H_\rho \xi_\rho = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}, \frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \Rightarrow H_\rho = 1,$$

$$H_\varphi \xi_\varphi = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}, \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}, \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \right) = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) \Rightarrow H_\varphi = \rho,$$

$$H_z \xi_z = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) = (0, 0, 1) \Rightarrow H_z = 1.$$

Тогда $\mathbf{v} = \dot{\rho} \xi_\rho + \rho \dot{\varphi} \xi_\varphi + \dot{z} \xi_z$. Поскольку $T' = 1/2 \mathbf{v}^2 = 1/2(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$, то проекции ускорения на оси цилиндрической системы координат равны

$$w_\rho = \frac{1}{H_\rho} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T'}{\partial \rho} \right) = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T'}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}),$$

$$w_z = \frac{1}{H_z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T'}{\partial z} \right) = \ddot{z}.$$

Якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$$

и отличен от нуля всюду, кроме точек на оси Ox_3 .

П.2. В сферических координатах (r, φ, θ) задают положение точки с помощью соотношений

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad \varphi \bmod 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_r \xi_r &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), & H_r &= 1, \\ H_\varphi \xi_\varphi &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0), & H_\varphi &= r \sin \theta, \\ H_\theta \xi_\theta &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), & H_\theta &= r. \end{aligned}$$

Скорость точки представляется в виде $\mathbf{v} = \dot{r} \xi_r + r \sin \theta \dot{\varphi} \xi_\varphi + r \dot{\theta} \xi_\theta$, и поскольку скалярные произведения $\xi_r \xi_\varphi = \xi_r \xi_\theta = \xi_\varphi \xi_\theta = 0$, то

$$T' = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Проекции ускорения на оси сферической системы координат равны

$$w_r = \frac{1}{H_r} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T'}{\partial r} \right) = \ddot{r} - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - r \dot{\theta}^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T'}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}),$$

$$w_\theta = \frac{1}{H_\theta} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T'}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right].$$

Якобиан перехода от декартовой системы координат к сферической равен $-r^2 \sin \theta$ и обращается в нуль на оси Ox_3 .

§ 2.3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЛЕММА О ПРОИЗВОДНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Иногда целесообразно рассматривать движение точки относительно подвижной системы координат. В этом случае говорят о сложном движении материальной точки, имея в виду, что движение точки относительно неподвижной системы координат \mathcal{S} задается посредством движения подвижного репера \mathcal{S}_1 и движения точки относительно подвижного репера \mathcal{S}_1 . Говорят, что система координат $Cx_1x_2x_3$ (репер \mathcal{S}_1) движется относительно неподвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, если точка C перемещается в системе координат \mathcal{S} и изменяется ориентация осей подвижного репера \mathcal{S}_1 относительно неподвижного репера \mathcal{S} . В соответствии с рис. 1

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + \Gamma. \quad (3.1)$$

Здесь $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ — оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Оператор Γ принадлежит группе вращений трехмерного пространства $SO(3)$ и зависит от времени. Большими бук-

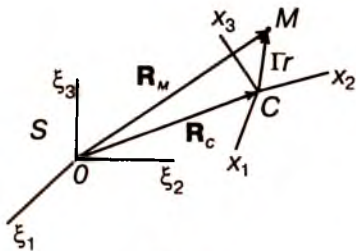


Рис. 1

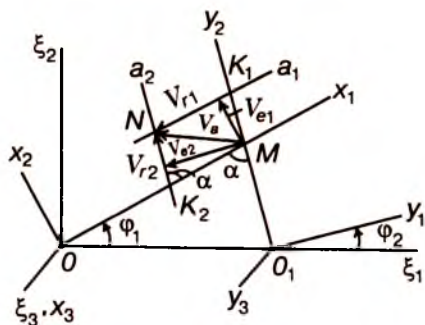


Рис. 2

вами обозначены векторы в неподвижной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, а маленькими — в подвижной системе $Cx_1x_2x_3$. Абсолютная скорость точки M (скорость относительно неподвижной системы S)

$$\mathbf{V}_a = \dot{\mathbf{R}}_M = \dot{\mathbf{R}}_C + \dot{\Gamma}\mathbf{r} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

получена путем дифференцирования равенства (3.1).

Л. Оператор $A = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}$ кососимметричен ($A = -A'$) и эквивалентен операции векторного умножения, а именно, $A\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\forall \mathbf{r} \in E^3$.

▲ Заметим, что операция транспонирования ортогонального оператора приводит к обратному оператору $\Gamma' = \Gamma^{-1}$. Продифференцируем равенство $\Gamma^{-1}\Gamma = E$ и получим $(\Gamma^{-1})'\Gamma + \Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = 0$. Далее, $(\Gamma^{-1})'\Gamma = (\Gamma')\dot{\Gamma} = (\dot{\Gamma}')\Gamma = (\Gamma'\dot{\Gamma})' = A'$ и предыдущее равенство можно переписать в виде $A' + A = 0$, что и доказывает кососимметричность оператора A . ▼

Оператор A в системе координат S_1 зададим матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

и определим вектор $\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega_k \mathbf{e}_k$, где \mathbf{e}_k — орт по оси Cx_k . Тогда непосредственно проверяется равенство $A\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ для любого $\mathbf{r} \in E^3$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ — собственный вектор оператора A с нулевым собственным значением — называется угловой скоростью вращения системы координат S_1 относительно S . Формула (3.2) представляется в виде

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_C + \Gamma(\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})\mathbf{r} + \dot{\Gamma}\mathbf{r} = \mathbf{V}_C + \Gamma[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] + \dot{\Gamma}\mathbf{r}.$$

Обозначим $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_C + \Gamma[\omega, \mathbf{r}]$, $\mathbf{V}_r = \Gamma\dot{\mathbf{r}}$. Величины \mathbf{V}_e , \mathbf{V}_r называются соответственно переносной и относительной скоростью точки M . Справедлива теорема сложения скоростей: абсолютная скорость точки M равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r. \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) записано в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Его можно переписать в подвижной системе $Sx_1x_2x_3$, если умножить на оператор перехода Γ^{-1} в виде

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_e = \Gamma^{-1} \mathbf{V}_C + [\omega, \mathbf{r}], \quad \mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.4)$$

Относительная скорость \mathbf{v}_r есть скорость движения точки относительно подвижной системы координат S_1 , а переносная скорость \mathbf{v}_e равна абсолютной скорости точки M_1 , принадлежащей реперу S_1 и совпадающей в данный момент времени с точкой M .

II. Пусть две палочки Ox_1 и O_1y_2 движутся в плоскости $O\xi_1\xi_2$, имея точки O и O_1 неподвижными. В точке пересечения палочек находится кольцо M (рис. 2). Требуется найти абсолютную скорость кольца M , если известны законы изменения углов φ_1 и φ_2 , которые образуют палочки с неподвижной осью $O\xi_1$.

Введем два подвижных репера S_1 , S_2 и согласно теореме сложения скоростей запишем

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_{e1} + \mathbf{V}_{r1} = \mathbf{V}_{e2} + \mathbf{V}_{r2}.$$

Здесь индекс 1 относится к системе координат $Ox_1x_2x_3$ (репер S_1), а индекс 2 — к системе координат $O_1y_1y_2y_3$ (репер S_2). Поскольку начала реперов S_1 и S_2 неподвижны, то

$$\mathbf{V}_{e1} = \Gamma_1(\Gamma_1^{-1}\dot{\Gamma}_1)\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{V}_{e2} = \Gamma_2(\Gamma_2^{-1}\dot{\Gamma}_2)\mathbf{r}_2, \quad \Gamma_k = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Вектор $\mathbf{r}_1 = \overline{OM}$, $\mathbf{r}_2 = \overline{O_1M}$. Несложные вычисления приводят к равенствам

$$\Gamma_1^{-1}\dot{\Gamma}_1\mathbf{r}_1 = \dot{\varphi}_1\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_1, \quad \Gamma_2^{-1}\dot{\Gamma}_2\mathbf{r}_2 = \dot{\varphi}_2\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_2,$$

где \mathbf{e}_3 — орт оси $O\xi_3$. Следует только помнить, что при дифференцировании оператора, представленного в матричном виде, вычисляются производные всех элементов соответствующей матрицы. Полученные выражения для переносных скоростей позволяют их найти как по величине, так и по направлению (см. рис. 2). Очевидно, что относительные скорости $\mathbf{V}_{r1} = \Gamma_1\dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{V}_{r2} = \Gamma_2\dot{\mathbf{r}}_2$ направлены

по палочкам Ox_1 и O_1y_2 соответственно. Это обстоятельство позволяет в свою очередь построить геометрический вектор абсолютной скорости кольца M (прямые a_1 и a_2 параллельны осям Ox_1 и O_1y_2). Стороны параллелограмма MK_1NK_2 , диагональ которого MN есть абсолютная скорость кольца M , равны $|MK_1| = |\mathbf{V}_{e1}| \sin^{-1}\alpha$, $|MK_2| = |\mathbf{V}_{e2}| \sin^{-1}\alpha$, где $\alpha = \pi/2 + \varphi_2 - \varphi_1$, $\mathbf{V}_{e1} = |\overline{OM}| \dot{\varphi}_1$, $|\mathbf{V}_{e2}| = |O_1M| \dot{\varphi}_2$. Тогда по теореме косинусов из треугольника MNK_1 получим

$$|V_a| = \sin^{-1}\alpha \sqrt{\dot{\varphi}_1^2 |\overline{OM}|^2 + \dot{\varphi}_2^2 |O_1M|^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 |\overline{OM}| |O_1M| \cos\alpha}.$$

§ 2.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА: ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ, ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Согласно определению 0.2 твердым телом называется система материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения. Отсюда следует, что с твердым телом можно связать систему координат $Cx_1x_2x_3$, относительно которой все точки твердого тела будут неподвижны. Радиус-вектор произвольной точки M твердого тела

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + \Gamma \mathbf{r}, \quad (4.1)$$

где Γ — оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к неподвижной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, а $\mathbf{r} = \overline{CM} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$. Проекции вектора \mathbf{r} на оси Cx_1 , Cx_2 , Cx_3 равны x_1 , x_2 , x_3 соответственно и постоянны. После дифференцирования равенства (4.1) с учетом леммы о производной ортогонального оператора получим

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \Gamma[\omega, \mathbf{r}], \quad \omega \times \mathbf{r} \equiv \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Вектор ω в системе координат $Cx_1x_2x_3$ и ему соответствующий вектор $\Omega = \Gamma\omega$ в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$ называется угловой скоростью твердого тела. Векторное равенство (4.2) в неподвижной и подвижной системах координат имеет вид

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \Omega \times \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \equiv \Gamma \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_M = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) называется формулой Эйлера и задает распределение скоростей точек твердого тела. Точка C — начало подвижной системы координат — называется полюсом.

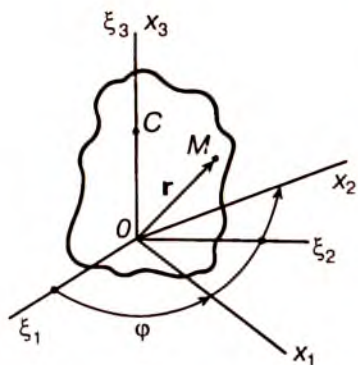


Рис. 3

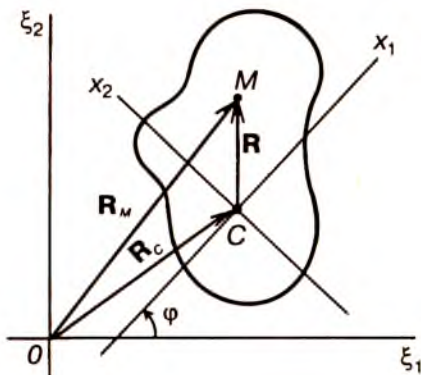


Рис. 4

Отметим свойство ортогональных операторов: $\Gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv [\Gamma\mathbf{a}, \Gamma\mathbf{b}]$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^3$.

Л. Угловая скорость твердого тела не зависит от выбора начала подвижной системы координат и ее ориентации.

▲ Пусть $C_1y_1y_2y_3$ — еще одна система координат, жестко связанная с телом, и

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + |\overline{CC_1}| + \Gamma\Gamma_1\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_1 = \overline{C_1M},$$

где Γ_1 — оператор перехода от системы координат $C_1y_1y_2y_3$ к системе $Cx_1x_2x_3$. Вектор \mathbf{r}_1 задан в системе координат $C_1y_1y_2y_3$, оператор Γ_1 не зависит от времени. Тогда $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \Gamma(\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})\Gamma_1\mathbf{r}_1 = \mathbf{V}_C + \Gamma[\boldsymbol{\omega}, \Gamma_1\mathbf{r}_1]$, где $\mathbf{V}_C = \dot{\mathbf{R}}_C + \overline{CC_1}$ — скорость нового полюса. Далее, $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = \mathbf{V}_C + \Gamma\Gamma_1[\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{r}_1]$, $\mathbf{R} = \Gamma\Gamma_1\mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\Omega} = \Gamma\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_1 = \Gamma_1^{-1}\boldsymbol{\omega}$. Отсюда следует, что угловая скорость твердого тела не зависит от выбора подвижной системы координат и является в этом смысле инвариантной характеристикой движения твердого тела. ▼

О.4.1. Говорят, что твердое тело движется поступательно, если на всем интервале времени его угловая скорость равна нулю.

В этом случае оператор Γ постоянен и ориентация подвижного репера $Cx_1x_2x_3$ относительно неподвижного $O\xi_1\xi_2\xi_3$ не меняется. Все точки твердого тела имеют одну и ту же скорость: $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C$ для любой точки M твердого тела.

О.4.2. Говорят, что твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, если в процессе движения две точки твердого тела O и C неподвижны.

Выберем подвижную и неподвижную системы координат так, чтобы точки O и C лежали на осях $O\xi_3$ и Ox_3 . Оси $O\xi_3$ и Ox_3 совпадают,

а угол между осями $O\xi_1$ и Ox_1 равен $\varphi(t)$. Собственно движение и состоит в изменении угла φ . Тогда

$$\mathbf{R} = \Gamma \mathbf{r}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее

$$\mathbf{V}_M = \Gamma [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}],$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\Gamma} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin \varphi \dot{\varphi} & -\cos \varphi \dot{\varphi} & 0 \\ \cos \varphi \dot{\varphi} & -\sin \varphi \dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\varphi} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3.$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена по оси Ox_3 и равна $\dot{\varphi}$. Каждая точка твердого тела описывает окружность с центром на оси Ox_3 , а ее скорость в системе $Ox_1x_2x_3$ равна $\mathbf{v}_M = \dot{\varphi} [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}] = \dot{\varphi} (-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2)$, где x_1, x_2, x_3 — координаты точки M ; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

§ 2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ МГНОВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА. УРАВНЕНИЕ ВИНТОВОЙ ОСИ

Под мгновенным движением твердого тела понимается распределение скоростей точек твердого тела в данный момент времени. Справедлива формула Эйлера $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}]$. Умножим это равенство скалярно на $\boldsymbol{\Omega}$ и получим $\mathbf{V}_M \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V}_C \boldsymbol{\Omega}$, т.е. скалярное произведение скорости произвольной точки M твердого тела и его угловой скорости не зависит от выбора точки M . Величины $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{V}_C \boldsymbol{\Omega}$ являются инвариантами данного распределения скоростей точек твердого тела в том смысле, что они не зависят от выбора полюса C . Классификация мгновенных движений твердого тела базируется на этих инвариантах и приведена в таблице.

Тип мгновенного движения	Значения инвариантов
1. Мгновенный покой	$\boldsymbol{\Omega} = 0, \mathbf{V}_C = 0$
2. Мгновенно-поступательное движение	$\boldsymbol{\Omega} = 0, \mathbf{V}_C \neq 0$
3. Мгновенно-вращательное движение	$\boldsymbol{\Omega} \neq 0, \mathbf{V}_C \boldsymbol{\Omega} = 0$
4. Мгновенно-винтовое движение	$\boldsymbol{\Omega} \neq 0, \mathbf{V}_C \boldsymbol{\Omega} \neq 0$

В случае мгновенного покоя скорости всех точек твердого тела в данный момент времени равны нулю. Мгновенно-поступательное движение характеризуется тем, что все точки твердого тела в

данный момент времени имеют одну и ту же скорость. В третьем и четвертом случаях поставим задачу об отыскании в теле таких точек, скорости которых параллельны вектору угловой скорости Ω . Это означает, что $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + [\Omega, \mathbf{R}] = \kappa\Omega$, $\kappa \in R^1$. Умножим полученное равенство векторно на Ω и найдем — $[\Omega, \mathbf{V}_C] = [\Omega, [\Omega, \mathbf{R}]] = \Omega(\Omega, \mathbf{R}) - \mathbf{R}\Omega^2$. Отсюда

$$\mathbf{R} = \frac{\Omega \times \mathbf{V}_C}{\Omega^2} + \Omega^0(\Omega^0, \mathbf{R}), \quad \Omega^0 = \Omega|\Omega|^{-1},$$

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + [\Omega^0, [\Omega^0, \mathbf{V}_C]] = \mathbf{V}_C + \Omega^0(\Omega^0, \mathbf{V}_C) - \mathbf{V}_C\Omega^{02} = \Omega^0(\Omega^0, \mathbf{V}_C).$$

Легко понять, что точки твердого тела, скорости которых параллельны вектору Ω , заполняют в теле прямую

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + \frac{\Omega \times \mathbf{V}_C}{\Omega^2} + \lambda\Omega, \quad \lambda \in R^1. \quad (5.1)$$

Если $\mathbf{V}_C\Omega = 0$ (мгновенно-поступательное движение), то скорости этих точек равны нулю и прямая (5.1) называется осью мгновенного вращения. В противном случае, когда $\mathbf{V}_C\Omega \neq 0$, тело совершает мгновенно-винтовое движение и прямая (5.1) называется винтовой осью.

В подвижной системе координат $Sx_1x_2x_3$ уравнение винтовой оси примет вид

$$\mathbf{r}_M = \frac{\omega \times \mathbf{v}_C}{\omega^2} + \lambda\omega, \quad \lambda \in R^1. \quad (5.2)$$

§ 2.6. НЕПРЕРЫВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. АКСОИДЫ

Рассмотрим теперь не мгновенную картину распределения скоростей точек твердого тела, а его непрерывное движение во времени. Уравнение (5.1) представим в виде

$$\mathbf{R}_M(t, \lambda) = \mathbf{R}_C(t) + \frac{\Omega(t) \times \mathbf{V}_C(t)}{\Omega^2(t)} + \lambda\Omega(t), \quad \lambda, t \in R^1. \quad (6.1)$$

Отображение (6.1) определяет в трехмерном пространстве линейчатую поверхность — подвижный аксоид, которую замечает ось мгновенно-винтового движения. Предполагается, что на рассматриваемом интервале времени $\Omega(t) \neq 0$. Другая линейчатая поверхность — подвижный аксоид, определяется из уравнения (5.2) в виде

$$\mathbf{r}_M(t, \lambda) = \frac{\omega(t) \times \mathbf{v}_C(t)}{\omega^2(t)} + \lambda\omega(t), \quad \lambda, t \in R^1. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) задано в подвижной системе координат и, следовательно, подвижный аксоид жестко скреплен с движущимся телом. В каждый момент времени поверхности (6.1) и (6.2) имеют общую прямую мгновенную винтовую ось.

Т. Подвижный и неподвижный аксоиды касаются в каждый момент времени, и движение твердого тела представляется как качение подвижного аксоида по неподвижному с проскальзыванием вдоль общей образующей мгновенной винтовой осию.

▲ Необходимо показать, что подвижный и неподвижный аксоиды имеют общую касательную плоскость. Введем в рассмотрение точку K , принадлежащую винтовой оси, радиус-вектор которой в неподвижной системе координат задается формулой (6.1) при дополнительном условии $\lambda = \lambda(t)$, где $\lambda(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. Точка K движется по неподвижному аксоиду, а значит, ее абсолютная скорость принадлежит касательной плоскости к неподвижному аксоиду.

Свяжем подвижную систему координат с телом и применим теорему сложения скоростей для вычисления абсолютной скорости точки K . Имеем $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r$. Переносная скорость \mathbf{V}_e равна скорости точки M , принадлежащей твердому телу и совпадающей в данный момент времени с точкой K , т.е. равна скорости точки, лежащей на винтовой оси. Относительная скорость \mathbf{V}_r принадлежит касательной плоскости к подвижному аксоиду, так как относительное движение осуществляется по кривой на подвижном аксоиде. Касательные плоскости к двум аксоидам в точке K пересекаются по винтовой линии, на которой лежит вектор \mathbf{V}_e . Тогда из равенства $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r$ вытекает, что касательные плоскости совпадают, поскольку все три вектора \mathbf{V}_a , \mathbf{V}_e , \mathbf{V}_r лежат в одной плоскости — общей касательной плоскости к двум аксоидам.

Общая касательная плоскость к двум аксоидам изменяет с течением времени свое положение в пространстве в результате качения одной поверхности по другой. При этом проскальзывание осуществляется только вдоль общей образующей — мгновенной винтовой оси. ▼

§ 2.7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА: ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ И ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

О.7.1. Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если скорости всех его точек параллельны неподвижной плоскости во все время движения.

Пусть эта плоскость есть $O\xi_1\xi_2$. Рассмотрим произвольную точку M твердого тела. Тогда $\mathbf{V}_M \xi_3 = 0$ (ξ_3 — единичный вектор по оси

$O\xi_3$) или $\dot{\mathbf{R}}_M \xi_3 = 0$. Интегрируя последнее соотношение, найдем $\mathbf{R}_M(t)\xi_3 = \mathbf{R}_M(0)\xi_3$, т.е. траектория точки M находится в плоскости, параллельной плоскости $O\xi_1\xi_2$. Если M_1 и M_2 — две точки твердого тела, то $\overline{M_1M_2}\xi_3 = |\overline{M_1M_2}|\cos\alpha$, $\alpha = \angle(\overline{M_1M_2}, \xi_3)$. Отсюда следует, что угол α в процессе движения не меняется, так как расстояние между двумя точками твердого тела $|\overline{M_1M_2}|$ и скалярное произведение $\overline{M_1M_2}\xi_3 = (\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t))\xi_3 = (\mathbf{R}_1(0) - \mathbf{R}_2(0))\xi_3$ постоянны. Если угол $\alpha = 0$ (точки M_1, M_2 лежат на перпендикуляре к плоскости $O\xi_1\xi_2$), то они имеют одинаковые скорости и описывают конгруэнтные кривые в параллельных плоскостях, поскольку $\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_1(t) + |\overline{M_1M_2}|$ и вектор $|\overline{M_1M_2}|$ постоянен. Следовательно, для полного изучения плоскопараллельного движения твердого тела достаточно изучить движение его точек в каком-либо сечении тела плоскостью, параллельной плоскости $O\xi_1\xi_2$.

В дальнейшем будем изучать движение фигуры, полученной сечением твердого тела плоскостью $O\xi_1\xi_2$. Пусть система координат $Cx_1x_2x_3$ жестко связана с телом (рис. 4). Тогда

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + \mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \Gamma \mathbf{r},$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.1)$$

Скорость точки M равна $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ или $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ в системе $Cx_1x_2x_3$, где $\boldsymbol{\Omega} = \Gamma \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \equiv \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \mathbf{r}$. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$, поскольку

$$\Gamma^{-1} \dot{\Gamma} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dot{\varphi}.$$

Здесь \mathbf{e}_3 — орт по оси $O\xi_3$ или Ox_3 , которые перпендикулярны плоскости рисунка.

В случае плоскопараллельного движения второй инвариант $\mathbf{V}_C \boldsymbol{\Omega} = 0$ и возможно только три первых типа движений (см. таблицу): мгновенный покой ($\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\Omega} = 0$), мгновенно-поступательное движение ($\mathbf{V}_C \neq 0, \boldsymbol{\Omega} = 0$) и мгновенно-вращательное движение ($\boldsymbol{\Omega} \neq 0$). В последнем случае ось мгновенного вращения всегда ортогональна плоскости $O\xi_1\xi_2$, аксоиды — цилиндрические поверхности с образующей ортогональной плоскостью $O\xi_1\xi_2$. Пересечения аксоидов с плоскостью $O\xi_1\xi_2$, называются подвижной и неподвижной центроидами, а их точка касания — центром мгновенного

вращения. Движение фигуры, полученной сечением твердого тела плоскостью $O\xi_1\xi_2$, представляется в виде качения без проскальзывания подвижной центроиды, жестко связанной с телом, по неподвижной центроиде. Радиус-вектор центра мгновенного вращения точки P в подвижной и неподвижной системах координат определяется выражениями (6.1), (6.2) при $\lambda = 0$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_C + \Omega^{-2}[\Omega, \mathbf{V}_C], \quad \mathbf{r}_P = \omega^{-2}[\omega, \mathbf{v}_C], \quad \Omega = \omega = \dot{\varphi}.$$

Сформулируем правило геометрического построения центра мгновенного вращения, если известны скорости двух точек твердого тела, лежащих в плоскости Sx_1x_2 : центр мгновенного вращения лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям двух точек (рис. 5).

II. Пусть палочка AB движется так, что ее концы скользят по осям $O\xi_1, O\xi_2$ соответственно. С палочкой AB жестко связано твердое тело, совершающее плоскопараллельное движение (система координат Sx_1x_2). Положение палочки задается углом $\varphi(t)$. Скорости точек A и B направлены по осям $O\xi_1, O\xi_2$, центр мгновенного вращения P является вершиной прямоугольника $AOBP$ и описывает дугу окружности LPN с центром в точке O , так как $|OP| = |AB|$. Дуга LPN или ее часть являются неподвижной центроидой. Заметим, что отрезок $|CP| = 1/2|AB|$ и точка P описывает в системе координат Sx_1x_2 дугу окружности APB , которая является подвижной центроидой. Движение отрезка AB представляется как качение без проскальзывания подвижной центроиды APB по неподвижной LPN . Если задан закон изменения угла $\varphi(t)$, то скорость точки M

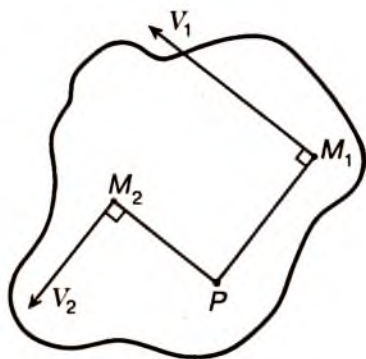
$$\mathbf{V}_M = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \times \overline{PM}.$$


Рис. 5

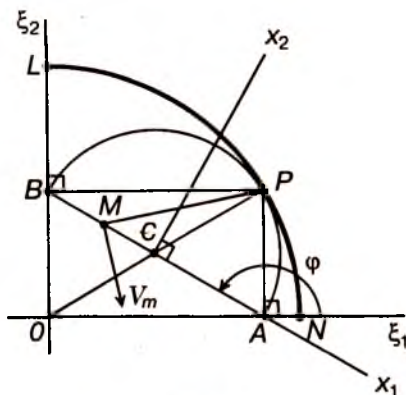


Рис. 6

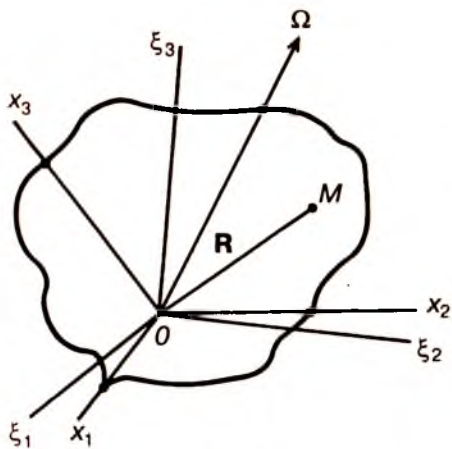


Рис. 7

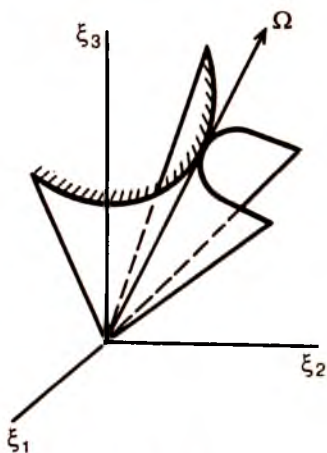


Рис. 8

0.7.2. Движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной точки, если во все время движения одна точка твердого тела остается неподвижной.

Пусть начала неподвижной и подвижной систем координат совпадают. Полагая подвижную систему координат жестко связанной с телом, найдем

$$\mathbf{R} = \Gamma(t)\mathbf{r}, \mathbf{V}_M = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Здесь $\Gamma \in SO(3)$ — оператор перехода от подвижной системы $Ox_1x_2x_3$ к неподвижной $O\xi_1\xi_2\xi_3$, $\boldsymbol{\Omega} = \Gamma\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Уравнения подвижного и неподвижного аксоидов

$$\mathbf{R} = \lambda\boldsymbol{\Omega}(t), \mathbf{r} = \mu\boldsymbol{\omega}(t), \lambda, \mu, t \in \mathbb{R}^1$$

определяют конические поверхности с вершиной в точке O (рис. 8).

§ 2.8. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПАРА ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим две системы координат — неподвижную $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и подвижную $Cy_1y_2y_3$ (рис. 9). Твердое тело, с которым связана система координат $Px_1x_2x_3$, движется относительно подвижной системы координат $Cy_1y_2y_3$. Требуется описать распределение скоростей точек твердого тела в абсолютном движении, т.е. в движении относительно неподвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$.

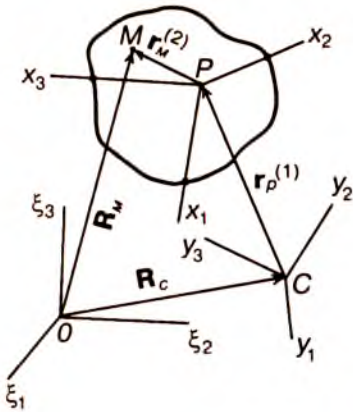


Рис. 9

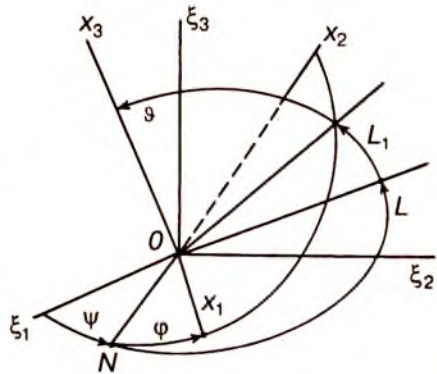


Рис. 10

Радиус-вектор точки M

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C + \Gamma_1(\mathbf{r}_P^{(1)}) + \Gamma_2\mathbf{r}_M^{(2)}, \quad (8.1)$$

где ортогональные операторы Γ_1, Γ_2 задают преобразования от системы координат $Cy_1y_2y_3$ к $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и $Px_1x_2x_3$ к $Cy_1y_2y_3$ соответственно. Векторы $\mathbf{R}_M, \mathbf{R}_C$ заданы в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$, вектор $\mathbf{r}_P^{(1)}$ — в системе $Cy_1y_2y_3$, а вектор $\mathbf{r}_M^{(2)}$ — в системе $Px_1x_2x_3$. Продифференцируем равенство (8.1) и получим

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \Gamma_1[\omega_1^{(1)}, (\mathbf{r}_P^{(1)} + \Gamma_2\mathbf{r}_M^{(2)})] + \Gamma_1\mathbf{v}_P^{(1)} + \Gamma_1\Gamma_2[\omega_2^{(2)}, \mathbf{r}_M^{(2)}]. \quad (8.2)$$

Здесь $\omega_1^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} \equiv \Gamma_1^{-1}\Gamma_1\mathbf{r}^{(1)}$, $\omega_2^{(2)} \times \mathbf{r}^{(2)} \equiv \Gamma_2^{-1}\Gamma_2\mathbf{r}^{(2)}$, $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(2)}$ — переносная и относительная угловые скорости. Далее $\Gamma_1\mathbf{v}_P^{(1)} = \Gamma_1\mathbf{r}_P^{(1)} = \mathbf{V}_{Pr}$ — относительная скорость точки P в системе $Cy_1y_2y_3$, $\mathbf{V}_C + \Gamma_1[\omega_1^{(1)}, \mathbf{r}_P^{(1)}] = \mathbf{V}_{Pe}$ — переносная скорость точки P . Оставшиеся слагаемые в формуле (8.2) представляются в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\omega_1^{(1)}, \Gamma_2\mathbf{r}_M^{(2)}] &= [\Gamma_1\omega_1^{(1)}, \Gamma_1\Gamma_2\mathbf{r}_M^{(2)}] = \Omega_1 \times \overline{PM}, \\ \Gamma_1\Gamma_2[\omega_2^{(2)}, \mathbf{r}_M^{(2)}] &= [\Gamma_1\Gamma_2\omega_2^{(2)}, \Gamma_1\Gamma_2\mathbf{r}_M^{(2)}] = \Omega_2 \times \overline{PM}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Угловая скорость $\Omega_1 = \Omega_e$ — переносная угловая скорость, $\Omega_2 = \Omega_r$ — относительная угловая скорость твердого тела. Формула (8.2) с учетом (8.3) представляется в виде

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{Pe} + \mathbf{V}_{Pr} + (\Omega_e + \Omega_r) \times \overline{PM}. \quad (8.4)$$

С другой стороны, по формуле Эйлера в абсолютном движении $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_P + \Omega_a \times \overline{PM}$, где Ω_a — абсолютная угловая скорость твердого тела в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Сравнение этих двух выражений приводит к равенствам

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_{Pe} + \mathbf{V}_{Pr}, \quad \boldsymbol{\Omega}_a = \boldsymbol{\Omega}_e + \boldsymbol{\Omega}_r. \quad (8.5)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы: если твердое тело движется в системе координат, которая в свою очередь перемещается относительно неподвижной системы координат, то абсолютная скорость полюса (точка P твердого тела) находится как сумма переносной и относительной скоростей, а абсолютная угловая скорость — как сумма переносной и относительной угловых скоростей.

О.8.1. Сложное движение твердого тела называется парой вращений, если $\mathbf{V}_C = 0$, $\mathbf{V}_{Pr} = 0$, $\boldsymbol{\Omega}_e = -\boldsymbol{\Omega}_r$.

В этом случае согласно (8.4) $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{Pe} = \boldsymbol{\Omega}_e \times \overline{CP}$, т.е. все точки твердого тела имеют одинаковую скорость и, значит, тело совершает мгновенно-поступательное движение. Величина скорости $\boldsymbol{\Omega}_e \times \overline{CP}$ называется моментом пары вращений. Если условия в определении (8.1) выполняются во все время движения, то тело совершает поступательное движение. Очевидно и обратное утверждение: всякое поступательное движение твердого тела можно представить как сложное движение с помощью подходящей пары вращений.

Из теоремы о сложении движений вытекает следствие: всякое движение твердого тела складывается из поступательного переносного движения и относительного движения — вращения тела вокруг начала подвижной системы координат. В самом деле, пусть начало подвижной системы координат точка C совпадает с точкой P твердого тела, а оси Cy_1, Cy_2, Cy_3 параллельны во все время движения соответствующим осям неподвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Тогда $\mathbf{V}_{Pr} = 0$, $\boldsymbol{\Omega}_e = \boldsymbol{\Omega}_1 = 0$. Переносная скорость точки M $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_p$, а относительная $\mathbf{V}_r = \boldsymbol{\Omega}_r \times \overline{PM}$, т.е. соотношение $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_p + \boldsymbol{\Omega} \times \overline{PM}$ (формула Эйлера) выражает теорему сложения движений.

§ 2.9. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВРАЩЕНИЙ. УГЛЫ ЭЙЛЕРА. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Пусть реперы S_0, S_1, \dots, S_n имеют одинаковое начало (точка O) и движутся друг относительно друга. Считая репер S_0 неподвижным и связывая с репером S_n твердое тело, представим радиус-вектор его точки M в виде

$$\mathbf{R} = \Gamma_1 \dots \Gamma_n \mathbf{r}, \quad (9.1)$$

где $\Gamma_k, k = 1, \dots, n$, — оператор перехода от репера S_k к реперу S_{k-1} , а \mathbf{r} — постоянный радиус-вектор точки M в репере S_n . Все операторы

Γ_k принадлежат группе вращений трехмерного пространства, зависят от времени и определяют взаимное движение реперов S_k и S_{k-1} .

Г. Угловая скорость твердого тела в абсолютном движении равна сумме относительных угловых скоростей реперов S_1, \dots, S_n , т.е.

$$\Omega_a = \sum_{k=1}^n \Omega_k, \quad \Omega_k = \Gamma_1 \dots \Gamma_k \omega_k^{(k)}, \quad \omega_k^{(k)} \times \equiv \Gamma_k^{-1} \dot{\Gamma}_k. \quad (9.2)$$

▲ Продифференцируем соотношение (9.1) по времени и получим

$$\mathbf{V}_M = \Gamma_1(\Gamma_1^{-1} \dot{\Gamma}_1) \Gamma_2 \dots \Gamma_n \mathbf{r} + \dots + \Gamma_1 \dots \Gamma_n (\Gamma_n^{-1} \dot{\Gamma}_n) \mathbf{r}.$$

По лемме о производной ортогонального оператора $\Gamma_k^{-1} \dot{\Gamma}_k \equiv \omega_k^{(k)} \times$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_M &= \Gamma_1[\omega_1^{(1)}, \Gamma_2 \dots \Gamma_n \mathbf{r}] + \dots + \Gamma_1 \dots \Gamma_n[\omega_n^{(n)}, \mathbf{r}] = \\ &= [\Gamma_1 \omega_1^{(1)}, \mathbf{R}] + \dots + [\Gamma_1 \dots \Gamma_n \omega_n^{(n)}, \mathbf{R}] = \left[\sum_{k=1}^n \Omega_k, \mathbf{R} \right], \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $\Omega_k = \Gamma_1 \dots \Gamma_k \omega_k^{(k)}$ — угловая скорость репера S_k относительно репера S_{k-1} , представленная в координатах репера S_0 . Отметим, что $\omega_k^{(k)}$ — та же угловая скорость, но представленная в координатах репера S_k . В абсолютном движении репера S_n (твердого тела) относительно репера S_0 справедлива формула Эйлера $\mathbf{V}_M = \Omega_a \times \mathbf{R}$, сравнивая которую с формулой (9.3) убеждаемся в справедливости теоремы о сложении вращений. ▼

Введем на многообразии $SO(3)$ локальную систему координат — углы Эйлера. Твердое тело будем отождествлять с репером S_3 . Пусть точка O — неподвижная точка твердого тела, а $Ox_1x_2x_3$ — репер S_3 . С неподвижным репером S_0 отождествим систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Линия пересечения координатных плоскостей $O\xi_1\xi_2$ и Ox_1x_2 (линия ON) называется линией узлов (рис. 10). Введем подвижный репер S_1 (система координат $ONL\xi_3$). Движение репера S_1 относительно репера S_0 есть вращение вокруг неподвижной оси $O\xi_3$ на угол ψ , который называется углом прецессии. Репер S_2 (система координат ONL_1x_3) повернут относительно репера S_1 на угол ϑ , который называется углом нутации, вокруг линии узлов ON . Наконец, репер S_3 повернут относительно репера S_2 на угол φ , который называется углом собственного вращения, вокруг оси Ox_3 . При движении твердого тела углы Эйлера (ψ, ϑ, φ) изменяются, и движение твердого тела представляется в виде сложного движения, состоящего из трех относительных вращений вокруг соответствующих осей. Переход от репера S_3 к реперу S_0 задается соотношением

$$\mathbf{R} = \Gamma_3(\psi)\Gamma_1(\vartheta)\Gamma_3(\varphi)\mathbf{r},$$

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_1(\vartheta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix}. \quad (9.4)$$

По теореме сложения вращений угловая скорость твердого тела

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\xi}_3 + \dot{\vartheta}\mathbf{e}_{0N} + \dot{\varphi}\mathbf{e}_3, \quad (9.5)$$

где единичные векторы $\boldsymbol{\xi}_3$, \mathbf{e}_{0N} , \mathbf{e}_3 заданы в системе координат $Ox_1x_2x_3$ и имеют проекции

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_3 &= (\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta), \quad \mathbf{e}_{0N} = (\cos \varphi, -\sin \varphi, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Обозначим проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижного репера $Ox_1x_2x_3$ через p , q , r и, используя соотношение (9.5), получим кинематические формулы Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Координаты $(\psi, \vartheta, \varphi)$ на $SO(3)$ не определяются однозначно, если угол $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$, поскольку плоскости $O\xi_1\xi_2$ и Ox_1x_2 совпадают и линия узлов ON не определена.

§ 2.10. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИЙ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Изучим распределение ускорений точек твердого тела. Как и ранее, свяжем с телом систему координат $Sx_1x_2x_3$ и получим векторное равенство $\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_C(t) + \Gamma(t)\mathbf{r}$, продифференцируем его два раза и найдем ускорение точки M (рис. 11). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_M &= \mathbf{V}_M = \dot{\mathbf{R}}_C + \Gamma[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], \\ \ddot{\mathbf{R}}_M &= \mathbf{W}_M = \ddot{\mathbf{R}}_C + \Gamma(\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] + \Gamma[\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}] \\ &= \mathbf{W}_C + \Gamma[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + \Gamma[\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

При дифференцировании была использована лемма о производной ортогонального оператора (см. § 2.3). Спроектируем ускорение точки M на оси подвижной системы координат $Sx_1x_2x_3$ и получим

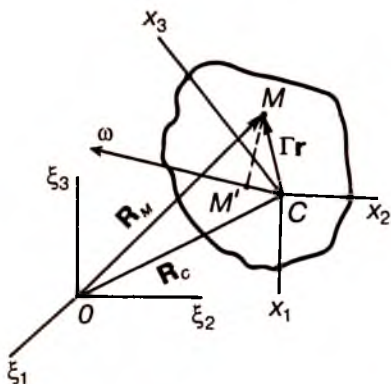


Рис. 11

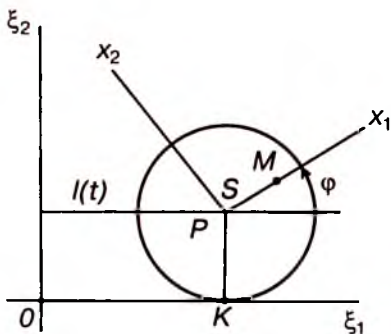


Рис. 12

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_M &= \mathbf{w}_C + \mathbf{w}_{oc} + \mathbf{w}_{вр}, & \mathbf{w}_C &= \Gamma^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_C, \\ \mathbf{w}_{oc} &= [\omega, [\omega, \mathbf{r}]], & \mathbf{w}_{вр} &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Ускорение \mathbf{w}_{oc} называется осестремительным, поскольку $\mathbf{w}_{oc} = \omega^2 \mathbf{d}$, где $\mathbf{d} = \overline{MM'}$, а точка M' — ортогональная проекция точки M на вектор угловой скорости ω , проходящий через точку C . Векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{w}_{вр}$ называются угловым ускорением и вращательным ускорением соответственно. Соотношение (10.2) определяет поле ускорений точек твердого тела и называется формулой Ривальса.

Если точка M движется относительно системы координат $Cx_1x_2x_3$, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то при дифференцировании вектора \mathbf{R}_M получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_M &= \mathbf{V}_M = \dot{\mathbf{R}}_C + \Gamma[\omega, \mathbf{r}] + \Gamma \dot{\mathbf{r}}, \\ \ddot{\mathbf{R}}_M &= \mathbf{W}_M = \ddot{\mathbf{R}}_C + \Gamma[\omega, [\omega, \mathbf{r}]] + \Gamma[\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}] + 2\Gamma[\omega, \dot{\mathbf{r}}] + \Gamma \ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

По сравнению с формулой (10.1) в выражении ускорения в (10.3) содержатся два дополнительных члена. В системе координат $Cx_1x_2x_3$ равенство (10.3) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_M &= \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_C, & \mathbf{w}_e &= \Gamma^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_C + [\omega, [\omega, \mathbf{r}]] + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{w}_r &= \ddot{\mathbf{r}}, & \mathbf{w}_C &= 2[\omega, \mathbf{v}_r], & \mathbf{v}_r &= \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Ускорение \mathbf{w}_e называется переносным ускорением точки M и равно согласно (10.2) абсолютному ускорению точки M_1 , совпадающей в данный момент времени с точкой M и неподвижной относительно системы координат $Cx_1x_2x_3$. Ускорение \mathbf{w}_r — относительное ускорение, а ускорение \mathbf{w}_C — добавочное или кориолисово ускорение.

П. Пусть колесо радиуса R катится без проскальзывания по оси $O\xi_1$ и закон движения его центра P имеет вид $l = at^2$. По диаметру колеса движется точка M по закону $s = bt^3$ (рис. 12). Требуется определить абсолютное ускорение точки M . Свяжем с колесом систему координат Px_1x_2 так, что точка M движется по оси Px_1 . Точка K — центр мгновенного вращения колеса (колесо катится без проскальзывания и скорость точки контакта с дорогой равна нулю) и по формуле Эйлера $v_P = \omega R$. Тогда $\omega = -R^{-1}\dot{l}$ и $\varepsilon = \dot{\omega} = -R^{-1}\ddot{l}$. Переносное ускорение точки M

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_P + \mathbf{w}_{oc} + \mathbf{w}_{вп} = \ddot{l}\xi_1 - \omega^2 s \mathbf{e}_1 + \varepsilon R \mathbf{e}_2,$$

где ξ_1 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 — орты осей $O\xi_1$, Px_1 , Px_2 , соответственно. Относительное и добавочное ускорения точки M равны $\mathbf{w}_r = \ddot{s}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{w}_c = 2\omega\dot{s}\mathbf{e}_2$. В проекциях на подвижный репер Px_1x_2 получим

$$w_1 = \ddot{l} \cos \varphi - \omega^2 s + \ddot{s} = 2a \cos \varphi - 4a^2 b R^{-2} t^5 + 6bt,$$

$$w_2 = -\ddot{l} \sin \varphi + \varepsilon s + 2\omega\dot{s} = -2a \sin \varphi - 14abR^{-1}t^3.$$

Угол φ зависит от l и начального положения точки контакта колеса с дорогой, а именно $\varphi = \varphi_0 - l(t)R^{-1}$, где φ_0 — значение угла φ при $t=0$.

ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Аксиоматическое построение динамических механических моделей базируется на основных понятиях и законах механики. Выше были даны определения механической системы и ее движения, но ничего не сказано о причинах, вызывающих движение. Во второй главе предполагалось, что движение механических систем задано, и изучались его свойства. В динамике речь пойдет о причинах, вызывающих движение, и об определении движения, когда эти причины известны. Сформулируем ряд постулатов и определений, на которых базируется механика.

• Материальные точки взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие служит причиной движения и моделируется силами.

О.1.1. Сила есть векторная величина, описывающая взаимодействие материальных точек. Говорят, что сила приложена к материальной точке.

О.1.2. Все множество материальных точек в E^3 называется Вселенной.

О.1.3. Материальная точка называется изолированной, если можно пренебречь ее взаимодействием с остальными точками Вселенной.

Первый закон динамики (закон инерции Галилея). В пространстве E^3 существует система координат S , относительно которой всякая изолированная материальная точка находится в покое или в состоянии равномерного прямолинейного движения.

О.1.4. Система координат S называется инерциальной.

О.1.5. Системой отсчета в механике называется система координат S в E^3 и система координат на числовой оси времени.

Г. Система координат S_1 , движущаяся поступательно с постоянной скоростью относительно инерциальной системы координат S , является инерциальной системой координат.

▲ Рассмотрим изолированную материальную точку M . Закон ее движения в инерциальной системе координат S имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 +$

$+ \mathbf{V}_0 t$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$ — постоянные векторы. Начало системы координат S_1 (точка O_1) движется относительно системы координат S по закону $\overline{OO_1} = \mathbf{A} + \mathbf{V}t$ и справедливо равенство $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{V}t + \Gamma \mathbf{r}(t)$, где Γ — постоянный ортогональный оператор, определяющий ориентацию репера S_1 относительно репера S (рис. 13).

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \\ \mathbf{r}_0 &= \Gamma^{-1}(\mathbf{R}_0 - \mathbf{A}), \\ \mathbf{v} &= \Gamma^{-1}(\mathbf{V}_0 - \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

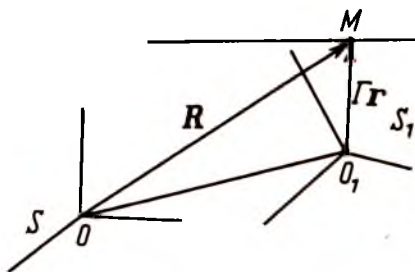


Рис. 13

Из равенства (1.1) следует, что изолированная точка M движется равномерно и прямолинейно относительно системы координат S_1 , а значит, система координат S_1 инерциальна. ▼

С.1. Для любой изолированной материальной точки найдется такая инерциальная система координат, в которой эта точка покоится и совпадает с началом системы координат.

Согласно (1.1) достаточно выбрать $\mathbf{B} = \mathbf{V}_0$ и $\mathbf{A} = \mathbf{R}_0$.

С.2. Инерциальные системы отсчета образуют галилееву группу размерности 10.

В самом деле, для задания инерциальной системы отсчета нужно задать: а) $t_0 \in \mathbb{R}^1$ — новое начало отсчета времени на числовой оси; б) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{E}^3$ — движение начала новой инерциальной системы координат S_1 ; в) $\Gamma \in SO(3)$ — ориентацию осей системы координат S_1 относительно инерциальной системы координат S .

С.3. Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы координат инвариантно относительно галилеевой группы.

▲ Законы движения материальной точки в двух инерциальных системах отсчета связаны соотношениями

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{V}t + \Gamma \mathbf{r}(\tau), \quad \tau = t - t_0.$$

Отсюда после двукратного дифференцирования по времени получим

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \Gamma \ddot{\mathbf{r}}(t - t_0). \quad \blacktriangledown$$

Во второй главе неоднократно рассматривались два типа систем координат — подвижные и неподвижные. Опыт познания материи свидетельствует о том, что во Вселенной не существует абсолютно неподвижных объектов, с которыми можно было бы связать неподвижную систему координат, поскольку все материальные

объекты движутся друг относительно друга. В дальнейшем под неподвижной системой координат будем понимать инерциальную систему координат. На практике всякую систему отсчета связывают с тем или иным материальным объектом. В частности, в качестве инерциальной системы координат выбирают систему координат с началом в центре масс Солнечной системы (точка внутри Солнца) и с осями, направленными на звезды (система Коперника). Как показывает опыт, эта система координат с большой степенью точности является инерциальной, т.е. всякая «изолированная» материальная точка движется относительно этой системы координат «почти по прямой с постоянной скоростью».

Второй закон динамики (Ньютон). Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы координат прямо пропорционально силе, приложенной к точке, и обратно пропорционально ее массе, т.е.

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{F} — вектор силы, m — масса точки, \mathbf{w} — ускорение точки.

В «Математических началах натуральной философии» (1687 г.) И. Ньютон сформулировал этот закон так: «изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит в направлении силы», понимая под этим равенство $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$.

И. Ньютон сделал ко второму закону примечание: если на материальную точку действуют две силы, то ее ускорение будет равно геометрической сумме ускорений, вызванных действием каждой силы по отдельности (закон параллелограмма сил). Другими словами, если $\mathbf{w}_1 = m^{-1}\mathbf{F}_1$, $\mathbf{w}_2 = m^{-1}\mathbf{F}_2$, то $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, и поскольку $\mathbf{w} = m^{-1}\mathbf{F}$, то $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Здесь $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — действующие на точку силы, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ — вызываемые ими ускорения, а \mathbf{w}, \mathbf{F} — результирующие ускорение и сила соответственно.

Третий закон динамики (Ньютон). Силы, описывающие взаимодействие двух точек, равны по величине, направлены по прямой, соединяющей точки, и противоположны, т.е. $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \lambda M_1 M_2$, где \mathbf{F}_{12} — сила, действующая на первую точку со стороны второй, а \mathbf{F}_{21} — сила, действующая на вторую точку со стороны первой.

С.4. Величины ускорений взаимодействующих материальных точек обратно пропорциональны их массам. Имеем

$$m_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{F}_{21}, \quad \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \Rightarrow \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

В динамике рассматривают две основные задачи: первая — определение закона движения по заданным силам, вторая — определение по заданному закону движения действующей на точку силы. Решение первой задачи возможно, когда внешние силы заданы, например, как функция времени, координат и скоростей материальной точки, т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. В этом случае соотношение (1.2) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\ddot{\mathbf{r}} = m^{-1}\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, и речь идет об отыскании его общего решения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}(0), \dot{\mathbf{r}}(0))$, где $\mathbf{r}(0), \dot{\mathbf{r}}(0)$ — начальные условия движения. Для отыскания общего решения могут быть использованы методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Описанная модель не единственна. В механике встречаются также такие модели, когда сила зависит от всей предыстории движения точки, например,

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^t g(t, \tau, \mathbf{r}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau)) d\tau.$$

Соответствующие уравнения движения имеют интегродифференциальный вид.

Вторая основная задача, задача определения силы по заданному движению, имеет два аспекта. Если задано движение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, то сила отыскивается путем двукратного дифференцирования по времени и использованию соотношения (1.2). Если же задано семейство движений $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_1, \dots, c_6)$, c_1, \dots, c_6 — произвольные параметры, и имеется соглашение о модели сил, например, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, то определение силы как функции времени, координат и скоростей сводится к задаче обращения функций

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t, c_1, \dots, c_6), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, c_1, \dots, c_6), \Rightarrow \\ \Rightarrow c_i &= f_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad i = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

на основе теоремы о неявной функции. Далее сила определяется из второго закона Ньютона в виде

$$\mathbf{F} = m^{-1}\ddot{\mathbf{r}}(t, c_1, \dots, c_6) = \Phi(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Масса есть мера инерции материальной точки, т.е. ее склонности сохранять равномерное и прямолинейное движение относительно инерциальной системы координат. Чем больше масса точки, тем большую необходимо приложить к ней силу для придания ей определенного ускорения. Следствие из третьего закона динамики позволяет по измерениям ускорений устанавливать отношения масс тел к выбранной эталонной массе.

В настоящем курсе классической механики предполагается, что взаимодействие материальных точек обуславливается только их взаимным расположением и взаимными скоростями в данный момент времени.

Все величины, используемые в механике, размерны. В качестве основных величин принимаются: длина — размерность метр [м], время — размерность секунда [с] и масса — размерность килограмм [кг]. Производные величины измеряются в следующих единицах: скорость — $[мс^{-1}]$, ускорение — $[мс^{-2}]$, сила — $[кгмс^{-2}]$. Сила в $1 кгмс^{-2}$ называется ньютоном [н].

§ 3.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ДЕКАРТОВОЙ И КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ, В ПРОЕКЦИЯХ НА ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА

Пусть материальная точка движется относительно инерциальной системы координат. Уравнения движения точки в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ согласно второму закону динамики имеют вид

$$m\ddot{x}_k = X_k(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты точки M , X_1, X_2, X_3 — проекции вектора силы \mathbf{F} на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно. Система уравнений (2.1), вообще говоря, — нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка.

С траекторией точки M можно связать естественный трехгранник $M\tau nb$ (см. § 2.1). Используя ранее найденные выражения для проекций ускорения на оси естественного трехгранника, получим уравнения движения материальной точки в виде

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b, \quad F_\tau = \mathbf{F}\boldsymbol{\tau}, \quad F_n = \mathbf{F}\mathbf{n}, \quad F_b = \mathbf{F}\mathbf{b}. \quad (2.2)$$

Уравнения движения материальной точки в криволинейной системе координат представляются в форме

$$\frac{m}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T'}{\partial q_i} \right) = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Здесь для проекций ускорения на оси криволинейной системы координат использованы выражения (2.2.7) (см. § 2.2). Величины

$Q_i = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_i H_i = \sum_{k=1}^3 X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$ называются обобщенными силами, а уравнения (2.3) принимают вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.4)$$

Функция T называется кинетической энергией материальной точки.

II. Напишем уравнения движения материальной точки по плоскости Ox_1x_2 в полярной системе координат под действием силы $\mathbf{F} = -kr - \varepsilon \dot{\mathbf{r}}$.

Декартовы координаты связаны с полярными равенствами $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $0 < r < \infty$, $\varphi \bmod 2\pi$. Коэффициенты Ламе и единичные векторы по осям полярной системы координат равны.

$$H_r = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = 1, \quad \xi_r = H_r^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial r}, \frac{\partial x_2}{\partial r} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

$$H_\varphi = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} = r, \quad \xi_\varphi = H_\varphi^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}, \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \right) = (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Поскольку $\xi_r \xi_\varphi = 0$ (система координат ортогональна), то $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \xi_r + r \dot{\varphi} \xi_\varphi$, $T = 1/2 m \dot{\mathbf{r}}^2 = 1/2 m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$. Вычисляя обобщенные силы, найдем выражения

$$Q_r = \mathbf{F} \xi_r H_r = -(kr \xi_r - \varepsilon \dot{r} \xi_r - \varepsilon r \dot{\varphi} \xi_\varphi) \xi_r = -kr - \varepsilon \dot{r},$$

$$Q_\varphi = \mathbf{F} \xi_\varphi H_\varphi = -(kr \xi_r - \varepsilon \dot{r} \xi_r - \varepsilon r \dot{\varphi} \xi_\varphi) \xi_\varphi r = -\varepsilon r^2 \dot{\varphi}.$$

Уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -kr - \varepsilon \dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \Rightarrow m(r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}) = -\varepsilon r^2 \dot{\varphi}.$$

§ 3.3. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ И О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

О.3.1. Величина $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$ называется количеством движения.

Т. Производная количества движения по времени равна силе, действующей на материальную точку.

▲ Доказательство очевидно:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}.$$

Последнее равенство выражает второй закон динамики. ▼

О.3.2. Величина $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ называется моментом количества движения материальной точки.

Т. Производная момента количества движения материальной точки по времени равна моменту силы, действующей на точку.

▲ Под моментом силы относительно точки O понимается вектор $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Далее имеем

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}). \quad \blacktriangledown$$

О.3.3. Функция $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ называется первым интегралом уравнений движения $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, если она постоянна на каждом решении уравнений движения.

С.1. Если проекция силы на неподвижную ось равна нулю во все время движения, то уравнения движения материальной точки имеют первый интеграл: проекция количества движения на эту ось постоянна — закон сохранения количества движения.

▲ Пусть \mathbf{e} — орт неподвижной оси и $\mathbf{F}\mathbf{e} = 0$. Тогда $\mathbf{e}\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{e}\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{e}\mathbf{Q}$ постоянна. ▼

С.2. Если проекция момента силы на неподвижную ось равна нулю во все время движения, то уравнения движения материальной точки имеют первый интеграл: момент количества движения относительно этой оси постоянен — закон сохранения момента количества движения.

▲ Пусть \mathbf{e} — орт неподвижной оси и $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F})\mathbf{e} = 0$. Тогда

$$\mathbf{e}\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{e}\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}) = 0 \Rightarrow \mathbf{G}\mathbf{e} = \text{const.} \quad \blacktriangledown$$

П. На материальную точку действует сила $\mathbf{F} = (-cx_1, -cx_2, 0)$. Проекция силы \mathbf{F} на ось Ox_3 равна нулю и, значит, $m\ddot{x}_3 = 0 \Rightarrow m\dot{x}_3 = \text{const.}$ Количество движения в проекции на ось Ox_3 сохраняется. Момент силы относительно начала координат

$$\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -cx_1 & -cx_2 & 0 \end{vmatrix} = cx_2x_3\mathbf{e}_1 - cx_1x_3\mathbf{e}_2.$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты координатных осей. Поскольку $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F})\mathbf{e}_3 = 0$, то $\mathbf{G}\mathbf{e}_3 = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = \text{const}$ — закон сохранения момента количества движения относительно оси Ox_3 . Заметим, что для вычисления момента силы или количества движения относительно оси необходимо вычислить соответствующий момент относительно какой-либо точки, лежащей на этой оси, и спроектировать полученный вектор на ось.

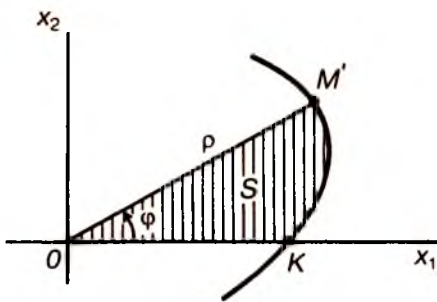


Рис. 14

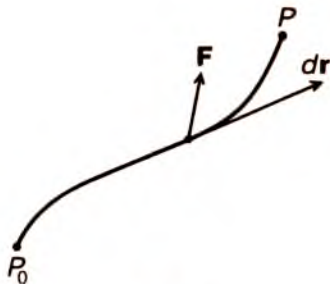


Рис. 15

В цилиндрической системе координат $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$ и $m^{-1} \mathbf{G}e_3 = \rho^2 \dot{\varphi}$. Рассмотрим движение проекции точки на плоскости Ox_1x_2 (рис. 14). Площадь сектора $KM'O$ равна

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi(t)} \rho^2(\varphi) d\varphi \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}.$$

Величина \dot{S} называется секторной скоростью и постоянна, так как она пропорциональна значению интеграла момента количества движения. Другими словами, справедлив закон площадей: если момент силы относительно неподвижной оси Ox_3 равен нулю, то радиус-вектор проекции материальной точки на плоскость Ox_1x_2 за равные промежутки времени заметает равные площади.

§ 3.4. РАБОТА СИЛЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — закон движения материальной точки, \mathbf{F} — сила, действующая на точку, а $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt$ — действительное перемещение.

О.4.1. Элементарной работой силы на действительном перемещении называется дифференциальная форма $dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 X_i dx_i$.

Если материальная точка в процессе движения по траектории переместилась из положения P_0 в положение P , то работа силы на этом перемещении представляется криволинейным интегралом (рис. 15)

$$A = \int_{P_0}^P \mathbf{F}d\mathbf{r}.$$

О.4.2. Если в каждой точке области D трехмерного евклидова пространства задан вектор силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, то говорят, что в области D задано силовое поле.

О.4.3. Силовое поле называется потенциальным, если существует силовая функция $U(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{F} = \nabla_r U(\mathbf{r}, t)$, где $\nabla_r = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$ — оператор градиента по пространственным координатам.

О.4.4. Стационарное потенциальное силовое поле называется консервативным. В этом случае силовая функция не зависит от времени.

Важным свойством силовых полей является независимость работы от пути, соединяющего две фиксированные точки области D . Сформулируем известную теорему анализа о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования: если силовое поле, заданное в односвязной области D , является стационарным ($\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0$) и безвихревым ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$), то оно консервативно, и работа силы при перемещении из точки P_0 в точку P зависит только от этих точек и не зависит от пути, их соединяющего. Из условия $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ следуют условия Коши $\frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$, $k, i = 1, 2, 3$, полного дифференциала выражения $\mathbf{F}d\mathbf{r}$. Здесь функции X_1, X_2, X_3 , зависящие от x_1, x_2, x_3 , — компоненты вектора \mathbf{F} . При вычислении работы получим

$$A = \int_{P_0}^P \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{P_0}^P dU = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0). \quad (4.1)$$

II. Рассмотрим силовые поля на плоскости Oxy , порождаемые силовыми функциями $U_1 = \varphi$ и $U_2 = -r^{-1}$, где (r, φ) — полярные координаты. Силовые поля $\mathbf{F}_k = \nabla_r U_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $k = 1, 2$, определены на всей плоскости Oxy , за исключением начала координат, и консервативны. Если из плоскости Oxy исключить луч, соединяющий начало координат с бесконечно удаленной точкой, то в полученной односвязной области D работа сил не будет зависеть от путей, соединяющих две фиксированные точки. Однако это становится неверным для первого силового поля, если рассматривать всю плоскость с выколотым началом координат. Рассмотрим в качестве пути замкнутый контур — единичную окружность $S_1 = \{(x, y) : x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Тогда в первом случае

$$A = \oint_{S_1} \frac{\partial U_1}{\partial x} dx + \frac{\partial U_1}{\partial y} dy = \oint_{S_1} d\varphi = 2\pi.$$

Функция U_1 многозначна, и работа силы по замкнутому контуру, охватывающему начало координат, равна 2π . Во втором случае

$$A = \oint_{S_1} \frac{\partial U_2}{\partial x} dx + \frac{\partial U_2}{\partial y} dy = \oint_{S_1} \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \oint_{S_1} \frac{dr}{r^2} = 0,$$

так как $dr = 0$ вдоль контура S_1 . В этом случае обход начала координат не влияет на величину работы, хотя область определения силового поля неодносвязна.

О.4.5. Величина $T = 1/2 m \dot{\mathbf{r}}^2$ называется кинетической энергией материальной точки.

Т. При движении материальной точки дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе действующей на точку силы на действительном перемещении.

▲ Имеем

$$dT = m \dot{\mathbf{r}} d\dot{\mathbf{r}} = m \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \dot{\mathbf{r}} dt = m \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad \blacktriangledown$$

С.1. Приращение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении из точки P_0 в точку P равно работе силы на этом перемещении

$$T(\dot{\mathbf{r}}) - T(\dot{\mathbf{r}}_0) = \int_{P_0}^P \mathbf{F} d\mathbf{r},$$

где $\dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\mathbf{r}}$ — скорости материальной точки, соответствующие ее положениям P_0 и P .

С.2. Производная от кинетической энергии по времени равна мощности силы, действующей на точку, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = N, \quad N = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}}.$$

Доказательства следствий 1 и 2 очевидны.

С.3. Если силовое поле консервативно, то полная механическая энергия точки сохраняется при ее движении.

▲ В случае консервативного поля работа силы на пути P_0P равна разности $U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0)$, где $U(\mathbf{r})$ — силовая функция, а \mathbf{r}_0, \mathbf{r} — радиусы-векторы точек P_0, P соответственно. Назовем потенциальной энергией консервативного силового поля величину $V(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$. Из первого следствия найдем

$$T(\dot{\mathbf{r}}) - T(\dot{\mathbf{r}}_0) = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) \Rightarrow T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}) = T(\dot{\mathbf{r}}_0) + V(\mathbf{r}_0) = h.$$

О.4.6. Сумма кинетической и потенциальной энергий называется полной механической энергией.

Таким образом, полная механическая энергия материальной точки $E = T + V = h$ постоянна вдоль траектории — закон сохранения энергии. ▼

Если силовое поле консервативно и задана постоянная полная энергия h , то все траектории движения с полной энергией h расположены в области возможных движений $D_h = \{\mathbf{r} : U(\mathbf{r}) + h \geq 0\}$.

П.1. Рассмотрим движение материальной точки в однородном силовом поле $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$ (падение точки в пустоте). Здесь g — ускорение свободного падения, \mathbf{e}_3 — орт вертикальной оси Ox_3 . Поле консервативно и его потенциальная энергия $V = mg\mathbf{r}\mathbf{e}_3$. Полная энергия $1/2m\dot{\mathbf{r}}^2 + mg\mathbf{r}\mathbf{e}_3 = h$ — закон сохранения энергии. Область возможных движений $D_h = \{\mathbf{r} : h - mg\mathbf{r}\mathbf{e}_3 \geq 0\}$ — полупространство. Уравнение движения точки $m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_3$ имеет решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t - 1/2gt^2\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ — начальные условия движения. Легко показать, что траектория движения есть парабола, расположенная в вертикальной плоскости, являющейся линейной оболочкой векторов \mathbf{e}_3 , $\mathbf{v}(0)$ и проходящей через точку, радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}(0)$.

П.2. Пусть материальная точка движется под действием силы $\mathbf{F} = mf_1(r)\mathbf{r} + mf_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}$. Момент количества движения $\mathbf{G} = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}]$ изменяется согласно уравнению

$$\dot{\mathbf{G}} = [\mathbf{r}, mf_1\dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, mf_2\dot{\mathbf{r}}] = f_2\mathbf{G}.$$

Полагая $\mathbf{G} = G\mathbf{e}$, где $G = |\mathbf{G}|$ получим $\dot{G}\mathbf{e} + G\dot{\mathbf{e}} = f_2G\mathbf{e}$. Умножим последнее равенство скалярно на $\dot{\mathbf{e}}$ и, учитывая равенство $\mathbf{e}\dot{\mathbf{e}} = 0$ (\mathbf{e} — единичный вектор), найдем $G\dot{\mathbf{e}}^2 = 0$. Поскольку в случае общего положения $G \neq 0$ (если $G = 0$, то движение происходит по прямой, проходящей через начало координат), то $\dot{\mathbf{e}} = 0$ и вектор \mathbf{e} постоянен. Далее $\mathbf{r}\mathbf{e}G = 0$, т.е. движение точки происходит в плоскости. Сила $mf_1(r)\mathbf{r}$ консервативна, так как

$$dA = mf_1(r)\mathbf{r}d\mathbf{r} = mf_1(r)rdr = dU, \quad U = \int mf_1(r)rdr.$$

Согласно теореме об изменении энергии

$$dT = -dV + mf_2\dot{\mathbf{r}}d\mathbf{r} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = m_2f_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}^2, \quad E = T + V.$$

Функция $f_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, если речь идет о модели сил сопротивления, противоположных скорости точки, отрицательна, и полная энергия E убывает, когда $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$. Область возможных движений $D_h = \{\mathbf{r} : U(\mathbf{r}) + h \geq 0\}$ в зависимости от вида силовой функции $U(\mathbf{r})$ представляется либо шаром, либо объединением шаровых слоев.

§ 3.5. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ПРЯМОЙ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Прямолинейное движение материальной точки является простейшим типом движения материальной точки. Получим необходимые и достаточные условия прямолинейного движения свободной материальной точки. Пусть движение материальной точки относительно инерциальной системы координат прямолинейно, т.е. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + x_1(t)\mathbf{e}_1$, где $\mathbf{r}_0, \mathbf{e}_1$ ($|\mathbf{e}_1| = 1$) — постоянные векторы. Тогда $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{x}_1\mathbf{e}_1$, т.е. сила, действующая на точку, направлена по оси Ox_1 (\mathbf{e}_1 — орт оси Ox_1). Уравнения движения в проекциях на оси Ox_2, Ox_3 имеют вид $m\ddot{x}_2 = 0, m\ddot{x}_3 = 0$ и их решения $x_2 = x_2(0) + \dot{x}_2(0)t, x_3 = x_3(0) + \dot{x}_3(0)t$. Достаточные условия прямолинейности движения представляются равенствами $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$.

Рассмотрим несколько случаев прямолинейного движения вдоль оси Ox .

1. Движение под действием силы, зависящей от времени. Имеем

$$m\ddot{x} = F(t) \Rightarrow x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \int_0^t \int_0^\tau m^{-1} F(\xi) d\xi d\tau.$$

2. Движение под действием силы, зависящей от скорости. Имеем

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}) \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{mdv}{F(v)} = t, \quad v = \dot{x}.$$

Обозначая через $\Psi(v)$ первообразную функции $m[F(v)]^{-1}$, получим $\Psi(v) - \Psi(v_0) = t, v = \Psi^{-1}(t + \Psi(v_0))$ и

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \Psi^{-1}(\tau + \Psi(v_0)) d\tau.$$

П.1. Если $F = -c\dot{x}, c > 0$ — сила сопротивления пропорциональна скорости, то

$$\Psi(v) = -\int \frac{mdv}{cv} = -\frac{m}{c} \ln v, \quad \Psi^{-1}(t + \Psi(v_0)) = e^{-\frac{c}{m}(t - \frac{m}{c} \ln v_0)} = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

Закон движения точки

$$x(t) = x(0) - mv_0 c^{-1} \left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \right).$$

Когда t стремится к бесконечности, $x(t)$ стремится к $x(0) + mc^{-1}v_0$.

П.2. Пусть $F = mg - mcv^2 \text{sign } v$ — модель падения тела по вертикали с учетом сопротивления воздуха. Предположим, что в начальный момент времени $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Тогда

$$\Psi(v) = \int \frac{dv}{g - cv^2} = \frac{1}{2\sqrt{gc}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{cv}}{\sqrt{g} - \sqrt{cv}}.$$

С учетом начальных условий равенство $\Psi(v) - \Psi(0) = t$, представляется в виде

$$\ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{cv}}{\sqrt{g} - \sqrt{cv}} = 2\sqrt{gc} t \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{c}} \text{th}(\sqrt{gc} t).$$

Ясно, что при $t \rightarrow \infty$ $v(t) \rightarrow \sqrt{gc^{-1}}$, т.е. тело будет падать с постоянной скоростью. Нетрудно найти и закон движения $x(t)$.

3. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от положения точки. Если сила $F = F(x)$, то существует силовая функция $U(x)$ и интеграл энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) = h, \quad U(x) = \int F(x) dx. \quad (5.1)$$

О.5.1. Плоскость с координатами (x, \dot{x}) называется фазовой плоскостью.

О.5.2. Однопараметрическое семейство кривых

$$C_h = \{(x, \dot{x}) : 1/2 m\dot{x}^2 - U(x) = h\}$$

на фазовой плоскости называется фазовым портретом.

Множество C_h , вообще говоря, есть объединение конечного или бесконечного числа фазовых траекторий. Начальные условия движения $(x(0), \dot{x}(0))$ определяют односвязную компоненту множества C_h — фазовую траекторию, по которой в дальнейшем движется точка на фазовой плоскости. Закон движения материальной точки определяется из соотношений

$$\pm \int \frac{\sqrt{m} dx}{\sqrt{2(h + U(x))}} = \Phi(x), \quad \Phi(x) - \Phi(x_0) = t, \quad x = \Phi^{-1}(t + \Phi(x_0)).$$

Отметим ряд свойств фазовых кривых:

- а) фазовая кривая симметрична относительно оси Ox (см. (5.1));
- б) через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая кривая (теорема существования и единственности решений дифференциальных уравнений);
- в) точки с координатами $(x_k, 0)$, где x_k — корни уравнения $\partial U(x)/\partial x = 0$ (стационарные точки силовой функции), являются фазовыми кривыми и называются положениями равновесия;

г) если точка $(x, 0)$ не является положением равновесия, то через нее проходит фазовая траектория, касательная к которой в этой точке ортогональна оси Ox . Другими словами, фазовые траектории пересекают ось Ox в регулярных точках под прямым углом.

▲ Вычислим

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{m} (h + U(x))} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{\sqrt{h + U(x)}} \frac{dU(x)}{dx}$$

Числитель дроби отличен от нуля, а знаменатель равен скорости точки $\dot{x} = 0$. ▼

II. Пусть масса материальной точки $m = 2$, потенциальная энергия $V = -U(x) = -\cos x$ и точка движется по оси Ox . Уравнения движения и интеграл энергии представляются в виде

$$2\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -\sin x, \quad \dot{x}^2 - \cos x = h.$$

Линии уровня полной энергии $C_h = \{(x, \dot{x}) : \dot{x} = \pm \sqrt{h + \cos x}\}$ образуют фазовый портрет (рис. 16). Если $h < -1$, то множество C_h пусто. При $h = -1$ $C_h = \{\dot{x} = 0, x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ — множество положений равновесия. Когда $-1 < h < 1$, фазовые траектории суть замкнутые линии и движение периодично. Такой тип движения называется либрационным. Значению полной энергии $h = 1$ соответствует набор положений равновесия $\{\dot{x} = 0, x = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ и сепаратрис, их соединяющих. Движение по сепаратрисам называется лимитационным, а время движения по сепаратрисе к положению равновесия стремится к бесконечности. В самом деле, если выбрать сепаратрису в верхней полуплоскости и начать движение из точки $x = 0, \dot{x} = \sqrt{2}$, то

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4} \right).$$

При $x \rightarrow \pi$ время движения $t \rightarrow \infty$.

Если $h > 1$, то движение ротационное и x стремится либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ в зависимости от знака скорости. Фазовый портрет 2π -периодичен по координате x .

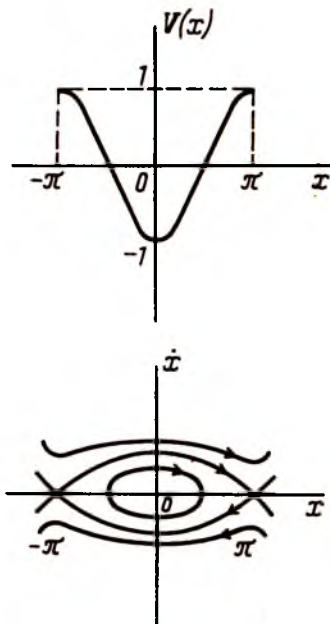


Рис. 16

Вычислим наклон касательной к сепаратрисе, лежащей в верхней полуплоскости $\dot{x} > 0$, при $x \rightarrow \pi$. Имеем

$$\left. \frac{d\dot{x}}{dx} \right|_{x=\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Рассмотрим задачу о движении гармонического осциллятора под действием периодической силы. Гармоническим осциллятором называется материальная точка, движущаяся под действием восстанавливающей силы, пропорциональной отклонению точки от некоторой фиксированной точки на прямой (например, начала координат), т.е. $F = -cx$. Если на точку массой m кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления $-2m\epsilon\dot{x}$ и периодическая сила $mA \cos \omega t$, то уравнение ее движения примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - 2m\epsilon\dot{x} + mA \cos \omega t. \quad (5.2)$$

Параметр ϵ характеризует свойство вязкости внешней среды. Рассмотрим различные ситуации.

а) Свободные колебания гармонического осциллятора ($\epsilon = A = 0$). Общее решение уравнения (5.2) в этом случае имеет вид $x = A_1 \cos vt + A_2 \sin vt$, $v^2 = cm^{-1}$ и описывает гармонические колебания на собственной частоте v . Произвольные постоянные A_1, A_2 определяются из начальных условий движения ($x(0), \dot{x}(0)$). Полная энергия $/2(m\dot{x}^2 + cx^2) = h$ сохраняется. Фазовые траектории C_h суть эллипсы, и движение по ним периодически с периодом $2\pi v^{-1}$ (рис. 17, а).

О.5.3. Частота v называется собственной частотой колебаний гармонического осциллятора.

б) Затухающие колебания гармонического осциллятора ($A = 0$). Если ϵ положительно и $v > \epsilon$, то общее решение уравнения (5.2) в этом случае имеет вид $x = e^{\epsilon t} (A_1 \cos v_* t + A_2 \sin v_* t)$, $v_* = \sqrt{v^2 - \epsilon^2}$.

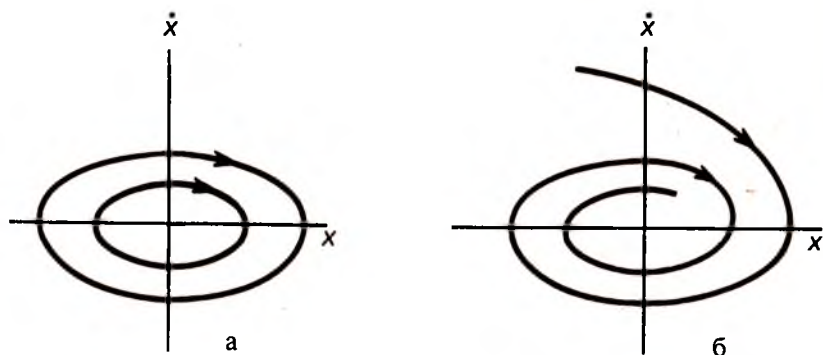


Рис. 17

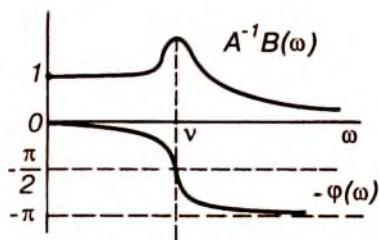


Рис. 18

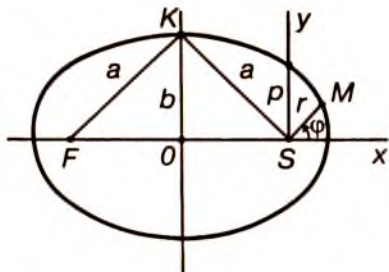


Рис. 19

Колебания затухают и $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Характер фазовой траектории представлен на рис. 17, б. Точка $(0, 0)$ является положением равновесия, и все фазовые траектории стремятся к ней при $t \rightarrow \infty$.

Если вязкость достаточно велика $\epsilon > \nu$, то движение теряет колебательный характер и $x(t)$ монотонна, начиная с некоторого момента времени.

в) Если $\epsilon \neq 0$ и $A \neq 0$, то решение уравнения (5.2) складывается из общего решения однородного уравнения и его частного решения. Общее решение однородного уравнения при $t \rightarrow \infty$ затухает и при больших значениях времени не будет практически влиять на характер движения (см. п. б). Вынужденные колебания (частное решение) описываются соотношением

$$x(t) = \frac{A[(\nu^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\epsilon\omega \sin \omega t]}{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2} = B(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)).$$

Колебания происходят на частоте вынуждающей силы ω с амплитудой $B(\omega)$ и со сдвигом фаз $\varphi(\omega)$, где

$$B(\omega) = \frac{A}{\sqrt{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{2\epsilon\omega}{\nu^2 - \omega^2}.$$

Зависимости амплитуды и фазы от частоты (амплитудно-фазовые характеристики) представлены на рис. 18.

Если частота вынуждающей силы ω совпадает с собственной частотой гармонического осциллятора ν и сопротивление движению равно нулю ($\epsilon = 0$), то вынужденные колебания описываются уравнением

$$x(t) = \frac{At}{2\omega} \sin \omega t.$$

Амплитуда колебаний растет по линейному закону. Это явление называется резонансом.

§ 3.6. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ. ФОРМУЛЫ БИНЕ

О.6.1. Сила $\mathbf{F} = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор материальной точки в инерциальной системе координат, называется центральной силой.

Уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}. \quad (6.1)$$

Л. При движении точки под действием центральной силы траектория движения есть плоская кривая.

▲ По теореме об изменении момента количества движения

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \overline{\mathcal{M}_0(\mathbf{F})} = [\mathbf{r}, f\mathbf{r}] = 0,$$

и вектор момента количества движения $\mathbf{G} = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}]$ постоянен. Поскольку скалярное произведение $\mathbf{G}\mathbf{r} = 0$, то движение происходит в плоскости $\{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3, \mathbf{G}\mathbf{r} = 0\}$, проходящей через начало координат с нормалью \mathbf{G} . ▼

Введем в плоскости движения полярную систему координат (r, φ) . Скорость и ускорение точки в проекциях на оси полярной системы координат равны (см. § 2.2) $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$, где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ — орты полярной системы координат. Уравнения движения в полярной системе координат примут вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F, \quad F = |\mathbf{F}|, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из второго уравнения (6.2) следует закон площадей $r^2\dot{\varphi} = c$. Поскольку полярный радиус $r(t) > 0$, то полярный угол $\varphi(t)$ изменяется монотонно со временем, если $c \neq 0$. Тогда функция $\varphi = \varphi(t)$ имеет обратную $t = t(\varphi)$ (теорема о неявной функции), и траектория движения может быть представлена в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$.

Найдем зависимость скорости точки от угла φ , если задана постоянная площадей c и траектория движения $r = r(\varphi)$. Имеем

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right] \dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^4} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right],$$

или

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right], \quad u = r^{-1}, \quad (6.3)$$

— первая формула Бине.

Действующая на точку сила определяется из первого уравнения (6.2) в виде

$$F = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right), \quad u = r^{-1}, \quad (6.4)$$

если учесть, что операторы дифференцирования по времени и по углу φ связаны соотношением $d/dt = cr^{-2} d/d\varphi$. Соотношение (6.4) называется второй формулой Бине и позволяет определять центральную силу, действующую на точку, если известна ее траектория и постоянная площадей.

§ 3.7. ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ. ВЫВОД ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ ИЗ ЗАКОНОВ КЕПЛЕРА

Многолетние результаты наблюдений за движением планет Солнечной системы, полученные датским астрономом Тихо Браге, были проанализированы Иоганном Кеплером, который сформулировал три закона движения планет. И. Кеплер рассматривал планеты как материальные точки.

Первый закон. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

В полярной системе координат (r, φ) , полюс которой совпадает с Солнцем, траектория планеты представляется в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где p — параметр орбиты, e — эксцентриситет, φ_0 — долгота перигелия.

Второй закон. Площади, описываемые радиусом-вектором планеты относительно Солнца, пропорциональны времени движения планеты.

Второй закон постулирует справедливость закона площадей $r^2 \dot{\varphi} = c$.

Третий закон. Для планет, движущихся по эллипсам, квадраты времен их обращения пропорциональны кубам больших полуосей эллипсов.

Отношение T^2/a^3 одинаково для всех планет Солнечной системы, где T — период обращения планеты, a — большая полуось ее эллиптической орбиты.

Найдем силу, под действием которой движутся планеты Солнечной системы. Эту задачу решил И. Ньютон после того, как им была предложена модель механической системы.

Система координат $Sxyz$, начало которой совпадает с Солнцем, а оси направлены на неподвижные звезды, считается инерциальной. Пусть ось Sz ортогональна плоскости орбиты какой-нибудь планеты, а r, φ — полярные координаты планеты в плоскости орбиты. Согласно второму закону динамики

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= F_z, \\ m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} &\Rightarrow m(r - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Поскольку $z \equiv 0$, то $F_z = 0$. Из второго закона Кеплера, вычисляя производную по времени, найдем $r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = 0$. Сравнивая полученное выражение с третьим уравнением (7.1), получим $F_\varphi = 0$. Следовательно, сила $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r$ — центральная сила. Для определения ее величины воспользуемся второй формулой Бине. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} u &= r^{-1} = p^{-1}[1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)], \\ F &= -\frac{mc^2 u^2}{p} = -\frac{m\mu}{r^2}, \quad \mu = \frac{c^2}{p}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Получим ряд соотношений для эллиптической траектории (рис. 19). Имеем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \Rightarrow 2a = r_p + r_A = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}, \quad a = \frac{p}{1-e^2}. \quad (7.3)$$

Здесь $r_p = |SP|$, $r_A = |SA|$ — расстояния от Солнца до перигелия P и афелия A соответственно, a — большая полуось эллипса. Далее

$$|OS| = a - r_p = a - a(1 - e) = ae,$$

где O — центр эллипса. Пусть F — второй фокус эллипса. Если M — произвольная точка эллипса, то $|MS| + |MF| = 2a$. Малая полуось эллипса $b = |OK|$ определяется из треугольника OKS по теореме Пифагора $b^2 = a^2 - a^2 e^2 = ap$. Секторная скорость равна $\kappa ab T^{-1} = 1/2c$, где c — постоянная интеграла площадей, T — период обращения планеты, κab — площадь эллипса. Отсюда

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{T^2} \Rightarrow \mu = \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Отношение a^3/T^2 постоянно для всех планет Солнечной системы по третьему закону Кеплера, и, следовательно, постоянная μ

В формуле (7.2) есть характеристика силового поля, описывающего взаимодействие Солнца и планет Солнечной системы. Силовое поле (7.2) консервативно и его силовая функция

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\mu m}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.4)$$

Таким образом, Солнце притягивает все планеты, и сила притяжения прямо пропорциональна массе планеты и обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца до планеты.

Естественно предположить, что все материальные точки (тела достаточно малых размеров по сравнению с расстоянием между ними) притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}, \quad (7.5)$$

где m_1, m_2 — массы материальных точек, r — расстояние между ними, γ — гравитационная постоянная. Зависимость (7.5) была экспериментально проверена с высокой степенью точности и тем самым было установлено фундаментальное свойство материи — гравитационное взаимодействие материальных объектов. Постоянные m_1, m_2 в законе всемирного тяготения называются гравитационными массами, а постоянная во втором законе механики $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ называется инертной массой. Многочисленные эксперименты, в частности законы Кеплера и законы падения тел на Землю, показали, что эти две характеристики материи совпадают, т.е. инертная масса равна гравитационной. Гравитационная постоянная $\gamma = 6,669 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2 \text{кг}^{-2}$.

§ 3.8. ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ. УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИСТИННОЙ И ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ АНОМАЛИЯМИ

И. Ньютон поставил и решил прямую задачу механики: определить движение планеты, притягиваемой Солнцем с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, т.е. с силой $\mathbf{F} = -\mu m r^{-3} \mathbf{r}$, где m — масса планеты, μ — гравитационный параметр, \mathbf{r} — радиус-вектор планеты относительно Солнца. Система координат с началом в Солнце и осями, направленными на звезды, считается инерциальной. Решение задачи разобьем на несколько этапов.

1. *Определение траектории движения.* Поскольку движение происходит в центральном поле сил, то согласно второй формуле Бине

$$-m\mu u^2 = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right), \quad u = \frac{1}{r}.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

решение которого представляется в виде

$$u = \frac{\mu}{c^2} + \frac{\mu}{c^2} e \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (8.1)$$

где e, φ_0 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения. Соотношение (8.1) приводится к виду

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}. \quad (8.2)$$

Из формулы (8.2) следует, что траектория движения есть коническое сечение: эллипс, если $e < 1$; парабола, если $e = 1$; гипербола, если $e > 1$.

2. *Закон движения. Уравнение Кеплера.* Элементарная работа силового поля

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\frac{m\mu}{r^3} \mathbf{r} d\mathbf{r} = -\frac{m\mu}{r^3} r dr = d\left(\frac{m\mu}{r}\right).$$

Центральное ньютоновское поле тяготения консервативно и его потенциальная энергия $V = -m\mu r^{-1}$. Из теоремы об изменении кинетической энергии следует закон сохранения полной механической энергии

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + V(r) = mh \Rightarrow \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = h. \quad (8.3)$$

Здесь r, φ — полярные координаты планеты в плоскости ее движения. В случае центральных сил справедлив закон площадей $r^2 \dot{\varphi} = c$, используя который перепишем равенство (8.3) в виде

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{эф}}(r) = h, \quad V_{\text{эф}}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}. \quad (8.4)$$

Функция $V_{\text{эф}}(r)$ называется эффективной потенциальной энергией. Задача об изменении величины $r(t)$ фактически свелась к задаче о движении материальной точки единичной массы по прямой под действием консервативной силы с потенциалом $V_{\text{эф}}(r)$. Для исследования этой задачи воспользуемся методом фазовой

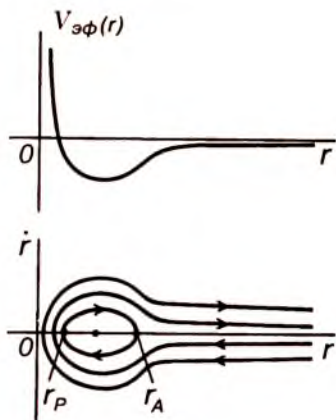


Рис. 20

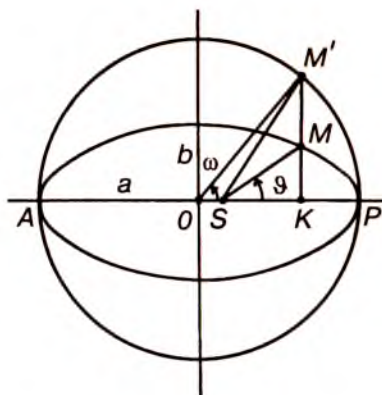


Рис. 21

плоскости. Фазовый портрет движения изображен на рис. 20. Если $h < 0$, то функция $r(t)$ ограничена и движение происходит, очевидно, по эллипсу. Пусть замкнутая фазовая траектория пересекает ось абсцисс в точках с координатами r_p и r_A . Интеграл энергии (8.4) в этих точках примет вид

$$\frac{c^2}{2r_{p,A}^2} - \frac{\mu}{r_{p,A}} = h.$$

Отсюда следует, что r_p и r_A являются корнями квадратного уравнения

$$r^2 + \frac{\mu}{h}r - \frac{c^2}{2h} = 0.$$

По теореме Виета $r_p + r_A = -\mu h^{-1}$, а с другой стороны, $r_p + r_A = 2a$, где a — большая полуось эллипса. Эксцентриситет орбиты определяется из формулы (7.3)

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{2c^2 h}{\mu^2}}. \quad (8.5)$$

При $h \geq 0$ фазовые траектории пересекают ось абсцисс в одной точке $r = r_p$, соответствующей минимальному расстоянию от материальной точки до притягивающего центра. Из формулы (8.2) следует, что $r_p = p(1 + e)^{-1} = c^2 \mu^{-1} (1 + e)^{-1}$. Интеграл энергии (8.4) в точке $(r_p, 0)$ имеет вид

$$\frac{c^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = h.$$

Отсюда, исключая r_p , найдем эксцентриситет орбиты. Имеем

$$(1+e)^2 - 2(1+e) - \frac{2hc^2}{\mu^2} = 0 \Rightarrow e = \pm \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{\mu^2}}$$

Постоянная e в формуле (8.2) предполагается неотрицательной. Тогда в последней формуле нужно выбрать знак «+» перед радикалом и получить формулу (8.5) в случае $h \geq 0$. Вывод: при $h = 0$ эксцентриситет $e = 1$ и движение происходит по параболе; при $h > 0$ эксцентриситет $e > 1$ и движение происходит по гиперболе. В обоих случаях $r(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Скорость $\dot{r}(t)$ при движении по параболе стремится к нулю, а при движении по гиперболе — к положительной величине при стремлении t к бесконечности.

Найдем зависимость $r(t)$ в случае эллиптического движения планеты ($h < 0$). Из интеграла энергии (8.4), разделяя переменные и выражая постоянные h, c^2 через постоянные a, e , получим

$$\pm \int_{r_p}^r \frac{\sqrt{a} \, r \, dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} = \sqrt{\mu} (t - t_0). \quad (8.6)$$

Здесь t_0 — момент прохождения планетой перигелия. Знак «+» соответствует изменению r от r_p до r_A , а знак «-» — от r_A до r_p . Введем вспомогательную переменную w по формуле

$$r = a(1 - e \cos w). \quad (8.7)$$

Интеграл в (8.6) вычисляется в элементарных функциях и равенство (8.6) представляется в виде

$$w - e \sin w = n(t - t_0), \quad n = \mu^{1/2} a^{-3/2}. \quad (8.8)$$

Соотношение (8.8) называется уравнением Кеплера и вместе с равенством (8.7) определяет зависимость r от времени неявным образом. Заметим, что при вычислении интеграла (8.6) знак «+» соответствует изменению w от 0 до π , а знак «-» — от π до 2π . Угловая переменная w называется эксцентрической аномалией и имеет простой геометрический смысл (рис. 21). Построим на большой оси эллипса окружность радиусом a . Если прямая $M'MK$ ортогональна к OP , то $|KM| : |KM'| = b : a$ (эллипс получается из окружности преобразованием сжатия по оси Oy в b/a раз). Площадь криволинейной фигуры SMP равна площади фигуры $SM'P$, умноженной на коэффициент b/a . С другой стороны, по закону площадей

$$S_{SMP} = \frac{\pi ab}{T}(t - t_0),$$

где T — период обращения планеты по эллипсу, а $\pi ab T^{-1}$ — постоянная секторная скорость. Поскольку $S_{SMP} = S_{OMP} - S_{AOSM}$, то приходим к равенству

$$\frac{\pi ab}{T}(t - t_0) = \frac{b}{a} \left(\pi a^2 \frac{w}{2\pi} - \frac{1}{2} a^2 e \sin w \right)$$

и далее

$$w - e \sin w = \frac{2\pi}{T}(t - t_0). \quad (8.9)$$

Сравнивая выражения (8.9) и (8.8), приходим к выводу, что средняя аномалия $n(t - t_0) = 2\pi T^{-1}(t - t_0)$ и $T^2 a^{-3} = 4\pi^2 \mu^{-1}$ — третий закон Кеплера.

3. *Связь между истинной и эксцентрической аномалиями.* Полярный угол ϑ , измеряемый от точки перигелия, называется истинной аномалией. Поскольку $\vartheta = \varphi - \varphi_0$, то согласно (8.2) и (8.7) с учетом (8.5) получим

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta} = a(1 - e \cos w). \quad (8.10)$$

Из соотношения (8.10) определяется

$$\cos w = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (8.11)$$

Далее

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos w}{1 + \cos w}} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (8.12)$$

Формулы (8.11) и (8.12) связывают истинную и эксцентрическую аномалии.

§ 3.9. ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО. ПРИНЦИП ОСВОБОЖДАЕМОСТИ ОТ СВЯЗЕЙ

Заслуживают внимания механические модели, в которых перемещения точек стеснены определенными условиями. Например, точка должна все время находиться на поверхности или линии.

О.9.1. Говорят, что на перемещения материальной точки наложена голономная двусторонняя связь, если в процессе движения радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет уравнению $f(\mathbf{r}(t), t) = 0$.

0.9.2. Множество $M = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in E^3, f(\mathbf{r}, t) = 0\}$ называется конфигурационным многообразием или пространством материальной точки со связью.

Функция $f(\mathbf{r}, t)$ предполагается дифференцируемой и градиент $\nabla_r f(\mathbf{r}, t) \neq 0$, когда $\mathbf{r} \in M$.

0.9.3. Действительным перемещением точки называют вектор $d\mathbf{r}$, удовлетворяющий соотношению $\nabla_r f d\mathbf{r} + \partial f / \partial t dt = 0$.

0.9.4. Возможным перемещением точки называют вектор $\delta \mathbf{r} \in T_r M = \{\xi: \xi \in E^3, \xi \nabla_r f = 0\}$.

Оператор ∇_r означает вычисление градиента по компонентам вектора \mathbf{r} . Многообразие M определяет поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E^3 .

Если $\partial f / \partial t = 0$, то многообразие называется стационарным. В этом случае траектория точки принадлежит поверхности M и $\nabla_r f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0$, т.е. $d\mathbf{r} \in T_r M$ — действительные перемещения принадлежат множеству возможных.

Если условий, ограничивающих движение точки, два ($f_1(\mathbf{r}, t) = 0$, $f_2(\mathbf{r}, t) = 0$), то конфигурационное многообразие $M = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in E^3, f_k(\mathbf{r}, t) = 0, k = 1, 2\}$. При фиксированном t множество M представляется линией в трехмерном пространстве, а касательное пространство $T_r M = \{\xi: \xi \in E^3, \xi \nabla_r f_k = 0, k = 1, 2\}$, если начала векторов ξ совпадают с концом вектора \mathbf{r} , определяет касательную к линии M .

Предполагается, что векторы $\{\nabla_r f_k\}_{k=1}^2$ линейно независимы на M .

Размерность конфигурационного пространства M совпадает с размерностью касательного пространства $T_r M$ и равна $n = 3 - l$, где l — число связей, наложенных на перемещения точки ($l = 1$ для поверхности и $l = 2$ для линии). Если число связей $l = 3$, то конечные уравнения $f_k(\mathbf{r}, t) = 0, k = 1, 2, 3$, определяют положение точки в каждый момент времени, и задача динамики, т.е. задача определения движения по заданным внешним силам, теряет смысл.

3. Множество M может оказаться неодносвязным, например, в случае $f = [(x - 2)^2 + y^2 - 1][(x + 1)^2 + y^2 - 1] = 0$. В механике под конфигурационным многообразием точки понимается односвязная компонента множества M .

При наличии связей материальная точка несвободна и к ней нельзя применить второй закон Ньютона, который сформулирован для свободной материальной точки. Однако следует заметить, что связи, наложенные на перемещения точки, на практике реализуются как взаимодействие различных материальных систем. Сформулируем принцип освобожденности от связей: воздействие связи на движущуюся материальную точку описывается силой, называемой реакцией связей. Движение материальной точки при наличии голономных связей можно рассматривать как движение

свободной точки при условии, что к действующим на точку активным силам добавляются силы реакции связей.

П. а) Пусть $f_1 = r^2 - l^2 = 0$, $\mathbf{r} \in E^3$ — голономная связь. Тогда $M = S^2 = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in E^3, f_1(\mathbf{r}) = 0\}$ — двумерная сфера, $T_{\mathbf{r}}M = \{\xi: \xi \in E^3, 2\mathbf{r}\xi = 0\}$ — касательная плоскость к сфере.

б) Если $f_1 = r^2 - l^2 = 0$, $f_2 = x_3 = 0$, то $M = S^1 = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in E^3, r^2 - l^2 = 0, x_3 = 0\}$ — окружность на плоскости Ox_1x_2 и $T_{\mathbf{r}}M = \{\xi: \xi \in E^3, 2\mathbf{r}\xi = 0, e_3\xi = 0\}$ — касательная к окружности. Здесь e_3 — орт оси Ox_3 .

§ 3.10. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ПО КРИВОЙ. АКСИОМА ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Согласно принципу освобождения от связей, воздействие связей на материальную точку моделируется силой \mathbf{R} , называемой реакцией связей. После введения реакции связей связи можно игнорировать и рассматривать точку как свободную. Уравнение движения точки получим из второго закона динамики. В случае поверхности имеем уравнения

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (10.1)$$

где \mathbf{F} — активная сила, действующая на точку, а $f_1(\mathbf{r}, t) = 0$ — уравнение связи. При движении точки по кривой уравнения примут вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, f_1(\mathbf{r}, t) = 0, f_2(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.2)$$

Системы уравнений (10.1) и (10.2) содержат шесть неизвестных (компоненты векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$), а число уравнений в первом случае — четыре, а во втором — пять. Системы уравнений (10.1), (10.2), состоящие из дифференциальных и конечных уравнений, не могут быть решены, так как число неизвестных превосходит число уравнений.

Дополнительные условия, очевидно, должны содержать информацию о характере реакций связей.

О.10.1. Связи называются идеальными, если работа реакций связей на любом возможном перемещении равна нулю, т.е.

$$\delta A = \mathbf{R}\delta\mathbf{r} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{r} \in T_{\mathbf{r}}M. \quad (10.3)$$

Условие (10.3) называется в механике аксиомой идеальных связей. Из соотношения (10.3) следует, что вектор \mathbf{R} ортогонален касательному пространству $T_{\mathbf{r}}M$ и принадлежит линейной оболочке векторов $\{\nabla_{\mathbf{r}} f_k\}_{k=1}^l$, где $l = 1$ в случае поверхности и $l = 2$ в случае

кривой, т.е. $\mathbf{R} = \sum_{k=1}^l \lambda_k \nabla_r f_k$. Уравнения (10.1) и (10.2) представляются в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla_r f_1, \quad f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (10.4)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2, \quad f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad f_2(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.5)$$

Неизвестные функции времени λ_1 и λ_2 называются множителями Лагранжа, а уравнения (10.4), (10.5) — уравнениями Лагранжа первого рода с неопределенными множителями. Отметим, что число уравнений и число неизвестных совпадают в обоих случаях.

§ 3.11. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ПО КРИВОЙ В НЕЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТАХ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим движение точки по многообразию $M = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3, f(\mathbf{r}, t) = 0\}$. Введем в некоторой области трехмерного пространства криволинейную систему координат (q_1, q_2, q_3) , положив $q_3 = f(x_1, x_2, x_3, t)$. Координаты q_1, q_2 можно, например, выбрать согласно условиям $q_1 = x_1, q_2 = x_2$, если $\partial f / \partial x_3 \neq 0$ в рассматриваемой области пространства. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ и уравнения движения свободной материальной точки (связь отброшена и заменена реакцией) в криволинейных координатах примут вид (см. § 3.2)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad Q_k = \mathbf{F} \xi_k H_k + \mathbf{R} \xi_k H_k. \quad (11.1)$$

Здесь ξ_k — единичные векторы по осям криволинейной системы координат, H_k — коэффициенты Ламе (см. § 2.2), $T = 1/2 m v^2$ — кинетическая энергия точки, зависящая от $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t$. Если точка движется по многообразию M и связь идеальна, то в уравнениях (11.1) следует положить $q_3 \equiv 0$ и $\mathbf{R} = \mathbf{R} \xi_3$. В самом деле, реакция связи $\mathbf{R} =$

$$= \lambda \nabla_r f, \text{ а } \xi_3 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}, \frac{\partial x_2}{\partial q_3}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right) H_3^{-1}, \text{ где } H_3 = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Далее имеем

$$q_3 = f(x_1, x_2, x_3, t) \Rightarrow \delta_{3m} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_m},$$

где δ_{3m} — символ Кронекера. Следовательно, $\nabla_r f \xi_m = 0$ при $m = 1, 2$ и реакция \mathbf{R} направлена по вектору ξ_3 . Таким образом, обобщенные силы Q_1, Q_2 не содержат реакции связи \mathbf{R} , и первые два уравнения системы (11.1) определяют движение точки по поверхности в

независимых координатах q_1, q_2 . После того как найдено решение $(q_1(t), q_2(t))$, зависящее от начальных условий $q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)$, из третьего уравнения системы (11.1) определяется множитель Лагранжа $\lambda(t)$ и тем самым реакция $\mathbf{R}(t)$, обеспечивающая движение по поверхности $q_3=0$, поскольку $\mathbf{R}(t)\xi_3 H_3 = \lambda$.

Если точка движется по кривой, определяемой связями $f_1(\mathbf{r}, t) = 0, f_2(\mathbf{r}, t) = 0$, то в качестве криволинейных координат выберем величины $q_2 = f_1(\mathbf{r}, t), q_3 = f_2(\mathbf{r}, t)$. Координата q_1 может быть выбрана, например, равной x_1 , если в рассматриваемой области пространства якобиан

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_2, x_3)} \neq 0.$$

Тогда замена переменных $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$ взаимно однозначна по теореме о неявной функции. Уравнения движения в криволинейных координатах имеют вид (11.1), где реакция связей $\mathbf{R} = \lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2$. Найдем компоненты обобщенных сил в (11.1), порождаемые реакцией связей $\mathbf{R}(t)$. Имеем

$$\mathbf{R}\xi_k H_k = (\lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \frac{\partial x_2}{\partial q_k}, \frac{\partial x_3}{\partial q_k} \right).$$

Далее

$$q_k = f_{k-1}(x_1, x_2, x_3, t) \Rightarrow \delta_{km} = \nabla_r f_{k-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m}, \quad k = 2, 3, \quad m = 1, 2, 3.$$

Здесь δ_{km} — символ Кронекера. Отсюда следует, что

$$\mathbf{R}\xi_1 H_1 = 0, \quad \mathbf{R}\xi_2 H_2 = \lambda_1, \quad \mathbf{R}\xi_3 H_3 = \lambda_2.$$

Если в системе уравнений (11.1) положить $q_2=0, q_3=0$, то первое уравнение, содержащее переменную $q_1(t)$, определяет движение точки по кривой в зависимости от начальных условий $q_1(0), \dot{q}_1(0)$. После того как найдено движение по кривой, из двух последних уравнений определяются множители Лагранжа $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и тем самым реакция связей $\mathbf{R}(t)$, обеспечивающая движение по кривой.

§ 3.12. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ДВИЖЕНИЕ ПО ИНЕРЦИИ

При движении материальной точки по гладкой поверхности, заданной уравнением $f(\mathbf{r}, t) = 0$, реакция связи $\mathbf{R} = \lambda \nabla_r f$ совпадает с нормалью к поверхности. Используя принцип освобожденности

от связей, запишем уравнение движения точки и теорему об изменении кинетической энергии в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad d\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \mathbf{F}d\mathbf{r} + \mathbf{R}d\mathbf{r}.$$

Поскольку $\nabla_r f d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$, то $\mathbf{R}d\mathbf{r} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt$. Если поверхность стационарна ($\partial f/\partial t = 0$), то работа реакции связи на действительном перемещении равна нулю ($\mathbf{R}d\mathbf{r} = 0$) и $d(1/2 m\dot{\mathbf{r}}^2) = \mathbf{F}d\mathbf{r}$. Если, кроме того, силовое поле консервативно ($\mathbf{F}d\mathbf{r} = dU(\mathbf{r})$), то имеет место интеграл энергии $T + V = h$, $V = -U$, $T = 1/2 m\dot{\mathbf{r}}^2$.

При движении точки по кривой $M = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3, f_1(\mathbf{r}, t) = 0, f_2(\mathbf{r}, t) = 0\}$ реакция связей, если они идеальны, $\mathbf{R} = \lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2$. Теорема об изменении кинетической энергии в этом случае представляется в форме

$$d\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \mathbf{F}d\mathbf{r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt.$$

Если связи стационарны ($\partial f_i/\partial t = 0$, $i = 1, 2$), а активная сила \mathbf{F} консервативна ($\mathbf{F} = \nabla_r U(\mathbf{r})$), то имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h, \quad V = -U.$$

С. Траектория точки при движении по инерции по гладкой стационарной поверхности является геодезической кривой.

▲ Поскольку поверхность стационарна, а активная сила равна нулю (движение по инерции), то из закона сохранения энергии следует, что материальная точка движется с постоянной по модулю скоростью ($\mathbf{v}^2 = \text{const}$). Уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника имеют вид (см. § 2.1)

$$m \frac{dv}{dt} = R_\tau = 0, \quad \frac{mv^2}{\rho} = R_n = R, \quad 0 = R_b.$$

Отсюда следует, что нормаль к поверхности совпадает с главной нормалью к траектории, а такие кривые и являются по определению геодезическими. ▼

§ 3.13. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

О.13.1. Математическим маятником называется материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой окружности, расположенной в вертикальной плоскости.

Пусть окружность расположена в плоскости Ox_2x_3 , ось Ox_3 вертикальна и конфигурационное многообразие $M = S^1 = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in E^3,$

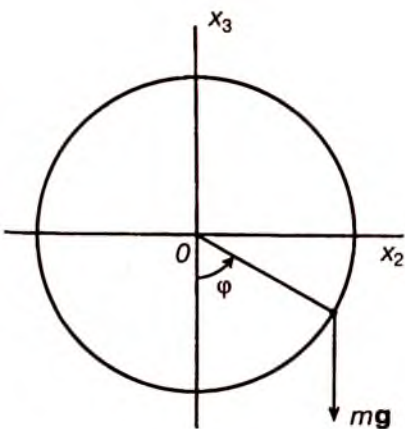


Рис. 22

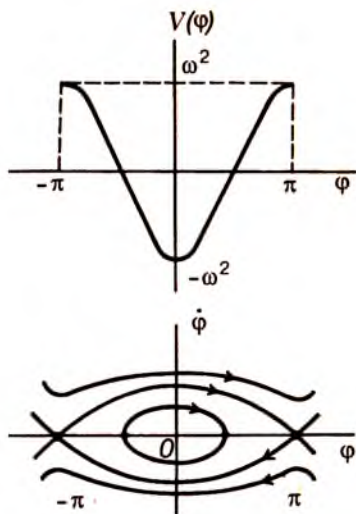


Рис. 23

$f_1 = x_1 = 0, f_2 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} - l = 0$ (рис. 22). Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) , положив $x_1 = z, x_2 = r \sin \varphi, x_3 = -r \cos \varphi$. При движении точки по окружности $f_1 = z = 0, f_2 = r - l = 0$. Освободим материальную точку от связей и запишем уравнения ее движения в цилиндрических координатах. Реакция связей $\mathbf{R} = \lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2$ и внешняя сила $\mathbf{F} = -mg \mathbf{e}_3$ (\mathbf{e}_3 — орт вертикали) порождают обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -mg \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} + \lambda_1 \nabla_r f_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} + \lambda_2 \nabla_r f_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \\ Q_z &= -mg \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \lambda_1 \nabla_r f_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \lambda_2 \nabla_r f_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}, \\ Q_\rho &= -mg \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} + \lambda_1 \nabla_r f_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} + \lambda_2 \nabla_r f_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Если заметить, что $\nabla_r f_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial f_k^*}{\partial q_k}$, где q_k принимает значения z, ρ , а f_k^* есть функция f_k , в которой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, z, \rho)$, то соотношения (13.1) примут вид

$$Q_\varphi = -mg\rho \sin \varphi, \quad Q_z = \lambda_1, \quad Q_\rho = mg \cos \varphi + \lambda_2.$$

Поскольку $T = 1/2 m \dot{\mathbf{r}}^2 = 1/2 m (\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)$, то уравнения движения в цилиндрических координатах представляются в виде

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi} \Rightarrow m(\rho^2 \ddot{\varphi})^* = -mg \rho \sin \varphi, \\ z: \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} &= Q_z \Rightarrow m\ddot{z} = \lambda_1, \\ \rho: \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} &= Q_{\rho} \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi + \lambda_2. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Полагая выполненными условия связей ($\rho = l, z = 0$), получим из системы (13.2) равенства

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi &= 0, \quad \omega^2 = gl^{-1}, \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = -mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Первое уравнение системы (13.3) определяет движение математического маятника, а два последних — реакции связей.

Уравнение движения математического маятника может быть получено из теоремы об изменении момента количества движения. Вектор момента количества движения $\mathbf{G} = [\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}] = ml^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_1$, а момент активной силы и реакции связей относительно оси Ox_1

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_0 \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{r}, (-mg\mathbf{e}_3)] \mathbf{e}_1 + [\mathbf{r}, (\lambda_1 \nabla_r f_1 + \lambda_2 \nabla_r f_2)] \mathbf{e}_1 = \\ &= -[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \mathbf{e}_1 mgl \sin \varphi + [\mathbf{r}, (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 r r^{-1})] \mathbf{e}_1 = -mgl \sin \varphi. \end{aligned}$$

По теореме об изменении момента количества движения относительно оси Ox_1 получим

$$\frac{d\mathbf{G}\mathbf{e}_1}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_0 \mathbf{e}_1 \Rightarrow ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (13.4)$$

Уравнение (13.4) совпадает с первым уравнением системы (13.3) и определяет движение математического маятника.

Уравнение движения (13.4) допускает интеграл энергии

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2 \cos \varphi = h. \quad (13.5)$$

Семейство кривых $C_h = \{(\varphi, \dot{\varphi}) : 1/2 \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi = h\}$ на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ изображено на рис. 23. Аналогичный фазовый портрет был рассмотрен в примере § 3.5. Отметим основные свойства движения.

а) Изменение угла φ аналогично изменению координаты x при движении материальной точки единичной массы по прямой в потенциальном поле с потенциалом $V = -\omega^2 \cos x$.

б) Положения равновесия $\varphi = 0, \varphi = \pi$ (угол φ задан по модулю 2π) соответствуют значениям постоянной энергии $h = -\omega^2$ и $h = \omega^2$.

в) При $|h| < \omega^2$ имеет место колебательное движение. Зависимость угла φ от времени определяется из соотношения

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(h + \omega^2 \cos \varphi)}} = t. \quad (13.6)$$

Полагая $h = -\omega^2 \cos \alpha$, $\alpha = \max \varphi(t)$ и вводя новую переменную u по формуле $u \sin(\alpha/2) = \sin(\varphi/2)$, представим интеграл (13.6) в виде

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \omega t, \quad k = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда следует, что переменная u является эллиптическим синусом $u = \operatorname{sn}(\omega t, k)$ (см., например, Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. 2. М., 1963). Здесь для простоты принято, что в начальный момент времени $\varphi(0) = 0$. Эллиптический синус изменяется периодически в пределах от -1 до 1 , а угол φ будет соответственно меняться периодическим образом от $-\alpha$ до α . Период колебания маятника выражается через полный эллиптический интеграл первого рода

$$T = \frac{4}{\omega} K, \quad K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Полный эллиптический интеграл K вычисляется путем разложения подынтегральной функции в ряд по переменной k^2u^2 . Имеем

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2} k^2 u^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} k^{2n} u^{2n} + \dots \right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Если k мало, то $k = \sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \dots \right).$$

Здесь α — амплитуда колебаний математического маятника.

г) Если $h > \omega^2$, то движение имеет ротационный характер — угол φ меняется монотонно. Обозначая через $k^2 = 2\omega^2(h + \omega^2)^{-1} < 1$ и вводя новую переменную $u = \sin(\varphi/2)$, представим интеграл (13.6) в виде

$$t = \int_{u_0}^u \frac{k du}{\omega \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \Rightarrow u = \operatorname{sn}\left(\frac{\omega t}{k}, k\right).$$

Переменная u представляется как эллиптический синус, если, как и прежде, принять $\varphi(0) = 0$. При изменении времени от нуля до $k\omega^{-1}K$, где K — полный эллиптический интеграл (13.7), угол φ меняется от нуля до π , если $\dot{\varphi} > 0$, а период полного оборота $T = 2k\omega^{-1}K$.

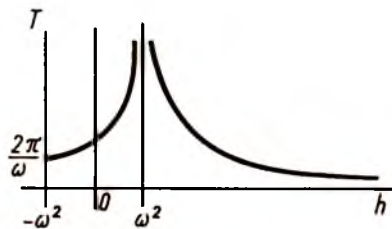


Рис. 24

д) Если $h = \omega^2$, то $k = 1$ и замена переменных $u = \sin(\varphi/2)$ позволяет привести интеграл (13.6) к виду

$$\omega t = \int_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (13.8)$$

если в начальный момент времени $\varphi(0) = 0$. Движение происходит по сепаратрисе, лежащей в верхней полуплоскости фазовой плоскости, от точки $\varphi = 0$ к точке $\varphi = \pi$. Из соотношения (13.8) $\varphi = 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{th} \omega t$. При $t \rightarrow \infty$ угол $\varphi \rightarrow \pi$. Исследуемое движение не является периодическим и называется лимитационным.

На рис. 24 изображена зависимость периода при движении математического маятника от его полной энергии h .

§ 3.14. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Если система координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ инерциальна, а система координат $Ox_1x_2x_3$ движется относительно нее, то абсолютное ускорение точки M по теореме сложения ускорений равно (см. § 2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a &= \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c, & \mathbf{w}_r &= \ddot{\mathbf{r}}, & \mathbf{w}_c &= 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}}], \\ \mathbf{w}_e &= \mathbf{w}_0 + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь \mathbf{w}_a , \mathbf{w}_e , \mathbf{w}_r , \mathbf{w}_c соответственно абсолютное, переносное, относительное и кориолисово ускорения точки M ; $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$; \mathbf{r} — радиус-вектор точки M в подвижной системе координат.

Пусть точка M свободна и на нее действует сила \mathbf{F} . По второму закону динамики с учетом равенств (14.1)

$$m\mathbf{w}_a = \mathbf{F} \Rightarrow m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c, \quad \mathbf{J}_e = -m\mathbf{w}_e, \quad \mathbf{J}_c = -m\mathbf{w}_c. \quad (14.2)$$

Величины $\mathbf{J}_e, \mathbf{J}_c$ называются силами инерции переносного движения и Кориолиса соответственно. Уравнения (14.2) можно трактовать следующим образом: движение точки относительно неинерциальной системы координат происходит согласно второму закону динамики для инерциальных систем при условии, что в число сил, действующих на точку, включены силы инерции переносного движения и Кориолиса.

Если $T = 1/2 m \dot{\mathbf{r}}^2$ — кинетическая энергия точки в относительном движении, то согласно (14.2)

$$dT = \mathbf{F}d\mathbf{r} + \mathbf{J}_e d\mathbf{r} + \mathbf{J}_c d\mathbf{r}.$$

Заметим, что элементарная работа силы инерции Кориолиса $\mathbf{J}_c d\mathbf{r} = -2m[\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathbf{r}}]\dot{\mathbf{r}}dt = 0$. Таким образом, справедлива теорема об изменении энергии в относительном движении: дифференциал кинетической энергии точки в относительном движении равен сумме элементарных работ активной силы и силы инерции переносного движения на относительном перемещении, т.е.

$$dT = \mathbf{F}d\mathbf{r} + \mathbf{J}_e d\mathbf{r}. \quad (14.3)$$

Найдем условия, при которых из теоремы (14.3) следует закон сохранения энергии в относительном движении. Пусть активная сила консервативна: $\mathbf{F}d\mathbf{r} = dU(\mathbf{r})$.

Л. Элементарная работа силы инерции переносного движения представляется полным дифференциалом по переменной \mathbf{r} , если угловое ускорение подвижной системы координат $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

▲ Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e d\mathbf{r} &= -m\{\mathbf{w}_0(t) + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]\}d\mathbf{r} = \\ &= d\left\{-m\mathbf{w}_0(t)\mathbf{r} + \frac{1}{2}m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]^2\right\} - m[\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Последний член в выражении (14.4) является полным дифференциалом, если $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, поскольку

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]d\mathbf{r} &= (\varepsilon_2 x_3 - \varepsilon_3 x_2)dx_1 + (\varepsilon_3 x_1 - \varepsilon_1 x_3)dx_2 + \\ &+ (\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1)dx_3 = \sum_{i=1}^3 X_i dx_i \end{aligned}$$

и из условий Коши

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

следует $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, а угловая скорость подвижной системы координат $\boldsymbol{\omega}$ постоянна. ▼

Если ускорение начала подвижной системы координат w_0 постоянно в системе координат $Ox_1x_2x_3$, то имеет место интеграл Якоби

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + m w_0 \mathbf{r} - \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]^2 - U(\mathbf{r}) = h.$$

Ответим на вопрос: как при этом движется подвижная система координат $Ox_1x_2x_3$? Направим постоянный вектор $\boldsymbol{\omega}$ по оси Ox_3 и найдем проекции ускорения точки O на оси неподвижной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$. Ось Ox_3 не меняет ориентацию в инерциальном пространстве, поскольку

$$\frac{d}{dt} (\Gamma(t) \mathbf{e}_3) = \Gamma(t) \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 + \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \right) = 0.$$

Здесь $\Gamma(t)$ — ортогональный оператор, определяющий переход от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$; \mathbf{e}_3 — орт оси Ox_3 , постоянный в системе координат $Ox_1x_2x_3$, оператор $\boldsymbol{\omega} \times = \Gamma^{-1} \dot{\Gamma}$; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $Ox_1x_2x_3$. Оператор Γ принадлежит группе вращений трехмерного пространства и задается матрицей

$$\Gamma(t) = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

если считать оси $O_1\xi_3$ и Ox_3 сонаправленными, а угол между осями $O_1\xi_1$ и Ox_1 равным ωt . Ускорение точки O в системе координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ равно

$$\begin{aligned} W_1 &= w_1 \cos \omega t - w_2 \sin \omega t, \\ W_0 = \Gamma(t) w_0 &\Rightarrow W_2 = w_1 \sin \omega t + w_2 \cos \omega t, \\ W_3 &= w_3. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Интегрируя дважды соотношения (14.5), найдем закон движения точки O — начала подвижной системы координат

$$\xi_1 = -\frac{w_1}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{w_2}{\omega^2} \sin \omega t + V_1 t + \xi_{10},$$

$$\xi_2 = -\frac{w_1}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{w_2}{\omega^2} \cos \omega t + V_2 t + \xi_{20},$$

$$\xi_3 = \frac{w_3}{2} t^2 + V_3 t + \xi_{30}.$$

Проекция точки O на плоскость $O_1\xi_1\xi_2$ движется равномерно по окружности

$$(\xi_1 - V_1 t - \xi_{10})^2 + (\xi_2 - V_2 t - \xi_{20})^2 = (w_1^2 + w_2^2) \omega^{-4},$$

центр которой перемещается с постоянной скоростью по прямой.

§ 3.15. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМЛИ: ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ, ПАДЕНИЕ ТОЧКИ В ПУСТОТЕ

Допустим, что система координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$, центр которой совпадает с центром Земли, а оси направлены на «неподвижные» звезды, инерциальна. Ось $O_1\xi_3$ совпадает с осью вращения Земли. Неинерциальная система координат $O_1x_1x_2x_3$ жестко связана с Землей и равномерно вращается вокруг оси O_1x_3 , совпадающей с осью $O_1\xi_3$. Обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор свободной материальной точки в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ и запишем уравнения движения в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{m\mu}{(r^2)^{3/2}}\mathbf{r} - m\Omega^2[\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]] - 2m\Omega[\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{r}}]. \quad (15.1)$$

Здесь m — масса точки, μ — гравитационная постоянная Земли, Ω — угловая скорость вращения Земли, \mathbf{e}_3 — орт оси O_1x_3 . Два последних слагаемых в равенстве (15.1) представляют силу инерции переносного движения, вызванную вращением Земли, и силу инерции Кориолиса.

1. *Равновесие точки на поверхности Земли. Вес тела.* В этом случае радиус-вектор \mathbf{r} постоянен, а на точку действует реакция связей — \mathbf{P} (реакция опоры).

О.15.1. Весом тела называется сила, равная и противоположно направленная реакции опоры.

Уравнение (15.1) с учетом реакции связей представим в виде

$$-\mathbf{P} - \frac{m\mu}{(r^2)^{3/2}}\mathbf{r} - m\Omega^2[\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]] = 0. \quad (15.2)$$

Считая Землю шаром с радиусом R и определяя ускорение свободного падения $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = m^{-1}\mathbf{P}$, получим из соотношения (15.2)

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = -\frac{\mu}{R^3}\mathbf{R} + \Omega^2 R \cos\vartheta \mathbf{e}_1. \quad (15.3)$$

Здесь \mathbf{R} — радиус-вектор точки на поверхности Земли, ϑ — геоцентрическая широта места (рис. 25). Единичный вектор \mathbf{e}_1 ортогонален оси O_1x_3 и направлен по оси O_1x_3 , если точка лежит в плоскости $O_1x_1x_3$. Обозначим через g_0 ускорение свободного падения на полюсах Земли ($g_0 = \mu R^{-2}$) и из формулы (15.3) получим

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = g_0 \sqrt{1 + \Omega^4 R^2 g_0^{-2} \cos^2 \vartheta - 2R\Omega^2 g_0^{-1} \cos^2 \vartheta}. \quad (15.4)$$

Поскольку $g_0 \gg \Omega^2 R$ ($g_0 = 289\Omega^2 R$), то из (15.4) следует приближенное равенство

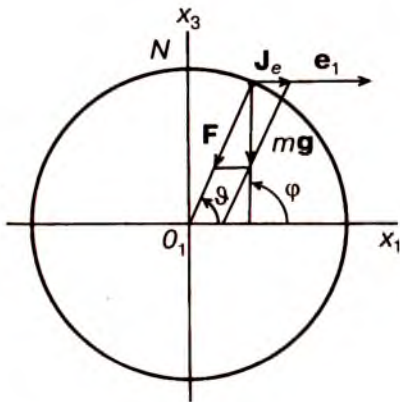


Рис. 25

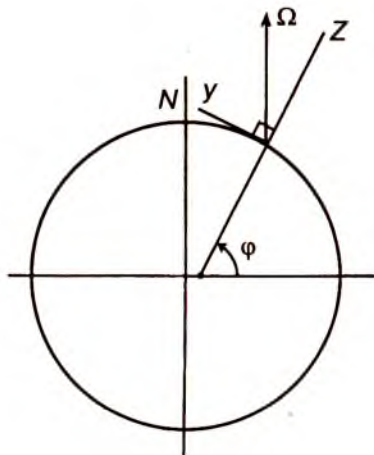


Рис. 26

$$g(\mathbf{R}) \approx g_0 \left(1 - \frac{\Omega^2 R \cos^2 \vartheta}{g_0} \right). \quad (15.5)$$

Формула (15.5) показывает как изменяется ускорение свободного падения или вес тела $mg(\mathbf{R})$ на поверхности Земли в зависимости от геоцентрической широты места.

Угол между местной вертикалью и экватором Земли (угол φ) называется астрономической широтой места. Из рис. 25 легко получить

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{mg_0 \sin \vartheta}{mg_0 \cos \vartheta - m\Omega^2 R \cos \vartheta} = \frac{1}{1 - \Omega^2 g_0^{-1} R} \operatorname{tg} \vartheta.$$

2. *Падение точки в пустоте.* Рассмотрим движение свободной материальной точки в системе координат $Oxyz$, начало которой расположено на поверхности Земли на астрономической широте φ , а ось Oz вертикальна (рис. 26). Ось Ox направим по параллели к востоку, а ось Oy — к северному полюсу Земли. Если ρ — радиус-вектор точки M в системе координат $Oxyz$, то поле силы тяжести в окрестности точки O можно представить в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \rho) = \mathbf{g}(\mathbf{R}) + O(\rho). \quad (15.6)$$

Здесь \mathbf{R} — радиус-вектор точки O относительно центра Земли. Полагая отношение ρ/R малым, ограничимся в (15.6) первым членом, что соответствует однородному полю силы тяжести, действующему на материальную точку M в окрестности точки O . Уравнение движения (15.1) в этом приближении примет вид

$$m\ddot{\rho} = mg(\mathbf{R}) - 2m[\Omega, \dot{\rho}]. \quad (15.7)$$

Проинтегрируем уравнение (15.7), обозначив оператор $2\Omega \times$ через A и представив его в виде

$$\ddot{\rho} + A\dot{\rho} = \mathbf{g}. \quad (15.8)$$

Интегрируя по времени уравнение (15.8) и учитывая начальные условия $\rho(0) = 0$, $\dot{\rho}(0) = 0$, получим

$$\dot{\rho} + A\rho = \mathbf{g}t \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{At}\rho) = e^{At}\mathbf{g}t.$$

Далее

$$\rho = e^{-At} \int_0^t e^{A\tau} \tau d\tau \mathbf{g}. \quad (15.9)$$

Разложим экспоненты в (15.9) в ряды, вычислим интегралы и найдем

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-A)^k t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{n+2}}{n!(n+2)} \mathbf{g}. \quad (15.10)$$

Первые три члена ряда (15.10) равны

$$\rho(t) = \frac{\mathbf{g}t^2}{2} - \frac{A\mathbf{g}t^3}{6} + \frac{A^2\mathbf{g}t^4}{24} + \dots \quad (15.11)$$

Поскольку вектор Ω в системе координат $Oxyz$ имеет проекции $(0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$, то оператор

$$A = 2\Omega \begin{vmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A^2 = 4\Omega^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi \end{vmatrix},$$

и проекции вектора $\rho(t)$ на оси $Oxyz$ равны

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \Omega g \cos \varphi t^3 + \dots, \\ y &= -\frac{1}{6} \Omega^2 g \sin \varphi \cos \varphi t^4 + \dots, \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} \Omega^2 g \cos^2 \varphi t^4 + \dots \end{aligned} \quad (15.12)$$

Из формул (15.12) следует, что при падении в северном полушарии на широте φ точка отклоняется в основном на восток и в меньшей степени на юг. Поскольку угловая скорость вращения Земли $\Omega = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, то в рядах (15.12) при временах падения порядка 100 с (высота падения около 50 км) можно ограничиться с достаточной степенью точности выписанными членами.

§ 3.16. МАЯТНИК ФУКО

Рассмотрим движение материальной точки по поверхности сферы в неинерциальной системе координат $Oxuz$, связанной с равномерно вращающейся Землей. Практически это движение можно реализовать, если привязать тяжелый металлический шар к достаточно длинной тонкой нити, второй конец которой закреплен. Подобный опыт был впервые поставлен французским физиком Ж. Фуко в 1851 г., в ходе которого присутствующие могли наблюдать вращение плоскости колебаний маятника, вызванное вращением Земли.

Пусть точка подвеса маятника есть начало координат (точка O), ось Oz направлена по местной вертикали, ось Ox — на восток, а ось Oy — на север. Если длина нити l и сила ее натяжения T (реакция связи), то уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе координат примет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{r}}] - T\mathbf{r}^{-1}\mathbf{r}. \quad (16.1)$$

Здесь $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ — ускорение силы тяжести (сумма гравитационного притяжения и переносной силы инерции), \mathbf{e}_z — орт оси Oz , $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$ — угловая скорость вращения Земли, $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор материальной точки. Кроме того, имеется связь $r = l$. Уравнение (16.1) имеет решение $\mathbf{r} = -l\mathbf{e}_z$, $T = mg$, соответствующее положению равновесия, когда маятник висит по вертикали.

При движении точки по гладкой сфере в однородном поле силы тяжести имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - mgr = h, \quad (16.2)$$

поскольку сила инерции Кориолиса и реакция связи не совершают работу на действительных перемещениях. В окрестности положения равновесия $x = y = 0$, $z = -l$ координата $z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$, и соотношение (16.2) представляется в виде

$$\frac{m}{2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2} \right] + mgl \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \right) = \varepsilon. \quad (16.3)$$

Здесь постоянная энергии h принята равной $-mgl + \varepsilon$. Из равенства (16.3) следует, что величины x, y, \dot{x}, \dot{y} будут малы во все время движения, если положительная постоянная ε , определяемая начальными условиями движения, мала. Считая колебания маятника малыми в определенном выше смысле, оставим в уравнении (16.1) только члены, линейные по x, y, \dot{x}, \dot{y} .

Проектируя уравнение (16.1) на оси системы координат $Oxyz$, получим

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\Omega\dot{z} \cos\varphi + 2\Omega\dot{y} \sin\varphi - \frac{T}{m} \frac{x}{l}, \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x} \sin\varphi - \frac{T}{m} \frac{y}{l}, \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega\dot{x} \cos\varphi - \frac{T}{m} \frac{z}{l}.\end{aligned}\quad (16.4)$$

Из последнего уравнения системы (16.4) следует, что $T \approx mg$ с точностью до членов порядка x, y, \dot{x}, \dot{y} , если учесть уравнение связи и первые два уравнения системы (16.4). В рассматриваемом приближении представим первые два уравнения системы (16.4) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\Omega \sin\varphi \dot{y} - gl^{-1}x, \\ \ddot{y} &= -2\Omega \sin\varphi \dot{x} - gl^{-1}y.\end{aligned}\quad (16.5)$$

В уравнениях (16.5) оставлены члены, линейные по x, y, \dot{x}, \dot{y} . Введем комплексную переменную $w = x + iy$ и перепишем систему (16.5) так:

$$\ddot{w} + 2\Omega i \sin\varphi \dot{w} + gl^{-1}w = 0.\quad (16.6)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\Omega i \sin\varphi \lambda + gl^{-1} = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -i\Omega \sin\varphi \pm i\omega$, где $\omega^2 = gl^{-1} + \Omega^2 \sin^2\varphi$. Общее решение уравнения (16.6)

$$w = e^{-i\Omega \sin\varphi t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

где C_1, C_2 — произвольные комплексные постоянные, можно трактовать как движение точки в плоскости Oxy по эллипсу, который вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\Omega \sin\varphi$.

Рассмотрим два случая начальных условий.

а) Пусть $w(0) = 0, \dot{w}(0) = \dot{w}_0$. Тогда $C_1 = 0, C_2 = \omega^{-1} \dot{w}_0$ и решение

$$w(t) = e^{-i\Omega \sin\varphi t} \frac{\dot{w}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

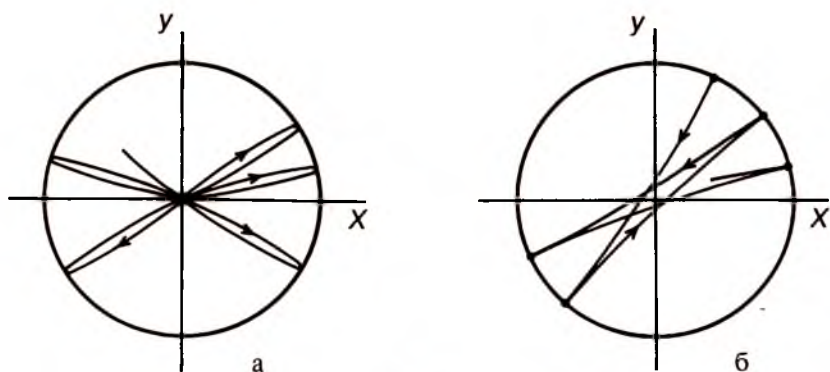


Рис. 27

б) Пусть $w(0) = w_0$, $\dot{w}(0) = 0$. Тогда

$$w(t) = e^{-i\Omega \sin \varphi t} w_0 \left(\cos \omega t + \frac{\Omega i \sin \varphi}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Траектории точки в этих случаях изображены на рис. 27.

Колебания маятника Фуко происходят почти в плоскости, которая медленно поворачивается с угловой скоростью $\Omega \sin \varphi$. Эффект вращения плоскости колебаний максимален на полюсах и отсутствует на экваторе Земли.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ N ТОЧЕК

§ 4.1. СИСТЕМА СВОБОДНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И УРАВНЕНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

О.1.1. Механическая система $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$ называется системой N материальных точек, если $\Omega = \bigcup_{i=1}^N M_i$, где M_i — точка трехмерного пространства.

Кольцо $\Sigma(\Omega)$ содержит 2^N элементов вида $\{\emptyset, M_1, \dots, M_N, M_1 \cup M_2, \dots, \Omega\}$, представляющих всевозможные объединения по k элементов из N , где $k = 0, 1, \dots, N$. Мера μ на кольце $\Sigma(\Omega)$ будет задана, если определить $\mu(M_i) = m_i$, $i = 1, \dots, N$. Здесь m_i — масса точки

M_i , а масса всей системы $M = \mu(\Omega) = \sum_{i=1}^N m_i$.

О.1.2. Движением системы N материальных точек назовем однопараметрическую непрерывную группу отображений множества Ω в E^3 , т.е.

$$g^t : \Omega \rightarrow E^3, \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), t \in R^1, i = 1, \dots, N.$$

Параметр t называется временем. В дальнейшем предполагаем, что функции $\mathbf{r}_i(t)$ дважды дифференцируемы по времени и определяют положение точки в инерциальной системе координат.

На точку M_i действует сила $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)}$, где $\mathbf{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила — результат взаимодействия точки M_i с материальными объектами, не входящими в множество Ω , $\mathbf{F}_{ij}^{(i)}$ — внутренняя сила — результат взаимодействия точек M_i и M_j . По третьему закону динамики (см. § 3.1) сила $\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(i)}$ и направлена по прямой, соединяющей точки M_i и M_j .

Для каждой свободной материальной точки запишем уравнение движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i, 1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Если задать модель взаимодействия точек друг с другом и с остальными точками Вселенной, например определить функции $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$, то уравнения (1.1) представятся как система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6N$. Предполагая выполненными условия теоремы существования и единственности решений, определим движение системы как общее решение системы (1.1), а именно $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, \mathbf{r}_1(0), \dots, \mathbf{r}_N(0), \dot{\mathbf{r}}_1(0), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(0))$, $i = 1, \dots, N$. Таким образом, начальное состояние системы (набор начальных условий $\mathbf{r}_1(0), \dots, \mathbf{r}_N(0), \dot{\mathbf{r}}_1(0), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(0)$) задает единственным образом движение системы.

О.1.3. Вектор $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ называется количеством движения системы N материальных точек.

О.1.4. Точка C , радиус-вектор которой $\mathbf{r}_C = M^{-1} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$, называется центром масс системы N материальных точек.

Т.1. Производная по времени от количества движения системы равна сумме внешних сил, действующих на точки системы, т.е.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (1.2)$$

▲ Согласно уравнениям (1.1) имеем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N m \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)}.$$

По третьему закону динамики силы $\mathbf{F}_{ij}^{(i)}$ попарно уничтожаются, так как

$$\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \mathbf{F}_{ji}^{(i)}) = 0. \quad \blacktriangledown$$

Теорема 1 называется теоремой об изменении количества движения системы N материальных точек. Справедлива также теорема о движении центра масс.

Т.2. Центр масс системы движется как материальная точка массы M под действием силы, равной сумме внешних сил, действующих на все точки системы, т.е.

$$M \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (1.3)$$

▲ Сформулированная теорема является следствием теоремы 1. Достаточно только заметить, что по определению центра масс $\mathbf{Q} = M\ddot{\mathbf{r}}_C$. ▼

С.1. Если проекция суммы внешних сил на какое-либо неподвижное направление равна нулю, то проекция количества движения системы на это направление постоянна или проекция радиуса-вектора центра масс на это направление движется с постоянной скоростью — закон сохранения количества движения.

▲ Пусть \mathbf{e} — орт неподвижного направления и $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \mathbf{e} = 0$. Тогда

$\mathbf{Q}\mathbf{e} = (\mathbf{Q}\mathbf{e})' = 0$ и $\mathbf{Q}\mathbf{e}$ постоянна. Далее $\mathbf{Q}\mathbf{e} = M\dot{\mathbf{r}}_C\mathbf{e}$ и $\dot{\mathbf{r}}_C\mathbf{e}$ постоянна. ▼

О.1.5. Система материальных точек называется изолированной, если можно пренебречь взаимодействием ее точек с точками Вселенной, не входящими в рассматриваемую систему, т.е. $\mathbf{F}_i^{(e)} = 0$, $i = 1, \dots, N$.

С.2. Центр масс изолированной системы движется равномерно и прямолинейно, поскольку на основании теоремы о движении центра масс $\ddot{\mathbf{r}}_C = 0$.

П. Пусть две материальные точки M_1 и M_2 соединены сжатой пружиной и движутся как одна материальная точка в однородном поле силы тяжести. В некоторый момент времени пружина освобождается и расталкивает материальные точки (рис. 28). Уравнения движения системы имеют вид

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{F}_{12},$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{F}_{21}.$$

Поскольку $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ — сила, развиваемая пружиной, то $M\ddot{\mathbf{r}}_C = M\mathbf{g}$, $M = m_1 + m_2$. Центр масс движется по закону $\mathbf{r}_C = 1/2gt^2 + \dot{\mathbf{r}}_C(0)t + \mathbf{r}_C(0)$, описывая параболу. Движение материальных точек после прекращения действия пружины будет также происходить по ветвям парабол. Следует отметить, что закон взаимодействия точек (модель пружины) не влияет на движение центра масс системы точки С. Количество движения системы в проекциях на горизонтальные оси $O\xi_1$ и $O\xi_2$ сохраняется.

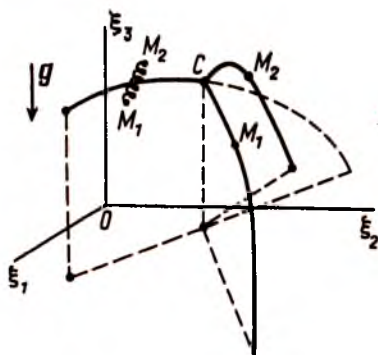


Рис. 28

§ 4.2. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ЦЕНТРА МАСС. ТЕОРЕМЫ ОБ ИХ ИЗМЕНЕНИЯХ

Пусть $O\xi_1\xi_2\xi_3$ — неподвижная инерциальная система координат и $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ — радиусы-векторы точек системы.

О.2.1. Вектор $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i]$ называется моментом количеств движения системы материальных точек относительно неподвижной точки O .

Введем систему координат $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$ — репер Кенига — с началом в центре масс системы и с осями $C\xi'_i$, параллельными осям $O\xi_i$ неподвижной системы координат. Система координат $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$ движется поступательно, так как ее угловая скорость равна нулю.

О.2.2. Движение системы N материальных точек относительно репера Кенига называется движением относительно центра масс.

Справедливо векторное равенство $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i$, где \mathbf{r}_C — радиус-вектор центра масс в системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$, \mathbf{r}'_i — радиус-вектор точки M_i относительно системы координат $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$. Движение относительно центра масс характеризуется функциями $\mathbf{r}'_i(t)$, $i = 1, \dots, N$.

Т.1. (первая теорема Кенига). *Момент количеств движения системы относительно точки O равен сумме момента количества движения центра масс относительно точки O и момента количеств движения системы в ее движении относительно центра масс, т.е.*

$$\mathbf{G} = [\mathbf{r}_C, M\dot{\mathbf{r}}_C] + \mathbf{G}', \quad \mathbf{G}' = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i, m_i \dot{\mathbf{r}}'_i]. \quad (2.1)$$

▲ Согласно определению центра масс

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= M^{-1} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M^{-1} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) = \\ &= \mathbf{r}_C + M^{-1} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i] = \sum_{i=1}^N [(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i), m_i (\dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\mathbf{r}}'_i)] = \\ &= [\mathbf{r}_C, M\dot{\mathbf{r}}_C] + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i, m_i \dot{\mathbf{r}}'_i] + \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i, \dot{\mathbf{r}}_C \right] + \left[\mathbf{r}_C, \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Два последних слагаемых в формуле (2.3) равны нулю согласно (2.2) и справедливо равенство (2.1). ▼

Т.2. (теорема об изменении момента количеств движения системы относительно неподвижной точки O). *Производная момента количеств движения системы относительно неподвижной точки O равна сумме моментов внешних сил относительно точки O , т.е.*

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}_i^{(e)}), \quad \overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}_i^{(e)}) = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{(e)}]. \quad (2.4)$$

▲ Используя уравнения (1.1), вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_{i=1}^N ([\dot{\mathbf{r}}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i] + [\mathbf{r}_i, m_i \ddot{\mathbf{r}}_i]) = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{(e)}] + \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} \right]$$

Поскольку внутренние силы направлены по прямой, соединяющей точки M_i и M_j и $\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(j)}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} \right] &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i, j=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}^{(i)}] + \sum_{i, j=1}^N [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ji}^{(j)}] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^N [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \mathbf{F}_{ij}^{(i)}] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство (2.4). ▼

Т.3. (теорема об изменении момента количеств движения системы относительно центра масс). *Производная момента количеств движения системы относительно центра масс равна сумме моментов внешних сил относительно центра масс, т.е.*

$$\frac{d\mathbf{G}'}{dt} = \sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{M}}_C(\mathbf{F}_i^{(e)}), \quad \overline{\mathcal{M}}_C(\mathbf{F}_i^{(e)}) = \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}. \quad (2.5)$$

▲ Воспользуемся равенствами (2.1), (2.4) и получим

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = [\mathbf{r}_C, M \ddot{\mathbf{r}}_C] + \frac{d\mathbf{G}'}{dt} = \sum_{i=1}^N [(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i), \mathbf{F}_i^{(e)}]. \quad (2.6)$$

По теореме о движении центра масс

$$M \ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \Rightarrow [\mathbf{r}_C, M \ddot{\mathbf{r}}_C] = \left[\mathbf{r}_C, \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \right],$$

Вычитая правую и левую части последнего равенства из соответствующих частей равенства (2.6), получим (2.5). ▼

С.1. Пусть $\sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{F}_i^{(e)}) \mathbf{e} = 0$, где \mathbf{e} — орт неподвижной оси в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Тогда проекция вектора \mathbf{G} на эту ось

постоянна — закон сохранения момента количества движения относительно неподвижной оси.

Доказательство очевидно следует из теоремы 2.

Найденный первый интеграл называется также законом площадей.

Пусть неподвижная ось совпадает с осью $O\xi_3$ и $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ — орт оси $O\xi_3$. Тогда скалярное произведение $\mathbf{G}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i] \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^N m_i (\xi_{1i} \dot{\xi}_{2i} - \xi_{2i} \dot{\xi}_{1i})$ и постоянно. В цилиндрических координатах $\xi_{1i} = \rho_i \cos \varphi_i$, $\xi_{2i} = \rho_i \sin \varphi_i$, $\xi_{3i} = z_i$ и

$$\xi_{1i} \dot{\xi}_{2i} - \xi_{2i} \dot{\xi}_{1i} = \rho_i^2 \dot{\varphi}_i = 2d\sigma_i/dt,$$

где $\dot{\sigma}_i = 1/2\rho_i^2 \dot{\varphi}_i$ — секторная скорость, т.е. скорость изменения площади фигуры, заматаемой проекцией вектора \mathbf{r}_i на плоскость $O\xi_1\xi_2$. Таким образом, закон сохранения момента количества движения относительно оси $O\xi_3$ означает постоянство суммы $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\sigma}_i$ (обобщенный закон площадей).

С.2. Если $\sum_{i=1}^N \overline{M}_0(\mathbf{F}_i^{(e)}) = 0$, то вектор \mathbf{G} постоянен — закон сохранения момента количества движения. Это утверждение справедливо для изолированных систем.

С.3. Если $\sum_{i=1}^N \overline{M}_C(\mathbf{F}_i^{(e)}) = 0$, то вектор \mathbf{G}' постоянен — закон сохранения момента количества движения относительно центра масс.

С.4. Если $\sum_{i=1}^N \overline{M}_C(\mathbf{F}_i^{(e)}) \mathbf{e} = 0$, где \mathbf{e} — орт оси неизменного направления, то величина $\mathbf{G}'\mathbf{e}$ постоянна — закон сохранения момента количества движения системы относительно оси, проходящей через центр масс.

С.5. Если система материальных точек изолирована, то репер Кенига является инерциальной системой координат и момент количества движения относительно центра масс постоянен.

▲ По теореме о движении центра масс начало репера Кенига движется равномерно и прямолинейно, а его ориентация относительно инерциальной системы координат по определению не меняется. Следовательно, репер Кенига — инерциальная система координат. Момент внешних сил относительно центра масс равен нулю, и, значит, по теореме 3 вектор \mathbf{G}' постоянен. ▼

§ 4.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ В АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИИ И В ДВИЖЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС. ТЕОРЕМЫ ОБ ИХ ИЗМЕНЕНИИ

О.3.1. Величина $T = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ называется кинетической энергией системы N материальных точек в абсолютном движении.

Здесь \mathbf{r}_i — радиус-вектор точки M_i относительно инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$.

О.3.2. Величина $T' = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2$ называется кинетической энергией системы N материальных точек в движении относительно центра масс.

Здесь \mathbf{r}_i' — радиус-вектор точки M_i относительно репера Кенига.

Т.1 (вторая теорема Кенига). *Кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии системы в движении относительно центра масс.*

▲ Поскольку $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i'$, то

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\mathbf{r}}_i')^2 = \frac{1}{2} M_C \dot{\mathbf{r}}_C^2 + T' + \dot{\mathbf{r}}_C \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как по определению центра масс $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i' = 0$. ▼

Т.2. *Дифференциал кинетической энергии системы в абсолютном движении равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил на действительных перемещениях точек, т.е.*

$$dT = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} d\mathbf{r}_i. \quad (3.1)$$

▲ Заметим, что $\dot{\mathbf{r}}_i d\mathbf{r}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i d\mathbf{r}_i$. Используя уравнение (1.1), получим

$$dT = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i d\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} d\mathbf{r}_i.$$

Работа внутренних сил

$$\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{F}_{ij}^{(i)} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji}^{(i)} d\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

не равна, вообще говоря, нулю. ▼

Т.3. Дифференциал кинетической энергии системы в движении относительно центра масс равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил на относительных действительных перемещениях точек, т.е.

$$dT' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}'_i + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij}^{(i)} d\mathbf{r}'_i. \quad (3.2)$$

▲ Воспользуемся теоремами 1 и 2 и найдем

$$dT = dT' + M \ddot{\mathbf{r}}_C d\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}'_i.$$

Учитывая теорему о движении центра масс $M \ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}$, получим (3.2). ▼

С.1. Теоремы об изменении кинетической энергии можно представить в форме

$$\frac{dT}{dt} = W, \quad W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i; \quad \frac{dT'}{dt} = W', \quad W' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}'_i.$$

Здесь W, W' — мощности сил при абсолютном и относительном перемещениях точек соответственно.

О.3.3. Назовем набор $x = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in E^{3N}$ — конфигурацией системы в инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, а набор $x' = (\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)$ — конфигурацией системы в осях Кенига.

С.2. Если система в моменты времени t_0 и t_1 имеет конфигурации x_0 и x_1 , то приращение кинетической энергии при движении системы из конфигурации x_0 в конфигурацию x_1 равно работе сил вдоль траектории движения, т.е.

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i. \quad (3.3)$$

Аналогично в движении относительно центра масс

$$T'(t_1) - T'(t_0) = \int_{x'_0}^{x'_1} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}'_i. \quad (3.4)$$

Интегральная форма теорем об изменении кинетической энергии получается путем интегрирования равенств (3.1) и (3.2).

О.3.4. Говорят, что система консервативна, если существует функция $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ и $\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U$, $i = 1, \dots, N$, в некоторой односвязной области конфигурационного пространства E^{3N} .

С.3. В случае консервативной системы имеет место закон сохранения энергии $T - U = h$, или $T + V = h$, где $V = -U$ — потенциальная энергия.

В самом деле, работа сил на элементарном перемещении $dA = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} U d\mathbf{r}_i = dU$, и криволинейный интеграл в равенстве (3.3) представляется в виде

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = \int_{x_0}^{x_1} dU = U(x_1) - U(x_0).$$

Следовательно, из равенства (3.3) вытекает

$$T(t_1) - U(x_1) = T(t_0) - U(x_0) = h.$$

Если в качестве момента времени t_1 рассматривать произвольный момент времени t и движение $x = x(t)$, то вдоль этого движения сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна, т.е. $T + V = h$.

Аналогичным образом можно получить закон сохранения полной механической энергии $T' - U' = h$ из равенства (3.4), если силы $\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{r}'_i} U'(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)$.

§ 4.4. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ.

УТОЧНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ЗАКОНА КЕПЛЕРА

Рассмотрим движение двух тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Считаем, что размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними и их можно рассматривать как материальные точки. Примером такой системы может служить Солнце и одна из планет Солнечной системы, если пренебречь их взаимодействием с другими планетами.

Обозначим через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ радиусы-векторы материальных точек относительно инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, и запишем уравнения их движения в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= - \frac{f m_1 m_2}{\left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right]^{3/2}} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= - \frac{f m_1 m_2}{\left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right]^{3/2}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь m_1, m_2 — массы точек, f — гравитационная постоянная. Применяя теорему о движении центра масс к рассматриваемой изолированной системе, получим

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_C = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_C = \mathbf{V}_C t + \mathbf{r}_C(0).$$

Центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. Движение относительно центра масс можно определить через взаимный вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, используя формулы

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_C - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_C + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Формулы (4.2) получены из решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_C.$$

Умножим первое уравнение системы (4.1) на $(-m_2)$, второе — на m_1 , сложим результаты и придем к уравнению

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Пусть $m_1 = M_0$ — масса Солнца и $fM_0 = \mu$ — гравитационный параметр Солнца. Уравнение (4.3) представится в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu(1 + m_i M_0^{-1})}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4.4)$$

где $m_i = m_2$ — масса планеты. Аналогичное уравнение рассматривалось в § 3.8 при исследовании движения планеты в поле тяготения Солнца в предположении, что Солнце является началом неподвижной системы координат. Для уравнения (4.4) согласно результатам § 3.8 справедлив уточненный третий закон Кеплера

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{4\pi^2}{\mu(1 + m_i M_0^{-1})} \Rightarrow \frac{T_i^2(1 + m_i M_0^{-1})}{a_i^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

полученный путем простой замены гравитационного параметра μ на $\mu(1 + m_i M_0^{-1})$. Здесь T_i — период обращения планеты, a_i — большая полуось эллипса, описываемого радиусом-вектором \mathbf{r} . Отношения $m_i M_0^{-1}$ для планет Солнечной системы малы. Например, для самой большой планеты Юпитера это отношение равно $9,55 \times 10^{-4}$.

§ 4.5. ЗАДАЧА N ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПО ЗАКОНУ ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ.

ЛЕММА ЛАГРАНЖА–ЯКОБИ. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВЗАИМНЫХ РАССТОЯНИЙ

Задача о движении системы N материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, может служить моделью Солнечной системы и изучается механиками и математиками уже более трехсот лет. Если при $N = 2$ задача интегрируется, то уже при $N > 2$ невозможно найти общее решение уравнений движения. Однако в ряде частных случаев удается сделать некоторые суждения о характере движения системы.

Уравнения движения представим в виде

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j \neq i}^N \frac{f m_i m_j}{\left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \right]^{3/2}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

Здесь f — гравитационная постоянная, m_i — масса материальной точки. Поскольку система изолирована, то оси Кенига, связанные с центром масс системы, являются инерциальной системой координат. Для Солнечной системы репер Кенига совпадает с системой координат Коперника. В уравнениях (5.1) будем считать, что радиусы-векторы \mathbf{r}_i материальных точек заданы относительно осей Кенига ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Вектор момента количеств движения

$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i]$ в изолированной системе постоянен. Кроме того, система консервативна и имеет место закон сохранения энергии

$$T + V = h, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad V = - \sum_{i < j}^N \frac{f m_i m_j}{\left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \right]^{1/2}}. \quad (5.2)$$

Л.1. Справедливо неравенство

$$\mathbf{G}^2 \leq 2TI, \quad I = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^2. \quad (5.3)$$

Величина I называется полярным моментом инерции системы.

▲ Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^2 &= \left(\sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i] \right)^2 \leq \left[\sum_{i=1}^N (\sqrt{m_i} |\mathbf{r}_i|) (\sqrt{m_i} |\dot{\mathbf{r}}_i|) \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^2 = 2TI. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Ответим на вопрос: каково движение системы, когда в неравенстве (5.3) имеет место равенство? Равенство будет иметь место, если $\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ и $\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i = 0$, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по вектору \mathbf{G} . Тогда $\mathbf{G}^2 = I^2 \boldsymbol{\omega}^2$, $T = 1/2 I \boldsymbol{\omega}^2$, и система вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью.

Л.2 (лемма Лагранжа). Если $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, то

$$I = M^{-1} \sum_{i < j}^N m_i m_j \mathbf{r}_{ij}^2, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5.4)$$

▲ Поскольку центр масс системы совпадает с началом системы координат, то $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = 0$ и

$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = I + M \mathbf{r}_j^2.$$

Далее

$$\sum_{j=1}^N m_j \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{ij}^2 = \sum_{j=1}^N m_j (I + M \mathbf{r}_j^2) = 2MI.$$

Отсюда непосредственно следует равенство (5.4). ▼

Л.3 (формула Лагранжа–Якоби). При движении системы N материальных точек справедливо равенство

$$\ddot{I} = 4h - 2V, \quad (5.5)$$

где V — потенциальная энергия (5.2), h — постоянная энергии.

▲ Потенциальная энергия $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, определенная в (5.2), является однородной функцией порядка -1 , т.е.

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} V \mathbf{r}_i = -V.$$

Справедливость этого свойства докажем так. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = V(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^{-1} V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad \lambda \in R^1.$$

Далее

$$\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^N \nabla_{(\lambda \mathbf{r}_i)} V(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) \mathbf{r}_i \Big|_{\lambda=1} = -\lambda^2 V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{\lambda=1}.$$

Правые части уравнений (5.1) равны $-\nabla_{\mathbf{r}_i} V$. Используя это обстоятельство, получим

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = 4T - 2 \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} V \dot{\mathbf{r}}_i = 4T + 2V.$$

Из интеграла энергии следует $4T = 4h - 4V$ и далее равенство (5.5). ▼

Т.1. (теорема Якоби). *Необходимым условием ограниченности взаимных расстояний между материальными точками при движении под действием закона всемирного тяготения является условие отрицательности полной энергии $h < 0$.*

▲ Допустим противное: пусть $h \geq 0$ и взаимные расстояния ограничены, т.е. $|\mathbf{r}_{ij}(t)| < \infty, \forall i, j, t \in [0, +\infty[$. Тогда согласно формуле (5.4) ограничена величина $I(t)$ при $t \in [0, +\infty[$. Интегрируя дважды по времени соотношения (5.5), получим

$$I(t) = 2ht^2 + \dot{I}(0)t + I(0) - 2 \int_0^t \int_0^\tau V(\tau) d\tau dt. \quad (5.6)$$

Здесь функция $V(t) = V(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$. Ограниченность взаимных расстояний означает, что $\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^2 \right)^{1/2} < R$. Функция $-2V(t)$ в шаре радиусом R больше или равна положительному числу $\alpha(R)$. Из соотношения (5.6) в этом случае получим неравенство

$$I(t) \geq (2h + \alpha(R))t^2 + \dot{I}(0)t + I(0).$$

Отсюда следует, что при $h \geq 0$ функция $I(t)$ не ограничена. Противоречие доказывает теорему. ▼

§ 4.6. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕСВОБОДНЫХ N ТОЧЕК. ГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ. КОНФИГУРАЦИОННОЕ МНОГООБРАЗИЕ СИСТЕМЫ. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Уравнения движения системы свободных N точек представим в виде одного векторного уравнения в пространстве E^{3N} . Для этого обозначим через $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in E^{3N}$, $\mathbf{r}_i \in E^3, i = 1, \dots, N$. Здесь $\mathbf{r}_i(t)$ — радиус-вектор i -й материальной точки в инерциальной системе координат. Система векторных уравнений (4.1) представляется в виде одного векторного уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ddot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathcal{F}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad \bar{\mathcal{F}} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N), \\ \mathcal{M} &= \text{diag} \{m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N\}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

О.6.1. Говорят, что на систему наложены двусторонние (удерживающие) связи, если в процессе движения вектор $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет условиям

$$f_j(\mathbf{x}(t), t) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (6.2)$$

Функции f_j предполагаются дифференцируемыми по всем аргументам.

О.6.2. Множество $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E^{3N}, f_j(\mathbf{x}, t) = 0, j = 1, \dots, l\}$ называется конфигурационным многообразием (пространством) системы N материальных точек.

Предполагается, что система векторов $\{\nabla_{\mathbf{x}} f_j\}_{j=1}^l$ линейно независима при любом $\mathbf{x} \in M$.

О.6.3. Связи называются стационарными, если

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} \equiv 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

О.6.4. Возможным перемещением точек называется вектор

$$\delta \mathbf{x} = (\delta r_1, \dots, \delta r_N) \in T_{\mathbf{x}}M = \{\xi : \xi \in E^{3N}, \xi \nabla_{\mathbf{x}} f_j = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Здесь $T_{\mathbf{x}}M$ — касательное пространство к многообразию M в точке \mathbf{x} .

Л. Если конфигурационное многообразие стационарно (связи стационарны), то вектор скорости $\dot{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}M$.

▲ Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — движение системы и $f_j(\mathbf{x}(t)) = 0, j = 1, \dots, l$. Тогда

$$\frac{df_j}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} f_j \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad j = 1, \dots, l \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}M. \quad \blacktriangledown$$

О.6.5. Нормальным пространством к многообразию в точке \mathbf{x} называется линейное пространство

$$N_{\mathbf{x}}M = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} \in E^{3N}, \boldsymbol{\eta} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla_{\mathbf{x}} f_j, \lambda_j \in R^1 \right\}.$$

Нормальное пространство есть линейная оболочка векторов $\{\nabla_{\mathbf{x}} f_j\}_{j=1}^l$. Размерность нормального пространства $\dim N_{\mathbf{x}}M = l$, а размерность многообразия M по определению есть размерность касательного пространства $T_{\mathbf{x}}M$ и равна $n = 3N - l$. Заметим, что касательное пространство линейно и является ортогональным дополнением нормального пространства.

Многообразию M предполагается связным и обладает структурой дифференцируемого многообразия.

§ 4.7. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА–ЛАГРАНЖА

Сформулируем принцип освобожденности от связей: связи, наложенные на перемещения точек системы, можно отбросить, заменив их воздействие на точки силами (реакциями связей), и рассматривать после этого движение системы как движение системы свободных материальных точек под действием активных сил и реакций связей.

Согласно принципу освобожденности от связей уравнения движения системы примут вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N \Rightarrow \mathcal{M} \ddot{\mathbf{x}} = \overline{\mathcal{F}} + \overline{\mathcal{R}}. \quad (7.1)$$

Здесь $\overline{\mathcal{R}} = (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N)$, \mathbf{R}_i — реакция связей, действующая на точку M_i , \mathbf{F}_i — активная сила. К уравнениям (7.1) следует добавить уравнения связей

$$f_j(\mathbf{x}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (7.2)$$

Полученная система содержит $6N$ неизвестных величин (векторы \mathbf{x} и $\overline{\mathcal{R}}$), а число уравнений равно $3N + l < 6N$. Предполагается, что $l < 3N$, так как в противном случае, когда $l = 3N$, задача динамики теряет смысл: векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ могут просто быть определены из конечных уравнений (7.2).

В случае, когда $l < 3N$, число уравнений меньше числа неизвестных, и задача не имеет определенного решения. Чтобы избежать этой неопределенности, сформулируем дополнительные условия, касающиеся природы реакций связей.

Аксиома идеальных связей: связи называются идеальными, если работа реакций связей на любых возможных перемещениях равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\overline{\mathcal{R}} \delta \mathbf{x} = 0), \quad \forall \delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in T_x M. \quad (7.3)$$

Из аксиомы идеальных связей (7.3) следует, что вектор $\overline{\mathcal{R}}$ принадлежит нормальному пространству $N_x M$ и представляется в виде

$$\overline{\mathcal{R}} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla_x f_j. \quad (7.4)$$

Равенство (7.4) означает, что $3N$ неизвестных величин, компонент векторов $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$ выражаются через l неизвестных множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. Уравнения (7.1) принимают вид

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{x}} = \overline{\mathcal{F}} + \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla_x f_j \Rightarrow m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla_{\mathbf{r}_i} f_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.5)$$

и называются уравнениями Лагранжа первого рода с неопределенными множителями. Совместно с уравнениями связи (7.2) они образуют полную систему уравнений движения системы, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений.

Если в аксиоме идеальных связей (7.3) заменить реакции \mathbf{R}_i на разности $(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i)$, то получим вариационный принцип Д'Аламбера–Лагранжа

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in T_x M. \quad (7.6)$$

В векторной формулировке

$$(\mathcal{M}\ddot{\mathbf{x}} - \overline{\mathcal{F}}) \delta \mathbf{x} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{x} \in T_x M$$

вариационный принцип Д'Аламбера–Лагранжа означает справедливость второго закона динамики в проекции на касательное пространство $T_x M$ конфигурационного многообразия.

§ 4.8. ВЫВОД ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ ИЗ ПРИНЦИПА Д'АЛАМБЕРА–ЛАГРАНЖА

Рассматривается система N материальных точек с идеальными голономными связями.

Т.1. *Если связи допускают поступательное перемещение системы как твердого тела вдоль некоторого фиксированного направления, то производная от количества движения системы в проекции на это направление равна сумме внешних активных сил в проекции на это направление.*

▲ Пусть \mathbf{e} — орт фиксированного в инерциальной системе координат направления и h^α — группа перемещений вдоль этого направления, т.е.

$$h^\alpha : E^{3N} \rightarrow E^{3N}, (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \rightarrow (\mathbf{r}_1 + \alpha \mathbf{e}, \dots, \mathbf{r}_N + \alpha \mathbf{e}), \alpha \in R^1.$$

Выражение «связи допускают перемещения вдоль оси с ортом \mathbf{e} » означает, что

$$f_j(\mathbf{r}_1 + \alpha \mathbf{e}, \dots, \mathbf{r}_N + \alpha \mathbf{e}, t) = 0 \quad \forall \alpha \in R^1, j = 1, \dots, N.$$

Отсюда

$$\left. \frac{df_j}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_j \mathbf{e} = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (8.1)$$

Из условий (8.1) следует, что вектор $(\mathbf{e}, \dots, \mathbf{e})$ принадлежит касательному пространству $T_x M$. Заменяя в вариационном принципе Д'Аламбера–Лагранжа (7.6) $\delta \mathbf{r}_i$ на \mathbf{e} , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{e} \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{e}. \quad (8.2)$$

Далее

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{e} = \mathbf{Q} \mathbf{e}, \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{e} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \mathbf{e},$$

где \mathbf{Q} — количество движения системы, $\mathbf{F}_i^{(e)}$ — внешняя сила, действующая на точку с номером i . Внутренние силы по третьему закону динамики взаимно уничтожаются. Таким образом, из равенства (8.2) следует утверждение теоремы

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} \mathbf{e}.$$

Т.2. Если связи, наложенные на систему, допускают поворот системы как твердого тела вокруг некоторой фиксированной оси, то производная от момента количества движения системы относительно этой оси равна сумме моментов внешних активных сил относительно этой оси.

▲ Не нарушая общности, считаем, что фиксированная в инерциальном пространстве ось, относительно которой связи допускают поворот системы как твердого тела, совпадает с осью $O\xi_3$. Согласно условию теоремы точка $(\Gamma(\alpha)\mathbf{r}_1, \dots, \Gamma(\alpha)\mathbf{r}_N)$ при любом $\alpha \in R^1$ принадлежит конфигурационному многообразию M , если ему принадлежит точка $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Здесь $\Gamma(\alpha) \in SO(3)$ и задает поворот на угол α вокруг оси $O\xi_3$. В координатах $O\xi_1\xi_2\xi_3$ имеем

$$\Gamma(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

По условию теоремы

$$\begin{aligned} f_j(\Gamma(\alpha)\mathbf{r}_1, \dots, \Gamma(\alpha)\mathbf{r}_N, t) &= 0 \quad \forall \alpha \in R^1, \quad j = 1, \dots, l \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \frac{df_j}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_j \left. \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Непосредственной проверкой доказываем, что

$$\left. \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{r}_i \right|_{\alpha=0} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_i,$$

где \mathbf{e}_3 — орт оси $O\xi_3$. Из равенства (8.3) следует, что векторы $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_i$ являются возможными перемещениями точек системы. Заменяем в вариационном принципе Д'Аламбера–Лагранжа (7.6) $\delta \mathbf{r}_i$ на $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_i$ и получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_i] = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_i]. \quad (8.4)$$

Поскольку вектор \mathbf{e}_3 постоянен, то

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_i] = \frac{d}{dt} (\mathbf{G} \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{G} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i],$$

а по известному свойству внутренних сил

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_i] = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{(e)}] \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, равенство (8.4) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G} \mathbf{e}_3) = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{(e)}] \mathbf{e}_3.$$

Здесь левая часть есть производная от проекции вектора момента количеств движения на ось \mathbf{e}_3 , а правая — проекция на ось \mathbf{e}_3 момента внешних сил. ▼

Т.3. Если связи стационарны, то дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ активных сил на действительных перемещениях.

▲ В случае стационарных идеальных связей действительные перемещения принадлежат классу возможных, т.е. $(d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_N) \in T_x M$, так как

$$f_j(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, l \Rightarrow \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} f_j d\mathbf{r}_i = 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

Остается заменить в вариационном принципе Д'Аламбера–Лагранжа (7.6) возможные перемещения $\delta \mathbf{r}_i$ на действительные $d\mathbf{r}_i$ и получить равенство

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i,$$

из которого непосредственно следует теорема

$$dT = dA, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad dA = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i. \quad \blacktriangledown$$

Особенностью доказанных теорем является то обстоятельство, что в их формулировках отсутствуют неизвестные реакции связей, что позволяет в ряде случаев сделать суждения о характере движения системы. Очевидно, что с учетом реакций связей, когда система рассматривается как свободная, могут быть написаны любые общие теоремы механики (см. § 4.1–4.3), но в них будут присутствовать, вообще говоря, неизвестные силы — реакции связей.

§ 4.9. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

В вариационном принципе Д'Аламбера–Лагранжа, справедливом для систем с идеальными голономными связями, набор возможных перемещений должен принадлежать касательному пространству к конфигурационному многообразию, т.е. $(\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in T_x M$. Таким образом, координаты вектора \mathbf{x} и вектора возможных перемещений должны удовлетворять определенным условиям. Идея Лагранжа состоит в ведении набора независимых параметров, через которые выражаются координаты всех точек и векторы возможных перемещений. Математическая реализация этой идеи базируется на понятии дифференцируемого многообразия и его структуры.

Пусть $M \subset E^{3N}$ — конфигурационное многообразие системы N материальных точек. Размерность многообразия $n = 3N - l$, где l — число связей, а само многообразие

$$M = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E^{3N}, f_j(\mathbf{x}, t) = 0, j = 1, \dots, l \}.$$

Многообразию M предполагается односвязным, функции $f_j(\mathbf{x}, t)$ — дифференцируемыми по всем аргументам, а векторы $\{ \nabla_x f_j \}_{j=1}^l$ — линейно независимыми на M . Для каждой точки $\mathbf{x}_0 \in M$ существуют ее окрестность $U_\epsilon(\mathbf{x}_0) = M \cap B_\epsilon$, где $B_\epsilon = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E^{3N}, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \epsilon \}$, и отображение $U_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ на область V n -мерного пространства R^n . Это отображение может быть построено, например, так: в качестве независимых координат q_1, \dots, q_n ($n = 3N - l$) выберем компоненты вектора \mathbf{x} при условии, что оставшиеся l компонент вектора \mathbf{x} можно выразить из уравнений связей через выбранные компоненты. Для этого якобиан

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_l)}{\partial(x_1, \dots, x_l)} \neq 0 \quad (9.1)$$

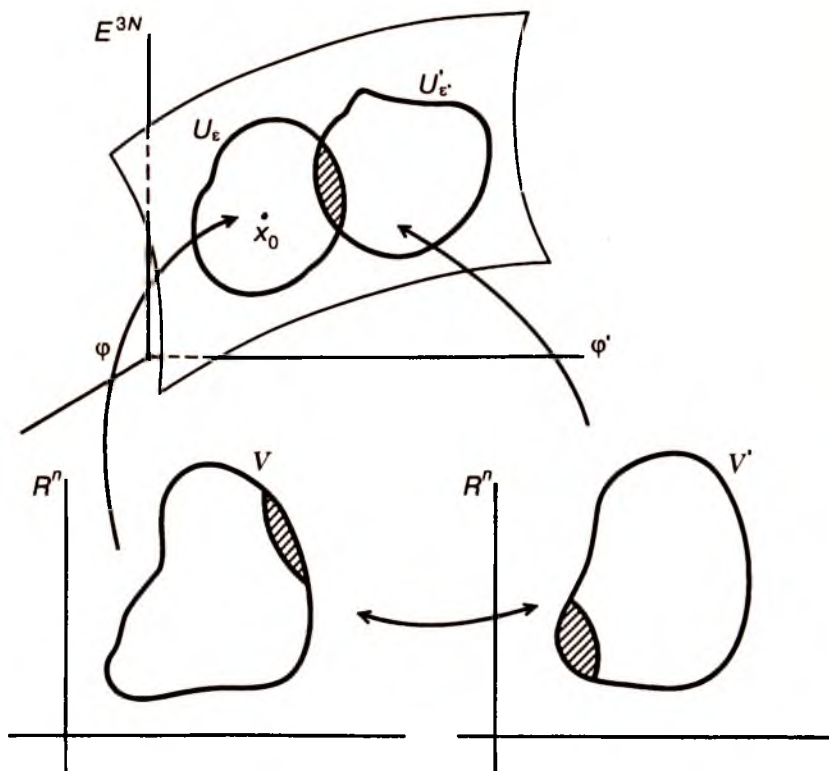


Рис. 29

в окрестности $U_\epsilon(x_0)$. Условие (9.1) всегда может быть удовлетворено надлежащим выбором компонент вектора x , поскольку система векторов $\{\nabla_x f_j\}_{j=1}^l$ линейно независима на M . Отображение ϕ области V на $U_\epsilon(x_0)$ называется локальной картой и задается дифференцируемыми функциями

$$\begin{aligned} \phi : r_i = r_i(\mathbf{q}, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (r_1, \dots, r_N) \in \\ \in U_\epsilon(x_0) \subset E^{3N}, \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in V \subset R^n. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Пусть (V, ϕ) и (V', ϕ') — две локальные карты и пересечение $\phi V \cap \phi' V' \neq \emptyset$ (см. рис. 29). Тогда возникает отображение $(\phi')^{-1} \circ \phi$ области R^n на область R^n , определяемое функциями $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}, t)$. Это отображение взаимно однозначно и имеет обратное $\phi^{-1} \circ \phi'$, определяемое функциями $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}', t)$. Предполагаем, что эти функции дифференцируемы. В этом случае локальные карты называются совместными. Набор совместных карт при условии, что каждая

точка многообразия имеет образ на одной из карт, называется атласом. Построенная конструкция задает структуру дифференцируемого многообразия.

Таким образом, всякая кривая на многообразии $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ имеет свое изображение на локальной карте $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$.

Согласно формулам (9.2) вектор возможных перемещений

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9.3)$$

и возникает линейное отображение $\varphi_* : R^n \rightarrow T_x M$, определяемое формулами (9.3): вектору возможных перемещений $\delta \mathbf{x} \in T_x M$ соответствует вектор $\delta \mathbf{q} \in R^n$.

Воспользуемся формулами (9.2), (9.3) и преобразуем принцип Д'Аламбера–Лагранжа. Дифференцируя по времени формулы (9.2), получим

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t}. \quad (9.4)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.5)$$

С учетом равенств (9.5) преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,k=1}^{N,n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i,k=1}^{N,n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k, \quad T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Работа активных сил на возможных перемещениях

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (9.7)$$

Величины Q_k называются обобщенными силами. Объединяя выражения (9.6) и (9.7), представим вариационный принцип Д'Аламбера–Лагранжа в виде

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0. \quad (9.8)$$

Вариации δq_k в выражении (9.8) произвольны. Это обстоятельство позволяет получить из (9.8) уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.9)$$

положив, например, $\delta q_k = 1$, а все остальные $\delta q_m = 0$.

Кинетическая энергия системы согласно (9.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0, \\ T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^n b_{ks}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k \dot{q}_s, \\ T_1 &= \sum_{i=1}^N m_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k, \quad T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

В случае стационарных связей $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$, $T_1 = T_0 = 0$, а $T = T_2$ — квадратичная форма по обобщенным скоростям \dot{q}_k . В ряде случаев активные силы порождаются силовой функцией $U^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, а именно $\mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U^*$. Тогда обобщенные силы Q_k равны

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} U^* \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial U(\mathbf{q}, t)}{\partial q_k}, \quad (9.11)$$

$$U(\mathbf{q}, t) = U^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \Big|_{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)}.$$

Введем функцию Лагранжа $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = T + U$ и представим уравнения (9.9) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.12)$$

Системы уравнений (9.9) и (9.12) описывают движение механической системы с голономными идеальными связями. Порядок этих систем $2n$, так как каждое уравнение содержит вторые производные обобщенных координат по времени. Начальные условия движения $(\dot{\mathbf{q}}(0), \mathbf{q}(0))$ определяют закон движения системы $\mathbf{q}(t)$ на локальной карте, а отображение (9.2) позволяет найти закон движения каждой точки $\mathbf{r}_i(t)$ в трехмерном евклидовом пространстве.

§ 4.10. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА. ТЕОРЕМА НЕТЕР

О.10.1. Первым интегралом уравнений Лагранжа второго рода (9.12) называется функция $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, принимающая постоянное значение на каждом действительном движении системы $\mathbf{q}(t)$.

Отыскание первых интегралов движения системы позволяет либо понизить порядок системы дифференциальных уравнений, либо вообще найти ее общее решение. Как правило, первые интегралы уравнений Лагранжа второго рода выражают законы сохранения таких характеристик системы, как количество движения, момент количеств движения, энергия системы.

О.10.2. Обобщенная координата q_k называется циклической, если от нее не зависит функция Лагранжа L , т.е. $\partial L / \partial q_k \equiv 0$.

В этом случае согласно уравнениям (9.12) количество

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (10.1)$$

постоянно вдоль всякой траектории движения. Величина p_k называется обобщенным импульсом, а первый интеграл (10.1) — законом сохранения импульса, соответствующего циклической координате.

Уравнения Лагранжа второго рода допускают первый интеграл, если функция Лагранжа не зависит явным образом от времени, т.е. $\partial L / \partial t \equiv 0$. В самом деле, умножим каждое уравнение системы (9.12) на \dot{q}_k и сложим результаты. Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] = \\ & = \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t},$$

и если $\partial L / \partial t = 0$, то

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = h. \quad (10.2)$$

Первый интеграл (10.2) называется обобщенным интегралом энергии, или интегралом Якоби.

В ряде случаев удается получить первый интеграл уравнений движения, когда существует однопараметрическая группа отобра-

жений конфигурационного пространства в себя, обладающая рядом свойств.

Т.1 (теорема Э. Нетер). Пусть $h^\alpha : R^n \rightarrow R^n$, $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$, — однопараметрическая дифференцируемая группа отображений конфигурационного пространства в себя со свойствами:

$$1^\circ. h^\alpha \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}(t), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in R^n;$$

$$2^\circ. T(\dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t) \equiv T(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t), t)$$

$$3^\circ. \sum_{k=1}^n Q_k(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t), t) \frac{\partial q_k(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, Q_k — обобщенная сила. Тогда уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.3)$$

допускают первый интеграл

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(t, 0)}{\partial \alpha}. \quad (10.4)$$

3. Условия 2°, 3° в случае существования функции Лагранжа заменяются одним условием

$$2^{\circ\prime}. L(\dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t) = L(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t), t).$$

▲ Из условия 2° получим

$$\frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t)}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right) = 0. \quad (10.5)$$

Полагая в равенстве (10.5) $\alpha = 0$ и используя уравнение (10.3), найдем, что

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} - Q_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (10.6)$$

Согласно условию 3° члены, содержащие обобщенные силы Q_k в равенстве (10.6), в сумме равны нулю, а само равенство (10.6) представляется в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Если имеет место условие 2°, то доказательство теоремы аналогично при условии, что уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Заметим, что условие 3° означает равенство нулю элементарной работы активных сил на возможных перемещениях, порождаемых группой h^α (для этого достаточно умножить условие 3° на вариацию $\delta\alpha$).

П.1. Пусть две материальные точки движутся по цилиндрическим поверхностям $f_1(\mathbf{r}_1) = y_1^2 + z_1^2 - a_1^2 = 0$ и $f_2(\mathbf{r}_2) = y_2^2 + z_2^2 - a_2^2 = 0$ соответственно в силовом поле с потенциальной энергией

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \frac{c}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2,$$

где m_1, m_2 — массы точек, g — ускорение силы тяжести, c — жесткость пружины, соединяющей точки. В качестве лагранжевых координат можно выбрать величины $(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2)$, через которые выражаются координаты точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \quad x_2 = x_2, \\ y_1 &= a_1 \cos \varphi_1, \quad y_2 = a_2 \cos \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi, \\ z_1 &= a_1 \sin \varphi_1, \quad z_2 = a_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + a_1^2 \dot{\varphi}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + a_2^2 \dot{\varphi}_2^2) - m_1 g a_1 \sin \varphi_1 - \\ &- m_2 g a_2 \sin \varphi_2 - \frac{c}{2} [(x_1 - x_2)^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Пусть группа h^α есть сдвиг вдоль оси Ox на величину α , т.е. $h^\alpha \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 + \alpha \mathbf{e}_x$, $h^\alpha \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \alpha \mathbf{e}_x$, где \mathbf{e}_x — орт оси Ox . Очевидно, что лагранжиан (10.8) инвариантен относительно этой группы отображений. Тогда по теореме Нетер первый интеграл

$$I = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \frac{\partial(x_1 + \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \frac{\partial(x_2 + \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2.$$

Механический смысл этого интеграла — закон сохранения количества движения системы вдоль оси Ox . Этот результат можно было бы также получить из теоремы об изменении количества движения (см. § 4.8).

Связи, наложенные на перемещения точек системы, допускают поворот системы как твердого тела вокруг оси Ox , и справедлива теорема об изменении момента количества движения (см. § 4.8)

$$\mathbf{e}_x \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) = [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] \mathbf{e}_x + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2] \mathbf{e}_x. \quad (10.9)$$

Согласно формулам (10.7)

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) \mathbf{e}_x = m_1 a_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\varphi}_2.$$

Далее

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} V = -m_1 g \mathbf{e}_z - c(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla_{\mathbf{r}_2} V = -m_2 g \mathbf{e}_z - c(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] \mathbf{e}_x + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2] \mathbf{e}_x = -m_1 g a_1 \cos \varphi_1 - m_2 g a_2 \cos \varphi_2.$$

Соответственно равенство (10.9) принимает вид

$$m_1 a_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\varphi}_2 = -m_1 g a_1 \cos \varphi_1 - m_2 g a_2 \cos \varphi_2.$$

Если дополнительно предположить, что $g = 0$, то получим закон сохранения момента количества движения относительно оси Ox

$$m_1 a_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 a_2^2 \dot{\varphi}_2 = G_x,$$

где G_x — постоянная величина. Этот первый интеграл можно также получить из теоремы Нетер, если в качестве группы отображений принять отображение $(x_1, \varphi_1, x_2, \varphi_2) \rightarrow (x_1, \varphi_1 + \alpha, x_2, \varphi_2 + \alpha)$.

П.2. Пусть к связям, рассмотренным в примере 1, добавлены еще две связи $x_1 = k\varphi_1$, $x_2 = k\varphi_2$, т.е. материальные точки движутся по винтовым линиям с одинаковым шагом. Система имеет две степени свободы и обобщенные координаты (φ_1, φ_2) . Допустим, что поле силы тяжести отсутствует ($g = 0$) и лагранжиан

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \frac{m_1}{2} (k^2 + a_1^2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} (k^2 + a_2^2) \dot{\varphi}_2^2 - \\ & - \frac{c}{2} [k^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

На группе отображений конфигурационного пространства h^α : $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \alpha$, $\varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \alpha$ функция Лагранжа сохраняет свое значение, и по теореме Нетер имеет место первый интеграл (10.4)

$$I = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \frac{\partial (\varphi_1 + \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \frac{\partial (\varphi_2 + \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = m_1 (k^2 + a_1^2) \dot{\varphi}_1 + m_2 (k^2 + a_2^2) \dot{\varphi}_2.$$

§ 4.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Уравнения Лагранжа второго рода можно использовать для определения реакций идеальных голономных связей. Пусть $M = \{x : x \in E^{3N}, f_j(x, t) = 0, j = 1, \dots, l\}$ — конфигурационное многообразие системы с идеальными голономными связями и $q = (q_1, \dots, q_n)$ — локальные координаты на M . Отбросим связь $f_1(x, t) = 0$ и заменим ее влияние на механическую систему согласно принципу освобожденности от связей силами реакции

$$\bar{\mathcal{R}}^{(1)} = (\mathbf{R}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{R}_N^{(1)}), \quad \mathbf{R}_i^{(1)} = \lambda_1 \nabla_{r_i} f_1(x, t). \quad (11.1)$$

Реакции (11.1) имеют такой вид, если связи идеальны, т.е. когда их работа на возможных перемещениях равна нулю (аксиома идеальных связей)

$$\bar{\mathcal{R}}^{(1)} \delta x = 0 \quad \forall \delta x \perp \nabla_x f_1.$$

Если связь $f_1(x, t) = 0$ не учитывается, то система имеет $n + 1$ степеней свободы, ее конфигурационное многообразие $M_1 = \{x : x \in E^{3N}, f_j(x, t) = 0, j = 2, \dots, l\}$ и набор (q_1, \dots, q_n, s_1) — локальная система координат на M_1 , где $s_1 = f_1(x, t)$. При $s_1 = 0$ точка $x \in M$, а набор (q_1, \dots, q_n) является локальной системой координат на M . Кинетическая энергия системы

$$T_1(\dot{q}, \dot{s}_1, q, s_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2.$$

Работа активных сил, в число которых входят реакции связи $\mathbf{R}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{R}_N^{(1)}$, на возможных перемещениях равна

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \lambda_1 \nabla_{r_i} f_1) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial r_i}{\partial s_1} \delta s_1 \right) = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k + Q_{s_1} \delta s_1.$$

Продифференцировав тождество $f_1(x(q, s_1, t), t) = s_1$, получим

$$\nabla_x f_1 \frac{\partial x}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \nabla_x f_1 \frac{\partial x}{\partial s_1} = 1.$$

Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}, \quad Q_{s_1} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial r_i}{\partial s_1} + \lambda_1.$$

Уравнения Лагранжа второго рода представим в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_1}{\partial q_k} &= Q_k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{s}_1} - \frac{\partial T_1}{\partial s_1} &= Q_{s_1}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

В уравнениях (11.2) функция $\lambda_1(t)$, неопределенный множитель Лагранжа, определяет величины реакций связи (11.1). Рассмотрим такой класс движений, когда $s_1 \equiv 0$, т.е. точка $x(t)$ движется по многообразию M . Реализация этих движений обеспечивается выбором функции $\lambda_1(t)$. При $s_1 \equiv 0$ первые n уравнений системы (11.2) переходят в уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение системы по многообразию M

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (11.3)$$

где $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = T_1(\dot{\mathbf{q}}, 0, \mathbf{q}, 0, t)$. Функция $\lambda_1(t)$ определяется из последнего уравнения системы (11.2), если найдено решение уравнений (11.3) $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$.

II. Две материальные точки, соединенные невесомой нитью движутся по гладкой горизонтальной плоскости Oxy . Система имеет три степени свободы, и ее конфигурационное многообразие

$$M = \left\{ \mathbf{x}: \mathbf{x}(x_1, y_1, x_2, y_2) \in E^4, f(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l \right\}.$$

В качестве обобщенных координат выберем координаты центра масс системы (x_C, y_C) и угол φ (см. рис. 30). Поставим задачу найти движение системы и реакцию связи (силу натяжения нити)

Отбросим связь и введем координату согласно условию

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l + s$$

Используя связь между декартовыми координатами точек и независимыми координатами

$$x_1 = x_C - \frac{m_2(l+s)\cos\varphi}{m_1+m_2},$$

$$x_2 = x_C + \frac{m_1(l+s)\cos\varphi}{m_1+m_2},$$

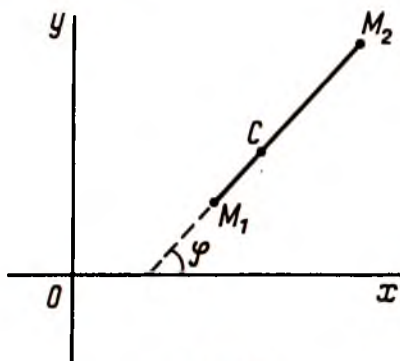


Рис. 30

$$y_1 = y_C - \frac{m_2(l+s)\sin\varphi}{m_1+m_2}, \quad y_2 = y_C + \frac{m_1(l+s)\sin\varphi}{m_1+m_2}$$

найдем кинетическую энергию системы

$$T_1 = \frac{M}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{m_r}{2}[\dot{s}^2 + (l+s)^2\dot{\varphi}^2]$$

$$M = m_1 + m_2,$$

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку внешние активные силы отсутствуют, то уравнения Лагранжа второго рода (11.2) примут вид

$$M\ddot{x}_C = 0, \quad M\ddot{y}_C = 0, \quad [m_r(l+s)^2\dot{\varphi}]^* = 0,$$

$$m_r\ddot{s} - m_r(l+s)\dot{\varphi}^2 = \lambda.$$

При $s \equiv 0$ получим из первых трех уравнений закон движения системы $x_C = \dot{x}_C(0)t + x_C(0)$, $y_C = \dot{y}_C(0)t + y_C(0)$, $\varphi = \dot{\varphi}(0)t + \varphi(0)$, а из последнего уравнения — множитель Лагранжа $\lambda = -m_r l (\dot{\varphi}(0))^2$. Реакция связи, действующая на первую точку,

$$\mathbf{R}_{12} = \lambda \nabla_{\mathbf{r}_1} f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) = \frac{\lambda}{l} (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

и соответственно на вторую —

$$\mathbf{R}_{21} = \lambda \nabla_{\mathbf{r}_2} f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right) = \frac{\lambda}{l} (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Другими словами, нить в процессе движения натянута с постоянной силой, равной $|\lambda|$.

§ 4.12. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть на систему наложены стационарные голономные идеальные связи. Тогда кинетическая энергия системы представляется квадратичной формой

$$T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Уравнения движения системы записываются в одной из двух форм

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (12.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad L = T + U, \quad (12.2)$$

где $Q_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ — обобщенная сила, $U(\mathbf{q}, t)$ — силовая функция.

О.12.1. Говорят, что система материальных точек находится в равновесии в положении \mathbf{q}_0 , если $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ есть решение уравнений (12.1) или (12.2).

Поскольку кинетическая энергия представлена квадратичной формой по $\dot{\mathbf{q}}$, то решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, где \mathbf{q}_0 постоянно, удовлетворяет соответственно уравнениям

$$Q_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.4)$$

Уравнения (12.3) означают, что в положении равновесия обобщенные силы равны нулю. В случае консервативных сил, когда $U = U(\mathbf{q})$, положения равновесия согласно (12.4) суть стационарные точки силовой функции.

Система уравнений Лагранжа второго рода эквивалентна принципу Д'Аламбера—Лагранжа

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in R^n.$$

В положении равновесия последнее равенство принимает вид

$$\delta A = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in R^n, \quad (12.5)$$

и справедлив принцип возможных перемещений.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы система, на которую наложены идеальные голономные стационарные связи, находилась в равновесии при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, является равенство нулю работы активных сил на любых возможных перемещениях.

Равенство (12.5) можно переписать в исходных декартовых координатах в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in T_x M.$$

где \mathbf{F}_i — активная сила, действующая на точку M_i .

П.1. Материальная точка движется по поверхности $z = x^2 + y^2$ в силовом поле с силовой функцией $U = -mg(t)z$ под действием силы сопротивления $\mathbf{F} = -k\dot{\mathbf{r}}$. Независимыми координатами Лагранжа могут служить декартовы координаты x и y . Поскольку $U(x, y, t) = -mg(t)(x^2 + y^2)$, $\mathbf{r}(x, y, x^2 + y^2)$, $\dot{\mathbf{r}}(\dot{x}, \dot{y}, 2x\dot{x} + 2y\dot{y})$, то обобщенные силы равны

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{x}} = -2mg(t)x - k[\dot{x} + 4x(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})],$$

$$Q_y = \frac{\partial U}{\partial y} - k\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{y}} = -2mg(t)y - k[\dot{y} + 4y(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})].$$

В положении равновесия $\dot{x} = \dot{y} = 0$ и $Q_x = Q_y = 0$. Отсюда следует, что имеется единственное положение равновесия $x = y = 0$.

Предположим, что всякое решение уравнений Лагранжа второго рода существует при любом $t \geq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что положению равновесия системы соответствуют нулевые значения координат $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$.

О.12.2. Положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$) найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любых начальных условиях $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \in B_\delta =$

$= \left\{ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \left(\sum_{i=1}^n (q_i^2 + \dot{q}_i^2) \right)^{1/2} < \delta \right\}$ решение $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = (\mathbf{q}(t, \mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))) \in B_\varepsilon$ при любом $t \geq 0$ (рис. 31).

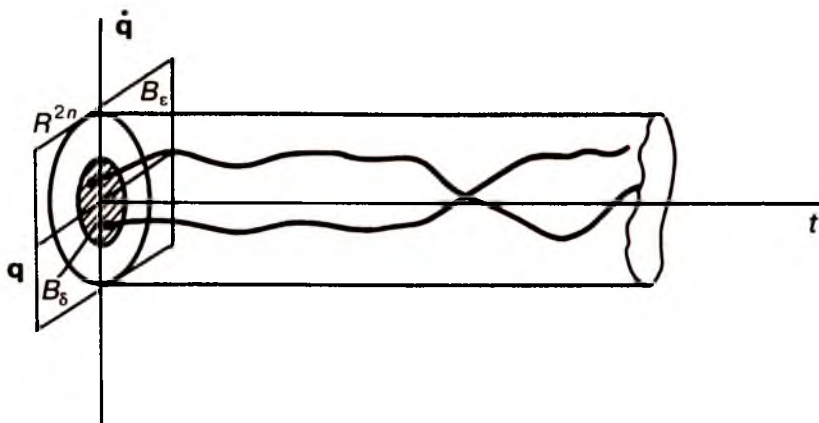


Рис. 31

T (теорема Лагранжа). Если силовая функция $U(q_1, \dots, q_n)$ в положении равновесия имеет изолированный максимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

3. Потенциальная энергия $V = -U$ имеет в устойчивом положении равновесия изолированный минимум.

▲ Рассмотрим фазовое пространство системы R^{2n} , которому принадлежат обобщенные скорости и координаты. Пусть в положении равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ силовая функция U также равна нулю и имеет изолированный максимум, т.е. существует окрестность B_{ϵ_0} , в которой нет других стационарных точек. Поскольку связи стационарны, а силы консервативны, то уравнения движения (12.2) имеют первый интеграл — закон сохранения энергии $T - U = h$. На

всякой сфере $S_r = \left\{ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \sum_{i=1}^n (q_i^2 + \dot{q}_i^2) = r^2 \right\}$, $r < \epsilon_0$, являющейся ком-

пактом в R^{2n} , дифференцируемая неотрицательная функция $T - U$ достигает максимального и минимального значения. Пусть S_ϵ , $\epsilon < \epsilon_0$ — сфера в R^{2n} и $h(\epsilon) > 0$ — минимальное значение функции $T - U$ на S_ϵ . Поскольку функция $T - U$ непрерывна в B_{ϵ_0} и обращается в нуль при $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$, то найдется такая окрестность нуля B_δ , для которой $T - U < h(\epsilon)$. Все траектории движения, начинающиеся в окрестности B_δ , не попадают на сферу S_ϵ , так как для всех этих движений постоянная энергии $h < h(\epsilon)$, а $h(\epsilon)$ — минимальное значение энергии на S_ϵ . Следовательно, движение устойчиво по Ляпунову. ▼

Суждение о наличии изолированного минимума потенциальной энергии может быть получено на основе критерия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Потенциальная энергия $V = -U$ раскладывается в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия $\mathbf{q} = 0$

$$V(\mathbf{q}) = V(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(0)}{\partial q_k} q_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \dots$$

Первые два члена разложения равны нулю, третий представля-ет квадратичную форму

$$V_2 = \frac{1}{2} (B\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad B = \|b_{ij}\|, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Если квадратичная форма V_2 положительно определена, то функция V имеет в нуле изолированный минимум. Согласно критерию Сильвестра положительная определенность будет иметь место тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы B положительны

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Заметим также, что квадратичная форма V_2 может быть приведена к диагональному виду ортогональным преобразованием, принадлежащим группе вращений n -мерного пространства $SO(n)$, а именно

$$\mathbf{q} = \Gamma \mathbf{Q} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\Lambda \mathbf{Q}, \mathbf{Q}),$$

$$\Lambda = \Gamma^{-1} B \Gamma = \text{diag} \{ \kappa_1, \dots, \kappa_n \}.$$

Величины $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ называются коэффициентами устойчивости Пуанкаре, и устойчивость имеет место, если все они положительны.

П.2. Две материальные точки одинаковой массы m связаны невесомым стержнем длины a и перемещаются в вертикальной плоскости Oxy . Точка M_1 скользит по гладкой кривой $y = 1/2a(x^2 - x^4)$. Обозначим угол между прямой M_1M_2 и осью Oy через φ (рис. 32, а). Система имеет две степени свободы. Обобщенные координаты x и φ , а силовая функция

$$U = -mg(y_1 + y_2) = -mga(x^2 - x^4) + mga \cos \varphi.$$

Стационарные точки силовой функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2mga(x - 2x^3) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mga \sin \varphi = 0,$$

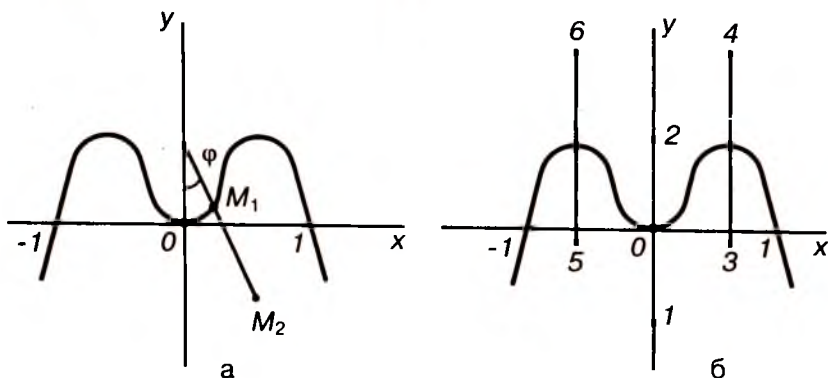


Рис. 32

решения которых $x=0, \pm 1/\sqrt{2}, \varphi=0, \pi$. Таким образом, система имеет шесть положений равновесия при различных сочетаниях значений x и φ (рис. 32, б). Устойчивым является положение равновесия $x=\varphi=0$, так как для него

$$\frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} = 2mga > 0,$$

$$\frac{\partial^2 V(0)}{\partial \varphi^2} = -\frac{\partial^2 U(0)}{\partial \varphi^2} = mga > 0,$$

$$\frac{\partial^2 V(0)}{\partial x \partial \varphi} = -\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x \partial \varphi} = 0$$

и коэффициенты устойчивости Пуанкаре положительны.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 5.1. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОЛЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА— ЛАГРАНЖА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Определение твердого тела и кинематические характеристики его движения приведены во второй главе. Согласно определению 0.2 твердым телом называется система материальных точек $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$, взаимные расстояния между которыми не меняются в процессе движения, т.е. $|\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0^{(1)}) - \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0^{(2)})| = |\mathbf{r}_0^{(1)} - \mathbf{r}_0^{(2)}| \forall \mathbf{r}_0^{(1)}, \mathbf{r}_0^{(2)} \in \Omega$.

Пусть твердое тело занимает область Ω и $g^t: \Omega \rightarrow \Omega_t \in E^3$ — движение твердого тела. Свяжем с твердым телом систему координат $Px_1x_2x_3$ и представим группу g^t в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_P(t) + \Gamma(t)\rho. \quad (1.1)$$

Вектор ρ постоянен в системе координат $Px_1x_2x_3$ и определяет в ней положение произвольной точки N твердого тела, $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_P(t)$ — радиусы-векторы точек N и P в инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ соответственно, $\Gamma(t)$ — ортогональный оператор, принадлежащий группе вращений трехмерного пространства $SO(3)$. Движение твердого тела будет полностью задано, если задать движение полюса P (вектор $\mathbf{r}_P(t)$) и оператор $\Gamma(t)$, определяющий ориентацию твердого тела. Таким образом, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы, а его конфигурационное многообразие $M = E^3 \times SO(3)$.

О.1.1. Говорят, что на систему материальных точек $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$ действует силовое поле, если в каждой точке множества Ω_t (или Ω) задано векторное поле $\mathbf{f}(\rho, t)$.

Векторное поле предполагается суммируемым по мере μ и

$$\mathbf{F}(A) = \int_A \mathbf{f} d\mu, \quad A \in \Sigma(\Omega).$$

Сила $\mathbf{F}(A)$ называется результирующей силой или главным вектором сил, действующих на множество A .

Заметим, что в определении 1.1 силовое поле \mathbf{f} приложено к материальным точкам, имеющим радиус-вектор $\mathbf{r}(\rho, t)$ и принадлежащим изменяемому в процессе движения множеству Ω_t , а операция интегрирования (суммирования) осуществляется по неподвижному множеству Ω . В различных моделях механических систем поле $\mathbf{f}(\rho, t)$ может определяться как объект, зависящий от вектора $\mathbf{r}(\rho, t)$ и его производных по времени и по пространственным переменным.

Для системы свободных материальных точек постулируется вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа: поле ускорений $\ddot{\mathbf{r}}(\rho, t)$ таково, что

$$\int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}) \delta \mathbf{r} d\mu = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}(\rho). \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$, т.е. поле ускорений совпадает с силовым полем. В случае конечного числа материальных точек соотношение (1.2) представляется в виде

$$\sum_{i=1}^N (\ddot{\mathbf{r}}_i - m_i^{-1} \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_i m_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}_i \in E^3.$$

В твердом теле существуют связи

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} [\mathbf{r}(\rho_1, t) - \mathbf{r}(\rho_2, t)]^2 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2)^2 \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in \Omega. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}(\rho_k, t)$, $k = 1, 2$. Возможные перемещения удовлетворяют равенству

$$\delta f = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0. \quad (1.4)$$

Связи (1.3) порождают в твердом теле поле реакций. Предположим, что поле реакций связи идеально, т.е. работа поля реакций на возможных перемещениях равна нулю. Связь между точками, радиусы-векторы которых \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , порождает реакции \mathbf{R}_{12} и \mathbf{R}_{21} . Если связь идеальна, то

$$\mathbf{R}_{12} \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_{21} \delta \mathbf{r}_2 = 0 \quad (1.5)$$

для любых $\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2$, удовлетворяющих (1.3). Из равенств (1.4), (1.5), учитывая произвольность вариаций $\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2$, получим

$$\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21} = \lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.6)$$

(для этого достаточно вначале положить $\delta \mathbf{r}_2 = 0$, а затем $\delta \mathbf{r}_1 = 0$). Здесь $\lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — неопределенный множитель Лагранжа. Очевидно, что $\lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lambda(t, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$. Реакции связи $\mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{21}$ описывают

взаимодействие двух точек и удовлетворяют третьему закону динамики: силы взаимодействия направлены по прямой, соединяющей точки, равны и противоположно направлены.

Суммарное поле реакций связей в точке \mathbf{r}_1 определяется интегралом

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_1) = \int_{\Omega} \lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mu^{(2)}. \quad (1.7)$$

Здесь суммирование ведется по ρ_2 , от которого зависит вектор $\mathbf{r}_2(\rho_2, t)$. Поле реакций связей (1.7) идеально, поскольку его работа на любых возможных перемещениях равна нулю. В самом деле

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{\Omega} \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r}_1 d\mu^{(1)} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta \mathbf{r}_1 d\mu^{(1)} d\mu^{(2)} = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \lambda(t, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r}_2 d\mu^{(1)} d\mu^{(2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$2\delta A = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \lambda(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) d\mu^{(1)} d\mu^{(2)} = 0,$$

если учесть соотношение (1.4).

Согласно (1.1) возможные перемещения точек твердого тела представляются в виде

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_p + \delta \Gamma \rho = \delta \mathbf{r}_p + (\delta \Gamma \Gamma^{-1}) \Gamma \rho. \quad (1.8)$$

Покажем, что вариация оператора $\delta \Gamma$, умноженная на оператор Γ^{-1} , эквивалентна векторному умножению, т.е. $\delta \Gamma \Gamma^{-1} = \delta \alpha \times$, где $\delta \alpha$ — произвольный вектор трехмерного пространства. По определению вариации следует рассмотреть произвольное однопараметрическое семейство $\Gamma(\beta)$, $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$ и найти

$$\delta \Gamma = \left. \frac{\partial \Gamma(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} \delta \beta.$$

Согласно лемме о производной ортогонального оператора (см. § 2.3)

$$\frac{\partial \Gamma(0)}{\partial \beta} \Gamma^{-1} = \mathbf{a} \times.$$

Обозначим $\mathbf{a} \delta \beta = \delta \alpha$ и, учитывая равенство $\Gamma \rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p$, представим (1.7) в виде

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_p + \delta \alpha \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \quad \forall \delta \mathbf{r}_p, \delta \alpha \in E^3. \quad (1.9)$$

Работа поля реакций связей на возможных перемещениях (аксиома идеальных связей) с учетом (1.9) равна

$$\delta A = \int_{\Omega} \mathbf{R}(t, \mathbf{r}) (\delta \mathbf{r}_p + [\delta \boldsymbol{\alpha}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)]) d\mu = 0.$$

Учитывая произвольность векторов $\delta \mathbf{r}_p$ и $\delta \boldsymbol{\alpha}$, получим соотношения

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(t, \mathbf{r}) d\mu = 0, \quad \int_{\Omega} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \mathbf{R}(t, \mathbf{r})] d\mu = 0. \quad (1.10)$$

Первое равенство в (1.10) означает, что результирующий вектор поля реакций связей равен нулю, а второе, что и момент поля реакций равен нулю. В таком случае говорят, что система сил (поле реакций связей) эквивалентна нулю.

Согласно принципу освобождаемости от связей принцип Д'Аламбера—Лагранжа (1.2) для твердого тела имеет вид

$$\int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f} - \mathbf{R}) \delta \mathbf{r} d\mu = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r} \in E^3.$$

Отсюда, учитывая идеальность связей, получим

$$\int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}) (\delta \mathbf{r}_p + [\delta \boldsymbol{\alpha}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)]) d\mu = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}_p, \delta \boldsymbol{\alpha} \in E^3. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) представляет принцип Д'Аламбера—Лагранжа для свободного твердого тела. Полагая в (1.11) $\delta \boldsymbol{\alpha} = 0$ и учитывая произвольность вектора $\delta \mathbf{r}_p$, получим теорему об изменении количества движения твердого тела

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q} = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}} d\mu, \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\mu. \quad (1.12)$$

Поскольку радиус-вектор центра масс твердого тела (точка С) определяется равенством

$$M \mathbf{r}_C = \int_{\Omega} \mathbf{r} d\mu, \quad M = \int_{\Omega} d\mu,$$

то соотношение (1.12) можно представить как теорему о движении центра масс твердого тела $M \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$, где M — масса тела.

Если в равенстве (1.11) положить $\delta \mathbf{r}_p = 0$, то, учитывая произвольность вектора $\delta \boldsymbol{\alpha}$, получим теорему об изменении момента количества движения. Имеем

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f})] d\mu = 0$$

и далее согласно (1.12)

$$\mathbf{r}_p \times \int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}) d\mu = 0.$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \overline{\mathcal{M}_0(\mathbf{f})}, \quad \mathbf{G} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] d\mu, \\ \overline{\mathcal{M}_0(\mathbf{f})} &= \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{f}] d\mu. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) выражает теорему об изменении момента количества движения твердого тела относительно начала системы координат: производная момента количества движения равна моменту внешних активных сил. Величины \mathbf{F} , $\overline{\mathcal{M}_0(\mathbf{f})}$ называются соответственно главным вектором и главным моментом относительно точки O поля активных сил.

Равенство (1.13) останется справедливым, если в нем заменить вектор \mathbf{r} на вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c$. При доказательстве этого факта следует учесть определение центра масс и теорему о движении центра масс. Таким образом, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}'}{dt} &= \overline{\mathcal{M}_c(\mathbf{f})}, \quad \mathbf{G}' = \int_{\Omega} [\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}'] d\mu, \\ \overline{\mathcal{M}_c(\mathbf{f})} &= \int_{\Omega} [\mathbf{r}', \mathbf{f}] d\mu, \end{aligned}$$

выражающее теорему об изменении момента количества движения относительно репера Кенига.

§ 5.2. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ, МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ, ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O , которую примем за начало инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Если Ω — мгновенная угловая скорость твердого тела, то момент количества движения и кинетическая энергия тела определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] d\mu = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\Omega, \mathbf{r}]] d\mu, \\ 2T &= \int_{\Omega} \dot{\mathbf{r}}^2 d\mu = \int_{\Omega} [\Omega, \mathbf{r}]^2 d\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

поскольку согласно формуле Эйлера $\dot{\mathbf{r}} = \Omega \times \mathbf{r}$. Отметим также равенство $2T = \mathbf{G}\Omega$, вытекающее из формул (2.1). Обозначая

проекции векторов Ω и \mathbf{r} на оси системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ через $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , получим

$$2T = \int_{\Omega} \left[(\Omega_2\xi_3 - \Omega_3\xi_2)^2 + (\Omega_3\xi_1 - \Omega_1\xi_3)^2 + (\Omega_1\xi_2 - \Omega_2\xi_1)^2 \right] d\mu =$$

$$= J_{11}\Omega_1^2 + J_{22}\Omega_2^2 + J_{33}\Omega_3^2 - 2J_{12}\Omega_1\Omega_2 - 2J_{23}\Omega_2\Omega_3 - 2J_{13}\Omega_1\Omega_3, \quad (2.2)$$

$$J_{ii} = \int_{\Omega} (r^2 - \xi_i^2) d\mu, \quad J_{ij} = \int_{\Omega} \xi_i \xi_j d\mu, \quad i \neq j.$$

Величина J_{ii} называется моментом инерции тела относительно оси $O\xi_i$, а величина J_{ij} ($i \neq j$) — центробежным моментом инерции. Квадратичная форма (2.2) представляется в виде

$$2T = (\mathbf{J}\Omega, \Omega), \quad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & -J_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

О.2.1. Симметричный тензор \mathbf{J} называется тензором инерции тела в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, или оператором инерции.

Очевидно, что $\mathbf{G} = \mathbf{J}\Omega$. Заметим, что компоненты оператора инерции J_{ij} зависят от ориентации тела в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и, следовательно, зависят от времени, если тело вращается вокруг неподвижной точки O .

Перейдем к новой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с помощью ортогонального оператора Γ . Справедливы формулы

$$\Gamma\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \Gamma\omega' = \Omega, \quad \Gamma \in SO(3),$$

$$2T = \int_{\Omega} [\Gamma, \Gamma\omega']^2 d\mu = (\mathbf{J}\Gamma\omega', \Gamma\omega') = (\mathbf{J}'\omega', \omega').$$

Отсюда следует закон преобразования тензора инерции при переходе к новой системе координат $\mathbf{J}' = \Gamma^{-1}\mathbf{J}\Gamma$. Пусть оператор Γ , зависящий от времени, таков, что система координат $Ox_1x_2x_3$ жестко связана с телом. Тогда компоненты тензора \mathbf{J}' будут постоянными величинами. Согласно теореме алгебры существует ортогональное преобразование Γ_0 , приводящее квадратичную форму $(\mathbf{J}'\omega', \omega')$ к каноническому виду, когда матрица $\Gamma_0^{-1}\mathbf{J}'\Gamma_0 = \text{diag}\{A, B, C\}$ и

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad \omega = \Gamma_0^{-1}\omega' = (p, q, r). \quad (2.4)$$

Ортогональное преобразование Γ_0 эквивалентно переходу к новой системе координат $Oxyz$, также жестко связанной с телом, в которой оператор инерции имеет диагональный вид. Оси Ox , Oy , Oz называются главными осями инерции, а постоянные величины A , B , C — главными моментами инерции тела относительно точки

О. В главных осях инерции центробежные моменты инерции равны нулю.

Остановимся на ряде свойств тензора инерции.

1°. Задача отыскания главных осей инерции совпадает с задачей определения собственных векторов оператора инерции, когда справедливо соотношение $J\omega = \lambda\omega$, и совпадает с задачей отыскания условного экстремума кинетической энергии на сфере $S^2 = \{\omega : \omega^2 = 1\}$.

2°. Главные моменты инерции являются корнями характеристического уравнения

$$\det\|J - \lambda E\| = 0.$$

3°. Собственные векторы, отвечающие различным корням λ_k характеристического уравнения, ортогональны, а корни λ_k действительны.

О.2.2. Моментом инерции тела относительно оси e , проходящей через начало координат и имеющей орт e , называется величина

$$J_e = \int_{\Omega} [e, r]^2 d\mu.$$

Величина $[e, r]^2$ равна квадрату расстояния от точки, радиус-вектор которой равен r , до оси e .

Т (Штейнер). *Момент инерции тела относительно оси e равен сумме момента инерции относительно оси e' , проходящей через центр масс тела и параллельной оси e , и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями e и e' .*

▲ Пусть ось e совпадает с осью Oz системы координат $Oxyz$, а r — радиус-вектор точки твердого тела. Обозначим через r_C радиус-вектор центра масс тела точки C и получим равенство $r = r_C + r'$, где r' — радиус-вектор точки твердого тела относительно осей Кенига. Тогда

$$J_e = \int_{\Omega} [e, (r_C + r')]^2 d\mu = \int_{\Omega} [e, r_C]^2 d\mu + 2 \int_{\Omega} [e, r_C][e, r'] d\mu + \int_{\Omega} [e, r']^2 d\mu.$$

Второе слагаемое равно нулю по определению центра масс, а первый и последний члены равны Md^2 и $J_{e'}$ соответственно. Здесь d — расстояние между прямыми e и e' , M — масса тела. Таким образом, справедлива теорема

$$J_e = J_{e'} + Md^2. \blacktriangledown$$

Если мгновенная угловая скорость твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, направлена по оси e и равна ωe , то кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{e}, \mathbf{r}]^2 d\mu \omega^2 = \frac{1}{2} J_e \omega^2,$$

где J_e — момент инерции тела относительно оси e . С другой стороны, $T = 1/2 (J\omega, \omega)$ и, следовательно, $J_e = (J\mathbf{e}, \mathbf{e})$, где J — тензор инерции тела относительно неподвижной точки.

О.2.3. Главные оси инерции тела относительно центра масс называются главными центральными осями инерции.

Л. Если точка K принадлежит главной центральной оси инерции, то одна из главных осей тензора инерции относительно точки K совпадает с главной центральной осью инерции.

▲ Пусть точка K принадлежит оси Cz и рассматривается оператор инерции относительно репера $Kx'y'z'$, координатные оси которого параллельны главным центральным осям Cx, Cy, Cz (рис. 33). Используя свойства главных центральных осей инерции и определение центра масс, получим

$$J_{xz'} = \int_{\Omega} x'z' d\mu = \int_{\Omega} x(z-a) d\mu = \int_{\Omega} xz d\mu - a \int_{\Omega} x d\mu = 0.$$

Аналогично имеем $J_{y'z'} = 0$. Следовательно, Kz' — главная ось инерции тензора инерции относительно точки K . ▼

Главные моменты инерции тела относительно некоторой точки удовлетворяют неравенствам $A+B \geq C$, $B+C \geq A$, $C+A \geq B$, поскольку

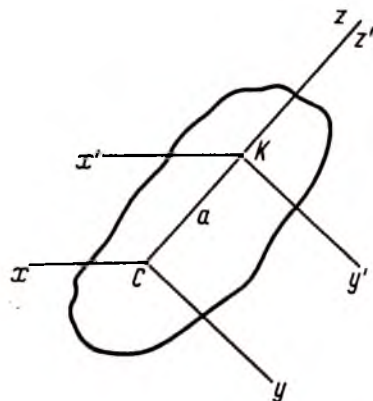


Рис. 33

$$A+B-C = \int_{\Omega} 2z^2 d\mu \geq 0,$$

$$B+C-A = \int_{\Omega} 2x^2 d\mu \geq 0,$$

$$C+A-B = \int_{\Omega} 2y^2 d\mu \geq 0.$$

О.2.4. Поверхность второго порядка $(J\rho, \rho) = 1$ называется эллипсоидом инерции Коши.

В главных осях инерции уравнение эллипсоида инерции имеет вид $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$. Эллипсоид инерции есть геометрическое место

концов векторов угловых скоростей ω , при которых кинетическая энергия тела равна $1/2$. При этом нормаль к поверхности эллипсоида совпадает с вектором момента количества движения \mathbf{g} , так как $\mathbf{n} = \nabla_{\omega} (J\omega, \omega) = 2J\omega = 2\mathbf{g}$.

**§ 5.3. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ.
ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА.
СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ**

Применим принцип Д'Аламбера—Лагранжа (1.10) к твердому телу, имеющему одну неподвижную точку

$$\int_{\Omega} (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{f}) \delta \mathbf{r} d\mu = 0, \quad \delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad \forall \delta \boldsymbol{\alpha} \in E^3. \quad (3.1)$$

Поскольку $\delta \boldsymbol{\alpha}$ произволен, то соотношение (3.1) эквивалентно равенству

$$\int_{\Omega} [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}] d\mu = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{f}] d\mu, \quad (3.2)$$

левая часть которого равна производной по времени вектора момента количеств движения \mathbf{G} , а правая — моменту внешних сил относительно неподвижной точки O , являющейся началом инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Пусть система координат $Oxyz$ жестко связана с телом и ее оси суть главные оси инерции оператора инерции относительно точки O . Если $\Gamma(t)$ — ортогональный оператор перехода от системы координат $Oxyz$ к системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, то $\mathbf{r} = \Gamma \boldsymbol{\rho}$,

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] d\mu = \Gamma \int_{\Omega} [\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}] d\mu = \Gamma \mathbf{g},$$

и равенство (3.2) представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \Gamma \dot{\mathbf{g}} + \dot{\Gamma} \mathbf{g} = \overline{\mathcal{M}_0}(\mathbf{f}). \quad (3.3)$$

По лемме о производной ортогонального оператора $\Gamma^{-1} \dot{\Gamma} = \boldsymbol{\omega} \times$, и соотношение (3.3) в проекции на оси подвижной системы координат $Oxyz$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} &= \mathbf{m}_0(\mathbf{f}), \quad \mathbf{g} = J \boldsymbol{\omega}, \\ J &= \text{diag}\{A, B, C\}, \quad \mathbf{m}_0(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\rho}, \Gamma^{-1} \mathbf{f}] d\mu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Векторное уравнение (3.4) эквивалентно системе трех скалярных уравнений, называемых динамическими уравнениями Эйлера

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = m_x,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = m_y, \quad (3.5)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = m_z.$$

Здесь p, q, r, m_x, m_y, m_z — проекции соответственно вектора ω и момента сил на оси подвижной системы координат $Oxyz$.

Если положение подвижной системы координат $Oxyz$ относительно инерциальной системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$ задать тремя углами Эйлера ψ, θ, φ , то кинематические уравнения Эйлера имеют вид (см. § 2.9)

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5) и (3.6) образуют полную систему дифференциальных уравнений шестого порядка относительно неизвестных $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$, описывающую вращение твердого тела относительно неподвижной точки. Моменты сил m_x, m_y, m_z должны быть заданы как функции переменных $t, p, q, r, \psi, \theta, \varphi$.

Рассмотрим случай движения твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести, когда $\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3$, где \mathbf{e}_3 — орт оси $O\xi_3$. Дифференцируя по времени равенство $\xi_3 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3$, найдем

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} + \omega \times \mathbf{e}_3 = 0. \quad (3.7)$$

Здесь \mathbf{e}_3 — орт вертикали в системе координат $Oxyz$. Уравнение (3.7) называется уравнением Пуассона.

Уравнение (3.4) представляется в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = -Mg[\rho_C, \mathbf{e}_3], \quad (3.8)$$

где ρ_C — радиус-вектор центра масс тела в подвижной системе координат $Oxyz$, M — масса тела. При вычислении правой части уравнения (3.8) использовались равенства

$$\int_{\Omega} \rho d\mu = M\rho_C, \quad \mathbf{m}_0(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} [\rho, (-g\mathbf{e}_3)] d\mu = -Mg[\rho_C, \mathbf{e}_3].$$

Обозначим проекции вектора \mathbf{e}_3 на оси подвижной системы координат через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и получим очевидные равенства

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.7), (3.8) можно рассматривать как замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Система уравнений (3.7), (3.8) имеет три первых интеграла. Умножим уравнение (3.8) скалярно на \mathbf{e}_3 и после преобразований получим

$$J \frac{d\omega}{dt} \mathbf{e}_3 - [\omega, \mathbf{e}_3] J \omega = 0.$$

Согласно уравнению (3.7) заменим $-\ [\omega, \mathbf{e}_3]$ на $\dot{\mathbf{e}}_3$ и представим последнее равенство в виде $(J\omega, \mathbf{e}_3) = 0$. Отсюда $J\omega \mathbf{e}_3 = G_3$ — закон сохранения момента количества движения относительно оси Oz_3 . В развернутом виде получим

$$A\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = G_3. \quad (3.10)$$

Если уравнение (3.8) умножить скалярно на ω и воспользоваться уравнением (3.7), то придем к равенству

$$J \frac{d\omega}{dt} \omega = -Mg[\rho_C, \mathbf{e}_3]\omega = -Mg\rho_C \frac{d\mathbf{e}_3}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}(J\omega, \omega) + Mg(\rho_C, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}h. \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11), где $h/2$ — полная энергия, представляет собой закон сохранения энергии при движении твердого тела в однородном поле силы тяжести.

Кроме того, имеет место тривиальный интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (3.12)$$

следующий из соотношений (3.9).

Три первых интеграла (3.10), (3.11), (3.12) не позволяют в общем случае проинтегрировать автономную систему дифференциальных уравнений (3.7), (3.8). Существуют три случая, когда такая интеграция возможна:

- 1) случай Эйлера, когда $\rho_C = 0$;
- 2) случай Лагранжа, когда $A = B$ и $\rho_C = l\mathbf{e}_z$;
- 3) случай Ковалевской, когда $A = B = 2C$ и $\rho_C \mathbf{e}_z = 0$.

Здесь \mathbf{e}_z — орт оси Oz . Ниже будут рассмотрены подробно два первых случая.

§ 5.4. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА: ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Случай Эйлера можно также реализовать при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции, когда внешние активные силы отсутствуют. Разобьем решение задачи на несколько этапов.

1°. *Определение вектора ω .* Уравнение (3.8) при $\rho_C = 0$ порождает замкнутую систему дифференциальных уравнений и имеет вид

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = 0. \quad (4.1)$$

Скалярное умножение уравнения (4.1) на $J\omega$ приводит к первому интегралу

$$(J\omega)^2 = G^2 \Rightarrow A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2, \quad (4.2)$$

который вместе с интегралом энергии (3.11)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \quad (4.3)$$

определяет кривую четвертого порядка, описываемую концом вектора угловой скорости $\{\omega: \omega \in E^3, J\omega = h, (J\omega)^2 = G^2\}$. Предположим, что $A \geq B \geq C$ и введем новую постоянную D , удовлетворяющую равенству $G^2 = hD$ и имеющую размерность момента инерции. Из равенств (4.2) и (4.3) выразим p^2 и r^2 через q^2 , решив систему уравнений

$$\begin{aligned} Ap^2 + Cr^2 &= h - Bq^2, \\ A^2 p^2 + C^2 r^2 &= hD - B^2 q^2. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{B(B-C)}{A(A-C)}(f^2 - q^2), & f &= \sqrt{\frac{h(D-C)}{B(B-C)}}, \\ r^2 &= \frac{B(A-B)}{C(A-C)}(g^2 - q^2), & g &= \sqrt{\frac{h(A-D)}{B(A-B)}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Постоянная D должна удовлетворять неравенствам $A \geq D \geq C$. Из соотношений (4.4) и второго уравнения системы (3.5) с учетом равенства $m_y = 0$ найдем \dot{q} в виде

$$\dot{q} = \pm n \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)}, \quad n = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) определяет в области $|q| \leq \min(f, g)$ на фазовой плоскости (q, \dot{q}) замкнутую кривую, симметричную относительно осей координат. Рассмотрим различные случаи интегрирования уравнения (4.5).

а) Случай общего положения, когда $f \neq 0$, $g \neq 0$, $f \neq g$. Разделяя переменные в уравнении (4.5) и вводя новую переменную $s = qg^{-1}$, если $f > g$, получим

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = fn(t-t_0), \quad k = \frac{g}{f} < 1.$$

Переменная q выражается через эллиптический синус в виде $q = g \operatorname{sn}(fn(t-t_0); k)$ и изменяется периодически от $-g$ до g . Период функции $q(t)$ определяется через полный эллиптический интеграл первого рода

$$T = \frac{4K(k)}{fn}, \quad K(k) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}. \quad (4.6)$$

Если $g > f$, то переменная q представляется в виде $q = f \operatorname{sn}(gn \times (t-t_0); k')$, $k' = fg^{-1} < 1$.

После того как найдена компонента угловой скорости $q(t)$, две остальные проекции угловой скорости на главные оси тензора инерции $p(t)$ и $r(t)$ определяются из соотношений (4.4) как периодические функции времени.

б) В случае $f = g$ получим уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \pm n(f^2 - q^2),$$

решение которого имеет вид $q = f \operatorname{th}[nf(t-t_0)]$. При $t \rightarrow +\infty$ величина $q(t)$ стремится к f , а $p(t)$ и $r(t)$ согласно (4.4) стремятся к нулю. Движение тела стремится к стационарному вращению вокруг оси, совпадающей со средней главной осью инерции — осью Oy . Решение имеет асимптотический характер.

в) Система уравнений (4.4), (4.5) имеет также стационарные решения трех типов:

$$\begin{aligned} D = A, \quad g = 0, \quad f \neq 0 &\Rightarrow p = \pm \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} f, \quad q = r = 0; \\ D = B, \quad f = g \neq 0 &\Rightarrow p = r = 0, \quad q = \pm f; \\ D = C, \quad f = 0, \quad g \neq 0 &\Rightarrow p = q = 0, \quad r = \pm \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} g. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решения (4.7) соответствуют вращениям твердого тела вокруг одной из главных осей инерции.

2°. *Определение углов Эйлера.* Вектор момента количества движения $\mathbf{g} = J\omega = (Ap, Bq, Cr)$ направлен по оси $O\xi_3$ инерциальной системы координат и постоянен. С другой стороны, его проекции на

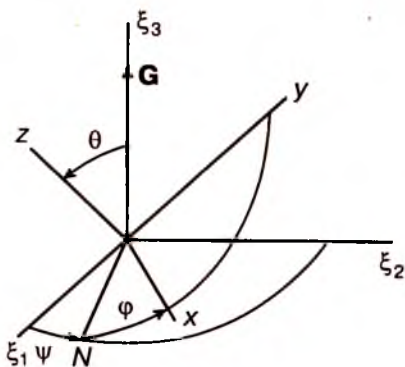


Рис. 34

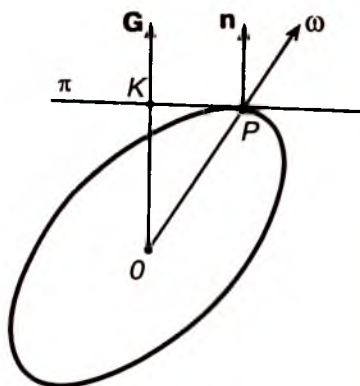


Рис. 35

главные оси инерции Ox , Oy , Oz представляются посредством углов Эйлера формулами ($G \sin \theta \sin \varphi$, $G \sin \theta \cos \varphi$, $G \cos \theta$) (рис. 34). Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} Ap &= G \sin \theta \sin \varphi, \\ Bq &= G \sin \theta \cos \varphi, \\ Cr &= G \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку величины p , q , r найдены выше как функции времени, то из равенств (4.8) легко определить два угла Эйлера θ и φ из соотношений

$$\cos \theta = \frac{Cr}{G}, \quad \cos \varphi = \frac{Bq}{G \sin \theta}.$$

Определение угла прецессии ψ требует вычисления интеграла по времени от выражения, полученного из кинематических уравнений Эйлера (3.6) и соотношений (4.8)

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} = G(A^{-1} \sin^2 \varphi + B^{-1} \cos^2 \varphi) > 0. \quad (4.9)$$

В случае общего положения углы θ и φ изменяются периодически с периодом T , определяемым формулой (4.6), а угол ψ монотонно возрастает. Если время, за которое угол ψ возрастает на 2π , несоизмеримо с периодом T , то движение непериодично по всем углам Эйлера и называется почти-периодическим. Тело никогда не возвращается в исходную конфигурацию, хотя в некоторые моменты времени будет как угодно близко к ней.

В случае соизмеримости этих величин движение периодически. Почти все движения тела непериодичны, а мера начальных условий движения, при которых движение периодически, равна нулю, если рассматривать любое ограниченное множество начальных условий в шестимерном фазовом пространстве $(p, q, r, \psi, \theta, \varphi)$.

§ 5.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПУАНСО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПО ИНЕРЦИИ. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ. РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ

Представление о том, как происходит движение тела в случае Эйлера, было дано Л. Пуансо. Докажем две леммы, из которых будет следовать геометрическая трактовка движения.

Л.1. *Нормаль к эллипсоиду инерции тела в точке P , лежащей на оси мгновенного вращения, коллинеарна постоянному вектору момента количества движения.*

▲ Эллипсоид инерции в главных осях инерции, определяющих систему координат $Oxyz$, описывается уравнением $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, а нормаль к нему имеет компоненты $(2Ax, 2By, 2Cz)$. Если точка P принадлежит эллипсоиду инерции и оси мгновенного вращения, то ее координаты равны $x = \lambda p, y = \lambda q, z = \lambda r, \lambda \in R^1$ и нормаль $\mathbf{n} = 2\lambda (Ap, Bq, Cr) = 2\lambda \mathbf{g}$. Далее $\lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1$ и $\lambda^2 = (2T)^{-1}$. ▼

Л.2. *Касательная плоскость π к эллипсоиду инерции в точке P неподвижна в инерциальном пространстве.*

▲ Для доказательства леммы достаточно показать, что расстояние от неподвижной точки O до плоскости π постоянно, так как в лемме 1 уже показано, что нормаль к плоскости π неизменна (она совпадает с постоянным в инерциальной системе координат вектором \mathbf{G}). Пусть OK — перпендикуляр, опущенный из точки O на плоскость π (рис. 35). Тогда

$$|OK| = \frac{\vec{OP} \cdot \mathbf{G}}{G} = G^{-1} (xAp + yBq + zCr) = \\ = \lambda G^{-1} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = G^{-1} \sqrt{2T},$$

а кинетическая энергия тела и величина момента количества движения суть первые интегралы движения. ▼

Таким образом, эллипсоид инерции, который можно отождествить с рассматриваемым телом, в процессе движения касается неподвижной плоскости π в точке, принадлежащей вектору мгновенной угловой скорости. Отсюда следует, что скорость этой точки равна нулю и эллипсоид инерции катится без проскальзывания

по неподвижной плоскости. Геометрические места точек следов точки P на плоскости π и на эллипсоиде инерции называются герполодией и полодией соответственно. Все полодии — замкнутые кривые в случае общего положения, так как они определяются периодическими функциями времени $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида инерции тела. Почти все герполодии в случае общего положения незамкнуты (почти-периодическое движение тела) и заполняют всюду плотно кольцо на плоскости π с центром в точке K .

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарных вращений, имея в виду близость возмущенных и невозмущенных значений p, q, r . Семейство полодий на эллипсоиде инерции $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ определяется уравнением

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = G^2(2T)^{-1}.$$

Преобразование координат $X = \sqrt{Ax}$, $Y = \sqrt{By}$, $Z = \sqrt{Cz}$ отображает семейство полодий на единичную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Образ полодий в новых координатах есть пересечение единичной сферы и эллипсоида $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = d^{-2}$, $d = |OK|$. Варьируя начальные условия, можно получать различные значения параметра d и соответствующие ему полодии (рис. 36). В окрестностях концов большой и малой полуосей эллипсоида инерции полодии порождают особую точку типа центр. Если $A < B < C$, то стационарные вращения вокруг осей Ox и Oz устойчивы: при малых возмущениях начальных условий угловая скорость вращения тела остается все время вблизи соответствующей оси. Напротив, вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции, оси Oy , неустойчиво, так как эта

особая точка имеет гиперболический тип и существуют полодии, которые покидают любую малую окрестность конца средней полуоси. Например, это асимптотические движения, рассмотренные выше.

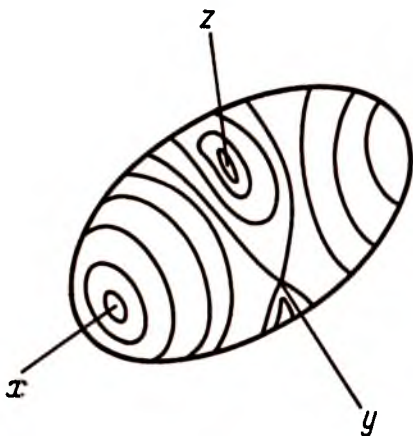


Рис. 36

Рассмотрим важный с практической точки зрения случай движения динамически симметричного твердого тела, когда $A = B \neq C$. Движение тела в этом случае описывается элементарными функциями и называется регулярной прецессией.

Векторное уравнение (4.1) в проекции на ось Oz в этом случае имеет вид $C\dot{r} = 0$, и, следовательно, проекция угловой скорости на ось симметрии Oz постоянна, т.е. $r = r_0$. Из третьего уравнения (4.8) следует, что угол нутации θ постоянен и $\cos \theta_0 = Cr_0G^{-1}$, а из соотношения (4.9) получим $\dot{\psi} = GA^{-1}$. Угловая скорость собственного вращения $\dot{\phi} = r_0 - \dot{\psi} \cos \theta_0$ согласно кинематическим уравнениям Эйлера (3.6) и далее

$$\dot{\phi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right).$$

Таким образом, в случае регулярной прецессии угол нутации постоянен, а углы прецессии и собственного вращения суть линейные функции времени

$$\dot{\psi} = \frac{G}{A}t + \psi(0), \quad \dot{\phi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right)t + \phi(0).$$

Ось симметрии тела Oz составляет постоянный угол с осью $O\xi_3$, по которой направлен вектор \mathbf{G} , и описывает вокруг нее конус, а тело равномерно вращается вокруг оси Oz . Регулярная прецессия есть сумма равномерных вращений вокруг осей $O\xi_3$ и Oz .

§ 5.6. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В случае Лагранжа два главных момента инерции тела относительно неподвижной точки совпадают $A = B \neq C$, а центр масс тела находится на оси его динамической симметрии: $\mathbf{r}_C = l\mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — орт оси Oz .

Для составления уравнений движения воспользуемся методом Лагранжа. Уравнения Лагранжа второго рода для описания движения твердого тела можно получить из вариационного принципа Д'Аламбера—Лагранжа (1.11), если выбрать на шестимерном конфигурационном многообразии твердого тела локальные координаты. Для этого достаточно, например, задать радиус-вектор полюса \mathbf{r}_p как функцию криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) и выразить компоненты ортогонального оператора Γ через углы Эйлера в формуле (1.1). Выполняя преобразования, аналогичные проделанным в § 4.9 с заменой суммирования на интеграл по мере, получим уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение свободного твердого тела.

В случае твердого тела с одной неподвижной точкой остаются три степени свободы и функция Лагранжа равна

$$L = T + U = \frac{1}{2} \left[A(p^2 + q^2) + Cr^2 \right] - mgl\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\xi}_3.$$

Здесь m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, ξ_3 — орт вертикальной оси $O\xi_3$. Согласно кинематическим уравнениям Эйлера (3.6) получим

$$L = \frac{1}{2} \left[A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right] - mgl \cos \theta, \quad (6.1)$$

поскольку скалярное произведение $\mathbf{e}_3 \xi_3 = \cos \theta$. Лагранжиан (6.1) не зависит от циклических обобщенных координат ϕ , ψ и времени. Это обстоятельство позволяет получить три первых интеграла:

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = G_z, \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = G_3, \\ \frac{1}{2} \left[A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right] + mgl \cos \theta &= h. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Два циклических интеграла означают постоянство проекции вектора момента количеств движения на ось симметрии тела Oz вертикаль $O\xi_3$ соответственно, а последний интеграл выражает закон сохранения энергии. Исключая с помощью двух циклических интегралов $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi}$ из интеграла энергии, представим его в виде

$$\frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{(G_3 - G_z \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + \frac{G_z^2}{2C} + mgl \cos \theta = h.$$

Далее

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \left[\left(h - \frac{G_z^2}{2C} \right) \frac{2}{A} - \frac{2mgl}{A} \cos \theta \right] \sin^2 \theta - \left(\frac{G_3}{A} - \frac{G_z}{A} \cos \theta \right)^2.$$

Введем обозначения

$$u = \cos \theta, \quad \frac{2}{A} \left(h - \frac{G_z^2}{2C} \right) = \alpha, \quad \frac{2mgl}{A} = \beta, \quad \frac{G_3}{A} = a, \quad \frac{G_z}{A} = b$$

и запишем интеграл энергии в форме

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = f(u), \quad f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2. \quad (6.3)$$

Поскольку $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$, то функция $f(u)$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет два действительных корня, иначе уравнение (6.3) не будет иметь действительных решений при $a \neq b$. График функции $f(u)$ является кубической параболой с положительным коэффициентом

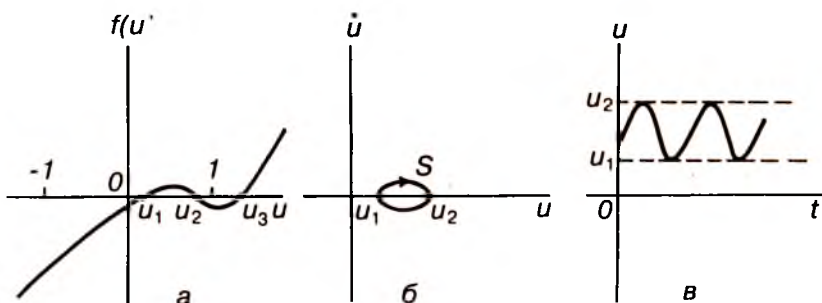


Рис. 37

том β при u^3 (рис. 37, а). Обозначим корни функции $f(u)$ через u_1 , u_2 , u_3 и представим ее в виде $f(u) = \beta(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$, $u_1 \leq u_2 \leq u_3$. На фазовой плоскости (\dot{u}, u) в области $|u| \leq 1$ уравнение (6.3) определяет замкнутую кривую, симметричную относительно оси абсцисс (рис. 37, б). Решение уравнения (6.3) представляется периодической функцией, которая выражается через эллиптические функции Якоби. Период движения определяется интегралом

$$T = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Если $u_1 < u_2 < u_3$ (случай общего положения), то сделаем замену переменных

$$u = u_1 \cos^2 \chi + u_2 \sin^2 \chi, \quad \chi \in S^1,$$

отображающую периодическое движение по кривой S на фазовой плоскости на окружность. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} u - u_1 &= -(u_1 - u_2) \sin^2 \chi, \\ u - u_2 &= (u_1 - u_2) \cos^2 \chi, \\ u - u_3 &= (u_1 - u_3)(1 - k^2 \sin^2 \chi), \\ 0 < k^2 &= \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} < 1. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Замена переменных (6.4) справедлива в области $[u_1, u_2]$ и эквивалентна введению угловой координаты при периодическом изменении переменной u вдоль контура S (рис. 37, в).

Разделяя переменные в уравнении (6.3) с учетом замены переменных (6.4), получим

$$\frac{2}{\sqrt{\beta(u_3 - u_1)}} \int_0^x \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = t - t_0.$$

Тогда $\sin \chi = \text{sn}(1/2\sqrt{\beta(u_3 - u_1)}(t - t_0), k)$, где $\text{sn}(x, k)$ — эллиптическая функция Якоби, рассмотренная в § 5.4. Период изменения угла θ согласно формулам (6.4) выражается через полный эллиптический интеграл первого рода в виде

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{\beta(u_3 - u_1)}}, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}.$$

Из первых двух соотношений (6.2) определим угловую скорость прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{G_3 - G_z u}{A(1 - u^2)} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad (6.5)$$

и скорость собственного вращения

$$\dot{\phi} = \frac{G_z}{C} - \frac{u(a - bu)}{1 - u^2}. \quad (6.6)$$

Функции $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ периодичны по времени. Однако приращения углов ψ и ϕ за период могут оказаться несоизмеримыми с 2π , и в целом движение окажется почти-периодическим.

Исследуем движение точки P — конца единичного вектора \mathbf{e}_z , направленного по оси динамической симметрии тела. Точка P описывает на единичной сфере кривую L , заключенную между двумя параллелями $\cos \theta_1 = u_1$ и $\cos \theta_2 = u_2$ (рис. 38). Скорость точки P составляет с меридианом, проходящим через нее, угол δ и

$$\text{tg} \delta = \frac{\dot{\psi} \sin \theta}{\dot{\theta}} = \frac{a - bu}{\mp \sqrt{f(u)}}, \quad (6.7)$$

поскольку $(\cos \theta)' = \pm \sqrt{f(u)}$. При $u = u_1$ и $u = u_2$ функция $f(u)$ обращается в нуль, а $\text{tg} \delta$ принимает предельные значения $\pm \infty$. Отсюда следует, что кривая L касается параллелей, соответствующих углам θ_1 и θ_2 . Числитель отношения (6.7) обращается в нуль при $u = ab^{-1}$. Пусть u_* находится вне интервала $[u_1, u_2]$.

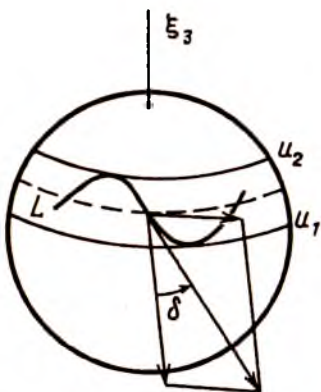


Рис. 38

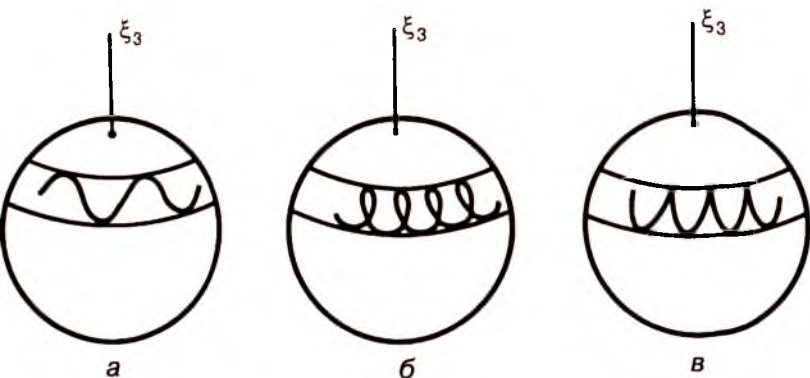


Рис. 39

$u_2]$. Тогда ψ при движении не меняет знак и кривая L имеет вид, указанный на рис. 39, а.

Если $u_* \in [u_1, u_2]$, то скорость прецессии ψ меняет знак и кривая L образует петли (рис. 39, б).

Если величина $|u_*| < 1$, то $u_* > u_1$. Допуская противное ($u_* < u_1$), будем иметь $f(u_*) = (\alpha - \beta u_*)(1 - u_*^2) < 0$, но тогда при $u > u_*$ функция $f(u)$ не может иметь корней на отрезке $[-1, 1]$, так как на этом отрезке оба ее слагаемых отрицательны: $(\alpha - \beta u)(1 - u^2) < 0$ и $-(a - bu)^2 < 0$.

Величина u_* может совпасть с корнем u_2 и по правилу Лопиталья

$$\lim_{u \rightarrow u_2} \operatorname{tg} \delta = \lim_{u \rightarrow u_2} \frac{a - bu}{\sqrt{f(u)}} = \lim_{u \rightarrow u_2} - \frac{2b\sqrt{f(u)}}{f'(u)} = 0.$$

Следовательно, на верхней параллели имеются точки возврата кривой L (рис. 39, в). Этот тип движения будет приближенно исследован в § 5.8.

§ 5.7. ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА: РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ, ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим ряд вырожденных случаев движения волчка Лагранжа, когда уравнение $f(u) = 0$ имеет кратные корни.

а) Регулярная прецессия. Пусть уравнение $f(u) = 0$ имеет кратные корни $u_1 = u_2$ и $|u_1| < 1$. Тогда кривая $u^2 = f(u)$ на фазовой плоскости (\dot{u}, u) вырождается в точку и угол θ постоянен ($\cos \theta = u_1$). Со-

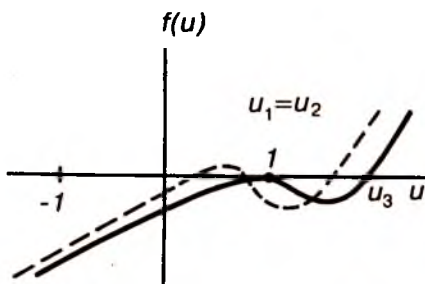


Рис. 40

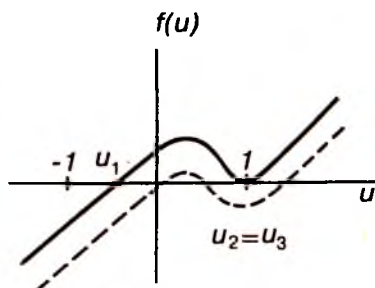


Рис. 41

гласно формулам (6.5) и (6.6) угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ также постоянны, и тело совершает регулярную прецессию. Указанное движение будет иметь место, если начальные условия движения, от которых зависят коэффициенты многочлена $f(u)$, выбрать так, чтобы одновременно выполнялись равенства $f(u_1) = 0$ и $f'(u_1) = 0$.

б) Стационарные вращения. Пусть корни уравнения $f(u) = 0$ удовлетворяют условиям $u_1 = u_2 = 1$ и $u_3 > 1$. Тогда $f(1) = -(a-b)^2 = 0$, $f'(1) = -2(\alpha - \beta) - 2b(a-b) = 0$ и на коэффициенты многочлена $f(u)$ наложены условия $a = b$, $\beta = \alpha$. Многочлен $f(u)$ принимает вид $f(u) = (1-u)^2[\beta(1+u) - a^2]$. Корень $u_3 = (a^2 - \beta)\beta^{-1}$. Если $u_3 > 1$, то $a^2 > 2\beta$, или

$$\frac{G_3^2}{A} > 4mgl. \quad (7.1)$$

При возмущении начальных условий вырождение снимается, и кривая $u = f(u)$ становится кривой общего положения, когда $-1 < u_1 < u_2 < 1$ (рис. 40). Однако корни u_1 и u_2 остаются близкими к единице и ось симметрии тела во все время движения близка к вертикальному положению. Такое поведение тела называется «спящим волчком», а условие (7.1) есть условие устойчивости спящего волчка в указанном смысле.

Если условие (7.1) нарушено (для этого угловая скорость собственного вращения в начальный момент должна быть достаточно малой), то корень u_1 оказывается меньшим единицы, а корень $u_2 = u_3 = 1$ (рис. 41). В этом случае движение вдоль фазовой кривой к точке $u = 1$ описывается соотношением

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{u-u_1}} = \sqrt{\beta}(t-t_0). \quad (7.2)$$

Интеграл в левой части (7.2) расходится при $u \rightarrow 1$, а ось симметрии волчка стремится к вертикальному положению при $t \rightarrow +\infty$. Движение неперiodично и имеет асимптотический характер. Кроме

того, в данном случае существует решение $\theta = 0$, соответствующее твердому телу, вращающемуся вокруг вертикали. При малом возмущении начальных данных вырождение снимается, и величина u становится периодичной в пределах $[u_1, u_2]$. Стационарное вращение вокруг вертикали в этом случае неустойчиво.

Кратные корни могут удовлетворять условиям $u_1 = u_2 = -1$ и $u_3 > 1$, если $\alpha = -\beta$, $a = -b$ и $f(u) = (1 + u)^2 [\beta u - \beta - a^2]$. В этом случае движение есть стационарное вращение вокруг вертикальной оси, когда центр масс лежит ниже неподвижной точки O . При возмущениях корни u_1, u_2 остаются вблизи -1 и, следовательно, это стационарное вращение всегда устойчиво.

§ 5.8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА, ПСЕВДОРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ

Если корни уравнения $f(u) = 0$, расположенные на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяют условию $|u_1 - u_2| \ll 1$, то кубическую параболу $f(u)$ на отрезке $[u_1, u_2]$ можно приближенно аппроксимировать квадратичной параболой и проинтегрировать полученное уравнение в элементарных функциях. Эта замена эквивалентна разложению функции $f(u)$ в окрестности, например, точки u_2 в ряд Тейлора и использованию в дальнейшем двух первых членов этого разложения. Заметим, что ряд Тейлора будет содержать всего три члена, так как функция $f(u)$ есть многочлен третьего порядка.

Пусть тело начинает движение, когда $\dot{\psi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\phi}^2(0) \gg C^{-1} mgl$. Последнее условие означает, что кинетическая энергия тела в начальный момент времени значительно превосходит характерную потенциальную энергию поля силы тяжести. Тогда коэффициенты многочлена $f(u)$ (см. формулы (6.3)) равны

$$b = \mathcal{H}A^{-1}, \quad a = b \cos \theta_0, \quad \beta = 2mglA^{-1}, \quad \alpha = \beta \cos \theta_0, \quad \mathcal{H} = C\dot{\phi}_0.$$

Многочлен $f(u)$ принимает вид

$$f(u) = \beta(\cos \theta_0 - u) [1 - u^2 - b^2 \beta^{-1} (\cos \theta_0 - u)].$$

Заметим, что $b^2 \beta^{-1} \gg 1$ согласно сделанным предположениям. Ряд Тейлора функции $f(u)$ в окрестности корня $u_2 = \cos \theta_0$ имеет вид

$$f(u_2 + v) = -\beta[\sin^2 \theta_0 v + (b^2 \beta^{-1} - 2 \cos \theta_0) v^2 - v^3].$$

Здесь $v = u - \cos \theta_0$. Поскольку $b^2 \beta^{-1} \gg 1$, корень $u_1 \approx \cos \theta_0 - \beta b^{-2} \sin^2 \theta_0$. После замены функции $f(u)$ функцией $-\beta[\sin^2 \theta_0 v + (b^2 \beta^{-1} - 2 \cos \theta_0) v^2]$ получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = -\beta \left[\sin^2 \theta_0 v + (b^2 \beta^{-1} - 2 \cos \theta_0) v^2 \right]. \quad (8.1)$$

Продифференцируем соотношение (8.1) по времени и найдем

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \beta \left(\frac{b^2}{\beta} - 2 \cos \theta_0 \right) v = -\frac{\beta}{2} \sin^2 \theta_0. \quad (8.2)$$

Решение уравнения (8.2) с учетом начальных условий имеет вид

$$v = \frac{\sin^2 \theta_0}{2(b^2 \beta^{-1} - 2 \cos \theta_0)} (\cos vt - 1), \quad v = b \sqrt{1 - \frac{2 \cos \theta_0 \beta}{b^2}} \approx b.$$

Угол нутации θ есть периодическая функция времени и

$$\cos \theta \approx \cos \theta_0 + \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{2b^2} (\cos bt - 1). \quad (8.3)$$

Угловая скорость прецессии согласно (6.5) равна

$$\dot{\psi} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \approx -b \sin^{-2} \theta_0 v.$$

Отсюда с учетом (8.3) угол

$$\psi = \frac{\beta}{2b} (t - b^{-1} \sin bt) + \psi(0).$$

Коэффициент $\beta/(2b) = mgl \mathcal{H}^{-1}$, и, значит, угловая скорость прецессии не зависит от угла θ_0 и мала. Скорость собственного вращения $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 - \dot{\psi} \cos \theta$ и близка во все время движения к $\dot{\phi}_0$, так как $\dot{\psi}$ имеет порядок $\beta/(2b) \ll \dot{\phi}_0$, где $\dot{\phi}_0 = \dot{\phi}(0)$.

Описанное движение называется псевдорегулярной прецессией, поскольку величины θ , $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ в процессе движения отличаются от постоянных на малые периодические высокочастотные колебания. Визуально движение «быстрого» волчка воспринимается как регулярная прецессия.

§ 5.9. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси важна с точки зрения многочисленных практических применений.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси $O\xi_3$. Система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ инерциальна, а система $Ox_1x_2x_3$ жестко связана с телом и ось Ox_3 совпадает с осью $O\xi_3$ (рис. 42). Угловая скорость $\omega = \phi \mathbf{e}_3$, где ϕ — угол между осями $O\xi_1$ и Ox_1 , а \mathbf{e}_3 — орт

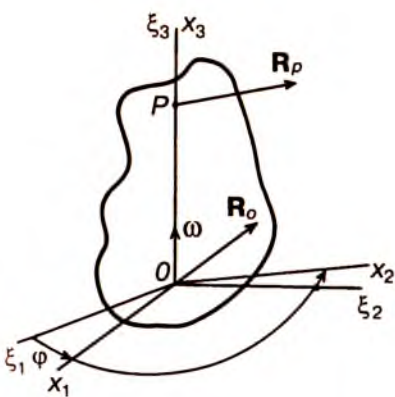


Рис. 42

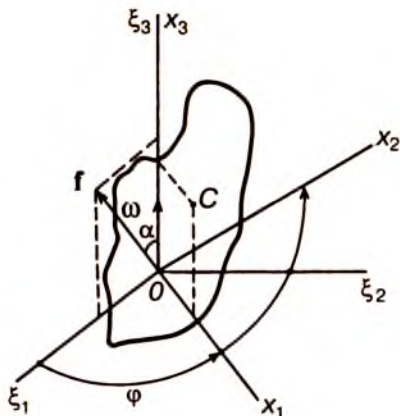


Рис. 43

оси Ox_3 . Неподвижность оси реализуется ее закреплением в подшипниках в точках O и P на оси $O\xi_3$. Связи, вынуждающие тело вращаться вокруг оси $O\xi_3$, порождают силовое поле реакций связи, заданное на поверхностях контакта тела с другими телами, входящими в конструкцию подшипников. Для исследования движения твердого тела достаточно знать две характеристики поля реакций связи — главный вектор и главный момент поля реакций связи относительно точки O . Поле реакций связи эквивалентно двум силам $\mathbf{R}_0(X_{1O}, X_{2O}, X_{3O})$, $\mathbf{R}_P(X_{1P}, X_{2P}, 0)$, действующим на тело в точках O и P соответственно, и моменту $N_1\mathbf{e}_3$, направленному по оси Ox_3 . Главный вектор и главный момент реакций связи относительно точки O в проекциях на подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_P = (X_{1O} + X_{1P}, X_{2O} + X_{2P}, X_{3O}), \\ \vec{\mathcal{M}}_1 &= [\vec{OP} \times \mathbf{R}_P] + N_1\mathbf{e}_3 = (-aX_{2P}, aX_{1P}, N_1), \quad a = |OP|. \end{aligned} \quad (9.1)$$

В выражениях (9.1) содержится шесть неизвестных величин, определяющих силовое воздействие реакций связи на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

Теоремы об изменении момента количества движения и о движении центра масс тела выражаются равенствами (см. § 5.1 и 5.3)

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega &= \vec{\mathcal{M}}_O(\mathbf{f}) + \vec{\mathcal{M}}_1, \\ M \left(\frac{d\omega}{dt} \times \rho_C + [\omega, [\omega, \rho_C]] \right) &= \mathbf{F} + \mathbf{R}_O + \mathbf{R}_P. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В уравнениях (9.2) все векторные величины заданы в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с телом. Угловая скорость $\omega = \omega \mathbf{e}_3$, $\omega = \dot{\varphi}$, а тензор инерции

$$J = \begin{vmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_{33} \end{vmatrix}.$$

Величина M — масса твердого тела, ρ_C — радиус-вектор его центра масс. Ускорение центра масс вычислено по формуле Ривальса (см. § 2.10). Система уравнений (9.2) состоит из шести уравнений и содержит семь неизвестных величин φ , X_{1O} , X_{2O} , X_{3O} , X_{1P} , X_{2P} , N_1 . Момент активных сил $\overline{\mathcal{M}}_O(\mathbf{f})$ и главный вектор активных сил \mathbf{F} предполагаются заданными функциями времени, угла φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$. Задача окажется корректной, если сделать еще одно предположение о характере связей, а именно определить величину момента N_1 , характеризующего трение в оси вращения тела. Например, если связь идеальна, то трение отсутствует и $N_1 = 0$.

Уравнение, определяющее закон вращения твердого тела в случае идеальных связей, получится, если спроектировать первое уравнение системы (9.2) на ось Ox_3 . Имеем

$$J_{33} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \overline{\mathcal{M}}_O(\mathbf{f}) \mathbf{e}_3 = N(\dot{\varphi}, \varphi, t), \quad (9.3)$$

а оставшиеся пять уравнений позволяют определить реакции связей в точках O и P .

С практической точки зрения важно, чтобы величины реакций связей в точках O и P не зависели от величин угловой скорости и углового ускорения. Если связи идеальны и момент внешних сил относительно оси $O\xi_3$ равен нулю, то твердое тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью согласно уравнению (9.3). Найдем условия, при которых главный вектор и главный момент реакций связей не зависят от угловой скорости ω .

Л.1. *Главный вектор реакций связи не зависит от угловой скорости равномерно вращающегося тела, если центр масс тела находится на оси вращения: $\rho_C = l\mathbf{e}_3$ — статическая балансировка тела.*

▲ Правая часть второго уравнения (9.2) не будет зависеть от левой при постоянной угловой скорости, если $[\omega, [\omega, \rho_C]] = 0$. Отсюда следует

$$[\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_3, \rho_C]] = -x_{1C} \mathbf{e}_1 - x_{2C} \mathbf{e}_2 = 0,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты осей системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда $x_{1C} = x_{2C} = 0$ — условия статической балансировки и $\rho_C = l\mathbf{e}_3$. ▼

Л.2. *Главный момент реакций связи не зависит от величины угловой скорости равномерно вращающегося тела, если ось вращения Ox_3 есть главная ось инерции тела, т.е. $J_{12} = J_{13} = 0$ — динамическая балансировка тела.*

▲ Из первого уравнения системы (9.2) следует, что главный момент реакций связей при постоянной угловой скорости не будет зависеть от ее величины, если $\omega \times J\omega = 0$. Поскольку $\omega = \omega e_3$, то последнее условие принимает вид $J_{13}e_1 - J_{12}e_2 = 0$. Отсюда следуют условия $J_{13} = J_{12} = 0$, означающие, что ось вращения тела Ox_3 является главной осью инерции. ▼

3. В случае произвольного закона вращения твердого тела условия статической и динамической балансировки тела обеспечивают независимость реакций связи от угловой скорости и углового ускорения вращения тела.

Условия статической и динамической балансировки означают, что ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела. Нарушение условий балансировки приводит к возникновению динамических реакций, квадратичным образом зависящих от величины угловой скорости. Эти реакции в современных быстроходных машинах могут быть значительными и привести к вибрациям (гармоническим колебаниям конструкций на частоте вращения тела) и быстрому разрушению элементов конструкции.

§ 5.10. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА

В качестве примера рассмотрим задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси в однородном поле силы тяжести — задачу о физическом маятнике.

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Ox_3 , J_{33} — момент инерции тела относительно оси Ox_3 . Инерциальную систему координат выберем так, чтобы ось $O\xi_3$ совпадала с осью вращения тела Ox_3 , а однородное поле силы тяжести было задано в виде $(g \sin \alpha, 0, g \cos \alpha)$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Подвижная система координат $Ox_1x_2x_3$ выбрана так, что центр масс тела находится в плоскости Ox_1x_3 и имеет координаты $(x_{1C}, 0, x_{3C})$. Обозначим угол между осями $O\xi_1$ и Ox_1 через φ и найдем компоненты силового поля в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с телом, в виде $(g \sin \alpha \cos \varphi, -g \sin \alpha \sin \varphi, g \cos \alpha)$ (рис. 43).

Спроектируем уравнение, описывающее изменение момента количества движения (9.2), на ось Ox_3 и получим

$$J_{33} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \overline{M}_O(\mathbf{f})e_3, \quad \overline{M}_O(\mathbf{f})e_3 = \int_{\Omega} [\rho, \mathbf{f}]e_3 d\mu. \quad (10.1)$$

Поскольку векторы \mathbf{f} и \mathbf{e}_3 не зависят от переменных, по которым ведется интегрирование, то

$$\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbf{f})\mathbf{e}_3 = \left[\int_{\Omega} \rho d\mu, \mathbf{f} \right] \mathbf{e}_3 = M[\rho_C, \mathbf{f}]\mathbf{e}_3 = -Mgx_{1C} \sin\alpha \sin\varphi,$$

где M — масса тела. Уравнение (10.1) представляется в форме

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mx_{1C}g \sin\alpha}{J_{33}} \sin\varphi = 0. \quad (10.2)$$

Если ось вращения физического маятника горизонтальна, то $\alpha = \pi/2$. Обозначим x_{1C} через l и введем новый параметр $l' = J_{33}M^{-1}l$ (приведенная длина физического маятника). Уравнение (10.2) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l'} \sin\varphi = 0. \quad (10.3)$$

Уравнение (10.3) совпадает с уравнением, описывающим движение математического маятника (см. § 3.13). Справедливо утверждение: движение физического маятника совпадает с движением математического маятника, длина которого равна приведенной длине физического маятника, если начальные условия движения $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$ одинаковы.

По теореме Штейнера момент инерции тела относительно оси Ox_3 равен $J_{33} = MI^2 + J_3$, где J_3 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C и параллельной оси Ox_3 .

Введем величину $\rho = \sqrt{J_3 M^{-1}}$, которая называется радиусом инерции тела, и получим равенство $l' = l + \rho^2 l^{-1}$. Пусть точка O_1 лежит на оси Ox_3 , прямая O_1CO_2 перпендикулярна оси Ox_3 и $|O_1O_2| = l'$. Точка O_2 называется центром качания физического маятника, так как математический маятник, состоящий из груза на нити O_1O_2 (точка O_1 неподвижна), колеблется так же, как и физический маятник.

Т (Гюйгенс). *Центр качания — точка O_2 — и неподвижная точка O_1 взаимны, т.е. движение твердого тела вокруг оси, параллельной оси Ox_3 и проходящей через точку O_2 , описывается тем же уравнением, что и движение тела вокруг оси Ox_3 .*

▲ Для доказательства идентичности двух уравнений достаточно показать, что приведенные длины математических маятников в этих двух случаях одинаковы. В первом случае приведенная длина $l' = l + \rho^2 l^{-1}$, а во втором приведенная длина равна $l'' = (l' - l) + \rho^2 (l' - l)^{-1}$, так как расстояние от центра масс до оси вращения равно $l' - l$. Заменяя $l' - l$ на $\rho^2 l^{-1}$, получим $l'' = \rho^2 l^{-1} + l = l'$. ▼

Если колебания малы, то $\sin \varphi$ приближенно равен φ и уравнение (10.3) заменяется линейным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l'} \varphi = 0,$$

описывающим колебания гармонического осциллятора (см. § 3.5).
Период малых колебаний маятника $T = 2\pi\sqrt{l'g^{-1}}$ и достигает минимума, когда приведенная длина маятника l' минимальна. Имеем

$$\frac{dl'}{dl} = 1 - \frac{\rho^2}{l^2} = 0 \Rightarrow l = \rho.$$

Таким образом, если математический маятник может иметь сколь угодно малый период колебаний, то период малых колебаний физического маятника при движении вокруг различных параллельных друг другу горизонтальных осей ограничен снизу величиной $T_{\min} = 2\pi\sqrt{\rho g^{-1}}$.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 6.1. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Уравнения Лагранжа второго рода содержат вторые производные обобщенных координат. Зададимся целью преобразовать уравнения Лагранжа к форме Коши, т.е. к такому виду, когда левые части уравнений суть первые производные искомым величин, а правые — их функции. Новая форма уравнений движения более удобна при исследовании свойств движения, как будет видно из дальнейшего.

Введем новые переменные — канонические импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Формулы (1.1) определяют преобразование Лежандра — замену переменных $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{p}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Функция Лагранжа $L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ выступает в роли производящей функции преобразования. Поскольку (см. § 4.9)

$$L = T + U, \quad T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} (A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + \\ + (\mathbf{b}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{q}}) + T_0(\mathbf{q}, t); \quad U = U(\mathbf{q}, t)$$

и $\det \|A(\mathbf{q}, t)\| > 0$, преобразование Лежандра (1.1) в явном виде задается соотношением $\mathbf{p} = A\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}$ и всегда существует обратное преобразование $\dot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{b})$. Таким образом, преобразование Лежандра (1.1) является взаимно однозначным и определяет замену переменных. Обратная замена переменных $\mathbf{p} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}$ может быть представлена как преобразование Лежандра с производящей функцией

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \Big|_{\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{p}} \quad (1.2)$$

Запишем ее полный дифференциал

$$dH = \nabla_p H d\mathbf{p} + \nabla_q H d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

$$dH = \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L d\dot{\mathbf{q}} - \nabla_q L d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Во второй строке члены, содержащие $d\mathbf{q}$, взаимно уничтожаются в силу соотношений (1.1). Сравнивая коэффициенты в двух выражениях дифференциала dH , получим соотношения

$$\dot{\mathbf{q}} = \nabla_p H, \quad \nabla_q H = -\nabla_q L, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (1.3)$$

первое из которых и есть обратное преобразование Лежандра. Функция $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ называется функцией Гамильтона.

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L - \nabla_q L = 0$$

с учетом соотношений (1.1) и (1.3) переписываются в виде $\mathbf{p} = -\nabla_q H$ и совместно с первым уравнением (1.3) образуют систему канонических уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Система дифференциальных уравнений (1.4) имеет порядок $2n$. разрешена относительно первых производных и задает фазовый поток — преобразование $2n$ -мерного фазового пространства переменных (\mathbf{p}, \mathbf{q}) в себя, определяемого общим решением уравнений (1.4)

$$g^t: R^{2n} \rightarrow R^{2n}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \quad t \in R^1.$$

Здесь $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ — начальные условия — обобщенные импульсы и координаты в момент времени $t=0$. Пространство переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ размерности $2n+1$ называется расширенным фазовым пространством. Как и прежде, правые части уравнений (1.4) удовлетворяют теореме существования и единственности решений (например, непрерывны вместе со своими частными производными по всем переменным).

Свойства канонических уравнений Гамильтона

1. Если координата q_j циклическая, т.е. $\partial L/\partial q_j = 0$, то $p_j = p_{j0}$ — первый интеграл уравнений движения (1.4).

▲ Из условия $\partial L/\partial q_j = 0$ следует, что и $\partial H/\partial q_j = 0$ (см. (1.3)) и далее $\dot{p}_j = 0$. ▼

Наличие одной циклической координаты понижает порядок системы канонических уравнений на две единицы. Функция Гамильтона в этом случае не зависит от переменной q_j , а переменная p_j постоянна и равна своему начальному значению. Уравнения (1.4) образуют в этом случае корректно определенную систему дифференциальных уравнений порядка $2n - 2$, если исключить уравнения с номером $i = j$. Переменная q_j может быть найдена после отыскания общего решения полученной системы квадратурой

$$q_j(t) = q_{j_0} + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_j} dt.$$

2. Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то она постоянна вдоль всякой траектории движения, т.е. $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ — первый интеграл уравнения (1.4), обобщенный интеграл энергии.

▲ Производная функции Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ в силу уравнений движения (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \nabla_p H \mathbf{p} + \nabla_q H \mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t} = -(\nabla_p H, \nabla_q H) + \\ &+ (\nabla_q H, \nabla_p H) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

и если $\partial H/\partial t = 0$, то функция H постоянна на всякой фазовой траектории. ▼

Покажем, что полученный интеграл обобщенной энергии совпадает с интегралом Якоби (см. § 4.4.10)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = h.$$

Это непосредственно следует из определения функции Гамильтона (1.2) и определения преобразования Лежандра (1.1).

3. Выясним структуру функции Гамильтона. Поскольку $L = L_2(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + L_1(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + L_0(\mathbf{q}, t)$, где L_k , $k = 0, 1, 2$ — однородные функции Эйлера соответствующих порядков по переменной $\dot{\mathbf{q}}$, то

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2 + L_1$$

и $H = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 - U$. В случае, когда связи стационарны ($T_1 = T_0 = 0$), а силы консервативны $U = -V(\mathbf{q})$, функция Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T + V$ не зависит от времени и постоянна вдоль всякой фазовой траектории. Это обстоятельство выражает закон сохранения энергии.

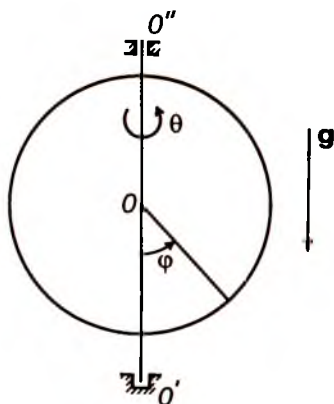


Рис. 44

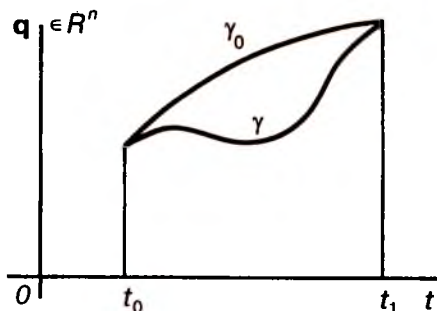


Рис. 45

II. Пусть обруч радиусом R вращается вокруг вертикального диаметра по заданному закону, а по нему скользит без трения бусинка массой m (рис. 44). Обозначая угол поворота обруча вокруг вертикали через θ и определяя положение бусинки на обруче углом φ , найдем функцию Лагранжа

$$L = \frac{J \dot{\theta}^2}{2} + \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) + mgR \cos \varphi.$$

Здесь J — момент инерции обруча относительно диаметра $O'O''$, g — ускорение силы тяжести. Поскольку закон вращения обруча задан, то $\theta = \theta(t)$ и система имеет одну степень свободы, определяемую углом φ . Обобщенный импульс и функция Гамильтона задаются выражениями

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \dot{\varphi}, & H &= p_\varphi \dot{\varphi} - L = \\ &= \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} - \frac{J \dot{\theta}^2(t)}{2} - \frac{mR^2 \dot{\theta}^2(t) \sin^2 \varphi}{2} - mgR \cos \varphi, \end{aligned}$$

а уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mR^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}^2(t) - mgR \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}.$$

Если обруч вращается с постоянной угловой скоростью, то $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ и $\partial H / \partial t = 0$. В этом случае канонические уравнения Гамильтона имеют первый интеграл обобщенной энергии

$$\frac{p_{\varphi}^2}{2mR^2} - \frac{(J + mR^2 \sin^2 \varphi)\omega^2}{2} - mgR \cos \varphi = h.$$

Если дополнительно предположить, что $\omega = 0$ (обруч неподвижен), то получаем задачу о движении математического маятника (см. § 3.13), а написанный выше интеграл становится просто законом сохранения энергии.

§ 6.2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА—ОСТРОГРАДСКОГО В КОНФИГУРАЦИОННОМ И ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Траектории, описывающие движения механических систем в расширенном конфигурационном и фазовом пространствах, обладают замечательным свойством — они являются экстремалими некоторой вариационной задачи, доставляют стационарные значения функционалу действие.

Рассмотрим постановку вариационной задачи в расширенном конфигурационном пространстве $n + 1$, точками которого являются наборы (\mathbf{q}, t) . Пусть кривая $\gamma_0 = \{(\mathbf{q}, t) : \mathbf{q} \in R^n, t \in [t_0, t_1], \mathbf{q} = \mathbf{q}(t)\}$, где $\mathbf{q}(t)$ является решением уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L - \nabla_{\mathbf{q}} L = 0, \quad L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (2.1)$$

Таким образом, γ_0 — действительная траектория (рис. 45). Рассмотрим класс окольных траекторий $\{\gamma\}$, где $\gamma = \{(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, t) : \mathbf{q} + \delta\mathbf{q} \in R^n, t \in [t_0, t_1], \delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0\}$. Вариация $\delta\mathbf{q}(t)$ — произвольная функция из класса C^1 , обращающаяся в нуль на концах отрезка $[t_0, t_1]$.

О.2.1. Отображение класса окольных траекторий $\{\gamma\}$ в R^1 , определяемое равенством

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, t) dt, \quad (2.2)$$

называется функционалом действие по Гамильтону.

О.2.2. Вариацией функционала действие называется выражение

$$\delta S[\gamma_0] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{t_1} (L(\dot{\mathbf{q}} + \lambda\delta\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q} + \lambda\delta\mathbf{q}, t) - L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)) dt.$$

Вариационный принцип Гамильтона—Остроградского формулируется следующим образом: *функционал действие по Гамильтону принимает стационарное значение на действительной траектории в классе окольных траекторий, т. е. вариация $\delta S[\gamma_0] = 0$.*

▲ Первая вариация функционала $S[\gamma]$ при $\gamma = \gamma_0$ согласно определению равна

$$\delta S[\gamma_0] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \right) dt$$

и после интегрирования по частям принимает вид

$$\delta S[\gamma_0] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt. \quad (2.3)$$

Внеинтегральный член в выражении (2.3) обращается в нуль, так как $\delta q_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0$, $k = 1, \dots, n$, а выражение в квадратных скобках под знаком интеграла равно нулю, поскольку γ_0 — действительная траектория, удовлетворяющая уравнениям Лагранжа (2.1). Следовательно, вариация $\delta S[\gamma_0] = 0$. ▼

Верно и обратное утверждение: если вариация $\delta S[\gamma^*] = 0$, где γ^* принадлежит классу околных траекторий, то $\gamma^* = \gamma_0$ — действительная траектория. Справедливость этого утверждения следует из выражения первой вариации (2.3) и основной леммы вариационного исчисления. В данном случае из равенства нулю первой вариации

$$\delta S[\gamma^*] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^*(t)$$

и независимости вариаций $\delta q_k(t) = 0$, $k = 1, \dots, n$, вытекает справедливость уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

когда $q_k = q_k^*(t)$, $k = 1, \dots, n$. Это и означает, что γ^* — действительная траектория движения механической системы.

3.1. В случае неконсервативной системы нельзя указать функционал, стационарное значение которого достигалось на действительной траектории. Однако в этом случае эквивалентны следующие утверждения:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad \delta A = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad \forall \delta \mathbf{q}(t) \in C^1,$$

$$\delta \mathbf{q}(t_0) = \delta \mathbf{q}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}_k} T - \nabla_{q_k} T = Q_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\mathbf{q}(t)$ — действительная траектория. Первое из вышеуказанных утверждений составляет содержание вариационного принципа Гамильтона—Остроградского для неконсервативных систем.

3.2. Можно показать, что стационарное значение функционала действие является минимумом, если разность $t_1 - t_0$ достаточно мала. Это обстоятельство связано с другим названием обсуждаемого принципа — принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского.

Вариационную задачу, рассмотренную выше, можно сформулировать в расширенном фазовом пространстве, что оказывается важным при рассмотрении вопросов интегрируемости канонических уравнений Гамильтона. Обозначим через $\Gamma = \{(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, t) : \mathbf{p}, \mathbf{q}, \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{q} \in R^n, t \in [t_0, t_1], \delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0\}$ кривую в расширенном фазовом пространстве и пусть при $\delta\mathbf{p} = \delta\mathbf{q} = 0$ кривая Γ_0 является решением системы канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H. \quad (2.4)$$

Все функции времени принадлежат классу C^1 . Таким образом, определено семейство окольных траекторий $\{\Gamma\}$, которому принадлежит действительная траектория Γ_0 (рис. 46). Функционал действие с учетом связи между функциями Лагранжа и Гамильтона принимает вид

$$S[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \right] dt. \quad (2.5)$$

Здесь буквы \mathbf{p}, \mathbf{q} употреблены для краткости вместо букв $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$. Вычисляя вариацию функционала $S[\Gamma]$ на действительной траектории, получим

$$\delta S[\Gamma_0] = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p}\delta\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}\delta\mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{p}} H \delta\mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{q}} H \delta\mathbf{q}) dt.$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий, найдем

$$\delta S[\Gamma_0] = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{p}} H)\delta\mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{q}} H)\delta\mathbf{q}] dt.$$

Отсюда следует, что вариация $\delta S[\Gamma_0] = 0$, если $\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона (2.4), и, наоборот, из условия независимости вариаций $\delta\mathbf{p}(t), \delta\mathbf{q}(t)$ следуют уравнения (2.4) согласно основной лемме вариационного исчисления.

Таким образом, доказана справедливость принципа наименьшего действия в фазовом пространстве системы: функционал действие $S[\Gamma]$, заданный на пространстве окольных траекторий $\{\Gamma\}$, принимает стационарное значение на действительной траектории, т.е. $\delta S[\Gamma_0] = 0$.

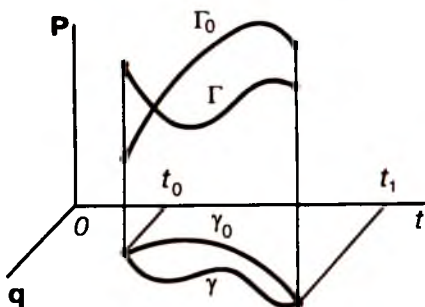


Рис. 46

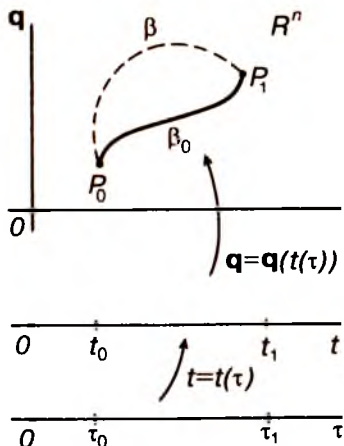


Рис. 47

3.3. При построении функционала (2.5) использовалась связь между функциями Лагранжа и Гамильтона и преобразование Лежандра $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} L$. В дальнейшем переменные \mathbf{p} , \mathbf{q} рассматривались как независимые и из стационарности функционала действие были получены обратное преобразование Лежандра $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{p}} H$ и динамическое уравнение $\mathbf{p} = -\nabla_{\mathbf{q}} H$.

3.4. Класс окольных траекторий может быть сужен путем введения условий $\delta \mathbf{p}(t_0) = \delta \mathbf{p}(t_1) = 0$. Семейство окольных траекторий в этом случае обозначим $\{\Gamma^*\}$, $\Gamma^* = \{(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, t) : \mathbf{p}, \mathbf{q}, \delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{q} \in R^n, \delta \mathbf{q}(t_i) = \delta \mathbf{p}(t_i) = 0, i = 0, 1\}$. Легко проверить, что стационарное значение функционала действие $S[\Gamma^*]$ на этом пространстве окольных траекторий с закрепленными концами также достигается на действительном движении механической системы. Это утверждение составляет принцип наименьшего действия в форме Пуанкаре.

§ 6.3. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ЛАГРАНЖА

Пусть голономные идеальные связи, наложенные на перемещения точек механической системы, стационарны, а силы консервативны. Тогда имеет место интеграл энергии

$$T + V = h, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad V = V(\mathbf{q}). \quad (3.1)$$

Рассмотрим в конфигурационном пространстве системы действительный путь $\beta_0 = \{\mathbf{q} : \mathbf{q}(t) \in R^n, t \in [t_0, t_1]\}$, удовлетворяющий уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} L = \nabla_q L, \quad L = T - V. \quad (3.2)$$

В моменты времени t_0, t_1 кривая β_0 проходит через точки P_0, P_1 (рис. 47). В качестве околных путей будем рассматривать гладкие кривые, проходящие через точки P_0, P_1 , при условии, что временная параметризация $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ удовлетворяет закону сохранения энергии (3.1) с одной и той же постоянной h . Отсюда следует, что временной интервал, соответствующий каждой кривой β , вообще говоря, отличен от временного интервала $[t_0, t_1]$, так как скорость движения $\dot{\mathbf{q}}$ в каждой точке кривой β определяется из интеграла энергии (3.1). Введем вспомогательный параметр $\tau \in [t_0, t_1]$, параметризующий околные пути β , т.е. $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau)$. Тогда возникает взаимно однозначное отображение $t = t(\tau)$ для каждой кривой $\beta = \{\mathbf{q} : \mathbf{q} \in R^n, \mathbf{q} = \mathbf{q}(t(\tau)), t, \tau \in R^1, \tau \in [t_0, t_1]\}$ и верно соответствие $\mathbf{q}(t(t_0)) \Rightarrow P_0, \mathbf{q}(t(t_1)) \Rightarrow P_1$. Для действительного пути $t = \tau$.

Рассмотрим функционал «укороченное» действие

$$W[\beta] = \int_{t(t_0)}^{t(t_1)} 2T dt, \quad (3.3)$$

отображающий множество околных путей $\{\beta\}$ в числовую прямую.

Принцип наименьшего действия Лагранжа: функционал «укороченное» действие $W[\beta]$ принимает стационарное значение на действительном пути ($\delta W[\beta_0] = 0$), если околные пути проходят через точки P_0, P_1 и движение по ним происходит с той же полной энергией, что и по действительному пути.

▲ Функционал (3.3) и интеграл энергии (3.1) при переходе к переменной τ представляются в виде

$$W[\beta] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{t'} d\tau, \quad t' = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (3.4)$$

$$T(\mathbf{q}', \mathbf{q})(t')^{-2} + V(\mathbf{q}) = h, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}'(t')^{-1}.$$

Исключая t' с помощью интеграла энергии из выражения функционала $W[\beta]$, найдем

$$W[\beta] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\mathbf{q}', \mathbf{q}) d\tau, \quad \Phi = 2\sqrt{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})(h - V(\mathbf{q}))}, \quad (3.5)$$

$$\delta W[\beta] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q'_k} \delta q_k(\tau) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_k} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial q'_k} \right) \delta q_k(\tau) d\tau.$$

Заметим, что $\delta q_k(t_i) = 0$, $i = 0, 1$, и имеют место правила дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= t' \frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{h - V(\mathbf{q})}} \frac{d}{dt}, \\ \frac{\partial T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{\partial q'_k} &= \frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{q}_k} \sqrt{\frac{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{h - V(\mathbf{q})}}, \\ \frac{\partial T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{\partial q_k} &= \frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial q_k} \frac{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{h - V(\mathbf{q})}. \end{aligned}$$

Тогда вариация в (3.5) представляется в виде

$$\begin{aligned} \delta W[\beta] &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{h - V(\mathbf{q})}} \left[\frac{\partial(T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - V(\mathbf{q}))}{\partial q_k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если путь действительный ($\beta = \beta_0$), то справедливы уравнения Лагранжа (3.2), выражения в квадратных скобках под знаком интеграла в (3.6) равны нулю и $\delta W[\beta_0] = 0$, т.е. функционал «укороченное» действие на действительном пути принимает стационарное значение. ▼

Верно и обратное утверждение: если $\delta W[\beta^*] = 0$, то $\beta^* = \beta_0$ — действительный путь. Справедливость этого утверждения вытекает из выражения вариации (3.6) и основной леммы вариационного исчисления. Следует только заметить, что для всех кривых параметризация $t = t(\tau)$ такова, что

$$t'(\tau) = \sqrt{\frac{T(\mathbf{q}', \mathbf{q})}{h - V(\mathbf{q})}} > 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1.$$

Отметим еще раз, что предыдущее соотношение эквивалентно интегралу энергии.

§ 6.4. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ФОРМЕ ЯКОБИ. УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ

Введем в n -мерном конфигурационном пространстве метрики

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) dq_i dq_j}, \quad d\rho = \sqrt{2(h - V(\mathbf{q}))} ds \quad (4.1)$$

и представим «укороченное» действие в виде

$$W[\beta] = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(h - V(\mathbf{q}))} ds = \int_{P_0}^{P_1} d\rho. \quad (4.2)$$

Интеграл (4.2) выражает длину кривой β в метрике Якоби ρ , а принцип наименьшего действия утверждает, что действительный путь системы из положения P_0 в положение P_1 есть кривая наименьшей длины, геодезическая в римановом пространстве R^n с метрикой Якоби, так как его вариация равна нулю на действительном пути. Другими словами, принцип наименьшего действия в форме Якоби позволяет найти действительный путь среди всех гладких кривых, соединяющих начальную и конечную конфигурации системы, при условии, что движение происходит с заданной полной энергией h .

Допустим, что действительное движение от точки P_0 к точке P_1 таково, что существует координата, монотонно изменяющаяся со временем, например $\dot{q}_1(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Тогда действительный путь и близкие к нему окольные пути могут быть параметризованы координатой q_1 . Полагая $q_k = q_k(q_1)$, $k = 2, \dots, n$, представим «укороченное» действие (4.2) в виде

$$W[\beta] = \int_{q_1(t_0)}^{q_1(t_1)} \sqrt{2(h - V(\mathbf{q})) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) q_i' q_j'} dq_1. \quad (4.3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по q_1 . Уравнения Эйлера экстремалей функционала $W[\beta]$

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial \sqrt{R(\mathbf{q}', \mathbf{q}, q_1)}}{\partial q_k'} - \frac{\partial \sqrt{R(\mathbf{q}', \mathbf{q}, q_1)}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$R = 2(h - V(\mathbf{q}, q_1)) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}, q_1) q_i' q_j', \quad \mathbf{q} = (q_2, \dots, q_n)$$

определяют действительный путь и называются уравнениями Якоби. Уравнения (4.4) суть уравнения геодезических линий в конфигурационном пространстве с метрикой Якоби.

II. Пусть $T = 1/2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $V(q) = 0$. Тогда $R = 2h(1 + q_2'^2(q_1))$, если траектория движения может быть представлена в виде $q_2 = q_2(q_1)$. Уравнение Якоби примет вид

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial}{\partial q_2'} \left(\sqrt{2h(1 + q_2'^2)} \right) = 0.$$

Далее

$$q_2' \left(\sqrt{1 + q_2'^2} \right)^{-1} = c_1' \Rightarrow q_2 = c_1 q_1 + c_2.$$

Полученный результат означает, что точка, движущаяся по инерции в плоскости, перемещается по прямой. Постоянные c_1, c_2 определяются по граничным условиям из уравнений $q_{20} = c_1 q_{10} + c_2$, $q_{21} = c_1 q_{11} + c_2$. Определитель этой системы равен $q_{10} - q_{11}$. Если $q_{10} - q_{11} \neq 0$, то параметризация $q_2 = q_2(q_1)$ возможна.

§ 6.5. ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Принцип наименьшего действия в форме Якоби и принцип Ферма в оптике позволяют установить аналогию между траекториями материальной точки, движущейся в консервативном поле, и световыми лучами, распространяющимися в неоднородной изотропной среде.

Сформулируем принцип Ферма. Пусть свет распространяется в трехмерном евклидовом пространстве. Физическая среда предполагается изотропной и неоднородной, т.е. скорость света в каждой точке пространства не зависит от направления светового луча, но различна в разных точках пространства. Рассмотрим две точки A_0, A_1 , гладкую кривую β , их соединяющую, и функционал

$$L[\beta] = \int_{A_0}^{A_1} n(\mathbf{r}) ds, \quad n(\mathbf{r}) = \frac{c}{v(\mathbf{r})}, \quad (5.1)$$

где $n(\mathbf{r})$ — коэффициент преломления, $c, v(\mathbf{r})$ — скорости света в вакууме и в среде, \mathbf{r} — радиус-вектор точки, $ds = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)^{1/2}$ — евклидова метрика. Криволинейный интеграл (5.1), вычисленный вдоль β , называется длиной оптического пути, а величина $c^{-1}L[\beta]$ определяет время распространения света от точки A_0 до точки A_1 . Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется от точки A_0 до точки A_1 за кратчайшее время или истинный оптический путь β_0 кратчайший, т.е. $\delta L[\beta_0] = 0$.

Теперь обратимся к задаче о движении свободной материальной точки в трехмерном пространстве под действием консервативных сил с потенциалом $V(\mathbf{r})$. Действительная траектория, соединяющая две точки A_0 и A_1 , может быть найдена как экстремаль функционала «укороченное» действие, записанного в форме Якоби:

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} d\rho = 0, \quad d\rho = \sqrt{2(h - V(\mathbf{r}))} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad m = 1. \quad (5.2)$$

Здесь h — постоянная энергии. Если положить $n(\mathbf{r}) = \sqrt{2(h - V(\mathbf{r}))}$, то функционал «укороченное» действие совпадает с функционалом (5.1) и, следовательно, истинный оптический путь окажется действительной траекторией материальной точки единичной массы. В этом и состоит оптико-механическая аналогия, проиллюстрированная в таблице.

Оптика	Механика
Оптический путь β	Окольный путь β
Истинный оптический путь β_0	Прямой путь, действительная траектория β_0
Длина оптического пути $L[\beta]$	Функционал «укороченное» действие $W[\beta]$
Принцип Ферма $\delta L[\beta_0] = 0$	Принцип наименьшего действия Лагранжа–Якоби $\delta W[\beta_0] = 0$

II. Коэффициент преломления света в атмосфере Земли можно аппроксимировать соотношением

$$n(z) = n_0(1 - kz), \quad 0 \leq z < z^*,$$

где z — высота над поверхностью Земли, k — постоянная. Выберем систему координат с началом на поверхности Земли так, чтобы начальная точка светового луча A_0 лежала на оси Oz . Согласно оптико-механической аналогии материальная точка единичной массы должна двигаться в потенциальном поле с потенциалом

$$V(\mathbf{r}) = h - \frac{1}{2}n^2(z) = h - \frac{1}{2}n_0^2(1 - 2kz + k^2z^2).$$

Заметим, что $kz \ll 1$ в диапазоне рассматриваемых высот и можно принять

$$V(\mathbf{r}) \approx h - \frac{1}{2}n_0^2 + n_0^2kz.$$

Уравнения движения точки представляются в форме

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_r V(\mathbf{r}) = -g\mathbf{e}_z, \quad g = n_0^2k,$$

где \mathbf{e}_z — орт оси Oz . Тогда закон движения точки

$$\mathbf{r}(t) = z_0\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_0t - \frac{gt^2}{2}\mathbf{e}_z, \quad v_0^2 = n_0^2(1 - 2kz_0)$$

соответствует движению точки в однородном поле силы тяжести, а ее траектория — парабола с вертикальной осью. Следовательно, все световые лучи в атмосфере Земли представляются параболой с вертикальными осями.

§ 6.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ПУАНКАРЕ—КАРТАНА. УСЛОВИЕ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ФАЗОВОГО ПОТОКА

Пусть $\Gamma = \{(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t) : \mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^n, t \in [t_0, t_1] \subset R^1\}$ — гладкая кривая в расширенном фазовом пространстве голономной механической системы и

$$S[\Gamma] = \int_{\Gamma} \mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt \quad (6.1)$$

— функционал действия. Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых $\{\Gamma(\alpha)\}$, определяемых соотношениями $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \alpha)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha)$, $t_0(\alpha) \leq t \leq t_1(\alpha)$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ и вычислим вариацию функционала действия

$$\delta S[\Gamma(\alpha)] = \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} [\mathbf{p}(t, \alpha) \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha) - H(\mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q}(t, \alpha), t)] dt.$$

По определению

$$\begin{aligned} \delta S[\Gamma(\alpha)] &= \frac{\partial S[\Gamma(\alpha)]}{\partial \alpha} \delta \alpha = (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H) \Big|_{t=t_1(\alpha)} \frac{\partial t_1(\alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha - \\ &- (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H) \Big|_{t=t_0(\alpha)} \frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \mathbf{p} \delta \dot{\mathbf{q}} \Big|_{t=t_0(\alpha)}^{t=t_1(\alpha)} + \\ &+ \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} [(\dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{p}} H) \delta \mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{q}} H) \delta \mathbf{q}] dt. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Символ вариации δ означает первый дифференциал по переменной α , т.е. $\delta a = \partial a / \partial \alpha \delta \alpha$. Обозначим $\dot{\mathbf{q}}(t, \alpha) \delta t + \delta \mathbf{q}(t, \alpha) = \Delta \mathbf{q}$ и возьмем в качестве кривых семейства $\{\Gamma(\alpha)\}$ фазовые траектории механической системы, удовлетворяющие уравнениям Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H. \quad (6.3)$$

Тогда вариация (6.2) примет вид

$$\delta S[\Gamma(\alpha)] = (\mathbf{p} \Delta \mathbf{q} - H \delta t) \Big|_{t=t_0(\alpha)}^{t=t_1(\alpha)}. \quad (6.4)$$

Отличие рассматриваемой вариации от вариации в принципе Гамильтона—Остроградского является варьирование концов траекторий по времени и выбор в качестве класса кривых действительных фазовых траекторий механической системы.

Пусть семейство кривых $\{\Gamma(\alpha), \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1\}$ образует замкнутую трубку действительных траекторий, т.е. кривые $C_k = \{\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_k(\alpha), \alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t_k(\alpha), \alpha), t = t_k(\alpha), \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1\}, k = 0, 1$, суть замкнутые контуры в R^{2n+1} (рис. 48). Тогда $\mathbf{p}(t_k(\alpha_0), \alpha_0) = \mathbf{p}(t_k(\alpha_1), \alpha_1), \mathbf{q}(t_k(\alpha_0), \alpha_0) = \mathbf{q}(t_k(\alpha_1), \alpha_1), t_k(\alpha_0) = t_k(\alpha_1), k = 0, 1$, другими словами, $\Gamma(\alpha_0) = \Gamma(\alpha_1)$. Вычислим интеграл

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \delta S[\Gamma(\alpha)] = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial S[\Gamma(\alpha)]}{\partial \alpha} d\alpha = S[\Gamma(\alpha_1)] - S[\Gamma(\alpha_0)] = 0.$$

С другой стороны, согласно (6.4)

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \delta S[\Gamma(\alpha)] = \oint_{C_1} (\mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt) - \oint_{C_0} (\mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt).$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл

$$I = \oint_C (\mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt), \quad (6.5)$$

вычисленный по замкнутому контуру C , охватывающему некоторую трубку действительных траекторий, в расширенном фазовом пространстве сохраняет свое значение при переходе к другому контуру, охватывающему ту же трубку траекторий. Интеграл (6.5) носит название интегрального инварианта Пуанкаре—Картана. В частности, если в качестве контуров выбирать сечения трубки траекторий плоскостями $t = \text{const}$, то для этих сечений $dt = 0$ и интеграл (6.5) примет вид

$$I = \oint_C \mathbf{p}d\mathbf{q}. \quad (6.6)$$

Интеграл (6.6) называется относительным интегральным инвариантом Пуанкаре.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t); \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in R^n, \quad (6.7)$$

определяющую фазовый поток в R^{2n+1} . Напомним, что фазовым потоком называется однопараметрическая группа отображений $g^t: R^{2n} \rightarrow R^{2n}, (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, порождаемая общим решением уравнений (6.7).

Сформулируем первый критерий гамильтоновости фазового потока.

Если для любого контура $C \in R^{2n}$ интеграл (6.6) постоянен вдоль соответствующей трубки траекторий, то система уравнений (6.7) гамильтонова, т.е. $\mathbf{P} = -\nabla_{\mathbf{q}}H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q} = \nabla_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

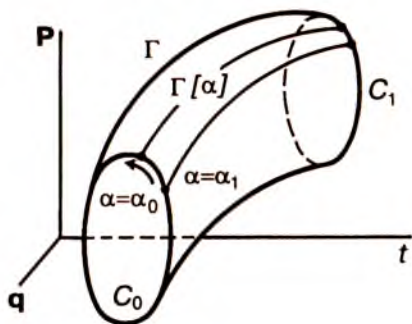


Рис. 48

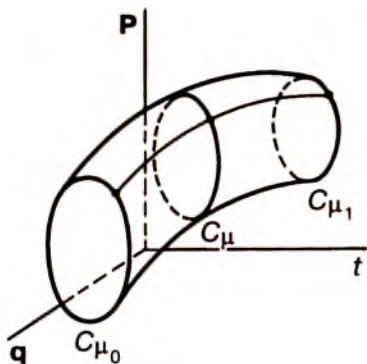


Рис. 49

▲ Пусть контур C задан в виде $C = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \alpha), \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1\}$. Интеграл (6.6) и его производная вдоль фазового потока принимают вид

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \frac{dI}{dt} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\dot{\mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} + \mathbf{p} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \alpha} \right) d\alpha = \\
 &= \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} \Big|_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\dot{\mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} - \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \right) d\alpha = \oint_C (\mathbf{P} d\mathbf{q} - \mathbf{Q} d\mathbf{p}).
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Поскольку I — относительный интегральный инвариант, то его производная по времени вдоль фазового потока равна нулю.

По теореме Стокса

$$\oint_C \sum_{i=1}^{2n} X_i(\mathbf{x}) dx_i = \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j,$$

где C — произвольный гладкий контур в R^{2n} , σ — поверхность, натянутая на контур C . Если криволинейный интеграл по произвольному контуру равен нулю, то выполняются условия Коши

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Это означает, что дифференциальная форма $\sum_{i=1}^n X_i(\mathbf{x}) dx_i$ — полный дифференциал по переменным $(x_1, \dots, x_{2n}) = \mathbf{x}$.

Если принять $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и применить теорему Стокса к интегралу (6.8), то получим

$$\mathbf{P}d\mathbf{q} - \mathbf{Q}d\mathbf{p} = -dH(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t),$$

где t рассматривается как параметр. Отсюда следует, что $\mathbf{P} = -\nabla_{\mathbf{q}}H$, $\mathbf{Q} = \nabla_{\mathbf{p}}H$ и фазовый поток гамильтонов. \blacktriangledown

Второй критерий гамильтоновости фазового потока.

Если для любого контура C , охватывающего одну и ту же произвольную трубку фазовых траекторий в расширенном фазовом пространстве, постоянен интеграл (6.5), то фазовый поток гамильтонов и гамильтониан равен $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$.

▲ Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве R^{2n+1} произвольную трубку фазовых траекторий и произвольное семейство контуров, охватывающих ее (рис. 49). Поверхность трубки фазовых траекторий Σ зададим в виде

$$\Sigma = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) : \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mu, \alpha), \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mu, \alpha), \\ t = t(\mu, \alpha), \mu \in [\mu_0, \mu_1], \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]\}.$$

Если зафиксировать параметр μ и изменять параметр α , то будем иметь замкнутый контур C_μ . Изменение параметра μ соответствует семейству контуров $\{C_\mu\}$, охватывающих трубку Σ .

Интегральный инвариант Пуанкаре—Картана и его производная по параметру μ равны

$$I(\mu) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (\mathbf{p}\mathbf{q}_\alpha - Ht_\alpha) d\alpha, \\ \frac{dI(\mu)}{d\mu} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (\mathbf{p}_\mu \mathbf{q}_\alpha + \mathbf{p}\mathbf{q}_{\alpha\mu} - H_\mu t_\alpha - Ht_{\alpha\mu}) d\alpha = \\ = (\mathbf{p}\mathbf{q}_\mu - Ht_\mu) \Big|_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (\mathbf{p}_\mu \mathbf{q}_\alpha - \mathbf{p}_\alpha \mathbf{q}_\mu - H_\mu t_\alpha + H_\alpha t_\mu) d\alpha.$$

Индексы α и μ внизу означают частные производные по соответствующим параметрам. Поскольку величина $I(\mu)$ — интегральный инвариант, то ее производная по параметру μ равна нулю. Внеинтегральный член равен нулю, так как значения функций при $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_1$ соответствуют одной и той же точке (контур C_μ замкнут), а выражение под знаком последнего интеграла преобразуется к виду

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} t_\mu \left[\left(\frac{\mathbf{p}_\mu}{t_\mu} + \nabla_{\mathbf{q}} H \right) \mathbf{q}_\alpha - \left(\frac{\mathbf{q}_\mu}{t_\mu} - \nabla_{\mathbf{p}} H \right) \mathbf{p}_\alpha - \left(\frac{H_\mu}{t_\mu} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) t_\alpha \right] d\alpha. \quad (6.9)$$

Здесь дополнительно принято условие $t_\mu \neq 0$ при $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$, позволяющее при каждом фиксированном α определить взаимно

однозначное соответствие между μ и t . Интеграл (6.9) равен нулю при любом произвольном выборе функций \mathbf{q}_α , \mathbf{p}_α , t_α и представляется в виде

$$\int_{C_\mu} \left[(\dot{\mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{q}} H) d\mathbf{q} - (\dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{p}} H) d\mathbf{p} - \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right] = 0.$$

По теореме Стокса подынтегральное выражение в последнем интеграле есть полный дифференциал функции $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ по всем переменным, а произвольность функции t_μ позволяет сделать вывод, что эта функция равна постоянной и, следовательно, имеют место равенства

$$\dot{\mathbf{p}} + \nabla_{\mathbf{q}} H = 0, \quad \dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{p}} H = 0, \quad \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (6.10)$$

Соотношения (6.10) показывают, что рассматриваемый фазовый поток гамильтонов. ▼

§ 6.7. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ. УРАВНЕНИЯ УИТТЕКЕРА

Обобщенный интеграл энергии канонических уравнений Гамильтона существует, если функция Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ не зависит от времени. Допустим, что интеграл энергии $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$ может быть представлен в виде

$$p_1 = -K(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, h, q_1), \quad (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n). \quad (7.1)$$

Для этого достаточно, чтобы $\partial H / \partial p_1 \neq 0$ в некоторой области фазового пространства.

Рассмотрим в фазовом пространстве произвольный контур C , на котором $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h$. Контур C порождает трубку фазовых траекторий в расширенном фазовом пространстве R^{2n+1} , вдоль которой постоянен относительный интегральный инвариант Пуанкаре

$$I = \oint_C \mathbf{p} d\mathbf{q} = \oint_{C^*} (\mathbf{p}^* d\mathbf{q}^* - K dq_1), \quad (7.2)$$

где C^* — проекция контура C на пространство переменных $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, q_1)$. Контур C и фазовые траектории спроектируем на $2n-1$ -мерное пространство переменных $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, q_1$ (рис. 50).

В пространстве R^{2n-1} возникает фазовый поток с интегральным инвариантом Пуанкаре—Картана (7.2). Согласно второму крите-

рию гамильтоновости фазового потока полученный фазовый поток гамильтонов, а соответствующие ему дифференциальные уравнения

$$\frac{dp_k}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_k}, \quad k = 2, \dots, n, \quad (7.3)$$

называются уравнениями Уиттекера. Функция $K(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, q_1)$ и переменная q_1 играют соответственно роль новой функции Гамильтона и времени. Система (7.3) имеет порядок $2n-2$, а ее общее решение определяет фазовую траекторию, т.е. зависимости $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$ от q_1 . Переменная p_1 определяется из (7.1), а зависимость q_1 от t требует вычисления квадратуры

$$t = \int_{q_{10}}^{q_1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)^{-1} dq_1 + t_0.$$

II. Движение планеты в центральном поле консервативных сил описывается гамильтонианом

$$H(p_r, p_\varphi, r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r),$$

где r, φ — полярные координаты в плоскости орбиты, p_r, p_φ — обобщенные импульсы, $V(r)$ — потенциал консервативных сил. Гамильтониан $H(p_r, p_\varphi, r)$ сохраняет свое значение вдоль всякой

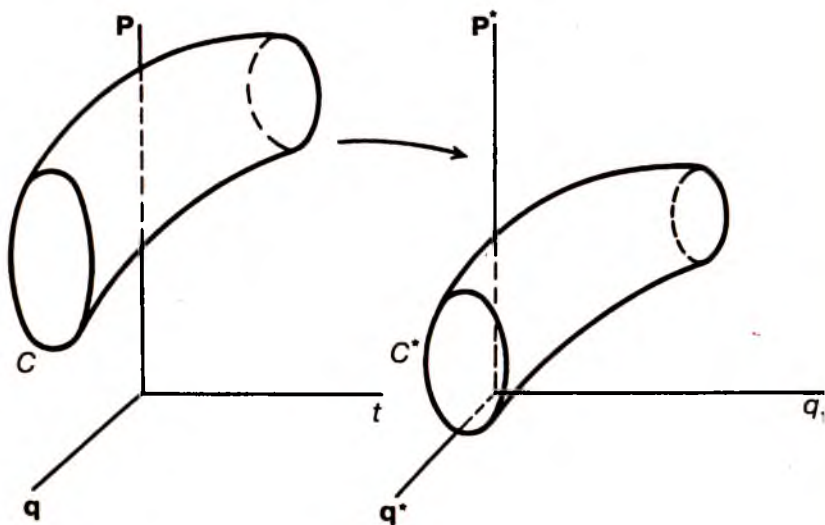


Рис. 50

фазовой траектории. Обозначим постоянную полной энергии через h и найдем

$$p_r = \pm \sqrt{2mh - r^{-2} p_\phi^2 - 2mV(r)}.$$

В области $p_r > 0$ выбирается знак «+», а в области $p_r < 0$ — знак «-». Рассмотрим в качестве новой независимой переменной координату r в области $p_r > 0$. Новый гамильтониан и уравнения Уиттекера представятся в виде

$$K(r, p_\phi, \phi, h) = -\sqrt{2mh - r^{-2} p_\phi^2 - 2mV(r)},$$

$$\frac{dp_\phi}{dr} = -\frac{\partial K}{\partial \phi} = 0,$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial K}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{r\sqrt{2mhr^2 - p_\phi^2 - 2mr^2V(r)}}.$$

Отсюда $p_\phi = p_\phi(0)$,

$$\phi = \phi_0 + \int_{r_0}^r \frac{p_\phi(0) dr}{r\sqrt{2mhr^2 - p_\phi^2(0) - 2mr^2V(r)}}.$$

$$t = t_0 + \int_{r_0}^r \frac{mr dr}{\sqrt{2mhr^2 - p_\phi^2(0) - 2mr^2V(r)}}.$$

Аналогично получаются уравнения в области $p_r < 0$.

§ 6.8. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ О СОХРАНЕНИИ ФАЗОВОГО ОБЪЕМА

Т. Однопараметрическая группа отображений

$$g^t : R^{2n} \rightarrow R^{2n}, \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), t \in R^1,$$

где $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ — начальные условия движения при $t=0$ (фазовый поток), сохраняет объем фазового пространства, если группа g^t порождается каноническими уравнениями Гамильтона.

▲ Рассмотрим произвольную область V_0 в фазовом пространстве R^{2n} в момент времени $t=0$ (рис. 51). Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{V_t} dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n = \\ &= \int_{V_0} \int \frac{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)} dp_{10} \dots dp_{n0} dq_{10} \dots dq_{n0}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

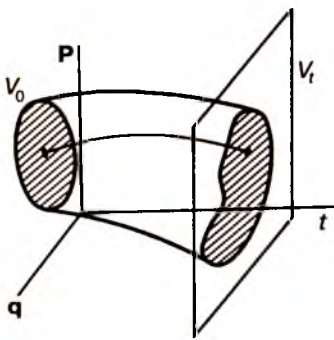


Рис. 51

Здесь $V_t = g^t V_0$ — образ области V_0 в момент времени t , $v(t)$ — объем области V_t . Если момент времени t достаточно мал, то справедливы разложения в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_0 - \nabla_q H \Big|_{t=0} t + \mathbf{O}(t^2), \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_0 + \nabla_p H \Big|_{t=0} t + \mathbf{O}(t^2). \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $\mathbf{O}(t^2)$ — члены порядка малости t^2 и выше. В разложениях (8.2) использованы канонические уравнения

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_q H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_p H, \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t),$$

описывающие фазовый поток механической системы. Якобиан отображения g^t , входящий под знак интеграла (8.1), равен

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)}{\partial(p_{10}, \dots, p_{n0}, q_{10}, \dots, q_{n0})} = \\ &= \det \begin{vmatrix} E - \nabla_{pq} H t + \mathbf{O}(t^2) & -\nabla_{qq} H t + \mathbf{O}(t^2) \\ \nabla_{pp} H t + \mathbf{O}(t^2) & E + \nabla_{qp} H t + \mathbf{O}(t^2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь E — единичная матрица $n \times n$,

$$\begin{aligned} \nabla_{pq} H &= \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right\|, & \nabla_{qq} H &= \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, \\ \nabla_{qp} H &= \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \right\|, & \nabla_{pp} H &= \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Все частные производные вычислены в момент времени $t = 0$. При раскрытии определителя $J(t)$ получим разложение вида

$$J(t) = 1 + t \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) \Big|_{t=0} + \mathbf{O}(t^2).$$

Коэффициент при t обращается в нуль и

$$\frac{dJ(0)}{dt} = \frac{d\mathbf{O}(t^2)}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, производная фазового объема

$$\frac{dv(0)}{dt} = \int_{V_0} \int \frac{dJ(0)}{dt} dp_{10} \dots dp_{n0} dq_{10} \dots dq_{n0} = 0.$$

Если момент времени $t = 0$ заменить на некоторый произвольный момент t_0 , то аналогичные рассуждения с заменой t на $t - t_0$ приведут к равенству $dv(t_0)/dt = 0$. Отсюда следует, что $J(t) = 1$ и $v(t) = v(0)$. ▼

§ 6.9. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ О ВОЗВРАЩЕНИИ

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема позволяет установить еще одно важное свойство фазового потока гамильтоновой системы — свойство почти повторяемости фазового состояния системы в случае ограниченности в фазовом пространстве областей, определяемых неравенством $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq h$.

Пусть область фазового пространства $D_h = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in R^{2n}, H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq h\}$ ограничена и $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon/2\}$ — окрестность произвольной точки, целиком лежащая в D_h . Обозначим через g^t однопараметрическую группу отображений — гамильтонов фазовый поток со свойствами:

- 1°. $g^t D_h = D_h$;
- 2°. $\text{vol } g^t D_h = \text{vol } D_h$;
- 3°. $g^t B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0) \subset D_h$;
- 4°. $\text{vol } g^t B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0) = \text{vol } B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)$.

Свойства 1°, 3° следуют из того, что вдоль фазовых траекторий сохраняется гамильтониан $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, поскольку он предполагается независимым от времени, а свойства 2°, 4° выражают теорему Лиувилля о сохранении фазового объема.

Т. В любой окрестности $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)$ для любого $T > 0$ найдется точка \mathbf{x}_* , такая, что $|g^{t_*} \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_*| < \varepsilon$, где $t_* > T$.

▲ Обозначим через $A_n = g^{nT} B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)$ и рассмотрим последовательность $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$. Если множества A_n попарно не пересекаются ($A_k \cap A_m = \emptyset \ \forall k, m$), то

$$\text{vol} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \text{vol} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \text{vol} B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0) = \infty,$$

НО

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset D_h \quad \text{и} \quad \text{vol} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n < \text{vol} D_h < \infty.$$

Противоречие позволяет сделать вывод о том, что при некоторых k и m ($m > k$) множества A_k и A_m пересекаются. Сделав k шагов «назад», найдем, что $A_0 \cap A_{m-k} \neq \emptyset$. Пусть $\bar{\mathbf{x}} \in A_0 \cap A_{m-k}$ и существует $\mathbf{x}_* = g^{-(m-k)T} \bar{\mathbf{x}} \in A_0$. Далее $|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_*| < \varepsilon$, так как оба эти элемента принадлежат $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)$. Таким образом, траектория движения, на-

чавшаяся в точке x_* из области $B_{\epsilon/2}(x_0)$, в момент времени $t_* = (m-k)T > T$ оказывается на расстоянии, меньшем ϵ от своей начальной точки. ▼

Теорема Пуанкаре утверждает, что существует «достаточно много» фазовых траекторий в ограниченной области D_h , которые «возвращаются» к своей начальной точке.

Множество $A_k \cap A_m$ имеет положительный объем и обязательно пересекается с некоторым множеством A_l . Обобщая доказательство теоремы, можно сделать вывод, что существует траектория, двукратно возвращающаяся в ϵ -окрестность начальной точки. Дальнейшее обобщение приводит к выводу о существовании траекторий, возвращающихся произвольное число раз в ϵ -окрестность своих начальных условий. Это свойство справедливо для достаточно малой окрестности любой точки области D_h . Другими словами, теорема Пуанкаре о возвращении утверждает, что в области D_h имеется всюду плотное множество траекторий, возвращающихся в любую сколь угодно малую окрестность своего начального состояния. Среди этих траекторий находится важный класс движений — периодические движения, когда начальное состояние повторяется в точности. Однако теорема Пуанкаре не исключает возможности существования асимптотических движений, когда траектория навечно покидает окрестность своего начального состояния.

II. Материальная точка массы m движется по плоскости Ox_1x_2 в консервативном поле с потенциалом $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 + x_2^3$. Функция Гамильтона $H = 1/2m^{-1}(p_1^2 + p_2^2) + V(x_1, x_2)$ представляет полную энергию системы, а постоянная энергии h изменяется в диапазоне от $-27/256$ до $+\infty$. Область $\{H(p, x) < h\}$ ограничена и почти все движения в ней обладают свойством возвращаемости. Однако при $h > 0$ существуют асимптотические движения с начальными условиями, когда $1/2p_2^2(0)m^{-1} + x_2^4(0) + x_2^3(0) = 0$, $x_2(0) \neq 0$. Фазовый поток, спроектированный на плоскости (p_1, x_1) , (p_2, x_2) , соответственно имеет вид, представленный на рис. 52.

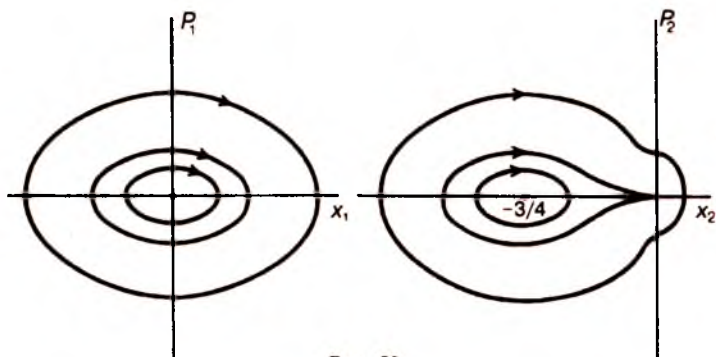


Рис. 52

§ 6.10. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in R^{2n} \quad (10.1)$$

и замену переменных

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (10.2)$$

О.10.1. Замена переменных (10.2) называется канонической, если в области ее определения в фазовом пространстве (\mathbf{p}, \mathbf{q}) имеет место тождество

$$\mathbf{p}\delta\mathbf{q} - \mathbf{P}\delta\mathbf{Q} = \delta S^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \delta\mathbf{Q} = \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{p}} \delta\mathbf{p}. \quad (10.3)$$

Функция S^* может быть выражена через переменные (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) , и тогда тождество (10.3) следует рассматривать в пространстве переменных (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) . Время t при этом является параметром.

Допустим, что каноническая замена переменных (10.2) такова, что в некоторой области фазового пространства существует зависимость $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$. Это возможно, если $\det \|\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{p}\| \neq 0$ и имеет место теорема о неявной функции. Тогда функция

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = S^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)} \quad (10.4)$$

называется производящей функцией канонического преобразования. Тождество (10.3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \delta Q_i \right),$$

из которого в силу независимости величин $\delta q_i, \delta Q_i$ следуют равенства

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.5)$$

Соотношения (10.5) определяют свободное каноническое преобразование по его производящей функции при условии, что

$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial q_j} \right\| \neq 0$. В этом случае последняя группа уравнений (10.5)

может быть использована для отыскания $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ на основе теоремы о неявной функции.

Может оказаться, что в соотношениях (10.2) в некоторой области фазового пространства $\det \|\partial P/\partial p\| \neq 0$. В этом случае $p = p(q, P, t)$, в качестве независимых переменных в тождестве (10.3) можно выбрать переменные (P, q) и представить его в виде

$$Q\delta P + p\delta q = \delta S_1, \quad S_1(P, q, t) = S^* + PQ \Big|_{\substack{p=p(P, q, t) \\ Q=Q(P, q, t)}}. \quad (10.6)$$

Из тождества (10.6) следуют формулы, определяющие каноническое преобразование

$$Q_k = \frac{\partial S_1}{\partial P_k}, \quad p_k = \frac{\partial S_1}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.7)$$

при условии $\det \left\| \frac{\partial^2 S_1}{\partial P_i \partial q_j} \right\| \neq 0$.

Возможны и другие способы определения канонических преобразований, когда в качестве независимых переменных принимаются переменные

$$(q, P_1, \dots, P_m, Q_{m+1}, \dots, Q_n).$$

П.1. Пусть $n = 1$, а $S(Q, q) = Qq$. Тогда $p = \partial S/\partial q = Q$, $P = -\partial S/\partial Q = -q$. Импульсы и координаты меняются ролями.

Если $S_1(Pq) = Pq$, то $p = \partial S_1/\partial q = P$, $Q = \partial S_1/\partial P = q$ и преобразование тождественное.

П.2. Найдем условие, при котором линейная замена переменных на плоскости

$$P = a_{11}(t)p + a_{12}(t)q, \quad Q = a_{21}(t)p + a_{22}(t)q$$

является канонической. Условия (10.3) в этом случае примут вид

$$p\delta q - P\delta Q = p\delta q - (a_{11}p + a_{12}q)(a_{21}\delta p + a_{22}\delta q) = \delta S^*(p, q, t).$$

Функция S^* будет существовать при выполнении условий Коши

$$-\frac{\partial}{\partial q} [a_{21}(a_{11}p + a_{12}q)] = \frac{\partial}{\partial p} [p - (a_{11}p + a_{12}q)a_{22}].$$

Отсюда следует, что определитель преобразования $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, а само преобразование сохраняет площадь. Функция S^* равна

$$S^*(p, q, t) = -1/2 a_{11} a_{21} p^2 - 1/2 a_{12} a_{22} q^2 - a_{12} a_{21} p q.$$

Если $a_{21} \neq 0$, то $p = a_{21}^{-1}(Q - a_{22}q)$ и производящая функция канонического преобразования равна

$$S(Q, q, t) = -\frac{a_{11}}{2a_{21}}(Q - a_{22}q)^2 - \frac{a_{12}a_{22}q^2}{2} - a_{12}q(Q - a_{22}q).$$

Покажем, что канонические преобразования сохраняют форму канонических уравнений движения Гамильтона (10.1). Перепишем тождество (10.3) в виде

$$pdq - PdQ \equiv dS(Q, q, t) - \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

принимая q, Q за независимые координаты. Отсюда следует тождество

$$pdq - Hdt \equiv PdQ - \left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right) dt + dS. \quad (10.8)$$

Выберем в пространстве (p, q, t) произвольный замкнутый контур c . Ему соответствует контур C в пространстве переменных (P, Q, t) и контур c^* в пространстве переменных (q, Q, t) . Вычисляя криволинейный интеграл вдоль этого замкнутого контура от правой и левой частей тождества (10.8), получим

$$\oint_c (pdq - Hdt) \equiv \oint_c (PdQ - Kdt) + \oint_{c^*} dS, \quad (10.9)$$

$$K(P, Q, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{(p, q) \rightarrow (P, Q)}$$

Интеграл от полного дифференциала функции dS по замкнутому контуру c^* равен нулю. Левая часть тождества (10.9) представ-

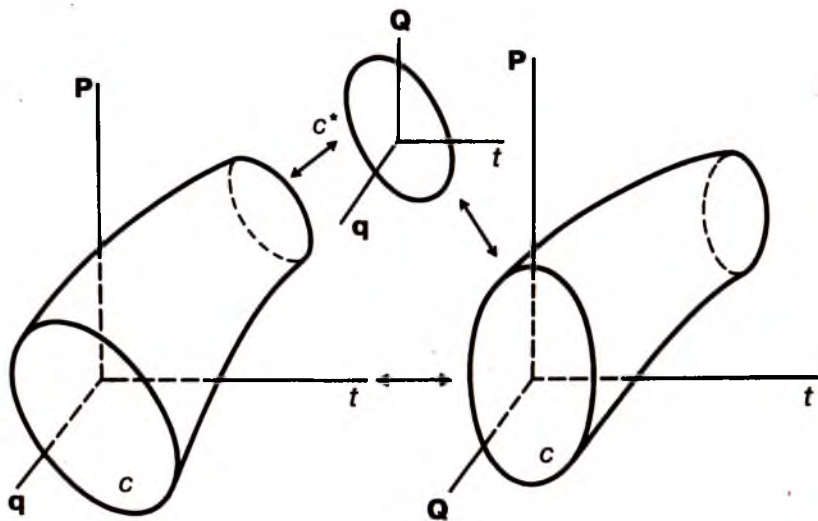


Рис. 53

ляет собой интегральный инвариант Пуанкаре—Картана и не меняется при замене контура c на контур, охватывающий ту же трубку траекторий в расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ (рис. 53). При этом контур C в пространстве переменных $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ также охватывает трубку траекторий, являющуюся образом трубки траекторий в переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Следовательно, выражение

$$\oint_C (\mathbf{P}d\mathbf{Q} - Kdt)$$

есть интегральный инвариант Пуанкаре—Картана фазового потока в переменных $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$, и согласно второму критерию гамильтоновости фазового потока дифференциальные уравнения этого потока представляются каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{Q}} K, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \nabla_{\mathbf{P}} K. \quad (10.10)$$

В дальнейшем будет показано, что среди канонических преобразований существует преобразование, при котором новая функция Гамильтона $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ тождественно равна нулю, а канонические переменные (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) постоянны в силу уравнений Гамильтона (10.10).

§ 6.11. КРИТЕРИЙ КАНОНИЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введем переменную $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in R^{2n}$ и представим левую часть тождества (10.3) в виде

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(p_k - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \delta p_k \right] = \sum_{s=1}^{2n} X_s \delta x_s. \quad (11.1)$$

Если преобразование $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ — каноническое, то дифференциальная форма (11.1) должна быть полным дифференциалом по переменным (x_1, \dots, x_{2n}) , что будет справедливо при выполнении условий Коши

$$\frac{\partial X_m(\mathbf{x}, t)}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s(\mathbf{x}, t)}{\partial x_m}, \quad s, m = 1, \dots, 2n. \quad (11.2)$$

О.11.1. Скобкой Лагранжа системы функций $\{P_i, Q_i\}_{i=1}^n$ называется выражение

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} \frac{\partial P_i}{\partial x_m} - \frac{\partial Q_i}{\partial x_m} \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \right) = [x_k, x_m],$$

где x_k, x_m обозначают одну из переменных $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, от которых зависят функции $P_i(\mathbf{x}, t), Q_i(\mathbf{x}, t)$.

Условия Коши (11.2) напишем в явном виде для различных групп переменных, используя соотношения (11.1) и определение скобки Лагранжа. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_m} &= \frac{\partial}{\partial p_m} \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \Rightarrow [p_k, p_m] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_m} - p_m \right) &= \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - p_k \right) \Rightarrow [q_k, q_m] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_m} - p_m \right) &= \frac{\partial}{\partial q_m} \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \Rightarrow [q_m, p_k] = \delta_{km}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

$k, m = 1, \dots, n.$

Таким образом, каноничность замены переменных может быть установлена путем вычисления скобок Лагранжа в условиях (11.3).

Рассмотрим каноническую замену переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}(\varepsilon))$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, зависящую от параметра ε и определяемую производящей функцией

$$S_1(\mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}, \varepsilon) = \mathbf{p}(\varepsilon)\mathbf{q} + \varepsilon H(\mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}, \varepsilon).$$

где $H(\mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}, \varepsilon)$ — некоторая дифференцируемая функция своих аргументов. Согласно формулам (10.7) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}(\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{q}(\varepsilon) &= \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}(\varepsilon)} = \mathbf{q} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Соотношения (11.4) при $\varepsilon = 0$ определяют тождественное преобразование.

О.11.2. Бесконечно малым каноническим преобразованием $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ называется преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p} + d\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} - \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0) d\varepsilon, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{q} + d\mathbf{q}(0) = \mathbf{q} + \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $d\mathbf{p}(0)$, $d\mathbf{q}(0)$ — первые дифференциалы отображения (11.4) по параметру ε при $\varepsilon = 0$.

Преобразование (11.5) линейно зависит от приращения параметра $d\varepsilon$. Из формул (11.5) следует, что производные по параметру ε отображения $(\mathbf{p}(\varepsilon), \mathbf{q}(\varepsilon))$ совпадают по форме с каноническими уравнениями Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{p}(0)}{d\varepsilon} = -\nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0), \quad \frac{d\mathbf{q}(0)}{d\varepsilon} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0). \quad (11.6)$$

Если параметр ϵ отождествить со временем, то соотношения (11.6) суть канонические уравнения Гамильтона, записанные при $t=0$. Разложим в ряд Тейлора общее решение канонических уравнений Гамильтона и получим

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \dot{\mathbf{p}}(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)t + \mathbf{O}(t^2) = \mathbf{p}_0 - \nabla_q H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, 0)t + \mathbf{O}(t^2),$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}}(0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)t + \mathbf{O}(t^2) = \mathbf{q}_0 + \nabla_p H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, 0)t + \mathbf{O}(t^2).$$

Здесь $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ — начальные условия движения при $t=0$, $\mathbf{O}(t^2)$ — малые порядка t^2 и выше. Отсюда следует, что первый дифференциал фазового потока при $t=0$

$$d\mathbf{p}(0) = -\nabla_q H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, 0)dt, \quad d\mathbf{q}(0) = \nabla_p H(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, 0)dt$$

определяет бесконечно малое каноническое преобразование.

В дальнейшем будет показано, что фазовый поток, порождаемый гамильтоновой системой, можно рассматривать как однопараметрическую группу канонических преобразований фазового пространства.

§ 6.12. ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим действительную фазовую траекторию $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$, $t \in R^1$, где $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ — значения обобщенных импульсов и координат в момент времени $t=0$. Функцией действия назовем интеграл

$$S = \int_0^t (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H)dt = \int_0^t Ldt, \quad (12.1)$$

вычисленный вдоль действительной фазовой траектории. Аргументы функции S можно выбирать различным образом, например $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t)$. Однако в дальнейшем предположим, что, используя общее решение уравнений движения, можно представить $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ при выполнении условия $\det \|\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{p}_0\| \neq 0$, и будем рассматривать в качестве аргументов функции действия переменные $(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$.

Вариация функции действия представляется в виде

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0} \delta \mathbf{q}_0,$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^t (\dot{\mathbf{q}}\delta \mathbf{p} + \mathbf{p}\delta \dot{\mathbf{q}} - \nabla_q H \delta \mathbf{q} - \nabla_p H \delta \mathbf{p})dt = \\ &= \mathbf{p}\delta \mathbf{q} - \mathbf{p}_0\delta \mathbf{q}_0 + \int_0^t [(\dot{\mathbf{q}} - \nabla_p H)\delta \mathbf{p} - (\dot{\mathbf{p}} + \nabla_q H)\delta \mathbf{q}]dt. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Интеграл во втором выражении вариации в (12.2) равен нулю, так как вдоль действительной фазовой траектории справедливы уравнения Гамильтона. Тогда $\delta S = \mathbf{p}\delta\mathbf{q} - \mathbf{p}_0\delta\mathbf{q}_0$ и сравнение с первым выражением вариации функции действия дает

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad (12.3)$$

$$\mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q}_0}.$$

Из ранее сделанного предположения $\det \|\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{p}_0\| \neq 0$ вытекает условие

$$0 \neq \det \left\| \frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial \mathbf{q}} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}_0} \right\|.$$

Таким образом, функция действия $S(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0, t)$ является производящей функцией свободного канонического преобразования переменных $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ в переменные (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , зависящие от параметра t . Это означает, что фазовый поток есть однопараметрическая группа свободных канонических преобразований с производящей функцией действия.

Вычислим производную функции действия по времени вдоль действительной траектории

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}.$$

С другой стороны, согласно (12.1)

$$\frac{dS}{dt} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H.$$

Сравнивая эти два выражения и учитывая соотношения (12.3), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0. \quad (12.4)$$

Функция действия удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка (12.4), которое называется уравнением Гамильтона—Якоби. В функции Гамильтона H аргументы p_i заменены в уравнении (12.4) на частные производные $\partial S/\partial q_i$.

§ 6.13. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ. ТЕОРЕМА ЯКОБИ

Уравнение Гамильтона—Якоби (12.4) позволяет по-новому подойти к проблеме интегрирования канонических уравнений Гамильтона.

О.13.1. Полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби называется функция $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, такая, что:

1) $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби для любого набора $\boldsymbol{\alpha}$ из некоторой области R^n ;

2) $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}} \right\| \neq 0$ в некоторой области изменения аргументов \mathbf{q} и $\boldsymbol{\alpha}$.

Следует подчеркнуть, что задача отыскания полного интеграла не совпадает с задачей отыскания общего решения нелинейного уравнения первого порядка в частных производных (12.4) и значительно проще последней. Решение первой задачи неоднозначно: если найден какой-то полный интеграл $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$, то произвольная замена переменных $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}_*$ позволяет записать, вообще говоря, другое решение $S_*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}_*, t) = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_*), t)$.

Т (Якоби). Если $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, то выражения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad (13.1)$$

где $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in R^n$ — постоянные, суть $2n$ первых интегралов канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H.$$

▲ Заменяем $\boldsymbol{\alpha}$ на \mathbf{Q} в функции $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ и возьмем функций $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ в качестве производящей функции свободного, канонического преобразования

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}},$$

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \Big|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{P}, \mathbf{Q})} \quad (13.2)$$

Заметим, что $K \equiv 0$, так как $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0.$$

Канонические уравнения Гамильтона в переменных (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) примут вид

$$\dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{Q}} K = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \nabla_{\mathbf{P}} K = 0.$$

Отсюда следует, что новые переменные (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) постоянны. Обозначим $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{P} = -\boldsymbol{\beta}$ и убедимся, что выражения (13.2), определяющие связь между новыми и старыми переменными, переходят в выражения (13.1), из которых легко получить общее решение канонических уравнений Гамильтона. Для этого достаточно воспользоваться теоремой о неявной функции, разрешить вторую серию уравнений (13.1) относительно \mathbf{q} (это возможно, так как де-

терминант $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}} \right\| \neq 0$) и найти $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Первая серия равенств (13.1) тогда определяет $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Постоянные $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ задают траекторию движения и могут быть выражены через начальные условия движения $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$. Если полный интеграл совпадает с функцией действия, то постоянные $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ суть начальные условия движения $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. ▼

Не следует думать, что задача отыскания полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби может быть решена для любой гамильтоновой системы. Однако на этом пути открываются новые возможности, связанные с конкретным видом функции Гамильтона (от нее зависит структура уравнения Гамильтона—Якоби). При этом существенную роль играет удачный выбор обобщенных координат (q_1, \dots, q_n) .

§ 6.14. ОТЫСКИВАНИЕ ПОЛНОГО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Остановимся на ряде структурных особенностей функции Гамильтона, позволяющих находить полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби.

1°. Если гамильтониан не зависит явно от времени ($\partial H / \partial t = 0$), то полный интеграл можно искать в виде

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = -ht + W_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где $\alpha_n = -h$, а функция W_0 зависит от меньшего числа переменных и удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = h.$$

2°. Если к тому же координата q_1 циклическая ($\partial H/\partial q_1 = 0$), то ее можно выделить из функции W_0 и искать полный интеграл в вид

$$S = -ht + \alpha_1 q_1 + W_1(q_2, \dots, q_n, \alpha),$$

где функция W_1 удовлетворяет уравнению

$$H\left(\alpha_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W_1}{\partial q_n}, q_2, \dots, q_n\right) = h.$$

Следует помнить, что соответствующие детерминанты должны быть отличны от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha \partial \mathbf{q}} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial^2 (\alpha_1 q_1 + W_1)}{\partial \alpha \partial \mathbf{q}} \right\| \neq 0.$$

3°. Допустим, что гамильтониан имеет следующую структуру:

$$H = F(f_1(p_1, q_1), \dots, f_n(p_n, q_n)).$$

Тогда возможно полное разделение переменных при отыскании полного интеграла, а именно

$$S = -ht + \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha_k), \quad h = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Рассмотрим систему обыкновенных независимых друг от друга дифференциальных уравнений первого порядка

$$f_k\left(\frac{\partial W_k}{\partial q_k}, q_k\right) = \alpha_k; \quad k = 1, \dots, n,$$

из которых, используя теорему о неявной функции, получим

$$\frac{\partial W_k}{\partial q_k} = F_k(q_k, \alpha_k) \Rightarrow W_k(q_k, \alpha_k) = \int_{q_{k0}}^{q_k} F_k(q_k, \alpha_k) dq_k.$$

Поскольку гамильтониан H должен зависеть от обобщенных импульсов (p_1, \dots, p_n) , то естественно предполагается, что

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k(p_k, q_k)}{\partial p_k} \neq 0,$$

и условия теоремы о неявной функции выполнены. Легко проверить, что полный интеграл

$$S = -F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t + \sum_{k=1}^n \int_{q_{k0}}^{q_k} F_k(q_k, \alpha_k) dq_k$$

удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = 0,$$

если учесть тождества

$$f_k(F_k(q_k, \alpha_k), q_k) \equiv \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Далее

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right\| = \prod_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_k} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial p_k} \right)^{-1} \neq 0,$$

так как

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_k} = 1.$$

Таким образом, найденное решение уравнения Гамильтона—Якоби является полным интегралом, и задача интегрирования канонических уравнений Гамильтона решается на основе теоремы Якоби.

4°. Гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = G_1(p_1, q_1, G_2(p_2, q_2, G_3(\dots, G_n(p_n, q_n) \dots))$$

можно проинтегрировать методом Гамильтона—Якоби путем полного разделения переменных. Будем искать полный интеграл в виде

$$S = -ht + \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1}), \quad \alpha_1 = h, \quad \alpha_{n+1} = 0.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$G_k\left(\frac{\partial W_k}{\partial q_k}, q_k, \alpha_{k+1}\right) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поскольку $\partial G_k / \partial p_k \neq 0$, то, разрешая эти уравнения относительно $\partial W_k / \partial q_k$, найдем

$$\frac{\partial W_k}{\partial q_k} = g_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1}).$$

Тогда

$$S = -\alpha_1 t + \sum_{k=1}^n \int_{q_{k0}}^{q_k} g_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1}) dq_k.$$

Определенная таким образом функция $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби и верно второе

условие в **О.13.1.** (см. стр. 170). Для проверки этих условий достаточно заметить, что

$$G_k(g_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1}), q_k, \alpha_{k+1}) \equiv \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} = \frac{\partial g_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1})}{\partial \alpha_j} = \begin{cases} \left(\frac{\partial G_k}{\partial p_k} \right)^{-1}, & j = k; \\ 0, & j < k, \end{cases}$$

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_k} \right\| = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial G_k}{\partial p_k} \right)^{-1} \Big|_{p_k = g_k(q_k, \alpha_k, \alpha_{k+1})} \neq 0.$$

II. Свободная материальная точка массы m движется в поле с потенциалом $V(\mathbf{r}) = kz - m\mu/r$, где μ, k — постоянные, $r = |\mathbf{r}|$. Движение будем описывать с помощью параболических координат (ξ, η, φ) . Имеем

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi, \quad 0 < \xi < +\infty,$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi, \quad 0 < \eta < +\infty,$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi \bmod 2\pi.$$

Кинетическая энергия и обобщенные импульсы представляются в форме

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = m \left[\frac{\xi + \eta}{4} \left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{\xi\eta}{2} \dot{\varphi}^2 \right],$$

$$p_\xi = \frac{m\dot{\xi}(\xi + \eta)}{2\xi}, \quad p_\eta = \frac{m\dot{\eta}(\xi + \eta)}{2\eta}, \quad p_\varphi = m\xi\eta\dot{\varphi}.$$

Функция Гамильтона и уравнение Гамильтона—Якоби принимают вид

$$H = \frac{2\xi p_\xi^2 + 2\eta p_\eta^2}{m(\xi + \eta)} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} - \frac{2m\mu}{\xi + \eta} + \frac{k}{2}(\xi - \eta),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[\xi \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \eta \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2m\mu}{\xi + \eta} + \frac{k}{2}(\xi - \eta) = 0$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, учитывая цикличность координаты φ и независимость гамильтониана от времени, найдем в виде

$$S = -ht + \alpha_1\varphi + W_1(\xi) + W_2(\eta).$$

Имеем

$$\frac{2\xi}{m(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2\eta}{m(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\xi\eta} - \frac{2m\mu}{\xi + \eta} + \frac{k}{2}(\xi - \eta) = h.$$

Последнее уравнение после умножения на $(\xi + \eta)$ принимает вид

$$\Phi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}, \xi \right) + \Phi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}, \eta \right) = 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{2\xi}{m} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\xi} - 2m\mu + \frac{k}{2}\xi^2 - h\xi,$$

$$\Phi_2 = \frac{2\eta}{m} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\eta} - \frac{k}{2}\eta^2 - h\eta.$$

Переменные ξ и η независимы, и, значит, функции Φ_1 и Φ_2 должны быть постоянными, т.е. $\Phi_1 = \alpha_2$, $\Phi_2 = -\alpha_2$. Отсюда находим

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi} = \Psi_1(\xi, \alpha_1, h, \alpha_2),$$

$$\Psi_1 = \pm \sqrt{\frac{m}{2\xi} \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2m\xi} + 2m\mu - \frac{k}{2}\xi^2 + h\xi \right)};$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \eta} = \Psi_2(\eta, \alpha_1, h, \alpha_2),$$

$$\Psi_2 = \pm \sqrt{\frac{m}{2\eta} \left(h\eta - \frac{k}{2}\eta^2 - \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2m\eta} \right)};$$

$$W_1 = \int \Psi_1(\xi, \alpha_1, h, \alpha_2) d\xi, \quad W_2 = \int \Psi_2(\eta, \alpha_1, h, \alpha_2) d\eta.$$

Система первых интегралов вытекает из теоремы Якоби

$$p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \Psi_1, \quad p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = \Psi_2, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_1,$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \varphi + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2},$$

$$\beta_3 = \frac{\partial W_1}{\partial h} + \frac{\partial W_2}{\partial h} - t.$$

Соотношения, содержащие β_1 и β_2 , определяют траекторию материальной точки в параболических координатах, а последнее равенство позволяет найти закон движения.

§ 6.15. СКОБКИ ПУАССОНА И ИХ СВОЙСТВА. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

При вычислении производной функции в силу канонических уравнений Гамильтона полезным является понятие скобки Пуассона.

О.15.1. Скобкой Пуассона двух функций $f(p, q, t)$, $g(p, q, t)$ называется выражение

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (15.1)$$

Отметим ряд свойств скобок Пуассона:

а) $(f, g) = -(g, f)$ — кососимметричность;

б) $(\lambda f, g) = (f, \lambda g) = \lambda (f, g)$ — билинейность;

в) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$;

г) $\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right)$;

д) $(f_1, (f_2, f_3)) + (f_2, (f_3, f_1)) + (f_3, (f_1, f_2)) = 0$ для любых дважды дифференцируемых функций f_1, f_2, f_3 — тождество Якоби.

Доказательства свойств а) — г) очевидны. Покажем справедливость свойства д).

Пусть

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_{km} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(f_k, f_m)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial(f_k, f_m)}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right), \quad k, m = 1, 2, 3,$$

— линейные дифференциальные операторы первого порядка, используя которые представим левую часть тождества Якоби одним из выражений

$$(\Phi_2 \Phi_3 - \Phi_3 \Phi_2 - \Phi_{23}) f_1,$$

$$(\Phi_3 \Phi_1 - \Phi_1 \Phi_3 - \Phi_{31}) f_2,$$

$$(\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_2 \Phi_1 - \Phi_{12}) f_3.$$

О.15.2. Дифференциальный оператор $C = \Phi_2 \Phi_3 - \Phi_3 \Phi_2$ называется коммутатором двух линейных дифференциальных операторов.

Л. Коммутатор C есть линейный дифференциальный оператор первого порядка.

▲ Общий вид линейного дифференциального оператора в $2n$ -мерном фазовом пространстве таков:

$$X = \sum_{i=1}^{2n} X_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{x} = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n).$$

Коммутатор двух линейных дифференциальных операторов X и Y равен

$$C = XY - YX = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{2n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^{2n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^{2n} \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

и является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Каждое из выражений (15.2) представляет собой, таким образом, линейный дифференциальный оператор первого порядка, примененный к одной из функций f_1 , f_2 или f_3 . Следовательно, каждое слагаемое в левой части тождества Якоби не содержит вторых частных производных от функций f_1 , f_2 , f_3 . С другой стороны, по определению скобки Пуассона 15.1 в каждом слагаемом тождества Якоби обязательно должна присутствовать вторая частная производная от одной из функций f_1 , f_2 или f_3 . Отсюда следует, что все слагаемые в левой части тождества Якоби взаимно сокращаются и их сумма равна нулю. ▼

Т (Якоби). Если $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ и $f_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ — два первых интеграла канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \quad (15.3)$$

то их скобка Пуассона (f_1, f_2) также является первым интегралом уравнений (15.3).

▲ Первые интегралы сохраняют свои значения вдоль фазовых траекторий уравнений (15.3), т.е.

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = (f_k, H) + \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad k = 1, 2. \quad (15.4)$$

Вычислим производную скобки Пуассона (f_1, f_2) вдоль траектории гамильтоновой системы, используя ранее отмеченные свойства. Имеем

$$d(f_1, f_2)/dt = ((f_1, f_2), H) + (\partial f_1/\partial t, f_2) + (f_1, \partial f_2/\partial t).$$

Согласно (15.4) частные производные $\partial f_k/\partial t = -(f_k, H)$. Таким образом, согласно тождеству Якоби получим

$$d(f_1, f_2)/dt = (H, (f_2, f_1)) + (f_2, (f_1, H)) + (f_1, (H, f_2)) = 0.$$

Следовательно, скобка Пуассона двух первых интегралов (f_1 , постоянна вдоль фазовой траектории и есть первый интеграл уравнений (15.3). ▼

II. Рассмотрим систему N свободных материальных точек. качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты точек $(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N)$ и представим уравнения движения в форме канонических уравнений Гамильтона (15.3). Обобщенные импульсы равны $p_{x_k} = m_k \dot{x}_k$, $p_{y_k} = m_k \dot{y}_k$, $p_{z_k} = m_k \dot{z}_k$ где m_k — масса материальной точки. Допустим, что величины

$$Q_x = \sum_{k=1}^N p_{x_k}, \quad G_x = \sum_{k=1}^N (y_k p_{z_k} - z_k p_{y_k}) \quad \text{и} \quad G_y = \sum_{k=1}^N (z_k p_{x_k} - x_k p_{z_k})$$

суть первые интегралы. Величина Q_x есть проекция количества движения на ось Ox , а величины G_x и G_y — проекции вектора момента количества движения на оси Ox и Oy соответственно. Вычислим скобки Пуассона (G_x, G_y) и (Q_x, G_y) . Имеем

$$(G_x, G_y) = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial G_x}{\partial q_k} \frac{\partial G_y}{\partial p_k} - \frac{\partial G_x}{\partial p_k} \frac{\partial G_y}{\partial q_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial G_x}{\partial z_k} \frac{\partial G_y}{\partial p_{z_k}} - \frac{\partial G_x}{\partial p_{z_k}} \frac{\partial G_y}{\partial z_k} \right) = \sum_{k=1}^N (p_{y_k} x_k - y_k p_{x_k}) = G_z,$$

$$(Q_x, G_y) = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial q_k} \frac{\partial G_y}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_x}{\partial p_k} \frac{\partial G_y}{\partial q_k} \right) =$$

$$= - \sum_{k=1}^N \frac{\partial Q_x}{\partial p_{x_k}} \frac{\partial G_y}{\partial x_k} = - \sum_{k=1}^N (-p_{z_k}) = Q_z.$$

Следовательно, первыми интегралами являются также проекция момента количества движения на ось Oz и проекция количества движения на ось Oz .

§ 6.16. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ О ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ в случае общего положения эквивалентна задаче об отыскании $2n$ независимых первых интегралов. Если уравнения являются системой канонических уравнений Гамильтона, то достаточно знать n первых независимых интегралов в инволюции, чтобы найти ее общее решение.

О.16.1. Говорят, что два первых интеграла $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$, $x = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ находятся в инволюции, если их скобка Пуассона $(F_1, F_2) = 0$.

В дальнейшем будем использовать оператор

$$I = \begin{vmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{vmatrix}, \quad E_n = \text{diag}\{1, \dots, 1\} \quad (n \times n)$$

для вычисления скобки Пуассона и краткой записи уравнений Гамильтона, а именно

$$(F_1, F_2) = \nabla_x F_1 \cdot I \nabla_x F_2, \quad (16.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = I \nabla_x H(\mathbf{x}, t). \quad (16.2)$$

Оператор I невырожден, так как $I^2 = -E_{2n}$.

Т (Лиувилль). Если $F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t)$ — система независимых первых интегралов в инволюции, то канонические уравнения (16.2) интегрируются в квадратурах. Это означает, что для отыскания общего решения необходимо вычислить ряд первообразных.

▲ Поскольку функции $F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t)$ независимы, то ранг матрицы $\|\partial F_k / \partial x_j\|$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, 2n$, равен n . Не нарушая общности, будем считать, что $\det \|\partial F_k / \partial p_i\| \neq 0$. Если это не так и $\det \|\partial F_k / \partial x_j\| \neq 0$, где x_j принимает значения $p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, q_{i_{n+1}}, \dots, q_{i_n}$, то всегда можно сделать каноническую замену переменных, при которой обобщенные координаты q_{i_m} перейдут в обобщенные импульсы P_{i_m} и в новых переменных $\det \|\partial F_k / \partial P_i\| \neq 0$.

Таким образом, система уравнений $F_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = a_k$, $k = 1, \dots, n$, разрешима относительно \mathbf{p} и эквивалентна равенствам

$$\varphi_k(\mathbf{x}, t) = p_k - f_k(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n). \quad (16.3)$$

Л. Функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ образуют систему первых интегралов в инволюции на многообразии $M = \{\mathbf{x} : F_k(\mathbf{x}, t) = a_k, k = 1, \dots, n\} \subset R^{2n}$.

▲ Если зафиксировать набор (a_1, \dots, a_n) , то для всякой фазовой траектории, лежащей на M , функции $\varphi_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, т.е. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — совокупность первых интегралов. Так как $\varphi_k = 0$ на M , то $\nabla_x \varphi_k \cdot \xi = 0$ для любого вектора ξ из касательного пространства $T_x M = \{\xi : \xi \in R^{2n}, \xi \nabla_x F_k = 0, k = 1, \dots, n\}$ и, следовательно, $\nabla_x \varphi_k$ принадлежит ортогональному дополнению $N_x M = \{\eta : \eta = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla_x F_k, \lambda_k \in R^1\}$ к касательному пространству $T_x M$, т.е.

$$x \varphi_k = \sum_{m=1}^n \lambda_{km} \nabla_x F_m. \quad \text{Вычислим скобку Пуассона}$$

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \nabla_x \varphi_k \cdot I \nabla_x \varphi_i = \sum_{m=1}^n \lambda_{km} \nabla_x F_m \cdot I \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \nabla_x F_j = \quad (16.4)$$

$$= \sum_{m, j=1}^n \lambda_{km} \lambda_{ij} (\nabla_x F_m \cdot I \nabla_x F_j) = 0,$$

так как функции F_m и F_j находятся в инволюции. ▼

Поскольку

$$(\varphi_k, \varphi_i) = (p_k - f_k(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t), p_i - f_i(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t)) = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0,$$

то имеем равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_k} = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (16.5)$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\sum p_k dq_k - H dt$ на многообразии M и покажем, что она есть полный дифференциал функции $W(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t)$, где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ рассматривается как параметр. Имеем

$$\sum_{k=1}^n p_k dq_k - H dt = \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) dq_k - H(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t), \mathbf{q}, t) dt, \quad (16.6)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Условия Коши полного дифференциала выражения (16.6) представляются равенствами (16.5) и условиями

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = - \frac{\partial H(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t), \mathbf{q}, t)}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad (16.7)$$

где $H = H(\mathbf{f}, \mathbf{q}, t)$. Поскольку $f_k(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = p_k$, то с учетом равенств (16.5) получим

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial f_i}.$$

С другой стороны, в силу канонических уравнений Гамильтона $dp_k/dt = -\partial H/\partial q_k$, что и доказывает справедливость равенств (16.7)

При изменении параметров a_1, \dots, a_n справедливо равенство

$$dW(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) = \sum_{k=1}^n \left(p_k dq_k + \frac{\partial W}{\partial a_k} da_k \right) - H dt.$$

Заменим \mathbf{a} на $-\mathbf{Q}$ и примем функцию $W(\mathbf{q}, -\mathbf{Q}, t)$ за производящую функцию канонического преобразования от переменных (\mathbf{p}, \mathbf{q}) к переменным (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) . Имеем

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k dq_k - H dt \right) - \sum_{k=1}^n P_k dQ_k \equiv dW(\mathbf{q}, -\mathbf{Q}, t),$$

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = \frac{\partial W}{\partial Q_k}.$$

Новый гамильтониан $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$ согласно предыдущему тождеству равен нулю, и следовательно, новые канонические переменные постоянны. Другими словами, выражения

$$\frac{\partial W(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t)}{\partial a_k} = b_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

суть первые интегралы исходных канонических уравнений движения, отличные от заданных.

Для вычисления функции $W(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t)$ необходимо вычислить криволинейный интеграл в расширенном конфигурационном пространстве (\mathbf{q}, t)

$$W = \int_{A_0}^A \left(\sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t) dq_k - H(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t), \mathbf{q}, t) dt \right),$$

где A_0 — начальная точка, а A — произвольная точка пространства (\mathbf{q}, t) . Указанный интеграл не зависит от пути, соединяющего точки A_0 и A .

Покажем в заключение, что $\det \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial a_m} \right\| \neq 0$. Имеем $\frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial a_m} = \frac{\partial f_k}{\partial a_m}$.

Далее

$$F_i(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{a}, t), \mathbf{q}, t) \equiv a_i \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial a_m} = \delta_{im}.$$

Отсюда

$$\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial f_k} \right\| \cdot \det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial a_m} \right\| = 1$$

и поскольку $f_k = p_k$, то

$$\det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial a_m} \right\| = \left(\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right\| \right)^{-1} \neq 0. \quad \blacktriangledown$$

§ 6.17. ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ—УГОЛ

Канонические переменные действие—угол удобны для описания движения вполне интегрируемых гамильтоновых систем и, что особенно важно, позволяют исследовать движение близких к интегрируемым системам возмущенных систем.

Пусть $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in R^{2n}$ — гамильтониан механической системы с n степенями свободы и

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H \quad (17.1)$$

— канонические уравнения Гамильтона. Допустим, что уравнения (17.1) интегрируемы методом Гамильтона—Якоби, т.е. уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = 0$$

имеет полный интеграл

$$S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = -ht + \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_n = h,$$

найденный методом разделения переменных. Рассмотрим каноническое преобразование от переменных (\mathbf{p}, \mathbf{q}) к переменным $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{I})$ с производящей функцией $W^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha})$. Име

$$p_i = \frac{\partial W^*}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial W^*}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что все кривые

$$C_i = \left\{ (p_i, q_i) : p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha})}{\partial q_i} \right\}$$

в соответствующих плоскостях замкнуты, и обозначим

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} p_i dq_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Величины I_i , $i = 1, \dots, n$ зависят от величин $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, поскольку контуры интегрирования C_i определяются выбором постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; пусть

$$\frac{\partial(I_1, \dots, I_n)}{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \neq 0.$$

Тогда на основе теоремы о неявной функции можно выразить $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ через I_1, \dots, I_n и получить производящую функцию канонического преобразования $W(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = W^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{I}))$, $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n)$. Связь между старыми (\mathbf{p}, \mathbf{q}) и новыми $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ каноническими переменными определяется соотношениями

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (17.2)$$

а гамильтониан $K(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{I})$ в новых переменных. Переменные $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ называются переменными действие—угол, а гамильтониан K зависит только от переменных действие I_1, \dots, I_n .

Рассмотрим некоторые свойства переменных действие—угол. Найдем изменение переменной φ_i при обходе контура C_j . Согласно (17.2) имеем $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{q}, \mathbf{I})$, и поскольку на контуре C_j все переменные действие постоянны, то

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i &= \oint_{C_j} d\varphi_i = \oint_{C_j} \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j} dq_j = \oint_{C_j} \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial I_i} dq_j = \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{C_j} \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{C_j} p_j dq_j = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = 2\pi\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Угловая переменная φ_i изменяется на 2π при обходе контура C_i и остается постоянной при обходах всех других контуров. Тогда из (17.2) следует, что переменные \mathbf{p} и \mathbf{q} зависят от угловых переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 2π -периодическим образом: их значения не меняются при изменении углов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на величины, кратные 2π .

Производящая функция $W(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ является многозначной функцией переменных q_1, \dots, q_n . При обходе контура C_i ее приращение равно $2\pi I_i$, так как

$$2\pi I_i = \oint_{C_i} p_i dq_i = \oint_{C_i} \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \Delta W_i(q_i, \mathbf{I}).$$

Поскольку гамильтониан $K(\mathbf{I})$ не зависит от угловых переменных, то из канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{I}} = -\nabla_{\varphi} K = 0, \quad \dot{\varphi} = \nabla_I K = \omega(\mathbf{I})$$

найдем $\mathbf{I} = \mathbf{I}(0)$, $\varphi = \omega(\mathbf{I}(0))t + \varphi(0)$. Движение в переменных действие—угол можно интерпретировать как равномерное движение на n -мерном торе $T^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_i \in R^1, \text{ mod } 2\pi, i = 1, \dots, n\}$. Сам тор и угловые скорости $\omega_i(\mathbf{I})$, $i = 1, \dots, n$, задаются в начальный момент времени переменными действие.

Движение в исходных переменных согласно формулам (17.2) представим в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} q_s &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} A_{k_1 \dots k_n}^{(s)} e^{i(\omega, \mathbf{k})t}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), \\ p_s &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} B_{k_1 \dots k_n}^{(s)} e^{i(\omega, \mathbf{k})t}, \quad s = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{Z} — множество целых чисел. Если отношение $\omega_i/\omega_j = m_i/m_j$, где m_i, m_j — целые числа, то говорят, что в системе имеет место вырождение. В случае, когда отношения всех частот рациональны, — полное вырождение. При полном вырождении движение

периодично, и его период равен наименьшему общему кратному частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. В общем случае, когда отношения частот иррациональны или имеет место частичное вырождение, движение называется условно-периодическим.

Переход к каноническим переменным действие—угол в большинстве случаев связан с вычислением интегралов, которые не выражаются через элементарные функции, и требуется привлечение специальных функций. Рассмотрим простой, но важный с точки зрения практики случай, когда процедура перехода к переменным действие—угол возможна в рамках элементарных функций. Речь пойдет о гармоническом осцилляторе, функция Гамильтона которого имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

где $p = m\dot{q}$, m, k — масса точки и жесткость пружины соответственно. Уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{k^2 q^2}{2} = 0,$$

а его полный интеграл

$$S(q, h, t) = -ht + W(q, h), \quad W = \pm \int \sqrt{2mh - mkq^2} dq.$$

Контур

$$C_h = \left\{ (p, q): p = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2mh - mkq^2} \right\}$$

представляет собой эллипс на плоскости (p, q) . Переменная действие

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_h} p dq = \frac{\pi ab}{2\pi}, \quad a = \sqrt{2mh}, \quad b = \sqrt{2hk^{-1}},$$

где a, b — полуоси эллипса (криволинейный интеграл по контуру C_h равен площади фигуры, ограниченной кривой C_h). Таким образом, $I = h\omega^{-1}$ или $h = \omega I$, где $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота колебаний гармонического осциллятора. Производящая функция канонического преобразования

$$W^*(q, I) = \pm \int \sqrt{2m\omega I - mkq^2} dq$$

и справедливы соотношения

$$p = \frac{\partial W^*}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\omega I - mkq^2},$$

$$\varphi = \frac{\partial W^*}{\partial I} = \pm \int \frac{m\omega dq}{\sqrt{2m\omega I - mkq^2}}.$$

Вычисляя интеграл, из второго равенства получим

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{k}{2I\omega}} q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2I\omega}{k}} \sin \varphi. \quad (17.3)$$

Обобщенный импульс p выражается через переменные действие — угол I, φ посредством формулы

$$p = \sqrt{2mI\omega} \cos \varphi. \quad (17.4)$$

Новый гамильтониан

$$K(I) = H(p, q)|_{(p, q) \rightarrow (I, \varphi)} = h = \omega I.$$

Общее решение канонических уравнений $I = -\partial K/\partial \varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \partial K/\partial I = \omega$ представляется в виде $I = I(0)$, $\varphi = \omega t + \varphi(0)$, а формулы (17.3) и (17.4) определяют движение в исходных переменных.

§ 6.18. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \varepsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ — функция Гамильтона и ε — малый параметр. Кроме того, при $\varepsilon = 0$ уравнения Гамильтона $\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H_0$ интегрируемы методом Гамильтона—Якоби, т.е. известен полный интеграл $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ уравнения Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0.$$

Возьмем полный интеграл $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ в качестве производящей функции канонического преобразования от переменных (\mathbf{p}, \mathbf{q}) к переменным $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, определяемого формулами

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\beta} = -\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

Новый гамильтониан возмущенной системы при $\varepsilon \neq 0$ равен

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t) &= \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \varepsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} = \\ &= \varepsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} = \varepsilon H^*_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t). \end{aligned}$$

Уравнения Гамильтона принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \varepsilon \nabla_{\beta} H_1^*(\alpha, \beta, t), \\ \dot{\beta} &= -\varepsilon \nabla_{\alpha} H_1^*(\alpha, \beta, t).\end{aligned}\tag{18.1}$$

Уравнения (18.1) называются уравнениями возмущенного движения и их правые части имеют порядок ε , т.е. переменные α, β эволюционируют медленно. Уравнения (18.1), как правило, неинтегрируемы, но они имеют удобную форму для численного интегрирования.

§ 6.19. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ—УГОЛ И МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ. ЭВОЛЮЦИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЕЙСТВИЕ В ЗАДАЧЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрим голономную механическую систему с n степенями свободы, описываемую гамильтонианом $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \varepsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и обобщенными силами $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\varepsilon Q_1, \dots, \varepsilon Q_n)$. Здесь ε — малый параметр. Предположим, что известна каноническая замена переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \varphi)$, где \mathbf{I}, φ — переменные действие—угол в задаче с гамильтонианом $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Тогда

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \varphi)} = K_0(\mathbf{I})$$

и угловые переменные $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in T^n = \{\varphi : \varphi_i \in R^1, \text{ mod } 2\pi, i = 1, \dots, n\}$. Уравнения движения в исходных переменных получаются из вариационного принципа Гамильтона—Остроградского в форме Пуанкаре

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) + \mathbf{Q} \delta \mathbf{q} \, dt = 0\tag{19.1}$$

и имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} H + \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} H.$$

Вариации $\delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{q}$ произвольны и обращаются в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$. Вариационный принцип в новых канонических переменных \mathbf{I}, φ представляется в форме

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\sum_{i=1}^n I_i \dot{\varphi}_i - K \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}^* \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial I_i} \delta I_i + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i \right) dt = 0,\tag{19.2}$$

$$K(\mathbf{I}, \varphi) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \varphi)}, \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \varphi)}.$$

Вариации $\delta \mathbf{I}$, $\delta \varphi$ также произвольны и обращаются в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$. Из принципа (19.2) согласно основной лемме вариационного исчисления получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\nabla_{\varphi_i} K + \mathbf{Q}^*(\mathbf{I}, \varphi) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi_i}, \\ \dot{\varphi}_i &= \nabla_{I_i} K - \mathbf{Q}^*(\mathbf{I}, \varphi) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial I_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Поскольку новый гамильтониан

$$K(\mathbf{I}, \varphi) = K_0(\mathbf{I}) + \varepsilon K_1(\mathbf{I}, \varphi), \quad K_1 = H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})|_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{I}, \varphi)}$$

и обобщенные силы содержат малый параметр ε , то уравнения (19.3) представим в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{I}, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{I}, \varphi), \\ \mathbf{f}(\mathbf{I}, \varphi) &= -\nabla_{\varphi} K_1(\mathbf{I}, \varphi) + \sum_{k=1}^n Q_k^*(\mathbf{I}, \varphi) \nabla_{\varphi} q_k, \\ \omega(\mathbf{I}) &= \nabla_{I} K_0(\mathbf{I}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{I}, \varphi) = \nabla_{I} K_1(\mathbf{I}, \varphi) - \sum_{k=1}^n Q_k^*(\mathbf{I}, \varphi) \nabla_{I} q_k. \end{aligned} \quad (19.4)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем невозмущенную задачу $\dot{\mathbf{I}} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega(\mathbf{I})$, решение которой $\mathbf{I} = \mathbf{I}(0)$, $\varphi = \omega(\mathbf{I}(0)t + \varphi(0))$. В невозмущенном движении точка движется по тору с постоянной скоростью.

В возмущенном движении при малом $\varepsilon \neq 0$ переменные действие изменяются со скоростью порядка ε , а частоты $\omega(\mathbf{I})$ получают малые добавки порядка ε .

Рассмотрим систему с одной степенью свободы ($n = 1$) и усредненное уравнение

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(J, \varphi) d\varphi. \quad (19.5)$$

Допустим, что решения уравнений (19.4) и (19.5) с начальными условиями ($I(0)$, $\varphi(0)$) и $J(0) = I(0)$ таковы, что функции $I(t)$ и $J(t)$ при $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ принадлежат компакту $K \subset \mathbb{R}^1$. Кроме того, предполагаем, что функции $f(I, \varphi)$, $\omega(I)$ и $F(J)$ непрерывны вместе со своими первыми производными, когда $I, J \in K$ и $\varphi \in S^1$, а функция $\omega(I) \geq \omega_0 > 0$. В этом случае справедлива теорема.

Т. *Решение уравнений (19.4) $I = I(t, I(0), \varphi(0))$ отличается от решения усредненного уравнения (19.5) $J(t) = J(t, I(0))$ на отрезке времени $[0, \varepsilon^{-1}]$ на величину порядка ε , если ε достаточно мало, т.е. справедлива оценка $|I(t) - J(t)| < c\varepsilon$, где c — постоянная, не зависящая от ε .*

▲ Из уравнений (19.4), (19.5) следуют соотношения

$$I(t) = I(0) + \varepsilon \int_0^t F(I) d\tau + \varepsilon \int_0^t (f(I, \varphi) - F(I)) d\tau,$$

$$J(t) = I(0) + \varepsilon \int_0^t F(J) d\tau.$$

Тогда

$$I(t) - J(t) = \varepsilon \int_0^t (F(I) - F(J)) d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{\varphi(t)} \frac{f^*(I, \varphi) d\varphi}{\omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi)}, \quad f^* = f(I, \varphi) - F(I).$$

Обозначим $|I(t) - J(t)| = z$ и, учитывая условие Липшица $|F(I) - F(J)| < L|I - J|$, следующее из ограниченности первых производных на K , получим

$$z(t) \leq \varepsilon L \int_0^t z(\tau) d\tau + \varepsilon \left| \int_0^{\varphi(t)} \frac{f^*(I(0) + \varepsilon \psi_1(\varphi), \varphi)}{\omega(I(0))} (1 + \varepsilon \psi_2(\varphi)) d\varphi \right|. \quad (19.6)$$

Заметим, что при выводе неравенства (19.6) использовались условия

$$\varepsilon < \omega_0 \left(\max_{I \in K, \varphi \in S^1} |g(I, \varphi)| \right)^{-1}, \quad \omega(I) \geq \omega_0, \quad f(I, \varphi), g(I, \varphi) \in C_1(K \times S^1),$$

из которых следует обратимость функции $\varphi = \varphi(t)$ и ограниченность функций $\psi_1(\varphi)$ и $\psi_2(\varphi)$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} f^*(I(0), \varphi) d\varphi = 0$$

и равенство $f^*(I(0) + \varepsilon \psi_1(\varphi), \varphi) = f^*(I(0), \varphi) + \varepsilon \psi_3(\varphi)$, где функция $\psi_3(\varphi)$ ограничена, получим на отрезке времени $[0, \varepsilon^{-1}]$ неравенство

$$z(t) \leq \varepsilon L \int_0^t z(\tau) d\tau + \varepsilon M. \quad (19.7)$$

Здесь M — постоянная, ограничивающая второй интеграл в неравенстве (19.6). Согласно неравенству Гроноулла из (19.7) следует неравенство $z(t) \leq \varepsilon M \exp(\varepsilon L t)$ и при $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ получим $z(t) \leq \varepsilon M \exp L$.

Докажем неравенство Гроноулла. Пусть $y(t) = \varepsilon M \exp(\varepsilon L t)$ и удовлетворяет уравнению

$$y(t) = \varepsilon M + \varepsilon L \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Тогда для $x = z - y$ справедливо неравенство

$$x(t) \leq \varepsilon L \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Пусть функция $\alpha(t) \leq 0$ такова, что

$$x(t) = \alpha(t) + \varepsilon L \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (19.8)$$

Интегральное уравнение (19.8) имеет решение

$$x(t) = \alpha(t) + \varepsilon L \int_0^t \alpha(\tau) e^{\varepsilon L(t-\tau)} d\tau \leq 0.$$

Следовательно, $z(t) \leq y(t) = \varepsilon M \exp(\varepsilon L t)$. ▼

Для механической системы с числом быстрых угловых переменных, большим или равном двум, принцип усреднения также позволяет получить более простую систему уравнений

$$\dot{\mathbf{J}} = \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{J}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{J}) = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) d\varphi_1 \dots d\varphi_n. \quad (19.9)$$

Однако утверждение об ε -близости решений усредненной системы (19.9) и исходной системы (19.4) на асимптотически большом интервале времени $[0, \varepsilon^{-1}]$, вообще говоря, неверно.

В основе дальнейшего рассмотрения этой проблемы лежит теорема о среднем значении функции $\mathbf{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ на торе T^n и на невозмущенной траектории $\mathbf{I} = \mathbf{I}(0)$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t + \boldsymbol{\varphi}(0)$ при отсутствии резонансов между частотами $\omega_1(\mathbf{I}), \dots, \omega_n(\mathbf{I})$. В случае резонансов, когда $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, \mathbf{Z} — множество целых чисел, необходимо изменять структуру уравнений (19.9). На практике часто пользуются уравнениями (19.9) для изучения эволюции движения, особенно в тех случаях, когда аттракторы (притягивающие множества) исходной возмущенной системы и усредненной системы совпадают, что дает уверенность в правильности приближенного описания движения системы.

В качестве примера рассмотрим задачу Ван дер Поля — задачу о движении гармонического осциллятора под воздействием некон-

сервативной силы $Q = \varepsilon p(a^2 - q^2)$, где $(p, q) \in R^2$ — канонические переменные, ε — малый параметр, a — постоянная. Функция Гамильтона гармонического осциллятора имеет вид (см. § 6.17)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

Здесь m — масса материальной точки, k — жесткость пружины. Переходя к переменным действие—угол (I, φ) по формулам (17.3) и (17.4), получим новый гамильтониан $K = \omega I$, а уравнения возмущенного движения (19.3) примут вид

$$\dot{I} = \varepsilon \left(a^2 - \frac{2I\omega}{k} \sin^2 \varphi \right) 2I \cos^2 \varphi, \quad (19.10)$$

$$\dot{\varphi} = \omega - \varepsilon \left(a^2 - \frac{2I\omega}{k} \sin^2 \varphi \right) 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Усредняя правые части уравнений (19.10) по углу φ , получим

$$\dot{J} = \varepsilon J \left(a^2 - \frac{J\omega}{2k} \right), \quad \dot{\varphi} = \omega. \quad (19.11)$$

Переменная действие J имеет два стационарных значения $J_1 = 0$ и $J_2 = 2ka^2\omega^{-1}$, первое из которых неустойчиво, а второе устойчиво. Почти все решения $J(t)$ стремятся к J_2 при $t \rightarrow \infty$. В исходных переменных p, q решению $J = J_2$, $\varphi = \omega t + \varphi(0)$ соответствует устойчивый предельный цикл, описывающий автоколебательный процесс.

§ 6.20. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ АППЕЛЯ

Действительные движения голономных механических систем удовлетворяют дифференциальному вариационному принципу Д'Аламбера—Лагранжа, из которого следуют уравнения Лагранжа второго рода. Принципу Д'Аламбера—Лагранжа можно придать другую форму — форму принципа наименьшего принуждения Гаусса.

Рассмотрим систему N материальных точек с голономными идеальными связями $f_j(\mathbf{x}, t) = 0, j = 1, \dots, l, \mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in E^{3N}$. Если $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n), n = 3N - l$ — локальные координаты на конфигурационном многообразии $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E^{3N}, f_j(\mathbf{x}, t) = 0, j = 1, \dots, l\}$, то $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(\mathbf{q}, t), v = 1, \dots, N$. Пусть на каждую точку действует активная сила \mathbf{F}_v .

О.20.1. Функция

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\ddot{\mathbf{r}}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right)^2 \quad (20.1)$$

называется принуждением по Гауссу.

Смысл принуждения по Гауссу — среднеквадратичное отклонение действительных ускорений $\ddot{\mathbf{r}}_v$ от ускорений точек в освобожденном от связей движении $m_v^{-1}\mathbf{F}_v$. Принуждение по Гауссу, выраженное через локальные координаты и их производные, есть функция $\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t$, поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}_v = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}, \quad \mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (20.2)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_v = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \ddot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial t \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial t^2}.$$

Как функция обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n$ принуждение по Гауссу $Z = Z_2 + Z_1 + Z_0$, где Z_2, Z_1 — квадратичная и линейная формы по обобщенным ускорениям соответственно, а Z_0 не зависит от обобщенных ускорений.

Принцип наименьшего принуждения: *принуждение по Гауссу как функция обобщенных ускорений принимает минимальное значение на действительном движении.*

▲ Рассмотрим $Z(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ как функцию от $\ddot{\mathbf{q}}$, считая $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t$ фиксированными величинами, соответствующими состоянию системы в момент времени t . Стационарные точки Z в этом случае определяются соотношениями

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20.3)$$

Учитывая соотношения (20.1) и (20.2), получим

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{v=1}^N m_v \left(\ddot{\mathbf{r}}_v - \frac{\mathbf{F}_v}{m_v} \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_v}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{v=1}^N (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v) \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k},$$

поскольку $\partial \ddot{\mathbf{r}}_v / \partial \ddot{q}_k = \partial \mathbf{r}_v / \partial q_k$. Таким образом, соотношения (20.3) принимают вид

$$\sum_{v=1}^N (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v) \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20.4)$$

С другой стороны, согласно принципу Д'Аламбера—Лагранжа

$$\sum_{k=1, v=1}^{n, N} (m_v \ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v) \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in R^n. \quad (20.5)$$

Из соотношений (20.5) следуют уравнения (20.4), которые после соответствующих преобразований принимают вид уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20.6)$$

Следовательно, соотношения (20.3) определяют действительные обобщенные ускорения $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n$.

Для того чтобы определить характер стационарной точки принуждения по Гауссу $Z(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, вычислим в этой точке второй дифференциал по $\ddot{\mathbf{q}}$

$$\begin{aligned} d^2 Z &= \sum_{k,s=1}^n \frac{\partial^2 Z}{\partial \ddot{q}_k \partial \ddot{q}_s} d\ddot{q}_k d\ddot{q}_s = \sum_{v=1}^N \sum_{s=1}^n m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_s} d\ddot{q}_k d\ddot{q}_s = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} d\ddot{q}_k \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Второй дифференциал обращается в нуль только тогда, когда все $d\ddot{q}_k = 0$, поскольку выражение $d^2 Z$ совпадает с удвоенной кинетической энергией системы при замороженных связях

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2.$$

Положительность второго дифференциала во всей области значений обобщенных ускорений свидетельствует о наличии минимума принуждения по Гауссу в стационарной точке. ▼

Представим принуждение по Гауссу в виде $Z = Z_2^* + Z_1^* + Z_0^*$,

$$Z_2^* = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2, \quad Z_1^* = - \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{r}}_v, \quad Z_0^* = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \frac{\mathbf{F}_v^2}{m_v}$$

и обозначим $Z_2^* = S(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$. Тогда условия (20.3) примут вид

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда следуют уравнения движения голономных систем в форме Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k, \quad Q_k = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20.7)$$

Уравнения (20.7) совпадают с уравнениями Лагранжа второго рода (20.6). Функция $S(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ называется энергией ускорений.

§ 6.21. НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ. УРАВНЕНИЯ РАУСА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Голономные двусторонние связи определяют пространство возможных положений точек системы — конфигурационное многообразие системы. В ряде случаев возникают связи иного типа, при которых накладываются ограничения на скорости точек системы.

О.21.1. Неголономными двусторонними линейными связями называются условия

$$\sum_{k=1}^n a_{sk}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k + b_s(\mathbf{q}, t) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (21.1)$$

если соотношения (21.1) не представляются в виде

$$\frac{d}{dt} f_s(\mathbf{q}(t), t) = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (21.2)$$

Если условия (21.1) имеют вид (21.2), то они эквивалентны голономным связям $f_s(\mathbf{q}, t) = c_s$, $s = 1, \dots, m$, где c_s — произвольная постоянная, и рассматриваемая механическая система является системой с голономными связями и имеет $n - m$ степеней свободы. Вопрос о возможности сведения условий (21.1) к равенствам (21.2) решается на основе теоремы Фробениуса об интегрируемости пфаффовых форм: система пфаффовых уравнений

$$\omega_s = \sum_{k=1}^n a_{sk} dq_k + b_s dt = 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

тогда и только тогда вполне интегрируема, т.е. приводится к виду (21.2), если 2-формы $d\omega_s = 0$, $s = 1, \dots, m$, когда 1-формы $\omega_s = 0$, $s = 1, \dots, m$.

Воздействие неголономных связей (21.1) на точки механической системы описывается реакциями связей Q_k' , $k = 1, \dots, n$. Сформулируем принцип освобождения от удерживающих неголономных связей: наложенные связи (21.1) могут быть отброшены и заменены реакциями связей Q_k' , $k = 1, \dots, n$, а движение полученной системы удовлетворяет принципу Д'Аламбера—Лагранжа, в котором обобщенные силы Q_k следует заменить на $Q_k + Q_k'$.

О.21.2. Возможные перемещения $\delta\mathbf{q}$ определяются как произвольные векторы из R^n , удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^n a_{sk}(\mathbf{q}, t) \delta q_k = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (21.3)$$

О.21.3. Неголономные связи (21.1) называются идеальными, если элементарная работа соответствующих им сил реакций связей на любых возможных перемещениях равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n Q'_k \delta q_k = 0.$$

Ранг матрицы $\|a_{sk}\|$, $s = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, предполагается равным m , и, следовательно, число независимых вариаций обобщенных координат равно $n - m$. По определению это число $n - m$ называется числом степеней свободы неголономной механической системы.

Принцип Д'Аламбера—Лагранжа в случае неголономных идеальных связей имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0,$$

где возможные перемещения $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ удовлетворяют соотношениям (21.3). Уравнения движения получим методом неопределенных множителей Лагранжа. Имеем

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k - \sum_{s=1}^m \lambda_s a_{sk} \delta q_k = 0.$$

Здесь $\lambda_s(t)$ — неопределенные множители Лагранжа, а вектор $\delta \mathbf{q}$ произволен в R^n . Тогда справедливы уравнения Рауса с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{s=1}^m \lambda_s a_{sk}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (21.4)$$

которые совместно с уравнениями связей (21.1) образуют полную систему $n + m$ уравнений относительно $n + m$ неизвестных $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Принцип наименьшего принуждения Гаусса справедлив также для механических систем с идеальными неголономными линейными связями: принуждение по Гауссу $Z(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, рассматриваемое как функция обобщенных ускорений $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n$, принимает минимальное значение на действительном движении.

Продифференцируем по времени уравнения связей (21.1) и получим

$$\sum_{k=1}^n a_{sk}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_k + g_s(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (21.5)$$

Принуждение по Гауссу $Z(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ определяется формулой (20.1). Решим задачу на условный экстремум: найдем экстремальные точки принуждения по Гауссу при условиях (21.5), считая, что изменяются только обобщенные ускорения, а величины $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t$ фиксированы. Имеем

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} + \sum_{s=1}^m \lambda_s a_{sk} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (21.6)$$

где $\lambda_s, s = 1, \dots, m$ — неопределенные множители Лагранжа. Уравнения (21.6) согласно (20.3), (20.4) и (20.6) совпадают с уравнениями Рауса с неопределенными множителями для систем с неголономными связями (21.4).

Характер условного экстремума определяется знаком второго дифференциала

$$d_{\ddot{q}}^2 \left[Z + \sum_{s,k=1}^{m,n} \lambda_s (a_{sk} \ddot{q}_k + g_s) \right] = d_{\ddot{q}}^2 Z,$$

вычисленным в точке экстремума при условии, что величины $d\ddot{q}_k, k = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^n \lambda_s^0 a_{sk} d\ddot{q}_k = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (21.7)$$

Здесь $\lambda_s^0, s = 1, \dots, m$ — значения множителей Лагранжа в точке экстремума. Как показано в § 6.20, второй дифференциал положителен во всей области значений переменных $d\dot{q}_1, \dots, d\dot{q}_n$, а значит, он будет положительным и при условиях (21.7). Таким образом, принуждение по Гауссу минимально на действительном движении.

II. Рассмотрим обруч, катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Допустим для простоты, что плоскость обруча всегда вертикальна (рис. 54). Положение обруча зададим координатами x, y точки контакта K с горизонтальной плоскостью Oxy , углом ϕ между плоскостью Oxz и плоскостью обруча и углом ψ , определяющим поворот обруча вокруг нормали \mathbf{n} . Кинетическая энергия обруча по теореме Кенига (см. § 4.3) равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\psi}^2.$$

Здесь m — масса обруча, J_1, J_2 — моменты инерции обруча относительно диаметра KCL и нормали \mathbf{n} соответственно. Точка C есть центр масс обруча, и моменты инерции обруча относительно всех диаметров одинаковы. Скорость точки K по теореме сложения скоростей равна

$$\mathbf{V}_K = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{\psi}[\mathbf{n}, (-R\mathbf{e}_z)],$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты неподвижной системы координат $Oxyz$, R — радиус обруча. Неголономная связь (условие качения обруча без проскальзывания) имеет вид $\mathbf{V}_K = 0$. Проектируя вектор \mathbf{V}_K на оси Ox и Oy , получим

$$x + \dot{\psi}R \cos\varphi = 0, \quad y + \dot{\psi}R \sin\varphi = 0.$$

Возможные перемещения $\delta x, \delta y, \delta\varphi, \delta\psi$ удовлетворяют соотношениям $\delta x + \delta\psi R \cos\varphi = 0, \delta y + \delta\psi R \sin\varphi = 0$. Система имеет, таким образом, две степени свободы. Неголономная связь идеальна, так как возможные перемещения точки контакта, в которой приложена реакция связи, равны нулю и, следовательно, равна нулю работа реакции связи на возможных перемещениях. Уравнения Рауса с неопределенными множителями представляются в форме

$$m\ddot{x} = \lambda_1, \quad m\ddot{y} = \lambda_2, \quad J_1\ddot{\varphi} = 0,$$

$$J_2\ddot{\psi} = \lambda_1 R \cos\varphi + \lambda_2 R \sin\varphi.$$

Исключая переменные λ_1, λ_2 и используя уравнения связей, получим уравнение $(J_2 + mR^2)\ddot{\psi} = 0$. Таким образом, углы φ и ψ в процессе движения равны $\varphi = \omega_1 t + \varphi(0), \psi = \omega_2 t + \psi(0)$. Тогда $\dot{x} = -\omega_2 R \cos\varphi, \dot{y} = -\omega_2 R \sin\varphi$ и $x = -\omega_2 \omega_1^{-1} R \sin\varphi + x_0, y = \omega_2 \omega_1^{-1} R \cos\varphi + y_0$. Центр масс обруча точка C движется равномерно по окружности, а сам обруч равномерно вращается вокруг вертикального диаметра и нормали.

§ 6.22. УРАВНЕНИЯ АППЕЛЯ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ КОНЬКА

В предыдущем параграфе была получена система $n + m$ уравнений (21.1), (21.4), описывающая движение механической системы с неголономными связями и содержащая неопределенные множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Движение системы может быть описано $n - m$ динамическими уравнениями относительно переменных q_1, \dots, q_n и уравнениями связей (21.1)

Используя соотношения (21.3), выразим часть зависимых возможных перемещений $\delta q_1, \dots, \delta q_m$ через возможные перемещения $\delta q_{m+1}, \dots, \delta q_n$, предположив, не нарушая общности, отличным от нуля определитель

$$\det A_{1,m} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Представим уравнения (21.3) в виде

$$A_{1, m} \delta \mathbf{q}_{1, m} = -A_{m+1, n} \delta \mathbf{q}_{m+1, n},$$

$$\delta \mathbf{q}_{1, m} = (\delta q_1, \dots, \delta q_m), \delta \mathbf{q}_{m+1, n} = (\delta q_{m+1}, \dots, \delta q_n),$$

$$A_{m+1, n} = \|a_{ij}\|, i = 1, \dots, m, j = m+1, \dots, n.$$
(22.1)

Вариации $\delta \mathbf{q}_{m+1, n}$ произвольны, а вариации $\delta \mathbf{q}_{1, m}$ согласно (22.1) равны

$$\delta \mathbf{q}_{1, m} = -A^{-1}_{1, m} A_{m+1, n} \delta \mathbf{q}_{m+1, n}. \quad (22.2)$$

Вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа для системы с неголономными связями представим в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (22.3)$$

где $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ связаны соотношениями (22.2). Заменяя $\delta \mathbf{q}_{1, m}$ через независимые вариации $\delta \mathbf{q}_{m+1, n}$, представим (22.3) в виде

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k \right) \sum_{r=m+1}^n l_{kr} \delta q_r + \sum_{r=m+1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} - Q_r \right) \delta q_r = 0. \quad (22.4)$$

Здесь согласно (22.2) $\delta q_k = \sum_{r=m+1}^n l_{kr} \delta q_r$, $k = 1, \dots, m$. Продифференцируем по времени уравнения связей (21.1) и получим

$$A_{1, m} \ddot{\mathbf{q}}_{1, m} + A_{m+1, n} \ddot{\mathbf{q}}_{m+1, n} + \mathbf{d}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0.$$

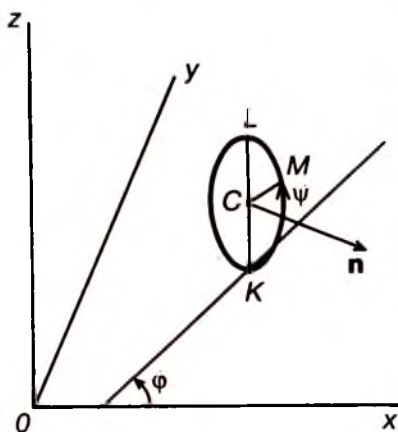


Рис. 54

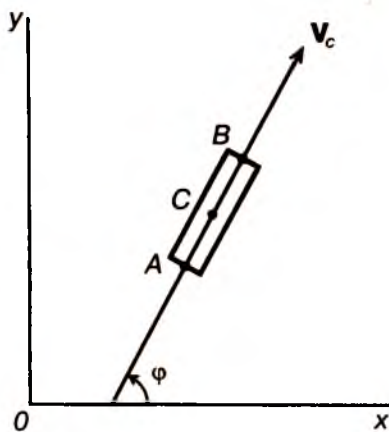


Рис. 55

Отсюда следуют равенства

$$\ddot{q}_k = \sum_{r=m+1}^n l_{kr} \ddot{q}_r + h_k(\mathbf{q}, \mathbf{q}, t) \Rightarrow l_{kr} = \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \ddot{q}_r} \quad (22.5)$$

Воспользовавшись равенствами (22.5), представим принцип Д'Аламбера—Лагранжа в виде

$$\sum_{r=m+1}^n \left[\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k \right) \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \ddot{q}_r} + \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} - Q_r \right] \delta q_r = 0.$$

Поскольку вариации δq_r , $r = m+1, \dots, n$, независимы, то выполняются условия

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k \right) \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \ddot{q}_r} + \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_r} - Q_r = 0, \quad r = m+1, \dots, n.$$

Обозначим через

$$S^* (\ddot{q}_{m+1}, \dots, \ddot{q}_n, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = S(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \Big|_{\ddot{q}_{1..m} \rightarrow \ddot{q}_{m+1..n}},$$

$$Q_r^* = Q_r + \sum_{k=1}^m Q_k \frac{\partial \ddot{q}_k}{\partial \ddot{q}_r}$$

и получим уравнение Аппеля для неголономных систем

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_r} = Q_r^*, \quad r = m+1, \dots, n. \quad (22.6)$$

Уравнения (22.6) совместно с m уравнениями неголономных связей (21.1) образуют полную систему n дифференциальных уравнений относительно функций q_1, \dots, q_n и их производных.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении фигурного конька по горизонтальной плоскости. Конек будем считать твердым телом, центр масс которого точка C совпадает с центром конька и имеет скорость \mathbf{V}_C , направленную вдоль лезвия конька AB (рис. 55). Кроме того, конек может поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс C . Уравнение неголономной связи, выражающее условие коллинеарности векторов \mathbf{V}_C

и \overrightarrow{AB} , имеет вид

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0, \quad (22.7)$$

где x, y — координаты центра масс C , φ — угол поворота конька вокруг вертикали. Найдем энергию ускорений S , воспользовавшись

формулой Ривальса для ускорений точек твердого тела (см. § 2.10).
Имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{r}}^2 d\mu = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \ddot{\mathbf{r}}_C + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) \right\}^2 d\mu.$$

Здесь Ω — область, занимаемая твердым телом, μ — мера, связанная с распределением масс в теле, \mathbf{r} , \mathbf{r}_C — радиусы-векторы произвольной точки тела и центра масс, $\omega = \varphi \mathbf{e}_z$, \mathbf{e}_z — орт вертикальной оси, $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$. Так как в дальнейшем при вычислении левой части уравнений Аппеля (22.6) важна только зависимость энергии ускорений S от обобщенных ускорений \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\varphi}$, то представим S в виде

$$S = \frac{m}{2} (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \dots, \quad (22.8)$$

где точками обозначены члены, не зависящие от ускорений. Здесь m — масса тела, J — момент инерции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс C . При вычислении интегралов в (22.8) учитывались равенства

$$\int_{\Omega} \rho d\mu = 0, \quad [\dot{\omega}, \rho] \cdot [\omega, [\omega, \rho]] = 0.$$

Выберем в качестве независимых вариаций $\delta\varphi$ и δx , выразив вариацию δy через δx при условии $\cos\varphi \neq 0$ в виде $\delta y = \delta x \operatorname{tg}\varphi$. Продифференцировав условие связи (22.7), получим

$$\ddot{x} \sin\varphi - \ddot{y} \cos\varphi + \dot{x}\dot{\varphi} \cos\varphi + \dot{y}\dot{\varphi} \sin\varphi = 0.$$

Энергия ускорения S^* равна

$$S^* = \frac{m}{2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} (\ddot{x} \operatorname{tg}\varphi + \dot{x}\dot{\varphi} + \dot{y}\dot{\varphi} \operatorname{tg}\varphi)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \dots$$

Поскольку обобщенные силы $Q_x = Q_y = Q_{\varphi} = 0$, то $Q_x^* = Q_{\varphi}^* = 0$. Уравнения Аппеля примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^*}{\partial \ddot{x}} = 0 &\Rightarrow m\ddot{x} + m(\ddot{x} \operatorname{tg}\varphi + \dot{x}\dot{\varphi} + \dot{y}\dot{\varphi} \operatorname{tg}\varphi) \operatorname{tg}\varphi = 0, \\ \frac{\partial S^*}{\partial \ddot{\varphi}} = 0 &\Rightarrow J\ddot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Уравнения (22.9), (22.7) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающую движение конька. Исключая \dot{y} из

первого уравнения системы (22.9) с помощью соотношения (22.7), получим уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi} \operatorname{tg}\varphi = 0,$$

из которого с учетом второго уравнения системы (22.9) найдем

$$\dot{x} = v_0 \cos\varphi, \quad \varphi = \omega t + \varphi(0).$$

Тогда $\dot{y} = v_0 \sin\varphi$ и $x = a + v_0\omega^{-1} \sin\varphi$, $y = b - v_0\omega^{-1} \cos\varphi$.

Здесь v_0 — начальная скорость центра масс конька, ω — начальная угловая скорость вращения конька вокруг вертикали. Конек описывает окружность с центром в точке с координатами (a, b) и с радиусом $v_0\omega^{-1}$. Угловая скорость конька $\dot{\varphi}$ постоянна, а движение центра масс C происходит по окружности с постоянной скоростью.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 7.1. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ. СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Рассмотрим голономную механическую систему со стационарными идеальными связями и консервативными силами. Функция Лагранжа в этом случае равна

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in R^n. \quad (1.1)$$

Конфигурационное многообразие системы стационарно, а ее кинетическая энергия представляется квадратичной формой по обобщенным скоростям (см. § 4.9). Движение системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} L - \nabla_{\mathbf{q}} L = 0. \quad (1.2)$$

Напомним определение 12.1 (см. § 4.12): решение уравнений (1.2) $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, где \mathbf{q}_0 — постоянная, называется положением равновесия механической системы. Равновесные конфигурации системы удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial V(\mathbf{q}_0)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Не нарушая общности, будем считать, что положению равновесия соответствует $\mathbf{q}_0 = 0$, и разложим функцию Лагранжа в окрестности точки $\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\mathbf{q} = 0$ в ряд Тейлора. Имеем

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(0)}{\partial q_i} q_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \dots, \quad (1.3)$$

где точками обозначены члены порядка малости три и выше по отношению к переменным $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}$. Заметим, что коэффициенты $\partial V(0)/\partial q_i = 0, i = 1, \dots, n$, а $V(0)$ можно отбросить как несущественную константу. Если ограничиться в разложении (1.3) квадратичными членами, то полученный лагранжиан будет описывать по определению малые колебания системы в окрестности положения равновесия. Итак, в дальнейшем будем изучать движение системы с лагранжианом

$$L_2(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (1.4)$$

Матрицы A и B — симметричные. Уравнения Лагранжа, описывающие малые колебания,

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\mathbf{q} = 0, \quad A = \|a_{ij}(0)\|, \quad B = \left\| \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_i \partial q_j} \right\| \quad (1.5)$$

представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и могут быть проинтегрированы в общем случае, в то время как исходные уравнения движения, вообще говоря, нелинейны и их интегрирование невозможно. Найдем общее решение уравнений (1.5).

Л. *Квадратичная форма $1/2(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$, определяющая кинетическую энергию системы, положительно определена, т.е. $(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq c(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$, $c > 0 \forall \dot{\mathbf{q}} \in R^n$.*

▲ В самом деле, если существуют $\dot{\mathbf{q}}_* \neq 0$ и $(A\dot{\mathbf{q}}_*, \dot{\mathbf{q}}_*) \leq 0$, то $= 1/2 \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 \leq 0$ для системы N материальных точек, но $\dot{r}_i = \partial r_i / \partial \dot{\mathbf{q}} \mathbf{q}$. Поскольку это отображение невырождено, то при $\dot{\mathbf{q}}_* \neq 0$ найдутся $\dot{r}_i \neq 0$ и T будет больше нуля. Таким образом, квадратичная форма $(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ на единичной сфере $S^n = \{\dot{\mathbf{q}} : (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 1\}$ и достигает на ней положительного минимума $c > 0$, поскольку сфера S^n — компакт. ▼

Согласно известной теореме высшей алгебры пара квадратичных форм, из которых одна положительно определена, может быть линейным невырожденным преобразованием приведена к каноническому виду, т.е. существует замена переменных

$$\mathbf{q} = P\mathbf{Q}, \quad \det \|P\| \neq 0 \quad (1.6)$$

и справедливы соотношения $(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = (P^T A P \dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{Q}}) = (\dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{Q}})$, $(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) = (P^T B P \mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = (\Lambda \mathbf{Q}, \mathbf{Q})$, где $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$. Функция Лагранжа в новых переменных и уравнения Лагранжа примут вид

$$L_2(\dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{Q}}) - \frac{1}{2}(\Lambda \mathbf{Q}, \mathbf{Q}), \quad (1.7)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \Lambda \dot{\mathbf{Q}} = 0 \Rightarrow \ddot{Q}_k + \lambda_k Q_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Уравнения (1.7) имеют общее решение:

$$а) \lambda_k = \omega_k^2 > 0 \Rightarrow Q_k = C_{1k} \cos \omega_k t + C_{2k} \sin \omega_k t;$$

$$б) \lambda_k = 0 \Rightarrow Q_k = C_{1k} t + C_{2k}; \quad (1.8)$$

$$в) \lambda_k < 0 \Rightarrow Q_k = C_{1k} e^{\sqrt{-\lambda_k} t} + C_{2k} e^{-\sqrt{-\lambda_k} t}.$$

Величины C_{1k} , C_{2k} — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям движения. В случае, когда все $\lambda_k > 0$, положение равновесия $\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\mathbf{q} = 0$ устойчиво по Ляпунову, так как согласно (1.8) $Q_k(t)$ ограничены; потенциальная энергия $V(\mathbf{q})$ имеет в нуле изолированный минимум и положение равновесия устойчиво по Ляпунову в силу точных нелинейных уравнений движения (см. теорему Лагранжа, § 4.12). В этом случае фазовая траектория $(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t))$ остается в окрестности положения равновесия, и аппроксимация лагранжиана квадратичными членами справедлива при всех $t \geq 0$.

В случаях б) и в) фазовая траектория покидает окрестность положения равновесия за конечный промежуток времени (в рамках теории малых колебаний положение равновесия неустойчиво), и аппроксимация лагранжиана квадратичными членами будет законна только на конечном интервале времени. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда все $\lambda_k > 0$.

О.1.1. Величины $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, \dots, n$, называются собственными частотами колебаний системы около устойчивого положения равновесия.

О.1.2. Векторы $\mathbf{u}_k = P\mathbf{Q}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, $\mathbf{Q}^{(k)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на k -м месте) называются собственными формами.

О.1.3. Координаты (Q_1, \dots, Q_n) называются нормальными координатами.

Остановимся на ряде свойств нормальных координат, собственных частот и форм.

С.1. Решение уравнения (1.5) согласно Эйлера ищется в виде $\mathbf{q} = \mathbf{u} \exp(i\omega t)$. Далее, система однородных уравнений

$$(-\omega^2 A + B)\mathbf{u} = 0 \quad (1.9)$$

имеет ненулевое решение, если определитель $\det \|B - \omega^2 A\| = 0$. Корни характеристического уравнения $\det \|B - \omega^2 A\| = 0$ $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$,

очевидно, совпадают с квадратами собственных частот, а векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ являются соответствующими решениями уравнения (1.9).

С.2. Рассмотрим задачу о собственных векторах пары симметрических операторов A и B . Имеем $\lambda A\mathbf{u} = B\mathbf{u}$. Характеристическое уравнение $\det \|B - \lambda A\| = 0$ имеет n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и система собственных векторов $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ совпадает с набором собственных форм.

С.3. Справедливы равенства

$$(A\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij}, (B\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, равный единице при $i=j$ и нулю при $i \neq j$.

Поскольку $\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n \dot{Q}_k \mathbf{u}_k$, то

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \left(A \sum_{k=1}^n \dot{Q}_k \mathbf{u}_k, \sum_{k=1}^n \dot{Q}_k \mathbf{u}_k \right) - \frac{1}{2} \left(B \sum_{k=1}^n Q_k \mathbf{u}_k, \sum_{k=1}^n Q_k \mathbf{u}_k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left[(A\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \dot{Q}_i \dot{Q}_j - (B\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) Q_i Q_j \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{Q}_i^2 - \lambda_i Q_i^2).$$

Сравнение этих двух выражений доказывает утверждение следствия.

С.4. Найдем экстремумы квадратичной формы $(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$ при условии $(A\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 1$. Стационарные точки определяются из уравнений

$$\nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) \equiv B\mathbf{q} - 2\lambda A\mathbf{q} = 0, \quad \Phi = (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) - \lambda(A\mathbf{q}, \mathbf{q}).$$

Отсюда следует, что стационарные значения функции $(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$ равны $\lambda = \omega_k^2$ и достигаются на собственных формах \mathbf{u}_k . Если собственные частоты расположить в порядке возрастания $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$, то

$$\omega_1 = \min_{\mathbf{q}} \frac{(B\mathbf{q}, \mathbf{q})}{(A\mathbf{q}, \mathbf{q})}, \quad \omega_n = \max_{\mathbf{q}} \frac{(B\mathbf{q}, \mathbf{q})}{(A\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

С.5. Общее решение уравнений (1.5) представляется в виде

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k (C_{1k} \cos \omega_k t + C_{2k} \sin \omega_k t)$$

и является суперпозицией гармонических колебаний вдоль линейно независимых собственных форм. Если в R^n ввести скалярное произведение с помощью положительно определенного оператора A в виде (Aq, q) , то собственные формы образуют в R^n ортонормированный базис (см. С.3).

П. Изучим малые колебания двойного математического маятника, состоящего из двух материальных точек, соединенных с неподвижной точкой двумя невесомыми палочками (рис. 56). Считаем, что массы материальных точек равны m и длины палочек одинаковы и равны l . Система имеет две степени свободы, и ее конфигурационное пространство диффеоморфно тору $T^2 = \{\varphi_1, \varphi_2 : \varphi_k \in R^1, \text{ mod } 2\pi\}$. Точки перемещаются в вертикальной плоскости $O\xi_1\xi_2$ под действием силы тяжести. Функция Лагранжа равна

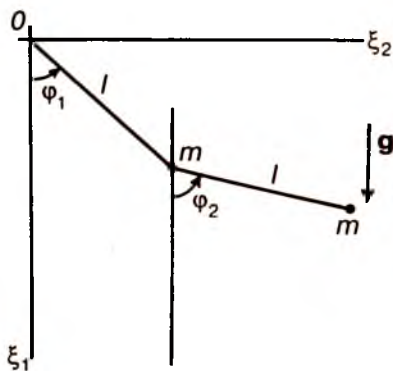


Рис. 56

$$L(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Положения равновесия определяются из уравнений

$$\frac{\partial L(0, 0, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = -2mgl \sin \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$\frac{\partial L(0, 0, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = -mgl \sin \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Существенно различны четыре положения равновесия

$$(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0), (\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi),$$

$$(\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0), (\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi).$$

По теореме Лагранжа первое положение, когда обе палочки направлены вниз по вертикали, устойчиво. Лагранжиан, описывающий малые колебания в окрестности этого положения равновесия,

$$L_2 = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) - \frac{1}{2} mgl(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Обозначим $g/l = \omega_0^2$ и, разделив лагранжиан на ml^2 , получим

$$L_{20} = \frac{1}{2}(A\dot{\varphi}, \dot{\varphi}) - \frac{\omega_0^2}{2}(B\varphi, \varphi), \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varphi = \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Собственные частоты и формы удовлетворяют уравнению $(A\omega^2 - \omega_0^2 B)\mathbf{u} = 0$. Характеристическое уравнение $\det \|Az - B\| = 0$, где $z = \omega^2 \omega_0^{-2}$, имеет корни $z_1 = 2 - \sqrt{2}$, $z_2 = 2 + \sqrt{2}$. Соответствующие им ортонормированные собственные формы равны

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, \sqrt{2}), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -\sqrt{2})$$

Справедливы соотношения $(A\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j) = \delta_{jj}$. Общее решение уравнений Лагранжа второго рода имеет вид

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) = & \mathbf{u}_1 \left(C_{11} \cos \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_{12} \sin \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \\ & + \mathbf{u}_2 \left(C_{21} \cos \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_{22} \sin \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t \right). \end{aligned}$$

§ 7.2. ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТНЫХ ИЛИ ИНЕРЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим две механические системы с одинаковым числом степеней свободы, совершающие малые колебания около устойчивого положения равновесия. Пусть A_1, A_2 — матрицы инерции, B_1, B_2 — матрицы жесткости и соответственно $L_{(p)} = 1/2(A_p \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - 1/2(B_p \mathbf{q}, \mathbf{q})$ — лагранжианы систем один и два ($p = 1, 2$).

О.2.1. Говорят, что система I более жесткая, чем система II, если $A_1 = A_2 = A$ и $(B_1 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq (B_2 \mathbf{q}, \mathbf{q})$ для любого $\mathbf{q} \in R^n$.

Т (Релей). Если система I более жесткая, чем система II, то $\omega_{k1} \geq \omega_{k2}$, $k = 1, \dots, n$, где частоты собственных колебаний систем занумерованы в порядке их возрастания, т.е. $0 \leq \omega_{1p} \leq \omega_{2p} \leq \dots \leq \omega_{np}$, $p = 1, 2$.

▲ Рассмотрим механическую систему с лагранжианом

$$L_2 = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(B(s)\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad B(s) = B_2 + s(B_1 - B_2), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Она обладает набором собственных частот и форм $\{\omega_k(s), \mathbf{u}_k(s)\}_{k=1}^n$, для которых справедливы равенства (см. § 7.1)

$$(A\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) = 1, \quad \omega_k^2(s) = (B(s)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)), \quad (2.1)$$

$$\omega_k^2(s)A\mathbf{u}_k(s) = B(s)\mathbf{u}_k(s).$$

Дифференцируя первые два равенства по s , получим

$$\frac{d\omega_k^2(s)}{ds} = ((B_1 - B_2)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) + 2\left(B(s)\mathbf{u}_k(s), \frac{d\mathbf{u}_k(s)}{ds}\right), \quad (2.2)$$

$$2\left(A\mathbf{u}_k(s), \frac{d\mathbf{u}_k(s)}{ds}\right) = 0.$$

Заменяя в первом соотношении (2.2) $B(s)\mathbf{u}_k(s)$ на $\omega_k^2(s)A\mathbf{u}_k(s)$ и учитывая второе соотношение (2.2), будем иметь

$$\frac{d\omega_k^2(s)}{ds} = ((B_1 - B_2)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) \geq 0.$$

Отсюда $\omega_k(1) \geq \omega_k(0)$ или $\omega_{k1} \geq \omega_{k2}$. ▼

О.2.2. Говорят, что система I более инерционна, чем система II, если $B_1 = B_2 = B$ и $(A_1\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq (A_2\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ для любого $\mathbf{q} \in R^n$.

T (Релей). Если система I более инерционна, чем система II, то $\omega_{k1} \leq \omega_{k2}$, $k = 1, \dots, n$, где частоты собственных колебаний систем занумерованы в порядке их возрастания, т.е. $0 < \omega_{1p} \leq \omega_{2p} \leq \dots \leq \omega_{np}$, $p = 1, 2$.

▲ Рассмотрим механическую систему с лагранжианом

$$L_2 = \frac{1}{2}(A(s)\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad A(s) = A_2 + s(A_1 - A_2), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Собственные частоты и формы колебаний этой системы обладают свойствами

$$(A(s)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) = 1, \quad \omega_k^2(s) = (B\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)), \quad (2.3)$$

$$\omega_k^2(s)A(s)\mathbf{u}_k(s) = B\mathbf{u}_k(s).$$

Далее

$$\frac{d\omega_k^2(s)}{ds} = 2\left(B\mathbf{u}_k(s), \frac{d\mathbf{u}_k(s)}{ds}\right), \quad (2.4)$$

$$((A_1 - A_2)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) + 2\left(A(s)\mathbf{u}_k(s), \frac{d\mathbf{u}_k(s)}{ds}\right) = 0.$$

Используя третье соотношение (2.3), получим из второго равенства (2.4)

$$-((A_1 - A_2)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) = 2\omega_k^{-2}(s) \left(B\mathbf{u}_k(s), \frac{d\mathbf{u}_k(s)}{ds} \right).$$

Тогда

$$\frac{d\omega_k^2(s)}{ds} = -\omega_k^2(s)((A_1 - A_2)\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_k(s)) \leq 0.$$

Отсюда следует, что $\omega_k(1) \leq \omega_k(0)$ или $\omega_{k1} \leq \omega_{k2}$. ▽

§ 7.3. ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРИ НАЛОЖЕНИИ СВЯЗИ

Пусть малые колебания системы с n степенями свободы около устойчивого положения равновесия стеснены дополнительной связью вида $\mathbf{l}\mathbf{q} = 0$, где $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n) \neq 0$ — постоянный вектор, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$. При наложении одной дополнительной связи число степеней свободы уменьшается на единицу, и полученная таким образом система также совершает малые колебания около устойчивого положения равновесия. Другими словами, исходный квадратичный лагранжиан

$$L_2 = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) \quad (3.1)$$

переходит в квадратичный лагранжиан с положительно определенными матрицами инерции и жесткости. В качестве независимых лагранжевых координат можно взять, например, координаты (q_2, \dots, q_n) , если $l_1 \neq 0$, выразив из уравнения связи координату q_1 в

виде $q_1 = -l_1^{-1} \sum_{k=2}^n l_k q_k$ и подставив это выражение в лагранжиан

(3.1). Пусть собственные частоты исходной системы расположены в порядке возрастания $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$, а у системы со связью собственные частоты малых колебаний $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_{n-1}$.

Т. При наложении линейной связи на систему, совершающую малые колебания, собственные частоты полученной системы, расположенные в порядке возрастания, разделяют собственные частоты исходной системы, расположенные в том же порядке, т.е. $\omega_1 \leq \nu_1 \leq \omega_2 \leq \nu_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_{n-1} \leq \nu_{n-1} \leq \omega_n$.

▲ Уравнения движения системы со связью составим исходя из вариационного принципа Д'Аламбера—Лагранжа. Предварительно перейдем к нормальным координатам исходной системы, осуществив невырожденную замену переменных $\mathbf{q} = P\mathbf{Q}$. Лагранжиан и уравнение связи представятся в виде

$$L_2 = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}}, \dot{\mathbf{Q}}) - \frac{1}{2}(\Lambda \mathbf{Q}, \mathbf{Q}), \quad \mathbf{LQ} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}^T \mathbf{I}, \quad \Lambda = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}.$$

Принцип Д'Аламбера—Лагранжа с учетом связи примет вид

$$\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial L_2}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k + \kappa_k \delta Q_k \right] = 0,$$

где κ — неопределенный множитель Лагранжа. Используя независимость вариаций δQ_k , получим систему уравнений

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k + \kappa L_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^n L_k Q_k = 0,$$

решение которой найдем в виде $Q_k = u_k e^{i\nu t}$, $\kappa = \kappa_0 e^{i\nu t}$, где u_1, \dots, u_n , κ_0 — постоянные. Характеристический определитель системы (3.3) равен

$$\begin{vmatrix} -\nu^2 + \omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & L_1 \\ 0 & -\nu^2 + \omega_2^2 & 0 & \dots & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & -\nu^2 + \omega_3^2 & \dots & 0 & L_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\nu^2 + \omega_n^2 & L_n \\ L_1 & L_2 & L_3 & \dots & L_n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

и в развернутом виде представляется в форме

$$L_1^2 \prod_{k \neq 1}^n (\omega_k^2 - \nu^2) + \dots + L_n^2 \prod_{k \neq n}^n (\omega_k^2 - \nu^2) = 0. \quad (3.4)$$

Если все $L_j \neq 0$, то среди корней ν_1, \dots, ν_{n-1} нет корней, равных $\omega_1, \dots, \omega_n$ и уравнение (3.4) имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{L_k^2}{(\omega_k^2 - \nu^2)} \cdot \prod_{m=1}^n (\omega_m^2 - \nu^2) = 0.$$

График функции $f(\nu^2) = \sum_{k=1}^n L_k^2 (\omega_k^2 - \nu^2)^{-1}$ характеризуется вертикальными асимптотами в точках $\nu^2 = \omega_k^2$, и поскольку функция $f(\nu^2)$ в промежутках между двумя соседними асимптотами меняется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, то корни уравнения $f(\nu^2) = 0$ находятся

между соответствующими абсциссами асимптот, т.е. $\omega_k^2 < \nu_k^2 < \omega_{k+1}^2$.

Если $L_j = 0$ для каких-либо значений j , то из всех произведений в левой части уравнения (3.4) выносятся член $(\omega_j^2 - \nu^2)$ и корень $\nu_j = \omega_j$. Остальные корни находятся между оставшимися корням ω_k , что легко показать аналогично случаю, когда все $L_j \neq 0$. ▼

§ 7.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть на систему, совершающую малые колебания, действует внешняя гармоническая сила, работа которой на возможных перемещениях равна

$$\delta A = \mathbf{F} \delta \mathbf{q} = \mathbf{a} \delta \mathbf{q} \cos \omega t, \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n).$$

Здесь ω — частота гармонической обобщенной силы \mathbf{F} . При переходе к нормальным координатам получим

$$\delta A = \mathbf{F} P \delta \mathbf{Q} = P^T \mathbf{F} \delta \mathbf{Q}, \quad P^T \mathbf{F} = \mathbf{b} \cos \omega t, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n).$$

Уравнения движения в нормальных координатах примут вид

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = b_k \cos \omega t, \quad k = 1, \dots, n.$$

Частное решение этих уравнений, описывающее вынужденные колебания системы, представляется в форме

$$Q_k = \frac{b_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad \omega \neq \omega_k; \tag{4.1}$$

$$Q_k = \frac{b_k}{2\omega_k} t \sin \omega_k t, \quad \omega = \omega_k.$$

Второй случай в (4.1) соответствует резонансу, когда частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы. В этом случае по соответствующей нормальной координате наблюдаются возрастающие по амплитуде колебания, а по остальным координатам — гармонические колебания на частоте вынуждающей силы.

При отсутствии резонансов будут иметь место ограниченные гармонические колебания на частоте вынуждающей силы. Переход от нормальных координат к исходным осуществляется по формулам

$$\mathbf{q} = P \Omega \mathbf{b} \cos \omega t, \quad \Omega = \text{diag} \{(\omega_1^2 - \omega^2)^{-1}, \dots, (\omega_n^2 - \omega^2)^{-1}\}.$$

§ 7.5. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ НА МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

О.5.1. Линейной диссипативной силой будем называть обобщенную силу

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} R(\dot{\mathbf{q}}), \quad R = \frac{1}{2}(D\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}),$$

если оператор D симметрический, постоянный и положительно определенный.

Функция $R(\dot{\mathbf{q}})$ называется диссипативной функцией Релея.

Уравнения движения с учетом диссипативных сил примут вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} = -D\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.1)$$

где A и B — матрицы инерции и жесткости соответственно.

Умножив уравнения (5.1) скалярно на $\dot{\mathbf{q}}$, получим теорему об изменении энергии системы

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}(B\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \right] = -(D\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0. \quad (5.2)$$

Когда диссипативные силы отсутствуют ($D = 0$), полная механическая энергия системы сохраняется ($A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} = 2h$), а при наличии диссипации она убывает, если $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$.

Решение уравнения (5.1) будем искать в виде $\mathbf{q} = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$. Имеем

$$(A\lambda^2 + D\lambda + B)\mathbf{u} = 0. \quad (5.3)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (5.3) имеет ненулевое решение, если λ является корнем характеристического уравнения

$$\det \|A\lambda^2 + D\lambda + B\| = 0. \quad (5.4)$$

Л. Все корни характеристического уравнения (5.4) имеют отрицательные действительные части.

▲ Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, — корень уравнения (5.4) и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{w}_1$ — отвечающий ему собственный вектор. Тогда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ и $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{w}_1$ также будут собственным значением и собственным вектором задачи (5.3), поскольку матрицы A , D , B действительны, а именно

$$(A\lambda_k^2 + D\lambda_k + B)\mathbf{u}_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$(A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\lambda^2_1 + (D\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\lambda_1 + (B\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0,$$

$$(A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)\lambda^2_2 + (D\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)\lambda_2 + (B\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) = 0.$$

Так как матрицы A , D , B симметрические, то $(A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$, $(D\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (D\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$, $(B\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (B\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$ и λ_1, λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$(A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\lambda^2 + (D\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\lambda + (B\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0.$$

По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha = -\frac{(D\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{(A\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} = -\frac{(D\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + (D\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}{(A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + (A\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)} < 0,$$

так как операторы A и D положительно определены. Следовательно, действительные части комплексно-сопряженных корней отрицательны, и соответствующее им решение имеет вид

$$\mathbf{q} = (C_1 + iC_2)\mathbf{u}_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + (C_1 - iC_2)\mathbf{u}_2 e^{(\alpha-i\beta)t},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если λ_3 — действительный корень характеристического уравнения (5.4) и \mathbf{u}_3 — соответствующая ему собственная форма, то λ_3 является корнем квадратного уравнения

$$(A\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)\lambda^2 + (D\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)\lambda + (B\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) = 0. \quad (5.5)$$

Обозначим второй действительный корень квадратного уравнения (5.5) через λ^* . По теореме Виета получим

$$\lambda_3 + \lambda^* = -\frac{(D\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)}{(A\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)} < 0, \quad \lambda_3 \lambda^* = \frac{(B\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)}{(A\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)} > 0.$$

Корни λ_3, λ^* имеют одинаковый знак ($(B\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) > 0$) и отрицательны. Соответствующее корню λ_3 решение есть $\mathbf{q} = C_3 \mathbf{u}_3 \exp(\lambda_3 t)$, где C_3 — произвольная постоянная. ▽

Положение равновесия асимптотически устойчиво, поскольку общее решение уравнения (5.1) представляется в виде суммы экспонент, показатели которых имеют отрицательные монотонно убывающие действительные части и $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = 0$.

§ 8.1. УДАРНЫЙ ИМПУЛЬС. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УДАРА

При изучении движений механических систем в ряде случаев приходится иметь дело с ситуациями, когда скорости отдельных точек системы претерпевают значительные изменения за очень короткие промежутки времени. Подобное поведение механических систем обнаруживается при соударении тел (бильiardные шары, взаимодействие пули или снаряда с преградой и т.д.). Все эти явления моделируются в механике ударными взаимодействиями и изучаются в теории удара.

О.1. Говорят, что система материальных точек испытывает удар, если в какой-то момент времени скорость хотя бы одной ее точки изменяется на конечную величину.

Для понимания этого явления рассмотрим задачу об ударе по материальной точке. Пусть точка массы m движется по прямой под действием сил, зависящих от времени. Если через $x(t)$ обозначить ее координату, то уравнение движения этой точки имеет вид

$$m\ddot{x} = F(t) + F_n(t), \quad F_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in R^1 / [0, n^{-1}], \\ nP, & t \in [0, n^{-1}]. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $F(t)$ — ограниченная функция времени, а P — константа. Скорость материальной точки и ее закон движения найдем интегрированием по времени правой и левой частей уравнения (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t [F(\xi) + F_n(\xi)] d\xi, \\ x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^\xi [F(\eta) + F_n(\eta)] d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим момент времени $t > 0$ и перейдем в соотношениях (1.2) к пределу при $n \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(\xi) d\xi + \frac{P}{m},$$

$$x(t) = x(0) + \left(\dot{x}(0) + \frac{P}{m} \right) t + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^\xi F(\eta) d\eta d\xi.$$

Обозначим $\dot{x}(0)$ через $v(0)$, $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{x}(t) = v(+0)$ и, переходя к пределу в (1.3) при $t \rightarrow 0$, найдем

$$m \Delta v = P, \quad \Delta v = v(+0) - v(0), \quad x(+0) = x(0).$$

Таким образом, скорость точки в момент времени $t = 0$ изменится на конечную величину $m^{-1}P$, а ее положение остается прежним. При переходе к пределу $n \rightarrow \infty$ сила F_n стремится к бесконечности на интервале времени, стремящемся к нулю. В результате оказывается, что сила как мера взаимодействия материальных точек представляется в виде обобщенной функции (распределения или линейного функционала на пространстве непрерывных функций). Воспользовавшись определением обобщенной функции Дирака

$$\delta(t - t_0): C(I) \ni f(t) \rightarrow f(t_0) \in R^1, \quad t_0 \in I \subset R^1,$$

получим $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = P\delta(t)$. Здесь $C(I)$ — множество непрерывных функций на интервале I .

О.2. Сила $P\delta(t)$ называется ударным импульсом интенсивности P , приложенным к материальной точке в момент времени $t =$

Расширяя класс функций, описывающих силовое взаимодействие материальных объектов (рассматривается класс линейных функционалов на пространстве непрерывных функций), можно записать второй закон Ньютона динамики точки в виде $m\dot{x} = F + P\delta(t)$. Отсюда следует, что ускорение точки понимается как обобщенная функция или линейный функционал, заданный на пространстве непрерывных функций.

Сделаем ряд обобщений.

1. Если к свободной материальной точке в момент времени $t = t_0$ приложен ударный импульс $P\delta(t - t_0)$ интенсивности $P = (P_1, P_2, P_3) \in E^3$, то основное уравнение удара для материальной точки представляется в виде

$$m\Delta v = P, \quad \Delta v = v(t_0 + 0) - v(t_0 - 0).$$

2. Если система свободных материальных точек в момент времени $t = 0$ испытывает ударные воздействия, то уравнения ее движения принимают форму

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{P}_i^{(e)} \delta(t) + \sum_{j \neq i}^N \left(\mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \mathbf{P}_{ij}^{(i)} \delta(t) \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\mathbf{P}_i^{(e)} \delta(t)$, $\mathbf{P}_{ij}^{(i)} \delta(t)$ — внешние и внутренние ударные импульсы, приложенные к точке с номером i . Интегрируя уравнения движения по времени от $-\epsilon$ до $+\epsilon$, предполагая, что силы $\mathbf{F}_i^{(e)}$, $\mathbf{F}_{ij}^{(i)}$ ограничены, и переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получим основные уравнения удара для системы свободных материальных точек

$$m_i \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{P}_{ij}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.4)$$

Распространяя третий закон динамики (см. § 3.1) на величины внутренних ударных импульсов ($\mathbf{P}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{P}_{ji}^{(j)}$) и суммируя уравнения (1.4), получим теорему об изменении количества движения системы при ударе:

$$M \Delta \mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i^{(e)}, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \Delta \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C(t+0) - \mathbf{v}_C(t-0),$$

где \mathbf{v}_C — скорость центра масс системы.

Очевидно, что и момент количеств движения системы при ударе изменяется согласно уравнению

$$\Delta \mathbf{G} = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i^{(e)} \right), \quad \Delta \mathbf{G} = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{r}_i \times m_i \Delta \mathbf{v}_i \right).$$

При ударе материальная точка скачком меняет скорость, а ее положение в пространстве не меняется. Следовательно, в процессе удара изменяется кинетическая энергия точки, хотя она не испытывает действительных перемещений. Это обстоятельство связано с тем, что сила, действующая на точку в момент удара, становится бесконечно большой, а работа, совершаемая ею на бесконечно малом перемещении, конечна. Для определения этой работы воспользуемся уравнениями (1.4) и найдем

$$\begin{aligned} \Delta T = \Delta A, \quad \Delta T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\mathbf{v}_i^2(+0) - \mathbf{v}_i^2(-0) \right], \\ \Delta A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \left[\mathbf{v}_i(+0) + \mathbf{v}_i(-0) \right], \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{P}_{ij}^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ΔT — изменение кинетической энергии системы свободных материальных точек при ударах, а ΔA — работа ударных импульсов. Равенство (1.5) составляет содержание теоремы Кельвина — изменения кинетической энергии системы свободных материальных точек при ударах.

§ 8.2. УДАР В СИСТЕМЕ С ИДЕАЛЬНЫМИ ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Пусть на систему N материальных точек наложены идеальные голономные связи и ее конфигурационное многообразие (см. § 4.7, 4.8)

$$M = \{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) : \mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in E^{3N}, f_j(\mathbf{x}, t) = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Если в момент времени $t = 0$ среди активных сил обнаруживаются ударные импульсы, то в системе возникают ударные реакции связей $\mathbf{R}_i \delta(t)$, $i = 1, \dots, N$, интенсивности которых подчиняются аксиоме идеальных связей

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N) \in T_x M.$$

В рассматриваемой модели предполагается, что связи сохраняются в процессе удара. Освобождаясь от связей и заменяя их воздействиями на материальные точки в момент удара ударными реакциями связей, представим основные уравнения удара (1.4) в виде

$$m_i \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где \mathbf{P}_i — интенсивность активного ударного импульса, приложенного к точке с номером i . Из (2.1) на основе аксиомы идеальных связей для ударных импульсов получим основное уравнение удара для голономных систем с идеальными связями

$$\sum_{i=1}^N (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{P}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x} \in T_x M. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) аналогично вариационному принципу Д'Аламбера—Лагранжа и может быть переписано в независимых координатах $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$. Поскольку отображения $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$, $i = 1, \dots, N$, непрерывно дифференцируемы и $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t+0) - \mathbf{r}_i(t-0) = 0$, то функции $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ непрерывны и $\Delta \mathbf{q} = 0$. Далее,

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \Delta \mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \Delta \dot{q}_k.$$

Заметим, что символ Δ означает скачок функции в момент удара при $t=0$. Так как возможные перемещения

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

то соотношения (2.2) представляются в виде

$$\sum_{k=1}^n \left[\sum_{i,s=1}^{N,n} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \Delta \dot{q}_s - \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in R^n. \quad (2.3)$$

Используем очевидные равенства

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k},$$

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i,s=1}^{N,n} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \Delta \dot{q}_s$$

и перепишем (2.3) в виде

$$\sum_{k=1}^n \left[\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - P_k \right] \delta q_k = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in R^n,$$

$$P_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Величины P_k называются обобщенными ударными импульсами. Поскольку вариации δq_k независимы, то из последнего соотношения получим уравнения удара в обобщенных координатах

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = P_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

из которых определяются скачки обобщенных скоростей в момент удара. Уравнения (2.4) линейны относительно $\Delta \dot{q}_k$, $k = 1, \dots, n$, и определитель системы положителен.

§ 8.3. УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА О ПОВЕРХНОСТЬ

Ударные явления наилучшим образом моделируются при столкновении твердых тел. Существуют различные схемы столкновений в которых учитывается конечность процессов взаимодействия

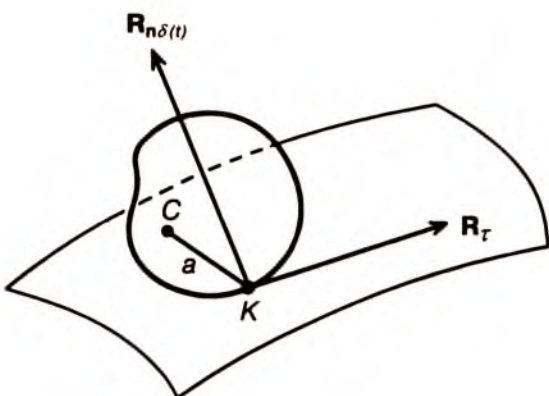


Рис. 57

в точке контакта K возникает ударная реакция $\mathbf{R} = Rn\delta(t) + \mathbf{R}_\tau$, где \mathbf{n} — нормаль к неподвижной поверхности, $Rn\delta(t)$ — ударная нормальная реакция связи, а \mathbf{R}_τ — ограниченная касательная реакция связи (гипотеза Ньютона) (рис. 57). При ударе абсолютно твердого тела в нем возникает поле ударных реакций связей, эквивалентное нулю, т.е. главный вектор и главный момент поля импульсов ударных связей равны нулю.

Запишем теоремы об изменении количества движения и момента количества движения тела относительно центра масс:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} + Rn\delta(t) + \mathbf{R}_\tau, \quad (3.1)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C + \mathbf{a} \times Rn\delta(t) + \mathbf{a} \times \mathbf{R}_\tau,$$

где m , J — масса тела и его тензор инерции относительно некоторой системы координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с телом, \mathbf{r}_C — радиус-вектор центра масс тела относительно инерциальной системы координат, $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость, \mathbf{F} , \mathbf{M}_C — главный вектор и главный момент относительно точки C поля внешних активных сил, $\mathbf{a} = \overline{CK}$. Заметим, что величины \mathbf{F} , \mathbf{M}_C , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{R}_τ конечны, проинтегрируем уравнения (3.1) по времени на интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и устремим ε к нулю. В результате получим уравнения удара тела о неподвижную поверхность в виде

$$m\Delta \mathbf{v}_C = R\mathbf{n}, \quad J\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} \times R\mathbf{n}, \quad (3.2)$$

процессы деформирования сталкивающихся тел. Однако простейшая идеализация столкновения базируется на двух гипотезах: контакт тел осуществляется в одной точке и происходит за бесконечно малое время. В этом случае в момент удара тела о неподвижную поверхность ε

где $\Delta \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C(t+0) - \mathbf{v}_C(t-0)$, $\Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t+0) - \boldsymbol{\omega}(t-0)$, а \mathbf{v}_C — скорость центра масс тела. Так как шесть уравнений (3.2) содержат семь неизвестных скалярных величин: R и компоненты векторов $\Delta \mathbf{v}_C$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$, то их определение из этих уравнений без дополнительных гипотез невозможно. Сформулируем одну из них — гипотезу абсолютно упругого удара: кинетическая энергия тела при ударе сохраняется

$$\frac{1}{2} m(\mathbf{v}_C + \Delta \mathbf{v}_C)^2 + \frac{1}{2} (J(\boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega}), (\boldsymbol{\omega} + \Delta \boldsymbol{\omega})) = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (J\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (3.3)$$

где \mathbf{v}_C , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс тела и его угловая скорость до момента удара соответственно. Выразив $\Delta \mathbf{v}_C$ и $\Delta \boldsymbol{\omega}$ из (3.2) и подставив эти значения в (3.3), найдем

$$R = - \frac{2(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})\mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))}. \quad (3.4)$$

В ходе преобразований отброшен посторонний корень квадратного уравнения $R = 0$, поскольку в этом случае удара нет. Заметим, что величина R должна быть положительной, а это происходит в том случае, когда абсолютная скорость точки K тела в момент удара (точнее ее предел по времени слева) в проекции на нормаль \mathbf{n} отрицательна $(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})\mathbf{n} < 0$. Далее из условий (3.2) получим

$$\Delta \mathbf{v}_C = - \frac{2(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})\mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))} m^{-1} \mathbf{n},$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = - \frac{2(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})\mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))} J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}). \quad (3.5)$$

П.1. Абсолютно упругий удар шара о поверхность. Предположим, что центр масс шара совпадает с его геометрическим центром. В этом случае векторы \mathbf{a} и \mathbf{n} всегда коллинеарны и $\mathbf{a} \times \mathbf{n} = 0$. Из формул (3.4), (3.5) найдем

$$R = -2m \mathbf{v}_C \mathbf{n}, \quad \Delta \mathbf{v}_C = -2(\mathbf{v}_C \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Полученные результаты справедливы при произвольном невырожденном тензоре инерции шара относительно его центра масс. Вектор скорости центра масс шара лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{v}_C , \mathbf{n} и составляет с касательной плоскостью к поверхности в точке контакта угол, равный соответствующему углу до удара.

Уравнения (3.2) могут быть дополнены другим условием, например, условием абсолютно неупругого удара

$$(\mathbf{v}_k + \Delta \mathbf{v}_k) \mathbf{n} = 0 \Rightarrow (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} + \Delta \mathbf{v}_C + \Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \mathbf{n} = 0, \quad (3.6)$$

где \mathbf{v}_k , $\Delta \mathbf{v}_k$ — скорость точки контакта до удара и ее изменение в процессе удара. Другими словами, скорость точки контакта после удара оказывается лежащей в касательной плоскости к неподвижной поверхности в точке контакта. Подставляя $\Delta \mathbf{v}_C$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$ из (3.2) (3.6), получим

$$R = - \frac{(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))} \quad (3.7)$$

и далее из (3.2)

$$\Delta \mathbf{v}_C = - \frac{(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))} m^{-1} \mathbf{n}, \quad (3.8)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = - \frac{(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))} J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}).$$

Из сравнения формул (3.7), (3.8) и (3.4), (3.5) видно, что при абсолютно неупругом ударе модули соответствующих величин в два раза меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

П.2. Однородный кубик массы m движется поступательно вдоль оси Sx_1 со скоростью \mathbf{v}_C и натывается на уступ в точке K (рис. 58). Свяжем с кубиком систему координат $Sx_1x_2x_3$. Тогда $\mathbf{v}_C = v \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{a} = (b, -b, 0)$, где \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, — орты системы координат $Sx_1x_2x_3$, $2b$ — ребро кубика. Тензор инерции кубика относительно системы координат $Sx_1x_2x_3$ равен $J = 2/3mb^2 \text{diag}\{1, 1, 1\}$.

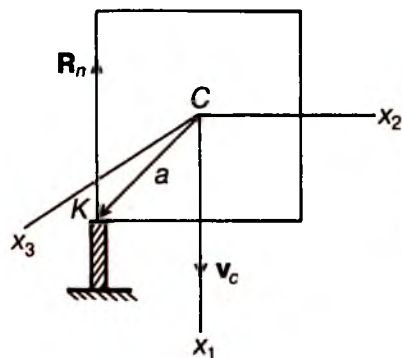


Рис. 58

Если в момент соприкосновения с преградой имеет место абсолютно упругий удар, то согласно формулам (3.4), (3.5) найдем

$$R = \frac{2v}{m^{-1} + (2/3mb^2)^{-1}b^2} = \frac{4}{5}mv,$$

$$\Delta \mathbf{v}_C = -\frac{4}{5}v\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_C(t+0) = \frac{1}{5}v\mathbf{e}_1,$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t+0) = -\frac{6v}{5b}\mathbf{e}_3.$$

В случае абсолютно неупругого удара согласно формулам (3.7), (3.8)

$$R = \frac{2}{5}mv, \quad \Delta v_C = -\frac{2}{5}v\mathbf{e}_1,$$

$$v_C(t+0) = \frac{3}{5}v\mathbf{e}_1, \quad \Delta\omega = \omega(t+0) = -\frac{3v}{5b}\mathbf{e}_3.$$

Обобщая вышесказанное, назовем неупругим ударом тела о поверхность с коэффициентом восстановления k такой удар, когда

$$R = -\frac{(1+k)(v_C + \omega \times \mathbf{a})\mathbf{n}}{m^{-1} + (J^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}), (\mathbf{a} \times \mathbf{n}))}. \quad (3.9)$$

Соответственно

$$\Delta v_C = m^{-1}R\mathbf{n}, \quad \Delta\omega = RJ^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}). \quad (3.10)$$

При $k = 1$ получим абсолютно упругий удар, а при $k = 0$ — абсолютно неупругий.

§ 8.4. УДАР ДВУХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА КАРНО

Рассмотрим неупругий удар двух тел (рис. 59). Пусть контакт двух тел в момент удара происходит в точке K и \mathbf{n} — нормаль к общей касательной плоскости в точке контакта. Обозначим через $m_i, J_i, i = 1, 2$, массы тел и тензоры их инерции относительно центров масс $C_i, i = 1, 2$. Применяя теоремы об изменении количества движения и момента количества движения для каждого тела, получим

$$m_1\Delta v_1 = R\mathbf{n}, \quad m_2\Delta v_2 = -R\mathbf{n},$$

$$J_1\Delta\omega_1 = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n})R, \quad (4.1)$$

$$J_2\Delta\omega_2 = -(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{n})R,$$

где $\mathbf{a}_i = \overline{C_i K}, i = 1, 2$. Уравнения (4.1) дополняются условием на изменение при ударе нормальных компонент скоростей точек тел, совпадающих с точкой контакта,

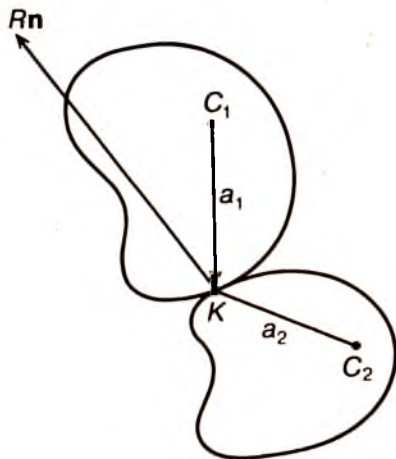


Рис. 59

$$[\mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{a}_1 - \mathbf{v}_2 - \Delta\mathbf{v}_2 - (\boldsymbol{\omega}_2 + \Delta\boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{a}_2] \mathbf{n} =$$

$$= -k(\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 - \mathbf{v}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{n},$$

где k — коэффициент восстановления, $0 \leq k \leq 1$. Подставляя $\Delta\mathbf{v}_i$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_i$, $i = 1, 2$, из уравнений (4.1) в (4.2), найдем величину ударного импульса

$$R = - \frac{(1+k)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{n}}{m_1^{-1} + m_2^{-1} + (J_1^{-1}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}), (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n})) + (J_2^{-1}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}), (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}))} \quad (4.3)$$

и далее из (4.1) приращения скоростей центров масс и угловых скоростей тел

$$\Delta\mathbf{v}_1 = m_1^{-1} R \mathbf{n}, \quad \Delta\mathbf{v}_2 = -m_2^{-1} R \mathbf{n},$$

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_1 = R J_1^{-1}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}), \quad \Delta\boldsymbol{\omega}_2 = -R J_2^{-1}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}), \quad (4.4)$$

где R заменяется согласно (4.3). При $k = 1$ имеет место абсолютно упругий удар, а при $k = 0$ — абсолютно неупругий удар.

II. Если тела представляют собой шары, центры масс которых совпадают с их геометрическими центрами, то всегда $\mathbf{a}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{n} = 0$ (векторы \mathbf{a}_i коллинеарны вектору \mathbf{n}). Тогда согласно (4.3), (4.4)

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_1 = \Delta\boldsymbol{\omega}_2 = 0,$$

$$\Delta\mathbf{v}_1 = - \frac{(1+k)((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \mathbf{n})}{(m_1^{-1} + m_2^{-1})m_1} \mathbf{n},$$

$$\Delta\mathbf{v}_2 = \frac{(1+k)((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \mathbf{n})}{(m_1^{-1} + m_2^{-1})m_2} \mathbf{n}.$$

Заметим, что если одно из тел достаточно массивно и неподвижно, например $m_2 = \|J_2\| = \infty$, $\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 = 0$, то формулы (4.3), (4.4) совпадают с формулами (3.9), (3.10).

При неупругом ударе двух тел с коэффициентом восстановления k кинетическая энергия системы убывает за счет перехода ее части в тепло. Вычислим изменение кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ m_i [(\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i)^2 - \mathbf{v}_i^2] + (J_i(\boldsymbol{\omega}_i + \Delta\boldsymbol{\omega}_i), (\boldsymbol{\omega}_i + \Delta\boldsymbol{\omega}_i)) - \right.$$

$$\left. - (J_i \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \right\} = T^* + \sum_{i=1}^2 (m_i \Delta\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i + (J_i \Delta\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_i)), \quad (4.5)$$

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (m_i \Delta\mathbf{v}_i^2 + (J_i \Delta\boldsymbol{\omega}_i, \Delta\boldsymbol{\omega}_i)).$$

Величина T^* называется кинетической энергией потерянных скоростей. Согласно соотношениям (4.1), (4.3)

$$T^* = \frac{(1+k)^2 [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{n}]^2}{2 \sum_{i=1}^2 [m_i^{-1} + (J_i^{-1}(\mathbf{a}_i \times \mathbf{n}), (\mathbf{a}_i \times \mathbf{n}))]}$$

$$\sum_{i=1}^2 (m_i \Delta \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i + (J_i \Delta \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_i)) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{n} R = \quad (4.6)$$

$$= - \frac{(1+k) [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{n}]^2}{\sum_{i=1}^2 [m_i^{-1} + (J_i^{-1}(\mathbf{a}_i \times \mathbf{n}), (\mathbf{a}_i \times \mathbf{n}))]} = - \frac{2}{1+k} T^*.$$

Тогда из (4.5) и (4.6) следует

$$\Delta T = T^* - \frac{2}{1+k} T^* = - \frac{1-k}{1+k} T^* \leq 0. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) составляет содержание теоремы Карно: при неупругом ударе двух тел потеря кинетической энергии равна кинетической энергии потерянных скоростей, умноженной на положительный коэффициент $(1-k)/(1+k)$. При $k=1$ (абсолютно упругий удар) кинетическая энергия сохраняется, а при $k=0$ (абсолютно неупругий удар) потеря кинетической энергии наибольшая и равна кинетической энергии потерянных скоростей.

Теорема Карно, доказанная в случае неупругого удара двух тел, очевидным образом обобщается на случай удара тела и материальной точки или двух материальных точек. Для материальной точки достаточно положить тензор инерции равным нулю и отбросить уравнения, определяющие изменение угловой скорости.

§ 8.5. УДАР ПРИ НАЛОЖЕНИИ ИДЕАЛЬНЫХ ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in R^n$ — обобщенные координаты механической системы с идеальными стационарными голономными связями и M — ее конфигурационное многообразие. Допустим, что в некоторый момент времени t_0 конфигурация системы такова, что

$$f_1(\mathbf{q}) = 0, \dots, f_m(\mathbf{q}) = 0, \quad m < n. \quad (5.1)$$

Функции $f_s(\mathbf{q})$, $s = 1, \dots, m$, предполагаются дифференцируемыми, а векторы $\{\nabla_{\mathbf{q}} f_s\}_{s=1}^m$ — линейно независимыми. Когда условия (5.1) выполняются во все последующие моменты времени, будем

говорить, что на систему накладываются дополнительные идеальные стационарные голономные связи, если возникающие при этом реакции удовлетворяют аксиоме идеальных связей

$$\sum_{i=1}^n R_i \delta q_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in T_q M_1 = \left\{ \delta \mathbf{q}: \delta \mathbf{q} \in R^n, \nabla_q f_s \delta \mathbf{q} = 0, s = 1, \dots, m \right\}. \quad (5.2)$$

Здесь R_i — обобщенные реакции связей, $\delta \mathbf{q} = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ — возможные перемещения, принадлежащие касательному пространству к новому конфигурационному многообразию системы

$$M_1 = \{ \mathbf{q}: \mathbf{q} \in R^n, f_s(\mathbf{q}) = 0, s = 1, \dots, m \}.$$

Согласно (5.2) вектор $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ принадлежит ортогональному дополнению к $T_q M_1$ и в момент удара представляется в виде

$$\mathbf{R} = \sum_{s=1}^m \lambda_s \delta(t - t_0) \nabla_q f_s, \quad \lambda_s \in R^1, \quad (5.3)$$

где λ_s — неопределенные множители Лагранжа.

Освобождаясь от связей (5.1), заменим их реакциями (5.3) и представим уравнения удара согласно (2.4) в виде

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{s=1}^m \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Вектор обобщенных скоростей системы после удара $\dot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}}$ должен принадлежать касательному пространству к новому конфигурационному многообразию $T_q M_1$. Это условие записывается в виде

$$\nabla_q f_s (\dot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (5.5)$$

Уравнения (5.4), (5.5) образуют полную систему уравнений относительно $n + m$ неизвестных $\Delta \dot{q}_1, \dots, \Delta \dot{q}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Получим решение системы (5.4), (5.5) в явном виде, воспользовавшись матричной формой записи. Пусть $\dot{\mathbf{q}}, \Delta \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}$ — матрицы-столбцы. Поскольку $T = \frac{1}{2} (A \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$, где $A = \| a_{ij} \|$ — положительно определенная матрица $n \times n$, то уравнения (5.4), (5.5) записываются в виде

$$A \Delta \dot{\mathbf{q}} = \nabla_q f \boldsymbol{\lambda}, \quad \nabla_q f = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{array} \right\|, \quad (\nabla_q f)' \Delta \dot{\mathbf{q}} = -(\nabla_q f)' \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.6)$$

где штрих означает транспонирование матрицы. Тогда

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = A^{-1} \nabla_{qf} f \lambda, \quad (\nabla_{qf})' A^{-1} \nabla_{qf} f \lambda = -(\nabla_{qf})' \dot{\mathbf{q}},$$

$$\lambda = - \left[(\nabla_{qf})' A^{-1} \nabla_{qf} f \right]^{-1} (\nabla_{qf})' \dot{\mathbf{q}},$$

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = - A^{-1} \nabla_{qf} f \left[(\nabla_{qf})' A^{-1} \nabla_{qf} f \right]^{-1} (\nabla_{qf})' \dot{\mathbf{q}}.$$

II. В твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Ox_3 , попадает пуля массы m и застревает в нем. Конфигурационное пространство системы до момента встречи пули с телом $M = S^1 \times E^3$, а после того, как пуля застряла в теле, $M_1 = S^1$. Координаты точки тела, в которую попадает пуля, рассматриваемая как материальная точка, представим в неподвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ в виде $(l \cos \varphi, l \sin \varphi, h)$, где φ — угол поворота тела вокруг оси Ox_3 . Если x_1, x_2, x_3 — координаты пули, то в момент удара (наложение связей) $f_1 = x_1 - l \cos \varphi = 0$, $f_2 = x_2 - l \sin \varphi = 0$, $f_3 = x_3 - h = 0$. Поскольку $A = \text{diag}\{J_3, m, m, m\}$, где J_3 — момент инерции тела относительно оси Ox_3 , то уравнения (5.6) примут вид

$$J_3 \Delta \dot{\varphi} = \lambda_1 l \sin \varphi - \lambda_2 l \cos \varphi,$$

$$m \Delta \dot{x}_1 = \lambda_1, \quad l \sin \varphi \Delta \dot{\varphi} + \Delta \dot{x}_1 = -l \sin \varphi \dot{\varphi} - \dot{x}_1,$$

$$m \Delta \dot{x}_2 = \lambda_2, \quad -l \cos \varphi \Delta \dot{\varphi} + \Delta \dot{x}_2 = l \cos \varphi \dot{\varphi} - \dot{x}_2,$$

$$m \Delta \dot{x}_3 = \lambda_3, \quad \Delta \dot{x}_3 = -\dot{x}_3.$$

Не нарушая общности, положим $\varphi = 0$ в момент удара. Тогда

$$\lambda_1 = -m \dot{x}_1, \quad \lambda_2 = \frac{m J_3}{m l^2 + J_3} (l \dot{\varphi} - \dot{x}_2), \quad \lambda_3 = -m \dot{x}_3,$$

$$\Delta \dot{\varphi} = - \frac{m l}{m l^2 + J_3} (l \dot{\varphi} - \dot{x}_2), \quad \Delta \dot{x}_2 = \frac{J_3}{m l^2 + J_3} (l \dot{\varphi} - \dot{x}_2),$$

$$\Delta \dot{x}_1 = -\dot{x}_1, \quad \Delta \dot{x}_3 = -\dot{x}_3.$$

В рассматриваемом случае имеет место теорема Карно: потеря кинетической энергии при наложении на голономную систему со стационарными связями дополнительных стационарных связей равна кинетической энергии потерянных скоростей.

▲ Обозначим через $T^* = \frac{1}{2} (A \Delta \dot{\mathbf{q}}, \Delta \dot{\mathbf{q}})$ кинетическую энергию потерянных скоростей и получим

$$\Delta T = \frac{1}{2} (A(\dot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}}), (\dot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}})) - \frac{1}{2} (A \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = T^* + (A \Delta \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Из уравнений (5.6) следует

$$\begin{aligned} (A\Delta\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= (\nabla_q f \lambda, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\lambda, (\nabla_q f)' \dot{\mathbf{q}} \right) = - \left(\lambda, (\nabla_q f)' \Delta\dot{\mathbf{q}} \right) = \\ &= - (\nabla_q f \lambda, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = - (A\Delta\dot{\mathbf{q}}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) = - 2T^*. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta T = -T^*$. ▼

§ 8.6. УДАР ПО ТЕЛУ, ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ВОКРУГ ОСИ. ЦЕНТР УДАРА

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Ox_3 и $Ox_1x_2x_3$ — система координат, связанная с телом (см. § 5.9, рис. 42). Если в момент времени $t = 0$ тело испытывает удар $\mathbf{P}\delta(t)$, приложенный в точке D с координатами $(d_1, d_2, d_3) = \mathbf{d}$, то в правых частях уравнений (5.9.2) следует добавить момент ударного импульса $\mathbf{d} \times \mathbf{P}\delta(t)$ и ударный импульс $\mathbf{P}\delta(t)$ соответственно. Кроме того, реакции связей в точках O и P , вообще говоря, будут иметь импульсный характер. Проинтегрируем уравнения (5.9.2) по времени от $-\epsilon$ до ϵ , перейдем к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ и получим уравнения удара

$$\begin{aligned} J\Delta\omega &= \mathbf{d} \times \mathbf{P} + \overline{OP} \times \mathbf{R}_P, \\ M(\Delta\omega \times \rho_C) &= \mathbf{P} + \mathbf{R}_P + \mathbf{R}_O, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\mathbf{R}_P, \mathbf{R}_O$ — ударные реакции связей. Поскольку $\mathbf{R}_P = (X_{1P}, X_{2P}, 0)$, $\mathbf{R}_O = (X_{1O}, X_{2O}, X_{3O})$, $\Delta\omega = \Delta\omega \mathbf{e}_3$ (\mathbf{e}_3 — орт оси Ox_3), то из шести уравнений (6.1) определяются шесть неизвестных величин.

Найдем условия, при которых во время удара не возникают ударные реакции связей, т.е. $\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O = 0$. Из второго уравнения (6.1) при $\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_O = 0$ следует, что импульс \mathbf{P} ортогонален плоскости, содержащей векторы $\Delta\omega, \rho_C$. Примем эту плоскость в качестве плоскости Ox_1x_3 . Тогда $\rho_C = (x_1, 0, x_3)$ и $\mathbf{P} = M\Delta\omega x_1 \mathbf{e}_2$. Из первого уравнения (6.1) при $\mathbf{R}_P = 0$ следует, что вектор \mathbf{d} может быть задан с точностью до произвольного слагаемого вида $\lambda \mathbf{e}_2$. Назовем центром удара точку, удовлетворяющую уравнению $J\Delta\omega = \mathbf{d} \times \mathbf{P}$, когда $\mathbf{d} = (d_1, 0, d_3)$. Последнее уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$J_{13}\Delta\omega = M\Delta\omega x_1 d_3, \quad J_{23}\Delta\omega = 0, \quad J_{33}\Delta\omega = M\Delta\omega x_1 d_1. \tag{6.2}$$

Условия (6.2) будут выполнены при произвольном $\Delta\omega \neq 0$, когда $J_{23} = 0$, $d_1 = J_{33}(Mx_1)^{-1}$, $d_3 = J_{13}(Mx_1)^{-1}$.

В заключение сформулируем условия, при которых не возникают ударные реакции связей, когда вращающееся вокруг оси Ox_3 тело подвергается удару внешних сил: если центр масс тела расположен в плоскости Ox_1x_3 , то центробежный момент инерции J_{23} должен быть равен нулю; произвольный по величине удар должен быть направлен по оси Ox_2 , а его линия действия должна проходить через центр удара

$$D\left(\frac{J_{33}}{Mx_1}, 0, \frac{J_{13}}{Mx_1}\right),$$

где x_1 — координата центра масс. Описанная ситуация возможна, если центр масс тела не лежит на оси вращения ($x_1 \neq 0$).

ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 9.1. МОДЕЛЬ УПРУГОГО ТЕЛА.

ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Рассмотрим механическую систему $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$, где Ω — односвязная область в E^3 , $\Sigma(\Omega)$ — кольцо измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω , μ — мера на $\Sigma(\Omega)$, определяемая неотрицательной интегрируемой по Лебегу функцией $\rho(\mathbf{r}): \Omega \rightarrow R^+$ по формуле $d\mu = \rho(\mathbf{r})dx_1dx_2dx_3$. Функция $\rho(\mathbf{r})$ называется плотностью тела и

$$\mu(A) = \int_A \rho(\mathbf{r})dx, \quad A \in \Sigma(\Omega), \quad dx = dx_1dx_2dx_3,$$

— масса вещества, приписываемая множеству A .

Движение механической системы

$$g': \Omega \rightarrow E^3, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \in E^3, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in R^1 \quad (1.1)$$

определяется дифференцируемой по \mathbf{r} функцией $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$. Дифференциал отображения (1.1) равен

$$d\mathbf{R} = Jd\mathbf{r}, \quad J = \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\|, \quad (1.2)$$

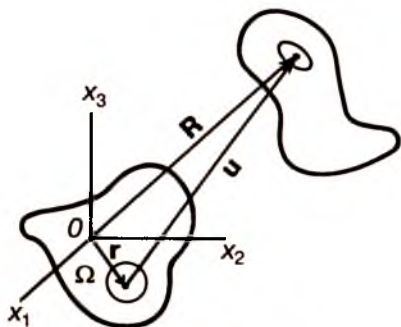


Рис. 60

где $X_i, x_i, i = 1, 2, 3$, — соответственно координаты векторов \mathbf{R} и \mathbf{r} в инерциальной системе координат (рис. 60). Дифференциал (1.2) определяет отображение окрестности каждой точки тела при движении с точностью до малых первого порядка относительно величин dx_1, dx_2, dx_3 .

О.1.1. Оператор $C = J^T J$ называется тензором деформаций Коши—Грина.

О.1.2. Твердое тело называется деформируемым, если в процессе движения изменяются взаимные расстояния между его точками.

В предыдущих главах изучались абсолютно твердые тела, которые не деформировались ни при каких силовых воздействиях и движениях.

Изучим отображение (1.2) или, другими словами, деформацию элементарной частицы тела. Имеем

$$(d\mathbf{R}', d\mathbf{R}'') = (Jdr', Jdr'') = (Cdr', dr''),$$

где dr', dr'' — векторы двух материальных точек элементарной частицы, под которой понимается достаточно малая окрестность некоторой точки тела. Оператор C — симметрический и положительно определенный, так как $C^T = C$, $(Cdr', dr'') = (d\mathbf{R}', d\mathbf{R}'') > 0$ и согласно дополнительному предположению $(Cdr', dr'') \geq k(dr', dr'')$, $k > 0$ для всех частиц тела. Обращение k в нуль означает, что при деформациях объем элементарной частицы обращается в нуль, что противоречит экспериментальным данным. Квадратичная форма (Cdr', dr'') приводится ортогональным преобразованием $dr' = U d\xi$, $U \in SO(3)$ к каноническому виду

$$\begin{aligned} (CUd\xi, Ud\xi) &= (U^{-1}CUd\xi, d\xi) = (\Lambda^2 d\xi, d\xi) = \\ &= \lambda_1^2 d\xi_1^2 + \lambda_2^2 d\xi_2^2 + \lambda_3^2 d\xi_3^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Координатные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 инерциальной системы координат преобразуются оператором U^{-1} в оси $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$ — главные оси деформации элементарной частицы. Величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются главными удлинениями. В главных осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ деформация частицы есть растяжение—сжатие частицы в $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ раз по координатным осям.

Из соотношения (1.3) следует приводимость к каноническому виду билинейной формы, а именно

$$(JUd\xi', JUd\xi'') = (\Lambda d\xi', \Lambda d\xi'').$$

Обозначим $\Lambda d\xi = d\eta$ и получим соотношение

$$(JU\Lambda^{-1}d\eta', JU\Lambda^{-1}d\eta'') = (d\eta', d\eta'') \forall d\eta', d\eta'' \in E^3,$$

из которого следует сохранение скалярного произведения. Тогда существует ортогональный оператор V и $V(JU\Lambda^{-1}) = I$, где I — единичный оператор. Отсюда получаем представление $J = V^{-1}\Lambda U^{-1}$. В результате движение элементарной частицы можно представить в виде композиции четырех движений: поступательного движения, определяемого движением ее центра по закону $\mathbf{R} = \mathbf{R}(r, t)$,

поворота вокруг центра как твердого тела (оператор U^{-1}), деформации, т.е. растяжения—сжатия по трем взаимно ортогональным осям (оператор Λ) и последующего поворота деформированной частицы вокруг центра как твердого тела (оператор V^{-1}).

О.1.3. Механическая система (сплошная среда) называется упругим телом, если потенциальная энергия деформаций каждой элементарной частицы есть функция главных удлинений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, т.е.

$$e = e(\mathbf{r}, O(\mathbf{r}), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (1.4)$$

Функция (1.4) называется удельной потенциальной энергией упругих деформаций и зависит, кроме главных удлинений, от выбранной частицы (вектор \mathbf{r}) и от ее исходной ориентации (оператор $O(\mathbf{r}) \in SO(3)$). Это означает, что свойства элементарной частицы могут изменяться от точки к точке упругого тела (свойство неоднородности) и могут различаться в зависимости от направления деформации (свойство неизотропности). Например, упругие свойства деревянного бруска зависят от места и ориентации волокон древесины. Изменение формы элементарной частицы (она из сферы превращается в трехосный эллипсоид) происходит под действием сил, и работа сил, вызывающих деформацию, равна потенциальной энергии упругих деформаций.

Если упругая среда однородна и изотропна, то удельная потенциальная энергия деформаций любой ее частицы зависит только от главных удлинений частицы, т.е. $e = e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

О.1.4. Тензор $E = 1/2(C - I)$ называется тензором конечных деформаций, а величины $\varepsilon_i = 1/2(\lambda_i^2 - 1)$, $i = 1, 2, 3$, — главными деформациями.

Если положить $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (вектор перемещений), то найдем

$$E = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{ij} + u_{ji} + \sum_{m=1}^3 u_{mi} u_{mj} \right), \quad u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1.5)$$

Главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ являются корнями характеристического уравнения

$$\det\|E - \varepsilon I\| = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - I_E \varepsilon^2 + II_E \varepsilon - III_E = 0, \quad (1.6)$$

$$I_E = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}, \quad II_E = \sum_{i < j} (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}^2), \quad III_E = \det\|\varepsilon_{ij}\|.$$

Величины I_E, II_E, III_E называются инвариантами тензора конечных деформаций и связаны с главными деформациями соотношениями

$$I_E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad II_E = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \quad III_E = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

В теории упругости выбирают в качестве аргументов удельной потенциальной энергии деформаций инварианты тензора конечных деформаций, так как в недеформированном естественном состоянии, когда $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, эти инварианты равны нулю. Потенциальная энергия упругого однородного изотропного тела представляется функционалом

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} e(I_E, II_E, III_E) dx. \quad (1.7)$$

§ 9.2. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ФУНКЦИОНАЛ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В дальнейшем рассматриваем однородное упругое изотропное тело. В ряде случаев деформации упругих тел достаточно малы ($|\varepsilon_i| \approx 0 \div 10^{-2}$), и потенциальная энергия деформаций элементарной частицы в предположении гладкости соответствующей функции может быть разложена в ряд Тейлора

$$e(I_E, II_E, III_E) = e(0, 0, 0) + \frac{\partial e(0, 0, 0)}{\partial I_E} I_E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e(0, 0, 0)}{\partial I_E^2} I_E^2 + \frac{\partial e(0, 0, 0)}{\partial II_E} II_E + O(\varepsilon^3), \quad (2.1)$$

где $O(\varepsilon^3)$ означает члены порядка малости три и выше по главным деформациям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Положим $e(0, 0, 0) = 0$ и покажем, что $\partial e(0, 0, 0)/\partial I_E = 0$. Если внешние силы отсутствуют, то упругое тело находится в состоянии покоя относительно соответствующей инерциальной системы координат, т.е. $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ на Ω . Согласно принципу Д'Аламбера—Лагранжа работа упругих сил на возможных перемещениях в состоянии равновесия равна нулю:

$$\delta E[\mathbf{u}] = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial e}{\partial I_E} \frac{\partial I_E}{\partial u_{ij}} + \frac{\partial e}{\partial II_E} \frac{\partial II_E}{\partial u_{ij}} + \frac{\partial e}{\partial III_E} \frac{\partial III_E}{\partial u_{ij}} \right) \Bigg|_{\mathbf{u}=0} \delta u_{ij} dx = 0. \quad (2.2)$$

Поскольку $\partial II_E/\partial u_{ij} = \partial III_E/\partial u_{ij} = 0$ при $\mathbf{u} \equiv 0$, а $\partial I_E/\partial u_{ij} \neq 0$, то равенство нулю в (2.2) возможно согласно основной лемме вариационного исчисления только при условии $\partial e(0, 0, 0)/\partial I_E = 0$.

Ограничимся в (2.1) квадратичными членами по переменным ε_{ij} и получим

$$e = k_1 I_E^2 + k_2 II_E, \quad (2.3)$$

где k_1, k_2 — постоянные. Если, кроме того, предположить, что $|u_{ij}| \ll 1$ и ограничиться в (2.3) квадратичными членами по переменным u_{ij} (при этом отбрасываются члены порядка малости три и четыре), то найдем

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \left[k_1 \left(\sum_{i=1}^3 e_{ii} \right)^2 + k_2 \sum_{i < j}^3 (e_{ii} e_{jj} - e_{ij}^2) \right] dx, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}). \quad (2.4)$$

Величины e_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, являются компонентами симметричного тензора малых деформаций $\|e_{ij}\|$, а функционал (2.4) определяет потенциальную энергию малых деформаций (классическая теория упругости). Потенциальная энергия деформаций элементарной частицы должна быть положительной, иначе в процессе деформации работа сил по изменению формы частицы будет отрицательной, т.е. будет происходить выделение, а не затрата энергии. Условия положительной определенности квадратичной формы (2.3), представленной в виде

$$e = k_1 \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \right)^2 + k_2 \sum_{i < j}^3 (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}^2),$$

выражаются неравенствами $k_1 > 0$, $0 < -k_2 k_1^{-1} < 3$.

Подынтегральное выражение в (2.4) обозначим также через e и представим в виде

$$e = \frac{\lambda}{2} \Theta^2 + \mu \sum_{i,j}^3 e_{ij}^2, \quad \Theta = I_E = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\lambda}{2} = k_1 + \frac{k_2}{2}, \quad \mu = -\frac{k_2}{2}.$$

Коэффициенты λ и μ называются коэффициентами Ламе. В ряде случаев используются также коэффициенты E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, связанные с коэффициентами Ламе формулами

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Значения упомянутых коэффициентов для различных упругих тел можно найти в справочниках.

Квадратичный функционал потенциальной энергии упругих деформаций (2.4) соответствует классической теории упругости

малых деформаций и, как будет показано выше, приводит к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных, описывающим движения и равновесия упругих тел. Однако замена компонент тензора конечных деформаций ε_{ij} на компоненты тензора малых деформаций e_{ij} влечет за собой неинвариантность функционала (2.4) по отношению к группе вращений упругого тела как твердого тела. Функционал (2.4) можно использовать только в тех случаях, когда среди перемещений упругого тела отсутствуют его вращения как твердого тела.

§ 9.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Пусть движение упругого тела таково, что выполнены соответствующие условия (малость деформаций и величин $|u_{ij}|$) и применимы соотношения классической теории упругости малых деформаций, в частности функционал потенциальной энергии упругих деформаций представляется интегралом (2.4). Вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа для упругого тела представляется в виде

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{\mathbf{u}} + \nabla E[\mathbf{u}] - \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}) - (\mathbf{F}, \delta \mathbf{u})_{\partial \Omega} &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \\ (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \delta \mathbf{u} dx, \\ (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \delta u_{ij} dx, \quad (\mathbf{F}, \delta \mathbf{u})_{\partial \Omega} = \int_{\partial \Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{u} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Упругое тело предполагается свободным, а векторное поле возможных перемещений $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — произвольным. Желая в дальнейшем ограничиться классическими решениями уравнений движения, предполагаем, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ обладают достаточной степенью гладкости по временной и пространственным переменным.

Представим выражение работы упругих сил на возможных перемещениях в виде

$$\begin{aligned} (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \right) \delta u_i \right] dx = \\ &= \int_{\partial \Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \delta u_i \gamma_j d\sigma - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \right) \delta u_i dx, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\mathbf{n}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — вектор внешней нормали к поверхности $\partial \Omega$.

Обозначим величины $\partial e / \partial u_{ij} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, и рассмотрим оператор $P = \|p_{ij}\|$, называемый тензором напряжений. Оператор P симметричен, так как

$$p_{ij} = \frac{\partial e}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial e}{\partial e_{ij}} \frac{\partial e_{ij}}{\partial u_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial e_{ij}}, \quad i \neq j,$$

и согласно (2.5) $\partial e / \partial e_{ij} = \partial e / \partial e_{ji}$. Если через

$$\mathbf{W} = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{2j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_{3j}}{\partial x_j} \right)$$

обозначить поле внутренних упругих сил, то, учитывая произвольность вариации $\delta \mathbf{u}$ в области Ω и на границе $\partial \Omega$, а также основную лемму вариационного исчисления, получим из вариационного уравнения (3.1), принимая во внимание (3.2), равенства

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{W} + \mathbf{f}, \quad P \mathbf{n} = \mathbf{F} \quad \text{на } \partial \Omega. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.3) представляют собой уравнения движения упругого тела и динамические граничные условия.

3. Обычно второе условие (3.3) выполняется на той части границы $\partial \Omega$, перемещения точек которой произвольны. На остальной части границы задаются кинематические граничные условия, например $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ — условие закрепления точек границы, которое следует понимать как двусторонние удерживающие голономные идеальные связи.

Найдем явный вид уравнений движения упругого тела в случае малых деформаций (классическая теория). Для этого представим компоненты векторного поля \mathbf{W} в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial e}{\partial u_{1j}} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu u_{11}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} (u_{12} + u_{21}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} (u_{13} + u_{31}) = \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) = \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta u_1 \end{aligned}$$

и аналогично

$$W_k = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta u_k, \quad k = 2, 3.$$

Таким образом, получим

$$\mathbf{W} = (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u}.$$

Уравнения движения в явном виде принимают вид

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (3.4)$$

Движение упругого тела описывается системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Представим динамические граничные условия в (3.3) в явном виде

$$\lambda\operatorname{div}\mathbf{u}\gamma_k + \mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\mathbf{n} + \mu\nabla u_k\mathbf{n} = F_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь F_k — компоненты поля поверхностных сил в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Выявим механический смысл компонент тензора напряжений P . Пусть Ω_h — область в трехмерном пространстве, целиком принадлежащая упругому телу и представляющая собой трехгранную пирамиду с вершиной в некоторой точке и гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 61). Пусть \mathbf{n} — нормаль к основанию пирамиды, $|MK| = h$ — высота пирамиды. На поверхности пирамиды приложены силы $\mathbf{F}_n, -\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_3$, описывающие взаимодействие рассматриваемой части упругого тела с внешней упругой средой. Сила \mathbf{F}_n задана на основании пирамиды, а силы $-\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_3$ — на боковых гранях, ортогональных соответствующим координатным осям. Принцип Д'Аламбера—Лагранжа для области Ω_h имеет вид

$$(\rho\ddot{\mathbf{u}} + \nabla E[\mathbf{u}] - \mathbf{f}, \delta\mathbf{u})_{\Omega_h} - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{u})_{\partial\Omega_h} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}. \quad (3.5)$$

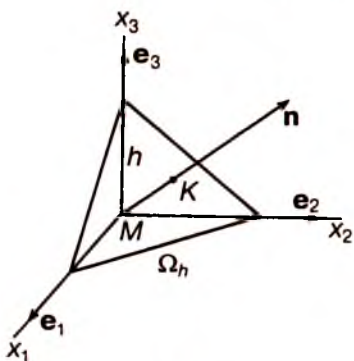


Рис. 61

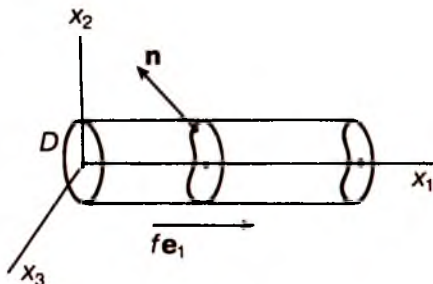


Рис. 62

Пусть $\delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \in E^3$, где $\boldsymbol{\alpha}$ — постоянный вектор. Тогда

$$(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx = 0,$$

так как $\partial \alpha_i / \partial x_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Оставшиеся члены в (3.5) с учетом произвольности вектора $\boldsymbol{\alpha}$ представим в виде

$$\int_{\Omega_h} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) dx - \int_{\partial \Omega_h} \mathbf{F} d\sigma = 0. \quad (3.6)$$

Разделим обе части равенства (3.6) на h^2 и применим для оценки интегралов теорему о среднем. Тогда

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f})|_{\mathbf{r}^*} \frac{\text{vol} \Omega_h}{h^2} - \frac{1}{h^2} (\mathbf{F}_n S_n - \mathbf{F}_1 S_1 - \mathbf{F}_2 S_2 - \mathbf{F}_3 S_3) = 0. \quad (3.7)$$

Здесь \mathbf{r}^* принадлежит Ω_h , а величины $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ вычислены в некоторых точках соответствующих граней пирамиды, S_n, S_1, S_2, S_3 — площади граней пирамиды. Поскольку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{vol} \Omega_h}{h^2} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_n}{h^2} \neq 0, \quad \frac{S_k}{S_n} = \gamma_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

то, переходя к пределу в (3.7) при $h \rightarrow 0$, получим равенство

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_1 \gamma_1 + \mathbf{F}_2 \gamma_2 + \mathbf{F}_3 \gamma_3. \quad (3.8)$$

Из динамического граничного условия $P \mathbf{n} = \mathbf{F}$ получим равенства на соответствующих гранях пирамиды

$$\mathbf{F}_n = P \mathbf{n}, \quad -\mathbf{F}_k = P(-\mathbf{e}_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Обозначим $\mathbf{F}_n = \mathbf{p}_n$, $\mathbf{F}_k = \mathbf{p}_k = (p_{1k}, p_{2k}, p_{3k})$, $k = 1, 2, 3$, и представим равенство (3.8) в виде

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 \gamma_1 + \mathbf{p}_2 \gamma_2 + \mathbf{p}_3 \gamma_3. \quad (3.9)$$

Вектор \mathbf{p}_n называется напряжением в точке M на площадке с нормалью \mathbf{n} , $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ — напряжения в точке M на площадках, ортогональных координатным осям. Таким образом, столбцы матрицы P суть компоненты вектора напряжений на соответствующих площадках, ортогональных координатным осям. Формула (3.9) позволяет найти напряжение на площадке с нормалью \mathbf{n} , если известны компоненты тензора напряжений P или напряжения на трех площадках, лежащих в координатных плоскостях.

В упругом теле возникает тензорное поле напряжений, характеризующее напряженное состояние в каждой точке упругого тела и связанное с полем внутренних упругих сил \mathbf{W} .

§ 9.4. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Под стержнем будем понимать цилиндр $\Omega = D \times [0, l]$, когда $l \gg \text{diam} D$. Здесь D — область на координатной плоскости Ox_2x_3 (рис. 62). Материал стержня однороден и изотропен, а ось Ox_1 проходит через центр тяжести сечения D . Поле внешних массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = f(x_1, t)\mathbf{e}_1$, где \mathbf{e}_1 — орт оси Ox_1 . Пусть внешние поверхностные силы на боковой поверхности цилиндра равны нулю, т.е. $P\mathbf{n} = 0$ на $\partial D \times [0, l]$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к боковой поверхности, P — тензор напряжений. Тензорное поле напряжений $P(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \Omega$, разложим в ряд Тейлора в окрестности каждой точки $(x_1, 0, 0)$, т.е. в каждом сечении стержня плоскостью, ортогональной оси Ox_1 . Имеем

$$P(\mathbf{r}, t) = P(x_1\mathbf{e}_1, t) + \frac{\partial P(x_1\mathbf{e}_1, t)}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial P(x_1\mathbf{e}_1, t)}{\partial x_3} x_3 + \dots \quad (4.1)$$

Поскольку величины x_2, x_3 изменяются в малых пределах (стержень тонкий), то в разложении (4.1) ограничимся первым членом. Это означает, что напряженное состояние принимается одинаковым для всех точек какого-либо сечения стержня, но может, вообще говоря, изменяться для различных сечений. Из условия $P\mathbf{n} = 0$ на $\partial D \times [0, l]$, учитывая то обстоятельство, что нормаль \mathbf{n} описывает единичную окружность в плоскости Ox_2x_3 и принимает, например, значения $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, следуют условия

$$P_{22} = P_{33} = P_{12} = P_{13} = P_{23} = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, все компоненты тензора напряжений, за исключением p_{11} , равны нулю.

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций равенствами (см. § 8.3)

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \frac{\partial e}{\partial e_{ii}} = \lambda\Theta + 2\mu e_{ii}, \quad i = 1, 2, 3, \\ p_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial e_{ij}} + \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial e_{ji}} = 2\mu e_{ij}, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (4.3)$$

выражающими обобщенный закон Гука для однородной изотропной среды. В рассматриваемом случае получим $e_{ij} = 0, i \neq j$, и

$$\lambda\Theta + 2\mu e_{22} = 0, \quad \lambda\Theta + 2\mu e_{33} = 0, \quad \Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}. \quad (4.4)$$

Из уравнений (4.4) определим e_{22} и e_{33} в виде

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}, \quad \Theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11}.$$

Тогда согласно (4.1) и последующего замечания, учитывая равенства (4.3), получим

$$p_{11}(x_1, t) = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Переменная $u_1(\mathbf{r}, t)$ для всех точек сечения стержня зависит только от координаты x_1 . Следовательно, в процессе деформации всякое сечение стержня остается плоским и перемещается вдоль оси Ox_1 . Переменные u_2 и u_3 определяются из уравнений (4.4) с учетом равенств $u_k(0, x_2, x_3, t) = 0$, $k = 2, 3$, в виде

$$u_k(\mathbf{r}, t) = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial u_1(x_1 \mathbf{e}_1, t)}{\partial x_1} x_k, \quad k = 2, 3.$$

Поле внутренних массовых сил равно (см. § 8.3)

$$\mathbf{W} = \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}, 0, 0 \right), \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda \Theta + 2\mu u_{11}) = E \frac{\partial^2 u_1(x_1 \mathbf{e}_1, t)}{\partial x_1^2}.$$

Уравнение движения (3.3) в проекции на ось Ox_1 представляется в форме

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + f(x_1, t), \quad (4.5)$$

где $v(x_1, t) = u_1(x_1 \mathbf{e}_1, t)$ — смещение точек сечения стержня с номером x_1 вдоль оси Ox_1 . Неоднородное волновое уравнение (4.5) описывает продольные колебания стержня под действием внешней продольной силы $f(x_1, t)$.

Уравнения движения (3.3) в проекциях на оси Ox_2 и Ox_3 теряют смысл, так как переменные u_2 и u_3 , определяющие перемещения точек некоторого сечения стержня, отыскиваются из условий (4.4) и выражаются через переменную $u_1(x_1, t)$.

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях стержня, когда $f(x_1, t) = 0$ и заданы граничные условия $v(0, t) = v(l, t) = 0$ — условия закрепления концов стержня. Обозначим x_1 через s и представим уравнение (4.5) в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (4.6)$$

Решение уравнения (4.6) найдем по методу Фурье, полагая $v = T(t) X(s)$. Имеем

$$\frac{\ddot{T}}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2 \Rightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad X'' + \frac{\omega^2}{a^2} X = 0, \quad ' = \frac{\partial}{\partial s}. \quad (4.7)$$

Общее решение последнего уравнения

$$X(s) = C_1 \cos \frac{\omega}{a} s + C_2 \sin \frac{\omega}{a} s.$$

Постоянная ω определяется из граничных условий

$$X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 \sin \frac{\omega}{a} l = 0.$$

Уравнение (4.6) будет иметь нетривиальное решение, если $C_2 \neq 0$. Тогда $\sin \omega_k l a^{-1} = 0$ и

$$\omega_k = \pi k \frac{a}{l} = \frac{\pi k}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Величины $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ называются собственными частотами колебаний стержня и образуют в совокупности спектр собственных частот. Каждой собственной частоте ω_k соответствует собственная форма $X_k(s) = \sin(\omega_k a^{-1} s)$, определенная с точностью до постоянного множителя. Поскольку общее решение уравнения

$$\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k = 0,$$

следующего из (4.7), представляется в виде

$$T_k = A_{1k} \cos \omega_k t + A_{2k} \sin \omega_k t,$$

где A_{1k}, A_{2k} — произвольные постоянные, то продольные колебания стержня описываются формулой

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{1k} \cos \omega_k t + A_{2k} \sin \omega_k t) \sin \frac{\omega_k}{a} s. \quad (4.8)$$

Коэффициенты A_{1k}, A_{2k} определяются из начальных условий $v(s, 0), \dot{v}(s, 0)$, если последние представить в виде рядов Фурье на отрезке $[0, l]$

$$v(s, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \sin \frac{\omega_k}{a} s, \quad \dot{v}(s, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin \frac{\omega_k}{a} s.$$

Тогда из (4.8) следует при $t = 0$ равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \sin \frac{\omega_k}{a} s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \sin \frac{\omega_k}{a} s,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \omega_k \sin \frac{\omega_k}{a} s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin \frac{\omega_k}{a} s$$

и далее $A_{1k} = a_{1k}, \quad A_{2k} = \omega_k^{-1} a_{2k}.$

Собственные формы $X_k(s)$ удобно нормировать, используя для этого норму пространства $L_2([0, l])$, которому принадлежит функция $\dot{v}(s, t)$, так как в каждый момент времени существует и ограничен функционал кинетической энергии

$$T[\dot{v}] = \frac{1}{2} \rho S \int_0^l \dot{v}^2 ds,$$

где S — площадь области D . Имеем

$$C_2^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_k}{a} s ds = 1 \Rightarrow C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

В результате получим ортонормированный базис $\left\{ X_k^*(s) \right\}_{k=1}^{\infty}$, $X_k^*(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\omega_k}{a} s$ в пространстве скоростей $H_0 = \left\{ \dot{v}(s, t) : \dot{v}(s, t) \in L_2([0, l]), \dot{v}(0, t) = \dot{v}(l, t) = 0 \right\}$, т.е.

$$\int_0^l X_k^*(s) X_m^*(s) ds = \delta_{km},$$

где δ_{km} — символ Кронекера: Функции $X_k^*(s)$, $k = 1, 2, \dots$, суть нормальные формы собственных колебаний, а ω_k , $k = 1, 2, \dots$, — собственные частоты колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы.

В заключение заметим, что функция $v(s, t)$ принадлежит конфигурационному пространству системы $H_1 = \{v(s, t) : v(s, t) \in W_2^1([0, l]), v(0, t) = v(l, t) = 0\}$, где $W_2^1([0, l])$ — пространство Соболева функций, суммируемых вместе с квадратами первых производных на отрезке $[0, l]$. Пространство H_1 есть область определения функционала потенциальной энергии упругих деформаций

$$E[v] = \frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds \quad (4.9)$$

и содержит обобщенные решения рассматриваемой задачи.

§ 9.5. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ И БАЛКИ

Изучим движение двух одномерных упругих систем — натянутой струны и балки.

Рассмотрим цилиндрическое упругое тело (струну) с образующей, параллельной оси Ox_1 . Основанием цилиндра служит круг, радиус которого r_0 много меньше высоты цилиндра l . Ось Ox_1

совпадает с осью цилиндра. Для простоты будем рассматривать такие движения струны, когда ее ось остается в плоскости Ox_1x_2 . Деформированное состояние оси струны зададим соотношениями

$$X_1 = (1 + e)s + u_1(s, t), \quad X_2 = u_2(s, t), \quad 0 < e \ll 1, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (5.1)$$

Концы струны закреплены — $u_k(0, t) = u_k(l, t) = 0$, $k = 1, 2$, а параметр e характеризует первоначальное растяжение струны.

Пусть на струну действует поле массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t), 0)$, а поверхностные силы на боковой поверхности струны отсутствуют. Как и в § 9.4, примем тензор напряжений P для всех точек ортогонального сечения струны одинаковым, когда $p_{11} = p_{11}(s, t)$, а $p_{22} = p_{33} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$. Эта аппроксимация называется гипотезой плоских сечений Кирхгофа—Лява. Функционал потенциальной энергии упругих деформаций в этом случае аналогичен функционалу (4.9), соответствующему продольным колебаниям стержня, и имеет вид

$$E[\mathbf{u}] = \frac{ES}{2} \int_0^l \varepsilon_1^2(s, t) ds, \quad (5.2)$$

где $\varepsilon_1(s, t)$ — деформация упругой оси струны. Согласно формулам (5.1), гипотезе плоских сечений и определению главной деформации О.1.4 главная деформация, характеризующая растяжение упругой оси струны, равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(s, t) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial s} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(1 + e + \frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= e + \frac{e^2}{2} + (1 + e) \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Функционал (5.2) с точностью до членов второго порядка малости по производным $\partial u_1/\partial s$, $\partial u_2/\partial s$ с учетом малости e представим в виде

$$E[\mathbf{u}] \approx \frac{ES}{2} \left[e^2 l + \int_0^l \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + e \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 \right) ds \right]. \quad (5.3)$$

Первый член в (5.3) определяет потенциальную энергию прямолинейной растянутой струны и не влияет на уравнения движения. Согласно закону Гука $ESe = T_0$ — натяжение струны. Положим

$$E_2[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ES \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \right)^2 \right] ds. \quad (5.4)$$

При вычислении кинетической энергии струны будем считать, что энергия сечения совпадает с энергией материальной точки, лежащей на оси струны, т.е.

$$T[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^l (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) ds,$$

где ρ_0 — линейная плотность материала струны ($\rho_0 = \rho S$).

Вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа и следующие из него уравнения движения представим в форме

$$\int_0^l \left[\rho_0 (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2) - f_1 \delta u_1 - f_2 \delta u_2 + ES u_1' \delta u_1' + T_0 u_2' \delta u_2' \right] ds = 0$$

$$\forall \delta u_1, \delta u_2 \in H_1 = \left\{ u(s, t): u(s, t) \in W_2^1([0, l]), u(0, t) = u(l, t) = 0 \right\}, \quad (5.5)$$

$$' = \frac{\partial}{\partial s},$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + f_1, \quad (5.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + f_2. \quad (5.7)$$

При выводе уравнений (5.6) и (5.7) следует выполнить в (5.5) интегрирование по частям в двух последних членах и учесть граничные условия. Уравнение (5.6) совпадает с уравнением (4.5) и описывает продольные колебания в струне, а уравнение (5.7) — соответственно поперечные колебания струны. Набор собственных частот и собственных форм поперечных колебаний определяется согласно методу Фурье (см. § 8.4) и равен

$$\left\{ \nu_k, Y_k(s) \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \nu_k = \frac{\pi k}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad Y_k(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\nu_k}{b} s, \quad b^2 = \frac{T_0}{\rho_0}.$$

Аналогично § 8.4 общее решение уравнения (5.7) при $f_2 = 0$ задается формулой

$$u_2(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{k1} \cos \nu_k t + A_{k2} \sin \nu_k t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\nu_k}{b} s,$$

где коэффициенты A_{k1}, A_{k2} подлежат определению из начальных условий движения. В рассматриваемом приближении продольные и поперечные колебания струны полностью разделяются. Собственные частоты поперечных колебаний меньше соответствующих собственных частот продольных колебаний струны $\nu_k < \omega_k$, $k = 1, 2, \dots$, так как $T_0 < ES$.

Еще одна модель изгиба прямолинейного стержня соответствует модели упругой балки, когда первоначальная деформация струны равна нулю ($T_0 = 0$). Также предполагаем, что продольные силы отсутствуют и продольные перемещения точек оси балки $u_1(x_1, t)$ равны нулю. Под действием поперечного поля сил $f_2(x_1, t)$ возникают перемещения точек оси стержня (балки) по оси Ox_2 . При изгибе балки так же, как и раньше, справедлива гипотеза плоских сечений, так как внешние поверхностные силы предполагаются равными нулю, а стержень достаточно тонким. Поле перемещений точек балки выразим через $u_2(x_1, t)$ — перемещение оси балки в проекции на ось Ox_2 . Единичный вектор касательной к оси балки $\tau \approx (1, u_2')$, а нормаль $\mathbf{n} \approx (-u_2', 1)$, где штрих означает дифференцирование по x_1 . Согласно гипотезе плоских сечений точка балки M , радиус-вектор которой $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ переходит в процессе изгиба в точку M^* , радиус-вектор которой $\mathbf{r}^* = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{e}_3 + u_2(x_1, t)\mathbf{e}_2$. Главная деформация частицы, соответствующая направлению оси Ox_1 , вычисляется по формуле (1.5) § 8.1 и равна

$$\varepsilon_1 = u_{11} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 u_{m1}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x_1} \right)^2 - 1 \right] \approx -u_2''(x_1, t)x_2. \quad (5.8)$$

В выражении (5.8) оставлены члены, линейные по компонентам вектора перемещений оси балки. Рассматривая элементарный объем балки $dx_1 dx_2 dx_3$ по аналогии с найденным ранее выражением потенциальной энергии упругих деформаций стержня или струны, получим соответствующий функционал

$$E[\mathbf{u}] = \frac{E}{2} \int_0^l \int_D \varepsilon_1^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_2(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1, \quad (5.9)$$

$$J = \int_D x_2^2 dx_2 dx_3.$$

Величина EJ называется изгибной жесткостью балки. Если, как и ранее, кинетическую энергию балки принять равной

$$T[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{\rho_0}{2} \int_0^l \dot{u}_2^2 dx_1,$$

то вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа представится в форме

$$\int_0^l (\rho_0 \ddot{v} \delta v + EJ v'' \delta v'' - f_2 \delta v) ds = 0. \quad (5.10)$$

Здесь $u_2(x_1, t)$ обозначена через $v(s, t)$, а x_1 — через s . Функции $v(s, t)$, $\delta v(s, t)$ принадлежат конфигурационному пространству $H_2 = \{v(s, t): v(s, t) \in W_2^2([0, l]), v(0, t) = v(l, t) = 0\}$, если концы балки закреплены. Здесь $W_2^2([0, l])$ — пространство Соболева функций, суммируемых вместе с квадратами вторых производных на отрезке $[0, l]$. Поскольку

$$\int_0^l v'' \delta v'' ds = v'' \delta v' \Big|_{s=0}^{s=l} - v''' \delta v \Big|_{s=0}^{s=l} + \int_0^l v^{IV} \delta v ds,$$

$$\delta v(0, t) = \delta v(l, t) = 0,$$

то принцип Д'Аламбера—Лагранжа принимает вид

$$\int_0^l \left(\rho_0 \ddot{v} + EJv^{IV} - f_2 \right) \delta v ds + EJv''(l, t) \delta v'(l, t) - EJv''(0, t) \delta v'(0, t) = 0.$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta v(s, t)$, $\delta v'(0, t)$, $\delta v'(l, t)$, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} = f_2, \quad c^2 = \frac{EJ}{\rho_0}, \quad (5.11)$$

$$v''(0, t) = v''(l, t) = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.11) описывает поперечные колебания балки, а соотношения (5.12) суть динамические граничные условия, которые вместе с кинематическими граничными условиями (условиями закрепления концов балки) образуют полный набор граничных условий. Общее решение однородного уравнения (5.11), описывающее собственные колебания балки, можно также получить методом Фурье разделения переменных.

§ 9.6. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

Важной с точки зрения практики является задача о собственных колебаниях упругих конструкций: зданий, мостов, башен, больших космических конструкций, различных машин и т.д. В рамках простейшей модели их можно рассматривать как упругие тела и, учитывая малость деформаций и отклонений точек той или иной конструкции, использовать линейную классическую теорию упругости.

Пусть однородное упругое тело занимает в естественном недеформированном состоянии область Ω в трехмерном пространстве и находится под действием стационарного поля внешних сил $\mathbf{f}(x, y, z)$. Предположим, что на перемещения точек упругого тела наложены

кинематические связи $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ при $\mathbf{r} \in \Gamma_1$, где Γ_1 — часть границы $\partial\Omega$ положительной меры ($\text{mes}\Gamma_1 > 0$). Под мерой границы Γ_1 понимаем площадь ее поверхности. Если поверхностные силы \mathbf{F} равны нулю, то вариационное уравнение движения (принцип Д'Аламбера—Лагранжа) имеет вид (см. (3.1))

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{\mathbf{u}} + \nabla E[\mathbf{u}] - \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_1, \\ H_1 &= \left\{ \mathbf{u}: u_i(\mathbf{r}, t) \in W_2^1(\Omega), \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) эквивалентно системе уравнений в частных производных (3.4) и динамическим граничным условиям (3.3) на части границы $\Gamma_2 = \partial\Omega/\Gamma_1$. Частное решение задачи (6.1) $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$, описывающее равновесную конфигурацию упругого тела, удовлетворяет вариационному уравнению

$$(\nabla E[\mathbf{u}_0] - \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_1. \quad (6.2)$$

Если поле массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ принадлежит пространству H_{-1} , сопряженному H_1 , то задача (6.2) имеет единственное решение $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \in H_1$. Линейный оператор теории упругости $L\mathbf{u} \equiv \nabla E[\mathbf{u}]$ отображает конфигурационное пространство H_1 в сопряженное пространство H_{-1} . Квадратичная форма $E[\mathbf{u}] = 1/2(L\mathbf{u}, \mathbf{u})$ положительно определена и ограничена в H_1 , что выражается неравенствами

$$c_1 \|\mathbf{u}\|_{2,1}^2 \leq E[\mathbf{u}] \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{2,1}^2, \quad (6.3)$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные, а

$$\|\mathbf{u}\|_{2,1}^2 = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^3 u_i^2 \right] dx$$

— норма пространства H_1 . Доказательство существования и единственности задачи (6.2), неравенств (6.3) и ряда последующих утверждений выходит за рамки данного курса и имеется, например, в книге С.Г. Михлина «Вариационные методы в математической физике» (Наука, 1970).

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях упругого тела с частично или полностью закрепленной границей. После замены переменных $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ уравнение (6.1) представим в виде

$$\rho \ddot{\mathbf{v}} + L\mathbf{v} = 0. \quad (6.4)$$

Его решения ограничены в фазовом пространстве системы $H_0 \times H_1$, так как имеет место интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}}) + E[\mathbf{v}] = h.$$

Здесь $H_0 = \left\{ \dot{\mathbf{v}}: \dot{v}_i \in L_2(\Omega), \dot{\mathbf{v}}|_{\Gamma_1} = 0, i = 1, 2, 3 \right\}$ — пространство скоростей точек упругого тела. Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{w}(\mathbf{r})\exp(i\nu t)$, получим из уравнения (6.4) задачу на собственные значения оператора теории упругости

$$L\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}, \quad \mu = \rho\nu^2. \quad (6.5)$$

Отметим ряд свойств собственных векторов и собственных значений оператора L .

а) Собственные значения μ_k действительны и положительны.

▲ Если $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\mathbf{w}_k = \mathbf{y}_k + i\mathbf{z}_k$, где $\alpha_k, \beta_k, \mathbf{y}_k(\mathbf{r}), \mathbf{z}_k(\mathbf{r})$ действительны, то $L\mathbf{w}_k = \mu_k\mathbf{w}_k$ и $(L\mathbf{w}_k, \bar{\mathbf{w}}_k) = \mu_k(\mathbf{w}_k, \bar{\mathbf{w}}_k)$, где черта означает комплексное сопряжение. Оператор L действителен и симметричен, что следует из его структуры

$$(L\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sum_{m,n,i,j=1}^3 a_{mnij} u_{mn} u_{ij} dx, \quad u_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n}.$$

Тогда $(L\mathbf{w}_k, \bar{\mathbf{w}}_k), (\mathbf{w}_k, \bar{\mathbf{w}}_k)$ — действительные числа и, следовательно, μ_k — действительное число. ▼

б) Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в гильбертовом пространстве H_0 .

▲ Если \mathbf{w}_1, μ_1 и \mathbf{w}_2, μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) — собственные векторы и собственные числа, то $(L\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mu_1(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ и $(L\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) = \mu_2(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)$. Поскольку оператор L симметричный, то $(L\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (L\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)$ и $(\mu_1 - \mu_2)(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$. Отсюда следует равенство $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$. ▼

в) Множество векторов $\mathbf{w}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условию $(L\mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq h$, компактно в H_0 , так как компактно вложение пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. В этом случае спектр оператора

$L\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует и дискретен, $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = +\infty$, собственные векторы $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему в H_0 и H_1 .

Таким образом, собственные колебания упругого тела представляются в виде суперпозиции гармонических колебаний

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{k1} \cos \nu_k t + A_{k2} \sin \nu_k t) \mathbf{w}_k(\mathbf{r}), \quad \nu_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho}}.$$

Коэффициенты A_{k1}, A_{k2} подлежат определению из начальных условий $\mathbf{v}(\mathbf{r}, 0), \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, 0)$, представленных в виде обобщенных рядов Фурье по системе ортонормированных собственных форм.

§ 9.7. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим процесс распространения возмущений в упругой среде. Пусть Ω — достаточно большая область, занимаемая однородной упругой средой; $B_R = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} \in E^3, |\mathbf{r}| < R\}$ — шар, целиком принадлежащий Ω . Уравнение движения (4.3) имеет вид

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (7.1)$$

когда поле внешних сил отсутствует.

Вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в начальный момент времени отличен от нуля в достаточно малой области, целиком принадлежащей шару B_ε , $0 < \varepsilon \ll R$. В пределе при $R \rightarrow \infty$ рассматриваемая задача трактуется как задача о распространении возмущений в бесконечной упругой среде, покоящейся на бесконечности.

Воспользуемся известным результатом векторного анализа: всякое гладкое векторное поле в трехмерном евклидовом пространстве представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона. Рассмотрим движение упругой среды на некотором интервале времени, когда поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и все его вторые частные производные равны нулю на поверхности шара B_R .

Используя представление (7.2) и скалярно умножая уравнение (7.1) на оператор Гамильтона, получим

$$\nabla \cdot [\rho \ddot{\mathbf{u}}_1 - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_1] = 0. \quad (7.3)$$

С другой стороны, согласно (7.2)

$$\nabla \times [\rho \ddot{\mathbf{u}}_1 - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_1] = 0. \quad (7.4)$$

Векторное поле, фигурирующее в квадратных скобках в соотношениях (7.3) и (7.4), обращается в нуль на поверхности шара B_R и, следовательно, с учетом соотношений (7.3), (7.4) равно нулю во всем шаре B_R , т.е.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_1 = (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_1. \quad (7.5)$$

Волновое уравнение (7.5) описывает распространение в упругой среде волн расширения, сопровождающихся изменением объема

элементарных частиц. Скорость распространения волн расширения равна

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Если уравнение (7.1) умножить векторно на оператор Гамильтона, то получим с учетом соотношений (7.2) равенство

$$\nabla \times [\rho \ddot{\mathbf{u}}_2 - \mu \Delta \mathbf{u}_2] = 0.$$

Поскольку $\nabla \cdot [\rho \ddot{\mathbf{u}}_2 - \mu \Delta \mathbf{u}_2] = 0$ и функция, заключенная в квадратные скобки, равна нулю на поверхности шара B_R , то имеет место равенство

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_2 = \mu \Delta \mathbf{u}_2. \quad (7.6)$$

Волновое уравнение (7.6) описывает процесс распространения в упругой среде волн сдвига, скорость которых равна $c_2 = \sqrt{\mu\rho^{-1}}$. Волны сдвига не сопровождаются изменением объема элементарных частиц, так как $\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0$.

Начальные возмущения в области B_e (функции $\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)$ и $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, 0)$) представимы в виде суммы потенциального и соленоидального полей и служат начальными условиями для уравнений (7.5) и (7.6), описывающих распространение волн расширения и сдвига. Скорость распространения волн расширения c_1 больше скорости волн сдвига c_2 . Это обстоятельство используется для определения эпицентра землетрясения: по разности времен прихода волн расширения и сдвига Δt можно вычислить расстояние l до эпицентра землетрясения, а именно $l = \Delta t (c_2^{-1} - c_1^{-1})$.

Когда возмущение доходит до границ области Ω , занимаемой упругим телом, разделение задачи (7.1) на две независимые задачи (7.5) и (7.6) становится, вообще говоря, невозможным.

Распространение возмущений в покоящемся газе, который также можно рассматривать как упругую среду при условии малых перемещений частиц, описывается уравнением (7.1). Однако для газа коэффициент Ламе $\mu = 0$ и $c_1 = \sqrt{\lambda\rho^{-1}}$, $c_2 = 0$. В газе существуют только волны расширения, и скорость их распространения c_1 называется скоростью звука.

§ 10.1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА—ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ПОЛЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Пусть система материальных точек занимает область Ω в трехмерном пространстве, распределение масс задается постоянной плотностью ρ так, что $d\mu = \rho dx$, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, а движение системы g' есть отображение области Ω в себя. В дальнейшем будем интегресоваться полями скоростей

$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и ускорений $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$, где радиус-вектор \mathbf{r} характеризует фиксированную точку M области Ω (рис. 63). Через точку M проходят различные частицы сплошной среды, и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ суть скорость и ускорение частицы, находящейся в данный момент времени в точке M . Такой способ описания характеристик движения принадлежит Эйлери. Ранее при изучении движения упругого тела вектор \mathbf{r} характеризовал определенную частицу тела и величины $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$, $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ обозначали перемещение, скорость и ускорение этой частицы. Такой способ описания движения принадлежит Лагранжу. Используя описание движения по Эйлери, представим закон движения частицы на отрезке времени $[t, (t + \tau_0)]$ в виде

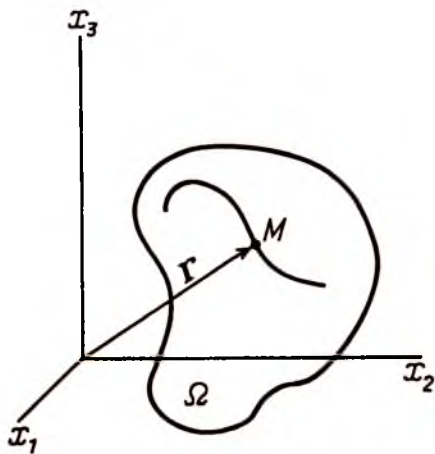


Рис. 63

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\tau + \frac{1}{2} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t)\tau^2 + o(\tau^2), \quad \tau \in [0, \tau_0]. \quad (1.1)$$

Поле ускорений $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$ можно найти, если известно поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. По определению имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{v}(\mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau), t + \tau) \right|_{\tau=0} = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial (t + \tau)} \right) \Bigg|_{\tau=0} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим такие движения сплошной среды, когда объем всякой элементарной частицы не меняется. Пусть D_t — произвольная область, принадлежащая Ω , и $g^t D_t$ — ее образ в момент времени $t + \tau$. Тогда

$$\text{vol} D_t = \text{vol} g^t D_t \Rightarrow \int_{D_t} dx = \int_{D_t} \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\| dx.$$

Так как область D_t произвольна, то якобиан

$$\det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\| = 1 \quad \forall \tau \in [t, t + \tau_0]. \quad (1.3)$$

Используя равенство (1.1), найдем

$$\det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\| = 1 + \tau \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + o(\tau)$$

и далее согласно (1.3)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\| \right|_{\tau=0} = \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Условие (1.4) называется условием несжимаемости или условием неразрывности среды. Условие несжимаемости (1.3) накладывает ограничения на возможные перемещения частиц сплошной среды, а именно

$$\delta \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, 0)}{\partial \mathbf{r}} \right\| = 0$$

По определению вариация

$$\delta \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \right\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[\det \left\| \frac{\partial (\mathbf{R} + \lambda \delta \mathbf{R})}{\partial \mathbf{r}} \right\| - 1 \right] = \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [1 + \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{R} + o(\lambda) - 1] = \operatorname{div} \delta \mathbf{R}(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, поле возможных перемещений $\delta \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.6)$$

и соленоидально, т.е. $\delta \mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Введем согласно принципу освобожденности от связей поле реакций связей $\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{r}, t)$ в области Ω . Кроме того, на границе $\partial \Omega$ перемещения частиц таковы, что они не пересекают границу и все время остаются внутри области Ω или на ее границе. Это обстоятельство следует трактовать как связь, наложенную на перемещения точек системы, а эквивалентное ей поле реакций связи $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ есть поверхностная сила. Возможные перемещения точек на границе $\partial \Omega$ удовлетворяют условию $\mathbf{n} \delta \mathbf{R} \leq 0$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль границы. С другой стороны, используя теорему Остроградского—Гаусса и равенство (1.6), получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \delta \mathbf{R} \, dx = \int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \delta \mathbf{R} \, d\sigma = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{n} \delta \mathbf{R} = 0$ на $\partial \Omega$. Аналогичным образом доказывается равенство $\mathbf{n} \mathbf{v} = 0$ на границе $\partial \Omega$.

О.1.1. Сплошная среда называется идеальной несжимаемой жидкостью, если каждая элементарная частица при движении сохраняет свой объем, при деформациях элементарной частицы не совершается работа и поле реакций связей идеально, т.е.

$$\int_{\Omega} \bar{\mathcal{R}} \delta \mathbf{R} \, dx + \int_{\partial \Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{R} \, d\sigma = 0 \quad (1.7)$$

на любых возможных перемещениях (1.6) (аксиома идеальных связей).

Если на жидкость действует поле внешних массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, то ее движение удовлетворяет вариационному принципу Д'Аламбера — Лагранжа

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{w} - \rho \mathbf{f}) \delta \mathbf{R} \, dx = 0 \quad (1.8)$$

для любого поля возможных перемещений $\delta \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего условию (1.6) и условию $\mathbf{n}\delta \mathbf{R} = 0$ на $\partial\Omega$. Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа и представим соотношение (1.8) в виде

$$\int_{\Omega} [(\rho \mathbf{w} - \rho \mathbf{f})\delta \mathbf{R} - p \operatorname{div} \delta \mathbf{R}] dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \delta \mathbf{R} d\sigma = 0. \quad (1.9)$$

Здесь связь $\mathbf{n}\delta \mathbf{R} = 0$ на $\partial\Omega$ заменена силовым полем поверхностных сил, $p(\mathbf{r}, t)$ — неопределенный множитель Лагранжа, называемый давлением. Поле возможных перемещений $\delta \mathbf{R}$ в (1.9) произвольно. Преобразуем член, содержащий $\operatorname{div} \delta \mathbf{R}$, по формуле Остроградского—Гаусса и получим

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} + \nabla p)\delta \mathbf{R} dx - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} + p\mathbf{n})\delta \mathbf{R} d\sigma = 0. \quad (1.10)$$

Учитывая произвольность поля возможных перемещений, согласно основной лемме вариационного исчисления получим из (1.10) равенства

$$\mathbf{w} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \mathbf{F} = -p\mathbf{n}. \quad (1.11)$$

Первое уравнение называется уравнением Эйлера и согласно (1.2) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.12)$$

а из второго соотношения (1.11) следует, что поле поверхностных сил направлено по нормали к поверхности.

Уравнение Эйлера (1.12) совместно с уравнением неразрывности (1.4) составляют полную систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение идеальной несжимаемой жидкости в области Ω . Система содержит четыре уравнения в частных производных относительно неизвестных функций v_1, v_2, v_3 , и p , где v_1, v_2, v_3 — проекции вектора скорости \mathbf{v} на оси инерциальной системы координат. Граничные условия для скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ выражаются равенством $\mathbf{v}\mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$. Давление $p(\mathbf{r}, t)$ и поверхностная сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ на $\partial\Omega$ определяются с точностью до произвольной постоянной.

В проекциях на оси инерциальной системы координат $Ox_1x_2x_3$ уравнение Эйлера (1.12) записывается в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Траектория каждой частицы жидкости $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)$ может быть найдена после определения поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = v_i(\mathbf{R}, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{R}, \mathbf{r}_0 \in \Omega.$$

Здесь R_i — проекция вектора \mathbf{R} на ось Ox_i , \mathbf{r}_0 — вектор, характеризующий положение частицы (точки жидкости) в начальный момент времени.

Если жидкость находится в состоянии покоя ($\mathbf{v} = 0$) в однородном поле силы тяжести, когда $\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3$ (\mathbf{e}_3 — орт вертикали), то из уравнения Эйлера $\nabla p = -\rho g\mathbf{e}_3$ определим давление $p = p_0 - \rho g x_3$. Здесь p_0 — произвольная постоянная. Рассмотрим твердое тело, занимающее область D и целиком окруженное жидкостью. Поверхностная сила, действующая на тело, равна $\mathbf{F} = -p\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — нормаль поверхности ∂D . Результирующая сил давления

$$\mathbf{P} = \int_{\partial D} \mathbf{F} d\sigma = - \int_{\partial D} p\mathbf{n} d\sigma.$$

Умножим последнее равенство на произвольный вектор \mathbf{a} и, используя формулу Остроградского—Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{a} &= \int_{\partial D} p\mathbf{n}\mathbf{a} d\sigma = - \int_D \operatorname{div}(p\mathbf{a}) dx = \\ &= - \int_D \nabla p \mathbf{a} dx = \rho g \mathbf{e}_3 \mathbf{a} \operatorname{vol} D. \end{aligned}$$

Таким образом, сила \mathbf{P} , называемая силой Архимеда, равна $\rho g \mathbf{e}_3 \operatorname{vol} D$. Если вес тела окажется большим силы Архимеда $\rho g \operatorname{vol} D$, то тело начнет погружаться, в противном случае — всплывать.

§ 10.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ БАРОТРОПНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

0.2.1. Сплошная среда называется идеальной баротропной жидкостью или газом, если удельная потенциальная энергия деформаций зависит только от изменения элементарного объема, т.е.

$$e = e(\xi), \quad \xi = \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \right\|. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)$ определяется формулой (1.1). Функция (2.1) может быть найдена в результате эксперимента по сжатию газа в цилиндре. При движении сжимаемого газа изменяется его плотность.

Движение газа будем описывать в переменных Эйлера. Пусть D — произвольная конечная область, в которой изучается движение газа. Материальные точки, занимавшие в момент времени t область D , перемещаются согласно закону (1.1). Если $\rho_0, \xi_0 dx$ — плотность и объем элементарной частицы в момент времени t , а $\rho, \xi dx$ — в момент времени $t + \tau$, $\tau \in [0, \tau_0]$, то имеет место закон сохранения массы $\rho \xi = \rho_0 \xi_0$. Тогда удельная потенциальная энергия деформаций зависит только от плотности газа $\rho(\mathbf{r}, t)$, т.е. $e = e(\rho_0 \xi_0 \rho^{-1})$.

Поскольку никаких ограничений на перемещения точек системы нет, то вариационный принцип Д'Аламбера—Лагранжа в переменных Эйлера имеет вид

$$\int_D \left[\rho(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \delta \mathbf{R} + \frac{\partial e}{\partial \xi} \delta \xi \right] dx - \int_{\partial D} \mathbf{F} \delta \mathbf{R} d\sigma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{R}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Здесь $-\partial e / \partial \xi \delta \xi$ — работа внутренних упругих сил. Силовые поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ определяют воздействие материальных точек, не входящих в систему, занимающую область D , на точки рассматриваемой материальной системы. В предыдущем параграфе была определена вариация

$$\delta \xi = \delta \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\| = \operatorname{div} \delta \mathbf{R}.$$

Обозначим $\partial e / \partial \xi = -p(\mathbf{r}, t)$ и найдем

$$\int_D \frac{\partial e}{\partial \xi} \delta \xi dx = \int_D \nabla p \delta \mathbf{R} dx - \int_{\partial D} p \mathbf{n} \delta \mathbf{R} d\sigma.$$

Тогда (2.2) запишется в форме

$$\int_D (\rho \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} + \nabla p) \delta \mathbf{R} dx - \int_{\partial D} (\mathbf{F} + p \mathbf{n}) \delta \mathbf{R} d\sigma = 0$$

и далее

$$\mathbf{w} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \mathbf{F} = -p \mathbf{n}. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) суть уравнение Эйлера и динамическое граничное условие (\mathbf{n} — внешняя нормаль к ∂D). Уравнение Эйлера имеет вид (1.12). Условие $\partial e / \partial \xi = -p$ обычно задают в эквивалентном виде как уравнение состояния среды

$$p = \Phi(\rho). \quad (2.4)$$

Например, в случае изотермического движения газа, когда его температура T постоянна во всем объеме газа, уравнение состояния среды есть уравнение Клапейрона $p = RT\rho$, где R — газовая постоянная.

Масса элементарной частицы газа $\rho \xi dx$ в процессе движения не меняется. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho(\mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau), t + \tau) \det \left\| \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t, \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\| \right]_{\tau=0} = 0$$

и далее

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.5)$$

При вычислении производной использовалось представление движения в форме (1.1). Уравнение неразрывности (2.5) представим в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение Эйлера (2.3), уравнение неразрывности (2.6) и уравнение состояния баротропной среды (2.4) составляют полную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую движение идеальной баротропной жидкости или газа. Число уравнений (пять) совпадает с числом искомых функций v_1, v_2, v_3, p, ρ . Второе соотношение в (2.3) есть динамическое граничное условие, когда внешняя поверхностная сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ предполагается заданной. Заметим, что в предыдущем параграфе при изучении движения несжимаемой идеальной жидкости силовое поле поверхностных сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ на границе $\partial\Omega$ рассматривалось как неизвестное поле реакций связи, а граничным условием являлась кинематическая связь $\mathbf{v}\mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$. Давление $p(\mathbf{r}, t)$, вообще говоря, является просто удобной вспомогательной переменной при описании движения баротропной идеальной жидкости или газа. Его можно исключить из уравнений, имея в виду равенство

$$\nabla p = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \nabla \rho.$$

Рассмотрим задачу о малых возмущениях покоящегося баротропного газа. Полагая поле внешних сил отсутствующим и поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, получим соотношения $\nabla p = 0, \partial \rho / \partial t = 0, p = \Phi(\rho)$, из которых следует $p = p_0, \rho = \rho_0$, где p_0, ρ_0 — постоянные величины. Возмущенное движение описывается функциями $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), p = p_0 + p',$

$\rho = \rho_0 + \rho'$. Имея в виду малость величин \mathbf{v} , ρ' , ρ' , линеаризуем уравнения, описывающие движение баротропного газа, и получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad p' = a^2 \rho', \quad a^2 = \frac{\partial \Phi(\rho_0)}{\partial \rho}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) суть линеаризованные уравнения Эйлера, неразрывности и состояния баротропного газа. Далее найдем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{a^2}{\rho_0} \nabla \frac{\partial \rho'}{\partial t} = a^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$$

или

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

Волновое уравнение (2.8) описывает распространение возмущений в идеальном баротропном газе. Постоянная a называется скоростью звука. Решение гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами (2.8) может быть найдено методами теории уравнений в частных производных.

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о равновесии баротропного газа, подчиняющегося уравнению Клапейрона $p = RT\rho$, при постоянной температуре в однородном поле силы тяжести $\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3$. Пусть газ находится в вертикальном цилиндре, площадь основания которого равна единице, а суммарная масса газа m . Равновесное состояние газа описывается уравнениями

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{e}_3, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad p = RT\rho.$$

Отсюда получим

$$\nabla \rho = -\frac{\rho g}{RT} \mathbf{e}_3$$

и далее

$$\nabla \ln \rho = -k \mathbf{e}_3 \Rightarrow \ln \rho = -kx_3 + \ln \rho_0, \quad k = \frac{g}{RT}.$$

Таким образом, плотность ρ определяется соотношением

$$\rho = \rho_0 e^{-kx_3}.$$

Постоянную ρ_0 найдем из условия

$$m = \int_0^{\infty} \rho_0 e^{-kx_3} dx_3 \Rightarrow \rho_0 = mk.$$

В заключение заметим, что при описании состояния сжимаемого газа появляется новое понятие — скалярное поле температуры, изменение которого описывается законами термодинамики. В результате задача определения движения сплошной среды оказывается связанной с задачей определения температурного поля. Изучение этих вопросов выходит за рамки данного курса механики.

§ 10.3. ИНТЕГРАЛЫ БЕРНУЛЛИ, КОШИ И БЕРНУЛЛИ—ЭЙЛЕРА

В ряде случаев при движении идеальной жидкости можно указать первые интегралы, выражающие законы сохранения тех или иных характеристик движения.

Уравнение Эйлера (1.12) представим в форме Громеки—Лемба, заметив, что

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Проверка тождества (3.1) производится непосредственным вычислением его правой и левой частей. Уравнение движения в форме Громеки—Лемба принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.2)$$

О.3.1. Линиями тока называется семейство линий, касательные к которым совпадают с вектором скорости в рассматриваемый момент времени.

Согласно определению линии тока являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t),$$

в котором t рассматривается как фиксированный параметр, а s — параметр вдоль линии тока. Семейство линий тока зависит от времени как от параметра.

Если $\partial \mathbf{v} / \partial t \equiv 0$, то движение называется установившимся, и всякая линия тока является траекторией частиц, ее образующих, поскольку в этом случае траектория частицы есть решение уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

Заметим, что уравнение состояния баротропной жидкости или газа может быть представлено в виде $\rho = \Psi(p)$, поскольку, как показывает опыт, плотность есть монотонно возрастающая функция

давления. Исключение составляет модель несжимаемой жидкости, когда плотность принимается постоянной.

Т.1. Если движение жидкости установившееся, внешние силы потенциальны, а жидкость баротропна, то имеет место интеграл Бернулли вдоль каждой линии тока

$$\frac{v^2}{2} + P(p) + V(\mathbf{r}) = h, \quad P(p) = \int \frac{dp}{\Psi(p)}. \quad (3.3)$$

Здесь $V(\mathbf{r})$ — потенциал силового поля и $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, h — постоянная для рассматриваемой линии тока.

▲ Пусть γ — линия тока и $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$ — единичный вектор, касательный к линии тока. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ коллинеарен вектору скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Умножим правую и левую части уравнения (3.2) скалярно на $\boldsymbol{\tau}$ и найдем

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) \boldsymbol{\tau} - [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}] \boldsymbol{\tau} = -\nabla V \boldsymbol{\tau} - \nabla P \boldsymbol{\tau}.$$

Второй член полученного соотношения равен нулю, а все остальные члены представляют собой производные по направлению $\boldsymbol{\tau}$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P \right) = 0.$$

Отсюда и следует интеграл Бернулли (3.3). Найденный первый интеграл выражает закон сохранения энергии элементарной частицы жидкости при ее движении в потенциальном поле. ▼

Допустим, что в области D , в которой рассматривается движение баротропной идеальной жидкости, поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ потенциально, т.е. $\mathbf{v} = \nabla \varphi(\mathbf{r}, t)$. Другими словами, движение жидкости безвихревое ($\text{rot} \mathbf{v} \equiv 0$) в области D . Скалярная функция $\varphi(\mathbf{r}, t)$ называется потенциалом скорости. Уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.4)$$

Т.2. Если движение баротропной идеальной жидкости в области D безвихревое, а массовые силы потенциальны, то в области D имеет место интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + V(\mathbf{r}) + P(p) = g(t). \quad (3.5)$$

Здесь $V(\mathbf{r})$ — потенциал массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla V(\mathbf{r})$). Функция $P(p)$ определена в (3.3).

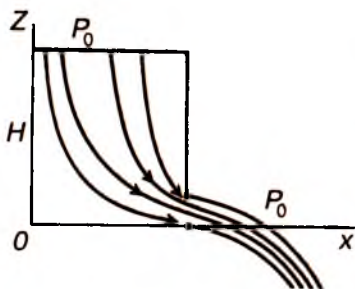


Рис. 64

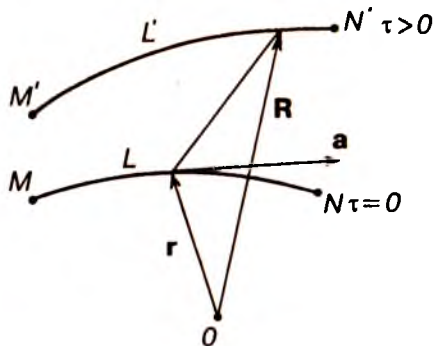


Рис. 65

▲ Уравнение (3.4) представим в виде

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + V + P \right) = 0.$$

Выражение под знаком градиента есть функция, зависящая только от времени, и следовательно, справедливо равенство (3.5). ▼

Если дополнительно к условиям теоремы 2 предположить, что движение жидкости установившееся, т.е. $\partial \varphi / \partial t \equiv 0$, то интеграл Коши (3.5) совпадет с интегралом Бернулли (3.3). Функцию $g(t)$ в этом случае следует рассматривать как постоянную во всей области движения. Полученный интеграл называется интегралом Бернулли—Эйлера и отличается от интеграла Бернулли тем, что постоянная в правой части не зависит от выбора линии тока.

В качестве примера рассмотрим задачу об истечении несжимаемой идеальной жидкости из отверстия малой площади в сосуде (рис. 64). Пусть уровень жидкости в сосуде H , S — площадь поверхности цилиндрического сосуда, s — площадь сечения отверстия на глубине H . Давление воздуха (поверхностные силы на свободной поверхности жидкости) равно p_0 . Поле массовых сил есть поле силы тяжести $\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_z$, \mathbf{e}_z — орт вертикали. Рассмотрим процесс истечения жидкости как безвихревое установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости, пренебрегая понижением уровня жидкости на изучаемом интервале времени. Эти условия будут выполняться с достаточной степенью точности, если $S \gg s$ и если с момента начала течения прошло некоторое время и течение приобрело установившийся характер. Обозначим скорость понижения уровня жидкости в сосуде через v , а скорость истечения из отверстия — через V . Уравнение неразрывности имеет вид $Sv = sV$, а интеграл Бернулли—Эйлера представляется в форме

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = h. \quad (3.6)$$

Рассмотрим линию тока жидкости, начинающуюся на свободной поверхности. Интеграл (3.6), вычисленный в точках, принадлежащих свободной поверхности и выходному сечению, представляется в виде равенства

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_0}{\rho} + gH = \frac{1}{2}V^2 + \frac{p_0}{\rho}.$$

Отсюда найдем $V^2 - v^2 = 2gH$ или с учетом условия $Sv = sV$

$$V^2 = \frac{2gH}{1 - (s/S)^2}.$$

Если пренебречь отношением $s/S \ll 1$, то получим формулу Торричелли $V^2 = 2gH$, определяющую скорость истечения жидкости из малого отверстия в сосуде.

§ 10.4. ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ. ТЕОРЕМА ТОМСОНА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим совокупность материальных точек (элементарную частицу), занимающих в момент времени t шар малого радиуса с центром в точке, радиус-вектор которой равен \mathbf{r} . Если через $d\mathbf{r}$ обозначить вектор из центра шара к какой-либо его точке, то поле скоростей в элементарной частице равно

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \dots$$

Членами второго порядка малости относительно $d\mathbf{r}$ пренебрежем, а оператор $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}$ представим в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = C + A, \quad C = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right], \quad A = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \right].$$

Оператор C симметричен, а оператор A кососимметричен и соответствует операции векторного умножения: $A d\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega} = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Симметрический оператор C определяет поле скоростей деформаций элементарной частицы, а оператор A — ее вращение как твердого тела. Поле скоростей точек элементарной частицы

представляется суммой переносной скорости центра элементарной частицы, поля скоростей деформаций и поля скоростей вращения элементарной частицы как твердого тела, т.е. $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + C d\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}$.

О.4.1. Вектор $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ называется вихрем скорости.

Рассмотрим «жидкую» материальную линию L , состоящую из одних и тех же материальных точек. Для материальной линии справедлива параметризация (рис. 65)

$$\mathbf{R}(s, t, \tau) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t)\tau + \dots, \quad 0 \leq s \leq s_0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0. \quad (4.1)$$

Вычислим интеграл

$$\Gamma[L] = \int_0^{s_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t) \mathbf{a}(s, t) ds, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{a}(s, t)$ — единичный вектор, касательный к линии L , а s — натуральный параметр.

О.4.2. Интеграл (4.2) называется циркуляцией скорости вдоль кривой L .

Если L — замкнутый контур, то $\Gamma[L]$ — циркуляция вдоль контура L .

Л. (Томсон). Производная по времени циркуляции скорости вдоль материальной жидкой линии вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t) \mathbf{a}(s, t) ds &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^2(N) - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2(M) + \\ &+ \int_0^{s_0} \mathbf{w}(\mathbf{r}(s), t) \mathbf{a}(s, t) ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

▲ Производная по времени в (4.3) равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s_0} \mathbf{v}(\mathbf{R}(s, t, \tau), t + \tau) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R}(s, t, \tau) ds \Big|_{\tau=0} &= \\ = \int_0^{s_0} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \mathbf{a} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right] ds &= \int_0^{s_0} \left[\mathbf{w} \mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда и следует равенство (4.3), если учесть выражение для ускорения (1.2). ▼

С.1. Если жидкий материальный контур L замкнут, то точка M совпадает с точкой N и

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} ds = \oint_L \mathbf{w} ds. \quad (4.4)$$

С.2. Если на замкнутый контур L натянуть гладкую поверхность Σ , то по формуле Стокса

$$\oint_L \mathbf{v} ds = \oint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{v} n d\sigma = \oint_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma.$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности Σ , из конца которой обход контура L происходит против часовой стрелки. Согласно равенству (4.4)

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma = \oint_L \mathbf{w} ds.$$

Т (Томсон). Если массовые силы потенциальны, а идеальная жидкость баротропна, то циркуляция по любому жидкому материальному контуру остается постоянной во все время движения.

▲ Уравнение Эйлера (2.3), описывающее движение жидкости в этом случае, имеет вид

$$\mathbf{w} = -\nabla V - \nabla P, \quad P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad \rho = \rho(p).$$

Далее

$$\oint_L \mathbf{w} ds = - \oint_L (\nabla V + \nabla P) ds = - \oint_L \frac{\partial}{\partial s} (V + P) ds = 0$$

и согласно формуле (4.4) циркуляция скорости по замкнутому контуру L постоянна. ▼

С. (Лагранж). Если в начальный момент времени поле скоростей идеальной баротропной жидкости, движущейся в потенциальном поле, было безвихревым ($\text{rot} \mathbf{v} \equiv 0$), то вихрь скорости будет равен нулю во все время движения.

▲ По теореме Томсона и следствию 2

$$\int_{\Sigma} \Omega \mathbf{n} d\sigma = 0$$

во все время движения для любой гладкой поверхности Σ , поскольку вихрь скорости $\Omega \equiv 0$ в начальный момент времени. Учитывая произвольность поверхности Σ , приходим к выводу, что $\Omega \equiv 0$ в рассматриваемой области движения во все моменты времени. ▼

Теорема Томсона и ее следствие позволяют выделить важный класс потенциальных течений идеальной баротропной жидкости, когда поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ищется в виде $\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)$, где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — скалярное поле — потенциал скоростей. Особенно эффективным оказывается этот подход при исследовании плоских движений идеальной несжимаемой жидкости, так как в этом случае применим аппарат теории функций комплексного переменного и конформных отображений.

§ 10.5. ВИХРЕВЫЕ ЛИНИИ И ТРУБКИ. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

О.5.1. Линия, касательная к которой совпадает с вектором вихря, называется вихревой линией.

Семейство вихревых линий является общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}(s), t), \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot}\mathbf{v}.$$

О.5.2. Совокупность вихревых линий, проходящих через замкнутый контур, никакая часть которого не является вихревой линией, называется вихревой трубкой.

О.5.3. Циркуляция скорости вдоль контура, охватывающего вихревую трубку, называется интенсивностью вихревой трубки.

Покажем, что определение 5.3 корректно, т.е. не зависит от выбора контура, охватывающего вихревую трубку. Пусть Σ — вихревая трубка и L, L' — два контура, охватывающие трубку Σ (рис. 66). Если MN — вихревая линия, по которой проведен разрез трубки Σ , то контур $MNL'N'M'L$ ограничивает поверхность Σ . По теореме Стокса имеем

$$\int_{\Sigma} \text{rot}\mathbf{v}\mathbf{n} d\sigma = \int_{MN} \mathbf{v}ds + \oint_{L'} \mathbf{v}ds + \int_{N'M'} \mathbf{v}ds - \oint_L \mathbf{v}ds.$$

Здесь ds — элементарный вектор, касательный к соответствующей кривой. Вихрь скорости принадлежит касательной плоскости к вихревой трубке Σ , а \mathbf{n} — нормаль к Σ . Значит, скалярное произведение $\text{rot}\mathbf{v}\mathbf{n} = 0$. Циркуляции по кривым MN и $N'M'$ равны и противоположны по знаку, так как интегрирование ведется вдоль одной и той же кривой, но в противоположных направлениях. Отсюда следует, что

$$\oint_L \mathbf{v}ds = \oint_{L'} \mathbf{v}ds.$$

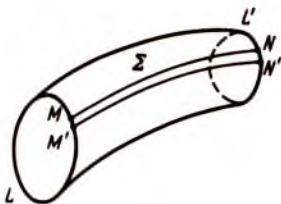


Рис. 66

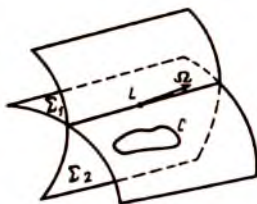


Рис. 67

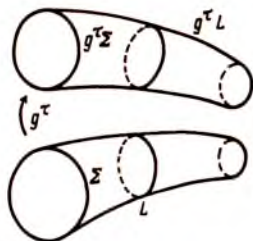


Рис. 68

Т.1 (Гельмгольц). При движении идеальной баротропной жидкости в потенциальном поле сил частицы жидкости, образующие вихревую линию в начальный момент времени, образуют вихревые линии во все последующие моменты времени.

▲ Пусть L вихревая линия, а Σ_1 и Σ_2 — две поверхности, целиком состоящие из вихревых линий, и $L = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ (рис. 67). Вектор вихря Ω принадлежит касательной плоскости в каждой точке поверхностей Σ_1 , Σ_2 и ортогонален к соответствующим нормальям: $\Omega \mathbf{n} = 0$ на Σ_1 и Σ_2 . При движении поверхности Σ_1 и Σ_2 переходят в поверхности $g^t \Sigma_1$ и $g^t \Sigma_2$, где g^t — однопараметрическая непрерывная группа преобразований

$$g^t \mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tau + \dots, \quad \tau \in [0, \tau_0].$$

Произвольный замкнутый контур C на Σ_1 или Σ_2 преобразуется в контур $g^t C$ и по теореме Томсона

$$\oint_C \mathbf{v} ds = \oint_{g^t C} \mathbf{v} ds.$$

С другой стороны, по теореме Стокса

$$\oint_C \mathbf{v} ds = \int_D \text{rot} \mathbf{v} nd\sigma = 0,$$

где D — часть поверхности Σ_1 или Σ_2 , ограниченная контуром C . Равенство нулю последнего интеграла следует из того, что $\Omega \mathbf{n} = 0$ на Σ_1 и Σ_2 . Тогда

$$\oint_{g^t C} \mathbf{v} ds = \int_{g^t D} \text{rot} \mathbf{v} nd\sigma = 0$$

и, поскольку контур C произволен (соответственно произвольны области D и $g^t D$), то $\Omega \mathbf{n} = 0$ на $g^t \Sigma_1$ и $g^t \Sigma_2$. Другими словами, поверхности, образованные вихревыми линиями, переходят в поверхности, также образованные вихревыми линиями. Отсюда следует, что пересечение поверхностей $g^t \Sigma_1 \cap g^t \Sigma_2$ есть вихревая линия

(вектор $\text{rot } \mathbf{v}$ в точке, принадлежащей пересечению, принадлежит двум касательным плоскостям, а значит, он касается линии пересечения). ▼

Т.2 (Гельмгольц). *При движении идеальной баротропной жидкости в потенциальном поле сил интенсивность любой вихревой трубки остается постоянной.*

▲ Согласно первой теореме Гельмгольца вихревая трубка Σ при движении жидкости переходит в вихревую трубку $g^T\Sigma$, а контур L , охватывающий Σ , переходит в контур g^TL (рис. 68). По теореме Томсона

$$\oint_L \mathbf{v} ds = \oint_{g^TL} \mathbf{v} ds,$$

что и означает сохранение интенсивности вихревой трубки. ▼

Вихревые движения воздуха в атмосфере Земли и воды в океанах существенным образом влияют на погоду и климатические условия в тех или иных районах Земли. Модель идеальной баротропной жидкости не годится для описания движения воздуха в атмосфере Земли и воды в океанах на больших временных интервалах. В частности, при движении воздуха условие баротропности заменяется уравнением состояния, содержащим температуру, и уравнения движения дополняются уравнением, описывающим изменение температурного поля. При движении воды в океанах на больших интервалах времени существенным оказывается вязкое трение. Эти обстоятельства влияют на рождение, развитие и диссипацию вихревых движений (циклонов) в атмосфере и океанах Земли.

§ 10.6. ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

Простейшая модель диссипативных сил была рассмотрена в теории малых колебаний (см. гл. 7), когда соответствующие обобщенные силы порождаются квадратичной диссипативной функцией Релея. Аналогичная модель рассеяния энергии, хорошо согласующаяся с экспериментом, может быть построена в случае движения баротропной жидкости.

Изменение расстояний между точками элементарной частицы определяется тензором скоростей деформаций (см. § 10.4)

$$C = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

В частности, $((d\mathbf{R})', d\mathbf{r}) = (C d\mathbf{r}, d\mathbf{r})$, поскольку $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\tau + \dots$
 $(d\mathbf{R})' = \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{r} d\mathbf{r}$, а точка означает дифференцирование по τ и подстановку $\tau = 0$. Квадратичный по скоростям диссипативный функционал, описывающий рассеяние энергии в однородной изотропной вязкой жидкости, должен зависеть от инвариантов тензора скоростей деформаций (6.1), так как он обязан сохранять свое значение при замене исходной системы координат на систему с другой ориентацией. Инварианты тензора скоростей деформации равны

$$I_C = \sum_{i=1}^3 c_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$II_C = \sum_{i < j}^3 (c_{ii}c_{jj} - c_{ij}^2),$$

$$III_C = \det \|c_{ij}\|.$$

Квадратичный диссипативный функционал зададим в виде

$$D[\mathbf{v}] = \int_{\Omega} (k_1 I_C^2 + k_2 II_C) dx. \quad (6.2)$$

Здесь k_1, k_2 — постоянные, характеризующие вязкость жидкости, Ω — область, в которой рассматривается движение вязкой жидкости. Симметричный тензор скоростей деформаций C можно путем замены системы координат привести к диагональному виду $\operatorname{diag}\{c_1, c_2, c_3\}$. Подынтегральное выражение в (6.2) примет в этом случае вид $k_1(c_1 + c_2 + c_3)^2 + k_2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)$. Из условия положительной определенности последнего выражения по переменным c_1, c_2, c_3 вытекают неравенства $k_1 > 0, 0 < -k_2k_1^{-1} < 3$. Функционал (6.2) представим в форме

$$D[\mathbf{v}] = \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}^2 \right] dx, \quad (6.3)$$

где λ, μ называются коэффициентами вязкости и связаны с постоянными k_1, k_2 равенствами $\lambda = 2k_1 + k_2, 2\mu = -k_2$. Заметим, что функционалы (6.2) и (6.3) аналогичны квадратичным функционалам потенциальной энергии в теории упругости малых деформаций (см. § 9.2). Работа диссипативных сил на возможных перемещениях представляется вариацией

$$\begin{aligned} \delta A_d &= -(\nabla D[\mathbf{v}], \delta \mathbf{R}) = \\ &= - \int_{\Omega} \left[\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \delta \mathbf{R} + \mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} \left(\frac{\partial \delta R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta R_j}{\partial x_i} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Если в выражении (6.4) вектор возможных перемещений $\delta \mathbf{R}$ заменить на вектор действительных перемещений $d\mathbf{R} = \mathbf{v}dt$, то с учетом квадратичности функционала (6.3) получим

$$dA_d = -(\nabla D[\mathbf{v}], \mathbf{v})dt = -2D[\mathbf{v}]dt.$$

Следовательно, вязкие силы рассеивают в единицу времени мощность $-2D[\mathbf{v}]$.

Вариацию (6.4) добавим в левую часть принципа Д'Аламбера—Лагранжа (2.2) и получим

$$\int_{\Omega} \{[\rho(\mathbf{w} - \mathbf{f}) + \nabla p]\delta \mathbf{R} - \delta A_d\} dx - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} + \mathbf{p}\mathbf{n})\delta \mathbf{R} d\sigma = 0. \quad (6.5)$$

Вариацию (6.4) преобразуем с использованием формулы Остроградского—Гаусса (преобразования аналогичны произведенным в § 9.3). Имеем

$$\begin{aligned} \delta A_d &= - \int_{\Omega} \left[\operatorname{div}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta \mathbf{R}) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \delta \mathbf{R} + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} \frac{\partial \delta R_i}{\partial x_j} \right] dx = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} \delta \mathbf{R} d\sigma + \\ &+ \int_{\Omega} \left[\lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \delta \mathbf{R} - 2\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 c_{ij} \delta R_i \right) + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_j} \delta R_i \right] dx = \quad (6.6) \\ &= \int_{\Omega} [(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}] \delta \mathbf{R} dx - \\ &- \int_{\partial\Omega} \left[\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} \delta \mathbf{R} + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 c_{ij} \gamma_j \delta R_i \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — компоненты внешней нормали \mathbf{n} к поверхности $\partial\Omega$. При преобразованиях в (6.4) учитывалось равенство

$$\sum_{j=1}^3 2 \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Вариационный принцип (6.5) с учетом равенства (6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [\rho \mathbf{w} - \rho \mathbf{f} + \nabla p - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v}] \delta \mathbf{R} dx - \\ &- \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} + \mathbf{p}\mathbf{n} - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} - 2\mu \mathbf{C}\mathbf{n}) \delta \mathbf{R} d\sigma = 0. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Поскольку вариация $\delta \mathbf{R}$ произвольна, то из (6.7) согласно основной лемме вариационного исчисления получим уравнения Навье—Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = \\ = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.8)$$

и граничные условия

$$\mathbf{F} = -p \mathbf{n} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{n} + 2\mu \operatorname{Cn}, \quad (6.9)$$

если вариация $\delta \mathbf{R}$ на поверхности $\partial \Omega$ также произвольна (свободная поверхность). Если вязкая жидкость движется внутри фиксированной области Ω , то на ее границе $\partial \Omega$ принимаются обычно граничные условия: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ на $\partial \Omega$ и соответственно $\delta \mathbf{R} = 0$ на $\partial \Omega$.

Правая часть равенства (6.9) представима в виде $P \mathbf{n}$, где $P = \| p_{ij} \|$ — симметричный тензор напряжений с компонентами

$$\begin{aligned} p_{ii} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3; \\ p_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, плотность ρ постоянна, а уравнения Навье—Стокса принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (6.10)$$

где $\nu = \mu \rho^{-1}$ — кинематический коэффициент вязкости. Отметим, что свойство вязкости несжимаемой жидкости характеризуется одним параметром.

Уравнения Навье—Стокса (6.8) совместно с уравнением состояния $p = \Phi(\rho)$ и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

образуют полную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую движение баротропной вязкой жидкости. Точное интегрирование этих уравнений удастся лишь в редких случаях.

П. В качестве примера рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости в поле силы тяжести (рис. 69). Пусть толщина слоя жидкости равна h , а скорость $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{i}$, где \mathbf{i} — орт оси Ox . Легко проверить, что уравнение неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ справедливо для выбранного поля скоростей, а уравнения Навье—Стокса (6.10) в проекциях на оси Ox и Oy принимают вид

$$v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g \sin \alpha = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \alpha = 0.$$

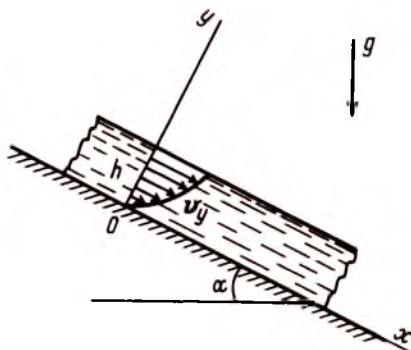


Рис. 69

Вследствие стационарности движения давление $p = p(y)$. На свободной поверхности при $y = h$ давление атмосферного воздуха постоянно и равно p_0 . Из второго уравнения (6.11) находим

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha (h - y),$$

так как при $y = h$ давление должно совпадать с p_0 . Это следует из граничных условий (6.9), которые принимают вид

$$-p_0 \mathbf{j} = -p(h) \mathbf{j} + 2\mu C \mathbf{j}, \quad \mu = \rho\nu, \quad \mathbf{j} = \mathbf{n},$$

$$2C = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial v(h)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v(h)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем $p(h) = p_0$ и $\partial v(h)/\partial y = 0$. Первое уравнение системы (6.11) имеет решение

$$v(y) = \frac{g}{\nu} \sin \alpha \left(hy - \frac{y^2}{2} \right),$$

удовлетворяющее условию $\partial v(h)/\partial y = 0$.

Вычислим количество жидкости, протекающей через сечение, ортогональное оси Ox и имеющее по оси Oz единичный размер. Имеем

$$Q = \int_0^h v(y) dy = \frac{gh^3 \sin \alpha}{3\nu}$$

Найденное решение задачи описывает ламинарное течение жидкости и реализуется экспериментально при малых значениях безразмерного параметра $R = \nu_0 h \nu^{-1}$ (число Рейнольдса), где $\nu_0 = Qh^{-1}$ — среднее значение скорости жидкости. Экспериментальная реализация найденного решения свидетельствует об его устойчивости. При увеличении числа Рейнольдса ламинарное течение становится неустойчивым, и движение жидкости приобретает турбулентный характер, когда траектории отдельных частиц имеют сложный хаотический характер. Математическая теория турбулентных движений выходит за рамки данного курса теоретической механики.

Основная

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1960.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. М.: Наука. Ч. 1, 1965. Ч. 2, 1966.
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике М.: Наука, 1978.
5. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 1992.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика, Т. 6: Гидромеханика, Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973.
8. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.
9. Татарinov Я.В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Дополнительная

1. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1978.
2. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986.
3. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. I и II. М.: Изд-во механико-механического ф-та МГУ, 1997.
4. Кочин Н.Е., Кибель Н.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1979.
5. Ламб Г. Гидромеханика. М.: Гостехиздат, 1947.
6. Лич Дж.У. Классическая механика. М.: ИЛ, 1961.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
8. Синг Дж.Л. Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963.
9. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.

Учебное издание

ВИЛЬКЕ

Владимир Георгиевич

Теоретическая механика

Зав. редакцией

Л.А. Николова

Редактор

Р.А. Бунатян

Художественный редактор

Л.В. Мухина

Технический редактор

Н.И. Матюшина

Корректоры

Г.В. Сибирицева, Г.А. Ярошевская

Верстка на компьютере

О.А. Пелипенко, Е.Е. Дементьев

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97 г.

Подписано в печать 02.04.98. Формат 60×88 1/
Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Офсетная печат.

Усл. печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 15,32.

Тираж 3000 экз. Заказ 4819.

Изд. № 5925.

Ордена «Знак Почета»

Издательство Московского университета.

103009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ,
140010, Люберцы, Октябрьский пр. 403.

Тел. 554-21-86

