МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

П. М. Симонов

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть первая

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров
«Прикладная математика и информатика»
и «Бизнес-информатика»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2019

УДК 519.862.4:330.542
ББК 65.012.1
С375

Симонов П. М.

С375 Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс]: учеб. пособие: в 2 ч. / П. М. Симонов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – Ч. 1. – 3,45 Мб; 230 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/economiko-matematicheskoe-modelirovanie-simonov-1.pdf. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3378-4

Теоретические основы экономико-математического моделирования в пособии излагаются с широким использованием разнообразного математического аппарата. Принципиальное отличие этих моделей заключается в том, что они носят динамический характер. При помощи динамических моделей (и статических, если в этом есть необходимость) обоснованы выводы экономических закономерностей. Главное в этом учебном пособии – это модели предприятий, которым посвящены с пятого по девятый параграфы. Решение ряда экономических задач доведено до численных ответов. Для приобретения практических навыков применения моделей в каждую главу включены различные формы учебных заданий (вопросы, задачи и т. п.).

Пособие предназначено для бакалавров, изучающих применение математических моделей и методов в экономических исследованиях.

УДК 519.862.4:330.542
ББК 65.012.1

Издается по решению ученого совета экономического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00332 А)

Рецензенты: кафедра «Цифровые технологии в образовании» Вятского государственного университета (рецензент – д.ф.-м.н., профессор ***А. В. Шатров***);

д.э.н., к.ф.-м.н, профессор кафедры информационных технологий и цифровой экономики Ивановского государственного химико-технологического университета ***М. Б. Ермолаев***

ISBN 978-5-7944-3378-4

Предисловие

Предлагаемое учебное издание предназначено в первую очередь бакалаврам-экономистам, однако изучение представленного в нем материала требует соответствующего уровня математической подготовки. В пособии описано содержание определенных экономических явлений, для иллюстрации и объяснения которых применяются математические модели, таблицы и графики. Вместе с тем исследование самих математических моделей нередко позволяет сделать достаточно общие выводы, которые можно рассматривать в качестве экономических законов и использовать в хозяйственной практике.

Необходимо отметить, что исследования с использованием математических моделей и методов всегда, на каждом шаге познания экономики, приводили к новым научным результатам. Именно при помощи математических моделей ученым удалось установить ряд основополагающих законов рыночной экономики. Каждый раз появление нового математического аппарата давало ощутимый толчок развитию экономической теории. Так, дифференциальное исчисление с XIX в. служило инструментом для нахождения рыночного равновесия, предельного (маржинального) анализа производства и устойчивости. Математическое программирование и теория двойственности изначально были ориентированы на оптимизацию планов производства при ограниченных ресурсах. Модели в форме дифференциальных уравнений нашли применение в исследованиях динамики товарных рынков (Л. Вальрас), моделирования многоотраслевой экономики (В. Леонтьев) и т. д. Особенно плодотворным оказалось применение моделирования и математического программирования для решения задач оптимального планирования.

Все сказанное послужило основанием для разработки цикла лекций, сочетающих изложение основ экономической теории с применением математического моделирования, и написания учебного пособия. Материалы первого издания пособия (2009) широко используются в учебном процессе на экономическом факультете Пермского государственного национального исследовательского университета и на факультете прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета.

Оно содержит изложение теории, относящейся к производству. Материал расположен по принципу усложнения применяемого математического аппарата.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» и «Бизнес-информатика» с целью углубленного изучения учебной дисциплины «Экономико-математическое моделирование».

Выражаю особую признательность Э.Д.Каданэру и С.Э.Батищевой – ими частично были написаны введение и параграфы 7, 8 и 10 (по материалам нашей совместной книги «Математические модели микроэкономики»).

Кроме того, выражаю глубокую благодарность моим бывшим студентам за возможность использовать превосходно сделанные ими записи лекций автора по курсам «Экономико-математическое моделирование», «Динамические модели экономики», «Математический анализ динамических моделей».

Искренне благодарен коллегам за задачи к параграфам и за ценные замечания – профессору В.П.Максимову, доцентам: А.Б.Бячкову, Ю.Н.Еленскому, К.Б.Кузнецову, А.Ю.Куликову, В.А.Соколову и В.А.Шишкину, старшему преподавателю А.Л.Чадову.

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ[1]

1. Исходные понятия экономической науки

В переводе с древнегреческого слово *экономика* означает искусство ведения домашнего хозяйства. С развитием общества хозяйство стало вестись не только в рамках семьи или города, но и в пределах крупного региона, страны, всего мира. В настоящее время понятие «экономика» имеет два значения: как синоним слова «хозяйство» (объект изучения) и как наука, изучающая этот объект.

Как *объект изучения* различают экономику семейного хозяйства, города, региона и страны в целом, всего мира, отрасли, предприятия и т.д. *Экономика* – это хозяйствующие субъекты (отдельные люди, их коммерческие и некоммерческие организации и т.д.) и их отношения по поводу производства, обмена, распределения, перераспределения и потребления производимых товаров и услуг (экономических благ). Существует много других определений экономики как объекта, отражающих те или иные стороны этой многогранной системы, включающей хозяйственную деятельность людей.

Экономическая наука – это совокупность знаний о хозяйственной деятельности людей. Содержанием экономической науки являются законы, которым объективно подчиняются различные субъекты экономики и их отношения. *Экономика* – это наука о том, как люди и их организации выбирают способы использования ограниченных ресурсов для производства и обмена необходимого количества различных товаров и услуг и для выполнения социальных функций в обществе.

Экономическая наука охватывает все отрасли и сферы хозяйственной деятельности человека. В экономике действуют сложные законы, и на нее воздействуют противоречивые факторы. Поэтому в отличие от естественно-

---

[1] *Батищева С.Э., Каданэр Э.Д., Симонов П.М.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2006. Гл. 1.

научных дисциплин экономическая наука не всегда дает определенные ответы на поставленные вопросы. Однако ее практическое применение имеет большое значение.

Основная *цель* изучения экономической теории состоит *в разрешении проблемы эффективности использования ограниченных ресурсов* для максимального удовлетворения потребностей людей в экономических благах, *обеспечения наивысшей полезности производимых благ*.

При изучении *рыночной экономики* хозяйственная деятельность рассматривается в рамках действующего законодательства, которое предоставляет населению страны определенные *свободы*.

Исходя из уровня изучения экономическую теорию разделяют на две достаточно самостоятельные отрасли знаний: макроэкономику и микроэкономику.

• **Макроэкономика** – *наука о народном хозяйстве страны в целом. Субъектами макроэкономики являются производственный сектор – все предприятия (фирмы) и иные производители товаров и услуг, домохозяйства – все население страны, государство (правительство) и заграница*. Народное хозяйство страны выполняет функции *производства, обмена, распределения, перераспределения и потребления* экономических благ. В рыночных условиях могут выполняться функции производства, обмена и потребления. Распределение и перераспределение экономических благ осуществляет правительство (исполнительный орган государства), применяя административные методы.

Экономические блага – это такие товары и услуги, которые производит народное хозяйство страны для удовлетворения различных потребностей населения и организаций. Для производства экономических благ затрачивается труд людей.

• **Микроэкономика** – *наука о хозяйственной деятельности отдельных субъектов экономики*. *Субъектами микроэкономики являются отдельные предприятия (фирмы) и иные производители товаров и услуг, рынки разной* *продукции, отдельные люди и их объединения.*

В настоящем пособии хозяйство рассматривается в разрезе самостоятельных субъектов – коммерческих организаций (предприятий, фирм и т.д.), отдельных групп людей и рынков разных видов продукции в условиях конкуренции. Структуризация хозяйствующих субъектов осуществляется только в той мере, которая позволяет анализировать условия равновесия, оптимизации и рационального выбора решений. Изучению подлежат экономические законы, действующие на уровне таких субъектов.

Товары, услуги и выполняемые работы удовлетворяют разнообразные потребности человека и общества, они приносят пользу, т.е. их применение доставляет человеку благо. По количеству и качеству потребляемых человеком благ определяется его *благосостояние*.

Создаваемые в экономике блага называют *продукцией*.

Продукция (продукт) *– это вещественные или информационные элементы, созданные в процессе производства, а также предоставляемые услуги и выполняемые работы*.

Товары *– это продукция, предназначенная для купли-продажи*.

Услуги или работы *– это труд по осуществлению обмена (купли-продажи), созданию, изготовлению, обработке, перемещению продукции и т.п.* Например, строительные, ремонтные, сельскохозяйственные работы, торговые или транспортные услуги.

Произведенная экономикой продукция подлежит обмену на деньги или на другой продукт либо административному распределению для потребления (использования, применения) в дальнейшем. Основными показателями результатов производства являются *чистый* и *валовой продукты*.

Валовой продукт (продукция) *– статистический показатель, характеризующий объем продукции народного хозяйства, сфер и отраслей экономики, объединений и предприятий в денежном выражении. Если же рассматривать этот показатель с точки зрения затрат на производство продукции, то валовый продукт образует сумму текущих материальных* *затрат, амортизации и чистой продукции.*

Чистый продукт *– часть продукта, которая остается при вычитании из него материальных затрат. Для отрасли чистый продукт – разность между валовой продукцией и материальными затратами, включая амортизационные отчисления. Таким образом, чистый продукт отрасли состоит из оплаты труда и чистого дохода (прибыли) отрасли.*

Ведение хозяйства всегда связано с необходимостью использования ресурсов. В широком понимании ***ресурс*** *– это источник или запас чего-нибудь*. Для осуществления хозяйственной деятельности требуются разнообразные экономические ресурсы. К ним относят природные и трудовые ресурсы, капитал в денежной форме и в натуральном виде и т.д.

Природные ресурсы *– это все предметы окружающей природной среды, которые человек использует для производства разнообразной продукции*. Они включают площади целинных земель, лес, водные богатства рек, озер и морей, запасы полезных ископаемых. Некоторые из этих ресурсов расходуются безвозвратно, например нефть. Другие самовоспроизводятся, например, рыбные запасы. Для восстановления третьих необходимо выполнение восстановительных работ, например, возобновление лесных богатств. Экономическая особенность этих богатств состоит в том, что *природные ресурсы не имеют стоимости*, так как на их «производство» не затрачивается труд.

Источником живого и овеществленного труда в производстве выступают соответствующие ресурсы: трудовые ресурсы и производственный капитал.

Трудовые ресурсы *– это физическая сила, знания и профессиональные навыки работающих людей*. Ресурсы труда в разных странах различаются по уровню профессиональной подготовки. Соотношение групп разных специальностей определяется специализацией экономик. Структура трудовых ресурсов в нефтедобывающих странах в значительной степени отличается от структуры таковых в промышленно развитых странах.

Производственный капитал *– это ресурсы, посредством которых и из* *которых производятся товары, выполняются услуги и осуществляются работы*. Словом ***«капитал»*** в широком смысле *обозначают такие денежные средства (их вещественное или информационное воплощение) в экономике, которые в результате использования труда приносят доход их владельцам*.

Каждый субъект рыночной экономики стремится эффективно использовать ресурсы. При этом он желает получить наибольшее количество качественной продукции и/или затратить на производство определенного количества продукции ресурсы, имеющие минимальную стоимость.

Для оценки эффективности хозяйственной деятельности в каждой отрасли вводят специальные показатели, соответствующие конкретным экономическим интересам.

При каждом общественно-политическом устройстве страны действуют соответствующие способы ведения народного хозяйства. В настоящем пособии рассматривается экономика стран, в которых соблюдается право частной собственности на денежный и натуральный капитал (станки, оборудование и т.д.), на предпринимательскую деятельность, на произведенную продукцию и свободную торговлю, – стран с рыночной экономикой и капиталистическим общественно-политическим устройством. Владение капиталом и землей дает возможность получения платы за их использование, получения дохода в форме *процента или ренты*. В капиталистическом государстве частная собственность установлена законодательно.

2. Особенности моделирования предприятия в рыночных условиях

Основным звеном микроэкономики является предприятие. Изучение экономического поведения предприятий-товаропроизводителей (коммерческих организаций, фирм, частных предпринимателей) необходимо для раскрытия закономерностей формирования рыночного предложения товаров и услуг, принципов ценообразования в различных рыночных структурах, минимизации издержек производства, оптимального соотношения используемых ресурсов и т.д. В рыночной экономике каждое предприятие действует как самостоятельный хозяйствующий субъект. Вместе с тем все субъекты экономики находятся в рыночной среде и подчиняются принятым законам страны.

Хозяева предприятий стремятся получить наибольший эффект от производственной деятельности. Теория рыночной экономики в целом строится на положении о том, что главным побудительным мотивом является получение прибыли. Поэтому основной целью частного предпринимательства любой формы является максимизация прибыли. В России законодательно установлено, что хозяева предприятий (акционеры, участники и т.д.) получают личный доход из прибыли предприятия. В Гражданском кодексе записано, что коммерческими организациями являются юридические лица, «преследующие извлечение прибыли в качестве основной цели деятельности».

Прибыль является одновременно и источником получения дохода хозяев предприятия. Именно доход хозяев служит главным источником денежных средств для дальнейшего развития предприятия. Если прибыль отрицательная, т.е. предприятие несет убытки, то в рыночной экономике такое предприятие разоряется и прекращает свою деятельность, а производимая на этом предприятии продукция «покидает» свой рынок.

В экономической науке существует ряд принципиальных особенностей изучения, анализа и теоретического обобщения различных сторон деятельности предприятия. Первопричина всех особенностей состоит в том, что предприятие находится в рыночной среде. В соответствии с этими особенностями в пособии наиболее детально освещены следующие характеристики деятельности предприятия.

1. Рыночный принцип ценообразования. Рыночная среда обусловливает поведение предприятия при покупке сырья, материалов, других ресурсов производства, а также при продаже производимой продукции.

Цена на производимую продукцию устанавливается на товарных рынках. В первую очередь цена зависит от конкурентной борьбы продавцов в отрасли, производящей один вид товаров или услуг, в меньшей степени – от издержек каждого отдельного предприятия.

Цены на сырье, материалы и иные элементы оборотных средств, из которых предприятие изготавливает продукцию, также устанавливаются на товарных рынках, на рынках других товаров и услуг.

Цены на машины, оборудование и другие основные средства, с помощью которых изготавливается продукция, также определяются на соответствующих рынках.

Заработную плату работников предприятий рассматривают как цену на рабочую силу. Заработная плата устанавливается на рынке труда в условиях противоборства предпринимателей с профсоюзами.

Цены на сырье, машины, рабочую силу и т.п. устанавливаются на рынках факторов производства.

2. Все рыночные цены формируются в результате баланса спроса покупателей и предложения продавцов. При этом важнейшим фактором ценообразования является степень конкурентной борьбы. Идеальной моделью для изучения является совершенная конкуренция.

3. Рыночные цены изменчивы. Поэтому состояние предприятия в рыночных условиях также имеет тенденцию к быстрому изменению. Вместе с тем существуют особенности экономических механизмов обновления основных и оборотных средств предприятия, рабочей силы. Различная динамика развития предприятия отчетливо видна в циклах обращения ресурсов: оборачиваемости оборотного капитала и воспроизводства основного капитала предприятия, поэтому теоретически предприятие рассматривают либо в краткосрочном, либо в долгосрочном периоде времени.

4. Конкурентные отношения на свободном рынке требуют специальных исследований. Полученные на их основе выводы дают возможность принимать научно обоснованные решения и аргументировать рыночную стратегию предприятия в конкурентных условиях. Однако реальные рыночные отношения могут существенно отличаться от отношений в идеальной модели. Поэтому на фоне ряда моделей несовершенной конкуренции особо выделяется модель совершенной конкуренции.

5. В изучении моделей микроэкономики центральное место занимают разнообразные соотношения дохода (выпуска продукции, объема производства) и издержек (затрат ресурсов, оплаты ресурсов, расходов) на их производство. Существует два противоположных по форме подхода к теоретическому выражению этих соотношений.

Один подход состоит в рассмотрении зависимости выпуска продукции от используемых ресурсов. Эта зависимость может отражать натуральное количество продукции или денежную выручку от продаж, получаемый доход от количества или стоимости ресурсов.

Зависимость выпуска продукции от используемых и применяемых ресурсов подчиняется так называемому технологическому закону. Основной хозяйственный интерес представляют выручка от продажи продукции и затраты денежных средств на оплату ресурсов.

Математической формой технологического закона является **производственная функция**. Ресурсы или затраты на их оплату в этом случае называют факторами производства, объем выпуска продукции зависит от значений факторов производства. При этом следует иметь в виду, что произведенная продукция будет востребована по рыночным ценам, оплату ресурсов предприятие осуществляет также по рыночным ценам. Денежная оценка продукции и ресурсов дает возможность численно соизмерять затраты с результатами производственной деятельности.

Другой подход состоит в изучении обратных зависимостей – используемых ресурсов производства от производимой продукции. Ресурсы и продукция могут быть отражены в натуральных или денежных единицах. Денежная оценка продукции и ресурсов дает возможность численно соизмерять затраты с результатами производственной деятельности. Зависимость затрат ресурсов от объемов выпуска продукции отражается в математической форме функций производственных затрат.

6. Динамизм предприятия и товарных рынков требует пристального внимания к их текущему состоянию и к тенденциям изменения состояния. В экономической теории доказано, что при определенных условиях оптимальным является состояние рыночного равновесия. Под воздействием множества внешних сил предприятие или рынок могут быть выведены из состояния равновесия. Стремление экономической системы автоматически вернуться в старое или перейти в новое состояние равновесия характеризует ее устойчивость. Если экономическая система неустойчива, то она не может достигнуть равновесия.

Равновесие предприятия исследуют при помощи моделей, предназначенных для изучения экономической эффективности производства. В результате математических исследований этих моделей в экономической теории сформулированы условия рыночного равновесия. Эти условия принято называть законами рыночной экономики.

Производственные функции и функции производственных затрат позволяют сформулировать две экономические концепции: принцип прибыльности и принцип «затраты – выпуск». Первый основан на учете доходов и затрат производства с выделением прибыли предприятия в качестве целевого показателя. В основе второго лежит равенство дохода от реализации продукции и затрат на оплату ресурсов.

Принцип прибыльности

Для создания и исследования моделей согласно принципу прибыльности применяют три основных типа экономических показателей: доходы, издержки и прибыль.

В результате теоретических и статистических исследований были установлены стабильные формы зависимости и на их основе сделаны научные выводы относительно характера двух типов зависимостей: зависимости выпуска продукции (выручки от продаж, полученного дохода и т.п.) от издержек производства на использование ресурсов и обратные зависимости – издержек производства от выпуска продукции. Очевидно, что оба типа соотношений по виду являются положительными зависимостями.

Однако сформулированный характер важнейших зависимостей в производстве дает лишь поверхностное представление об этих экономических закономерностях. На предприятии затрачиваются ресурсы, различающиеся по характеру влияния на выпуск продукции и по экономической природе. Как правило, предприятие производит не один вид продукции. При этом оно стремится сократить, свести до минимума издержки на оплату ресурсов при любом выпуске продукции и/или получить максимально возможный доход за счет увеличения объемов производства и/или улучшения качества продукции. Поэтому руководители планируют (программируют) такой набор разных видов выпускаемой продукции и такое количественное соотношение разных видов продукции, чтобы ресурсы использовались наиболее полно и давали максимальный экономический эффект. Для планирования производства созданы методы математического программирования, которые позволяют из множества возможных вариантов выбирать оптимальные планы предприятия. В оптимальном планировании широко применяют методы линейного, нелинейного и динамического программирования.

Принцип «затраты – выпуск»

Впервые принцип «затраты – выпуск» применил В.В.Леонтьев[2] (W.W.Leontief) в макроэкономических исследованиях. Идея этого принципа состоит в том, что выпуск продукции приносит доход, который полностью затрачивается на оплату ресурсов. В модели предприятия отражается производство чистого продукта и получение дохода в размере добавленной стоимости проданного продукта (после исключения затрат на покупные материалы и сырье). Оплату исходных материалов и сырья для изготовления продукции и возмещение этих затрат в модель предприятия не включают. Это дает возможность рассматривать выпуск продукции в зависимости только от двух факторов – оплаты труда и капитала. Оплату труда получают наемные работники. Плату за использование производственного капитала получают хозяева, вложившие свой капитал в данное предприятие.

Из принципа «затраты – выпуск» следует, что при нормальной работе затраты предприятия на оплату ресурсов не могут превышать денежный доход от реализации произведенной продукции. Пограничным условием сохранения предприятия, выживания его в конкурентной борьбе является равенство затрат доходу от реализации продукции. При соблюдении этого равенства предприятие находится в состоянии рыночного равновесия.

При анализе затрат и выпуска могут учитываться возможности изменения структуры (соотношения) выпуска продукции различных видов, изменения самой технологии производства, методов организации и управления производством, а также возможности взаимной замены затрачиваемых ресурсов. Количество и качество выпускаемой продукции и эффективность производства при этом могут изменяться. Теоретическим обобщением

---

[2]Американский экономист российского происхождения, создатель теории межотраслевого анализа, лауреат Нобелевской премии по экономике за 1973 год «за развитие метода „затраты – выпуск“ и за его применение к важным экономическим проблемам». (https: // ru.wikipedia.org / wiki / %D0 %9B %D0 %B5 %D0 %BE %D0 %BD %D1 %82 %D1 %8C %D0 %B5%D0%B2,_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%92 %D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87).

рассматриваемых соотношений является технологический закон и его математические модели в форме производственных функций.

При известных ценах на взаимозаменяемые ресурсы производства и на продукцию модель в форме производственной функции позволяет определять рыночное равновесие предприятия, выбирать оптимальное соотношение разных ресурсов в производстве, решать ряд задач анализа экономических характеристик предприятия в рыночных условиях.

Уяснению принципа «затраты – выпуск» помогает структурная схема предприятия (во взаимосвязи с потребителями продукции), представленная на рис. 1.

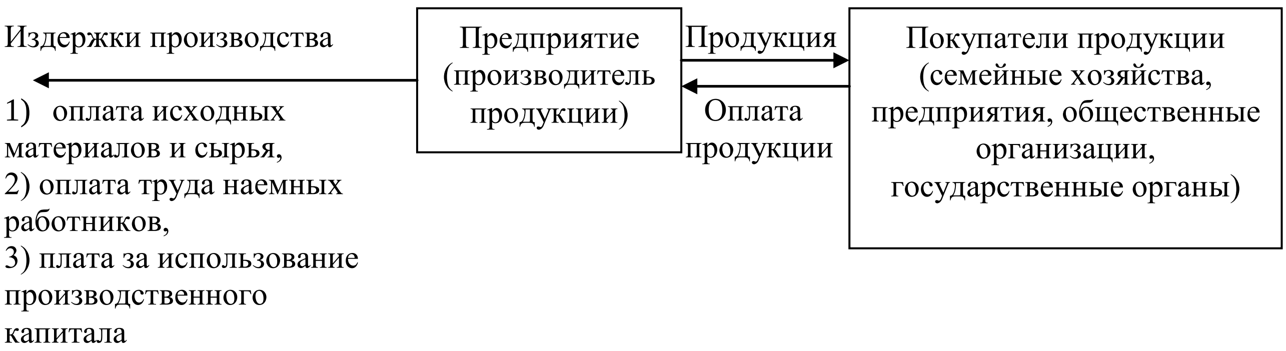


Рис. 1.

3. Структура ресурсов предприятия

Благосостояние населения страны зависит от количества и качества производимой продукции. Для обеспечения производственной деятельности различных предприятий и частных предпринимателей необходимы соответствующие ресурсы. Приобретение ресурсов требует затрат денежных средств. Каждый вид ресурса имеет структуру. Вместе с тем при изучении ресурсов учитывают решаемые задачи моделирования предприятий. При моделировании зависимости выпуска продукции от затрат ресурсов в производстве обычно выделяют *трудовые ресурсы* и *производственный капитал*.

Трудовые ресурсы *предприятия имеют следующую структуру: административно-управленческий и вспомогательный персонал предприятия в целом, административно-управленческий и вспомогательный персонал цехов, отделов и т.п., производственные и вспомогательные рабочие цехов и других подразделений.*

Производственный капитал *предприятия состоит из основного производственного капитала и оборотного капитала. Производственный капитал предприятия обычно рассматривают в разрезе фондов (запасов, накоплений) и определенных предметов (объектов, других единиц) разного назначения. Выделяют основные производственные фонды, оборотные фонды и фонды обращения.*

Основной капитал предприятия *определяет стоимость основных производственных фондов.* ***Основные производственные фонды*** *(ОПФ) – это составляющая производственных фондов предприятия, которая многократно используется в производстве продукции и переносит свою стоимость на эту продукцию по частям.* К ОПФ в натуральном виде относят здания, сооружения, передаточные устройства, машины и оборудование, земельные участки, лесные и водные угодья, транспортные средства и другие виды средств производства. В производстве их разделяют на активную и пассивную части. ***Активные элементы ОПФ*** предназначены для непосредственного изготовления продукции, например, станки и другое технологическое оборудование. ***Пассивные элементы ОПФ*** необходимы для создания условий работы на предприятии, например, здания и сооружения служат для пространственного отделения технологического оборудования и работников от неблагоприятной окружающей среды и для обеспечения нужных режимов работы.

Главная *особенность* ОПФ состоит в том, что при эксплуатации они физически не входят в состав производимой продукции. Поэтому предполагается, что ОПФ постепенно, по частям, «переносят свою стоимость» на производимую продукцию.

Оборотный капитал предприятия – сумма имеющихся денежных средств, стоимости предметов труда и готовой продукции.

Оборотный капитал предприятия *равен сумме имеющихся денежных средств, стоимости предметов труда и готовой продукции*. Оборотный капитал предприятия обычно рассматривают в разрезе оборотных фондов и фондов обращения.

Оборотные фонды в натуральной форме представляют собой *предметы труда* в виде запасов сырья, материалов и различных компонентов продукции. Предметы труда в процессе производства физически превращаются в готовую продукцию (с использованием вспомогательных материалов). Их стоимость полностью относят на валовую стоимость продукции.

Фонды обращения содержат запасы готовой продукции и денежные средства. При помощи денежных средств оборотный капитал обеспечивает круговорот предметов труда и готовой продукции.

Структуру производственного капитала предприятия см. в табл. 1.

Таблица 1

<table>
<tr><td>Производственный капитал</td><td colspan="2">Основной капитал предприятия</td><td colspan="3">Оборотный капитал предприятия</td></tr>
<tr><td>Производственные фонды</td><td colspan="2">Основные производственные фонды</td><td>Оборотные фонды</td><td colspan="2">Фонды обращения</td></tr>
<tr><td>Структура фондов</td><td>Активная часть</td><td>Пассивная часть</td><td>Предметы труда</td><td>Готовая продукция</td><td>Денежные средства</td></tr>
</table>

Составные части фондов предприятия можно сгруппировать по эксплуатационным характеристикам, по отраслевому или производственному назначению, по группам бухгалтерского учета, по срокам эксплуатации и т.д. в зависимости от целей моделирования.

Приведем примеры использования разных структур ресурсов в моделях настоящего пособия.

При моделировании предприятия в виде производственной функции возможен учет дохода от продажи продукции по добавленной стоимости, тогда в качестве факторов производства выступают оплата трудовых ресурсов и затраты на использование производственного капитала. Такая производственная функция применена для исследования рыночного равновесия предприятия.

Для динамической модели производства в виде передаточной функции важной характеристикой является воспроизводство производственного капитала. В процессе производства составные части ОПФ изнашиваются, оборотный капитал расходуется, их необходимо замещать. Для возмещения износа предприятия отчисляют некоторую часть полученного дохода в амортизационный фонд, который предназначен для инвестиций.

4. Экономико-математические модели и моделирование

Экономические объекты и явления обладают большой сложностью. Поэтому многие экономисты полагают, что изучение и практическое применение в экономике математических моделей и методов либо весьма ограничено, либо невозможно. Однако существует множество доказательств того, что такая позиция неверна. Для этого достаточно сослаться на выдающиеся работы лауреатов Нобелевской премии – В.В. Леонтьева, Л.В. Канторовича[3], П.Э. Самуэльсона (P.A. Samuelson)[4], которые существенно обогатили теорию и практику применения экономико-математических моделей.

Понятия *модель* и *моделирование* широко используют в научной и

---

[3]Советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». (https://ru.wikipedia.org/wiki /%D0 %9A %D0 %B0 %D0% BD% D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87,_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D0%B4_%D0%92%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87).

[4]Американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике (1970) «за научную работу, развившую статическую и динамическую экономическую теорию и внесшую вклад в повышение общего уровня анализа в области экономической науки». Считается инициатором «неоклассического синтеза» (объединения в одну концепцию неоклассической микроэкономики и кейнсианской макроэкономики) и одним из основателей неокейнсианства. (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0% A1% D0% B0% D0% BC% D1% 83% D1%8D%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BE%D0%BD,_%D0%9F%D0%BE%D0%BB_%D0%AD%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B8).

практической деятельности человека. Человек применяет арифметику и геометрию для обслуживания хозяйственной практики на протяжении тысячелетий. Слово ***модель*** *обозначает такой материальный или знаковый объект, который в процессе познания реальности заменяет объект-оригинал*. В экономических науках применяют знаковые модели. Широко используют модели в виде *схем, диаграмм, таблиц, графиков, математических формул* и т.д. Воспользуемся определением модели из монографии Л.И. Лопатникова[5].

Экономико-математическая модель – *математическое описание экономического процесса или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи (поэтому часто термины «модель» и «задача» употребляются как синонимы). Существуют еще несколько вариантов определения этого термина.*

В самой общей форме модель – условный образ объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования. При построении модели предполагается, что ее непосредственное изучение дает новые знания о моделируемом объекте. Все это полностью относится и к экономико-математической модели.

Необходимость применения моделей обусловлена тем, что некоторые объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать невозможно, например, экономическую эффективность строящихся предприятий. В других случаях натурные эксперименты требуют много времени и средств, а применение моделей существенно сокращает эти издержки.

Вид модели экономического объекта или явления зависит от ее назначения. По назначению модели можно разделить на *иллюстративные и аналитические*. Иллюстративные модели предназначены для наглядного объяснения экономических объектов и явлений. К иллюстративным моделям относятся преимущественно *схемы, диаграммы и графики.* Аналитические

[5] *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2003. С. 402–405.

модели служат для анализа определенных сторон, свойств, характеристик объектов моделирования. На основе анализа моделей осуществляют синтез реальных объектов экономики с заданными свойствами. К аналитическим моделям можно отнести *таблицы, графики и математические формулы.* Аналитические модели экономики принято называть экономико-математическими моделями (ЭММ). Наряду с методами математического анализа моделей в пособии широко применяется метод графических доказательств.

С помощью математических соотношений *математические модели* воспроизводят такие свойства экономических объектов и явлений, для изучения которых эти модели предназначены. Для получения новых знаний или нахождения нужных экономических решений модели позволяют *заменять натурные эксперименты* опытами над моделями. Вместе с тем модель не является точной копией оригинала, она должна *адекватно* отражать только такие характеристики объекта моделирования, которые подлежат изучению. Под адекватностью моделей понимают достаточно правильное отражение реальных объектов и явлений.

Слово «*моделирование»* имеет два значения:

- процесс создания таких моделей, которые соответствуют объектам моделирования и поставленным задачам;
- процесс анализа или решения модели для использования полученных ответов на поставленные вопросы.

Экономико-математическое моделирование[6] – *описание экономических процессов и явлений в виде экономико-математических моделей*. (Иногда тем же термином обозначают также реализацию экономико-математической модели на ЭВМ, т.е. «искусственный эксперимент» или машинную имитацию, машинное решение экономико-математической задачи, – однако это может вводить в заблуждение.)

---

[6]*Лопатников Л.И.* Указ. соч. С. 411–412.

Как и всякое моделирование, экономико-математическое моделирование основывается на принципе аналогии, т.е. возможности изучения объекта (почему-либо труднодоступного для исследования) не непосредственно, а через рассмотрение другого, подобного ему и более доступного объекта, его модели. В данном случае таким более доступным объектом является экономико-математическая модель. При построении моделей те или иные теории или гипотезы благодаря формализации и квантификации становятся обозримыми, уточняются, и это способствует лучшему пониманию изучаемых проблем. Моделирование оказывает и обратное влияние на исследователей, требуя четкости формулировки исследовательской задачи, строгой логичности в построении гипотез и концепций.

Практическими задачами моделирования являются, во-первых, анализ экономических объектов; во-вторых, экономическое прогнозирование, предвидение развития хозяйственных процессов; в-третьих, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Последнее, впрочем, требует пояснения. Далеко не во всех случаях данные, полученные из экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Гораздо чаще они служат в качестве «консультирующих» средств, принятие же самих управленческих решений остается за человеком. Это объясняется чрезвычайной сложностью экономических и – шире – социально-экономических процессов. Экономико-математическое моделирование, таким образом, является лишь компонентом, хотя и очень важным, в человекомашинных системах планирования и управления народным хозяйством и экономическими единицами разного уровня.

Процесс создания экономико-математической модели включает ряд этапов исследования реальных объектов и явлений, выбора методов их формализации и проверки адекватности модели. В этом процессе используют все научные методы познания – абстрагирование, логику и выдвижение гипотез, анализ и синтез, индукцию и дедукцию и т.д.

Анализ или решение моделей зависит от их сложности. Как правило, объекты экономики (предприятие, отраслевой рынок и т.д.) и происходящие в них явления (производство и реализация продукции, спрос и предложение товаров и услуг и т.д.) представляют собой сложные системы. На предприятии сконцентрирован производственный (основной и оборотный) капитал, трудовые ресурсы, прибыль и т.д. Отношения работников по поводу использования ресурсов в процессе производства продукции и получения дохода и прибыли представляют собой *сложную систему*.

В широком смысле ***система*** *состоит из совокупности частей, находящихся в отношениях и взаимосвязях друг с другом и образующих некоторую целостность, единство*. Части системы называют элементами, подсистемами и т.п. Эти части могут быть различной природы: экономической, технической, социальной или иной. Они могут взаимодействовать между собой и с окружающей средой. В экономических системах отношения реализуются посредством связей между частями. Существуют связи по передаче материалов, энергии, информации и др. Действуют отношения распоряжения и подчинения, последовательности выполнения отдельных работ и т.д.

Сложность системы *определяется количеством и многообразием входящих в нее частей и связей между этими частями и с внешней средой*. При более глубоком изучении систем в понятие сложности следует включать способы функционирования частей системы и связей между ними, многообразие их свойств, вид структуры и др.

Вместе с тем один и тот же объект в зависимости от целей его исследования может быть представлен экономико-математическими моделями разной сложности.

Под ***структурой системы*** *понимают её строение, конфигурацию связей между отдельными частями*. Структура модели отражает внутреннюю организацию объекта исследования, его составные части и их взаимосвязи, а также связи с окружающей средой. Экономические системы отличаются большим разнообразием структур. Типичными структурами систем являются: последовательная, параллельная, встречно-параллельная (имеющая обратные связи) и смешанная.

Сложные системы нередко характеризуются тем, что обладают такими свойствами, которых нет у отдельных частей. Поэтому механическое объединение моделей частей не равноценно модели сложной системы в целом. Важной характеристикой сложной системы является ***эмерджентность*** – *наличие новых свойств, которые не присущи ни одному из элементов, входящих в систему.*

Синергетическая связь *определяется как связь, которая при кооперированных (совместных) действиях независимых элементов системы обеспечивает увеличение общего эффекта до величины, большей, чем сумма эффекта этих же элементов, действующих независимо. Следовательно, это усиливающая связь элементов системы.*

Принципиально новые свойства, как правило, возникают в экономических системах с обратными связями. Например, качество управления в системах экономической кибернетики невозможно измерить отдельно ни у объекта управления, ни у управляемого объекта. Другой пример: продавцы стремятся повысить цены на товары, покупатели при этом уменьшают спрос, и продавцы вынуждены сдерживать рост цен. Поэтому при изучении сложной системы недостаточно, а иногда и невозможно, пользоваться методом их расчленения на части с последующим изучением этих частей в отдельности. Именно сложные объекты экономики представляют наибольший интерес для моделирования. Такое моделирование может дать результаты, которые нельзя получить иными способами.

5. Классификация экономико-математических моделей

Существует большое разнообразие классификаций хозяйствующих субъектов. Поэтому здесь представлены только такие модели, которые применяются в настоящем пособии.

Экономические объекты и явления обладают большой сложностью. *Сложные модели* далее будем трактовать в том смысле, что они состоят из простых моделей. Однако деление на простые и сложные модели не имеет достаточно четкой границы. Сложность модели обычно зависит от постановки задачи изучения объекта – оригинала. Поэтому, даже очень сложные объекты экономики нередко удается отражать при помощи достаточно простых математических моделей. Если объектом моделирования является зависимость определенного набора показателей y от вектора внешних переменных x, причем характер этой зависимости не меняется, то для создания математической модели применяют принцип *черного ящика*. «Черный ящик» – это объект изучения, внутренняя структура которого совершенно не известна. Для наблюдения доступны только входные переменные и реакция объекта на эти воздействия.

Такую математическую модель можно интерпретировать как оператор Φ преобразования «входа», вектора внешнего воздействия x на объект, в показатель «выхода», векторную реакцию y объекта исследования. Построить такую модель означает отыскать оператор Φ, связывающий переменные x и y:

$$y = \Phi(x).$$

Модель отражает поведение объекта так, что, задавая значения «входа» x, можно получать значения «выхода» y без участия информации о самом объекте. Компоненты вектора $y = (y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называют ***эндогенными величинами***, т.е. *определяемыми с помощью модели*. Внешние по отношению к моделируемому объекту показатели, компоненты вектора $x = (x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, называют ***экзогенными величинами***, т.е. *определяемыми вне модели*.

Простые модели отражают реальные объекты в форме экономических процессов и соотношений разных показателей. При этом особенно большое значение имеют функциональные зависимости, отражающие причинно-следственные связи между моделируемыми показателями.

В экономических системах все явления развертываются во времени, значения экономических показателей изменяются, одни события следуют за другими. По признаку явной зависимости значений переменных от времени различают *динамические* и *статические* модели. Динамическими моделями являются *экономические процессы* и *динамические звенья*. Рассмотрим указанные виды простых моделей.

1. ***Экономические процессы*** *отражают математические модели зависимости значения показателя y от времени t*. Она имеет форму функции времени

$$y = W(t, A),$$

где коэффициенты модели обозначены через вектор A. Например, экспоненциальный рост производства продукции может иметь вид

$$y = a\,e^{\alpha t},$$

где $a > 0$ и $\alpha > 1$ – коэффициенты модели или параметры моделируемого объекта. Изменение объема выпуска продукции y происходит в зависимости от времени t. График функции представлен на рис. 2.

2. ***Экономические функции и соотношения*** – *однозначные зависимости экономических показателей от воздействующих на них факторов и однозначные соответствия между этими величинами*. Они имеют математическую форму равенства, неравенства, предпочтения и т.д. Их можно записать в общем виде

$$y \leftrightarrow F(x, A).$$

Переменная величина y соответствует значениям вектора x при фиксированном значении вектора коэффициентов A.

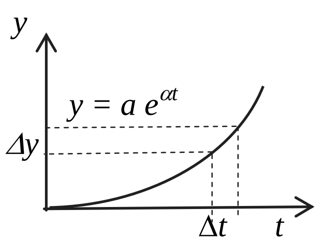


Рис. 2.

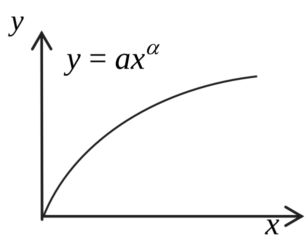


Рис. 3.

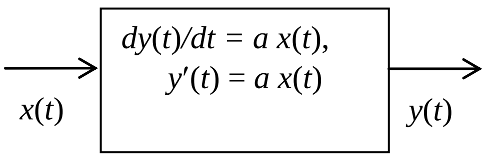


Рис. 4.

а) ***Факторная модель*** – *математическая модель в виде функциональной зависимости экономического показателя от воздействующих на него факторов*. Факторные модели являются одной из форм соотношения $y \leftrightarrow F(x,A)$:

$$y = F_1(x, A).$$

В этих моделях переменная y является функцией F_1 от вектора экзогенных переменных x. Коэффициенты модели или параметры моделируемого объекта обозначены через вектор A. Упрощенно зависимость $y = F_1(x, A)$ переменной y от факторов x обозначают как $y(x)$.

Факторными моделями являются, например, *производственные функции*, отражающие зависимость выпуска продукции от вектора используемых в производстве ресурсов; *функции производственных затрат*, отражающие зависимость денежных затрат производства от объема выпуска продукции; *функции спроса и предложения* в зависимости от цены и т.д.

Пусть однофакторная производственная функция задана формулой

$$y = ax^{\alpha},$$

где $a > 0$ и $0 < \alpha < 1$ – коэффициенты (параметры) модели. Тогда ее график имеет вид, представленный на рис. 3.

б) ***Ограничения*** – *математическая форма соотношений* $y \leftrightarrow F(x,A)$ *экономических показателей и/или функций* в виде больше (>), меньше (<), не больше (≤) или не меньше (≥). Ограничения можно обозначить следующим образом:

$$y \leftrightarrow F_2(x, A),$$

где переменная величина y имеет указанную в формуле взаимосвязь >, <, ≤, ≥ с вектором переменных величин x; A – вектор постоянных коэффициентов.

Например, в математическом программировании ограничения такого типа накладывают на допустимые расходы ресурсов.

При необходимости в пособии вводятся другие формы соотношений: $y \leftrightarrow F(x, A)$.

3. ***Динамическая модель*** *отражает зависимость реакции экономического объекта в виде (вектор-)функции* $y(t)$ *от экзогенного (вектор-)процесса* $x(t)$,

причем это зависимая (вектор-)переменная $y(t)$, или её производные, входят в уравнения. При этом значение $y(t)$ может относиться к периоду времени, отличному от времени t, к которому отнесены другие значения $y(t)$. Общую форму динамической модели можно обозначить следующим образом:

$$W(x, y, A) = 0,$$

где (вектор-)функционал W задан на множестве процессов $(x(t),y(t))$, A – вектор постоянных коэффициентов.

Так заданную динамическую модель будем называть словом *неявная* (модель).

Если удалось разрешить уравнение $W(x, y, A) = 0$ и выражение для $y(t)$ такое: $y(t) = V(x, A)(t)$, где V – функционал на множестве процессов $x(t)$, то такую модель назовем *явная* модель. Таким образом, нелинейный оператор V математически преобразует функцию $x(t)$ в $y(t)$, подобно преобразованию входного процесса в реакцию в объекте-оригинале. В любой момент времени численные значения $x(t)$ и $y(t)$ определяют состояние входа и выхода объекта моделирования. В случае если явная модель имеет вид $y = V(x(t), A)$, где $V(\cdot,\cdot)$ – функция, то тогда эту модель назовем ***кинематической***[7].

Один из конкретных видов динамических объектов описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$dy(t)/dt = a\, x(t), \text{ при } x(t) \geq 0,$$

или в другой форме:

$$y'(t) = a\, x(t), \text{ при } x(t) \geq 0,$$

где $a \geq 0$ – коэффициент модели (параметр моделируемого объекта). На внешнее воздействие процесса $x(t)$ модель откликается процессом выхода $y(t)$. Реакция $y(t)$ зависит от входного процесса $x(t)$. Графически модель представлена на рис. 4.

По способу определения ответов на поставленные вопросы модели делят на *аналитические* и *численные*. В результате аналитического решения модели

---

[7]*Кобринский Н.Е., Кузьмин В.И.* Точность экономико-математических моделей. М.: Финансы и статистика, 1981. С. 76.

получают ответ в общем виде. Применение численного метода дает конкретный количественный результат.

По применяемому математическому аппарату можно выделить следующие методы и соответствующие им модели: *алгебраические*, *дифференцирование*, *вычислительные* и т.д. В частности, динамические модели делятся на разностные, дифференциально-разностные, в форме дифференциальных уравнений и имитационные модели. В пособии объекты экономики в основном формализованы в виде линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ), а также в виде линейных дифференциально-разностных уравнений (ЛДРУ). Для их решения применено операционное исчисление. Кроме этого, рассматриваются линейные разностные уравнения (ЛРУ).

По степени определенности модели делят на *детерминированные и вероятностные*. К вероятностным моделям в пособии относится только паутинообразная имитационная модель товарного рынка. Остальные модели детерминированно отображают реальные объекты.

Важным признаком различия моделей является их назначение. По этому признаку можно выделить *прикладные и теоретические модели*.

Благодаря использованию *прикладных моделей* существует возможность принимать конкретные хозяйственные решения. Эти модели предназначены для количественного отображения объектов изучения, они воспроизводят переменные величины в числовой форме. От количественной модели требуется точность значений отображаемых экономических показателей. К ним относятся, например, модели оптимального планирования методом линейного программирования и двойственные задачи. Для прикладных моделей применяют в основном диаграммы, таблицы, графики и математические формулы.

Теоретические модели дают качественную характеристику объекта исследования. К ним относятся, например, модели кибернетического типа, модели рыночного равновесия фирмы, модели оптимизации прибыли. Модели качественного отражения должны правильно воспроизводить вид и форму изменения экономических показателей. Например, выпуск продукции может иметь растущий вид и монотонную форму, а товарный рынок к точке равновесия может приближаться либо монотонно, либо колебательно. Для качественной характеристики, как правило, используют схемы, графики и математические формулы.

Схемы получили широкое применение для отражения структур сложных объектов, графики – для анализа равновесия, устойчивости и характеристики экономического роста.

Равновесие товарного рынка обычно изучают при помощи статических моделей. Системы, которые стремятся к равновесному состоянию, называют устойчивыми. Критерий устойчивости статических моделей ввел Дж.Р. Хикс (J.R. Hicks)[8].

Вместе с тем известен классический взгляд на устойчивость. Устойчивость или отсутствие устойчивости выявляют при помощи динамических моделей. Асимптотическая устойчивость – это способность системы в ответ на внешнее воздействие давать реакцию, постепенно стабилизирующуюся на постоянном уровне. Динамические асимптотически устойчивые системы рыночной экономики принято называть *равновесными системами.*

6. Экономические величины и показатели

Экономические величины *количественно отражают различные измеряемые характеристики хозяйствующих субъектов экономики*: предприятий, отраслей, рынков и т.д. Экономической величиной является, например, количество определенного сырья на складе или количество произведенной продукции за квартал. Однако если значение определенной величины применяют для экономического анализа, оценки отражаемой

[8]Лауреат Нобелевской премии 1972 г. «за новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния». Представитель неокейнсианства. (https:/ru.wikipedia.org/ wiki /% D0 %A5 %D0 %B8 %D0 %BA %D1 %81, _%D0 %94% D0% B6% D0% BE% D0% BD_% D0% A0%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%80%D0%B4.)

реальности, принятия хозяйственных решений и т.п., то эта величина становится *экономическим показателем*. Запас материалов можно рассматривать как простую экономическую величину. Доход предприятия – экономическая величина, которая одновременно является показателем экономической эффективности работы предприятия. Неизмеримые характеристики, например, деловая активность предпринимателя или уровень квалификации рабочего, нельзя выразить экономическими величинами.

Каждый экономический показатель является характеристикой одной из сторон деятельности субъекта экономики: экономической эффективности его деятельности, эффективности затрат или использования ресурсов, достижения цели принятия тех или других решений, характера экономического процесса и т.д.

Экономический показатель *количественно отражает определенную характеристику либо отдельной экономической величины, либо зависимости экономических величин*. Например, минимальные затраты средств на оплату ресурсов или зависимость выручки предприятия от затрат ресурсов, зависимость цены на товар от объемов спроса или предложения на рынке и т. д. Экономические показатели можно разделить на две большие группы: *измеряемые* и *вычисляемые*. Данные о значении измеряемых показателей можно получить непосредственно на реальном объекте, например, численность рабочих на предприятии. Вычисляемые показатели находят по формулам, например, фондоотдача как частное от деления получаемого дохода на стоимость ОПФ.

При создании экономических моделей следует различать интервальные и моментные экономические величины. *К* ***интервальным показателям*** *относят такие, значение которых можно определить только за некоторый интервал времени* (неделю, месяц, квартал, год и т.п.), например, выпуск продукции на предприятии. ***Моментными показателями*** *являются такие, которые количественно могут отражать экономические величины в любой момент времени*; к примеру, запас продукции или сырья на складе (в натуральном или денежном выражении).

Введем ряд показателей, которые применяют в качестве характеристик моделей, указанных в п. 5.

Динамизм *экономических процессов* отражают следующие показатели:

– *темп роста* (скорость или интенсивность роста)

$$\tau = dy/dt \text{ или } \tau_1 = \Delta y/\Delta t;$$

– *индекс роста* (темп или скорости прироста)

$$\mathrm{Ind}\, y(t) = (dy(t)/dt)/y(t) \text{ или } \mathrm{Ind}_1\, y(t) = (\Delta y(t)/\Delta t)/y(t).$$

Если, например, задана функция $y(t) = V(x(t), A)$ в виде $y = a\, e^{\alpha t}$, то темп роста величины y описывает формула $\tau = a\, \alpha e^{\alpha t}$, а индекс роста – $\mathrm{Ind}\; y(t) = \alpha$.

Любая *статическая факторная модель* $y = F_1(x, A)$ отражает зависимость переменной y от факторов x. Характер зависимости переменных y от каждого из факторов x обычно исследуют при помощи следующих показателей:

– *средний показатель* λ, который вычисляют по формуле

$$\lambda = y/x;$$

– *предельный (маржинальный) показатель* μ имеет формулы

$$\mu = dy/dx \text{ или } \mu_1 = \Delta y/\Delta x;$$

– *эластичность* E_x^y (процентный прирост величины y в ответ на однопроцентный прирост значения x) вычисляют по формуле

$$E_x^y = (dy/dx)/(y/x) \text{ или } E_x^y = (\Delta y / \Delta x)/(y / x).$$

Смысл этого показателя и другие способы вычисления рассматриваются в следующем разделе.

Показатели λ, μ и E_x^y могут быть вычислены применительно к любой точке зависимости $y(x)$.

Исходные данные y и x в формулах $\lambda = y/x$, $\mu = dy/dx$ ($\mu_1 = \Delta y/\Delta x$) и $E_x^y = (dy/dx)/(y/x)$ ($E_x^y = (\Delta y / \Delta x)/(y / x)$) всегда являются *интервальными* величинами.

7. Показатели экономической эффективности

В качестве характеристик эффективности работы предприятия или модели в виде производственной функции $y = F_1(x, A)$ обычно применяют две группы показателей – показатели эффективности работы предприятия в целом и показатели эффективности использования ресурсов.

Основными показателями *экономической эффективности* работы предприятия в целом являются:

– *доход* (объем реализации продукции или размер выручки) предприятия;

– *затраты* денежных средств на оплату ресурсов;

– *прибыль* предприятия.

Из них к *первичным*, измеряемым на самом объекте, относятся показатели дохода и затрат, к *вторичным*, вычисляемым, относится прибыль. Эти все величины принадлежат к группе интервальных показателей.

Доход предприятие получает от реализации продукции по рыночным ценам. Его измерение возможно только за некоторый промежуток времени. Единица измерения (размерность) дохода выражается в рублях за единицу времени. В качестве единицы времени могут быть приняты: месяц, квартал, год и т.д.

Затраты на приобретение нужных ресурсов осуществляют по рыночным ценам. Затраты имеют сложную структуру, соответствующую структуре самих ресурсов производства. Их размерность выражается в рублях за единицу времени.

Прибыль характеризует работу предприятия в целом с учетом дохода и затрат производства. Она *вычисляется как разность дохода и затрат на оплату необходимых для предприятия ресурсов на изготовление и реализацию продукции*. Показатель прибыли также измеряется в рублях за единицу времени.

Рассмотрим показатели эффективности или отдачи от использования ресурсов на примере однофакторной производственной функции $y = ax^{\alpha}$, отражающей зависимость выпуска продукции y от вектора ресурсов производства x.

Показателями отдачи ресурсов являются: *средняя* производительность ресурса λ, *предельная* производительность ресурса μ и *эластичность* выпуска по ресурсу E_x^y. Эти показатели отражают эффект от использования ресурсов за некоторый период времени, например за год.

Следует подчеркнуть, что в экономической теории понятие отдачи ресурсов специфично. Это понятие включает, с одной стороны, выпуск продукции или его денежное выражение (доход, выручка), с другой – используемые за тот же период времени ресурсы или расходы на их оплату. В качестве фактора производства вводят не накопленное количество ресурсов, а их использование в течение некоторого времени, интервальные величины.

Пусть, например, зависимость объема выпуска продукции y от используемых ресурсов x выражается формулой $y = 10x^{0,5}$. Тогда при использовании $x = 4$ ед. ресурсов в единицу времени выпуск будет произведен в объеме $y = 20$ ед. продукции в единицу времени, а при $x = 9$ ед. – выпуск $y = 30$ ед. продукции. Графически данная ситуация иллюстрируется рис. 5.

Среднюю отдачу ресурсов λ вычисляют по формуле $\lambda = y/x$.

В нашем примере получаем значение показателя средней отдачи ресурсов $\lambda = y/x = 10\,x^{0,5}/x = 10/x^{0,5}$.

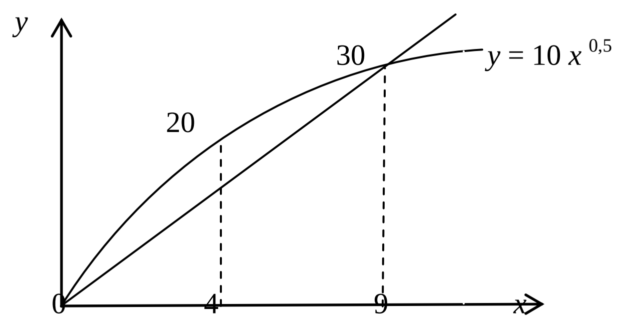


Рис. 5.

В случае $x = 4$ получим значение $\lambda_4 = 5$, а в случае $x = 9$ – значение $\lambda_9 \approx 3{,}33$ ед. продукции на единицу используемых ресурсов производства. Графически средняя отдача ресурсов λ_9 в точке $x = 9$, $y = 30$ равна тангенсу угла наклона луча, выходящего из начала координат и пересекающего график зависимости y от x на рис. 5 в точке определения показателя.

Предельную отдачу ресурсов μ вычисляют по формуле $\mu = dy/dx$ ($\mu_1 = \Delta y/\Delta x$). В приведенном примере имеем $\mu = dy/dx = d(10x^{0,5})/dx = 5/x^{0,5}$. В случае $x = 4$ получаем значение $\mu_4 = 2,5$, а в случае $x = 9$ – значение $\mu_9 \approx 1,67$.

Предельная отдача ресурсов μ_9 в точке $x = 9$, $y = 30$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику производственной функции в точке определения показателя.

Показатель эластичности выпуска по ресурсам выражает процентный прирост выпуска при однопроцентном приросте использования ресурсов (за некоторый период времени).

Различают показатели *интервальной*, *дуговой (средней)* и *точечной* эластичности.

Показатель *интервальной эластичности* вычисляют в случае дискретно заданных точек производственной функции как отношение

$$\overline{E}_x^y = \frac{\textit{относительный прирост } y \textit{ в процентах}}{\textit{относительный прирост } x \textit{ в процентах}}.$$

Тогда формула эластичности принимает вид

$$\overline{E}_x^y = (\Delta y/y_1) \times 100\% \,/\, (\Delta x/x_1) \times 100\%,$$

где $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Сократив дробь на 100%, в преобразованном виде получим формулу

$$\overline{E}_x^y = (\Delta y/\Delta x) \,/\, (y_1/x_1).$$

Показатель *дуговой (средней)* вычисляют по формуле

$$\overline{E}_x^y = (\Delta y/\Delta x) \,/\, (y_c/x_c),$$

где $y_c = (y_2 + y_1)/2$ и $x_c = (x_2 + x_1)/2$.

Точечную эластичность y по фактору x вычисляют по формуле $E_x^y = (dy/dx)/(y/x)$. Если в эту формулу подставим значения среднего и предельного продуктов, согласно $\lambda = y/x$ и $\mu = dy/dx$, то получим формулу точечной эластичности $E_x^y = \mu/\lambda$. В приведенном примере производственной функции имеем значение точечной эластичности

$$E_x^y = \mu/\lambda = (dy/dx)/(y/x) = (5/x^{0,5})/(10/x^{0,5}) = 0,5.$$

Это означает, что в любой точке графика производственной функции на рис. 5 эластичность y по x равна 0,5.

Точечную эластичность можно также представить в логарифмической форме: $E_x^y = d\,(ln\,y)/d\,(ln\,x)$.

Заметим, что для любой степенной функции вида $y = ax^{\alpha}$ справедливо

$$E_x^y = (dy/dx)/(y/x) = [d(ax^{\alpha})/dx)]/(ax^{\alpha}/x) = (\alpha\, ax^{\alpha})/(ax^{\alpha-1}) = \alpha.$$

На российских предприятиях широкое применение получили вычисляемые показатели, в которых участвуют интервальные и моментные величины, например, производительность труда и фондоотдача.

Производительность труда *вычисляют делением размера дохода* (интервальная величина) *за определенный период времени на среднюю численность работников предприятия* (моментная величина).

Фондоотдачу *определяют делением размера дохода* (интервальная величина) *за определенный период времени на среднюю величину стоимости производственных фондов* (моментная величина).

8. Экономико-математические методы

Экономико-математические методы[9] – *обобщающее название комплекса экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения экономики*. Введено акад. В.С.Немчиновым в начале 60-х гг. XX в. Встречаются высказывания о том, что название весьма условно и не отвечает современному уровню развития экономической науки, так как «они (экономико-математические методы. – *авт.*) не имеют собственного предмета исследования, отличного от предмета исследования специфических

[9] *Лопатников Л.И.* Указ. соч. С. 409–411.

экономических дисциплин»[10].

Однако хотя тенденция подмечена верно, она, по-видимому, реализуется еще не скоро. Экономико-математические методы в действительности имеют общий объект исследования с другими экономическими дисциплинами – экономику (или шире: социально-экономическую систему), но разный предмет науки: т.е. они изучают разные стороны этого объекта, подходят к нему с разных позиций. И главное, при этом используются особые методы исследования, развитые настолько, что сами они становятся отдельными научными дисциплинами особого методологического характера. В отличие от дисциплин, в которых преобладают онтологические аспекты, а методы исследования выступают лишь в большей или меньшей степени как вспомогательные средства, в «методологических» дисциплинах, составляющих значительную часть комплекса экономико-математические методов, методы сами оказываются объектом исследования. Кроме того, действительный синтез экономики и математики еще впереди, потребуется немало времени, пока он осуществится в полной мере.

---

[10]*Шаталин С.С.* Функционирование экономики развитого социализма. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. С. 25.

Список литературы к введению

1. *Агапова Т.А.* Макроэкономика: учебник / под общ. ред. проф. А.В. Сидоровича; Т.А. Агапова, С.Ф. Серегина. 6-е изд., стереотип. М.: Дело и Сервис, 2004. 448 с. (Учебники МГУ им. М.В. Ломоносова).

2. *Батищева С.Э.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие / С.Э. Батищева, Э.Д. Каданэр, П.М. Симонов. 2-е изд., перераб. и доп. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. 314 с.

3. *Кобринский Н.Е.* Точность экономико-математических моделей / Н.Е. Кобринский, В.И. Кузьмин. М.: Финансы и статистика, 1981. 256 с.

4. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: учебник для вузов. 3-е стереотип. изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 400 с.

5. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2003. 520 с.

6. *Никифорова А.А.* Макроэкономика: научные школы, концепции, экономическая политика: учеб. пособие / под общ. ред. проф. А.В. Сидоровича; А.А. Никифорова, О.Н. Антипина, Н.А. Миклашевская. М.: Дело и Сервис, 2008. 534 с. (Учебники МГУ им. М. В. Ломоносова).

7. *Шаталин С.С.* Функционирование экономики развитого социализма. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 384 с.

8. Экономико-математическое моделирование: учебник для студ. вузов / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2004. 800 с.

9. Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. В.И. Данилов-Данильян. М.: Большая Российская энциклопедия; Изд. дом «Инфра-М», 2003. 668 с.

§ 1. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ), систем ЛОДУ, линейных разностных уравнений (ЛРУ)

В этом параграфе приводятся некоторые математические результаты, которые касаются динамических систем с непрерывным и с дискретным временем и часто применяются в микро- и макроэкономике. Даются ссылки на экономические модели, при исследовании которых используется тот или иной математический результат. Многие результаты сопровождаются краткими комментариями, цель которых разъяснить смысл и облегчить использование результатов, а также обратить внимание на отдельные моменты, существенные при исследовании микро- и макроэкономических моделей. Строгие доказательства не приводятся, их можно найти в учебниках по дифференциальным и разностным уравнениям, а также по математической экономике.

1. Дифференциальные уравнения

1.1. *Автономное линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ЛООДУ) (ЛОДУ) первого порядка*

$$\dot{x} = ax,\ t \in [0, +\infty),$$

имеет *общее решение*

$$x(t) = ce^{at},$$

где c – постоянная, определяющая конкретное частное решение. Например, если задано начальное состояние $x(0) = x_0$, то $c = x_0$ (подставляя $t = 0$ в формулу общего решения, получаем уравнение для нахождения c).

Для экономиста более привычной является запись этого ЛОДУ первого порядка в форме $\dfrac{\dot{x}}{x} = a$, смысл этого равенства в том, что темп прироста величины $x(t)$ постоянен и равен a.

1.2. *Автономное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ЛНОДУ) (ЛОДУ) первого порядка*

$$\dot{x} = ax + f\ ,\ a \neq 0\,,$$

имеет *общее решение*

$$x(t) = x^* + (x_0 - x^*)e^{at}\,,$$

где x_0 – произвольное начальное состояние, а x^* – стационарное состояние. *Частные* решения будут получены при *конкретных* значениях x_0.

Комментарий. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения $\dot{x} = ax$ было указано в пункте 1.1: $\overline{x}(t) = ce^{at}$. В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять его стационарное состояние x^*, которое находим как решение уравнения $\dot{x} = ax + f$ (смысл стационарности в том, что величина x не меняется во времени, т.е. $\dot{x} = 0$), последнее уравнение эквивалентно

$$ax + f = 0\,.$$

Отсюда $x^* = -f/a$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = \overline{x}(t) + x^* = ce^{at} + x^*\,.$$

Если задано x_0 – состояние в момент $t = 0$, то из общего решения

$$x_0 = c + x^*\,,$$

и, значит, $c = x_0 - x^*$, следовательно,

$$x(t) = (x_0 - x^*)e^{at} + x^*\,,$$

или

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{f}{a}\right)e^{at} - \frac{f}{a} = x_0 e^{at} + \frac{f}{a}(e^{at} - 1)\,.$$

Полученное решение выражает $x(t)$ как сумму стационарного значения и отклонения от стационарного значения. Если первоначально $x_0 > x^*$ (отклонение от стационарного значения – положительное), то и в дальнейшем всегда $x(t) > x^*$. Аналогично, если первоначально отклонение от стационарного значения отрицательное, то и в дальнейшем оно отрицательное. Модуль отклонения от стационарного значения неограниченно возрастает, если $a > 0$, и убывает, сходясь к нулю, если $a < 0$.

При $a = 0$ получаем уравнение $\dot{x} = f$, откуда простым интегрированием на отрезке $[0,t]$ получим решение $x(t) = f \cdot t + x(0) = f \cdot t + x_0$.

1.3. *Формула Коши для ЛНОДУ (ЛОДУ) первого порядка*

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + f(t),\ t \ge 0,$$

имеет вид

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} x(0) + \int_0^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} f(s)ds,$$

или

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} x(0) + e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \int_0^t e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} f(s)ds = e^{\int_0^t a(s)ds} (x(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} f(s)ds).$$

Функцию $X(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$ назовем *фундаментальным решением ЛОДУ первого порядка.* Функцию $C(t,s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}$ назовем *функцией Коши ЛОДУ первого порядка.* Нетрудно увидеть, что

$$C(t,s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} = e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} = X(t)/X(s).$$

Таким образом, справедлива формула Коши для ЛНОДУ первого порядка в общем виде:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Замечание 1. Формула Коши для ЛНОДУ (ЛОДУ) первого порядка (не разрешённое относительно производной)

$$(Lx)(t) \equiv a_0(t)\dot{x}(t) + a_1(t)x(t) = f(t),\ t \ge 0,$$

где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \geq 0$ (так называемый *регулярный случай*), имеет вид

$$x(t) = e^{-\int\limits_0^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds} x(0) + \int\limits_0^t \frac{e^{-\int\limits_s^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}d\tau}}{a_0(s)} f(s)ds,$$

или вид

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s) f(s)ds,$$

где $X(t) = e^{-\int\limits_0^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$ – фундаментальное решение ЛОДУ первого порядка; $C(t,s) = \dfrac{e^{-\int\limits_s^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}d\tau}}{a_0(s)}$ – функция Коши ЛОДУ первого порядка. Нетрудно увидеть, что

$$C(t,s) = \frac{1}{a_0(s)} X(t)/X(s).$$

Замечание 2. Для автономного ЛОДУ первого порядка вида

$$\dot{x}(t) = ax(t) + f(t),\ t \geq 0,$$

где $a = \mathrm{const}$, получаем $X(t) = e^{at}$, $C(t,s) = C(t-s) = e^{a(t-s)}$. Предположим, что $f(t) \equiv f = \mathrm{const}$ и $a \neq 0$, тогда верны равенства

$$x(t) = e^{at}(x(0) + \int\limits_0^t e^{-as} f ds) = e^{at}(x(0) + \frac{e^{-at}-1}{-a} f) = e^{at}x_0 + \frac{f}{a}(e^{at}-1).$$

При $a = 0$ получаем

$$x(t) = e^{0t}(x(0) + \int\limits_0^t e^{-0s} f ds) = x(0) + \int\limits_0^t f ds = x(0) + f \cdot t = x_0 + f \cdot t.$$

Здесь $D(\lambda) = \lambda - a$ – характеристический многочлен, символ дифференциального оператора. Иногда пишут $D(p) = p - a$.

Выражение $W(p) = \dfrac{1}{D(p)}$ – обратный символ, символ правого обратного оператора, по-другому, $W(p)$ – передаточная функция.

Замечание 3. Для автономного ЛОДУ первого порядка вида (не разрешённое относительно производной)

$$(Lx)(t) \equiv a_0\dot{x}(t) + a_1x(t) = f(t),\ t \geq 0,$$

где $a_0, a_1 = \text{const}$, $a_0 \neq 0$, получаем $X(t) = e^{-\frac{a_1}{a_0}t}$, $C(t,s) = C(t-s) = \dfrac{e^{-\frac{a_1}{a_0}(t-s)}}{a_0}$.

Здесь $D(\lambda) = a_0\lambda - a_1$ – характеристический многочлен, символ дифференциального оператора; $W(\lambda) = \dfrac{1}{a_0\lambda - a_1}$ – передаточная функция.

1.4. *Автономное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ЛНОДУ) (ЛОДУ) n-го порядка.*

ЛОДУ – линейные обыкновенные дифференциальные уравнения порядка *n*, т.е. уравнения вида

$$(Lx)(t) = a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = f(t),\ t \geq 0.$$

L – линейный дифференциальный оператор; $L: C^{(n)}[0,\infty) \to C[0,\infty)$ – так можно определить оператор ($C[0,\infty)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций $x:[0,\infty) \to \mathbb{R}^n$; $C^{(n)}[0,\infty)$ – пространство n раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных функций $x:[0,\infty) \to \mathbb{R}^n$). $Lx = 0$ – однородное уравнение, при $f(t) \neq 0$ возникает неоднородное ЛОДУ, где $f(t)$ – правая часть, внешнее воздействие, экзогенное воздействие, неоднородность.

Всегда будет $a_0 \neq 0$, $a_0, \ldots, a_n - \text{const}$. ЛОДУ с постоянными коэффициентами еще называют автономным ЛОДУ, стационарным ЛОДУ.

Здесь $D(\lambda) = \hat{L}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ – характеристический многочлен, символ оператора. Иногда пишут

$$D(p) = \hat{L}(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n.$$

Выражение $W(p)=\dfrac{1}{\hat{L}(p)}=\dfrac{1}{D(p)}$ – обратный символ, символ правого обратного оператора, по-другому, $W(p)$ – передаточная функция.

Для решения $x(t)$ справедлива формула Коши:

$$x(t)=\int_0^t C(t-s)\,f(s)\,ds+x_1(t)x(0)+x_2(t)x'(0)+\ldots+x_n(t)x^{(n-1)}(0).$$

Интегральный оператор Вольтерра $(Cf)=\int_0^t C(t-s)\,f(s)\,ds$ – оператор Коши данного уравнения; $C(t,s)=C(t-s)$, $0\le s\le t<\infty$ – функция Коши; $C(t)=C(t,0)$ – сечение функции Коши.

Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – фундаментальная система решений ЛОДУ, как известно, $x_1,\ldots,x_n$ – базис пространства решений однородного ЛОДУ. При этом невырожденным является вронскиан системы $W(t)\ne 0$ для любого $t\ge 0$, где

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & \ldots & x_n(t)\\ x_1'(t) & \ldots & \ldots & x_n'(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \ldots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix},\ W(0)=\begin{vmatrix} x_1(0) & \ldots & \ldots & x_n(0)\\ x_1'(0) & \ldots & \ldots & x_n'(0)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_1^{(n-1)}(0) & \ldots & \ldots & x_n^{(n-1)}(0)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1.$$

1.5. *Методы решения автономных ЛОДУ.*

$$\begin{cases}(Lx)(t)=0,\\ x(0)=x_0,\\ x'(0)=x_1,\\ \ldots\ldots\\ x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}\end{cases}\quad \text{– задача Коши при любых } x_0,\ldots,x_{n-1},$$

причем задача Коши всегда имеет единственное решение.

С помощью характеристического уравнения, метод Эйлера

Пример. Найти решение однородного ЛОДУ: $x''(t) = x'(t) + x(t)$, $t \ge 0$, $x(0) = x'(0) = 1$.

Решение будем искать в виде $x(t) = e^{\lambda t}$. Тогда $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ и получаем $\lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 = \lambda + 1$, $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, отсюда $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ – частные решения.

Общее решение однородного уравнения: $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) =$ $= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ – линейное пространство размерности два.

Пример. Найдем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) = c_1 e^{\lambda_1 0} + c_2 e^{\lambda_2 0} = c_1 + c_2 = 1, \\ x'(0) = c_1 x_1'(0) + c_2 x_2'(0) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 0} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 0} = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

$c_1 = 1 - c_2$, $(1 - c_2)\lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - c_2 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$, $c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 1 - \lambda_1$,

$$c_2 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1 - \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}, \qquad c_1 = 1 - c_2 = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t}.$$

Виды частного решения

1) λ – корень характеристического уравнения кратности 1 и вещественный (простой вещественный корень), тогда

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

2) λ – вещественный корень кратности k (резонанс), тогда

$$x_1(t)=e^{\lambda t},\ x_2(t)=te^{\lambda t},\ \ldots,\ x_k(t)=t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

3) $\lambda=a+bi$ – простой комплексный корень, тогда $\overline{\lambda}=a-bi$ – тоже корень, имеем два решения:

$$x_1(t)=e^{at}\cos(bt),\ x_2(t)=e^{at}\sin(bt).$$

4) $\lambda=a+bi$ – кратный комплексный корень, кратности k ($\overline{\lambda}=a-bi$ – тоже кратный комплексный корень, кратности k), то $x_1(t)=e^{at}\cos(bt)$, $x_2(t)=te^{at}\cos(bt)$, …, $x_k(t)=t^{k-1}e^{at}\cos(bt)$, $x_{k+1}(t)=e^{at}\sin(bt)$, $x_{k+2}(t)=te^{at}\sin(bt)$, …, $x_{2k}(t)=t^{k-1}e^{at}\sin(bt)$.

Пример ЛОДУ с кратными корнями. Рассмотрим уравнение $x''(t)-2x'(t)+x(t)=0$, $t\geq 0$. Оно имеет характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $(\lambda-1)^2=0$, его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$. Базис пространства решений состоит из двух элементов: $x_1(t)=e^t$, $x_2(t)=t\cdot e^t=te^t$.

Решение ЛОДУ со специальной правой частью

1) $f(t)=e^{\alpha t}P_k(t)$, α – вещественное число, k – степень многочлена.

1-й случай

α – не является корнем характеристического уравнения (т.е. корень кратности 0), поэтому $x^*(t)=t^0e^{\alpha t}A_k(t) = e^{\alpha t}A_k(t)$, где $A_k(t)$ – многочлен степени k с неопределенными коэффициентами.

Пример. Найти общее решение уравнения $x''(t)-4x'(t)+3x(t)=e^{2t}$, $t\geq 0$.

Решение. Сначала решаем однородное ЛОДУ:

$$x''(t)-4x'(t)+3x(t)=0.$$

Ищем $x(t)=e^{\lambda t}$, получаем $\lambda^2-4\lambda+3=0$, находим корни $\lambda_1=1$ $\lambda_2=3$, затем находим решение $x_1=e^t$, $x_2=e^{3t}$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $\overline{x}(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}$.

Решаем неоднородное уравнение: здесь $f(t)=e^{2t}$; $\alpha=2=\lambda_2$, α – не является корнем (k = 0, степень одночлена j = 0 равна кратности корня), поэтому $x^*(t)=t^0e^{\alpha t}A_0(t)=e^{2t}A$.

Находим A, подставим $x'(t)=2e^{2t}A$, $x''(t)=4e^{2t}A$, подставляем в уравнение:

$$4e^{2t}A-8e^{2t}A+3e^{2t}A=-Ae^{2t} = e^{2t},$$

находим $A=-1$, откуда $x^*(t)=-e^{2t}$. **Ответ:** $x(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}-e^{2t}$.

Пример. Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} x''(t)-4x'(t)+3x(t)=e^{2t}, \quad t\geq 0, \\ x(0)=0, \\ x'(0)=1. \end{cases}$$

Подставляем начальное значение: $x(0)=c_1+c_2-1=0$, $x'(0)=c_1+3c_2-2=1$, $\begin{cases} c_1=1-c_2, \\ 1-c_2+3c_2-2=1, \end{cases}$ $2c_2=2$, $c_2=1$, $c_1=0$.

И, **наконец:** $x(t)=e^{3t}-e^{2t}$.

2-й случай

α – корень характеристического уравнения кратности j, тогда $x^*(t)=t^je^{\alpha t}A_k(t)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $x''(t)-4x'(t)+3x(t)=e^{3t}$, $t\geq 0$.

Решение. Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{x}(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}$.

Решаем неоднородное уравнение: здесь $f(t)=e^{3t}$, $\alpha=3=\lambda_2$, α является корнем один раз (k=0, степень одночлена j = 1 равна кратности корня), поэтому $x^*(t)=t^je^{\alpha t}A_0(t)=te^{3t}A$.

Находим A, подставим $x'(t)=e^{3t}A+3te^{3t}A$, $x''(t)=3e^{3t}A+3e^{3t}A+9te^{3t}A$ = $6e^{3t}A+9te^{3t}A$, подставляем в уравнение:

$$\left(6+9t\right)e^{3t}A-4\left(1+3t\right)e^{3t}A+3te^{3t}A=2Ae^{3t} = e^{3t},$$

находим $A=\dfrac{1}{2}$, откуда $x^*(t)=\dfrac{1}{2}te^{3t}$. **Ответ:** $x\left(t\right)=c_1e^t+c_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}te^{3t}$.

Пример. Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} x''\left(t\right)-4x'\left(t\right)+3x\left(t\right)=e^{3t}, \quad t\ge 0, \\ x\left(0\right)=1, \\ x'\left(0\right)=0. \end{cases}$$

Подставляем начальное значение: $x\left(0\right)=c_1+c_2+0=1$,

$x'\left(0\right)=c_1+3c_2+\dfrac{1}{2}=0$, $\begin{cases} c_1=1-c_2, \\ 1-c_2+3c_2+\dfrac{1}{2}=0, \end{cases}$ $2c_2=-\dfrac{3}{2}$, $c_2=-\dfrac{3}{4}$, $c_1=1\dfrac{3}{4}$.

И, **наконец:** $x\left(t\right)=\dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{4}e^{3t}+\dfrac{1}{2}te^{3t}$.

2) $f\left(t\right)=e^{\alpha t}\left(P_k\left(t\right)\cos\beta t+Q_l\left(t\right)\sin\beta t\right)$, составим $\lambda=\alpha+\beta i$.

1-й случай

λ – не корень характеристического уравнения (т.е. корень кратности 0), тогда $x^*\left(t\right)=t^0e^{\alpha t}\left(A_m\left(t\right)\cos\beta t+B_m\left(t\right)\sin\beta t\right)$, где $m=\max\left\{k,l\right\}$.

2-й случай

λ – корень кратности j, тогда $x^*\left(t\right)= t^je^{\alpha t}\left(A_m\left(t\right)\cos\beta t+B_m\left(t\right)\sin\beta t\right)$, $m=\max\left\{k,l\right\}$.

3) $f\left(t\right)=e^{\alpha t}\left(P_k\left(t\right)\operatorname{ch}\beta t+Q_l\left(t\right)\operatorname{sh}\beta t\right)$, где $\operatorname{sh}\beta t=\dfrac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}$; $\operatorname{ch}\beta t=\dfrac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}$,

где α, β – вещественные числа.

Подставим, где $m\le\max\left\{k,l\right\}$:

$$f\left(t\right)=e^{\alpha t}\left(\underbrace{\tilde{P}_m\left(t\right)}_{\frac{P_k(t)+Q_l(t)}{2}}e^{\beta t}+\underbrace{\tilde{Q}_m\left(t\right)}_{\frac{P_k(t)-Q_l(t)}{2}}e^{-\beta t}\right)=e^{\alpha t}e^{\beta t}\tilde{P}_m\left(t\right)+e^{\alpha t}e^{-\beta t}\tilde{Q}_m\left(t\right)=$$

$$=\underbrace{e^{(\alpha+\beta)t}}_{e^{\alpha_1 t}}\tilde{P}_m(t)+\underbrace{e^{(\alpha-\beta)t}}_{e^{\alpha_2 t}}\tilde{Q}_m(t)=e^{\alpha_1 t}\tilde{P}_m(t)+e^{\alpha_2 t}\tilde{Q}_m(t).$$

Пусть α_1 – корень характеристического уравнения кратности j_1, α_2 – корень характеристического уравнения кратности j_2, тогда $x^*(t)=t^{j_1}e^{\alpha_1 t}A_m(t)+t^{j_2}e^{\alpha_2 t}B_m(t)$, где $A_m(t)$, $B_m(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени *m*.

Пусть $j_1=j_2=j$, тогда $x^*(t)=t^j e^{\alpha t}\left[\tilde{A}_m(t)\operatorname{ch}\beta t+\tilde{B}_m(t)\operatorname{sh}\beta t\right]$.

1.6. *Формула Коши для автономного ЛНОДУ (ЛОДУ) n-го порядка.*

Для ЛОДУ порядка *n*

$$(Lx)(t)=a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t),\ t\geq 0,$$

формула Коши имеет вид

$$x(t)=\int_0^t C(t-s)f(s)ds+x_1(t)x(0)+x_2(t)x'(0)+\ldots+x_n(t)x^{(n-1)}(0).$$

Здесь фундаментальные решения удовлетворяют условиям: $x_1(t)$: $(Lx)(t)=0,\ x(0)=1,\ x'(0)=0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=0$; $x_2(t)$: $(Lx)(t)=0,\ x(0)=0,$ $x'(0)=1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=0$; … ; $x_n(t)$: $(Lx)(t)=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, … , $x^{(n-1)}(0)=1$.

Можно показать, что $C(t)=\dfrac{1}{a_0}x_n(t)$.

Пример. Записать формулу Коши для уравнения

$$(Lx)(t)\ =\ x''(t)-x(t)=f(t),\ t\geq 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 1$. Найдем частные решение e^t, e^{-t}. Запишем общее решение $\bar{x}(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$. Найдем первое фундаментальное решение из условия $x(0)=1,\ x'(0)=0$: $c_1+c_2=1,\ c_1-c_2=0$. Находим $c_1=c_2=\dfrac{1}{2}$. Первое фундаментальное решение имеет вид $x_1(t)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})=\operatorname{ch} t$. Аналогично можно показать, что второе фундаментальное решение имеет вид $x_1(t)=\operatorname{sh} t$. Отсюда находим функцию Коши этого уравнения: $C(t-s)=\operatorname{sh}(t-s)$.

Запишем формулу Коши для этого уравнения:

$$x(t)=\int_0^t C(t-s)\,f(s)ds+x_1(t)x(0)+x_2(t)x'(0)=$$

$$=\int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\,f(s)ds+\operatorname{ch} t\,x(0)+\operatorname{sh} t\,x'(0).$$

1.7. *Системы автономных ЛОДУ. Формула Коши.*

$x'=Ax+f$ – линейная система порядка *n*, разрешенная относительно производной; $f=\operatorname{col}\{f_1,\ldots,f_n\}$, $x=\operatorname{col}\{x_{1,}\ldots,x_n\}$; если A – постоянная матрица, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то рассматривается автономная, стационарная система ЛОДУ, $x'=\operatorname{col}\{x'_1,\ldots,x'_n\}$ – вектор неизвестных.

Дифференциальный оператор $\frac{d}{dt}-A=L$, $\left(\frac{d}{dt}-A\right)x=f$, т.е. выражение $Lx=f$.

Матрица $\lambda E-A=\hat{L}(\lambda)$ $(pE-A=\hat{L}(p))$ – матричный символ дифференциального оператора; $\det(\lambda E-A)=D(\lambda)$ $(\det(pE-A)=D(p))$ – скалярный символ дифференциального оператора; выражение $\det(\lambda E-A)=0$ $(\det(pE-A)=0)$ – характеристическое уравнение.

$W(\lambda)=(\lambda E-A)^{-1}$ $(W(p)=(pE-A)^{-1})$ – передаточная матрица, функция, символ правого обратного оператора.

Формула Коши для системы ЛОДУ имеет вид

$$x(t)=\underbrace{\int_0^t C(t-s)\,f(s)\,ds}_{\text{частное решение неоднородного ур-я}}+\underbrace{X(t)x(0)}_{\text{общее решение однородного ур-я}}.$$

Здесь $C(t,s)=C(t-s)$ – матрица-функция Коши, $X(t)=C(t)$ – фундаментальная матрица решений. Верно равенство $C(t-s)=X(t)X^{-1}(s)$.

Составим матрицу $\tilde{X}(t)=\left\{\underbrace{x_1(t),\ldots,x_n(t)}_{\text{столбец}}\right\}$, где $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения $Lx=0$. Выполняется аналог вронскиана – $\det\tilde{X}(t)\neq 0$ для любого $t\geq 0$. Вычислим $\tilde{X}(0)$, $\tilde{X}^{-1}(0)$ и $\tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(t)$. Тогда будет равенство $X(t)=\tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(t)$.

Здесь интегральный оператор Вольтерра $(Cf)(t)=\int_0^t C(t-s)\,f(s)\,ds$ – оператор Коши, правый обратный оператор к оператору L (оператор интегрирования).

1.8. *Методы решения системы автономных ЛОДУ.* Если вектор-функция $f(t)$ является *вектор-функцией специального вида*, то частное можно найти, используя правило, аналогично изложённому в пункте (далее – п.) 1.5 для ЛОДУ.

Пусть вектор-функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t)=e^{\alpha t}\left(P_k(t)\cos\beta t+Q_l(t)\sin\beta t\right),$$

где α и β – заданные вещественные числа; $P_k(t)$ и $Q_l(t)$ – вектор-функции, компонентами которых являются многочлены переменной t со степенями, равными или меньшими соответственно k и l.

Частное решение системы ЛОДУ в этом случае следует искать в виде

$$x^*(t)=t^j e^{\alpha t}\left(A_m(t)\cos\beta t+B_m(t)\sin\beta t\right),\ m=\max\{k,l\},$$

где $A_m(t)$, $B_m(t)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами; $j=0$, если число $\alpha+\beta i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения; $j > 0$, если число $\alpha + \beta i$ совпадает с корнем кратности j.

1.9. *Автономные линейные системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛСООДУ) (ЛОДУ) второго порядка:*

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$\dot{x}_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2.$$

Общее решение указанной системы второго порядка имеет вид

$$x_1(t) = c_1A_1e^{\lambda_1 t} + c_2A_2e^{\lambda_2 t},$$

$$x_2(t) = c_1B_1e^{\lambda_1 t} + c_2B_2e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, т.е. корни характеристического уравнения $\lambda^2 - TrA \cdot \lambda + Det\,A = 0$; $\mathrm{col}(A_i, B_i)$ – правый собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ_i; $TrA = a_{11} + a_{22}$ – след матрицы; $Det\,A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – определитель матрицы.

При $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$ находим первое частное решение $x_1 = \mathrm{col}(A_1, B_1)$. При $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$ находим второе частное решение $x_2 = \mathrm{col}(A_2, B_2)$. Составляем матрицу $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} A_1e^{\lambda_1 t} & A_2e^{\lambda_2 t} \\ B_1e^{\lambda_1 t} & B_2e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$. Вычислим $\tilde{X}^{-1}(0)$ и $\tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(t)$. Тогда будет равенство $X(t) = \tilde{X}^{-1}(0)\tilde{X}(t)$. Отсюда найдем матрицу-функцию Коши

$$C(t-s) = X(t-s).$$

Пример. Решить неоднородную систему ЛОДУ, записать формулу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 + 4e^{-2t}, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Решение. Сначала решим однородную систему ЛОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Найдем собственный вектор для корня $\lambda_1 = 2i$:

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -4 \\ 2 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\begin{cases} (2-2i)x_1 - 4y_1 = 0, \\ 2x_1 - (2+2i)y_1 = 0, \end{cases}$$

что равносильно $(1-i)x_1 = 2y_1$ или $y_1 = \dfrac{1-i}{2} x_1$.

Положив $x_1 = 2$, имеем

$$\tilde{X}_1(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Получим частное решение

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{2it}.$$

Выделив в полученном выражении вещественную и мнимую части, получим два линейно независимых решения:

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos 2t + i\sin 2t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2i\sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t - i(\cos 2t + i\sin 2t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2i\sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t + i(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\bar{X}_1(t) = c_1 \operatorname{Re} \tilde{X}_1(t) + c_2 \operatorname{Im} \tilde{X}_1(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу-функцию $\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t & 2\sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t & \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$.

Вычислим $\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{X}^{-1}(0) = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

фундаментальная матрица имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos 2t & 2\sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t & \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу-функцию Коши:

$$C(t-s) = X(t-s) = \begin{pmatrix} \cos 2(t-s) & \sin 2(t-s) \\ -\sin 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь частное решение исходной системы. Имеем

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\alpha = -2$, $m = 0$ – многочлен нулевой степени. Частное решение $\bar{X}_2(t)$ системы ищем в виде $\bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-2t} \\ Be^{-2t} \end{pmatrix}$. Тогда $\bar{X}_2'(t) = \begin{pmatrix} -2Ae^{-2t} \\ -2Be^{-2t} \end{pmatrix}$,

и, подставив в исходную систему найдённое решение, получим

$$\begin{cases} -2Ae^{-2t} = 2Ae^{-2t} - 4Be^{-2t} + 4e^{-2t}, \\ -2Be^{-2t} = 2Ae^{-2t} - 2Be^{-2t}. \end{cases}$$

Таким образом, $4B - 4A = 4$, откуда $A = 0$, $B = 1$. Тогда $\bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$,

следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \bar{X}_1(t) + \bar{X}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1(t) = 2c_1 \cos 2t + 2c_2 \sin 2t$, $x_2(t) = c_1(\cos 2t + \sin 2t) + c_2(\sin 2t - \cos 2t) + e^{-2t}$. Фундаментальная матрица: $\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$, матрица

Коши: $C(t-s) = X(t-s) = \begin{pmatrix} \cos 2(t-s) & \sin 2(t-s) \\ -\sin 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{pmatrix}.$

1.10. *Автономные линейные системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛСООДУ) (ЛОДУ) n-го порядка*

Для решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + x_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + x_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

или в векторной записи $\dot{x} = Ax,$ где x – вектор, A – матрица,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i – произвольная постоянная; v^i – собственный вектор матрицы A, соответствующий этому λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1,\ldots,v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \ldots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

Если для корня λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов и $m < k,$ то решение, соответствующее этому $\lambda,$ можно искать в виде произведения многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т.е. в виде[11]

[11] В случае $k \le 3$ число $k-m$ нельзя уменьшить, а в случае $k \ge 4$ иногда можно, если известна жорданова форма матрицы A.

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt + ... + dt^{k-m})e^{\lambda t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = (p + qt + ... + st^{k-m})e^{\lambda t}. \end{cases} \qquad (3)$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b,..., s,$ надо подставить решение (3) в систему (1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a, b,..., s.$ Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a, b,..., s$ должны зависеть от k произвольных постоянных, где k – кратность корня λ.

Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1).

Пример. Решить систему

$$\dot{x} = 2x + y + z,\ \dot{y} = -2x - z,\ \dot{z} = 2x + y + 2z. \qquad (4)$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,\ \ \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda = 2$). Из (6) находим $2\alpha = -\beta = \gamma$. Значит, вектор (1, –2, 2) – собственный и

$$x = e^{2t},\ y = -2e^{2t},\ z = 2e^{2t} \qquad (7)$$

– частное решение системы (4).

Для кратного корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (5) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее порядок $n=3$, ранг $r=2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m=n-r=1$. Корень $\lambda=1$ имеет кратность $k=2$. Так как $k>m,$ то решение надо искать в виде произведения многочлена степени $k-m=1$ на $e^{\lambda t}$, т.е. в виде

$$x=(a+bt)e^t,\ \ y=(c+dt)e^t,\ \ z=(f+gt)e^t. \tag{8}$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b,...,$ подставляем (8) в систему (4) и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Получаем систему

$$\begin{aligned} b+d+g=0,\quad & b=a+c+f, \\ -2b-d-g=0,\quad & d=-2a-c-f, \\ 2b+d+g=0,\quad & g=2a+c+f. \end{aligned} \tag{9}$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b=0,\ \ g=-d$. Подставляя это в остальные уравнения, получаем

$$0=a+c+f,\ \ d=-2a-c-f \tag{10}$$

(остальные уравнения будут следствиями написанных). Решаем систему (10), например, относительно a и f:

$$a=-d,\ \ f=d-c.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d. Положив $c=C_1,\ d=C_2,$ имеем $a=-C_2,\ b=0,\ f=C_2-C_1,\ g=-C_2.$ Общее решение системы (9) найдено.

Подставив найденные значении $a, b,...$ в (8) и прибавив частное решение (7), умноженное на C_3, получим общее решение системы (4):

$$x=-C_2e^t+C_3e^{2t},\ \ y=(C_1+C_2t)e^t-2C_3e^{2t},\ \ z=(C_2-C_1-C_2t)e^t+2C_3e^{2t}.$$

1.11. *Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами*

$$\dot{x}_i=a_{i1}x_i+...+a_{in}x_n+f_i(t),\quad i=1,...,n, \tag{11}$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0+b_1t+...+b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами (см. п. 1.5 и 1.8 со следующим изменением). Если $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы (11) ищется не в виде $t^sQ_m(t)e^{\gamma t}$, а в виде

$$x_i=Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\quad i=1,...,n, \tag{12}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ – многочлены степени $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m=\max m_i$, $s=0$, если γ – не корень характеристического уравнения (2); а если γ – корень, то s можно взять равным кратности этого корня (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (12) в данную систему (11) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержат $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma=\alpha+\beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-y+e^{3t}(t+\sin t),\\ \dot{y}=x+2y+te^{3t}\cos t.\end{cases} \tag{13}$$

Сначала для однородной системы $\dot{x}=4x-y$, $\dot{y}=x+2y$ находим корни $\lambda_1=\lambda_2=3$ и, как в п. 1.10, отыскиваем общее решение:

$$x_0=(C_1t+C_2)e^{3t},\qquad y_0=(C_1t+C_2-C_1)e^{3t}.$$

В системе (13) для функций te^{3t}, $e^{3t}\sin t$, $e^{3t}\cos t$ числа $\alpha+\beta i$ соответственно равны 3, $3+i$, $3+i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем:

$$\dot{x}=4x-y+te^{3t},\qquad \dot{y}=x+2y, \tag{14}$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}\sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + te^{3t}\cos t. \qquad (15)$$

Для системы (14) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. Согласно (12) частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)e^{3t}.$$

Для системы (15) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)e^{3t}\sin t + (mt + n)e^{3t}\cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)e^{3t}\sin t + (rt + s)e^{3t}\cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов $a, b, \ldots,$ общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

2. Разностные уравнения

2.1. *Автономное линейное однородное разностное уравнение (ЛОРУ) (ЛРУ) первого порядка*

$$x_t = ax_{t-1},\ a \neq 0,\ a \neq 1,\ t = 1, 2, \ldots,$$

имеет *общее решение*

$$x_t = ca^t,$$

где c – постоянная, определяющая конкретное частное решение. Так, если задано начальное значение x_0, то $c = x_0$, т.е.

$$x_t = a^t x_0.$$

(Это видно, если подставить $t = 0$ в равенство, описывающее общее решение.)

Комментарий. Как видно из решения, характер поведения динамической системы $x_t = ax_{t-1}$ зависит от значения a. При $a > 0$ последовательность $\{x_t\}$ – монотонная; при $a < 0$ имеют место осцилляции. Стационарным состоянием служит $x = 0$. При $|a| > 1$ последовательность $\{x_t\}$ – расходящаяся ($|x_t|$ неограниченно увеличивается), при $|a| < 1$ имеет место сходимость к стационарному состоянию из любого начального состояния, т.е. стационарное состояние – асимптотически устойчиво.

Как видим, между разностными уравнениями и дифференциальными уравнениями (они рассматривались в первой части §1) – большое сходство, оно имеет не внешний, а органический характер. Возникает вопрос о существовании единой математической теории, охватывающей разностные и дифференциальные уравнения. О такого рода теории можно прочитать в статье П.Б. Гусятникова в электронном издании «Соросовский образовательный журнал» (1999. № 10. С. 115–121). В этой теории рассматривается абстрактное алгебраическое кольцо, вводится формально понятие оператора дифференцирования кольца, составляется линейное «дифференциальное» уравнение и затем достаточно легко выписывается решение этого уравнения. Следствием оказываются формулы общих решений разнообразных дифференциальных и разностных уравнений.

2.2. *Автономное линейное неоднородное разностное уравнение (ЛНРУ) (ЛРУ) первого порядка*

$$x_t = ax_{t-1} + f,\ a \neq 1,\ t = 1, 2, \ldots,$$

где f – усиливающая переменная (forcing variable), имеет *общее решение*

$$x_t = \overline{x}(t) + x^* = ca^t + x^*,$$

где $x^* = \dfrac{f}{1-a}$ – стационарное состояние.

Частное решение с начальным состоянием x_0 имеет вид

$$x_t = (x_0 - x^*)a^t + x^*,$$

или

$$x_t = \left(x_0 - \frac{f}{1-a}\right)a^t + \frac{f}{1-a} = x_t = x_0 a^t + \frac{f}{1-a}\left(1 - a^t\right).$$

При $a = 0$ получаем уравнение $x_t = f$ при $t = 1, 2, \ldots$ и $x_0 = x_0$. Поэтому решением этого уравнения будет $x_0 = x_0$ и $x_t = f$ при $t = 1, 2, \ldots$. При $a = 1$ получаем уравнение $x_t = x_{t-1} + f$ при $t = 1, 2, \ldots$. Решаем его: при $t = 0$ получаем

$x_1 = x_0 + f$, при $t = 1$ получаем $x_2 = x_1 + f$ = $x_0 + f + f$ = $x_0 + 2f$, при $t = 2$ получаем $x_3 = x_2 + f$ = $x_0 + 2f + f$ = $x_0 + 3f$. И, наконец, получаем x_t = $f \cdot t + x_0$.

Комментарий. Как и в случае дифференциального уравнения, общее решение неоднородного разностного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. В качестве частного решения неоднородного уравнения используем стационарное значение, т.е. такую точку x^*, что уравнение справедливо при $x_t \equiv x^*$:

$$x^* = ax^* + f,\ a \neq 0.$$

Отсюда находим x^*. Используя результат п. 2.1, получаем общее решение неоднородного уравнения в виде

$$x_t = \overline{x}(t) + x^* = ca^t + x^*.$$

Если задано начальное состояние x_0, то выражаем c через x_0 (подставляем t = 0 в общее решение):

$$c = x_0 - x^*.$$

Общее решение принимает указанный выше вид.

2.3. *Решение автономного ЛНРУ первого порядка с использованием операторов сдвига*

Автономное ЛНРУ первого порядка

$$x_t - ax_{t-1} = f_t,\ a \neq 0,\ a \neq 1,\ t = 1, 2, \ldots,$$

с использованием оператора лага (задержки) $Lx_t = x_{t-1}$ представляется в виде

$$(1 - aL)x_t = f_t$$

и имеет общее решение:

$$x_t = Cf_t + x(0)a^t = \sum_{i=0}^{t-1} a^i f_{t-i} + x(0)a^t,$$

где C – оператор Коши уравнения.

Комментарий. Слагаемое $x(0)a^t$, как нам уже известно, представляет собой общее решение однородного уравнения $x_t = ax_{t-1}$, $\bar{x}(t) = x(0)a^t$. Проверим, что другое слагаемое Cf_t есть стационарное состояние неоднородного уравнения при условии $x(0) = 0$. Действительно, $(1 - aL)\ Cf_t = f_t$ при $x(0) = 0$.

2.4. *Автономное ЛНРУ (ЛРУ) первого порядка, формула Коши*

$$x_t = ax_{t-1} + f_t,\ a \neq 0,\ a \neq 1,\ t = 1, 2, \ldots,$$

где $\{f_t\}$ – экзогенная последовательность значений усиливающей переменной, имеет общее решение, это формула Коши для автономного ЛНРУ (ЛРУ) первого порядка:

$$x_t = a^t x(0) + Cf_t = a^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} a^i f_{t-i} = a^t x(0) + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i} f_i .$$

Здесь фундаментальное решение равно $X_t = a^t$, функция Коши равна $C_{t-s} = a^{t-s}$.

Комментарий. Как и раньше, общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{x}(t) = ca^t$. Чтобы получить частное решение неоднородного уравнения, положим $x_0 = 0$.

Тогда $x_1 = f_1$, $x_2 = ax_1 + f_2 = a f_1 + f_2$, $x_3 = ax_2 + f_3 = a^2 f_1 + af_2 + f_3$, ...,

$$x_t = \sum_{i=0}^{t-1} a^i f_{t-i} = \sum_{i=1}^{t} a^{t-i} f_i .$$

Приходим к указанному общему решению ЛНРУ (ЛРУ).

2.5. *Автономные ЛОРУ (ЛРУ) n-го порядка*

Рассматриваем только стационарные или автономные уравнения, где a_0, $a_1, \ldots, a_n$ – вещественные числа:

$$(Lx)(t) = a_0 x(t+n) + a_1 x(t+n-1) + \ldots + a_{n-1} x(t+1) + a_n x(t) = 0,\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

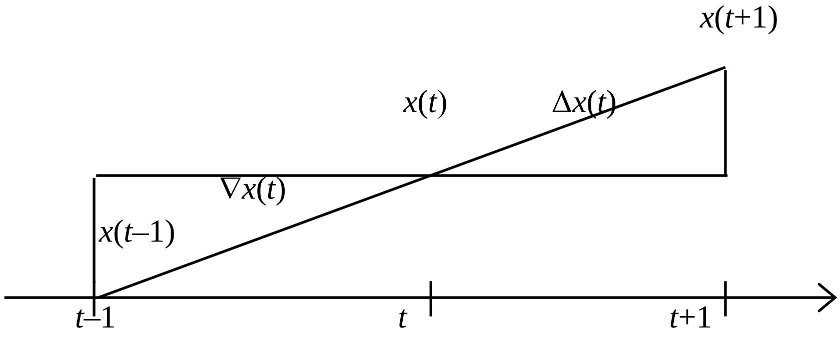
n – лаг времени, n – порядок уравнения, пусть $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$,

$$(\Delta x)(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t) \text{ – нисходящяя правая разность,}$$

$$(\nabla x)(t) = \nabla x(t) = x(t) - x(t-1) \text{ – восходящяя левая разность ("}\nabla\text{" – набла),}$$

$$(\nabla x)(t) = (\Delta x)(t-1).$$

Если взять обыкновенное дифференциальное уравнение, при этом взяв $\Delta t = 1$, получим $x'(t) \approx \Delta x(t)$ и сопоставим ему разностное: $x'(t) + ax(t) = 0$ на $\Delta x(t) + ax(t) = x(t+1) - x(t) + ax(t) = 0$, $x(t+1) + (a-1)x(t) = 0$ или $x(t+1) + a_1 x(t) = 0$, $a_1 = 1 - a$.



Для вторых разностей верно:

$$\Delta^2 x(t) = \Delta\Delta x(t) = x(t+2) - 2x(t+1) + x(t),$$

$$\nabla\Delta x(t) = x(t+1) - 2x(t) + x(t-1),$$

$$\Delta\nabla x(t) = x(t+1) - 2x(t) + x(t-1),\ \nabla^2 x(t) = \nabla\nabla x(t) = x(t) - 2x(t-1) + x(t-2).$$

Для n-й производной можно записать:

$$x^{(n)}(t) \approx \Delta^n x(t) = (x(t+1) - x(t))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x(t+k)(-1)^{n-k},$$

при этом мы воспользовались биномом Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Разностное уравнение возникает, например, при аппроксимации в моделях обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание. Пример ЛРУ с непрерывным временем. Это ЛРУ вида $x(t+1) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Существует бесконечно много решений: это все периодические функции периода 1.

$$(Lx)(t) = a_0 x(t+n) + a_1 x(t+n-1) + \ldots + a_n x(t),\ t \in \mathbb{R},$$

$a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ – пример ЛРУ с непрерывным временем. Для такого объекта используются такие методы: 1) преобразование Фурье; 2) дискретное преобразование Лапласа (z-преобразование): $F(p) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-pt}x(t) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} z^t x(t) = F_1(z)$ – дискретное преобразование Лапласа, производящая функция.

2.6. *Методы решения автономных ЛРУ*

$$\begin{cases} (Lx)(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x(1) = x_1, \\ \ldots\ldots \\ x(n-1) = x_{n-1} \end{cases} \quad \text{– задача Коши при любых } x_0, \ldots, x_{n-1},$$

причем задача Коши всегда имеет единственное решение.

Решение по шагам, рекуррентный, рекурсивный метод

Пример. Возьмем последовательность $x(t+2) = x(t+1) + x(t)$, $t = 0,1,2,\ldots$, $x(0) = x(1) = 1$, $x(2) = x(1) + x(0) = 2$, $x(3) = x(2) + x(1) = 3$, $x(4) = x(3) + x(2) = 5,\ldots$. Это числа Фибоначчи: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,… .

С помощью характеристического уравнения, метод Эйлера

Пример. Найти общее решение ЛРУ: $x(t+2) = x(t+1) + x(t)$, $t = 0,1,2,\ldots$, $x(0) = x(1) = 1$.

Решение будем искать в виде $x(t) = \lambda^t$, $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda^{t+2} = \lambda^{t+1} + \lambda^t$ – характеристическое уравнение, $\lambda \neq 0$, следовательно, $\lambda^2 = \lambda + 1$, $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, отсюда $x_1(t) = \lambda_1^t$, $x_2(t) = \lambda_2^t$ – частные решения.

Общее решение однородного уравнения: $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) =$ $= c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$ – линейное пространство размерности два.

Найдем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) = c_1\lambda_1^0 + c_2\lambda_2^0 = c_1 + c_2 = 1, \\ x(1) = c_1 x_1(1) + c_2 x_2(1) = c_1\lambda_1^1 + c_2\lambda_2^1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \end{cases}$$

$c_1 = 1 - c_2, \qquad (1 - c_2)\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \qquad \lambda_1 - c_2\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \qquad c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 1 - \lambda_1,$

$$c_2 = \frac{1-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \qquad c_1 = 1 - c_2 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Числа Фибоначчи:

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Виды частного решения

1) λ – корень характеристического уравнения кратности 1 и вещественный (простой вещественный корень), тогда

$$x(t) = \lambda^t.$$

2) λ – вещественный корень кратности k (резонанс), тогда

$$x_1(t) = \lambda^t,\ x_2(t) = t\lambda^t,\ \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\lambda^t.$$

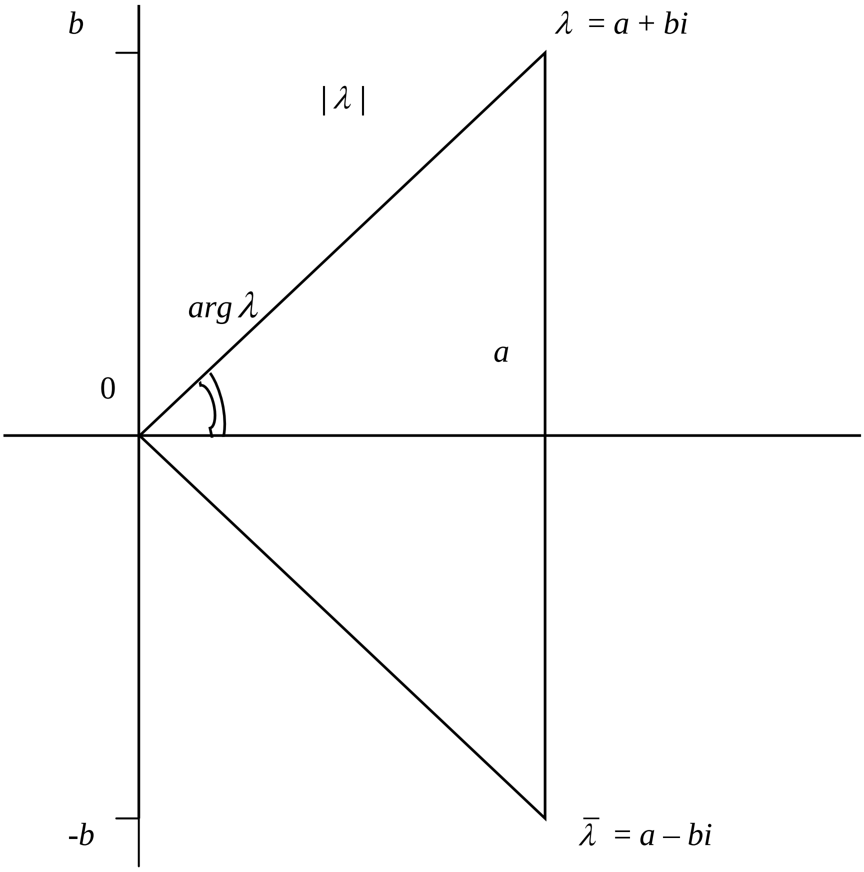
3) λ – простой комплексный корень, тогда $\bar{\lambda}$ – тоже корень; имеем два решения:

$$x_1(t) = |\lambda|^t \cos(t \arg\lambda),\ x_2(t) = |\lambda|^t \sin(t \arg\lambda).$$

4) λ – кратный комплексный корень ($\bar{\lambda}$ – тоже кратный комплексный корень), тогда $x_1(t) = |\lambda|^t \cos(t\arg\lambda)$, $x_2(t) = t|\lambda|^t \cos(t\arg\lambda)$, …, $x_k(t) = t^{k-1}|\lambda|^t \cos(t\arg\lambda)$, $x_{k+1}(t) = |\lambda|^t \sin(t\arg\lambda)$, $x_{k+2}(t) = t|\lambda|^t \sin(t\arg\lambda)$, …, $x_{2k}(t) = t^{k-1}|\lambda|^t \sin(t\arg\lambda)$.

Пояснение к 3-му случаю

Пусть λ – простой комплексный корень характеристического уравнения, $\bar{\lambda}$ – тоже простой комплексный корень. Тогда $x_1(t) = |\lambda|^t \cos(t\arg\lambda)$, $x_2(t) = |\lambda|^t \sin(t\arg\lambda)$, $\lambda = a + bi$, $\bar{\lambda} = a - bi$.



Решение ищем в виде $x(t)=\lambda^t=(a+bi)^t$. Для этого распишем число λ: $\lambda=a+bi=|\lambda|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $\varphi=\arg\lambda$, $|\lambda|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Тогда получим $x(t)=\lambda^t=(a+bi)^t=|\lambda|^t(\cos\varphi+i\sin\varphi)^t$ = (по формуле Муавра) = $|\lambda|^t(\cos t\varphi+i\sin t\varphi)$, $t=0,1,2\ldots$. Получим комплексное решение уравнения. Непосредственной проверкой убедимся, что функции $x_1(t)=$ $=|\lambda|^t\cos t\varphi$, $x_2(t)=|\lambda|^t\sin t\varphi$ являются вещественным решением ЛРУ.

Пример ЛРУ с кратными корнями. Рассмотрим уравнение $x(t+2)-2x(t+1)+x(t)=0$, $t=0,1,2\ldots$ Оно имеет характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $(\lambda-1)^2=0$, его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$. Базис пространства решений состоит из двух элементов: $x_1(t)=1$, $t=1$, $x_2(t)=t\cdot1=t$.

Проверка: $t+2-2(t+1)+t=t+2-2t-2+t=0$.

Решение ЛРУ со специальной правой частью

1) $f(t)=\rho^t P_k(t)$, k – степень многочлена.

1-й случай

ρ – не является корнем характеристического уравнения, поэтому $x^*(t)=\rho^t A_k(t)$, где $A_k(t)$ – многочлен степени k с неопределенными коэффициентами.

2-й случай

ρ – корень характеристического уравнения кратности j, тогда $x^*(t)=t^j\rho^t A_k(t)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=3^t$, $t=0,1,2,\ldots$.

Решение. Сначала решаем однородное ЛРУ:

$$x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=0.$$

Ищем $x(t)=\lambda^t$, получаем $\lambda^2-4\lambda+3=0$, находим корни $\lambda_1=1$ $\lambda_2=3$, затем находим решение $x_1=1^t=1$, $x_2=3^t$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{x}(t)=c_1+c_2 3^t$.

Решаем неоднородное уравнение: здесь $f(t)=3^t$, $\rho=3=\lambda_2$, ρ является корнем один раз (k=0, степень многочлена j = 1 равна кратности корня), поэтому $x^*(t)=t^j\rho^t A_0(t)=t3^t A$.

Находим A, подставим $x(t+1)=(t+1)3^{t+1}A$, $x(t+2)=(t+2)3^{t+2}A$ в уравнение:

$$(t+2)3^{t+2}A-4(t+1)3^{t+1}A+3t3^t A=A3^t\left((t+2)9-12(t+1)+3t\right)=A3^t6=3^t,$$

находим $A=\frac{1}{6}$, откуда $x^*(t)=\frac{1}{6}t3^t$. **Ответ:** $x(t)=c_1+c_2 3^t+\frac{1}{6}t3^t$.

Пример. Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=3^t, \quad t=0,1,2,\ldots, \\ x(0)=1, \\ x(1)=0. \end{cases}$$

Решение. Подставляем начальное значение: $x(0)=c_1+c_2+0=1$,

$$x(1)=c_1+c_2 3+\frac{1}{6}3=0,\ \begin{cases} c_1=1-c_2, \\ 1-c_2+3c_2+\frac{1}{2}=0, \end{cases}\ 2c_2=-\frac{3}{2},\ c_2=-\frac{3}{4},\ c_1=1\frac{3}{4}.$$

И, **наконец:** $x(t)=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}3^t+\frac{1}{6}t3^t$.

2) $f(t)=\rho^t\left(P_k(t)\cos\alpha t+Q_l(t)\sin\alpha t\right)$, составим $r=\rho(\cos\alpha+ + i\sin\alpha)=\rho e^{i\alpha}$.

1-й случай

r – не корень характеристического уравнения (т.е. корень кратности 0), тогда $x^*(t)=t^0\rho^t\left(A_m(t)\cos\alpha t+B_m(t)\sin\alpha t\right)$, где $m=\max\{k,l\}$.

2-й случай

r – корень кратности j, тогда $x^*(t)=t^j\rho^t\left(A_m(t)\cos\alpha t+B_m(t)\sin\alpha t\right)$, $m=\max\{k,l\}$.

3) $f(t)=\rho^t\left(P_k(t)\text{ch}\alpha t+Q_l(t)\text{sh}\alpha t\right)$, где $\text{sh}\alpha t=\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$; $\text{ch}\alpha t=\dfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}$.

Подставим m, где $m\le\max\{k,l\}$,

$$f(t)=\rho^t\left(\underset{\frac{P_k(t)+Q_l(t)}{2}}{\tilde{P}_m(t)}\,e^{\alpha t}+\underset{\frac{P_k(t)-Q_l(t)}{2}}{\tilde{Q}_m(t)}\,e^{-\alpha t}\right)=\rho^t e^{\alpha t}\tilde{P}_m(t)+\rho^t e^{-\alpha t}\tilde{Q}_m(t)=$$

$$=\underset{\rho_1}{\left(\rho e^{\alpha}\right)^t}\tilde{P}_m(t)+\underbrace{\left(\rho e^{-\alpha}\right)}_{\rho_2}{}^t\tilde{Q}_m(t)=\rho_1^t\tilde{P}_m(t)+\rho_2^t\tilde{Q}_m(t).$$

Пусть ρ_1 – корень характеристического уравнения кратности j_1, ρ_2 – корень характеристического уравнения кратности j_2, тогда $x^*(t)=t^{j_1}\rho_1^tA_m(t)+t^{j_2}\rho_2^tB_m(t)$, где $A_m(t)$, $B_m(t)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени m.

Пусть $j_1 = j_2 = j$, тогда $x^*(t) = t^j \rho^t \left[\tilde{A}_m(t) \operatorname{ch} \alpha t + \tilde{B}_m(t) \operatorname{sh} \alpha t \right]$.

2.7. *Формула Коши для автономного ЛНРУ (ЛРУ) n-го порядка*

Для ЛРУ порядка *n*:

$$(Lx)(t) = a_0 x(t+n) + a_1 x(t+n-1) + \ldots + a_{n-1} x(t-1) + a_n x(t) = f(t),\ t = 0,1,2,\ldots,$$

где $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, формула Коши имеет вид

$$x(t+n) = \sum_{s=0}^{t} C(t-s+n-1) f(s) + x_1(t) x(0) + x_2(t) x(1) + \ldots + x_n(t) x(n-1),$$

$$t = 0,1,2,\ldots.$$

Функция Коши $C(t)$ удовлетворяет условию

$$(Lx)(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 0, \ldots, x(n-1) = 1.$$

Здесь фундаментальные решения удовлетворяют условиям: $x_1(t)$: $(Lx)(t) = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x(1) = 0,\ \ldots,\ x(n-1) = 0$; $x_2(t)$: $(Lx)(t) = 0,\ \ x(0) = 0,$ $x(1) = 1,\ \ldots,\ x(n-1) = 0$; … ; $x_n(t)$: $(Lx)(t) = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 0, \ldots, x(n-1) = 1.$

Можно показать, что $C(t) = \dfrac{1}{a_0} x_n(t)$.

Пример. Записать формулу Коши для уравнения второго порядка:

$$(Lx)(t) = x(t+2) + x(t) = f(t),\ t = 0,1,2,\ldots.$$

Решение. Функция Коши уравнения

$$(Lx)(t) = x(t+2) + x(t) = 0,\ t = 0,1,2,\ldots,$$

удовлетворяющая начальным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, – это функция $C(t)$ = $x_2(t)$ = $\sin \dfrac{\pi t}{2}$. Первым фундаментальным решением является функция $x_1(t)$ = $\cos \dfrac{\pi t}{2}$. Следовательно, формула Коши для уравнения имеет вид

$$x(t+2) = \sum_{s=0}^{t} \sin \pi \frac{t-s+1}{2} f(s) + \cos \frac{\pi t}{2} x(0) + \sin \frac{\pi t}{2} x(1),\ t = 0,1,2,\ldots.$$

2.8. *Решение автономной линейной однородной системы разностных уравнений (ЛОСРУ) (ЛРУ)*

$$x_{t+1} = Ax_t,\ t = 0,1,2,\dots,$$

где A – невырожденная матрица размера $n \times n$, x – n-мерный вектор.

Если матрица A приводится к диагональному виду $A = S\Lambda S^{-1}$ (для этого достаточно, чтобы собственные векторы-столбцы были линейно независимыми), то

$$x_t = A^t x_0 = S\Lambda^t S^{-1} x_0 = c_1 \lambda_1^t u_1 + c_2 \lambda_2^t u_2 + \ldots + c_n \lambda_n^t u_n,$$

где λ_i – собственные числа матрицы A; u_i – соответствующие правые собственные векторы; c_i – постоянные, которые удовлетворяют начальному условию

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = x_0 .$$

Таким образом, решение представляет собой комбинацию «гармонических составляющих» – частных решений, проходящих вдоль собственных векторов матрицы A.

Матрица Λ называется *подобной* матрице A, если существует невырожденная матрица S такая, что $\Lambda = S^{-1}AS$. Преобразование $A \to S^{-1}AS$ называется *преобразованием подобия* (или просто *подобием*). Отношение «Λ подобна A» иногда записывается сокращенно: $\Lambda \sim A$. Подобие является отношением эквивалентности, а именно: оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Матрица A называется *диагонализуемой*, если она подобна диагональной матрице. Имеется простое условие, обеспечивающее диагонализуемость, – когда все собственные значения различны.

2.9. *Формула Коши для систем неоднородных автономных ЛРУ*

Формула Коши для системы неоднородных автономных ЛРУ $x_{t+1} = Ax_t + f_{t+1}$, $t = 0,1,2,\dots$, имеет вид

$$x_t = \underbrace{\sum_{s=1}^{t} C_{t-s} f_s}_{\text{частное решение неоднородного ур-я}} + \underbrace{X_t x_0}_{\text{общее решение однородного ур-я}},\ t = 1,2,\dots.$$

Здесь $C_{t,s} = C_{t-s}$ – матрица-функция Коши, $C_t = X_t$ – фундаментальная матрица решений. Верно равенство $C_{t-s} = X_t X_s^{-1}$. Причем $X_t = A^t$, $C_{t-s} = A^{t-s}$.

Список литературы к § 1

1. *Азбелев Н.В.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В*. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 384 с.

3. *Араманович И.Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 416 с.

4. *Батищева С.Э.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие / С.Э. Батищева, Э.Д. Каданэр, П.М. Симонов. 2-е изд., перераб. и доп. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. Гл. 8.

5. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. 13-е изд., испр. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 3.3.1.6, 4.4.3.

6. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1967. Гл. V.

7. *Коврижных А.Ю.* Дифференциальные и разностные уравнения: учеб. пособие / А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 148 с.

8. *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. 6-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2003. Гл. 9, 9.4-5, 9.4-7; Гл. 13, 13.6-1,2; Гл. 20, 20.4-4-20.4-7.

9. *Краснов М.Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. 256 с.

10. *Краснов М.Л.* Вся высшая математика: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / М.Л.

Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин. М.: Едиториал УРСС, 2005. Т. 3. 240 с.

11. *Курзенев В.А.* Экономический рост / В.А. Курзенев, В.Д. Матвеенко. СПб.: Питер, 2018. Прилож. 1: Динамические системы. (Справочник экономиста).

12. *Лихтарников Л.М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб.: Лань, 1997. Гл. 4.

13. *Панюкова Т.А.* Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов: учеб. пособие. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 256 с.

14. *Романко В.К.* Курс разностных уравнений: учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 200 с.

15. *Сюдсетер К.* Справочник по математике для экономистов / пер. с норвежск.; под ред. Е.Ю.Смирновой, К. Сюдсетер, А. Стрём, П. Берк. СПб.: Экономич. школа, 2000. X + 229 с.

16. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.

§ 2. Устойчивость решений ЛОДУ, систем ЛОДУ, ЛРУ

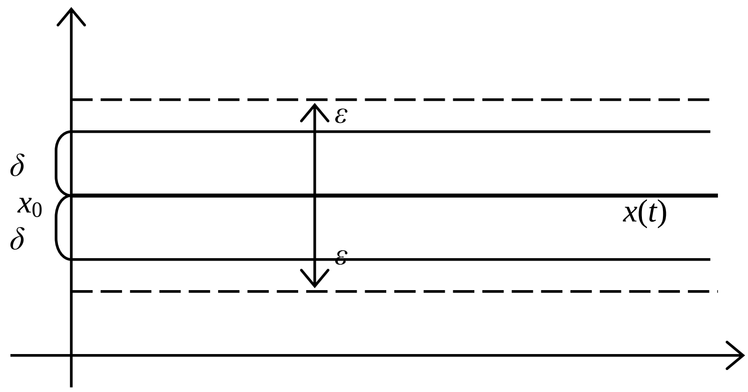
2.1. Устойчивость решений ЛОДУ

Будем рассматривать стационарные (автономные) ЛОДУ вида

$$(Lx)(t) = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} x'(t) + a_n(t) x(t) = f(t),\ t \ge 0,$$

т.е. $a_0, \ldots, a_n = \text{const}$, $a_0 \ne 0$, $Lx = f$, $x(0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$ – задача Коши.

Определение 2.1.1 (устойчивость по Ляпунову). Решение $x = x(t)$ уравнения $Lx = f$ устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для любых $y_0, ..., y_{n-1}$: $|y_0 - x_0| < \delta,\ \ldots\ ,\ |y_{n-1} - x_{n-1}| < \delta$ следует $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$, для любого $t \ge 0$.



Для уравнения первого порядка все решения, которые выходят из δ-окрестности начального условия x_0, остаются в ε-трубке исходного решения.

Определение 2.1.1-bis (устойчивость по Ляпунову). Это есть непрерывная зависимость по норме $C = C[0, \infty)$ решений уравнения от начальных условий. Здесь норма в $C[0,\infty)$: $\|x\|_C = \sup\limits_{t \ge 0} |x(t)|$.

Определение 2.1.2 (асимптотическая устойчивость по Ляпунову). Решение $x = x(t)$ уравнения $Lx = f$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, если:

1) это решение устойчиво по Ляпунову;

2) любая траектория (решение) $y(t)$ обладает свойством: $y(t) \to x(t)$ при $t \to +\infty$.

Отрицание асимптотической устойчивости означает, что 1) решение вообще неустойчиво, 2) решение устойчиво, но не асимптотически. В случае 2) будем говорить, что решение $x(t)$ просто устойчиво.

Решение $x = x(t)$, не обладающее свойством устойчивости, называется неустойчивым.

Утверждение 2.1.1. Для ЛОДУ все решения устойчивы или неустойчивы одновременно, в том числе все решения и асимптотически устойчивы одновременно, следовательно, достаточно для ЛОДУ изучать устойчивость нулевого решения, следовательно, достаточно изучать устойчивость однородного уравнения.

ЛОДУ в случае устойчивости решений называется устойчивым ЛОДУ, а в случае неустойчивости решений называется неустойчивым ЛОДУ.

2.2. Критерий асимптотической устойчивости, устойчивости и неустойчивости стационарного ЛОДУ

2.2.1. Критерий асимптотической устойчивости стационарных ЛОДУ

Любое решение однородного уравнения обладает свойством: $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, это эквивалентно тому, что $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для любого λ_k – корня характеристического уравнения (см. рис. 1).

Допустим, пусть все $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для любого λ_k – корня характеристического уравнения. По методу Эйлера решения однородного уравнения имеют вид: λ_k – вещественный корень, тогда $x_k(t) = e^{\lambda_k t}$. Пусть $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k i$ – комплексный корень, тогда $x_k(t) = e^{\alpha_k t}(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t)$; если $\alpha_k = \operatorname{Re}\lambda_k < 0$, то $e^{\alpha_k t} \to 0$.

2.2.2. Критерий устойчивости стационарных ЛОДУ

Любое решение однородного уравнения ограничено при $t \ge 0$, это означает, что корни характеристического уравнения $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$; если $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, то λ_k – простой корень (рис. 2).

2.2.3. Критерий неустойчивости стационарного ЛОДУ

Существует решение однородного уравнения, неограниченное при $t \ge 0$, либо существует $\lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k > 0$, либо существует $\lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k = 0$, λ_k – кратный корень, а все остальные корни таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ (рис. 3, 4).

В случае кратного корня λ_k такого, что $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, решения имеют вид: $e^{\lambda_k t} = \cos\beta_k t + i\sin\beta_k t$ – ограниченная функция, а $te^{\lambda_k t} = t(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t)$ – неограниченная функция,…, $t^{j-1}e^{\lambda_k t} = t^{j-1}\left(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t\right)$ – неограниченная функция.

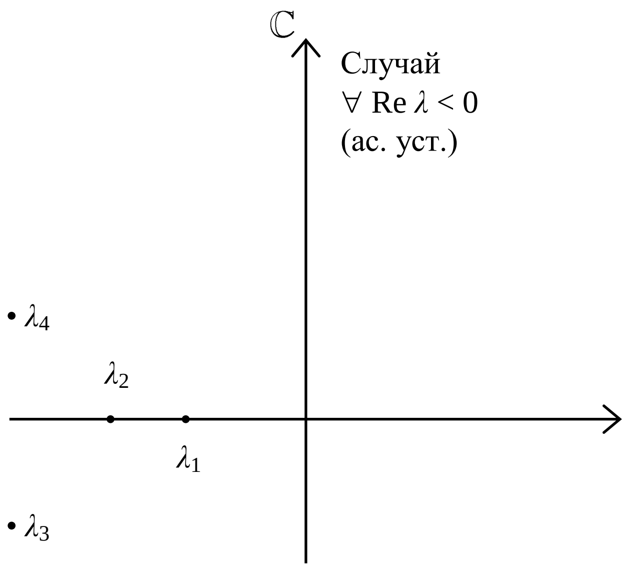


Рис. 1

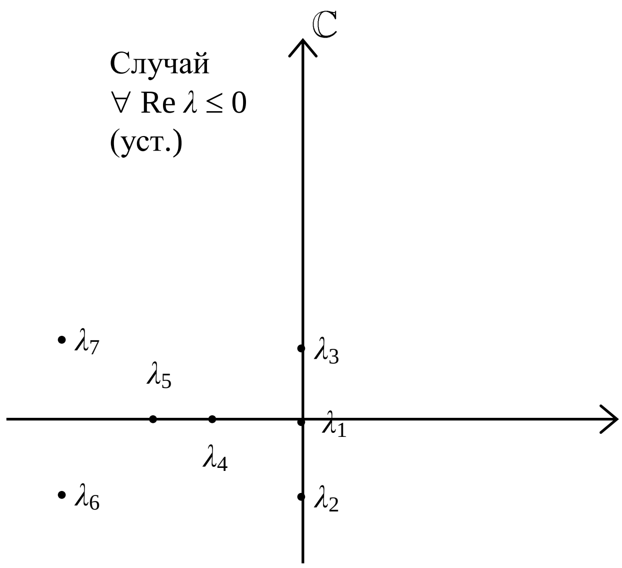


Рис. 2

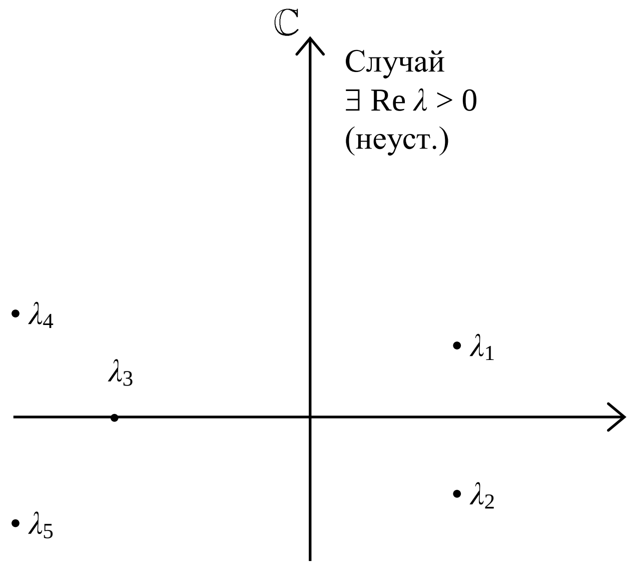


Рис. 3

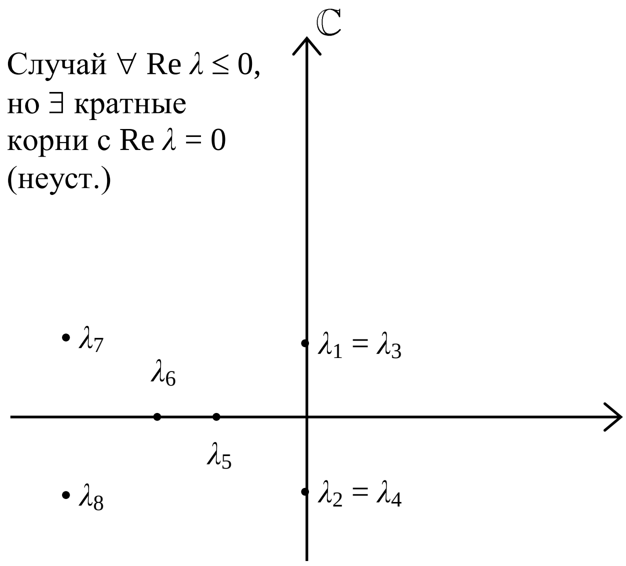


Рис. 4

Пример 1. Исследуем на устойчивость $x''(t)+4x(t)=2$, рассмотрим однородное уравнение $x''(t)+4x(t)=0$, составим характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$, найдем его корни $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$, уравнение устойчиво.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $x^{(250)}(t)=0$, характеристическое уравнение $\lambda^{250}=0$, его корни $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{250}=0$, кратность равна 250. Следовательно, уравнение неустойчиво. Решения однородного уравнения: $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$, …, $x_{250}(t)=t^{249}$.

Заметим, что отсюда видно, что свойство простой устойчивости (не асимптотической) неустойчиво относительно малых возмущений коэффициентов уравнения, т.е. это – «негрубая» устойчивость в отличие от асимптотической устойчивости (такая устойчивость – «грубая» устойчивость).

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x^{(n)}(t)=0$ при $n>2$. Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^n=0$. Очевидно, что корни будут таковы: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, т.е. корни кратные и лежат на мнимой оси. Им соответствуют решения: $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t,\ldots,x_n(t)=t^{n-1}$. Очевидно, что первое решение ограничено, остальные – не ограничены на полуоси $[0,\infty)$.

Очевидно, что ЛОДУ $x^{(n)}(t) - \varepsilon x(t) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$ – неустойчивое уравнение. Действительно, характеристическое уравнение этого уравнения имеет вид $\lambda^n - \varepsilon = 0$, откуда $\lambda_1 = \varepsilon^{1/n} > 0$. Заметим, что уравнение $x^{(n)}(t) + \varepsilon x(t) = 0$ при $n > 2$ и $\varepsilon > 0$ также неустойчиво, так как его характеристическое уравнение $\lambda^n + \varepsilon = 0$ имеет n различных комплексных корней, которые располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром симметрии в начале координат. Среди этих корней обязательно найдется λ корень, для которого $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $x''(t) = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 = 0$, откуда находим корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Соответствующие решения имеют вид $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, т.е. уравнение неустойчиво. Уравнение $x''(t) - \varepsilon x(t) = 0$ также неустойчиво, так как корни его характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = \sqrt{\varepsilon}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\varepsilon}$. Уравнение $x''(t) + \varepsilon x(t) = 0$ устойчиво, так как корни его характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = i\sqrt{\varepsilon}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\varepsilon}$. Уравнение $x''(t) + 2\varepsilon x'(t) + \varepsilon^2 x(t)$ асимптотически устойчиво, так как корни его характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = \lambda_2 = -\varepsilon < 0$.

2.3. Устойчивость решений систем стационарных ЛОДУ

$x' = Ax + f$ – это система ЛОДУ, где x – вектор неизвестных, $x = \operatorname{col}\{x_1, \ldots, x_n\}$, вектор правых частей – $f = \operatorname{col}\{f_1, \ldots, f_n\}$, постоянная матрица – $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 2.3.1. Решение $x = x(t)$ системы уравнений устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ для любого $\|y_0 - x_0\| < \delta$, следует $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \ge 0$.

Здесь $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ – начальные условия. Норма в $\mathbb{R}^n$ любая $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, так как в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.

Решения $x = x(t)$, не обладающие свойством устойчивости, называются неустойчивыми.

Определение 2.3.2. Решение $x = x(t)$ системы асимптотически устойчиво по Ляпунову, если:

1) это решение устойчиво по Ляпунову,

2) для любого решения $y(t)$ следует $y(t) \to x(t)$ при $t \to +\infty$.

Утверждение 2.3.1. Для системы ЛОДУ все решения устойчивы или неустойчивы одновременно, в том числе все решения и асимптотически устойчивы одновременно, следовательно, можно рассматривать только однородное уравнение и исследовать на устойчивость только тривиальное решение, следовательно, можно говорить просто об устойчивости уравнений.

2.4. Критерии асимптотической устойчивости, устойчивости и неустойчивости стационарных систем ЛОДУ

2.4.1. Критерий асимптотической устойчивости стационарных систем ЛОДУ

Любое решение однородной системы ЛОДУ $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ эквивалентно потому, что все корни имеют $\operatorname{Re}\lambda < 0$, λ – корень характеристического уравнения, т.е. $\det(\lambda E - A) = 0$.

2.4.2. Критерий устойчивости стационарных систем ЛОДУ

Любое решение x однородной системы ЛОДУ ограничено, эквивалентно тому, что $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, причем если $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то λ – имеет простой элементарный делитель (например λ – простой корень) в жордановой форме матрицы A.

Поясним понятие элементарного делителя.

Многочлен $\mathbf{P}_n(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ раскладывается на множители $\mathbf{P}_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные корни многочлена, $n_1, \ldots, n_k$ – их кратности.

Известно[12,13], что матрицу A можно привести к подобной матрице $\mathcal{J} = T^{-1}AT$ с помощью невырожденной комплексной матрицы T. Матрица $\mathcal{J}$ тоже может быть комплексной. Ее называют жордановой формой матрицы A. Матрица $\mathcal{J}$ имеет следующую структуру. Она составлена из клеток Жордана, т.е. имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \square & & & & \\ & \square & & 0 & \\ 0 & & \square & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & \square \end{pmatrix},$$

где каждая клетка $\square$ соответственно имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$. Иногда ряд единиц пишут ниже диагонали.

---

[12]*Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд., доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. Гл. VI, § 6; Гл. VII, § 7.

[13]*Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра) / под общ. ред. Л.А. Люстерника, А.Р. Янпольского. М.: Физматгиз, 1962. Гл. II, § 1, 11.

Проблема состоит в том, что одному характеристическому числу λ_1 может соответствовать несколько клеток Жордана. Сумма размерностей этих клеток равна n_1. Например, при $n_1 = 3$ могут быть случаи: $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$ – три клетки, $\left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$ – две клетки, $\left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right)$ – две клетки. В последних двух случаях говорят, что числу λ_1 соответствуют непростые элементарные делители. В первом случае получаем простые элементарные делители.

Нам интересен случай $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, т.е. случай $\lambda_1 = i\omega_1$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$. Показано, что в случае непростых элементарных делителей такому λ_1 соответствует не ограниченное на $[0,\infty)$ решение однородного уравнения. Наоборот, в случае простых элементарных делителей получаем ограниченное на $[0,\infty)$ решение.

Пример 1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$, здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, клетки Жордана простые, т.е. имеем простые элементарные делители. Решение системы: $x(t) = x(0)$, $y(t) = y(0)$. Очевидно, что решение ограничено, т.е. система устойчива по Ляпунову.

Пример 2. Рассмотрим систему $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 0 \end{cases}$, здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Клетка Жордана непростая, поэтому имеем непростой элементарный делитель. Решение системы имеет вид $x(t) = x(0) + ty(0)$, $y(t) = y(0)$, т.е. хотя бы одно решение не ограничено на полуоси $[0,\infty)$, значит, система неустойчива по Ляпунову.

2.4.3. Критерий неустойчивости стационарных систем ЛОДУ

Существует x – решение однородной системы ЛОДУ, неограниченное тогда, когда существует либо $\operatorname{Re}\lambda > 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda = 0$: λ имеет непростые элементарные делители (в жордановой форме матрицы A), а все остальные корни таковы, что $\operatorname{Re}\lambda \le 0$.

Пример. Рассмотрим систему $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица системы, выразим характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$ – система неустойчива, так как $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$.

2.5. Исследование устойчивости уравнений без использования корней характеристических уравнений
Критерий Рауса–Гурвица

Другое название критерия – критерий Гурвица. Критерий дает необходимые и достаточные условия того, что все корни многочлена

$$\mathbf{P}_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

с действительными коэффициентами $a_0 > 0$, $a_1,\ldots,a_n$ имеют отрицательные действительные части. Такие многочлены называют либо устойчивыми многочленами, либо многочленами Гурвица. Критерий получен А.Гурвицем (А.Хурвицем) в 1895 г. и является обобщением некоторых результатов Э.Дж.Рауса (Э.Дж.Рауза). С историей исследования можно ознакомиться в книге[14] (там же содержится информация о результатах И.А.Вышнеградского, А.Стодолы и т.д.). Результаты Рауса можно найти в книге[15].

---

[14] *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. Гл. 1.
[15] *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Указ. соч. Гл. III, § 4, 4, 5.

2.5.1. Схема критерия Рауса–Гурвица

Составим матрицу Гурвица

$$H = M_P = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Заметим, что n – четное, тогда последний столбец имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Если же n – нечетное, то последний столбец имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Иногда матрицу транспонируют, т.е. рассматривают матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

Многочлен $\mathbf{P}_n(\lambda)$ степени $n \geq 1$ называют стандартным полиномом[16], если $a_0 > 0$ и $a_n \neq 0$. В этом случае полином не имеет нулевых корней.

Многочлен $\mathbf{P}_n(\lambda)$ называют устойчивым многочленом (многочленом (полиномом) Гурвица), если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ для любого корня λ этого многочлена.

Через $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ обозначим последовательные главные (угловые) миноры матрицы Гурвица H.

2.5.2. Теорема (критерий (условия)) Рауса–Гурвица, теорема (условия) Гурвица

$\mathbf{P}(\lambda)$ – стандартный устойчивый многочлен тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0.$$

Замечание 1. Очевидно, что $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, поэтому в условиях Рауса–Гурвица неравенство $\Delta_n > 0$ эквивалентно неравенству $a_n > 0$, т.е. в случае $\Delta_n > 0$ многочлен будет стандартным.

Пример 1. Пусть $n = 1$, уравнение имеет вид $a_0 x' + a_1 x = 0$. Ему соответствует характеристическое уравнение $a_0 \lambda + a_1 = 0$, откуда $\lambda = -\dfrac{a_1}{a_0}$, где $a_0 > 0$. Асимптотическая устойчивость этого уравнения будет при $\lambda < 0$, что эквивалентно неравенствам $a_0 > 0$, $a_1 > 0$. Здесь $H = a_1 = \Delta_1 > 0$.

Пример 2. Пусть $n = 2$, уравнение имеет вид $a_0 x'' + a_1 x'' + a_2 x = 0$. Ему соответствует характеристическое уравнение $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$, где $a_0 > 0$. Матрица Гурвица имеет вид $H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Далее находим $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = \det H = a_2 \Delta_1 = a_1 a_2 > 0$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству

[16] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости: учеб. пособие / предисл. В.М. Миллионщикова. 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. Гл. II, § 9.

$a_2>0$. Асимптотическая устойчивость этого уравнения будет при $a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$.

Пример 3. Пусть $n=3$, уравнение имеет вид $a_0x'''+a_1x''+a_2x'+a_3x=0$. Ему соответствует характеристическое уравнение $a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$, где $a_0>0$. Матрица Гурвица имеет вид $H=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$. Далее находим

$\Delta_1=a_1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0$, $\Delta_3=\det H=\Delta_2a_3=(a_1a_2-a_0a_3)a_3>0$.

Последнее неравенство эквивалентно неравенству $a_3>0$. Асимптотическая устойчивость этого уравнения будет при $a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $a_1a_2-a_0a_3>0$.

Здесь из условий $a_0>0$, $a_1>0$, $a_3>0$ и $a_1a_2-a_0a_3>0$ следует, что $a_2>0$. При $a_2<0$ неравенство $\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3>0$ не будет выполнено.

Замечание 2. Пусть $a_0>0$, $a_n\neq 0$ (т.е. полином стандартный). Тогда из того, что $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$ для любого корня λ, следует, что $\Delta_1\geq 0,\dots,\Delta_n\geq 0$. Но эти неравенства не гарантируют устойчивости. Требуется при наличии корней, лежащих на мнимой оси, исследовать их кратность (простоту). В этом случае обычно говорят, что требуется дополнительное исследование.

Замечание 3. Если $\Delta_1>0,\dots,\Delta_k>0$, но $\Delta_{k+1}<0$, то уравнение неустойчиво. Если $\Delta_1\geq 0,\dots,\Delta_k\geq 0$, но $\Delta_{k+1}<0$, то уравнение также неустойчиво.

Замечание 4. При $a_0>0$ получаем необходимое условие асимптотической устойчивости: $a_0>0$, $a_1>0,\dots$, $a_n>0$.

Доказательство этого можно получить так[17]. При $\lambda_k=\alpha_k<0$ имеем выражение $\lambda-\lambda_k=\lambda-\alpha_k$. Если для корней $\lambda_k=\alpha_k+i\omega_k$ имеем $\alpha_k<0$, $\omega_k\neq 0$,

[17] *Демидович Б.П.* Указ. соч. Гл. II, § 9.

получаем два корня: $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$, $\lambda_{k+1} = \bar{\lambda}_k = \alpha - i\omega_k$. Поэтому $(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \bar{\lambda}_k) = \lambda^2 - (\lambda_k + \bar{\lambda}_k)\lambda + \lambda_k\bar{\lambda}_k = \lambda^2 - 2\alpha_k\lambda + \alpha_k^2 + \omega_k^2$.

Весь многочлен $\mathrm{P}_n(\lambda)$ раскладывается на множители такого вида с положительными коэффициентами. Перемножив все эти множители, получаем, что многочлен имеет положительные коэффициенты.

2.5.3. Критерий (условия) Льенара–Шипара

Пусть $a_0 > 0$. ЛОДУ асимптотически устойчиво, ($\mathbf{P}_n(\lambda)$ – устойчивый многочлен (полином Гурвица), т.е. $\mathrm{Re}\lambda < 0$ для любого корня λ) тогда и только тогда, когда

1) $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, …, $a_n > 0$;

2) $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, ….

Причем если n – четное число, то можно рассмотреть определители (миноры) вида $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$, …, $\Delta_{n-1} > 0$, т.е. проверять нужно только неравенства $\Delta_3 > 0$, …, $\Delta_{n-1} > 0$.

Если n – нечетное число, то можно рассматривать определители вида $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$, …, $\Delta_{n-1} > 0$.

Примеры (при $a_0 > 0$)

1. Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка. Тогда асимптотическая устойчивость уравнения эквивалентна неравенствам $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

2. Рассмотрим ЛОДУ 3-го порядка. Тогда асимптотическая устойчивость уравнения эквивалентна неравенствам $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Здесь матрица Гурвица имеет вид $H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим ЛОДУ 4-го порядка: асимптотическая устойчивость уравнения имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 + 0 + 0 - 0 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 =$$

$$= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0.$$

Здесь матрица Гурвица имеет вид $H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$.

2.5.4. Критерий Рауса–Гурвица к автономным системам ЛОДУ

Распишем

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n =$$

$$= \lambda_n - A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}A_{n-1}\lambda + (-1)^n A_n,$$

где $A_k = (-1)^k a_k$, $a_k = (-1)^k A_k$, $A_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots a_{nn} = \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Sp}\, A$ – след матрицы A (первый инвариант матрицы A), ($\mathrm{tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A$ – «trace» – след (англ.), $\mathrm{Sp}\, A$ – «Spur» – след (нем.)).

Если AB – $n \times n$-матрица с действительным коэффициентом, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B,\ \mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA),\ \mathrm{Tr}\,(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{Tr}\, A.$$

Подобные матрицы имеют одинаковый след, поэтому $\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все собственные числа матрицы A, причем каждое собственное число выписано столько раз, какова его кратность.

Далее обозначим

$$A_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \ A_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ A_n = \det A.$$

Число A_k называют k-м инвариантом матрицы A, или следом этой матрицы k-го порядка. Легко сформулировать необходимое условие асимптотической устойчивости автономной системы ЛОДУ:

$$A_1 < 0, \ A_2 > 0, \ \ldots, \ A_n \cdot (-1)^n > 0.$$

В случае произвольного $n \geq 3$ нужно использовать критерий Льенара–Шипара, т.е. дополнительно проверить условия $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, …

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Система второго порядка $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ имеет матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и характеристический многочлен $\mathbf{P}_2(\lambda) = \lambda^2 - A_1\lambda + A_2$, где $A_1 = \mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{12}$, $A_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Критерий асимптотической устойчивости. Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tr}\, A < 0$, $\det A > 0$. В случае равенств требуется дополнительное исследование, так как возможна простая устойчивость и неустойчивость.

Пример 2. Для системы второго порядка $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2, \\ x_2' = 3x_3 - 4x_2 \end{cases}$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ имеем $\mathrm{Tr}\, A = -6 < 0$, $\det A = 8 - 3 = 5 > 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива.

Пример 3. Система третьего порядка

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

имеет матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и характеристический многочлен $\mathbf{P}_3(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = \lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3$, где

$$A_1 = \mathrm{Tr}\, A = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Необходимые условия асимптотической устойчивости системы имеют вид

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0.$$

Достаточные условия получим с помощью критерия Льенара–Шипара. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & 1 & 0 \\ -A_3 & A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & -A_3 \end{pmatrix}.$$

Выпишем $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A_1 & 1 \\ -A_3 & A_2 \end{vmatrix} = \ = -A_1A_2 + A_3$. Тогда условия Льенара–Шипара могут быть записаны в виде $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ A_3 > A_1A_2$.

2.6. Устойчивость решений стационарных ЛРУ[18]

Рассмотрим неоднородное линейное разностное уравнение n-го порядка $(Lx)(t) = a_0x(t+n) + \ldots + a_nx(t) = f(t)$, $t = 0,1,\ \ldots,$ с постоянными действительными коэффициентами $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n \neq 0$.

Определение 2.6.1. Пусть $x(t)$ – решение разностного уравнения порядка n, определяемое начальными условиями $x(0) = x_0, \ldots, x(n-1) = x_{n-1}$, а $y(t)$ –

[18] *Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. Ч. 3, § 5.

решение того же уравнения при измененных начальных условиях $y(0)=y_0,\dots,y(n-1)=y_{n-1}$. Решение $x(t)$ называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из совокупности неравенств $|y_0-x_0|<\delta,\dots,|y_{n-1}-x_{n-1}|<\delta$ следует неравенство $|y(t)-x(t)|<\varepsilon$ при любом $t\ge n$.

Если, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty}|y(t)-x(t)|=0$, то решение $x(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Если при сколь угодно малом $\delta(\varepsilon)>0$ неравенство $|y(t)-x(t)|<\varepsilon$ не выполняется для какого-либо решения $y(t)$, то решение $x(t)$ называется неустойчивым.

Утверждение 2.6.1. Для ЛРУ все решения устойчивы или неустойчивы одновременно, следовательно, достаточно для ЛРУ изучить устойчивость нулевого решения, а значит, достаточно изучить устойчивость однородного уравнения.

2.6.1. Критерий асимптотической устойчивости стационарных ЛРУ

Решение однородного ЛРУ $x(t)\to 0$ эквивалентно тому, что все корни характеристического уравнения $|\lambda|<1$.

2.6.2. Критерий устойчивости стационарных ЛРУ

Любое решение однородного ЛРУ ограничено, это эквивалентно тому, что все корни характеристического уравнения $|\lambda|\le 1$, причем если $|\lambda|=1$, λ – простой корень.

2.6.3. Критерий неустойчивости стационарных ЛРУ

Существует неограниченное решение однородного ЛРУ, тогда либо существуют все корни характеристического уравнения $|\lambda|>1$, либо существует $|\lambda|=1$, причем λ – кратный корень, а все остальные корни таковы, что $|\lambda|\le 1$.

Пример. Рассмотрим уравнение $x(t+2)-2x(t+1)+5x(t)=0$, $t=0,1,2,\ldots$, составим характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+5=0$, находим его корни $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$, вычислим $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}>1$, т.е. уравнение неустойчиво.

2.6.4. Устойчивость ЛРУ с постоянными коэффициентами (исследуем этот вопрос с помощью условий Рауса–Гурвица)

Приведенное общее правило исследования на устойчивость решений линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами показывает, что все сводится к выяснению того, каковы модули корней характеристического уравнения. Покажем, что этот последний вопрос может быть решен на основании уже известных нам признаков отрицательности действительных частей корней многочлена.

Рассмотрим уравнение с действительными коэффициентами

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ a_0>0,\ a_n\neq 0.$$

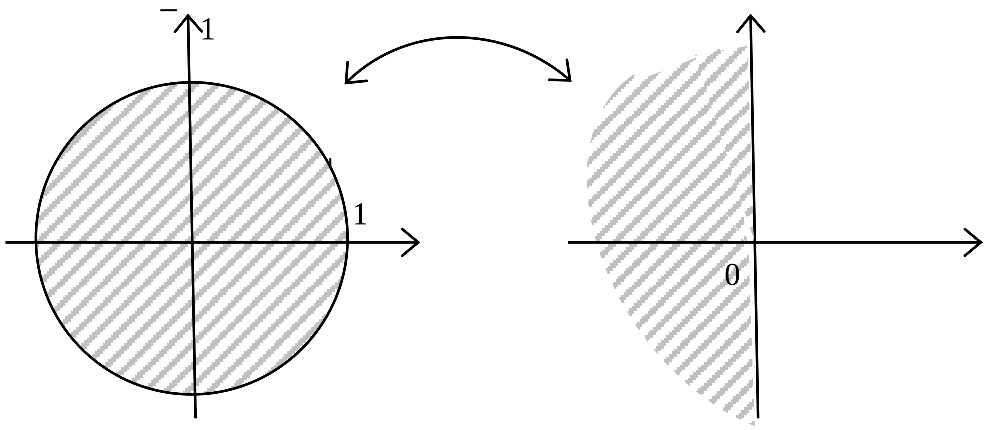
Если отобразить комплексную плоскость λ на комплексную плоскость w с помощью функции $\lambda=\dfrac{w+1}{w-1}$, то, как легко проверить, внутренность единичного круга плоскости λ отобразится на левую полуплоскость плоскости w. Поэтому корням уравнения, лежащим внутри единичного круга (т.е. по модулю, меньшему единицы), будут соответствовать корни преобразованного уравнения

$$a_0\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n+a_1\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

лежащие в левой полуплоскости. Корни последнего уравнения являются корнями многочлена

$$a_0(w+1)^n+a_1(w+1)^{n-1}(w-1)+\ldots+a_n(w-1)^n\ \equiv\ b_0w^n+b_1w^{n-1}+\ldots+b_n,$$

где $\lambda=\dfrac{w+1}{w-1}$, $w=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$.



Коэффициенты b_k выражаются через коэффициенты a_k по довольно громоздким формулам:

$$b_k = \sum_{r=0}^{n} a_r \left[C_{n-r}^{k} - C_r^1 \cdot C_{n-r}^{k-1} + C_r^2 \cdot C_{n-r}^{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1} C_r^{k-1} C_{n-r}^{1} + (-1)^k C_r^k \right], \ 0 \le k \le n,$$

где $C_{\alpha}^{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$ – биноминальные коэффициенты, причем считается, что $C_{\alpha}^{0} = 1$ и $C_{\alpha}^{\beta} = 0$, если $\alpha < \beta$ или если $\beta < 0$.

В частности,

$$b_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \ b_n = a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n.$$

После того как многочлен будет построен, останется применить к нему теорему Рауса–Гурвица либо критерий Льенара–Шипара.

Пример. Для ЛРУ

$$a_0 x(t+2) + a_1 x(t+1) + a_2 x(t) = 0, \ t = 0,1,2,\ldots, \ a_0 > 0, \ a_2 \ne 0,$$

т.е. для характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

коэффициенты b_k равны: $b_0 = a_0 + a_1 + a_2$, $b_1 = 2(a_0 - a_2)$, $b_2 = a_0 - a_1 + a_2$ – и условия Гурвица приводят к неравенствам $a_0 + a_1 + a_2 > 0$, $a_0 - a_2 > 0$, $a_0 - a_1 + a_2 > 0$.

Действительно, в этом случае получаем уравнение

$$\underbrace{\left(a_0 + a_1 + a_2\right)}_{b_0} w^2 + 2\underbrace{\left(a_0 - a_2\right)}_{b_1} w + \underbrace{\left(a_0 - a_1 + a_2\right)}_{b_2} = 0.$$

В заключение укажем, что для $n = 3$ $(a_0 > 0,\quad a_3 \neq 0)$ условия асимптотической устойчивости запишутся в виде

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,$$

$$3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0,$$

$$3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0,$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$$

$$a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$$

Или в виде: $\begin{cases} 3a_0 - a_2 > 0, \\ a_0^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 - a_3^2 > 0, \\ a_0 + a_2 - |a_1 + a_3| > 0. \end{cases}$

Частный случай для $n = 4$: уравнение четвертого порядка $a_0 x(t+4) + a_1 x(t+3) + a_2 x(t+2) + a_3 x(t+1) + a_4 x(t) = 0$ $(a_0 \neq 0, a_4 \neq 0)$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_0 - a_4 > 0, \\ 3a_0 + 3a_4 - a_2 > 0, \\ a_0 + a_2 + a_4 - |a_1 + a_3| > 0, \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 + a_4 - a_2) > (a_1 - a_3)(a_1 a_4 - a_0 a_3). \end{cases}$$

Теорема Кона[19]. Если $\sum_{i=1}^{n} |a_i| < |a_0|$, то нулевое решение уравнения $\sum_{i=0}^{n} a_i x(t+n-i) = 0$, $t = 0,1,2,\ldots$, где $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, является асимптотически устойчивым.

[19] *Cohn A.* Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Mathematische Zeitschrift. 1922. Vol. 14, № 1. P. 110–148.

Список литературы к § 2

1. *Араманович И.Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. Ч. 3, гл. X.

2. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. 13-е изд., испр. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 3.3.1.5.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд., доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. Гл. VI, VII.

4. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1967. Гл. V.

5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости: учеб. пособие / предисл. В.М. Миллионщикова. 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. Гл. II.

6. *Кальницкий Л.А.* Специальный курс высшей математики для втузов: учеб. пособие / Л.А. Кальницкий, Д.А. Добротин, В.Ф. Жевержеев. М.: Высш. шк., 1976. Гл. III.

7. *Коврижных А.Ю.* Дифференциальные и разностные уравнения: учеб. пособие / А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 148 с.

8 *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. 6-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2003. Гл. 1, 1.6-6; 9, 9.4-4, 9.5-4; 13, 13.6-5; 20, 20.4-8.

9. *Краснов М.Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 304 с.

10. *Краснов М.Л.* Вся высшая математика: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И.

Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин. М.: Едиториал УРСС, 2005. Т. 3. 240 с.

11. *Лихтарников Л.М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб.: Лань, 1997. Гл. 4.

12. *Мишина А.П.* Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра) / под общ. ред. Л.А. Люстерника, А.Р. Янпольского; А.П. Мишина, И.В. Проскуряков. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.

13. *Моисеев Н.Д.* Очерки развития теории устойчивости. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1949. 663 с.

14. *Панюкова Т.А.* Основы теории дифференциальных уравнений для экономистов: учеб. пособие. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 256 с.

15. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 176 с.

16. *Романко В.К.* Курс разностных уравнений: учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 200 с.

17. *Сюдсетер К.* Справочник по математике для экономистов / пер. с норвеж. под ред. Е.Ю.Смирновой; К. Сюдсетер, А. Стрём, П. Берк. СПб.: Экономич. школа, 2000. X + 229 с.

18. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.

§ 3. Характеристики экономического развития[20]

Задачи, решаемые экономической наукой и практикой, делятся в зависимости от учета фактора времени на статические и динамические. Статика изучает состояния экономических объектов, относящиеся к определенному моменту или периоду времени, без учета изменения их параметров во времени. В динамических задачах отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязи во времени. Например, динамика инвестиций определяет динамику величин основного капитала, что в свою очередь является важнейшим фактором изменения объема выпуска.

Время в экономической динамике может рассматриваться как непрерывное или дискретное. Непрерывное время удобно для моделирования, так как позволяет использовать аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Дискретное время удобно для приложений, поскольку статистические данные всегда дискретны и относятся к конкретным единицам времени. Для дискретного времени может использоваться аппарат разностных уравнений. Заметим, что известные модели экономической динамики существуют как в непрерывном, так и дискретном вариантах. В обоих вариантах для них могут быть получены, как правило, аналогичные результаты и уровень сложности самих моделей примерно одинаков.

[20] *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. «Экон. кибернетика». М.: Экономика, 1985. Гл. 1, § 2.

3.1. Темпы роста и прироста, индексы роста дискретные (базисные и цепные)

Базисные

(на постоянной базе)

$$\delta_{t/0} = x(t) - x(0)$$

– абсолютный (базисный) прирост;

$$\eta_{t/0} = \frac{x(t)}{x(0)}$$

– (базисный) темп роста, (базисный) коэффициент роста; часто для величины $\frac{x(t)}{x(0)} \cdot 100\%$ используют термин (базисный) темп роста; очевидно, что при $\eta_{t/0} > 1$ происходит рост, при $\eta_{t/0} = 1$ показатель не изменяется, при $\eta_{t/0} < 1$ – сокращается;

$$\rho_{t/0} = \frac{x(t) - x(0)}{x(0)} = \frac{x(t)}{x(0)} - 1 = \eta_{t/0} - 1$$

– (базисный) темп прироста, (базисный) индекс роста, относительный прирост (относительно начального значения);

$$\delta_{t+1/t} - \delta_{t/0} = x(t+1) - x(0) -$$

$$-(x(t) - x(0)) =$$

$$= x(t+1) - x(t) = \delta_{t+1/t} =$$

$$= \Delta x(t) = \nabla x(t+1).$$

Цепные

(по переменной базе)

$$\delta_{t/t-1} = x(t) - x(t-1)$$

– абсолютный (цепной) прирост (аналог первой производной), часто используют обозначения

$$\delta_{t/t-1} = \Delta x(t-1) = \nabla x(t) = x(t) - x(t-1);$$

$$\eta_{t/t-1} = \frac{x(t)}{x(t-1)}$$

– (цепной) темп роста, (цепной) коэффициент роста; часто для величины $\frac{x(t)}{x(t-1)} \cdot 100\%$ используют термин (цепной) темп роста;

$$g_x(t-1) = \rho_{t/t-1} = \frac{x(t) - x(t-1)}{x(t-1)} = \eta_{t/(t-1)} - 1$$

– (цепной) темп прироста, (цепной) индекс роста; другими словами,

$$g_x(t-1) = \rho_{t/t-1} = \frac{\Delta x(t-1)}{x(t-1)} = \frac{\nabla x(t)}{x(t-1)}$$

– относительный прирост (относительно предыдущего значения); заметим, что

$$g_x(t) = \rho_{t+1/t} = \frac{\Delta x(t)}{x(t)} \approx \frac{x'(t)}{x(t)};$$

$$\varphi_t = \delta_{t+1/t} - \delta_{t/t-1} = \Delta x(t) - \Delta x(t-1) =$$
$$= \Delta\Delta x(t-1)$$ – абсолютное ускорение (аналог 2-й производной).

3.2.Абсолютное (дискретное) ускорение. Первые и вторые разности

Определим первые разности:

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$$

– первая правая (нисходящая) разность;

$$\nabla x(t) = x(t) - x(t-1)$$

– первая левая (восходящая) разность.

Определим вторые разности:

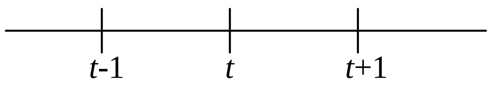
$$\varphi_t = \delta_{t+1/t} - \delta_{t/t-1} = \Delta x(t) - \Delta x(t-1) = \Delta\Delta x(t-1)$$

– абсолютное ускорение (аналог второй производной).

Для цепных показателей:

$$\varphi_t = \Delta x(t) - \Delta x(t-1) = x(t+1) - x(t) - (x(t) - x(t-1)) = x(t+1) - 2x(t) + x(t-1)$$

– вторая симметричная разность, где шаблон из трех точек имеет следующий вид:



.

Всего можно предложить следующие четыре варианта вторых разностей:

$$\Delta\Delta x(t), \quad \nabla\Delta x(t), \quad \Delta\nabla x(t), \quad \nabla\nabla x(t).$$

Распишем три из их (очевидно, что $\nabla\Delta x(t) = \Delta\nabla x(t)$):

$$\Delta\Delta x(t) = \Delta x(t+1) - \Delta x(t) = x(t+2) - x(t+1) - (x(t+1) - x(t)) =$$

$$= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t)$$

– вторая правая (нисходящая) разность;

$$\Delta\nabla x(t) = \nabla\Delta x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-1) = x(t+1) - x(t) - (x(t) - x(t-1) =$$

$$= x(t+1) - 2x(t) + x(t-1)$$

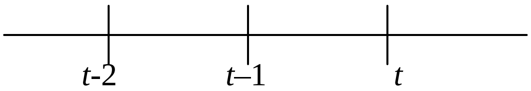
– вторая симметричная разность;

$$\nabla\nabla x(t) = \nabla x(t) - \nabla x(t-1) = x(t) - x(t-1) - (x(t-1) - x(t-2)) =$$

$$= x(t) - 2x(t-1) + x(t-2)$$

– вторая левая (восходящая) разность.

В последнем случае шаблон имеет следующий вид:



Далее определим $\chi_t = \dfrac{\varphi_t}{\delta_{t/t-1}}$ – относительное ускорение, индекс роста абсолютного ускорения, темп прироста абсолютного ускорения. Заметим, что $\chi_t \approx \dfrac{x''(t)}{x'(t)}$.

3.3. Абсолютный прирост, абсолютное ускорение, индекс роста непрерывные

Базисные показатели определяются аналогично дискретным. Цепные показатели переходят в предельные. Например:

1) абсолютный прирост (за единицу времени)

$$\hat{\delta}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt};$$

2) темп прироста, индекс роста

$$g_x(t) = \hat{\rho}(t) = \mathrm{Ind}\, x(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{d \ln |x(t)|}{dt},$$

$\mathrm{Ind}\, x = \lim\limits_{t \to +\infty} g_x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \hat{\rho}(t)$ – предел индекса роста на бесконечности, предельный индекс роста;

3) абсолютное ускорение

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = x''(t);$$

4) относительное ускорение

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{\varphi}(t)}{\hat{\delta}(t)} = \frac{d \ln |\hat{\delta}(t)|}{dt} = \frac{x''(t)}{x'(t)};$$

5) показатель Ляпунова

$$\chi[x] = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln|x(t)|}{t}.$$

Очевидно, что $\hat{\rho}(t) = \operatorname{Ind} x(t) = \rho$ для функции $x(t) = x(0)e^{\rho t}$. В случае существования $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}$ получаем, что $\chi[x] = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t}$. Например, $\chi[x] = \rho$ для функции $x(t) = x(0)e^{\rho t}$.

3.4. Формулы связи дискретных показателей. Средние характеристики развития

Справедливы равенства

$$\sum_{t=1}^{T} \delta_{t/t-1} = \sum_{t=1}^{T} \Delta x(t-1) = x(1) - x(0) + x(2) - x(1) + \ldots + x(T) - x(T-1) =$$

$$= x(T) - x(0) = \delta_{T/0} = x(T) - x(0).$$

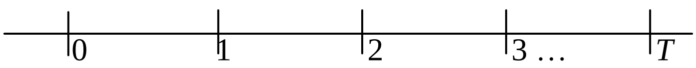
Определим средний (цепной) абсолютный прирост:

$$\bar{\delta}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \delta_{t/t-1} = \frac{1}{T} \delta_{T/0} = \frac{1}{T}(x(T) - x(0)).$$

Определим средневзвешенный (базисный) абсолютный прирост (взвешенный по (промежуткам) времени):

$$\bar{\delta}_{T,b} = \frac{1}{1 + 2 + \ldots + T} \sum_{t=1}^{T} \delta_{t/0} = \frac{2}{T(1+T)} \sum_{t=1}^{T} \delta_{t/0} = \frac{2}{T(T+1)} \left(\sum_{t=1}^{T} x(t) - Tx(0) \right).$$

При этом мы воспользовались формулой суммы арифметической



прогрессии: $1 + 2 + \ldots + T = \frac{1+T}{2} \cdot T$.

Иногда возникает обратная задача: по заданным $\bar{\delta}_T$, $\bar{\delta}_{T,b}$ найти $x(T)$ и $\sum_{i=1}^{T} x(t)$ соответственно. Из предыдущих формул получаем

$$x(T) = x(0) + T\bar{\delta}_T, \quad \sum_{t=1}^{T} x(t) = \frac{T}{2}(2x(0) + (T+1)\bar{\delta}_{T,b}).$$

Имеют место следующие связи базовых и цепных темпов прироста:

$$\delta_{t+1/0} - \delta_{t/0} = x(t+1) - x(0) - (x(t) - x(0)) = \delta_{t+1/t} = x(t+1) - x(t);$$

$$\eta_{(t+1)/0} / \eta_{t/0} = \eta_{(t+1)/t} = \frac{x(t+1)}{x(0)} / \frac{x(t)}{x(0)} = \frac{x(t+1)}{x(t)};$$

$$\prod_{t=1}^{T} \eta_{t/t-1} = \eta_{1/0} \times \eta_{2/1} \times \ldots \times \eta_{t/T-1} = \eta_{T/0} = \prod_{t=1}^{T} \frac{x(t)}{x(t-1)} = \frac{x(T)}{x(0)}.$$

Можно определить средний (цепной) темп роста (среднюю геометрическую темпов) формулой

$$\bar{\eta}_T = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} \eta_{t/t-1}} = \left(\eta_{T/0}\right)^{1/T} = \left(\frac{x(T)}{x(0)}\right)^{1/T}.$$

Определим также средний (базисный) темп роста из равенства

$$\bar{\eta}_{T/0} = \frac{1}{x(0)} \sum_{t=1}^{T} x(t) = \sum_{t=1}^{T} \underbrace{\frac{x(t)}{x(0)}}_{\substack{\text{баз. темп} \\ \text{роста}}} = \sum_{t=1}^{T} \bar{\eta}_{T,b}^{t}.$$

Здесь использована идея, что $\frac{x(1)}{x(0)} \approx \bar{\eta}_{T,b}$, $\frac{x(2)}{x(0)} = \underbrace{\frac{x(1)}{x(0)}}_{\approx \bar{\eta}_{T,b}} \cdot \underbrace{\frac{x(2)}{x(1)}}_{\approx \bar{\eta}_{T,b}} \approx \bar{\eta}_{T,b}^{2}$ и т.д.

Обычно в качестве $\bar{\eta}_{T,b}^{2}$ берут наименьший положительный корень уравнения. Используют следующий термин: $\bar{\eta}_{T,b}$ – полиноминальный средний цепной темп роста (степени T).

Уравнение для него можно записать в следующих двух видах:

$$\bar{\eta}_{T/0} = \left(\bar{\eta}_{T,b}^{T+1} - \bar{\eta}_{T,b}\right) \Big/ \left(\bar{\eta}_{T,b} - 1\right), \quad \bar{\eta}_{T,b}^{T+1} - (1 + \bar{\eta}_{T/0})\bar{\eta}_{T,b} = -\bar{\eta}_{T/0},$$

$$\bar{\eta}_{T,b}^{T+1} - (1 + \bar{x}_T)\bar{\eta}_{T,b} = -\bar{x}_T,$$

где $\overline{x}_T = \overline{\eta}_{T/0} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} x(t)}{x(0)}$.

Здесь была использована формула суммы для геометрической прогрессии.

3.5. Темпы прироста и темпы роста в дискретном и непрерывном времени

Темп прироста – одно из основных понятий в динамической макроэкономике. Пусть экономическая величина x_t рассматривается **в дискретном времени**. Если

$$x_{t+1} = (1 + g_x(t))x_t, \qquad (1)$$

то величина $1 + g_x(t)$ называется *(цепным) темпом роста* (*growth factor*), а величина $g_x(t)$ – *(цепным) темпом прироста* (*growth rate*).

Здесь темп роста и темп прироста – числовые величины (обычно это доли единицы). В экономической статистике они чаще даются в процентах. Например, если в стране темп инфляции составляет 3% в год, то темп прироста уровня цен, по нашему определению, составляет 0,03, а темп роста равен 1,03.

Если величина x_t имеет постоянный темп прироста, равный g, и задано начальное значение x_0, то

$$x_t = (1 + g)^t x_0. \qquad (2)$$

В случае когда величина x_t имеет переменный темп прироста, равный $g_x(t)$, и задано начальное значение x_0, то

$$x_t = \prod_{s=0}^{t} (1 + g_x(s))x_0.$$

Как легко проверить, приведенное определение темпа прироста эквивалентно следующему: темп прироста – это величина

$$g_x(t) = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t}. \qquad (3)$$

Если темп прироста g близок к нулю, можно использовать приближенное равенство:

$$\ln(1+g_x(t)) \approx g_x(t),\ 1+g \approx e^g.$$

Пользуясь этим равенством и (1), получаем, что

$$g_x(t) \approx \ln x_{t+1} - \ln x_t.$$

В непрерывном времени темп прироста определяется иначе. Пусть $x(t)$ – некоторая величина в модели с непрерывным временем. Ее *темпом прироста* (*growth rate*) называется величина

$$g_x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \tag{4}$$

где $\dot{x}(t)$ – производная по времени. Нетрудно видеть, что темп прироста представляет собой производную по времени от логарифма $\ln x(t)$ (логарифмическую производную).

Видим, что величина $x(t)$ имеет постоянный темп прироста g_x в том и только в том случае, если она изменяется экспоненциально:

$$x(t) = e^{g_x t} x(0). \tag{5}$$

При этом если $x(0) > 0$, $g_x > 0$, то величина $x(t)$ растет, а если $x(0) > 0$, $g_x < 0$, то $x(t)$ уменьшается.

Если величина $x(t)$ имеет переменный темп прироста $g_x(t)$ и задано начальное значение $x(0)$, то

$$x(t) = e^{\int_0^t g_x(s)ds} x(0).$$

Заметим, что в непрерывном времени переход от величины $x(t)$ к её логарифму вполне естествен. Если величина $x(t)$ имеет темп прироста $g_x(t)$, то угловой коэффициент кривой $\ln x(t)$ равен $g_x(t)$. В частности, если темп прироста g постоянен, то график $\ln x(t)$ представляет собой прямую с угловым коэффициентом, равным $g_x(t)$.

Примером может служить зависимость логарифма реального ВВП в США от времени. Этот график напоминал бы на большом промежутке времени прямую, если бы не «искажения», обусловленные Великой депрессией и Второй мировой войной.

Можно заметить, что определения темпа прироста в дискретном времени (3) и в непрерывном времени (4) аналогичны: (3) может быть записано как

$$g_x(t) = \frac{\frac{\Delta x_t}{\Delta t}}{x_t},$$

где $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$, $\Delta t = (t+1) - t = 1$, а (4) – как $g_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta x_t}{\Delta t}}{x_t}$.

В свою очередь, формула (5) аналогична (2), поэтому, проводя параллель между понятиями темпа роста в дискретном и непрерывном времени, естественно было бы ожидать (хотя бы приближенного) равенства $e^{g_x(t)} \cong 1 + g_x(t)$. Действительно, такое приближенное равенство выполняется при малых значениях темпа прироста $g_x(t)$.

Из свойств логарифма вытекают замечательные свойства темпов прироста в моделях с непрерывным временем:

темп прироста произведения $x(t)\ y(t)$ величин $x(t)$, $y(t)$ равен сумме их темпов прироста:

$$g_{xy}(t) = g_x(t) + g_y(t);$$

темп прироста частного $\frac{x(t)}{y(t)}$ величин $x(t)$, $y(t)$ равен разности их темпов прироста:

$$g_{\frac{x}{y}}(t) = g_x(t) - g_y(t).$$

Несмотря на аналогии между определениями в дискретном и непрерывном времени, основные свойства темпов прироста в непрерывном времени **на таковые в дискретном времени переносятся не дословно**. В дискретном времени выполняется следующее:

темп роста произведения $x_t\, y_t$ величин x_t, y_t равен произведению их темпов роста: если $g_x(t)$, $g_y(t)$ – темпы прироста величин x_t, y_t, а $g_{xy}(t)$ – темп прироста произведения $x_t\, y_t$, то

$$1+g_{xy}(t)=(1+g_x(t))(1+g_y(t));$$

темп роста частного $\frac{x_t}{y_t}$ величин x_t, y_t равен частному их темпов роста:

$$1+g_{\frac{x}{y}}(t)=\frac{1+g_x(t)}{1+g_y(t)}.$$

Рассмотрим один **пример** вычисления темпа прироста с дискретным временем. Пусть M_t – номинальная денежная масса, P_t – уровень цен, тогда $\frac{M_t}{P_t}$ – реальные деньги (real money balances, эту величину называют также реальными кассовыми остатками). Тогда

$$1+g_{\frac{M}{P}}(t)=\frac{1+g_M(t)}{1+g_P(t)}.$$

Напомним, что темп прироста уровня цен $g_P(t)$ называют темпом инфляции и используют обозначение $g_P(t)=\pi(t)$.

Отсюда находим темп прироста реальных денег:

$$g_{\frac{M}{P}}(t)=\frac{g_M(t)-\pi(t)}{1+\pi(t)}.$$

Как видим, равенство $g_{\frac{M}{P}}(t)\approx g_M(t)-\pi(t)$, справедливое для непрерывного времени, в дискретном времени неверно. Оно выполняется приближенно, лишь когда темп инфляции $g_P(t)$ мал.

Упражнения к § 3

Упражнение 1. Докажите, что если величина $x(t)$ имеет темп прироста $g_x(t)$, то угловой коэффициент кривой ln $x(t)$ равен $g_x(t)$.

Упражнение 2. Из свойств логарифма вытекают замечательные свойства темпов прироста в моделях с непрерывным временем:

темп прироста произведения $x(t)y(t)$ величин $x(t)$, $y(t)$ равен сумме их темпов прироста:

$$g_{xy}(t) = g_x(t) + g_y(t);$$

темп прироста частного $\dfrac{x(t)}{y(t)}$ величин $x(t)$, $y(t)$ равен разности их темпов прироста:

$$g_{\frac{x}{y}}(t) = g_x(t) - g_y(t).$$

Докажите эти свойства.

Упражнение 3. Докажите следующие свойства:

темп прироста постоянной величины равен нулю;

темп прироста величины $ax(t)$, где a – постоянная, равен темпу прироста величины $x(t)$;

темп прироста степени $x(t)^a$, где a – постоянная, равен произведению $ag_x(t)$ показателя степени на темп прироста величины $x(t)$.

Упражнение 4. Пользуясь свойствами темпов прироста, выразите темп прироста величины $ae^{\theta t}x(t)^{\alpha}y(t)^{\beta}z(t)^{\gamma}$, где $a, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ – постоянные, через темпы прироста величин $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Упражнение 5. В дискретном времени выполняется следующее:

темп роста произведения $x_t\, y_t$ величин x_t**,** y_t равен произведению их темпов роста: если $g_x(t)$, $g_y(t)$ – темпы прироста величин x_t, y_t, $g_{xy}(t)$ – темп прироста произведения $x_t\, y_t$, то

$$1 + g_{xy}(t) = (1 + g_x(t))(1 + g_y(t));$$

темп роста частного $\frac{x_t}{y_t}$ величин x_t, y_t равен частному их темпов роста:

$$1+g_{\frac{x}{y}}(t)=\frac{1+g_x(t)}{1+g_y(t)}.$$

Докажите эти свойства.

Список литературы к § 3

1. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. «Экон. кибернетика». М.: Экономика, 1985. Гл. 1, § 2.

2. *Замков О.О*. Математические методы в экономике: учебник / под общ. ред. проф. А.В. Сидоровича; О.О. Замков, А.В.Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. 4-е изд., стереотип. М.: Дело и Сервис, 2004. Гл. 12, 12.1. (Учеб. МГУ им. М.В. Ломоносова).

3. *Курзенев В.А.* Экономический рост / В.А. Курзенев, В.Д. Матвеенко. СПб.: Питер, 2018. Прилож. 1: Динамические системы. (Справочник экономиста).

§ 4. Математические методы исследования динамических моделей[21]

Структурные схемы экономико-математических моделей: элементарные экономические звенья, основные схемы соединения звеньев, законы преобразования передаточных функций. Модели с обратной связью, экономические мультипликаторы

4.1. Преобразование Лапласа

$L(f)$ – преобразование Лапласа функции f, или лаплас-образ f,

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt, \tag{1}$$

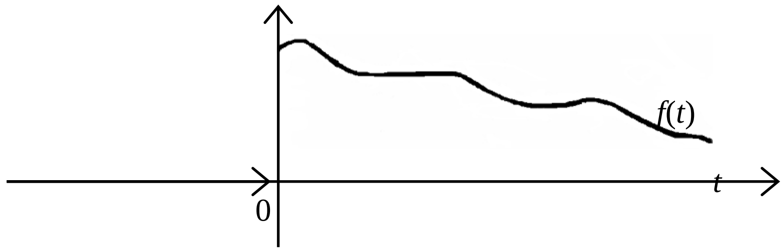
p – комплексная переменная, т.е. $p\in\mathbb{C}$. Функцию $L(f)=F(p)$, определенную формулой (1), будем называть изображением (по Лапласу). Соответствие оригинала $f(t)$ и изображения $F(p)$ записывается в виде $f(t)\leftrightarrow F(p)$.

Все свойства преобразования следуют из свойств интеграла. Класс оригиналов – линейное пространство.

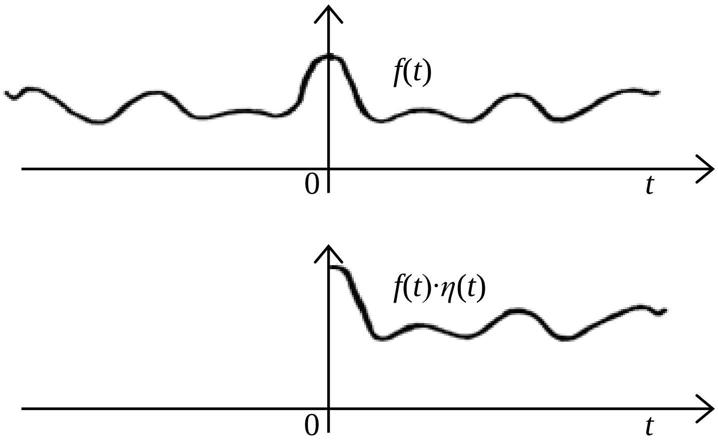
Аксиома 1. Пусть $f(t)$ – вещественная функция, удовлетворяющая на любом отрезке $[0,T]$ *условиям Дирихле*[22], под этим понимается возможность разложить отрезок $[0,T]$ на конечное число частичных промежутков, внутри которых по отдельности функция $f(t)$ монотонна и $f(t)$ имеет на $[0,T]$ не более чем конечное число точек разрыва.

Аксиома 2. Если $f(t)$ задана при $t\geq 0$, то для удобства полагают, что $f(t)=0$ при $t<0$.

[21] *Батищева С.Э., Каданэр Э.Д., Симонов П.М.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. Гл. 8, 9.
[22] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. 3-е изд., стереотип. Л.: Физматгиз, 1963. Т. III. С. 438.

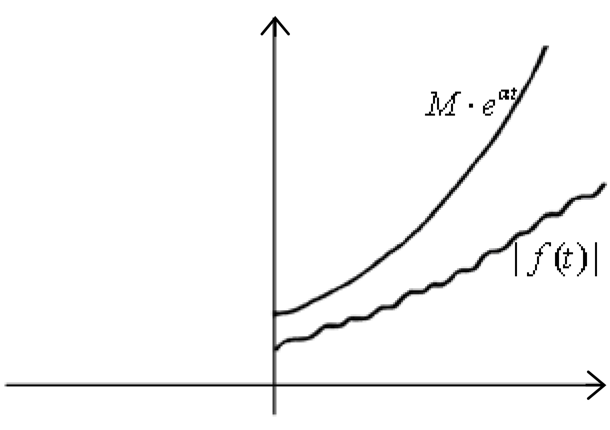


$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – эта функция позволяет записать любую функцию в зануленном виде.



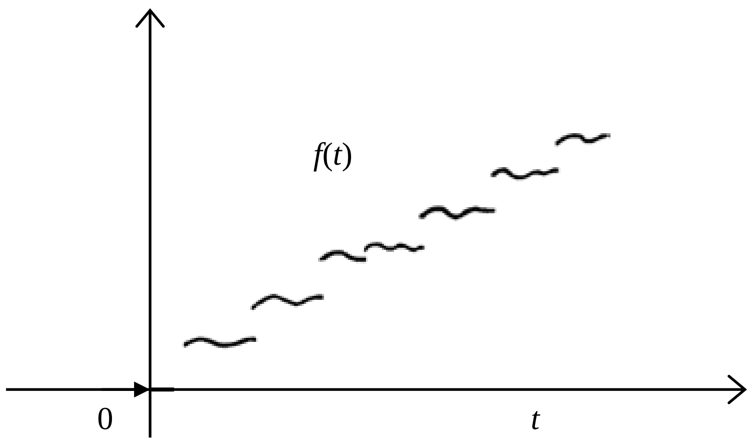
$\eta(t)$ – функция Хэвисайда (характеристическая функция полуоси $[0,+\infty)$, ступенчатая функция).

Аксиома 3. Для любой функции $f(t)$ существуют $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} : \left| f(t) \right| \leq M \cdot e^{\alpha t}$, т.е. можно подыскать такую экспоненту, которая растет быстрее и позволяет ограничить модуль функции сверху.



Если функция удовлетворяет аксиомам 1–3, то все они образуют линейное пространство, кроме того, функции с одинаковым α образуют нормированное пространство с нормой $\| f \|_{\alpha} = \inf\limits_{M \geq 0} \left\{ | f(t) | \leq M \cdot e^{\alpha t} \right\}$ почти при всех $t \in [0, +\infty)$.

Функция может быть $f(t)$ разрывной.



Рассмотрим функцию $1 = \eta(t)$ – функция Хэвисайда, преобразование 1 найдем по формуле Лапласа:

$$L(1) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \ldots .$$

Для предела $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt}$ нужно найти то p, при котором существует этот предел. Действительно, выражаем $p = a + bi$,

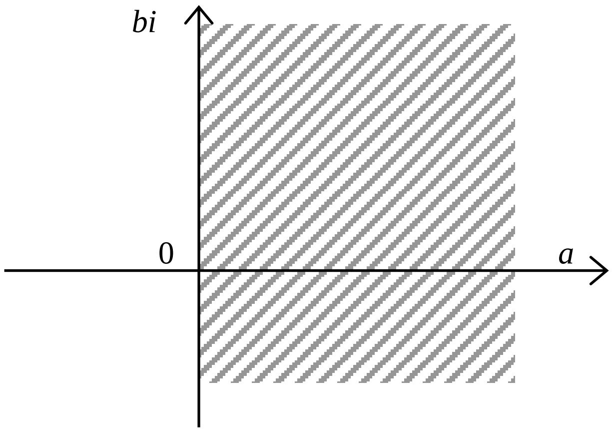
$$e^{-(a+bi)t} = e^{-at} \cdot e^{bit} = e^{-at} \cdot (\cos bt - i \sin bt)$$

– применяем формулу Эйлера, затем находим

$$|\cos bt - i \sin bt| = \cos^2 bt + \sin^2 bt = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-pt} = 0$ при $a = \operatorname{Re} p > 0$. Итак, $1 \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Значит, изображение гарантировано (задано) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.



Запишем лаплас-образ для x при условии, что $|x(t)| \leq Me^{\alpha t}$:

$$L(x) = X(p),\ x(t) \leftrightarrow X(p).$$

Далее выразим $x'(t)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$:

$$L(x') = \int_0^\infty \underbrace{e^{-pt}}_{u} \cdot \underbrace{x'(t)dt}_{dv} = \text{(интегрируем по частям)}$$

$$= e^{-pt}\, x(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x(t)\left(-pe^{-pt}\right)dt = 0 - x(0) + pX(p) = pX(p) - x(0).$$

Итак, $L(x') = pX(p) - x(0),\ x' \leftrightarrow pX(p) - x(0).$

Пример. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = 1, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $x' + x \leftrightarrow pX(p) - 1 + X(p) = \dfrac{1}{p}$ – это алгебраическое уравнение первого порядка, $X(p)(p+1) = 1 + \dfrac{1}{p}$, откуда получаем $X(p) = \dfrac{1}{p}$.

Далее перейдем к оригиналам:

$$X(p) \leftrightarrow x(t),\ X(p) = \frac{1}{p} \leftrightarrow x(t) = \eta(t) = 1.$$

Проверка: $\begin{cases} 1' + 1 = 1, \\ 1 = 1. \end{cases}$

4.2. Свойства преобразования Лапласа

1. ***Линейность.*** Пусть f, g – оригиналы, F, G – изображения, A, B – комплексные константы, тогда

$$Af(t)+Bg(t)\leftrightarrow AF(p)+BG(p).$$

Это следует из линейности интеграла.

Вычислим для $\alpha\in\mathbb{R}$ при $\operatorname{Re}p>\alpha$:

$$e^{\alpha t}\leftrightarrow L\left(e^{\alpha t}\right)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{1}{\alpha-p}(0-1)=\frac{1}{p-\alpha}.$$

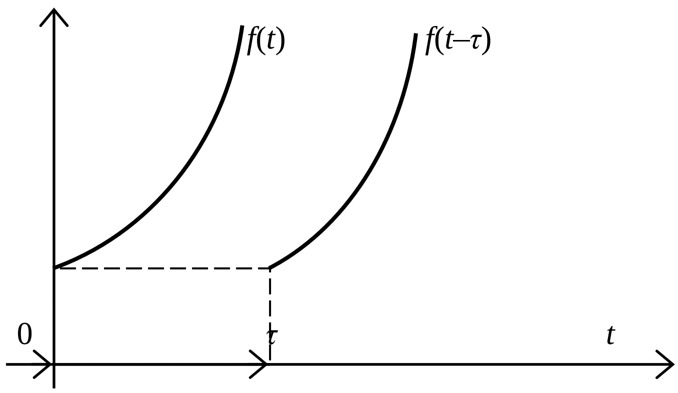
Итак, получили $e^{\alpha t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-\alpha}$ при $\operatorname{Re}p>\alpha$.

2. ***Запаздывание, смещение (аргумента оригинала)***

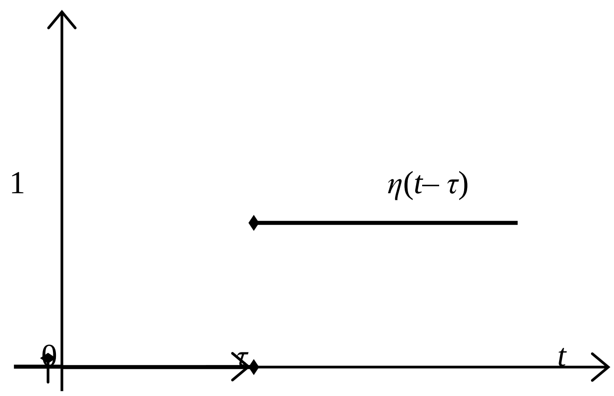
Пусть f – оригинал, $\tau>0$ – число, тогда справедлива формула

$$f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-p\tau}F(p),$$

где $f(t-\tau)=f(t-\tau)\eta(t-\tau)$.



Здесь применен оператор суперпозиции, иначе оператор сдвига.



Сдвинутая функция Хэвисайда $\eta(t-\tau)$ – это характеристическая функция полуоси $[\tau,+\infty)$.

Доказательство. Непосредственно вычисляем:

$$f(t-\tau)\leftrightarrow\int_0^\infty e^{-py}f(t-\tau)\eta(t-\tau)dt=\int_\tau^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=\dots$$

$$(t-\tau=s,\ t=s+\tau,\ dt=ds,\ t=\tau\Rightarrow s=0,\ t=\infty\Rightarrow s=\infty)$$

$$\dots=\int_0^\infty e^{-p(s+\tau)}f(s)ds=e^{-p\tau}F(p).$$

3. ***Дифференцирование оригинала (умножение изображения на p)***

Пусть f и f' – оригиналы, тогда справедлива формула

$$f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0).$$

4. ***Умножение изображений (свертка оригиналов)***

Пусть *f*, *g* – оригиналы, $(f*g)(t)$ – свертка функций *f* и *g*;

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds=\int_0^t f(t-s)g(s)ds,$$

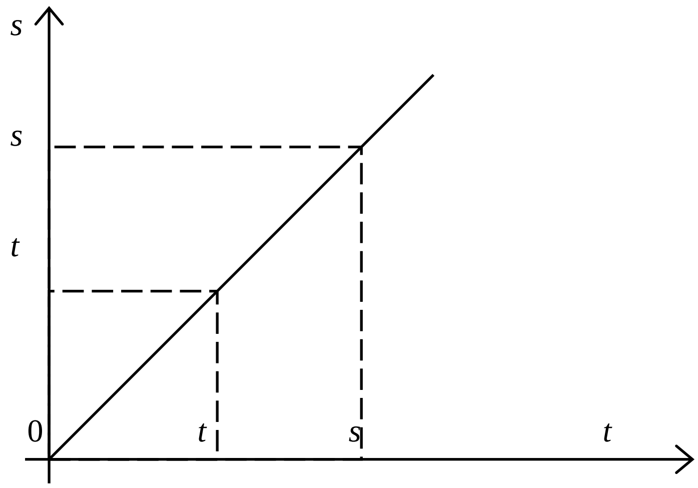
причем $(f*g)(t)\leftrightarrow F(p)\cdot G(p)$.

Доказательство. Пусть f, g – оригиналы, т.е.

$$|f(t)|\le Me^{\alpha t},\ |g(t)|\le Ne^{\beta t}\ (*).$$

Рассмотрим $\int_0^\infty e^{-pt}(f*g)(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f(s)g(t-s)dsdt=\dots$

В силу оценок (*) двойной интеграл существует, так как существует двойной интеграл от модуля, поэтому можно поменять порядок интегрирования. Изобразим область интегрирования, поменяем пределы.



$$\ldots=\int_0^\infty\left(\int_s^\infty e^{-pt}f(s)g(t-s)\,dt\right)ds=\int_0^\infty f(s)\left(\int_s^\infty e^{-pt}g(t-s)\,dt\right)ds=\ldots$$

$$(t-s=\tau,\, dt=d\tau,\, t=s\Rightarrow\tau=0,\, t=\infty\Rightarrow\tau=\infty)$$

$$\ldots=\int_0^\infty f(s)\left(\int_0^\infty e^{-p(s+\tau)}g(\tau)\,d\tau\right)ds=\left(\int_0^\infty f(s)e^{-ps}ds\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau\right)=\ldots$$

Так как переменные разделились, то повторный интеграл равен произведению одинарных интегралов:

$$\ldots=\underbrace{\int_0^\infty e^{-ps}f(s)\,ds}_{F(p)}\cdot\underbrace{\int_0^\infty e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau}_{G(p)}=F(p)\cdot G(p).$$

Свойства свертки

1) Коммутативность: $f*g=g*f$.

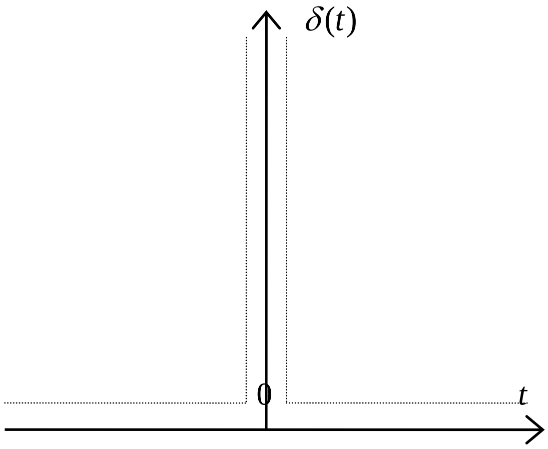
2) Ассоциативность: $(f*g)*h=f*(g*h)$.

3) Дистрибутивность: $(f+g)*h=f*h+g*h$.

Все оригиналы с операциями сложения, умножения на число, свертки образуют алгебру.

4.3. Импульсные (дельта-) функции

δ-функция – это характеристика бесконечно быстрого изменения («взрыва»), при этом график функции везде находится на оси $0t$, кроме момента $t=0$, в котором график уходит в $+\infty$. Другое определение – функция Дирака.

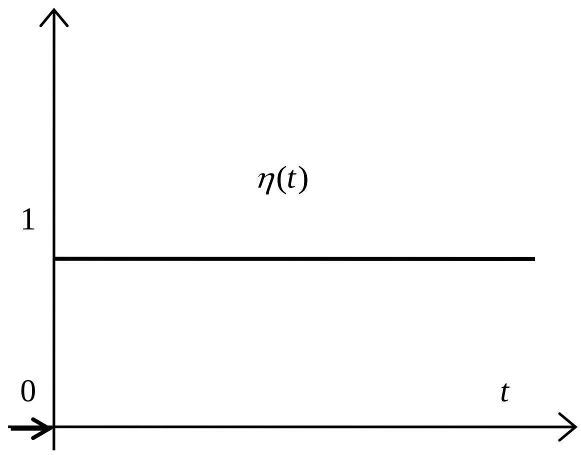


Характеристические ***свойства*** δ ***-функции:*** $\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } t=0,\\ 0, & \text{если } t\neq 0;\end{cases}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.$

Геометрический смысл δ -функции

δ-функцию можно определять как производную единичной ступенчатой функции (функции Хэвисайда) $\eta'(t)=\delta(t)$. Действительно, вычислим $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}$ при различных t.

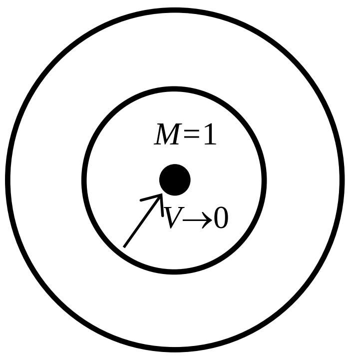


При $t \neq 0$ видим, что $\eta'(t) = 0$. В случае $t = 0$ и $\Delta t < 0$ имеем $\dfrac{0-1}{\Delta t} \to +\infty$. При $\Delta t > 0$ получаем значение 0. Итак, хотя производной в точке $t = 0$ не существует, но левосторонняя производная равна $+\infty$, поэтому можно условно считать, что $\eta'(0) = +\infty$.

Таким образом, δ-функция – бесконечная скорость, возникает в точке разрыва функции.

Физический смысл δ-функции

Рассмотрим материальную точку в плоскости или в трехмерном пространстве с единичной массой. Другой пример – единичный электрический заряд, сосредоточенный в материальной точке. Найдем плотность массы заряда с помощью предельного перехода $\rho = \dfrac{M=1}{V} \xrightarrow[V \to 0]{} +\infty$, получим $\rho = \dfrac{1}{V} \xrightarrow[V \to 0]{} +\infty$.



Преобразование Лапласа δ-функции

$$L(\delta)\overset{\det}{=}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt=e^{-p0}=1,\ \text{т.е. по определению } L(\delta)=1.$$

Этой формулой мы распространяем ОИ на функционалы. Но свойства изображений будут другими, например:

$$1=\eta\leftrightarrow\frac{1}{p}\underset{|p|\to\infty}{\to}0,\qquad \delta\leftrightarrow 1\underset{|p|\to\infty}{\not\to}0.$$

Для обычных функций изображение стремится к нулю (при $\operatorname{Re} p\to+\infty$). Для изображений функционалов это не выполняется (см. табл. 1, 2).

Таблица 1

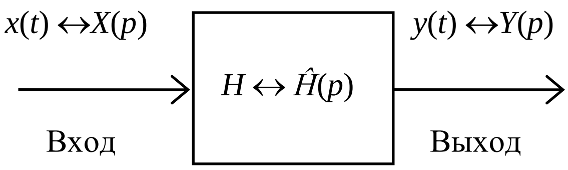
№ п/п	Название	Оригинал	Изображение
1.	Дельта-функция	$\delta(t)=\begin{cases}\infty, t=0,\\ 0, t\neq 0,\end{cases}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$	1
2.	Единичная ступенчатая функция (функция Хэвисайда)	$\eta(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t\geq 0,\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$	$1/p$
3.	Пропорциональная (линейная) функция	$\gamma(t)=\begin{cases}t \text{ при } t\geq 0,\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$	$1/p^2$
4.	Степенная функция	t^n при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$n!/p^{n+1}$
5.	Экспоненциальная функция	e^{at} при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$1/(p-a)$
6.	Тригонометрический синус	$\sin\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
7.	Тригонометрический косинус	$\cos\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$p/(p^2+\omega^2)$
8.	Затухающая синусоидальная функция	$e^{at}\sin\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$\omega/[(p-a)^2+\omega^2]$
9.	Затухающая косинусоидальная функция	$e^{at}\cos\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$(p-a)/[(p-a)^2+\omega^2]$
10.	Затухающая степенная функция	$e^{at}t^n$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$n!/(p-a)^{n+1}$
11.	Гиперболический синус	$\operatorname{sh}\omega t=\sinh\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$\omega/(p^2-\omega^2)$
12.	Гиперболический косинус	$\operatorname{ch}\omega t=\cosh\omega t$ при $t\geq 0$, 0 при $t<0$	$p/(p^2-\omega^2)$

Таблица 2

№ п/п	Название	Оригинал	Изображение
1.	Линейность	$A\,f(t) + B\,g(t)$	$A\,F(p) + B\,G(p)$
2.	Подобие	$f(\lambda t),\ \lambda > 0$	$1/\lambda \times F(p/\lambda)$
3.	Затухание	$e^{at} f(t)$	$F(p - a)$
4.	Запаздывание	$f(t - \tau)\ \eta(t - \tau),\ \tau > 0$	$e^{-p\tau} F(p)$
5.	Дифференцирование оригинала	$d\,f(t)/\,dt = f'(t)$	$p\,F(p) - f(0)$
6.	Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(s)ds$	$F(p)\,/\,p$
7.	Дифференцирование изображения	$-\,t\,f(t)$	$F'(p)$
8.	Интегрирование изображения	$f(t)/\,t$	$\int_0^\infty F(z)dz$
9.	Свертка оригиналов	$(f * g)(t) =$ $= \int_0^t f(t-s)g(s)ds$	$F(p)\,G(p)$

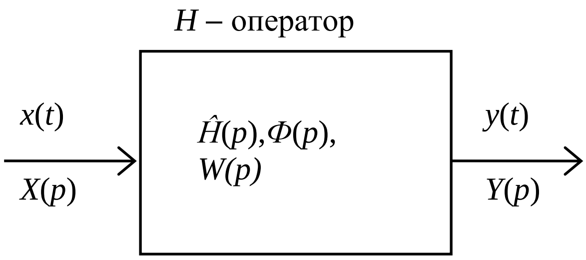
4.4. Элементарные экономические модели: пропорциональное, дифференцирующее, интегрирующее, инерционное, звено дискретного запаздывания

4.4.1. Модели простейших звеньев экономики



Основная задача динамического моделирования: построение связи между входным экзогенным воздействием $x(t) \leftrightarrow X(p)$ и выходным эндогенным воздействием $y(t) \leftrightarrow Y(p)$. Здесь $x(t)$, $y(t)$ – оригиналы, $X(p)$, $Y(p)$ – их изображения. Нахождение блока, звена «черного ящика» называют задачей идентификации. Далее здесь H – линейный оператор, $y = Hx$, $\hat{H}(p)$ – символ (изображение) оператора H.

В дальнейшем блоки будут определяться экономическим смыслом задачи. Линейные операторы блоков H выражают передаточными функциями $\hat{H}(p)$. Такие блоки часто называют линейными звеньями. Тем самым звено моделируют с помощью передаточной функции. Если H – линейный оператор, то в дальнейшем $\hat{H}(p)$, $\Phi(p)$ или $W(p)$ – обозначения передаточных функций оператора.



Таким образом, в изображениях можно пользоваться любой из трех записей:

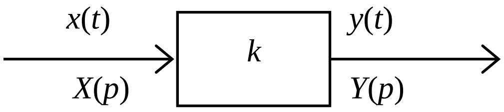
$$Y(p) = \hat{H}(p)X(p), \quad Y(p) = \Phi(p)X(p), \quad Y(p) = W(p)X(p).$$

4.4.1.1. Простейшие звенья

1) *Пропорциональное (усилительное) звено*:

$$y(t) = kx(t) \leftrightarrow Y(p) = kX(p),$$

передаточная функция имеет вид $\Phi(p) = k$.



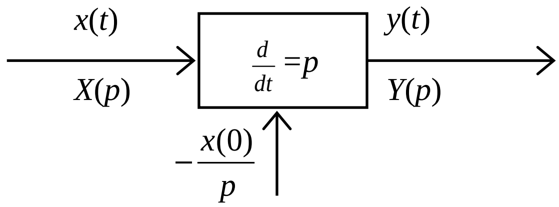
Примерами для моделирования в форме пропорциональных звеньев могут быть такие функции в хозяйственной деятельности, как переходы от оптовых цен на продукцию к розничных ценам, от потребностей в материалах в натуральном выражении к потребностям в денежном выражении и т.д.

2) *Дифференцирующее звено (звено акселератора)*:

$$y(t) = x'(t),$$

$y(t)$ – скорость, интенсивность, поток, где $x(t)$ – уровень, объем.

В изображениях получаем $Y(p) = pX(p) - x(0)$, $x(0) = 0$, получаем $Y(p) = pX(p)$, передаточная функция имеет вид $\Phi(p) = p$.

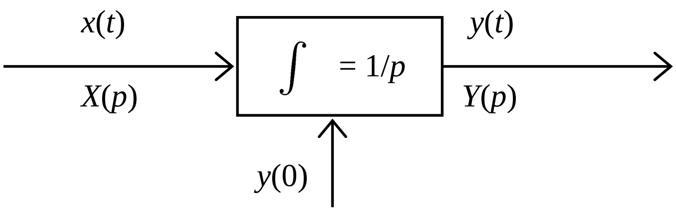


Примером деятельности для моделирования в форме дифференцирующего звена может служить накопительный учет объема продажи в торговле, на основании которого выдается информация о текущей продаже за малые единицы времени.

3) *Интегрирующее, накопительное звено*:

$$y(t) = \int_0^t x(s)ds + y(0),$$

при $y(0) = 0$ получаем $y(t) = \int_0^t x(s)ds$, $Y(p) = \dfrac{1}{p} X(p)$, $\Phi(p) = \dfrac{1}{p}$ – передаточная функция.

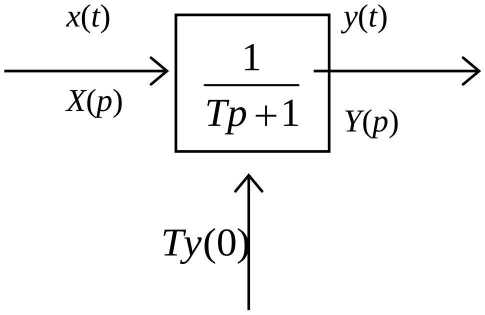


Интегрирующее звено выполняет обратную функцию: на основании учета продажи выдает информацию о накопленном количестве.

4) *Инерционное звено*:

$$Ty' + y = x,$$

здесь x и y связаны ЛОДУ первого порядка, x – входное, экзогенное воздействие, y – выходное, эндогенное воздействие:



С помощью операционного исчисления находим

$$y \leftrightarrow Y(p),\ \ x \leftrightarrow X(p),\ y' \leftrightarrow pY(p) - y(0),$$

$$T\big(pY(p) - y(0)\big) + Y(p) = X(p),$$

$$(Tp+1)Y(p) = X(p) + Ty(0),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{Tp+1}X(p) + \frac{T}{Tp+1}y(0).$$

Здесь $\frac{1}{Tp+1}X(p)$ – вынужденное движение, $\frac{T}{Tp+1}y(0)$ – свободное движение.

Отсюда видим, что $\Phi(p) = \frac{1}{Tp+1}$ – передаточная функция инерционного звена.

Найдем оригинал для функции $y(t)$. По таблице изображений вычислим $\frac{1}{T(p+\frac{1}{T})} \leftrightarrow \frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}$, поэтому $\frac{T}{Tp+1} \leftrightarrow e^{\frac{-t}{T}}$, отсюда $y(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{T}e^{-\frac{(t-s)}{T}}x(s)ds + y(0)e^{-\frac{t}{T}}$, где первое слагаемое – это вынужденное движение, частное решение неоднородного уравнения, а второе слагаемое – это свободное движение, общее решение однородного уравнения. Полученную формулу часто называют формулой Коши. Здесь $C(t,s) = \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}(t-s)}$ – функция Коши (весовая функция), а $X(t) = TC(t,0) = e^{-t/T}$ – фундаментальное решение.

Пример. Пусть $x = \text{const}$, тогда $x \leftrightarrow \frac{x}{p}$, в частности, $x \equiv 1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$. Отсюда при $y(0) = 0$ получаем

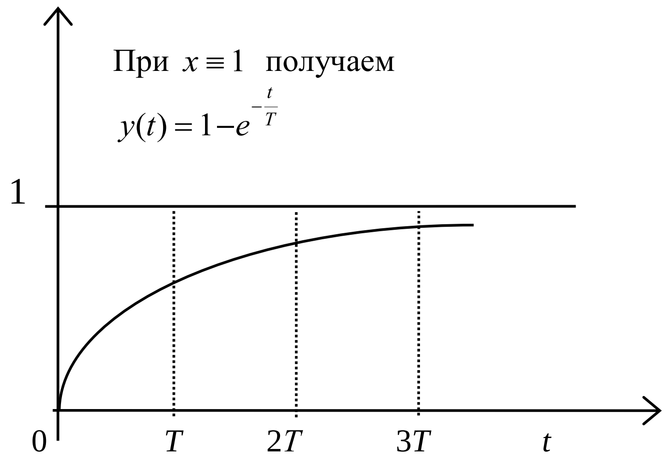
$$Y(p) = \frac{1}{Tp+1}\cdot\frac{1}{p} = \frac{A}{Tp+1} + \frac{B}{p} = \frac{Ap + B(Tp+1)}{(Tp+1)\cdot p}.$$

Приравниваем числители: $1 = (A + BT)p + B$, откуда находим, что $B = 1$, $A = -BT = -T$. Окончательно:

$$Y(p)=\frac{-T}{Tp+1}+\frac{1}{p}=\frac{-T}{Tp+1}+\frac{1}{p}\leftrightarrow -e^{-\frac{t}{T}}+1=1-e^{-\frac{t}{T}}=y(t).$$

Если входной процесс представляет собой поток материалов, энергии, денежных средств и т.д., то внутри звена накапливается определенное количество этих материально-вещественных элементов, равное разности входного и выходного процессов. Инерционными звеньями моделируют также реакцию покупателей в ответ на поступление товара в продажу, ввод основных производственных фондов в ответ на капиталовложение.

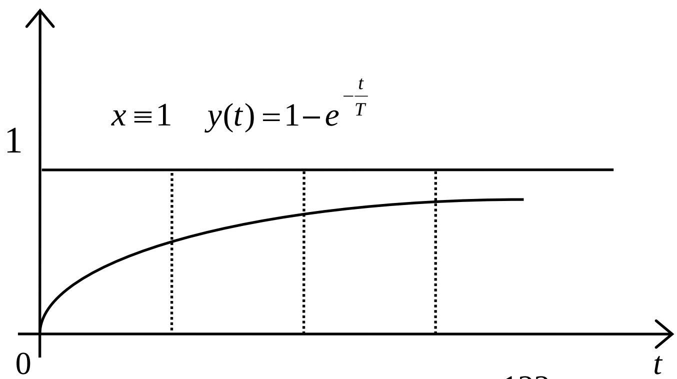
Какова реакция системы на единичное воздействие?



Выход y на $x\equiv 1$ происходит с инерцией, с запаздыванием.

Смысл T: T – постоянная времени, лаг $T > 0$. Например, если $t=T$, то $y(T)=1-e^{\frac{-T}{T}}=1-e^{-1}\approx$ 0,63 – постоянная величина не зависит от времени; $z(T)=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$ (37% не выходят на запланированный режим, 63% от x было реализовано), где $z(t) = x(t) - y(t)$ – остаток.

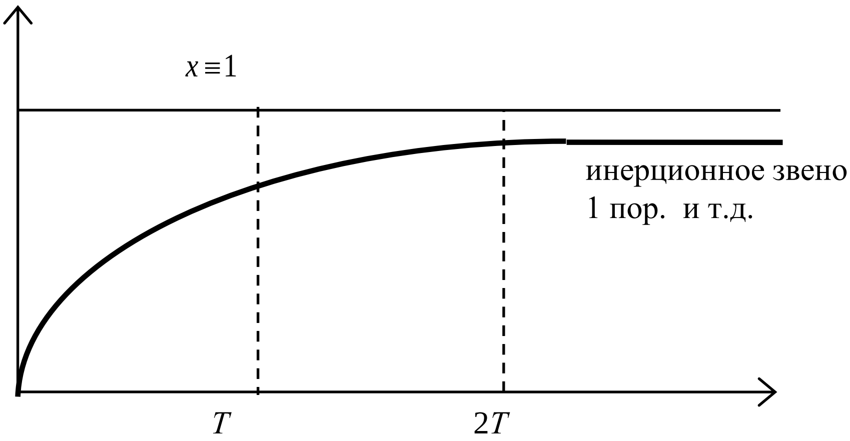
При $t = 2T$ получаем $y(2T) = 1-e^{-2} \approx 0{,}86$, $z(2T) = x(2T) - y(2T) = e^{-2} \approx 0{,}14$, т.е. 14%.



Иногда используется другая величина: $\Theta = 3T$ – лаг запаздывания. В этом случае $y(3T) = 1 - e^{-\frac{3T}{T}} = 1 - e^{-3} = 1 - \frac{1}{e^3} \approx 0{,}95$, $z(3T) = x(3T) - y(3T) = = \frac{1}{e^3} \approx 0{,}05$, т.е. 5%. Через лаг времени Θ капитальные вложения будут почти полностью реализованы.

4.4.1.2. Элементарные экономические модели: инерционного, дискретного запаздывания, сложные инерционные звенья экономики

Дадим классификацию инерционных звеньев по реакции системы на единичное воздействие $x(t) = \eta(t) \equiv 1$.



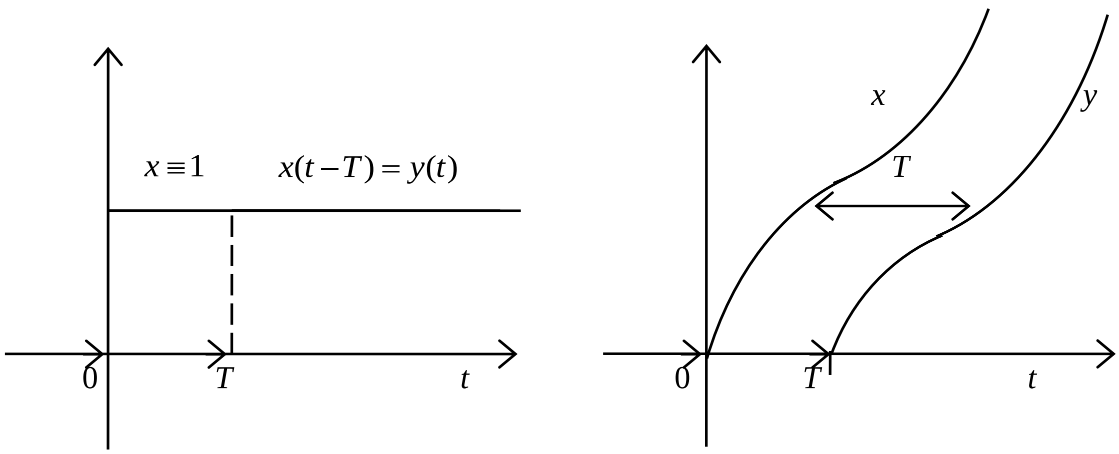
Пусть равенство $y(t) = x(t–T)$ определяет дискретное запаздывание. Отсюда следует равенство $y(t+T) = x(t)$, в этом случае произвели замену переменной (время). Затем воспользуемся формулой Тейлора: $y(t+T) \approx y(t) + Ty'(t)$, т.е. аппроксимируем непрерывно дифференцируемую функцию.

Таким образом, формула Тейлора позволяет вывести инерционное звено запаздывания первого порядка в результате аппроксимации звена дискретного запаздывания. Аналогично может быть записана приближенная формула $y(t+T) \approx y(t) + Ty'(t) + T^2 \frac{1}{2} y''(t)$, т.е. аппроксимация дважды непрерывно дифференцируемой функции. Таким образом, инерционное звено запаздывания второго порядка возникает в результате аппроксимации звена дискретного запаздывания. Далее видим: $y(t+T)\approx y(t)+Ty'(t)+...+\dfrac{T^n}{n!}y^{(n)}(t)$, т.е. возможна аппроксимация n-раз непрерывно дифференцируемой функции. Итак, инерционное звено запаздывания n-го порядка возникает в результате аппроксимации звена дискретного запаздывания.

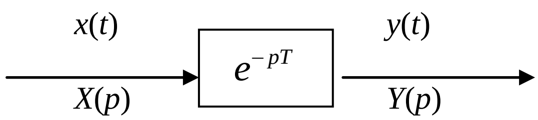
5) *Звено дискретного запаздывания*:

$$y(t)=x(t-T),$$

где T > 0 – временной лаг, лаг дискретного запаздывания, транспортное, технологическое запаздывание.



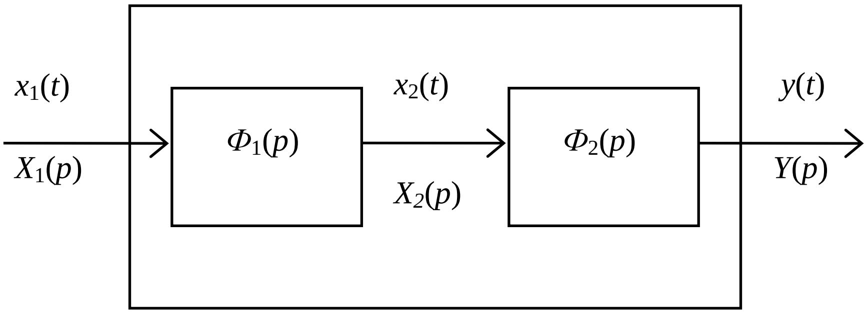
Найдем изображение (при $x(t)$ = 0 при t < 0): $x(t-T)\leftrightarrow e^{-pT}X(p)$, отсюда следует, что $\Phi(p)=e^{-pT}$ – передаточная функция звена дискретного запаздывания.



4.5. Структурные преобразования моделей экономических систем (структурные схемы)

4.5.1. Последовательное соединение звеньев

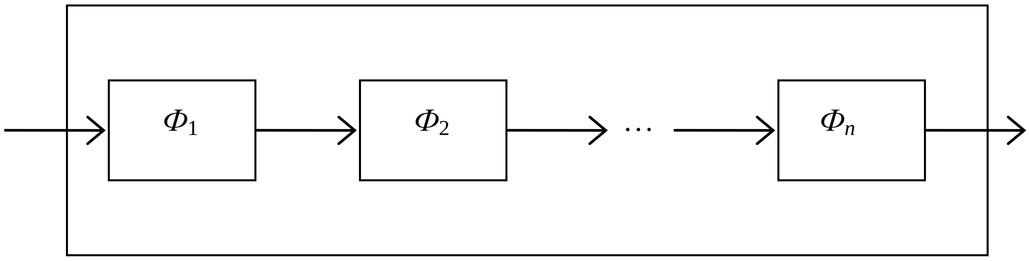
При последовательном соединении звеньев передаточная функция системы равна произведению передаточных функций (ПФ) отдельных звеньев.



Вместо двух звеньев берем одно общее, т.е. производим свертывание системы:

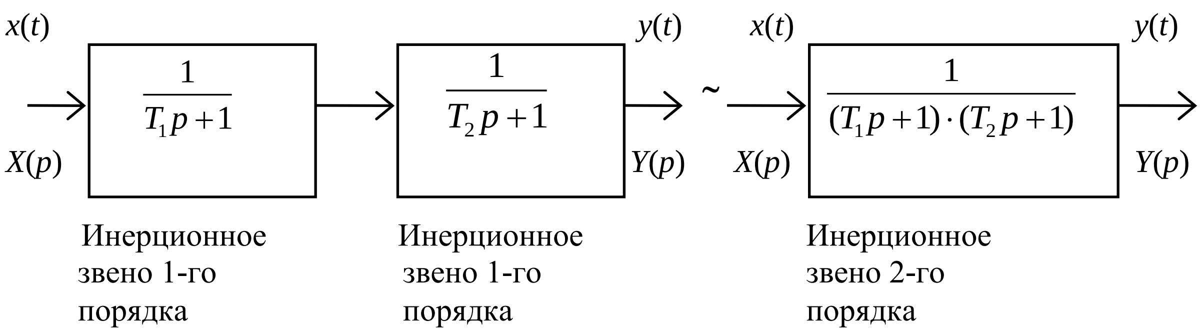
$$\begin{matrix} X_2 = \Phi_1 X_1, \\ Y = \Phi_2 X_2, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Y = \Phi_2 \Phi_1 X_1, \\ \Phi = \Phi_1 \Phi_2. \end{matrix}$$

По аналогии или индукции получаем аналогичное утверждение для нескольких звеньев.



То есть система имеет: ПФ $\Phi = \Phi_1\ \Phi_2 \cdot \ldots \cdot \Phi_n$ – свертывание системы, общая передаточная функция.

Пример. Найдем передаточную функцию двух инерционных звеньев первого порядка.



Отсюда находим: $Y(p) = \dfrac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} X(p) =$

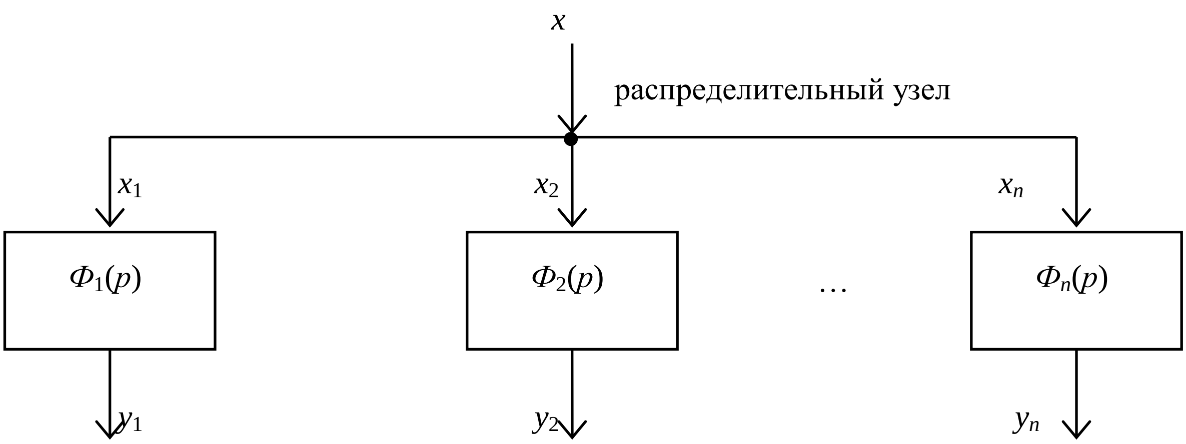
$= \dfrac{1}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1}X(p)$ – модель, выраженная через ПФ. Тогда $\left[T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1\right]\cdot Y(p)=X(p)$, значит,

$$T_1T_2y''+(T_1+T_2)y'+y=x$$

– модель в виде ЛОДУ второго порядка.

Аналогично возникают инерционные звенья третьего и более высокого порядков.

4.5.2. Параллельное соединение звеньев



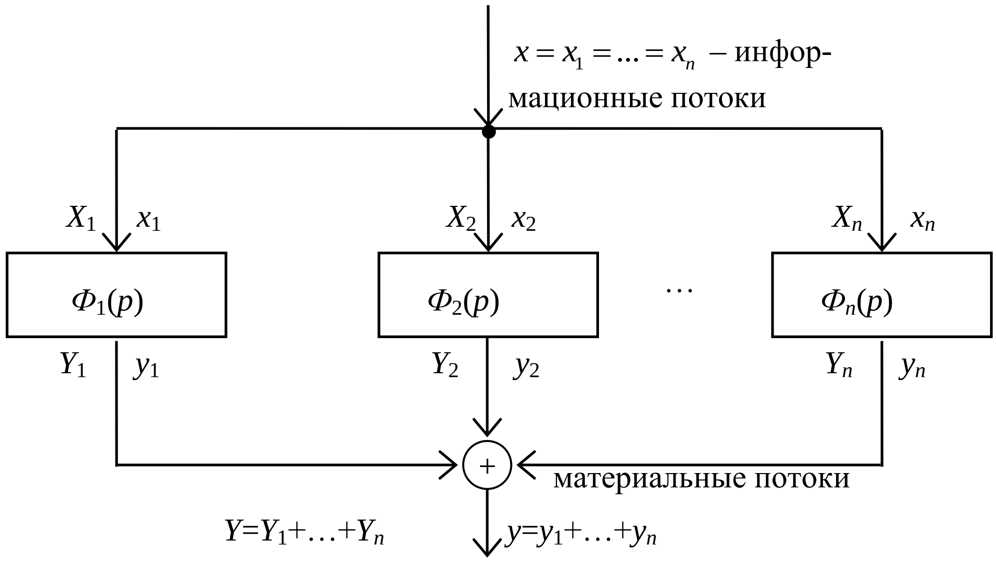
Здесь положено, что $Y_1(p)=\Phi_1(p)\cdot X_1(p)$, $Y_2(p)=\Phi_2(p)\cdot X_2(p)$, …, $Y_n(p)=\Phi_n(p)\cdot X_n(p)$.

1-й случай: материальные потоки: $x_1 + x_2 + ... + x_n = x$,

$$X_1 + X_2 + ... + X_n = X.$$

2-й случай: информационные потоки: $x_1 = x_2 = ... = x_n$,

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = X.$$



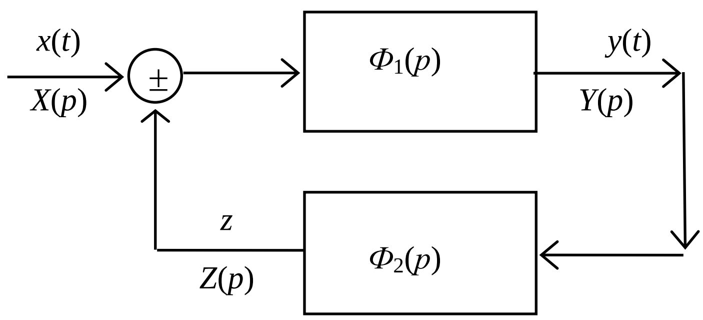
При параллельном соединении происходит сложение передаточных функций:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \quad \text{отсюда} \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n.$$

4.6. Системы кибернетического типа (обратная связь). Экономический мультипликатор. Пример экономического мультипликатора с постоянным лагом

4.6.1. Обратная связь. Основное уравнение теории автоматического регулирования (управления)

Структурная схема системы с обратной связью имеет следующий вид:



Выведем зависимость $Y(p)$ от $X(p)$:

$$Y(p) = \Phi_1(p)\big(X(p) \pm Z(p)\big),$$

$$Z(p) = \Phi_2(p)Y(p),$$

$$Y(p) = \Phi_1(p)\left\{X(p) \pm \Phi_2(p)Y(p)\right\},$$

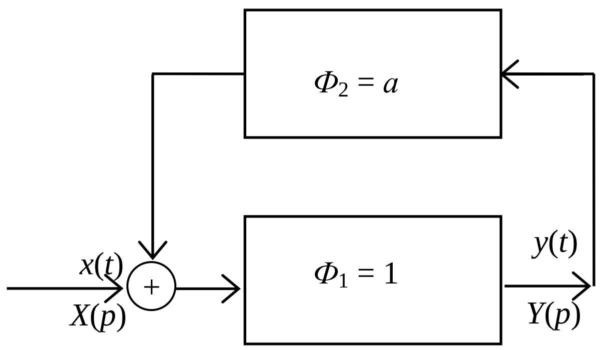
$$Y(p) \mp \Phi_1(p)\cdot\Phi_2(p)\cdot Y(p) = \Phi_1(p)\cdot X(p),$$

$$Y(p) = \frac{\Phi_1(p)\cdot X(p)}{1 \mp \Phi_1(p)\Phi_2(p)}.$$

Находим, что

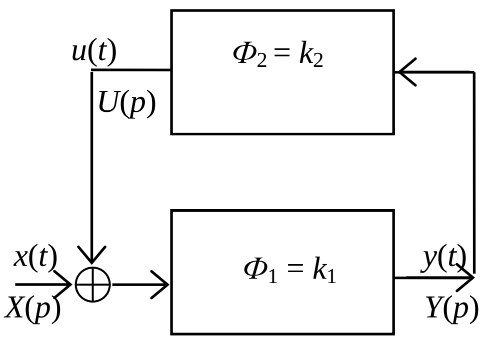
$$\Phi(p) = \frac{\Phi_1(p)}{1 \mp \Phi_1(p)\cdot\Phi_2(p)}.$$

Пример 1. Экономический мультипликатор. Возникает в случае положительной обратной связи и передаточных функций $\Phi_1(p) = 1$, $\Phi_2(p) = a$, $0 < a < 1$, $\Phi(p) = \dfrac{1}{1-a}$.



При этом x, y – некоторые экономические показатели.

Пример 2. Обобщение экономического мультипликатора (см. схему).

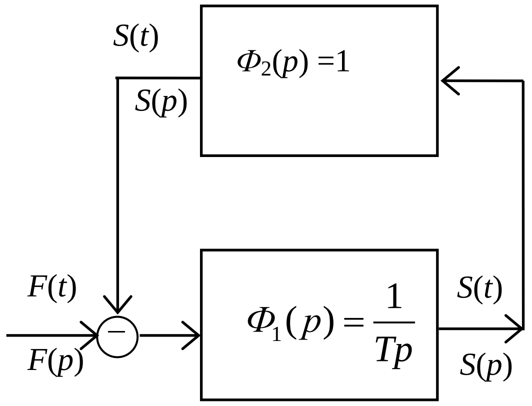


Из схемы получаем, что

$$Y(p) = \frac{k_1}{1 - k_1\cdot k_2}\cdot X(p),\ \Phi(p) = \frac{k_1}{1 - k_1 k_2}.$$

4.6.2. Пример (декомпозиции) модели накопленного выбытия (износа) основных производственных фондов (ОПФ)

Пример. Запишем инерционное звено первого порядка как декомпозицию, т.е. разложим инерционное звено на более «элементарные звенья». Это можно сделать, записав следующую систему с обратной связью.



В силу выражения для передаточной функции звена обратной связи находим: $S(p)=\dfrac{\frac{1}{Tp}}{1+\frac{1}{Tp}}\cdot F(p)=\dfrac{1}{Tp+1}\cdot F(p)$, где $S(p)=\dfrac{1}{Tp}\big(F(p)-S(p)\big)$, или если обозначить $\dfrac{1}{T}=n$, то $S(p)=\dfrac{1}{p}\cdot n\big(F(p)-S(p)\big)$. Здесь $F(p)$ – основные производственные фонды (ОПФ), первоначальные, без учета выбытия (моментная величина, уровень); n – норма амортизации; $F(p)-S(p)$ – остаточная стоимость ОПФ; $n\cdot\big(F(p)-S(p)\big)$ – интенсивность выбытия (интервальная величина, интенсивность);

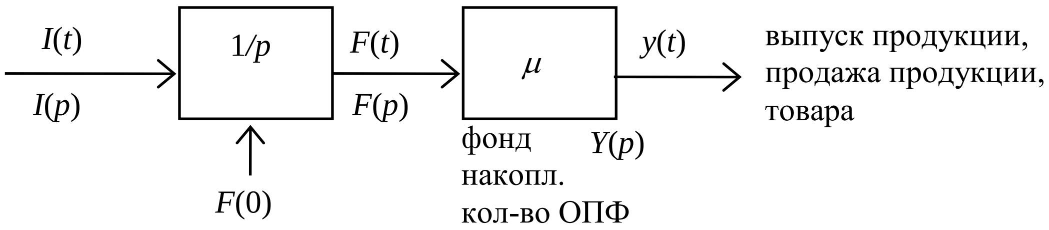
$$S(p)=\frac{n}{p}\big(F(p)-S(p)\big)\leftrightarrow\int_0^t n\cdot\big(F(s)-S(s)\big)ds$$

– суммарное выбытие за период $[0,t]$ (моментная величина, уровень).

Уравнение модели – $S'(t)=n(F(t)-S(t))$, или $TS'(t)+S(t)=F(t)$.

4.6.2. Модель ОПФ без учета выбытия

Структурная схема модели имеет следующий вид:



Ниже будут использованы следующие обозначения:

$I(t)$ – интенсивность капитальных вложений (инвестиций $I(t)$) в момент t;

$F(t)$ – накопленное количество основных производственных фондов (ОПФ) в момент t (в этом случае выбытие ОПФ не учитывается);

$\mu = \dfrac{y}{F}$ – фондоотдача;

$\Phi(p) = \dfrac{\mu}{p}$ – общая передаточная функция, передаточная функция звена динамической производственной функции.

Кроме того, положим: $F(t) \leftrightarrow F(p)$, $I(t) \leftrightarrow I(p)$.

Динамическая производственная функция – оператор

$$F(p) = \frac{1}{p}\big(I(p) + F(0)\big),\ Y(p) = \frac{\mu}{p}\big(I(p) + F(0)\big).$$

Отсюда получаем формулу выпуска продукции без учета выбытия: $y(t) = \mu\int_0^t I(s)ds + y(0)$, так как $\dfrac{\mu}{p}F(0) \leftrightarrow \mu F(0) = y(0)$. Это явная модель. Продифференцируем эту модель. Получим $y'(t) = \mu I(t)$. Это неявная модель.

4.6.3. Модель ОПФ с учетом выбытия

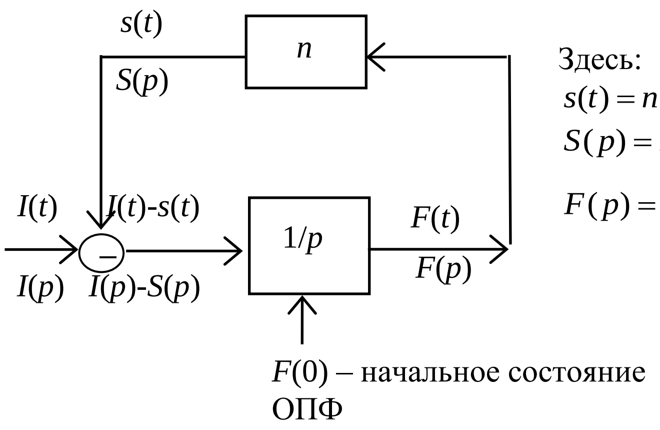
Здесь $F(t)$ – уровень (накопленное количество) ОПФ в момент t с учетом выбытия (здесь ОПФ формируются и выбывают в ходе процесса инвестирования и производства, поэтому в модели их первоначальная величина становится неопределимой);

$I(t)$ – интенсивность (валовых) капитальных вложений (инвестиций $I(t)$) в момент t;

$s(t)$ – интенсивность выбытия ОПФ в момент t;

n – норматив (норма) выбытия (износа).

Структурная схема модели динамики ОПФ с учетом выбытия имеет следующий вид:



Здесь:
$s(t)=n\cdot F(t)$,
$S(p)=n\cdot F(p)$,
$F(p)=\frac{1}{p}\big(I(p)-S(p)+F(0)\big)$.

Отсюда в оригиналах получим

$$F(t)=\int_0^t \big(I(\tau)-S(\tau)\big)d\tau+F(0). \quad (1)$$

Далее с учетом $S(p)=nF(p)$ будем иметь

$$F(p)=\frac{1}{p}\big(I(p)-nF(p)+F(0)\big),$$

откуда

$$F(p)+\frac{n}{p}F(p)=\frac{I(p)}{p}+\frac{F(0)}{p},$$

$$F(p)\left(\frac{p+n}{p}\right)=\frac{I(p)+F(p)}{p}, \text{ т.е. } F(p)=\frac{I(p)+F(0)}{p+n}.$$

Итак, $\Phi=\dfrac{1}{p+n}$ – передаточная функция всей системы, откуда

$$F(p)=\underbrace{\frac{1}{p+n}I(p)}_{\text{вынужд. движ.}}+\underbrace{\frac{1}{p+n}F(0)}_{\text{своб. движ.}}.$$

Получим модель в виде изображений. Переход к оригиналам:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{p+n}\leftrightarrow e^{-nt}\\ I(p)\leftrightarrow I(t)\\ F(p)\leftrightarrow F(t)\end{array}\right|\Rightarrow F(t)=\int_0^t e^{-n(t-\tau)}I(\tau)d\tau+e^{-nt}\cdot F(0)$$ – модель в виде интегрального оператора Вольтерра, оператора Коши.

Другие способы получения уравнения модели. Первый способ: из (1) выводим $F'(t)=I(t)-nF(t)$. Второй способ: из равенства $pF(p)-F(0)=I(p)-nF(p)$ получаем $F'(t)=I(t)-nF(t)$.

Можно вывести формулу выпуска продукции с учетом выбытия:

$$y(t)=\mu\int_0^t e^{-n(t-s)}I(s)ds+ e^{-nt}y(0).$$

Здесь $\dfrac{y(t)}{\mu}=F(t)$ – ОПФ с учетом выбытия.

Упражнения к § 4

Упражнение 1. a) Найти передаточную функцию следующей системы, см. рис. 1.

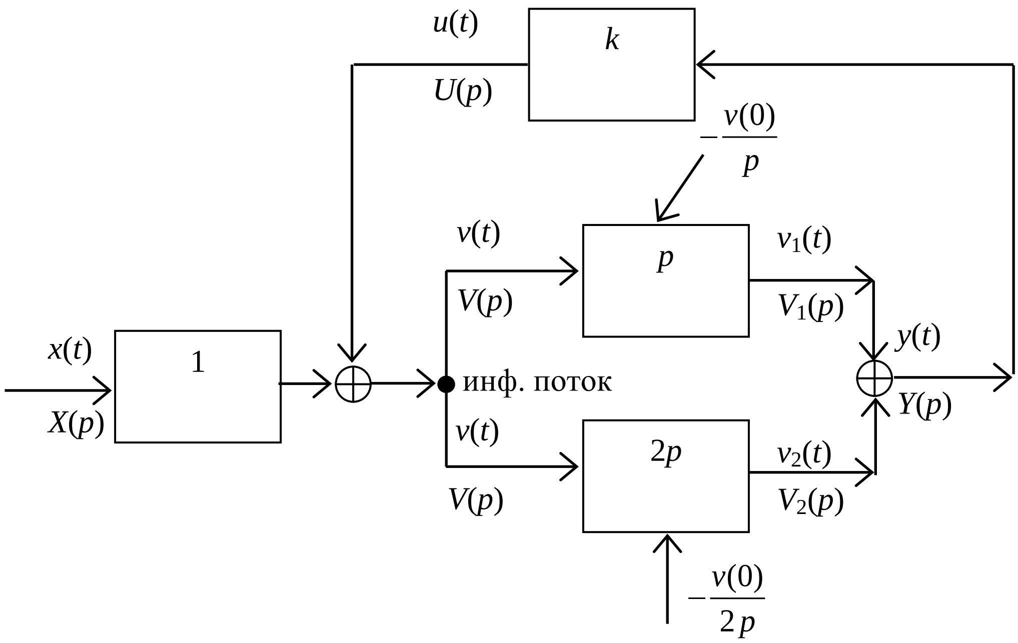


Рис. 1.

b) Представить следующую схему в виде одного звена, см. рис. 2.

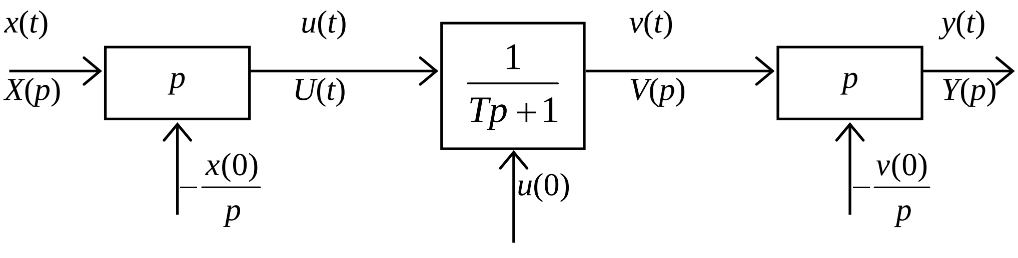


Рис. 2.

c) Вывести соответствующее дифференциальное уравнение для следующей модели, см. рис. 3.

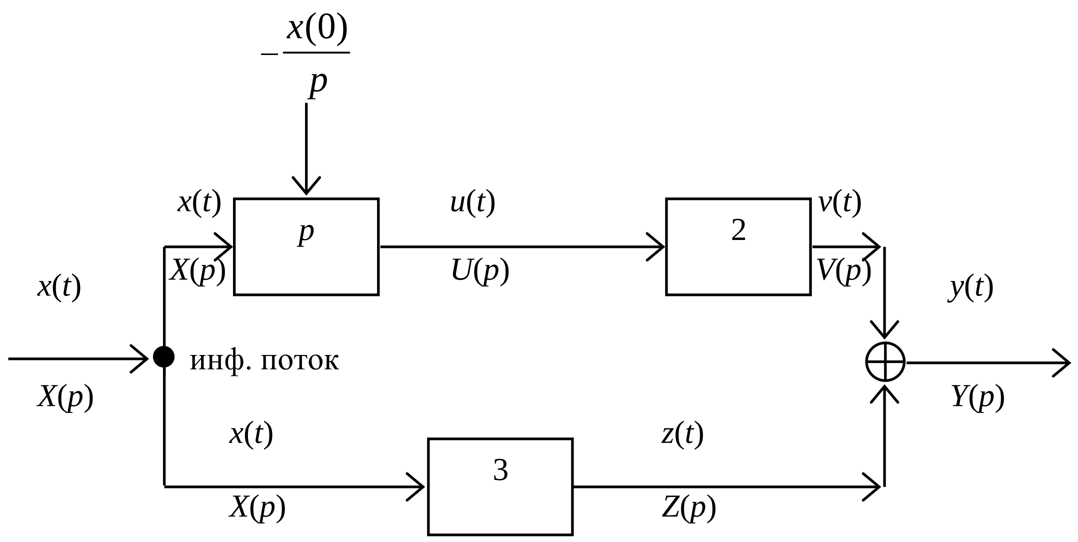


Рис. 3.

Список литературы к § 4

1. *Багриновский К.А.* Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973. 208 с.

2. *Батищева С.Э.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие / С.Э. Батищева, Э.Д. Каданэр, П.М. Симонов. 2-е изд., перераб. и доп. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. Гл. 8, 9.

3. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. М.: Профессия, 2004. 747 с.

4. *Власов К.Л.* Теория автоматического управления. Харьков: Гуманитарный центр, 2007. 526 с.

5. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. «Экон. кибернетика». М.: Экономика, 1985. 240 с.

6. *Журавлев С.Г.* Дифференциальные уравнения: Сборник задач: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук: учеб. пособие для вузов / С.Г. Журавлев, В.В. Аниковский. М.: Экзамен, 2005. 128 с. (Серия «Учебники для вузов»).

7. *Иванилов Ю.П.* Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 304 с.

8. *Иванов Ю.Н.* Математическое описание элементов экономики / Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, А.П. Уздемир. М.: Физматлит, 1994. 414 с.

9. *Кобринский Н.Е.* Информационные фильтры в экономике (Анализ одномерных временных рядов). М.: Статистика, 1978. 288 с.

10. *Кобринский Н.Е.* Точность экономико-математических моделей / Н.Е. Кобринский, В.И. Кузьмин. М.: Финансы и статистика, 1981. 256 с.

11. *Кобринский Н.Е.* Экономическая кибернетика: учеб. пособие для студ. вузов и фак., обуч. по спец. «Экон. кибернетика» / Н.Е. Кобринский, Е.З. Майминас, А.Д. Смирнов. М.: Экономика, 1982. Гл. 4, 7.

12. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: учеб. для вузов. 3-е стереотип. изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 400 с.

13. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учеб. для студ. вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 296 с.

14. *Конторов Д.С.* Основы физической экономики (Физические аналогии и модели в экономике) / Д.С. Конторов, Н.В. Михайлов, Ю.С. Саврасов. М.: Радио и связь, 1999. 184 с.

15. *Кугаенко А.А.* Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. 2-е изд. М.: Вузовская книга, 2005. 392 с.

16. *Кугаенко А.А.* Тринадцать тренажеров по управлению социально-экономическими процессами. М.: Финансы и статистика, 2001. 236 с.

17. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2003. 520 с.

18. *Математические* методы и модели исследования операций: учебник для студ. вузов / под. ред. В.А. Колемаева. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. 592 с.

19. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005. 333 с.

20. *Пантелеев А.В.* Теория управления в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. М.: Высш. шк., 2003. 583 с.

21. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика) / пер. с англ.; общ. ред. и предисл. Д.М. Гришиани. М.: Прогресс, 1971. 340 с.

22. *Царьков В.А.* Динамические модели экономики: теория и практика экономической динамики. М.: Экономика, 2007. 216 с.

23. *Шишмарев В.Ю.* Основы автоматического управления: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Изд. центр «Академия», 2008. 352 с.

24. *Экономико-математический* энциклопедический словарь / гл. ред. В.И. Данилов-Данильян. М.: Большая Российская энциклопедия: Изд. дом «Инфра-М», 2003. 668 с.

25. *Эртли-Каякоб П.* Экономическая кибернетика на практике / сокр. пер. с нем.; под. ред. К.А. Багриновского. М.: Экономика, 1983. 160 с.

§ 5. Динамический производственный оператор валовой продукции (модель динамики основных производственных фондов с учетом выбытия)

Для решения задач динамического моделирования производственных систем применяют модель производства в форме передаточной функции. Ранее при изучении производственной функции объем выпуска продукции определялся в зависимости от факторов производства. В динамической модели выпуск продукции в денежном выражении зависит от капиталовложений. Если выпуск продукции за единичный интервал времени обозначим y, а текущий уровень производственного капитала нарастающим итогом – F, то динамическая модель имеет простейшую форму пропорционального звена:

$$y(t) = \mu F(t),$$

где μ – средняя капиталоотдача, т. е. производительность капитала за единицу времени. Однако объем выпуска здесь отражается за интервал времени, а фактором производства служит накопленный уровень производственного капитала в некоторый момент времени. В динамической модели следует иметь в качестве входного воздействия процесс инвестиций. Только в такой форме входной и выходной процессы отражаются однородными с позиций моделирования интервальными экономическими показателями.

Кроме указанной особенности динамических моделей важно отметить, что существуют разные способы учета выпускаемой продукции и производственного капитала. Выпуск продукции, исчисленный по выручке от продаж, называется *валовым выпуском*, а выпуск с учетом вычета средств на возмещение амортизации капитала называется *чистой продукцией.* В зависимости от моделирования валовой или чистой продукции будет меняться значение коэффициента средней производительности капитала. Капитал в процессе производства изнашивается и по частям переносит свою стоимость на выпускаемую продукцию. Поэтому требуется систематически возмещать его износ. Размер производственного капитала при вводе в эксплуатацию принято учитывать по *первоначальной* стоимости, а в процессе эксплуатации, кроме того, принято учитывать по *остаточной* стоимости с исключением амортизации.

Из сказанного следует, что, в принципе, могут быть разработаны четыре типа динамических моделей производства: модели производства валовой продукции в зависимости от величины остаточной или первоначальной стоимости капитала и модели производства чистой продукции в зависимости от величины остаточной или первоначальной стоимости капитала. Для практического моделирования основной интерес представляет модель производства валовой продукции в зависимости от остаточной стоимости капитала и модель производства чистой продукции в зависимости от первоначальной стоимости основного капитала. В случае моделирования производства валовой продукции изменение остаточной стоимости капитала происходит в соответствии с валовыми инвестициями и износом капитала. Валовые инвестиции, если они превышают износ, увеличивают капитал, но если меньше износа – не обеспечивают поддержание капитала на прежнем уровне. Поэтому модель производства валовой продукции может включаться в модели систем с расширенным, сужающимся и простым воспроизводством капитала. Чистые инвестиции создают только прирост капитала. Следовательно, модель производства чистой продукции может включаться в модели систем только расширенного или простого воспроизводства капитала.

Если износ капитала в единицу времени обозначить s, то в любой момент остаточная стоимость капитала F_1, находящегося в эксплуатации, определяется дифференциальным уравнением

$$dF_1(t)/dt = v(t) - s(t),$$

где $v(t)$ – прирост валовых капиталовложений в каждую единицу времени. Капитал $F_1(t)$ накапливался с момента начала его создания в соответствии с текущими инвестициями и износом.

Для возмещения износа основного капитала в законодательном порядке устанавливается возмещение амортизации. Любое предприятие обязано отчислять из получаемого дохода денежные средства по норме амортизации для полного возмещения износа основного капитала до первоначальной стоимости. При норме амортизации n процесс начисления амортизационных средств на возмещение износа равен $nF_1(t)$.

В задачах экономики по росту и расширению производства, по воспроизводству капитала и т.п. валовые инвестиции, как правило, разделяют на чистые инвестиции и возмещение износа:

$$v(t) = i(t) + nF_1(t),$$

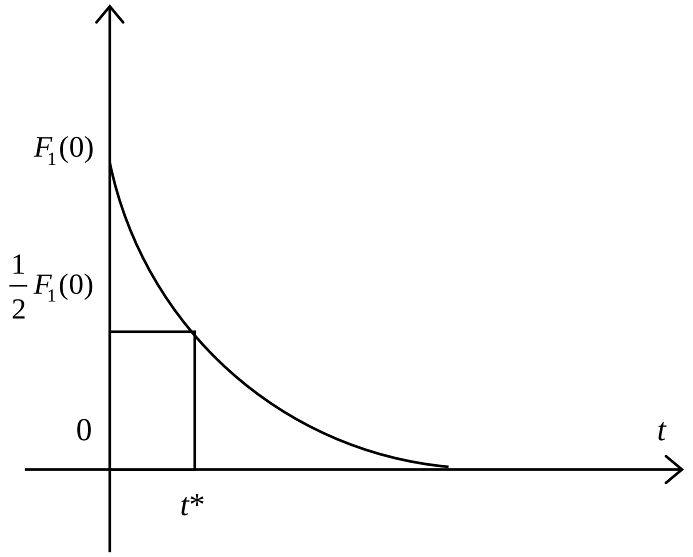
где $i(t)$ – чистые инвестиции в единицу времени. Будем предполагать, что износ капитала полностью возмещается за счет средств амортизации ($s(t) = nF_1(t)$). Тогда в формулу для динамики остаточной стоимости капитала вместо износа можно подставить процесс амортизации. В результате получим производную *остаточной стоимости капитала* в зависимости от валовых инвестиций:

$$dF_1(t)/dt + nF_1(t) = v(t).$$

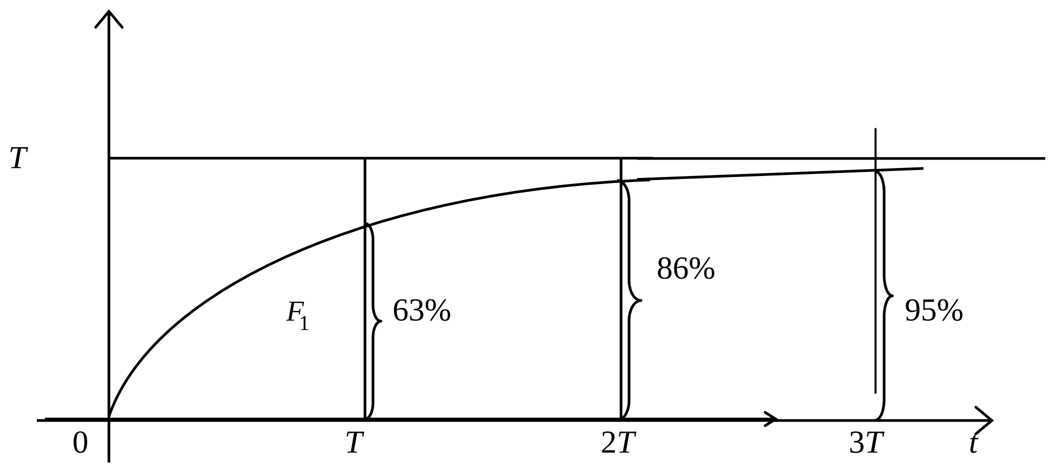
Отсюда нетрудно получить модель выпуска валовой продукции в следующем виде:

$$dy(t)/dt + ny(t) = \mu v(t).$$

Пусть $v(t) = 0$, тогда $F_1'(t) = -nF_1(t)$, откуда $F_1(t) = F_1(0)e^{-nt}$. Вычислим момент времени, когда останется только половина первоначальной величины ОПФ, т.е. когда будет верным равенство $\frac{1}{2}F_1(0) = F_1(0)e^{-nt}$. Решим это уравнение относительно момента времени t: $\frac{1}{2} = e^{-nt}$, $\ln\frac{1}{2} = -nt$, $\ln 2 = nt$, $t^* = \frac{1}{n}\ln 2 = T\ln 2 \approx 0,69T$. Здесь $\frac{1}{n} = T$ – лаг выбытия, износа.



Пусть $v(t)=1$, $F_1(0)=0$, тогда уравнение модели примет вид $F_1'(t)+nF_1(t)=1$. Решение этого уравнения имеет вид $F_1(t)=T(1-e^{-nt})$. Из этой формулы видим, что $F_1(t)\approx T$ при $t>3T$, т.е. $F_1'(t)\approx 0$, $F_1(t)\approx T$. В этом случае роста ОПФ практически не будет. Все инвестиции идут на восстановление и поддержание ОПФ.



5.1. Модель разделения валовых инвестиций на чистые инвестиции и на амортизационные отчисления. Модель выпуска продукции без учета и с учетом выбытия ОПФ

5.1.1. Разделение валовых инвестиций

Распишем выражение для интенсивности валовых инвестиций:

$$v(t) = i(t) + Am(t) = i(t) + nF_1(t),$$

где $i(t)$ – интенсивность чистых инвестиций, дающих прирост ОПФ; $Am(t)$ – интенсивность амортизационных отчислений на поддержание ОПФ, $Am(t) = nF_1(t)$. Далее из уравнения $F_1'(t) + nF_1(t) = v(t)$ с учетом равенства $v(t) = i(t) + nF_1(t)$ получим уравнение относительно $F_1(t) : F_1'(t) = i(t)$. Выразим $F_1(t)$ через $i(t)$:

$$F_1(t) = F_1(0) + \int_0^t i(s)ds.$$

Отсюда и из равенства $v(t) = i(t) + nF_1(t)$ получаем

$$v(t) = i(t) + n\int_0^t i(s)ds + nF_1(0).$$

Этому линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (относительно $i(t)$) соответствует линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$v'(t) = i'(t) + n \cdot i(t).$$

Здесь возникают две задачи:

1) задав $v(t)$, $F_1(0)$, можно найти чистые инвестиции $i(t)$;
2) задав $i(t)$, $F_1(0)$, можно найти $v(t)$.

Пусть, например, $v(t) = 1$, $F_1(0) = 0$, т.е. $i(0) = 1$, тогда из уравнения $0 = i'(t) + ni(t)$ находим $i(t) = e^{-nt}$. Из уравнения динамики ОПФ находим $F_1(t) = T(1 - e^{-t/T})$. В этом случае на отрезке $[0, 3T]$ идет наращивание ОПФ (примерно до 95 % уровня), а затем в основном – поддержание на уровне, близком к T. При $v(t) = 1$, $F_1(0) = 1/n = T$, т.е. при $i(0) = 0$, находим, что $i(t) \equiv 0$. В этом случае $F_1(t) \equiv T$, т.е. происходит только поддержание ОПФ на заданном уровне T.

Если, наоборот, $i(t) = 1$, $F_1(0) = 0$, то $v(t) = 1 + nt$, $F_1(t) = t$. Видно, что $Am(t) = nF_1(t) = nt$, т.е. ОПФ с учетом выбытия, их выбытие и амортизационные отчисления растут по линейному закону. В случае $i(t)=1$ и произвольного начального положительного значения ОПФ $F_1(0)$ получаем: $v(t)=1+nF_1(0)+nt$, $F_1(t)=F_1(0)+t$.

Упражнения к § 5

Упражнение 1. Модель динамики основных производственных фондов (ОПФ) с учетом остаточной стоимости F имеет вид $v = i + nF$, где v, i – прирост валовых капиталовложений и чистые инвестиции в единицу времени. Найти функции $F(t)$ и $i(t)$ и построить их графики:

1) $v(t) = 2$, $n = \frac{1}{10}$, $F(0) = 15$;

2) $v(t) = e^{-t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 10$;

3) $v(t) = t$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 100$;

4) $v(t) = e^{-t}$, $n = \frac{1}{4}$, $F(0) = 36$;

5) $v(t) = e^{-2t}$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 18$;

6) $v(t) = 3$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 7$;

7) $v(t) = 1 - e^{-\frac{1}{5}t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 5$;

8) $v(t) = 0$, $n = \frac{1}{10}$, $F(0) = 15$;

9) $v(t) = e^{t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 10$;

10) $v(t) = t^2$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 100$;

11) $v(t) = 1 + t$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 10$;

12) $v(t) = t^3$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 10$.

Список литературы к § 5

1. *Ильин А.И.* Об амортизации и стоимости активов // Экономика и математические методы. 2009. Т. 45, № 2. С. 74–84.

2. *Смоляк С.А.* Эргодические модели износа машин и оборудование // Экономика и математические методы. 2009. Т. 45, № 4. С. 42–60.

3. *Смоляк С.А.* Стохастическая модель износа машин // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48, № 1. С. 56–66.

4. *Смоляк С.А.* Оценка рыночной стоимости машин, подвергающихся капитальному ремонту // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48, № 4. С. 66–79.

5. *Смоляк С.А.* Оценка рыночной стоимости машин с учетом устранимого и неустранимого износа // Экономика и математические методы. 2013. Т. 49, № 1. С. 54–72.

6. *Смоляк С.А.* Влияние надежности машин и оборудования на их стоимость // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53, № 1. С. 57–74.

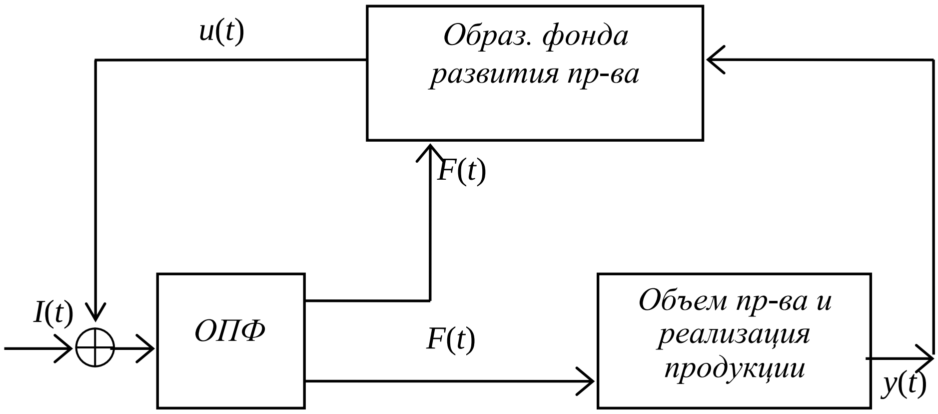
7. *Смоляк С.А.* Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). М.: ООО «Издательский дом Опцион», 2017. 377 с.

8. *Смоляк С.А.* Влияние физического износа машин на динамику их рыночной стоимости // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55, № 3. С. 124–139.

§ 6. Две динамические непрерывные модели предприятия

6.1. Первая модель предприятия (с зависимостью инвестиций от капитала и реализации без учета выбытия ОПФ (от прироста выпуска и реализации продукции))

Рассматриваемая ниже модель преприятия предложена К.А.Багриновским[1]. Можно представить следующую схему модели:



Здесь используются обозначения:

$I(t)$ – интенсивность капвложений в момент времени t $\left(\frac{ден.}{вр.}\right)$;

$u(t)$ – интенсивность отчислений от прибыли в фонд развития производства в момент времени t $\left(\frac{ден.}{вр.}\right)$;

$F(t)$ – накопленное количество (объем, уровень) ОПФ в момент времени t ($ден.$);

$y(t)$ – интенсивность произведенной и реализованной продукции в момент времени t $\left(\frac{ден.}{вр.}\right)$;

$\mu = \frac{y(t)}{F(t)}$ – постоянная фондоотдача $\left(\frac{1}{вр.}\right)$;

---

[1]*Багриновский К.А.* Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973. Гл. 1, § 1.

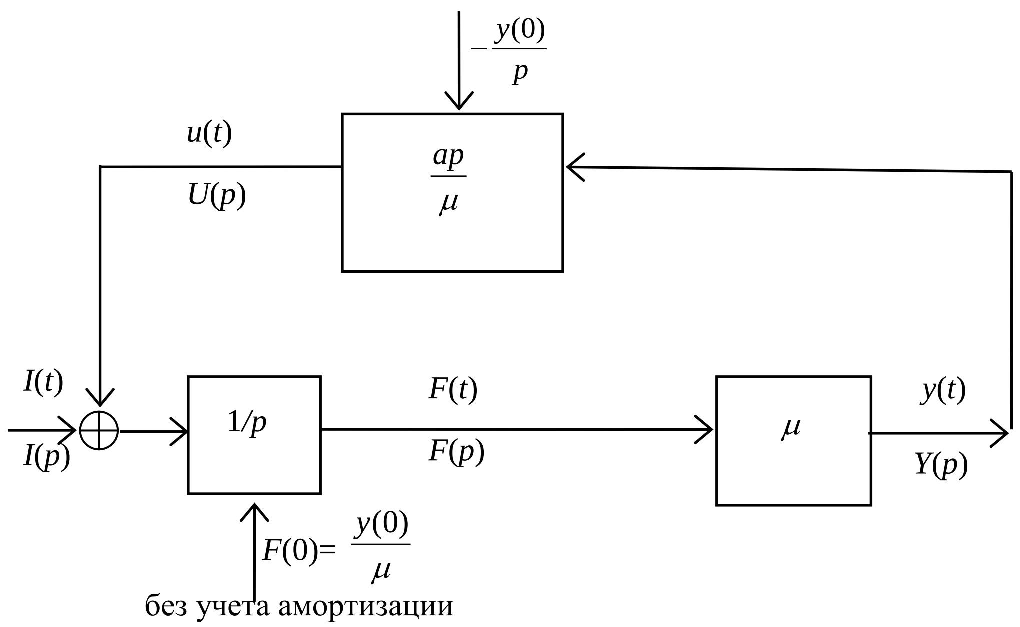
$u(t) = aF(t)\dfrac{y'(t)}{y(t)}$ – интенсивность функции инвестиций $\left(\dfrac{ден.}{вр.}\right)$, где $0 \le a < 1$ – норматив отчислений (*безраз.*);

$\mathrm{Ind}\, y(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$ – индекс роста (темп прироста) выпуска продукции $\left(\dfrac{1}{вр.}\right)$.

Отсюда получаем $y(t) = \mu F(t)$, т.е. $u(t) = a \cdot F(t) \cdot \dfrac{\mu F'(t)}{\mu F(t)} = a \cdot F'(t)$, или, по-другому,

$$u(t) = \frac{a}{\mu} y'(t).$$

Структурная схема модели имеет следующий вид:



Модель записана в виде схемы, откуда

$$F(p) = \frac{1}{p}(I(p) + U(p)) + F(0),\; Y(p) = \mu F(p);$$

$$Y(p) = \frac{\mu}{p}(I(p) + U(p)) + \frac{1}{p} y(0);$$

$$U(p) = \frac{a}{\mu}(pY(p) - y(0)) = \frac{a}{\mu} pY(p) - \frac{a}{\mu} y(0),$$

так как $u(t)=\dfrac{a}{\mu}y'(t)$;

$$Y(p)=\frac{\mu}{p}\left(I(p)+\frac{a}{\mu}pY(p)-\frac{a}{\mu}y(0)\right)+\frac{1}{p}y(0);$$

$$Y(p)(1-a)=\frac{\mu}{p}\cdot I(p)-\frac{a}{p}\cdot y(0)+\frac{1}{p}y(0);$$

$$Y(p)=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{\mu}{p}\cdot I(p)+\frac{1-a}{p}\cdot y(0)\cdot\frac{1}{1-a};$$

$$Y(p)=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{\mu}{p}\cdot I(p)+\frac{y(0)}{p};$$

$$\varPhi_Y(p)=\frac{\mu}{(1-a)p}=\frac{1}{p}\cdot\frac{\mu}{1-a}.$$

Получили модель для выпуска продукции:

$$Y(p)=\frac{\mu}{1-a}\cdot\frac{1}{p}\cdot I(p)+\frac{1}{p}y(0);$$

модель для ОПФ: $F(p)=\dfrac{1}{\mu}Y(p)$, $F(p)=\dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{1}{p}I(p)+\dfrac{1}{p}F(0)$;

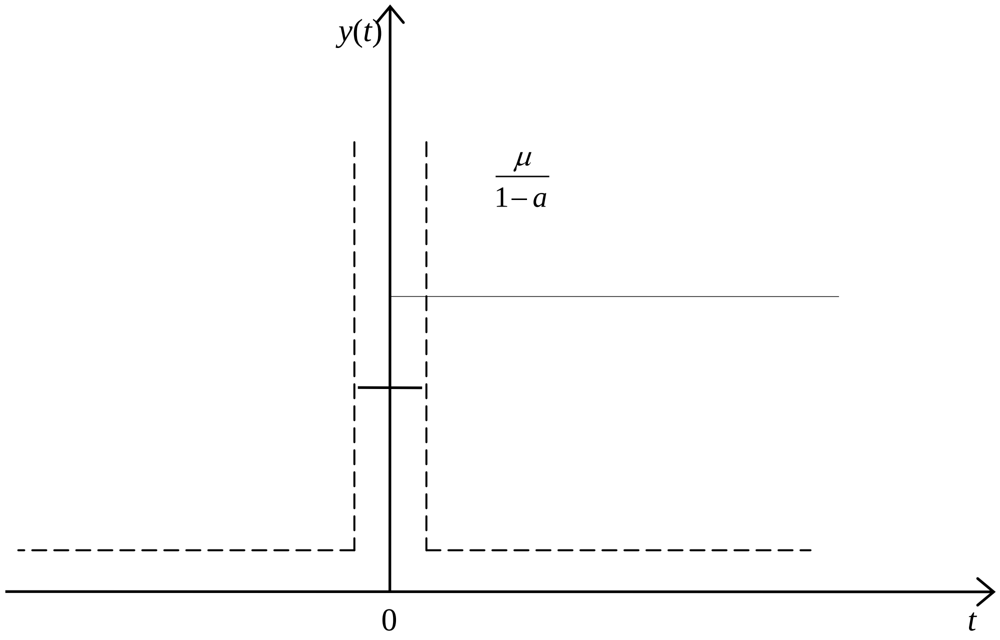
$$\varPhi_F(p)=\frac{1}{(1-a)p}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-a}.$$

Модель в виде ЛОДУ: $y'(t)=\dfrac{\mu}{1-a}I(t)$, $F'(t)=\dfrac{1}{1-a}I(t)$.

1-й случай. Пусть $I(t)=\delta(t)\leftrightarrow I(p)=1$, $y(0)=0$, тогда

$$Y(p)=\frac{\mu}{1-a}\cdot\frac{1}{p}\cdot 1=\frac{\mu}{1-a}\cdot\frac{1}{p}\leftrightarrow y(t)=\frac{\mu}{1-a},\ y(t)=\mu F(t)=\frac{\mu}{1-a}.$$

Так как $0\le a<1$, то $\dfrac{1}{1-a}\ge 1$, причем $y(t)=\mu$, когда $a=0$.

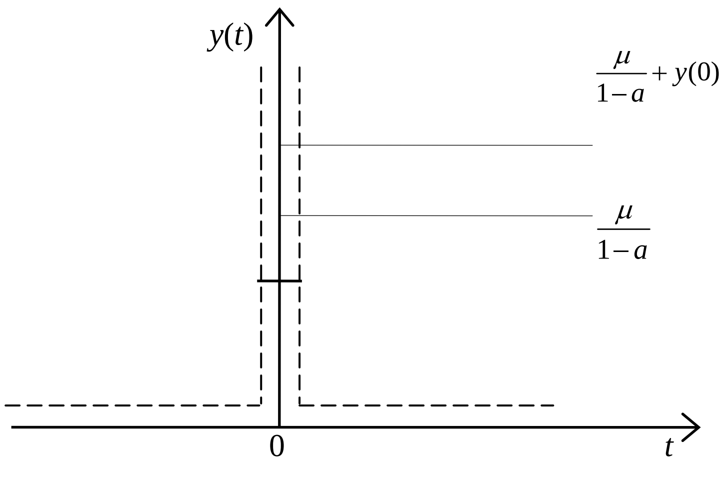


Пусть есть начальное условие $y(0) \neq 0$, тогда

$$Y(p) = \frac{\mu}{1-a} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{p} y(0),$$

т.е.

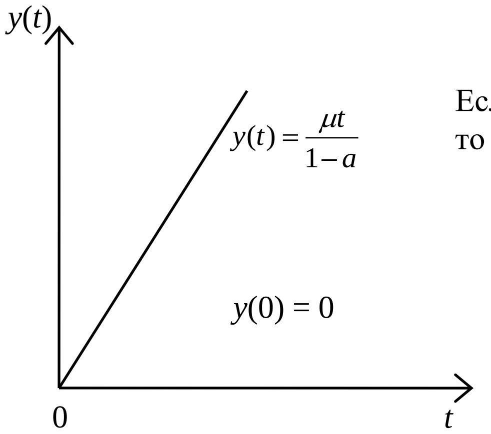
$$y(t) = \frac{\mu}{1-a} + y(0).$$



2-й случай. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$I(t) = \eta(t) \leftrightarrow I(p) = \frac{1}{p},$$

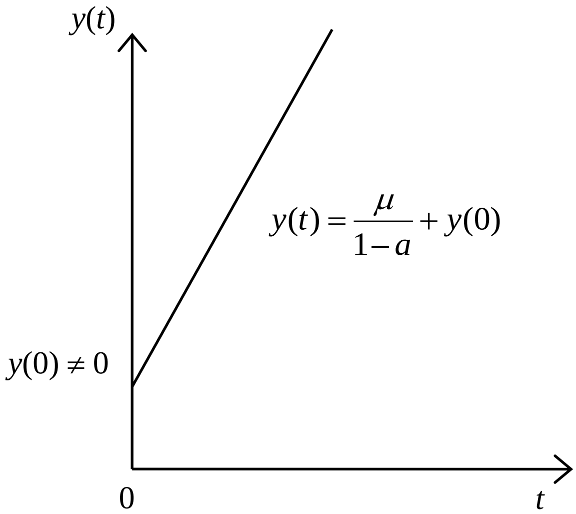
тогда при $y(0) = 0$ получаем $y(t) = \frac{\mu}{1-a} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{\mu}{1-a} \cdot \frac{1}{p^2} \leftrightarrow \frac{\mu t}{1-a}$.



Если на входе интенсивность капвложений постоянна, то фонды растут по линейному закону.

Если $y(0)\neq 0$, то находим

$$Y(p)=\frac{\mu}{1-a}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\cdot y(0),\ y(t)=\frac{\mu t}{1-a}+y(0),\ 0\leq a<1.$$



Пусть $I(t)=\eta(t)$, тогда для величины ОПФ получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{p^2}\leftrightarrow\frac{t}{1-a}\qquad \text{при } F(0) = 0,$$

$$F(p)=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p}F(0)\leftrightarrow\frac{t}{1-a}+F(0)\qquad \text{при } F(0)\neq 0.$$

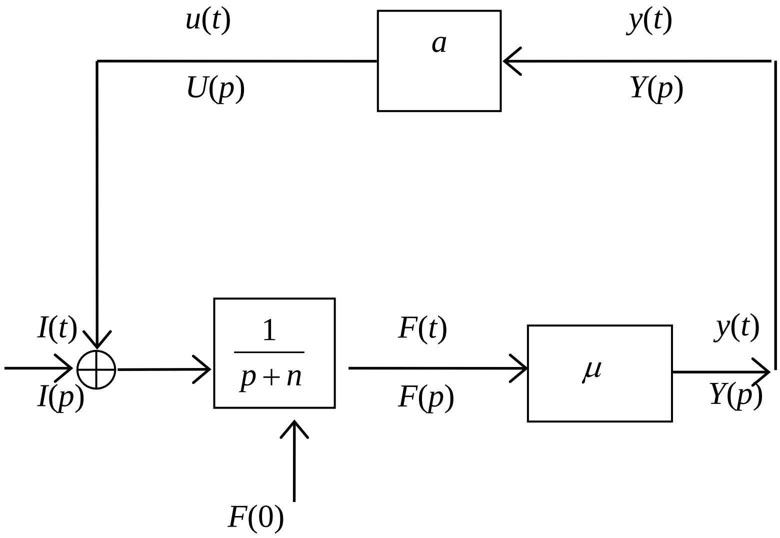
Графики примерно те же, только изменены угловые коэффициенты.

Обозначим $F_1(p)\leftrightarrow F'(t)$ – интенсивность ОПФ. Интенсивности связаны между собой через мультипликатор, т.е. $F_1(p)=\frac{1}{1-a}\cdot I(p)$.

Замечание. Как показано в работе[2], инвестиций должно быть столько, чтобы функция $y(t)$ росла не медленнее, чем экспонента. Иначе возникает некорректность модели.

6.2. Вторая модель предприятия (с зависимостью инвестиций от выпуска и реализации продукции с учетом выбытия)

Рассматриваемая ниже модель преприятия также предложена К.А.Багриновским[3]. Структурная схема модели имеет следующий вид:



В модели учитывается выбытие ОПФ, где n – норма выбытия. Найдем ПФ модели с помощью формулы обратной связи:

$$\Phi(p) = \frac{\dfrac{\mu}{p+n}}{1 - \dfrac{a \cdot \mu}{p+n}} = \frac{\mu}{p+n-a\mu},$$

т.е. отчисления в фонд развития производства пропорциональны выручке от продажи продукции.

Далее выводим:

[2]*Чадов А.Д., Кузнецов К.Б.* Об области применимости первой модели Багриновского // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. С. 128–139.
[3]*Багриновский К.А.* Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973. Гл. 1, § 1.

$$Y(p)=\frac{1}{p+n}\big(I(p)+U(p))\big)+\frac{1}{p+n}F(0);\ Y(p)=\mu F(p);$$

$$Y(p)=\frac{\mu}{p+n}\big(I(p)+U(p)+F(0)\big);\ U(p)=aY(p);$$

$$Y(p)=\frac{\mu}{p+n}\big(I(p)+aY(p)+F(0)\big);$$

$$Y(p)\left(1-\frac{a\mu}{p+n}\right)=\frac{\mu}{p+n}\big(I(p)+F(0)\big);$$

$$Y(p)=\frac{1}{1-\dfrac{a\mu}{p+n}}\cdot\frac{\mu}{p+n}\big(I(p)+F(0)\big)=\frac{1}{\dfrac{p+n-a\mu}{p+n}}\cdot\frac{\mu}{p+n}\big(I(p)+F(0)\big)=$$

$$=\frac{\mu}{p+n-a\mu}I(p)+\frac{y(0)}{p+n-a\mu}.$$

Отсюда $Y(p)=\mu F(p)$, $F(p)=\dfrac{1}{p+n-a\mu}I(p)+\dfrac{F(0)}{p+n-a\mu}$.

Запишем модель в виде ЛОДУ: $y'(t)+(n-a\mu)y(t)=\mu I(t)$ – устойчивость этого уравнения зависит от коэффициента $n-\mu a$.

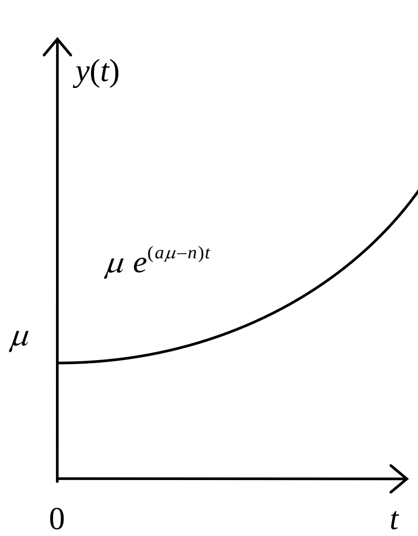
Пример 1. Пусть $I(t)=\delta(t)\leftrightarrow I(p)=1$, причем $F(0)=0$ ($y(0)=0$), тогда $Y(p)=\dfrac{\mu}{p+n-a\mu}=\dfrac{\mu}{p-(a\mu-n)}$, откуда $y(t)=\mu\cdot e^{(a\mu-n)t}$.

Итак, получили, что решение $y(t)$ начальной задачи $y'(t)+(n-a\mu)y(t)=\mu\cdot\delta(t)$, $y(0)=0$, имеет вид $y(t)=\mu\cdot e^{(a\mu-n)t}$.

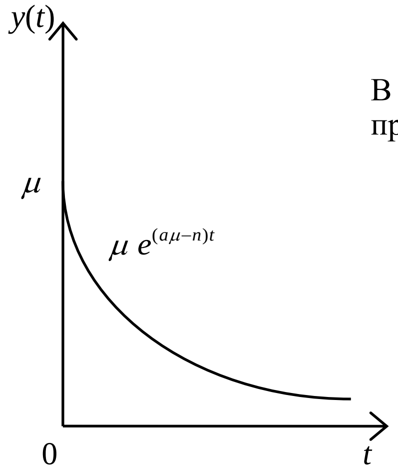
Отсюда видим, что в случае $a\mu>n$ индекс роста выпуска продукции $\operatorname{Ind}y(t)=a\mu-n>0$. В случае $a\mu=n$ происходит сокращение выпуска продукции, причем $\operatorname{Ind}y(t)=a\mu-n<0$. В случае $a\mu=n$ выпуск продукции постоянный.

Если $y(0)\neq 0$, то $y(t)=(\mu+y(0))e^{(a\mu-n)t}$.

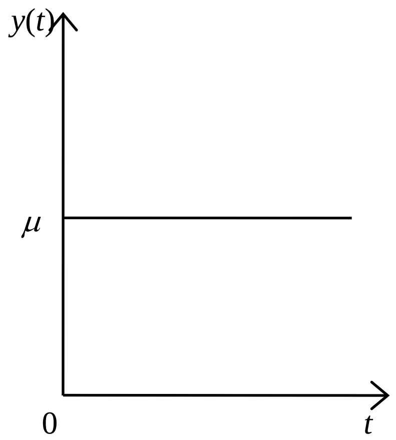
Выбытие не съедает все внутренние инвестиции в расширение производства. В случае $a\mu<n$ можно определить $\operatorname{Ind}y(t)=n-a\mu$ – индекс убывания.



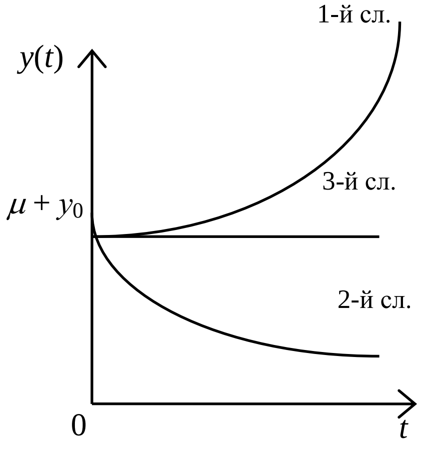
При $a\mu\ >\ n$ в дальнейшем система развивается сама без внешних капиталовложений.



В случае $a\mu\ <\ n$ без внешних капиталовложений, производство в дальнейшем затухает, все съедает выбытие.



В случае $a\mu = n \Rightarrow \mathrm{Ind}\, y(t) = 0$ – нулевой индекс роста.
Производство остается на нейтральном уровне, не изменяется.



1-й случай – $a\mu > n$,
2-й случай – $a\mu < n$,
3-й случай – $a\mu = n$.

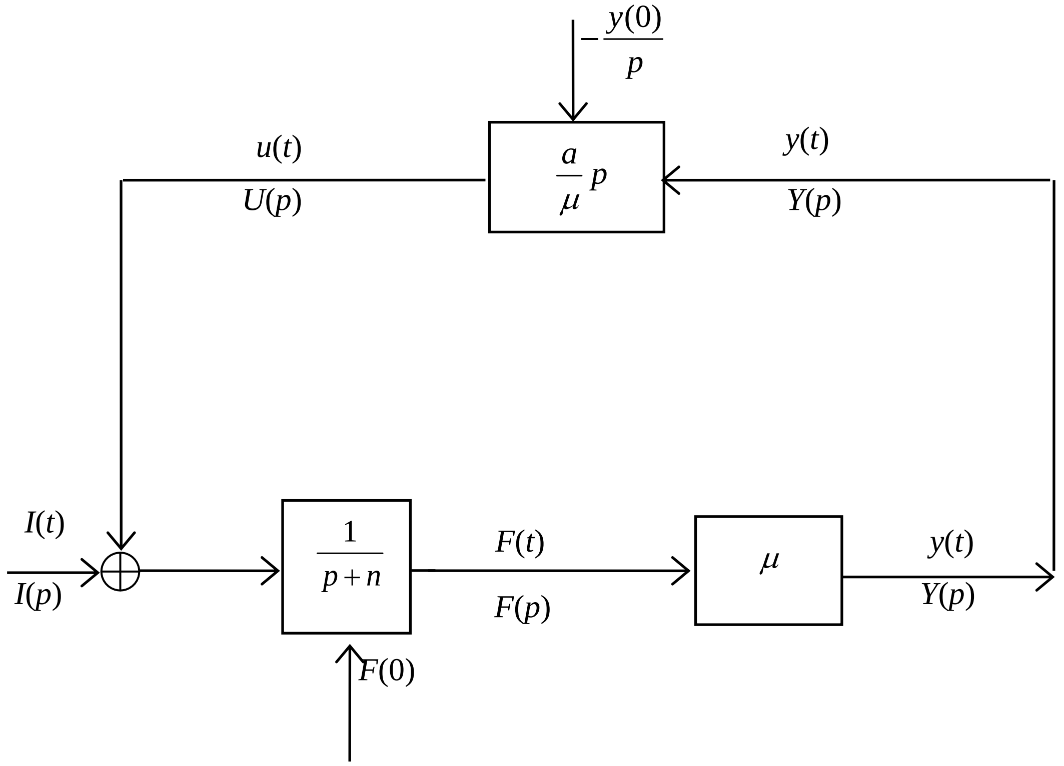
Пример 2. В случае $I(t)$ = 1 рассуждения аналогичны, но действия сложнее. Имеем $I(t)=1 \leftrightarrow I(p)=1/p$, откуда

$$Y(p)=\frac{\mu}{p+n-a\mu}\cdot\frac{1}{p}+\frac{y(0)}{p+n-a\mu} \leftrightarrow y(t)=\frac{\mu}{n-a\mu}+\left(y(0)-\frac{\mu}{n-a\mu}\right)e^{(a\mu-n)t}.$$

6.3. Обобщение первой модели предприятия (учет временных лагов) Исследование модели

6.3.1. Первая модель предприятия. Учет выбытия

Структурная схема модели имеет следующий вид:



Передаточная функция системы имеет следующую форму:

$$\Phi(p)=\frac{\mu}{p+n}:\left[1-\frac{ap}{p+n}\right]=\frac{\frac{\mu}{p+n}}{\frac{p+n-a\cdot p}{p+n}}=\frac{\mu}{(1-a)p+n}=\frac{\frac{\mu}{1-a}}{p+\frac{n}{1-a}},$$

где $1-a>0$, $1-a\leq 1$, $\mu_1=\frac{\mu}{1-a}$ – коэффициент типа мультипликатора, $\mu_1>\mu$,

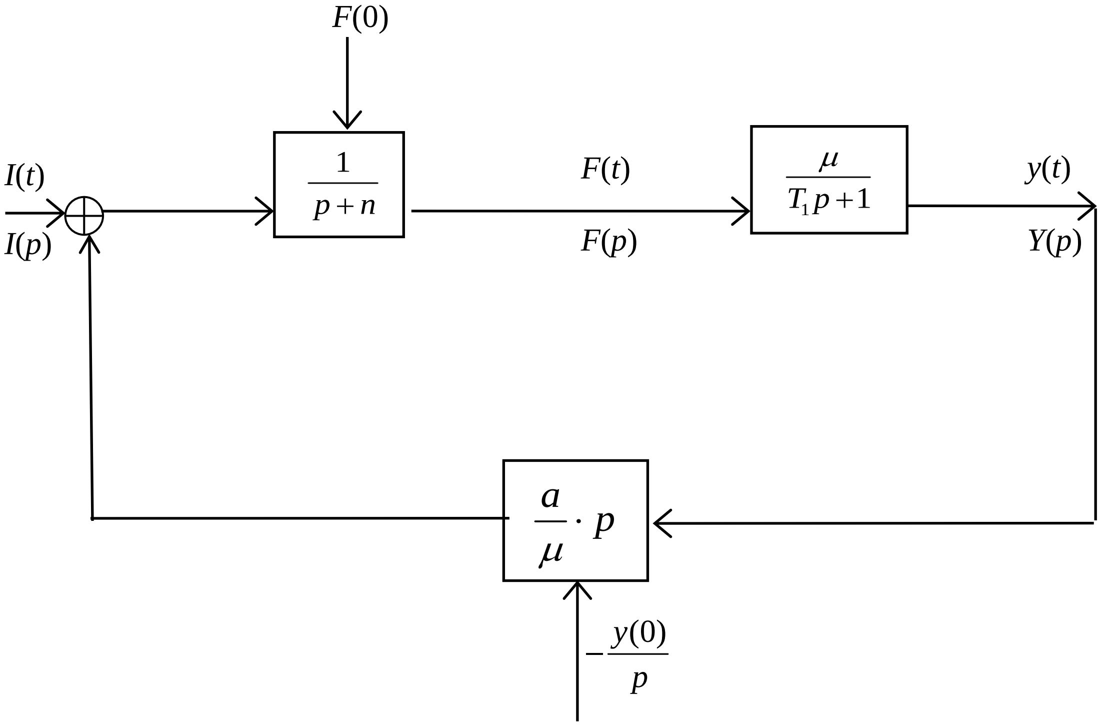
$n_1=\frac{n}{1-a}>n$.

Дифференциальное уравнение модели имеет вид $y'(t)+n_1 y(t)=\mu_1 I(t)$. Это уравнение асимптотически устойчиво.

Пусть $I(t)=\delta(t)$, тогда $y(t)=\left(y(0)+\mu_1\right)e^{-n_1 t}$. При $I(t)=1$ получаем $y(t)=\frac{\mu_1}{n_1}+\left(y(0)-\frac{\mu_1}{n_1}\right)e^{-n_1 t}$.

6.3.2. Первая модель предприятия. Учет выбытия и инерционного технологического лага производства

Структурная схема модели имеет следующий вид:



Здесь $F(t)$ – уровень ОПФ с учетом выбытия, $y(t)$ – уровень выпуска продукции. Причем отчисления в фонд развития производства идут пропорционально интенсивности выпуска продукции.

Передаточная функция системы имеет вид

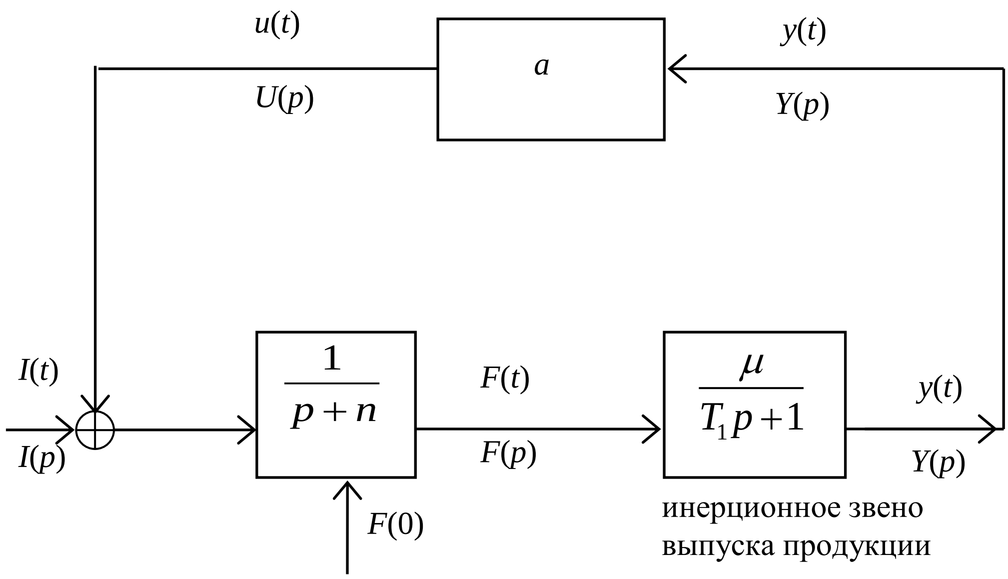
$$\Phi(p)=\frac{\dfrac{\mu}{(p+n)(T_1 p+1)}}{1-\dfrac{\mu}{(p+n)(T_1 p+1)}\cdot\dfrac{a}{\mu}\cdot p}=\frac{\mu}{T_1 p^2+(T_1 n+1-a)p+n}.$$

Видим, что $a_0 = T_1 > 0$, $a_1 = T_1 n + 1 - a > 0$, $a_2 = n > 0$, т.е. ЛОДУ второго порядка устойчиво асимптотически.

6.4. Обобщение второй модели предприятия (учет временных лагов) Исследование модели

6.4.1. Вторая модель предприятия. Учет инерционного технологического лага

Структурная схема модели имеет следующий вид:



Используя основное уравнение теории автоматического управления, получаем

$$\Phi(p) = \frac{\dfrac{\mu}{(p+n)(T_1 p+1)}}{1 - \dfrac{a\mu}{(p+n)(T_1 p+1)}} = \frac{\mu}{T_1 p^2 + (T_1 n+1)p + (n - a\mu)}$$

– модель в форме передаточной функции.

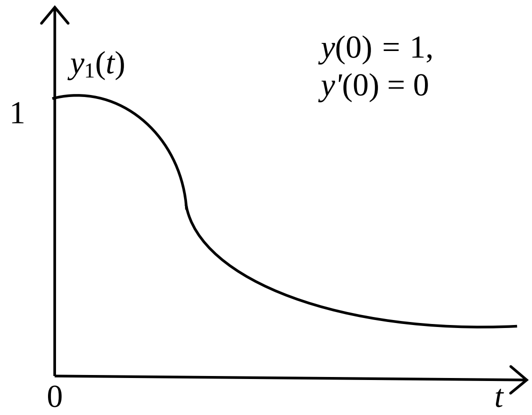
Модель в форме обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

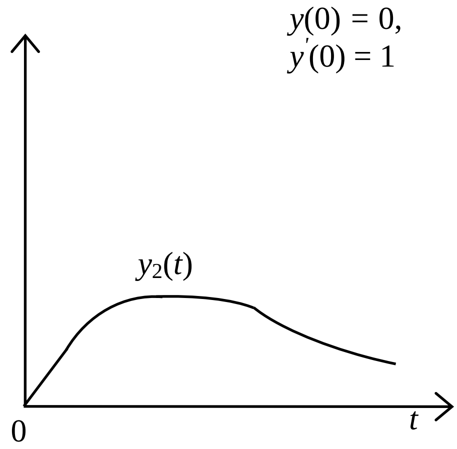
$$T_1 y'' + (T_1 n+1)y' + (n - a\mu)y = \mu I\,.$$

Пусть $I(t)=\delta(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, тогда решение уравнения $y(t)$ будет пропорционально второму фундаментальному решению y_2, т.е. $y(t)=C(t)=\dfrac{\mu}{T_1}y_2(t)$, где $C(t-s)$ – функция Коши этого уравнения.

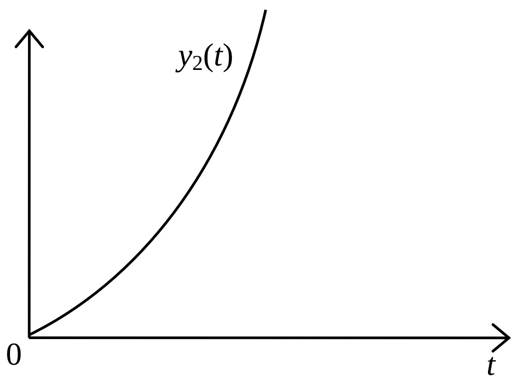
Из теории устойчивости известно, что ЛОДУ второго порядка асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда коэффициенты этого порядка уравнения положительны. В нашем случае $a_0 = T_1 > 0$, $a_1 = = T_1 n + 1 > 0$, причем коэффициент $a_2 = n - a\mu$ меняет знак. В зависимости от изменения этого знака соответственно ведет себя система.

Уравнение асимптотически устойчиво, если и только если $a_2 = n - a\mu > 0$, т.е. норма выбытия > нормы отчисления на развитие от ОПФ. Графики фундаментальных решений в этом случае ведут себя таким образом:





Система неустойчива тогда и только тогда, когда $n - a\mu < 0$. В этом случае ОПФ растут даже в отсутствие внешних инвестиций при $t \geq 0$.

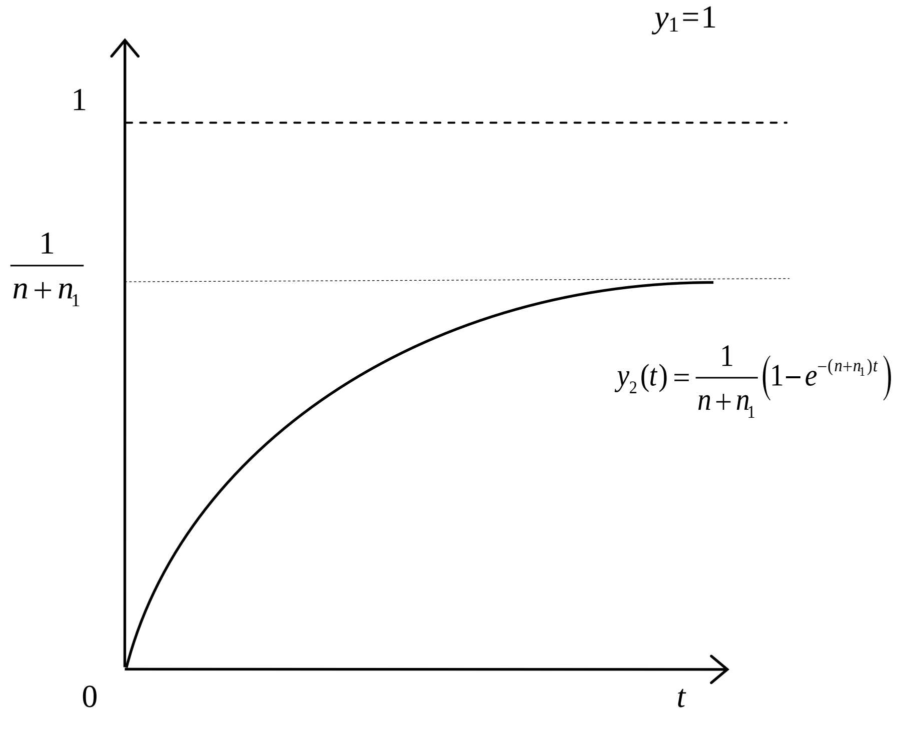


В случае $n = a\mu$ норма выбытия равна норме отчислений на развитие от ОПФ.

Уравнение модели примет вид $T_1 y'' + (T_1 n + 1) y' = \mu I$, отсюда видим, что характеристическое уравнение $T_1 p^2 + (T_1 n + 1) p = 0$ имеет корни $p_1 = 0$, $p_2 = -\dfrac{T_1 n + 1}{T_1}$.

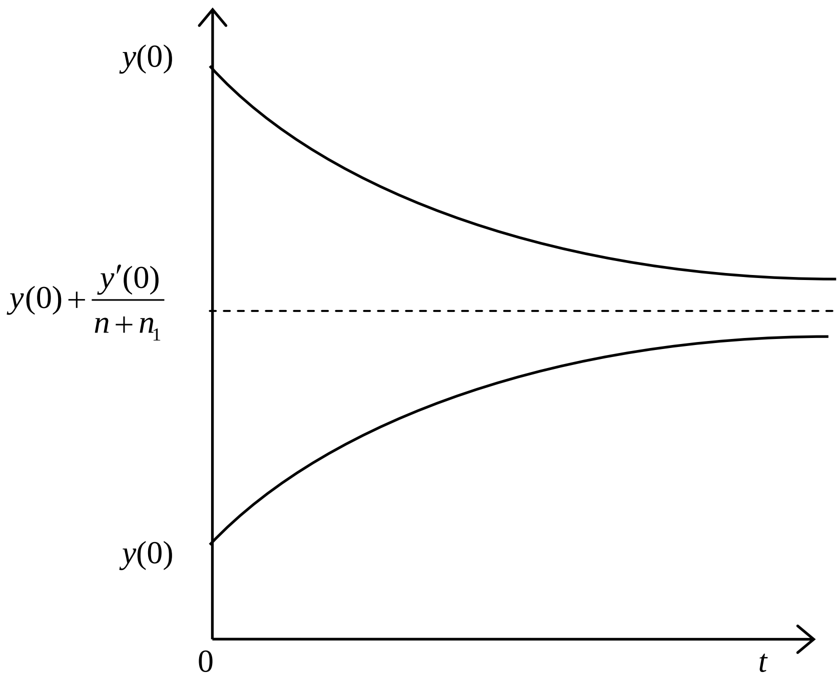
При $I(t) = \delta(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ получаем решение $y(t) = \dfrac{\mu}{T_1} y_2(t)$, где фундаментальные решения имеют вид: $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{T_1}} \left(1 - e^{-(n + \frac{1}{T_1})t} \right) =$

$\dfrac{1}{n + n_1} \left(1 - e^{-(n + n_1)t} \right)$, $n_1 = 1/T_1$.



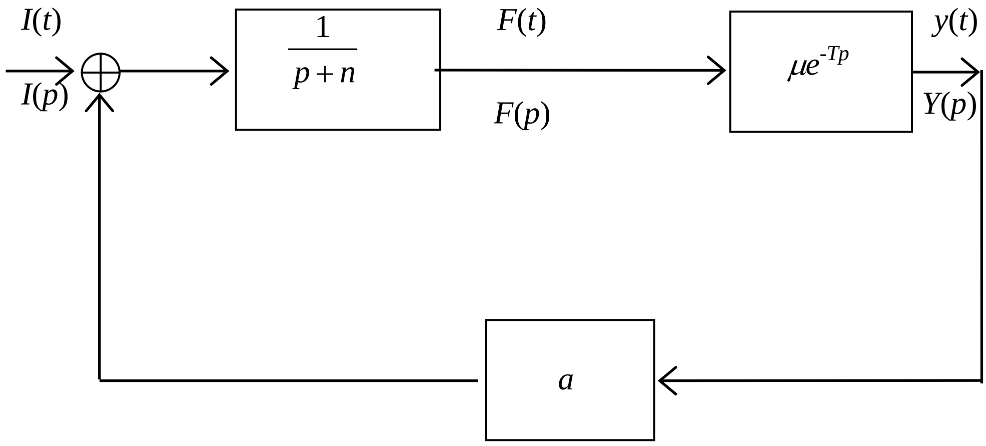
Выпуск продукции выходит на постоянный уровень при $y(0) > 0$, $y'(0) \neq 0$ и $I(t) = 0$. В этом случае $y(t) = y(0) y_1(t) + y'(0) y_2(t) =$

$= y(0) + y'(0) \cdot \dfrac{1}{n+n_1}\left(1 - e^{-(n+n_1 t)}\right) \rightarrow y(0) + \dfrac{y'(0)}{n+n_1}$ при $t \to +\infty$. Отсюда видим, что $\operatorname{Ind} y = 0$.



6.4.2. Вторая модель предприятия. Учет выбытия и дискретного технологического лага в производстве

Структурная схема модели имеет следующий вид:



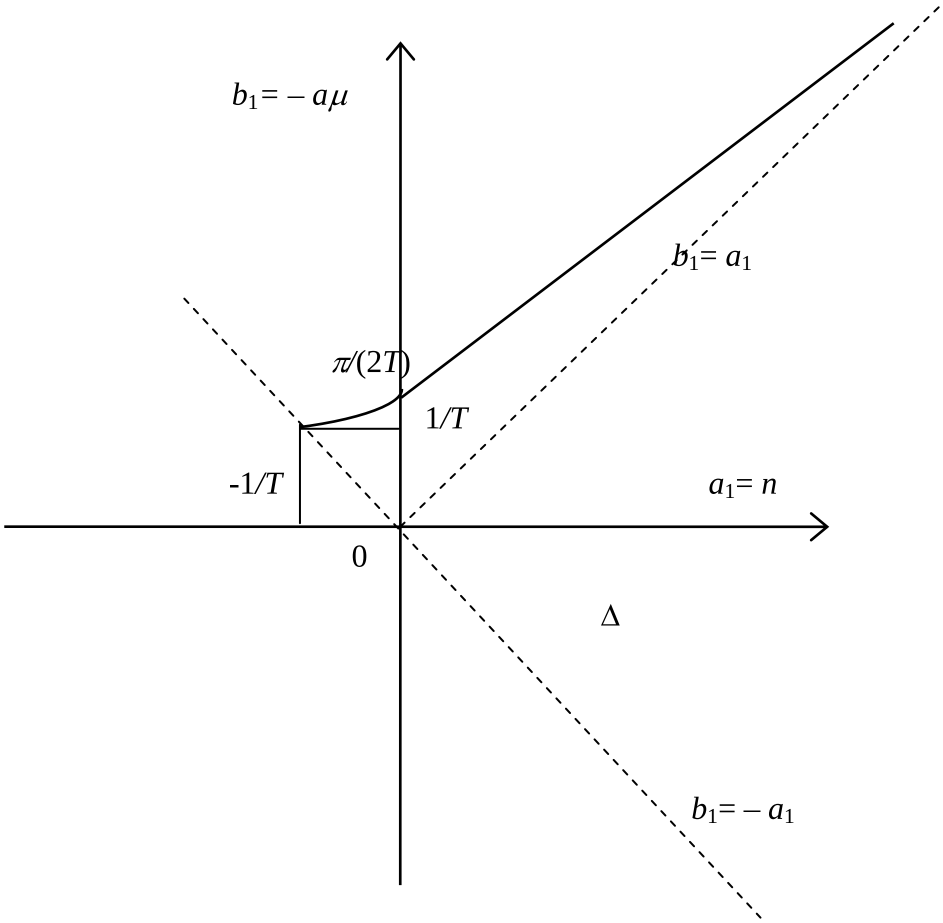
Найдем передаточную функцию системы:

$$\Phi(p) = \frac{\dfrac{\mu}{p+n} \cdot e^{-Tp}}{1 - \dfrac{a\mu}{p+n} \cdot e^{-Tp}} = \frac{\mu \cdot e^{-Tp}}{p + n - a\mu \cdot e^{-Tp}}.$$

Дифференциальным уравнением модели является линейное дифференциально-разностное уравнение вида

$$\begin{cases} y'(t) + ny(t) - a\mu y(t-T) = \mu I(t-T), \quad t \ge 0, \\ y(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi < 0. \end{cases}$$

Здесь φ – некоторая начальная функция для y.



Обозначим $a_1 = n$, $b_1 = -a\mu$. Тогда линейное дифференциально-разностное уравнение можно записать в виде

$$\begin{cases} y'(t) + a_1 y(t) + b_1 y(t-T) = \mu I(t-T), \quad t \ge 0, \\ y(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi < 0, \end{cases}$$

где $a_1 > 0$ и $b_1 < 0$. Уравнение асимптотически устойчиво эквивалентно тому, что точка с координатами $(a_1, b_1) \in \Delta$, т.е. $-b_1 < a_1$, что равносильно $a\mu < n$, ОПФ изнашиваются (система асимптотически устойчива). То, что ОПФ растут, означает, что $a\mu > n$ (система неустойчива). ОПФ стабилизируются, значит, $a\mu = n$ (система просто устойчива).

Упражнения к § 6

Упражнение 1. Модель развития предприятия с зависимостью инвестиций от скорости реализации продукции (первая модель Багриновского). Найти функции $u(t)$ и $y(t)$:

1) $I(t)=3,\ a=\frac{1}{3},\ \mu=\frac{1}{3},\ F(0)=2;$

2) $I(t)=t,\ a=\frac{2}{5},\ \mu=\frac{2}{5},\ F(0)=100;$

3) $I(t)=3,\ a=\frac{1}{3},\ \mu=\frac{3}{4},\ F(0)=2;$

4) $I(t)=t,\ a=\frac{2}{5},\ \mu=\frac{7}{10},\ F(0)=100;$

5) $I(t)=3\delta(t),\ a=\frac{1}{3},\ \mu=\frac{3}{4},\ F(0)=2;$

6) $I(t)=e^{-t},\ a=\frac{3}{7},\ \mu=\frac{5}{7},\ F(0)=10;$

7) $I(t)=e^{t},\ a=\frac{3}{7},\ \mu=\frac{5}{7},\ F(0)=10;$

8) $I(t)=\delta(t),\ a=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{3}{4},\ F(0)=2;$

9) $I(t)=e^{-t},\ a=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2},\ F(0)=10;$

10) $I(t)=e^{t},\ a=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2},\ F(0)=10;$

11) $I(t)=1,\ a=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2},\ F(0)=2;$

12) $I(t)=\delta(t),\ a=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2},\ F(0)=2.$

Упражнение 2. Модель развития с зависимостью инвестиций от объема реализации продукции (вторая модель Багриновского). Найти функцию $y(t)$ и построить ее график:

1) $I(t)=10,\ a=\frac{3}{8},\ n=\frac{1}{8},\ \mu=\frac{1}{3},\ F(0)=21;$

2) $I(t)=e^{-t},\ a=\frac{1}{10},\ n=\frac{1}{5},\ \mu=\frac{2}{3},\ y(0)=1;$

3) $I(t)=e^{t}$, $a=\dfrac{1}{10}$, $n=\dfrac{1}{5}$, $\mu=\dfrac{2}{3}$, $y(0)=1$;

4) $I(t)=e^{-t}$, $a=\dfrac{1}{5}$, $n=\dfrac{1}{5}$, $\mu=\dfrac{2}{3}$, $y(0)=1$;

5) $I(t)=e^{t}$, $a=\dfrac{1}{5}$, $n=\dfrac{1}{5}$, $\mu=\dfrac{2}{3}$, $y(0)=1$;

6) $I(t)=10\delta(t)$, $a=\dfrac{3}{8}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{1}{3}$, $F(0)=21$;

7) $I(t)=3$, $a=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{1}{3}$, $F(0)=2$;

8) $I(t)=t$, $a=\dfrac{2}{5}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{2}{5}$, $F(0)=100$;

9) $I(t)=3$, $a=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{3}{4}$, $F(0)=2$;

10) $I(t)=t$, $a=\dfrac{2}{5}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{7}{10}$, $F(0)=100$;

11) $I(t)=3\delta(t)$, $a=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{3}{4}$, $F(0)=2$;

12) $I(t)=\delta(t)$, $a=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{8}$, $\mu=\dfrac{1}{2}$, $F(0)=2$.

Список литературы к § 6

1. *Багриновский К.А.* Модели и методы экономической кибернетики. М.: Экономика, 1973. Гл. 1.

2. *Батищева С.Э.* Математические модели микроэкономики: учеб. пособие / С.Э. Батищева, Э.Д. Каданэр, П.М. Симонов. 2-е изд., перераб. и доп. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2006. Гл. 9.

3. *Жданов С.А.* Экономические модели и методы в управлении. М.: Дело и Сервис, 1998. 176 с.

4. *Журавлев С.Г.* Дифференциальные уравнения: Сборник задач: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук: учеб. пособие для вузов / С.Г. Журавлев, В.В. Аниковский. М.: Экзамен, 2005. 128 с.

5. *Иванилов Ю.П.* Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1979. 304 с.

6. *Иванов Ю.Н.* Математическое описание элементов экономики / Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, А.П. Уздемир. М.: Физматлит, 1994. 414 с.

7. *Кобринский Н.Е.* Информационные фильтры в экономике (Анализ одномерных временных рядов). М.: Статистика, 1978. 288 с.

8. *Кобринский Н.Е.* Точность экономико-математических моделей / Н.Е. Кобринский, В.И. Кузьмин. М.: Финансы и статистика, 1981. 256 с.

9. *Кобринский Н.Е.* Экономическая кибернетика: учеб. пособие для студ. вузов и фак., обуч. по спец. «Экон. кибернетика» / Н.Е. Кобринский, Е.З. Майминас, А.Д. Смирнов. М.: Экономика, 1982. Гл. 4, 7.

10. *Конторов Д.С.* Основы физической экономики (Физические аналогии и модели в экономике) / Д.С. Конторов, Н.В. Михайлов, Ю.С. Саврасов. М.: Радио и связь, 1999. 184 с.

11. *Кугаенко А.А.* Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. 2-е изд. М.: Вузовская книга, 2005. 392 с.

12. *Кугаенко А.А.* Тринадцать тренажеров по управлению социально-экономическими процессами. М.: Финансы и статистика, 2001. 236 с.

13. *Потапов В.Д.* Разработка и инструментальная реализация модели формирования оптимальных планов текущей деятельности для предприятий с серийным производством: автореф. дис. … канд. экон. наук: 08.00.13. Пермь, 2006. 27 с.

14. *Сиразетдинов Т.К.* Динамическое моделирование экономических объектов. Казань: Изд-во «Фэн», 1996. 224 с.

15. *Соколовский Л.Е.* Модели оптимального функционирования предприятия. М.: Наука, 1980. 174 с.

16. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика) / пер. с англ., общ. ред. и предисл. Д.М. Гришиани. М.: Прогресс, 1971. 340 с.

17. *Хачатрян С.Р.* Методы и модели решений экономических задач: учеб. пособие / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. М.: Экзамен, 2005. 384 с.

18. *Чадов А.Д.* Об области применимости первой модели Багриновского / А.Д. Чадов, К.Б. Кузнецов // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. С. 128–139.

19. *Царьков В.А.* Динамические модели экономики: теория и практика экономической динамики. М.: Экономика, 2007. 216 с.

20. *Ширяев В.П.* Экономико-математическое моделирование управления фирмой / В.П. Ширяев, И.А. Баев, Е.В. Ширяев. 2-е изд., испр. и доп. М: КомКнига, 2006. 224 с.

21. *Эртли-Каякоб П.* Экономическая кибернетика на практике / сокр. пер. с нем.; под. ред. К.А. Багриновского. М.: Экономика, 1983. 160 с.

§ 7. Две динамические дискретные модели развития предприятия

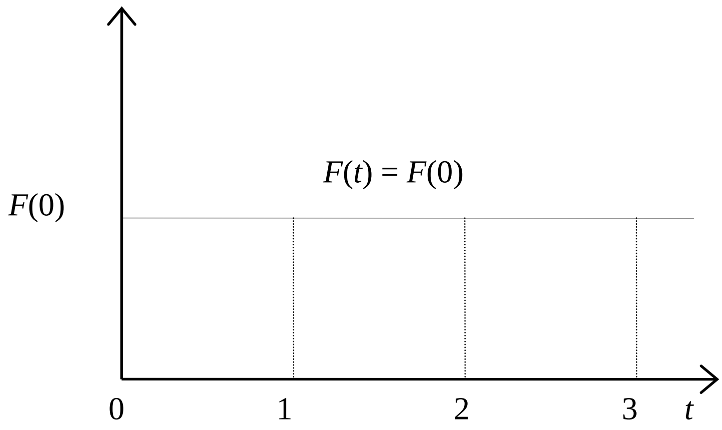
7.1. Первая дискретная модель предприятия без учета и с учетом временных лагов. Исследование модели

7.1.1. Модель ОПФ без учета выбытия

Непрерывная модель имеет вид $F(t)=\int_0^t I(s)ds+F(0)$, т.е. $F'(t)=I(t)$.

Положим $F'(t)\approx\Delta F(t)=F(t+1)-F(t)$ – правая (нисходящая) разность.

При $I(t)=0$ получаем однородное ЛРУ первого порядка: $F(t+1)=F(t)$. Отсюда $F(t)=F(0)$ – общее решение однородного ЛРУ.



Пусть $I(t)=1$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} F(t+1)=F(t)+1, \\ F(1)=F(0)+1, \\ F(2)=F(1)+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$ – арифметическая прогрессия с разностью один.

Отсюда получаем, что общее решение такого неоднородного ЛРУ имеет вид $F(t)=F(0)+t$.

7.1.2. Модель ОПФ с учетом выбытия

Непрерывная модель имеет вид $F(t)=\int_0^t e^{-n(t-s)}I(s)ds+e^{-nt}F(0)$, или

$$\left.\begin{aligned} F'(t)+nF(t)=nI(t),\\ TF'(t)+F(t)=I(t)\end{aligned}\right\} \text{ – модель в виде ЛОДУ.}$$

Положим $F'(t)\approx\Delta F(t)=F(t+1)-F(t)$, откуда $F(t+1)-F(t)+nF(t)=nI(t)$, $F(t+1)-(1-n)F(t)=nI(t)$.

При $I(t)=0$ получаем однородное уравнение $F(t+1)=(1-n)F(t)$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1-n$, т.е.

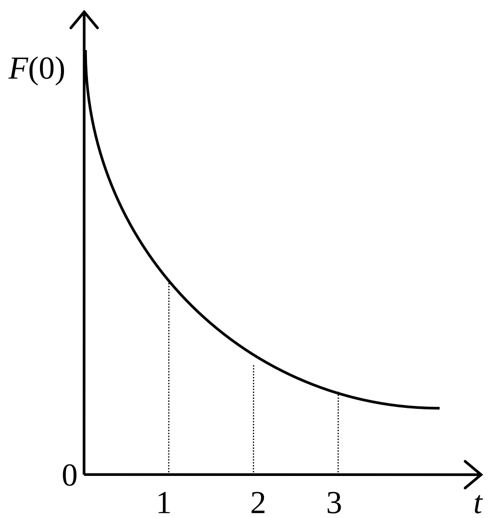
$$F(1)=(1-n)F(0),$$

$$F(2)=(1-n)F(1)=(1-n)^2F(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(t)=(1-n)^tF(0).$$

Здесь $0<n<1$, $0<1-n<1$, т.е. $q=1-n<1$. Поэтому $F(t)\underset{t\to\infty}{\to}0$, т.е. уравнение всегда асимптотически устойчиво.



Функция $F(t)$ убывает по экспоненте или по геометрической прогрессии. При $I(t)=1$ получаем неоднородное уравнение $F(t+1)-(1-n)F(t)=n\cdot1=n\cdot1^t$.

Найдем $F^*(t) = C$ – частное решение неоднородного уравнения. В этом уравнении $\lambda^t = (1-n)^t$, $1-n = \lambda \neq 1$, $\overline{F}(t) = C_1(1-n)^t$ – общее решение однородного ЛРУ.

Общее решение неоднородного ЛРУ имеет вид

$$F(t) = \overline{F}(t) + F^*(t) = C_1(1-n)^t + C.$$

Надо найти константы C_1, C : C берется из уравнения. Для начала запишем

$$F(t+1) = C_1(1-n)^{t+1} + C = (1-n)F(t) + n,$$

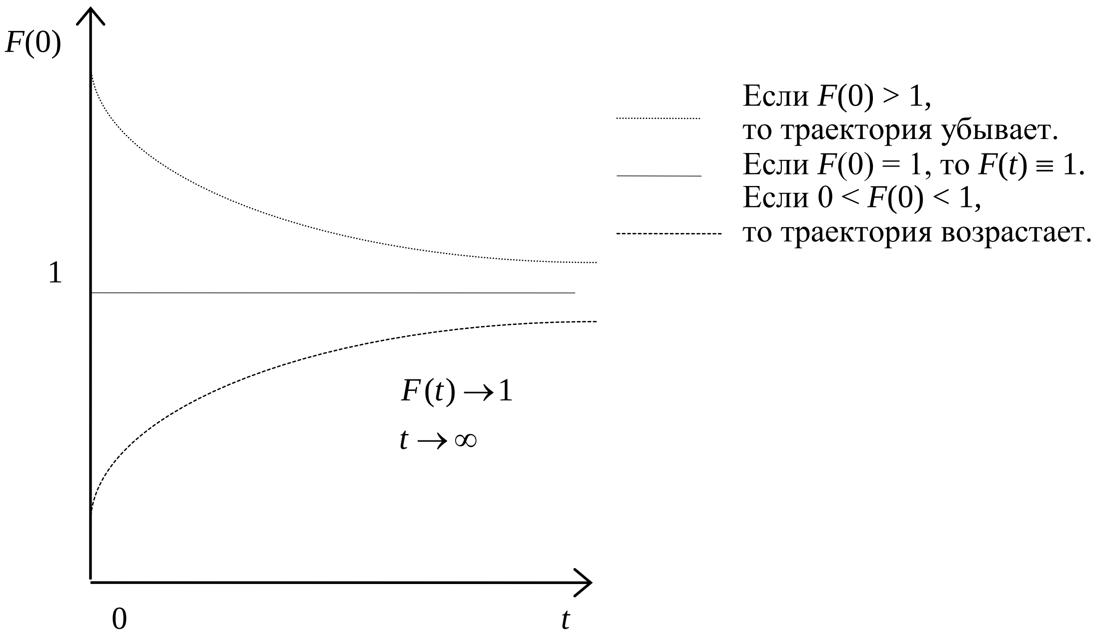
откуда

$$F(t+1) = C_1(1-n)^{t+1} + C = (1-n)\,(C_1(1-n)^t + C) + n,$$

$$C = (1-n)C + n,$$

в итоге $C = 1$.

Отсюда $F(t) = C_1(1-n)^t + 1$, константу C_1 находим из равенства $F(0) = C_1 + 1$, $C_1 = F(0) - 1$. Получим $F(t) = (F(0)-1)(1-n)^t + 1$.



Запишем по-другому формулу решения ЛРУ:

$$F(t) = (F(0)-1)(1-n)^t + 1 = F(0)(1-n)^t + 1 - (1-n)^t.$$

Другая запись этой модели:

$$F'(t) \approx \nabla F(t) = F(t) - F(t-1)$$ – левая (восходящая) разность,

$$F(t) - F(t-1) + nF(t) = nI(t-1),\ (n+1)F(t) - F(t-1) = nI(t-1),$$

$$F(t) - \frac{1}{n+1}F(t-1) = \frac{n}{n+1}I(t-1),\ t = 1, 2, \ldots$$

Неравенство $\frac{1}{n+1} < 1$ всегда верно при $0 < n < 1$, значит, это уравнение асимптотически устойчиво.

Находим $F(t) = \bar{F}(t) + F^*(t)$, $\bar{F}(t) = C_1\left(\frac{1}{n+1}\right)^t$, $F^*(t) = C$.

Пусть $I(t) = 1$, тогда $F(t) = C_1\left(\frac{1}{n+1}\right)^t + C$. Как и в предыдущем случае, из уравнения для $F^* = C$ находим $C - \frac{1}{n+1}C = \frac{n}{n+1}$, откуда $C = 1$. Далее $F(0) = C_1 \cdot 1 + 1 = C_1 + 1$, $C_1 = 1 - F(0)$, откуда

$$F(t) = (1 - F(0)) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^t + 1.$$

Ответ аналогичный, только коэффициенты разные.

7.1.3. Первая модель предприятия. Без учета выбытия ОПФ

Модель в виде ЛОДУ имеет следующий вид:

$$F'(t) = \frac{1}{1-a}I(t)$$

– для ОПФ $F(t)$;

$$y'(t) = \frac{\mu}{1-a}I(t)$$

– для выпуска продукции $y(t)$, где $y(t) = \mu \cdot F(t)$.

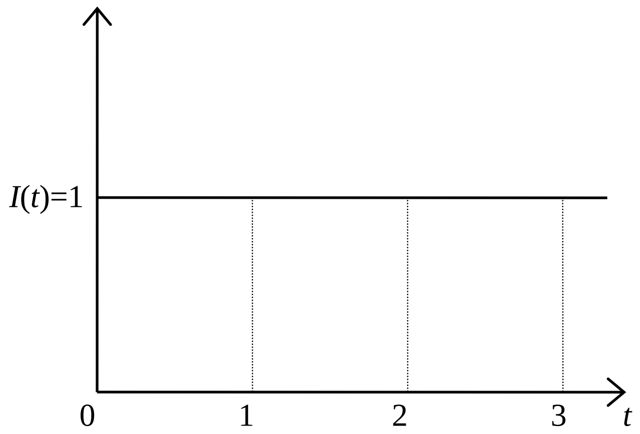
Дискретная модель получается следующим образом. Составим аппроксимацию $y'(t) \approx \Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ – правая (нисходящая) разность, получим

$$y(t+1) - y(t) = \frac{\mu}{1-a} I(t) \ (*)$$

– модель в виде ЛРУ, в случае $I(t) \equiv \text{const}$ – арифметическая прогрессия, $\frac{\mu}{1-a_1} I(t)$ – разность.

Решим уравнение (*). Рассмотрим однородное уравнение $y(t+1) - y(t) = 0$. Решим это уравнение подстановкой $y(t) = \lambda^t$ (метод Эйлера), получим $\lambda^{t+1} - \lambda^t = \lambda^t(\lambda - 1) = 0$, отсюда видим, что $\lambda - 1 = 0$ – характеристическое уравнение, $\lambda = 1$ – характеристическое число.

Модель (уравнение) устойчиво, но не асимптотически.



Общее решение однородного уравнения: $y(t) = \lambda^t = y(0)$, $\lambda = 1$, т.е. выпуск постоянный, отсюда $\bar{y}(t) = C_1\lambda^t = C_1$.

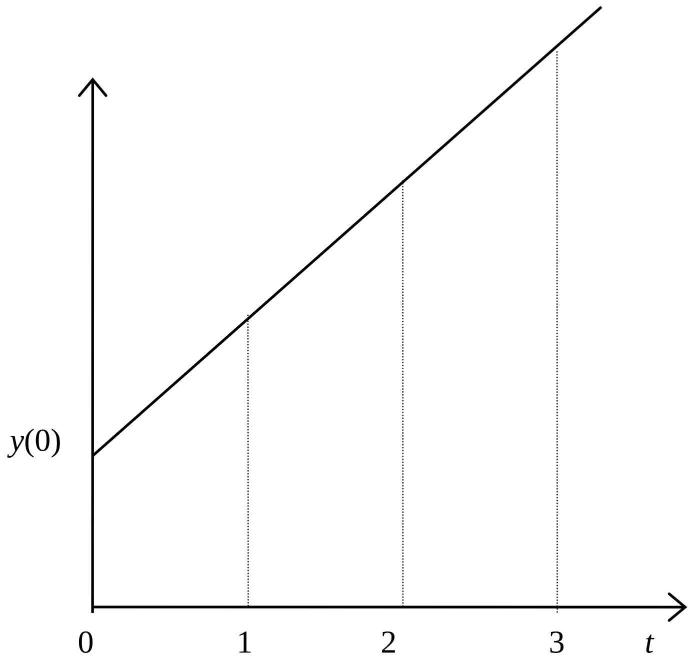
Найдем частное решение неоднородного уравнения $y(t+1) - y(t) = \frac{\mu}{1-a} I(t)$ при $I(t) \equiv 1$, т.е. когда интенсивность капвложений постоянная.

Видим $\frac{\mu}{1-a} = \frac{\mu}{1-a} \cdot 1^t$, откуда $\lambda_1 = \lambda = 1$, поэтому $y^*(t) = t^1 \cdot C$ – частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(t) = \bar{y}(t) + y^*(t) = C_1\lambda^t + Ct = C_1 + Ct,$$

поэтому $y(t+1) = C_1 + C(t+1)$. Из уравнения видим $y(t+1) - y(t) = C = \frac{\mu}{1-a} \cdot 1$, откуда $C = \frac{\mu}{1-a}$.



Далее $y(0) = C_1 + 0 = C_1$, $C_1 = y(0)$.

Общее решение ЛРУ имеет вид

$$y(t) = y(0)\lambda^t + \frac{\mu}{1-a}t = y(0) + \frac{\mu}{1-a}t, \text{ где } 0 < \mu < 1, \quad 0 \le a < 1, \ \frac{1}{1-a} \ge 1$$

– мультипликатор.

7.1.4. Первая модель предприятия. Учет выбытия

Ранее получили, что $y'(t)+\dfrac{n}{1-a}y(t)=\dfrac{\mu}{1-a}I(t)$ – непрерывная модель в виде ЛОДУ первого порядка.

Введем обозначения: $n_1=\dfrac{n}{1-a}\geq n$, $\mu_1=\dfrac{\mu}{1-a}$. Заметим, что $\dfrac{1}{1-a}I(t)$ – мгновенный прирост ОПФ без учета выбытия.

Положим $y'(t)\approx\Delta y(t)=y(t+1)-y(t)$, получим ЛРУ первого порядка

$$y(t+1)-(1-n_1)y(t)=\mu_1 I(t),\ t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

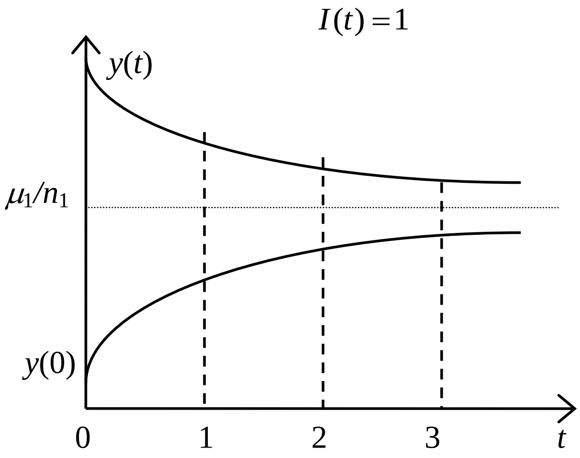
Пусть $\lambda_1=1-n_1\neq 0$, в случае $\lambda_1=0$ требуется дополнительное исследование. Пусть далее $I(t)\equiv 1$, тогда $y(t)=\left(y(0)-\dfrac{\mu_1}{n_1}\right)\lambda_1^t+\dfrac{\mu_1}{n_1}$, $t=0,\ 1,\ \ldots$

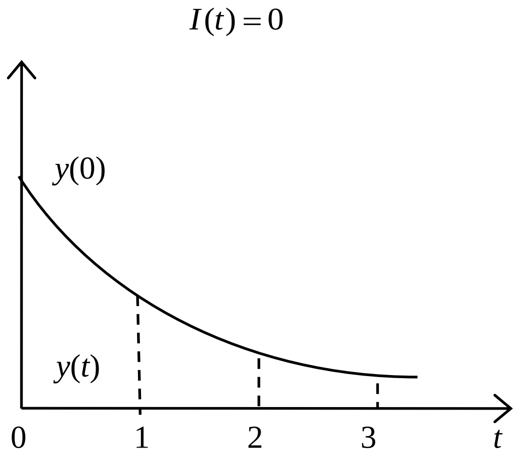
Тогда справедливы следующие утверждения.

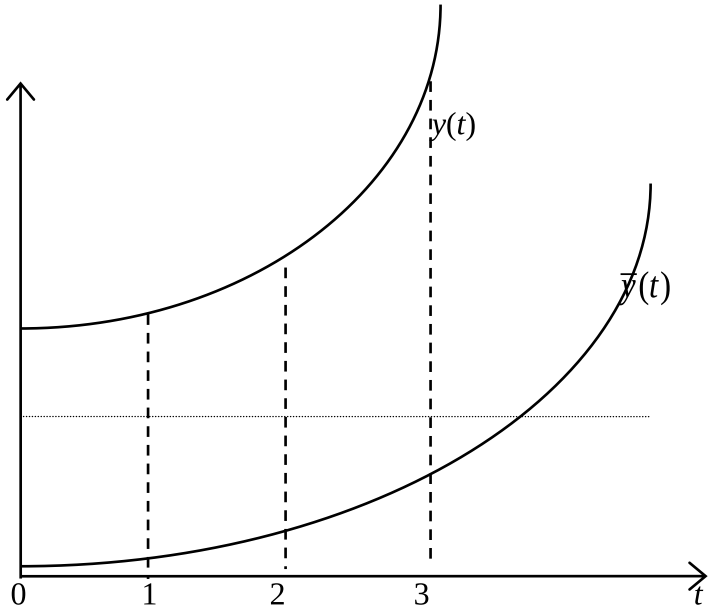
Асимптотическая устойчивость уравнения имеет место тогда и только тогда, когда $|\lambda_1|<1$, что эквивалентно неравенству $|1-n_1|<1$, которое эквивалентно неравенствам $0<n_1=\dfrac{n}{1-a}<2$, т.е. эквивалентно неравенству $n<2(1-a)$.

В этом случае при $I(t)=1$ получаем, что $y(t)\to\dfrac{\mu_1}{n_1}$ при $t\to+\infty$.

Пусть $I(t)=0$, тогда $y(t)=y(0)\lambda_1^t\to 0$ монотонно при $t\to+\infty$.







Неустойчивость уравнения имеет место тогда и только тогда, когда $|\lambda_1|>1$, что эквивалентно неравенству $n_1=\dfrac{n}{1-a}>2$, т.е. эквивалентно неравенству $n>2(1-a)$ (причем $0\le n<1$).

Тогда при $I(t)=1$ получаем, что $y(t)=(y(0)-\dfrac{\mu_1}{n_1})\lambda_1^t+\dfrac{\mu_1}{n_1}$. Очевидно, что при $y(0)>\dfrac{\mu_1}{n_1}$ решение $y(t)$ монотонно растет при $t\to+\infty$. Пусть $I(t)=0$, тогда $y(t)=\bar{y}(t)=y(0)\lambda_1^t$, т.е. $\bar{y}(t)$ – решение однородного уравнения.

Очевидно, что $y(t)$ монотонно растет при $t \to +\infty$, т.е. происходит рост выпуска продукции даже при отсутствии внешних инвестиций.

Просто устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда $|\lambda_1| = 1$, что эквивалентно равенству $n = 2(1-a)$. Тогда при $I(t) = 1$ получаем $y(t) = y(0) + \mu_1 t$, при $I(t) = 0$ получаем $y(t) \equiv y(0)$, т.е. в отсутствие внешних инвестиций выпуск постоянный.

7.2. Вторая дискретная модель предприятия без учета и с учетом временных лагов. Исследование модели

7.2.1. Вторая модель предприятия. С учетом выбытия ОПФ

Запишем непрерывную модель в виде ЛОДУ:

$$F'(t) + (n - a\mu)F(t) = I(t)$$

– модель для ОПФ,

$$y'(t) + (n - a\mu)y(t) = \mu \cdot I(t)$$

– модель для выпуска продукции.

Положим $y'(t) \approx \Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$, отсюда

$$y(t+1) - (1 - (n - a\mu))y(t) = \mu \cdot I(t),$$

где $0 \le a < 1,\ 0 < n < 1,\ 0 < \mu < 1.$

Решим однородное уравнение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda - (1 - (n - a\mu)) = 0,$$

откуда $\lambda = 1 - (n - a\mu)$.

Видим, что неравенство $n > a\mu$ эквивалентно неравенству $|\lambda| < 1$ ($0 < \lambda < 1$), эквивалентно асимптотической устойчивости и эквивалентно тому, что в отсутствие внешних инвестиций выпуск продукции монотонно сокращается и стремится к нулю.

Неравенство $a\mu > n$ означает $\lambda = 1 + a\mu - n > 1$ ($|\lambda| > 1$), это эквивалентно неустойчивости и это эквивалентно тому, что даже в отсутствие внешних инвестиций выпуск монотонно растет к бесконечности.

Неравенство $a\mu = n$ означает $\lambda = 1$, это эквивалентно простой устойчивости решений однородного уравнения, и это означает, что в отсутствие внешних инвестиций выпуск постоянный: $y(t) = y(0)$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(t) = C_1\lambda_1^t = C_1(\underbrace{1 + a\mu - n}_{\lambda_1})^t.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения при $I(t) = 1$. Здесь правая часть $\mu\cdot 1 = \mu\cdot 1^t$, $\lambda = 1$. В случае $a\mu \neq n$ получаем $\lambda_1 \neq \lambda$, поэтому берем $y^* = C$.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$(*) \quad y(t) = \bar{y}(t) + y^*(t) = C_1\lambda_1^t + C,$$

вычислим

$$y(t+1) = C_1\lambda_1^{t+1} + C,\ y(t+1) - \lambda_1(1 + a\mu - n)y(t) =$$

$$C_1\lambda_1^{t+1} + C - (1 + a\mu - n)(C_1\lambda_1^t + C) = C - \lambda_1 C = \mu,$$

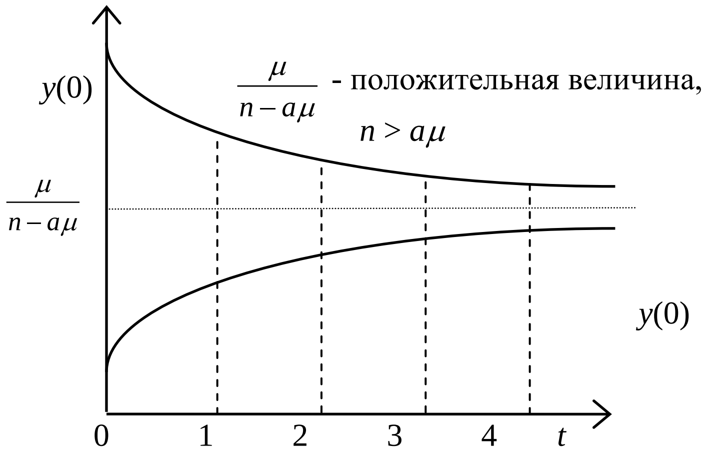
откуда $C = \dfrac{\mu}{1-\lambda_1}$.

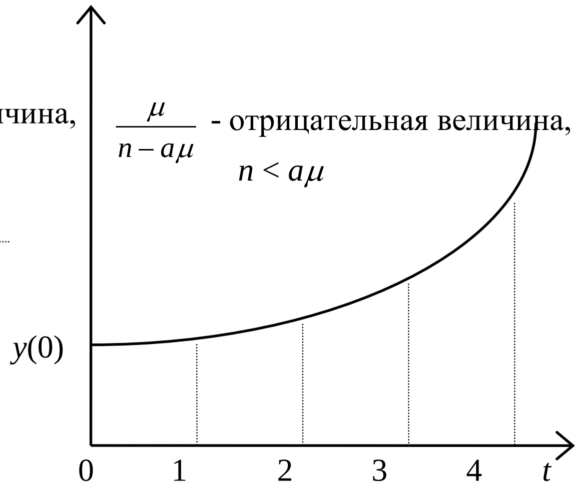
Итак, получаем $y(t) = C_1\lambda_1^t + \dfrac{\mu}{1-\lambda_1}$, откуда $y(0) = C_1 + \dfrac{\mu}{1-\lambda_1}$, $C_1 = y(0) - \dfrac{\mu}{1-\lambda_1}$, где $y(0) \geq 0$. Вычислим $\dfrac{\mu}{1-\lambda_1} = \dfrac{\mu}{n - a\mu}$. Подставим это в (*):

$$y(t) = \lambda_1^t\left(y(0) - \frac{\mu}{1-\lambda_1}\right) + \frac{\mu}{1-\lambda_1} = \lambda_1^t\left(y(0) - \frac{\mu}{n - a\mu}\right) + \frac{\mu}{n - a\mu} =$$

$$= \lambda_1^t y(0) + \frac{\mu}{n - a\mu}(1 - \lambda_1^t),$$

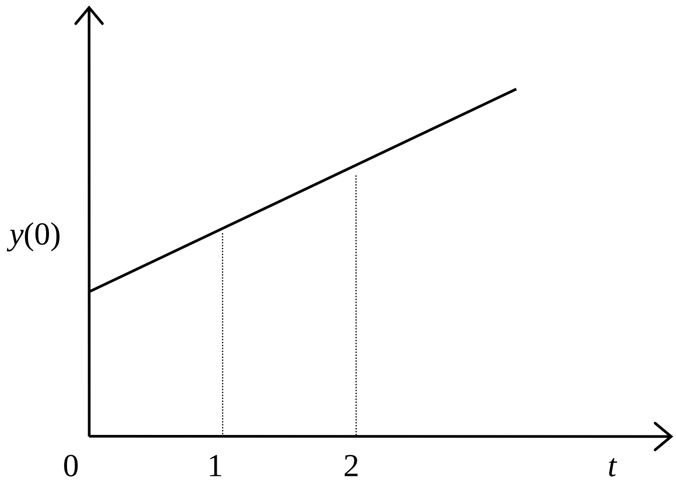
где $\lambda_1 = 1 + a\mu - n$.





Так как $\lambda_1^t = e^{t \ln \lambda_1}$, то λ_1^t растет как экспонента при $\lambda_1 > 1$, т.е. при $a\mu > n$.

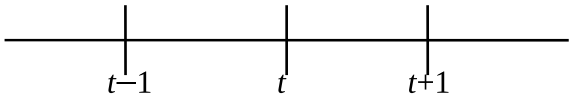
Пусть $a\mu = n$, тогда уравнение принимает вид $y(t + 1) - y(t) = \mu I(t)$, откуда при $I(t) \equiv 1$ выводим $y(t) = y(0) + \mu t$.



7.2.2. Вторая модель предприятия. С учетом выбытия и с учетом инерционного лага в производстве

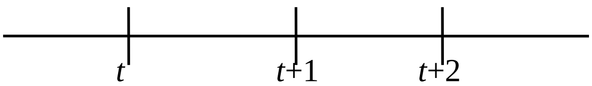
Ранее получили $T_1 y'' + (T_1 n + 1) y' + (n - a\mu) y = \mu I$, $t \geq 0$, – непрерывная модель в виде ЛОДУ второго порядка.

Положим $y'(t) \approx \Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$. Для второй производной возможны три аппроксимации. Например, $y''(t) \approx \nabla\Delta y(t) = \Delta y(t) - \Delta y(t-1) = y(t+1) - y(t) - \left(y(t) - y(t-1)\right) = y(t+1) - 2y(t) + y(t-1)$ – вторая симметричная разность. В этом случае возникает следующий шаблон из трех точек:

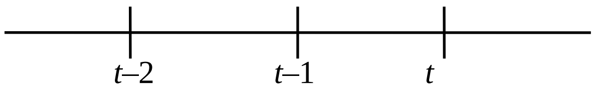


Заметим, что справедливо тождество $\nabla\Delta y(t) = \Delta\nabla y(t)$, т.е., операции ∇ и Δ перестановочны, коммутируют.

Возможны еще два варианта аппроксимации. При этом возникает выражение $\Delta^2 y(t) = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)$ – вторая правая (нисходящая) разность. Шаблон из трех точек имеет вид



Возникает также выражение $\nabla^2 y(t) = y(t) - 2y(t-1) + y(t-2)$ – вторая левая (восходящая) разность. Шаблон из трех точек имеет вид



Запишем дискретную модель с помощью второй симметричной разности:

$$T_1\nabla\Delta y(t) + (T_1 n + 1)\Delta y(t) + (n - a\mu)y(t) = \mu I(t),$$

получим

$$\underbrace{\left(T_1(1+n)+1\right)}_{a_0} y(t+1) + \underbrace{\left(n - a\mu - T_1(n+2) - 1\right)}_{a_1} y(t) + \underbrace{T_1}_{a_2} y(t-1) = \mu I(t),$$

т.е. получим ЛРУ второго порядка

$$a_0 x(t+2) + a_1 x(t+1) + a_2 x(t) = 0. \qquad (*)$$

Для ЛРУ второго порядка $a_0 x(t+2) + a_1 x(t+1) + a_2 x(t) = 0$ при $a_0 > 0$ критерий асимптотической устойчивости имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_0 - a_2 > 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 > 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0. \end{cases}$$

В уравнении (*) $a_0 > a_2$, следовательно, неравенство $a_0 - a_2 > 0$ выполнено. Далее $a_0 + a_1 + a_2 = T_1(1+n) + 1 + n - a\mu - T_1(n+2) - 1 + T_1 = n - a\mu$. Последнее условие имеет следующий вид: $a_0 - a_1 + a_2 = T_1(1+n) + 1 - n + a\mu + T_1(n+2) + {}$ ${}+1 + T_1 = 2T_1(n+2) + 2 - n + a\mu > 0$. Итак, видим, при $n - a\mu > 0$ уравнение асимптотически устойчиво, т.е. в случае $I(t) \equiv 0$ решение $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Упражнения к § 7

Упражнение 1. Записать первую дискретную модель Багриновского в виде уравнения $y(t+2)-(1+a)y(t+1)+ay(t)=\mu I(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 2. Записать первую дискретную модель Багриновского с учетом выбытия в виде уравнения $y(t)-\dfrac{1}{1+n_1}y(t-1)=\mu_1 I(t)$, $t=1,2,3,\ldots$, $n_1=\dfrac{n}{1-a}$, $\mu_1=\dfrac{\mu}{1-a}$, $0\le a<1$, $0<n<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 3. Записать первую дискретную модель Багриновского с учетом выбытия и с учетом инерционного технологического лага производства в виде уравнения

$$(T_1(1+n)+1-a)y(t+1)+(n-T_1(2+n)+a-1)y(t)+T_1y(t-1)=\mu I(t),\ t=1,2,3,\ldots,$$

$T_1>0$, $0<n<1$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 4. Записать вторую дискретную модель Багриновского в виде уравнения $y(t+2)+(n-1)y(t+1)-a\mu y(t)=\mu I(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, $0<n<1$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 5. Записать вторую дискретную модель Багриновского с учетом выбытия в виде уравнения $y(t)-\dfrac{1}{1+n-a\mu}y(t-1)=\mu I(t)$, $t=1,2,3,\ldots$, $0<n<1$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 6. Записать вторую дискретную модель Багриновского с учетом выбытия и с учетом дискретного технологического лага производства в виде уравнения $y(t)-\dfrac{1+a\mu}{1+n}y(t-1)=\dfrac{\mu}{1+n}\mu I(t)$, $t=1,2,3,\ldots$, $0<n<1$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Упражнение 7. Записать вторую дискретную модель Багриновского с учетом выбытия и с учетом дискретного технологического лага производства в виде уравнения $y(t+1)+(n-1)y(t)-a\mu y(t-2)=\mu I(t-2)$, $t=2,3,4,\ldots$, $0<n<1$, $0\le a<1$, $0<\mu<1$. Исследовать на устойчивость.

Список литературы к § 7

1. *Жданов С.А.* Экономические модели и методы в управлении. М.: Дело и Сервис, 1998. 176 с.

2. *Иванилов Ю.П.* Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1979. 304 с.

3. *Иванов Ю.Н.* Математическое описание элементов экономики / Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, А.П. Уздемир. М.: Физматлит, 1994. 414 с.

4. *Кугаенко А.А.* Основы теории и практики динамического моделирования социально-экономических объектов и прогнозирования их развития. 2-е изд. М.: Вузовская книга, 2005. 392 с.

5. *Кугаенко А.А.* Тринадцать тренажеров по управлению социально-экономическими процессами. М.: Финансы и статистика, 2001. 236 с.

6. *Потапов В.Д.* Разработка и инструментальная реализация модели формирования оптимальных планов текущей деятельности для предприятий с серийным производством: автореф. дис. … канд. экон. наук: 08.00.13. Пермь, 2006. 27 с.

7. *Ширяев В.П.* Экономико-математическое моделирование управление фирмой / В.П. Ширяев, И.А. Баев, Е.В. Ширяев. Изд. 2-е, испр. и доп. М: КомКнига, 2006. 224 с.

8. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика) / пер. с англ., общ. ред. и предисл. Д.М. Гришиани. М.: Прогресс, 1971. 340 с.

9. *Эртли-Каякоб П.* Экономическая кибернетика на практике / сокр. пер. с нем.; под. ред. К.А. Багриновского. М.: Экономика, 1983. 160 с.

§ 8. Динамические имитационные модели простых экономических объектов

8.1. Капитальные ресурсы и финансовые потоки

Кругооборот капитала в экономической системе любого уровня по существу есть не что иное, как процесс, протекающий в системе, содержащей цепочку из звеньев, охваченных положительной обратной связью. Капитал, поступающий на вход первого звена, пройдя цепочку преобразований (звеньев), через определенное время снова поступает на вход первого звена. Если при этом в процессе своего движения по цепочке экономических звеньев, например, производственного звена и звена реализации, капитал увеличивается на величину капитализированной части добавленной стоимости, то такая система имеет тенденцию к расширенному воспроизводству.

Несмотря на дискретность отдельных операций (производственных, финансовых), связанных с кругооборотом капитала, они, при их относительно большом числе и разновременности, образуют практически непрерывные потоки ресурсов, имеющих стоимостную оценку в денежном выражении.

При измерении стоимости потоков ресурсов единица измерения имеет размерность [*руб./ед.времени*]. Как правило, используется единица с размерностью [*руб./год*]. Потоки ресурсов образуются вследствие кругооборота капитала, состоящего из собственных и привлеченных ресурсов. Размерность единицы измерения объема ресурсов – (капитал) – [*руб*].

Отношение потоков к объему капитала служит характеристикой интенсивности оборота (движения) или, другими словами, эффективности использования капитала. Экономические характеристики, измеряемые в форме отношения потока к объему ресурсов, имеют размерность [*1/год*] или [*%/год*]. Так, отношение потока добавленной стоимости $y_{\text{дс}}$ к производственным активам $K_{\text{п}}$ является показателем их маржинальной доходности $E_{\text{д}}$, измеряемой в относительных единицах размерностью [*1/год*]:

$$E_{\text{д}} = y_{\text{дс}} / K_{\text{п}} \ [1/\text{год}] \qquad (1)$$

либо в процентах годовых:

$$E_{\text{д}} = y_{\text{дс}} \times 100\% / K_{\text{п}} \ [\%/\text{год}]. \qquad (2)$$

Отношение потока платежей $y_{\text{пр}}$ за привлекаемые (заемные) ресурсы $K_{\text{пр}}$ может служить мерой стоимости ресурсов, измеряемой в относительных единицах $E_{\text{пр}}$:

$$E_{\text{пр}} = y_{\text{пр}} / K_{\text{пр}} \ [1/\text{год}] \qquad (3)$$

или в процентах годовых на 1 руб. привлекаемых ресурсов:

$$E_{\text{пр}} = y_{\text{пр}} \times 100\% / K_{\text{пр}} \ [\%/\text{год}]. \qquad (4)$$

Таким же образом можно учитывать интенсивность расходов предприятия.

Подсчитав величину потока хозяйственных расходов y_m, учитываемых в составе добавленной стоимости, и объем капитала предприятия K_n, можем вычислить относительное значение расходов на 1 руб. капитала:

$$E_m = y_m / K_n \ [1/\text{год}] \qquad (5)$$

либо в процентах годовых на 1 руб. активов (капитала):

$$E_m = y_m \times 100\% / K_n \ [\%/\text{год}]. \qquad (6)$$

Величину E_m по аналогии с доходностью $E_{\text{дс}}$ будем называть *расходностью*, либо относительным или процентным коэффициентом внутрихозяйственных расходов, либо нормой расходности (на 1 руб. активов). Хозяйственные расходы y_m в сумме с расходами на оплату привлеченного капитала $y_{\text{пр}}$ равны добавленным затратам $y_{\text{дз}} = y_m + y_{\text{пр}}$.

Хозяйственные расходы, такие как оплата труда, амортизация основных фондов, как правило, не изменяются прямо пропорционально с ростом капитала. Эти расходы относят к так называемым добавленным затратам. Поэтому величина E_m при увеличении капитала будет уменьшаться.

Другой вид расходов – это затраты на комплектующие и расходные материалы и другие затраты, содержащие налог на добавленную стоимость. Эти расходы растут обратно пропорционально времени оборачиваемости капитала $\tau_{\text{об}}$ и пропорционально капиталу и образуют поток перенесенной стоимости $y_{\text{пс}}$:

$$y_{\text{пс}} = K_n / \tau_{\text{об}}. \tag{7}$$

Введем обозначение $E_{\text{об}} = 1/\tau_{\text{об}}$. Отношение потока перенесенной стоимости к капиталу также может быть измерено в единицах размерности [*1/год*] по формуле

$$E_{\text{об}} = y_{\text{пс}} / K_n \ [1/\text{год}]. \tag{8}$$

Как видим, величина расходности $E_{\text{об}}$ служит еще и мерой скорости оборота капитала.

8.2. Модель преобразования капитала предприятия в поток перенесенной стоимости

Введем обозначения: $K_{\text{сп}}$ – объем собственных средств (активов); $K_{\text{п}}$ – общий объем средств предприятия; $\alpha_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} / K_{\text{сп}}$ – коэффициент привлечения ресурсов. В результате получим

$$K_{\text{п}} = K_{\text{сп}} + K_{\text{пр}} = K_{\text{сп}}(1 + \alpha_{\text{пр}}). \tag{9}$$

Поток перенесенной стоимости $y_{\text{пс}}$ пропорционален объему капитала и обратно пропорционален времени оборачиваемости $\tau_{\text{об}}$. Указанные соотношения выполняются в блок-схеме, показанной на рис. 1.

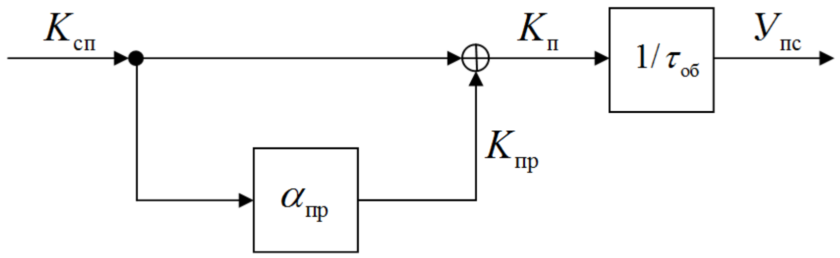


Рис. 1. Блок-схема преобразования капитала предприятия в поток перенесенной стоимости $У_{\text{пс}}$

8.3. Модели амортизации основных фондов

Линейная модель. Блок-схема модели должна отразить динамику изменения стоимости основного капитала в процессе его амортизации. Динамика изменения стоимости капитала будет зависеть от способа начисления амортизации. Каждому способу будет соответствовать своя блок-схема амортизации.

Рассмотрим модель с начислением амортизации пропорционально начальной (входной) величине основного капитала и вторую модель с начислением пропорционально текущей величине основного капитала, за вычетом амортизации. Для первой модели блок-схема представлена на рис. 2. В ней параллельный оператор состоит из двух звеньев.

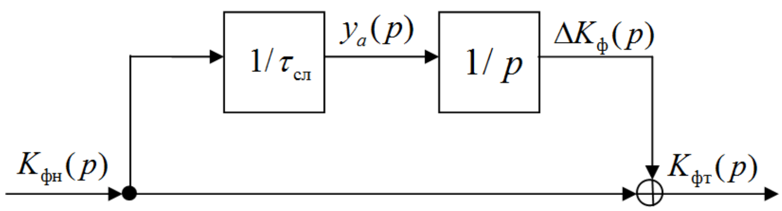


Рис. 2. Блок-схема амортизации пропорционально начальной величине основного капитала

Блок-схема конструируется в соответствии с последовательностью проводимых операций. Первое звено отражает операцию начисления амортизации. Умножая основной капитал (вектор $K_{\text{фн}}(p)$ [руб.]) на передаточную функцию первого звена $W = 1/\tau_{\text{сл}}$ [1/год], получим поток

$y_a(p) = K_{фн}(p)/\tau_{сл}$ [руб./год]. Поток поступает на вход звена интегрирования. Значение на выходе звена интегрирования $\Delta K_{ф}(p) = K_{фн}(p)/(\tau_{сл} p)$ вычитается из значения основного капитала $K_{фн}(p)$.

Таким образом, на этом примере можно убедиться, что операции с функциями в пространстве изображений *однозначно соответствуют* операциям с функциями в пространстве времени. Иначе говоря, для конструирования блок-схемы достаточно понимания и знания содержательной части преобразования входных, независимых функций и их взаимосвязей. По существу, создание операторной модели объекта заключается в разработке блок-схемы на основе изучения последовательности реальных операций.

Дальнейшие расчеты изображений векторов и определение уравнений динамики изменений показателей (функций) в зависимости от времени требуют от аналитика в основном технических знаний составления на основе анализа блок-схемы алгебраических уравнений функций изображений от аргумента p и последующего определения из таблиц соответствия функций оригинала.

Поскольку первая часть задачи моделирования процесса амортизации уже выполнена, можно приступить ко второму этапу: определению функции изображения выходного функций текущего значения основного капитала.

Из блок-схемы элементарно выводится уравнение для функций $K_{фт}(p)$ в пространстве изображений по Лапласу:

$$K_{фт}(p) = K_{фн}(p)(1 + 1/\tau_{сл} p). \qquad (10)$$

Теперь допустим, что входной функций равен константе $K_{фн}$. Функцию изображения для входного вектора получим из соответствия $K_{фн}1(t) + K_{фн}/p$. Следовательно, уравнение (10) будем иметь вид

$$K_{фт}(p) = K_{фн}(1/p - 1/\tau_{сл} p^2). \qquad (11)$$

На этом второй этап расчета заканчивается.

На третьем этапе находим соответствующую функцию оригинала:

$$K_{фт}(t)=K_{фн}(1-t/\tau_{сл}). \quad (12)$$

Уравнение (12) определяет динамику изменения величины основного капитала от времени при начислении амортизационных расходов пропорционально начальной величине основного капитала. Однако оно не учитывает фактора снижения амортизируемой стоимости с течением времени.

Модель с начислением пропорционально текущей величине фондов

Для второго способа начисления амортизации модель представлена блок-схемой на рис. 3.

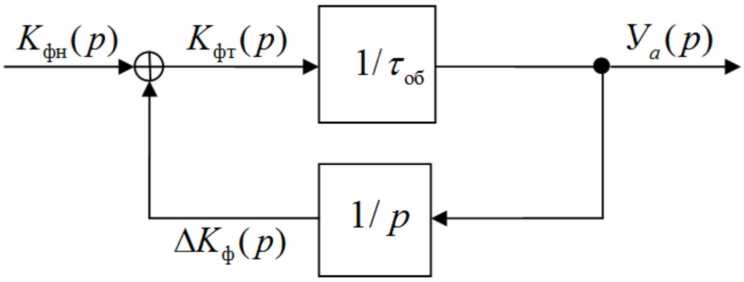


Рис. 3. Блок-схема амортизации пропорционально текущей величине основного капитала

Модель аналогично блок-схеме с обратной связью, представленной на рис. 3, содержит контур обратной связи. В соответствии с формулой обратной связи для $y_a(p)$ можно записать

$$y_a(p)=\frac{1/\tau_{сл}}{1+1/(\tau_{сл}p)}K_{фн}(p). \quad (13)$$

В то же время из блок-схемы видим связь вектора $y_a(p)$ с вектором $K_{фн}(p)$ на входе звена прямого канала, определяемую уравнением

$$y_a(p)=K_{фн}(p)/\tau_{сл}. \quad (14)$$

Подставив $y_a(p)$ из уравнения (13) в уравнение (14), получим

$$K_{фт}(p)=\frac{pK_{фн}(p)}{p+1/\tau_{сл}}. \quad (15)$$

Допустим, как и ранее, равенство $K_{фт}(t) = K_{фн}1(t)$, тогда $K_{фн}(p) = K_{фн} / p$, в результате (15) получим

$$K_{фт}(p) = \frac{K_{фн}}{p + 1/\tau_{сл}}. \qquad (16)$$

Применив обратное преобразование Лапласа к формуле (16), получим временную функцию

$$K_{фт}(t) = K_{фн} e^{-1/\tau_{сл}}. \qquad (17)$$

Итак, два способа начисления амортизации дают разную динамику текущей величины основного (внеоборотного) капитала.

8.4. Обобщенная модель оборота капитала

Рассмотрим модель оборачиваемости капитала в процессе простого воспроизводства. Нас будет интересовать поток ресурсов, обусловленный этим процессом. В экономике по *определению* величина оборота $\tau_{об}$ равна объему капитала K [руб.], деленному на величину потока стоимости ресурсов $y(t)$ [руб./год]:

$$\tau_{об} = K / y(t) \ [\mathit{год}]. \qquad (18)$$

Оборот капитала является неотъемлемым свойством экономического процесса воспроизводства капитала. Рассмотрим случай простого воспроизводства без возрастания стоимости капитала. При моделировании процесса учтем преобразование функции капитала в функцию стоимости потока ресурсов (капитала). Затем учтем инерционность процесса оборота и обратное преобразование функции стоимости потока в функцию стоимости капитала, возвращаемого на вход системы без возрастания стоимости.

Для преобразования капитала в первичный поток ресурсов воспользуемся звеном дифференцирования. Инертность движения потока ресурсов учтем с помощью инерционного звена. Поток $y(p)$ на выходе инерционного звена преобразуется оператором интегрирования в функцию капитала, поступающего на вход системы. В результате получим блок-схему на рис. 4.

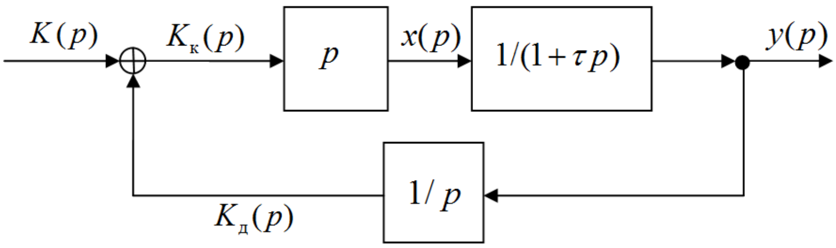


Рис. 4. Блок-схема оборачиваемости капитала

Как видим, блок-схема на рис. 4 содержит контур обратной связи. Функция $K_к(p)$ является изображением объема кредитового оборота за определенный период, а функция $K_д(p)$ – изображением дебетового оборота ресурсов за период времени t. Другими словами, можно сказать, что $K_к(p)$ отображает сумму платежей за период, а $K_д(p)$ – сумму поступлений за период в процессе оборота капитала. Определим коэффициент передачи блок-схемы с обратной связью $W(p) = y(p)/K(p)$.

В соответствии с формулой обратной связи запишем

$$W(p) = \frac{p/(1+\tau p)}{1-1/(1+\tau p)} = \frac{1}{\tau}. \qquad (19)$$

Таким образом, при подаче на вход единичной ступенчатой функции $1(t)$, умноженной на объем капитала K, в соответствии с формулой прямой связи изображение для выходного вектора будет равно:

$$y(p) = K(p)W(p) = K(p)/\tau = K/p\tau. \qquad (20)$$

В пространстве временных функций уравнению обратной связи будет соответствовать уравнение $y(t) = K/\tau$, т.е. можно записать

$$\tau = K/y(t). \qquad (21)$$

Сопоставив эти формулы, можно утверждать, что в модели кругооборота капитала постоянная времени τ инерционного звена *равна времени оборачиваемости капитала*: $\tau = \tau_{об}$.

Из этого утверждения следует, что трехзвенную блок-схему на рис. 4 можно заменить эквивалентной однозвенной схемой с коэффициентом передачи $W(p) = 1/\tau_{об}$. Однозвенная блок-схема представлена на рис. 5.

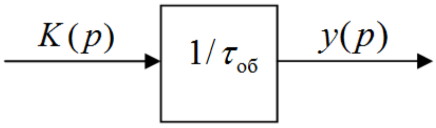


Рис. 5. Однозвенная эквивалентная блок-схема преобразования капитала в поток ресурсов

8.5. Модели налогообложения добавленной стоимости

Возможны две модели налогообложения – модель с рентабельностью относительно себестоимости продукции и модель с так называемой маржинальной рентабельностью относительно перенесенной стоимости.

В обоих случаях действуют исходные допущения:

1) перенесенная стоимость $y_{пс}$ и добавленная стоимость $y_{дс}$ за минусом прибыли $y_{п}$, т.е. добавленные затраты $y_{дз} = y_{дс} - y_{п}$, являются независимыми векторами;

2) перенесенная стоимость в составе выручки учитывается за минусом уплаченного НДС (налог на добавленную стоимость);

3) добавленные затраты (зарплата, амортизация, прибыль и другие текущие расходы) не содержат в своем составе НДС.

Кроме того, представленные модели налогообложения содержат только операторы пропорционального преобразования. Поэтому уравнения, описывающие взаимосвязи между векторами, будут справедливы как для функции изображений, так и для функции оригиналов.

Модель налогообложения на основе рентабельности затрат. В блок-схеме обратной связи прибыль является функцией от независимых векторов $y_{\text{пс}}$ и $y_{\text{дз}}$, а также передаточных коэффициентов трех звеньев. Из блок-схемы несложно убедиться в справедливости уравнений:

$$y_{\text{п}} = p y_{\text{сп}};$$

$$y_{\text{сп}} = p(y_{\text{пс}} + y_{\text{дз}} + \gamma_{\text{ндс}} y_{\text{дз}} + \gamma_{\text{ндс}} y_{\text{п}}).$$

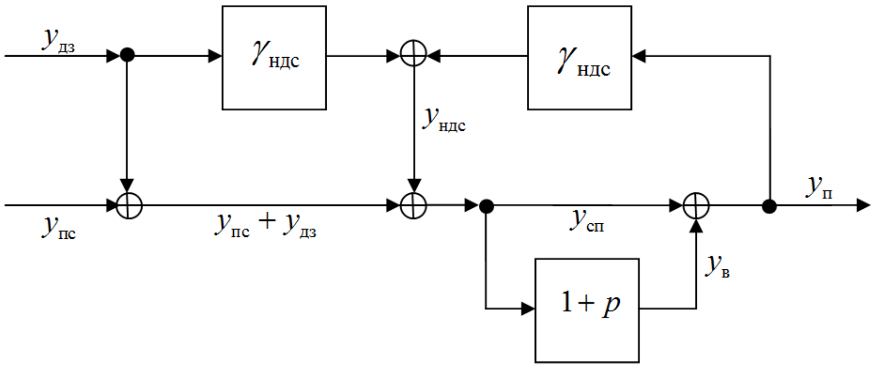


Рис. 6. Модель налогообложения с рентабельностью затрат: $y_{\text{пс}}$ – перенесенная стоимость; $y_{\text{дз}}$ – добавленные затраты; $y_{\text{ндс}}$ – налог на добавленную стоимость; $\gamma_{\text{ндс}}$ – выплаты по налогу на добавленную стоимость; $y_{\text{сп}}$ – себестоимость продукции; p – рентабельность по себестоимости продукции; $y_{\text{в}} = y_{\text{сп}}(1+p)$ – выручка от реализации продукции/услуг (валовой операционный доход); $y_{\text{п}}$ – прибыль от реализованной продукции

Из совместного рассмотрения этих уравнений получим уравнение для расчета потока прибыли:

$$y_{\text{п}} = p(y_{\text{пс}} + y_{\text{дз}}(1+\gamma_{\text{ндс}}))/(1 - p\gamma_{\text{ндс}}). \quad (22)$$

Модель налогообложения на основе маржинальной рентабельности Под маржинальной рентабельностью $p_{\text{м}}$ будем понимать отношение (выраженное в долях или процентах) добавленной стоимости к величине перенесенной стоимости, т.е. $p_{\text{м}} = (y_{\text{в}} - y_{\text{пс}})/y_{\text{пс}}$. Блок-схема модели налогообложения представлена на рис. 7.

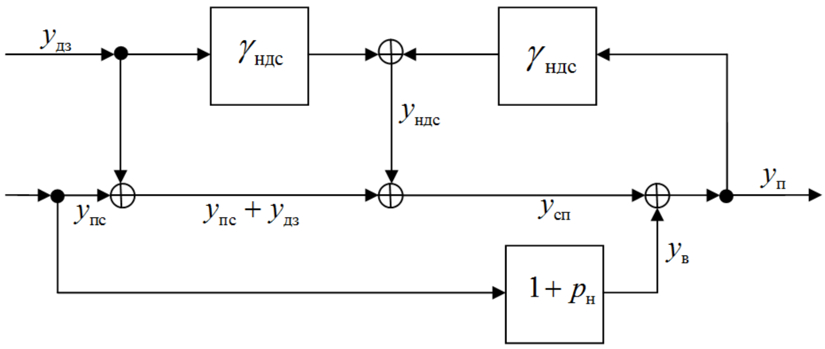


Рис. 7. Модель налогообложения с маржинальной рентабельностью: $y_{пс}$ – перенесенная стоимость; $y_{дз}$ – добавленные затраты; $y_{ндс}$ – налог на добавленную стоимость; $\gamma_{ндс}$ – выплаты по налогу на добавленную стоимость; $y_{сп}$ – себестоимость продукции; p – рентабельность по себестоимости продукции; $y_{в} = y_{сп}(1+p)$ – выручка от реализации продукции/услуг (валовой операционный доход); $y_{п}$ – прибыль от реализованной продукции

Из блок-схемы на рис. 7 несложно вывести следующие соотношения:

$$y_{сп} = y_{пс} + y_{дз} + y_{дз}\gamma_{ндс} + y_{п}\gamma_{ндс};$$

$$y_{п} = y_{в} - y_{сп} = y_{пс}(1+p_{м}) - (y_{пс} + y_{дз} + y_{дз}\gamma_{ндс} + y_{п}\gamma_{ндс}).$$

После решения системы из двух уравнений относительно потока прибыли $y_{п}$ получим

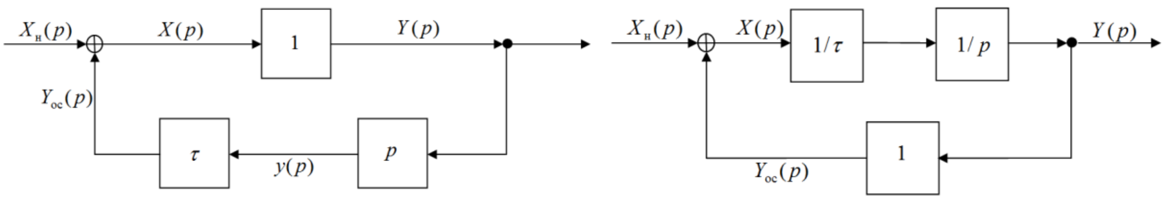
$$y_{п} = \frac{y_{пс}p_{м}}{1+\gamma_{ндс}} - y_{дз}. \tag{23}$$

Уравнения (22) и (23) неприменимы к банковским услугам, так как большинство банковских услуг реализуются без НДС.

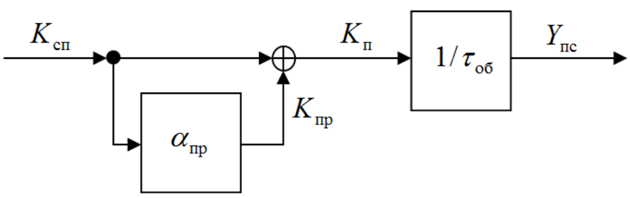
Упражнения к § 8

Упражнение 1. Провести исследование следующих объектов: применить к ним обратную связь.

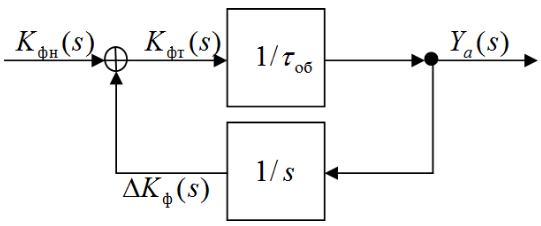
1. Блок-схемы операции с непрерывным запаздыванием.



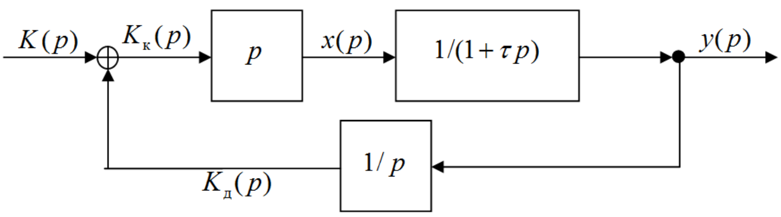
2. Блок-схема преобразования капитала предприятия в поток перенесенной стоимости $y_{пс}(t)$.



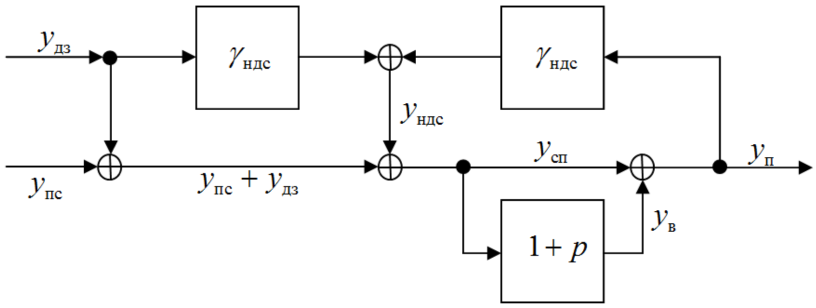
3. Блок-схема амортизации пропорционально начальной величине основного капитала.



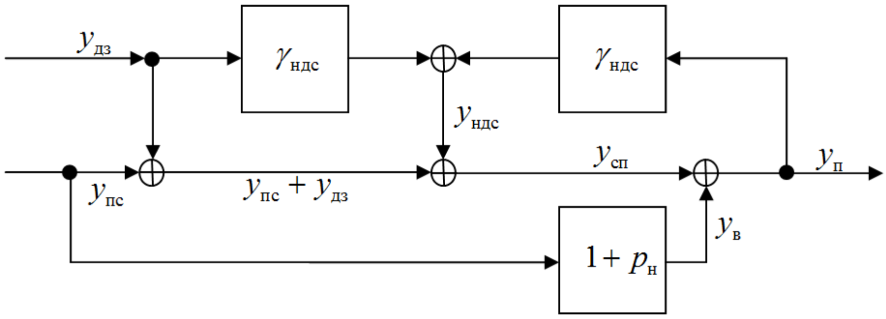
4. Блок-схема оборачиваемости капитала.



5. Модель налогообложения с рентабельностью затрат.



6. Модель налогообложения с маржинальной рентабельностью.



Список литературы к § 8

1. *Аристов С.А.* Имитационное моделирование экономических систем. Екатеринбург: УрГЭУ, 2004. 121 с.

2. *Гультяев А.Н.* Визуальное моделирование в среде MATLAB. СПб.: Питер, 2000. 432 с.

3. *Емельянов А.А.* Имитационное моделирование экономических процессов: учеб. пособие / А.А. Емельянов, Е.А. Власова, Р.В. Дума. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2009. 416 с.

4. *Кобелев Н.Б.* Теория глобальных систем и их имитационное управление. М.: ИНФРА-М, Вузовский учебник, 2016. 288 с.

5. *Лычкина Н.Н.* Имитационное моделирование экономических процессов. М.: ИНФРА-М, 2011. 254 с.

6. *Математические* и инструментальные методы экономики: учеб. пособие / колл. авт. М.: КНОРУС, 2012. 232 с.

7. *Черных И.В.* Simulink: среда создания инженерных приложений. М.: Диалог-МИФИ, 2003. 496 с.

§ 9. Моделирование экономической динамики предприятия (опыт применения методов теории автоматического регулирования для моделирования экономических объектов)

9.1. Введение

Исследования последних лет показывают, что динамика экономических систем различного уровня (отрасли, производственного и торгового предприятия, кредитной организации и других объектов экономики) адекватно описывается многозвенными операторными звеньями, охваченными положительными и отрицательными обратными связями.

Долгое время непреодолимым препятствием для восприятия экономистами динамических моделей являлось отсутствие экономической интерпретации динамической характеристики: постоянной времени инерционного звена τ.

Постоянная времени инерционного звена приобрела свой «экономический смысл». В экономической системе [1–5][1], описывающей динамику процесса непрерывного расширенного воспроизводства, постоянная времени тождественна времени оборачиваемости капитала $\tau_{об}$: $\tau = \tau_{об}$.

Рост капитала $K(t)$ в экономических системах воспроизводства с непрерывными потоками денежных поступлений и платежей описывается экспоненциальным уравнением

$$K(t) = K_0 e^{(\beta p/\tau)t}, \qquad (1)$$

где

K_0 – начальный объем капитала в момент времени $t = 0$;

p – рентабельность, т. е. отношение прибыли к затратам;

β – коэффициент капитализации прибыли, показывающий, какая доля прибыли направляется на увеличение капитала.

[1] См. работы в списке литературы к параграфу 9.

Эффективность воспроизводства капитала E, равная отношению прибыли $y_П(t)$ к текущей величине капитала $K(t)$, определяется соотношением

$$E = y_П(t)/K(t) = p/\tau . \quad (2)$$

Эти два уравнения являются фундаментальными, определяющими динамику роста экономической системы.

Однако с переходом к рыночной экономике все шире начинает применяться в практике экономических расчетов такая категория, как добавленная стоимость. Добавленная стоимость служит исходным показателем как для расчета цены продукции, доходности капитала, так и для формирования рентабельности. В связи с этим ниже разработана обобщенная модель с использованием этого показателя. Это вносит определенную новизну, а также необходимость разработки иной нетрадиционной системы показателей эффективности использования ресурсов предприятия, адекватных рыночной экономике. Последнее обстоятельство не означает отрицания показателей эффективности, основанных на рентабельности предприятия, тем более что все показатели оказываются взаимосвязанными.

9.2. Капитальные ресурсы и финансовые потоки

Величину $E_{хр}$ по аналогии с доходностью $E_Д$ будем называть расходностью, либо относительным или процентным коэффициентом внутрихозяйственных расходов, либо нормой расходности (на руб. активов).

Если ввести по аналогии также понятие прибыльности $E_П$, то будем иметь возможность определять эффективность работы предприятия из уравнения

$$E_П = E_Д - E_{хр} - E_{пр.а} , \quad (3)$$

где $E_{пр.а} = y_Ц / K_П$ $[1/год]$ – это относительная стоимость привлеченных ресурсов на 1 руб. производственных активов.

Определим взаимосвязь $E_{пр.а}$ с $E_{пр}$. Введем обозначения:

$K_{СП}$ – объем собственных средств (активов) предприятия;

$\alpha_{пр} = K_{пр} / K_{СП}$ – коэффициент привлечения ресурсов, тогда

$$K_{П} = K_{СП} + K_{П} = K_{СП}(1 + \alpha_{пр}). \qquad (4)$$

Из совместного рассмотрения (3) и (4) с учетом принятых обозначений несложно получить уравнение

$$E_{П} = E_{Д} - E_{хр} - E_{пр}\alpha_{пр}(1 + \alpha_{пр}). \qquad (5)$$

Уравнение (5) по существу характеризует статическую потоковую модель предприятия. Оно не отражает динамики изменения прибыльности.

Вычислить показатели, входящие в уравнение, не представляет особых затруднений. Из оборотносальдовой балансовой ведомости можно подсчитать за определенный период, например, за месяц, цифры дохода, внутрихозяйственных расходов, процентные выплаты по привлечению ресурсов, а также средние за месяц объемы привлеченных средств и собственного капитала.

Для вычисления (приближенного) годовых потоков доходов (расходов) показатели ежемесячные умножаются на 12. Например, вычислив доход банка $(y_{Д})_{мес}$, доходность в процентах годовых нетрудно подсчитать по формуле

$$E_{Д} = (y_{Д})_{мес} \times 12 \times 100\% / K_{П} \ [\%/год]. \qquad (6)$$

9.3. Динамическая пятизвенная модель предприятия

Главным исходным допущением при конструировании блок-схемы динамической модели является непрерывный характер потоков денежных поступлений на счета и платежей предприятия (в дальнейшем слово поток чаще будет опускаться). Такое допущение справедливо, если имеет место достаточно большой объем финансовых операций и средние показатели вычисляются на достаточно большом промежутке времени, например, равном одному месяцу.

Интегральные характеристики предприятия, такие как ежемесячные доход, расходы, средняя величина собственного основного и оборотного капитала, привлеченных ресурсов и другие, являются достаточно стабильными агрегированными экономическими показателями его деятельности, характерными для детерминированной системы. Очевидно, что такое предприятие правомерно рассматривать как детерминированную систему, параметры которой имеют свою динамику, взаимозависимость и свою траекторию изменения во времени, которую возможно, в принципе, как прогнозировать, так и планировать.

На рис. 1 представлена обобщенная блок-схема динамической модели воспроизводства производственного капитала предприятия (основного и оборотного), построенная на основе методов, применяемых в теории автоматического регулирования.

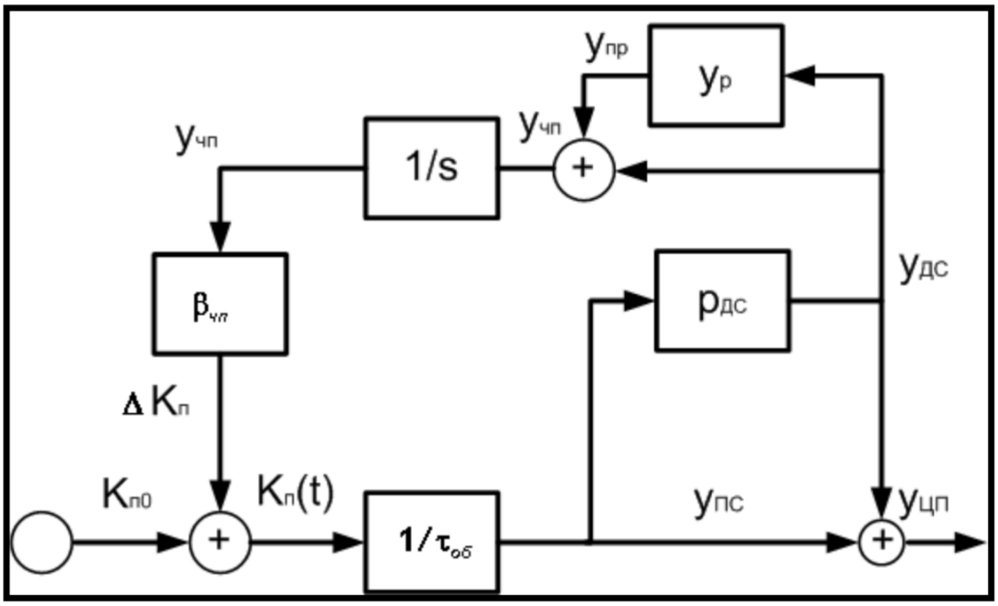


Рис. 1. Обобщенная пятизвенная модель предприятия

Для экономистов, как правило, незнакомых с методами моделирования систем автоматики, кратко поясним существо метода.

В модели денежные ресурсы (запасы) и финансовые потоки ресурсов представляются в виде векторов на входе и выходе операторных звеньев. Вектор на выходе звена равен произведению входного вектора на передаточный коэффициент звена. Операция дифференцирования имеет передаточную функцию s, а операция интегрирования – $1/s$. Передаточный коэффициент многозвенной системы представляется в виде алгебраической функции от комплексной переменной s. Эта функция называется изображением функции оригинала от аргумента времени t.

Переход от функции-изображения к функции-оригинала выполняется по правилам операционного исчисления Лапласа (Лапласа–Карлсона). Таким образом, метод определения временной зависимости состоит из двух этапов: сначала вычисляется операторное уравнение для изображения от аргумента s, после чего по таблице соответствия находится оригинал, функция от аргумента t.

По существу модель строится в соответствии со структурой, адекватной системе интегродифференциальных уравнений, описывающих изучаемый объект.

Модель, представленная на рис. 1, содержит минимальный набор агрегированных показателей, определяющих динамику роста (убывания) производственного капитала предприятия.

Она содержит следующие звенья (операторы):

- звено себестоимости с коэффициентом передачи $1/\tau_{об}$, преобразующее производственные активы $K_П$ в поток перенесенной себестоимости $y_{ПС}$;
- звено добавленной стоимости с коэффициентом передачи $p_{ДС}$, преобразующее перенесенную себестоимость в поток добавленной стоимости;
- звено текущих расходов с коэффициентом передачи $\gamma_{ТР}$, преобразующее поток добавленной стоимости $y_{ДС}$ в текущие расходы $y_{тр}$ (расходы на зарплату, амортизацию, налоги, отчисления в различные фонды);
- интегрирующее звено в цепи обратной связи с коэффициентом передачи $1/s$, преобразующее поток $y_{ЧП}$ в чистую прибыль $y_{ЧП}$ нарастающим итогом;

• звено капитализации чистой прибыли с коэффициентом передачи $\beta_{ЧП}$, преобразующее чистую прибыль $y_{ЧП}$ в прирост производственного капитала предприятия $\Delta K_{П}$.

В блок-схеме в наглядном виде зафиксирована следующая система уравнений:

производственный капитал ($K_{П}(t)$) = капитал при $t=0$ ($K_{П0}$) + коэффициент капитализации чистой прибыли ($\beta_{П}$) × интеграл от потока чистой прибыли ($y_{ЧП}$);

чистая продукция ($y_{ЧП}$) = добавленная стоимость ($y_{ДС}$) – текущие расходы ($y_{тр}$);

цена продукции предприятия ($y_{цп}$) = перенесенной себестоимости ($y_{пс}$) + добавленная стоимость ($y_{ДС}$).

Особенностью модели является свойство ее саморазвития после подачи собственного начального капитала $K_{П0}$. При выполнении равенства $K_{П0}=0$ система остается в режиме покоя, все другие функции равны нулю. После подачи на вход модели $K_{П0}>0$ система переходит из состояния покоя в состояние динамического развития. Величина каждого значения будет изменяться со временем. Характер траектории изменения значения будет зависеть от параметров операторов, входящих в блок-схему модели.

Для любого значения из блок-схемы можно вычислить аналитические выражения траектории их изменения во времени.

Не будем останавливаться на процедуре математических выкладок. Прежде чем перейти к уравнениям значения, введем следующие обозначения:

$$\beta_{Д}=\beta_{ЧП}(1-\gamma_{p}), \tag{7}$$

где $\beta_Д$ – это коэффициент капитализации добавленной стоимости, показывающий долю добавленной стоимости, направляемую на увеличение капитала;

$$E_Д = p_{ДС} / \tau_{об}, \tag{8}$$

где $E_Д$ – коэффициент эффективности использования производственного капитала.

Ниже покажем, что он равен отношению добавленной стоимости к величине капитала:

$$\vartheta(t) = \exp(\beta_Д t), \tag{9}$$

где $\vartheta(t)$ – временной множитель, определяющий экономическую динамику предприятия.

Ниже запишем конечный результат вычислений для каждой функции:

$$y_П = (K_{П0} / \tau_{об})\vartheta(t); \tag{10}$$

$$y_{ДС} = K_{П0}(p_{ДС} / \tau_{об})\vartheta(t); \tag{11}$$

$$y_{ЧП} = (1 - \gamma_Д)(p_{ДС} / \tau_{об})K_{П0}\vartheta(t); \tag{12}$$

$$y_{ЦП} = y_{ПС} + y_{ДС} = (K_{П0}(1 + p_{ДС}) / \tau_{об})\vartheta(t); \tag{13}$$

$$\Delta K_П(t) = K_{П0}(\vartheta(t) - 1); \tag{14}$$

$$K_П(t) = K_{П0}\vartheta(t). \tag{15}$$

Рассмотрев совместно уравнения (11) и (15), получим

$$E_Д = p_{ДС} / \tau_{об} = y_{ДС} / K_П(t). \tag{16}$$

Последняя формула раскрывает сущность показателя $E_Д$ и его взаимосвязь с добавленной стоимостью и оборачиваемостью капитала предприятия.

Из (16) несложно получить уравнение (1). Доказательство предоставим читателю, обратив его внимание, что из схемы на рис. 1 очевидно равенство для рентабельности предприятия $p = (1 - \gamma_Д)p_{ДС}$, соответственно прибыльность

$$E_П = (1 - \gamma_Д)E_Д.$$

Полученные уравнения (10)–(16) наглядно иллюстрируют экспоненциальный характер траектории роста экономики предприятия.

Введем обозначение темпа роста капитала предприятия:

$$\omega = dK_П(t)/(dtK_П). \qquad (17)$$

Из совместного рассмотрения (8), (9), (16) и (17) получим

$$\omega = \beta_Д E_Д = \beta_Д p_{ДС} / \tau_{об}. \qquad (18)$$

Таким образом, темп роста капитала равен произведению коэффициента капитализации добавленной стоимости и коэффициента добавленной стоимости, деленному на время оборачиваемости капитала предприятия.

Для понимания экономической динамики важно четко представлять, что для экономического роста требуется одновременное выполнение двух условий:

$$1)\ \beta_Д > 0;\ 2)\ E_Д > 0.$$

Расширенное воспроизводство капитала невозможно реализовать, если эффективность использования капитала $E_Д$ или коэффициент капитализации $\beta_Д$ не будут положительными величинами. При $\beta_Д = 0$ темп роста капитала $\omega = 0$. Если при этом выполняются неравенства $E_Д > 0$ и $1 - \gamma_Д > 0$, то предприятие будет функционировать в режиме простого воспроизводства.

При отрицательном $\beta_Д < 0$ величина капитала будет убывать со временем. Такой режим воспроизводства можно назвать деградирующим.

9.4. Упрощенный расчет динамики

Временной множитель $\vartheta(t)$, определяющий динамику роста предприятия, представляет экспоненциальную функцию от времени, которую можно упростить без большой потери в точности вычисления для относительно небольших временных периодов.

Произведем следующие простые преобразования уравнения (9):

$$\vartheta(t) = \exp(\beta_Д E_Д t) = \exp(\beta_Д p_{ДС} t / \tau_{об}) = (\exp(\beta_Д p_{ДС}))^{t/\tau_{об}}.$$

Выражение в скобках разложим в ряд Маклорена, оставив первые два члена, в результате будем иметь

$$\vartheta(t) \cong (1+\beta_Д p_{ДС})^{t/\tau_{об}} . \tag{19}$$

В показателе степени теперь имеем число циклов оборачиваемости капитала, равное $t/\tau_{об}$, а в скобках – процент наращивания капитала за один цикл.

Дальнейшее упрощение с применением разложения в ряд Маклорена уже к выражению (20):

$$\vartheta(t) \cong 1+\beta_Д p_{ДС} t/\tau_{об} = 1+\beta_Д E_Д t . \tag{20}$$

Равенство (20) позволяет вычислить рост капитала по «формуле сложных процентов», а равенство (21) – по «формуле простых процентов». Оба равенства можно рассматривать как частные случаи, вытекающие из общей модели воспроизводства капитала в экономических процессах производства и реализации продукции предприятия.

9.5. Обоснование модели на основе теории автоматического регулирования

Основным допущением в рассматриваемой модели является линейная зависимость потока перенесенной стоимости в составе общей выручки предприятия от величины производственных ресурсов. Поток пропорционален частоте $1/\tau_{об}$ оборачиваемости ресурсов. С позиции теории автоматического регулирования это утверждение, строго говоря, не является очевидным, если принять во внимание непрерывность потоков платежей и поступлений. Следует учесть также, что в модели на рис. 1 отсутствует цепь обратной связи, показывающая кругооборот капитальных ресурсов.

Модель, адекватная более строгой постановке задачи, представлена на рис. 2. В этой модели ресурсы поступают на вход звена дифференцирования, преобразующего запасы ресурсов в поток перенесенной стоимости (платежи за комплектующие, затрачиваемую энергию и прочие затраты, содержащие НДС), функция которого, в свою очередь, поступает на вход инерционного звена первого порядка с постоянной времени τ. Инерционное звено призвано учесть время, затрачиваемое на производство и реализацию продукции предприятия, т.е. учесть инерционность процесса движения капитала в процессе его оборота. С выхода инерционного звена капитал в виде денежных платежных средств (после реализации продукции предприятия) возвращается через интегрирующее звено на входное суммирующее устройство.

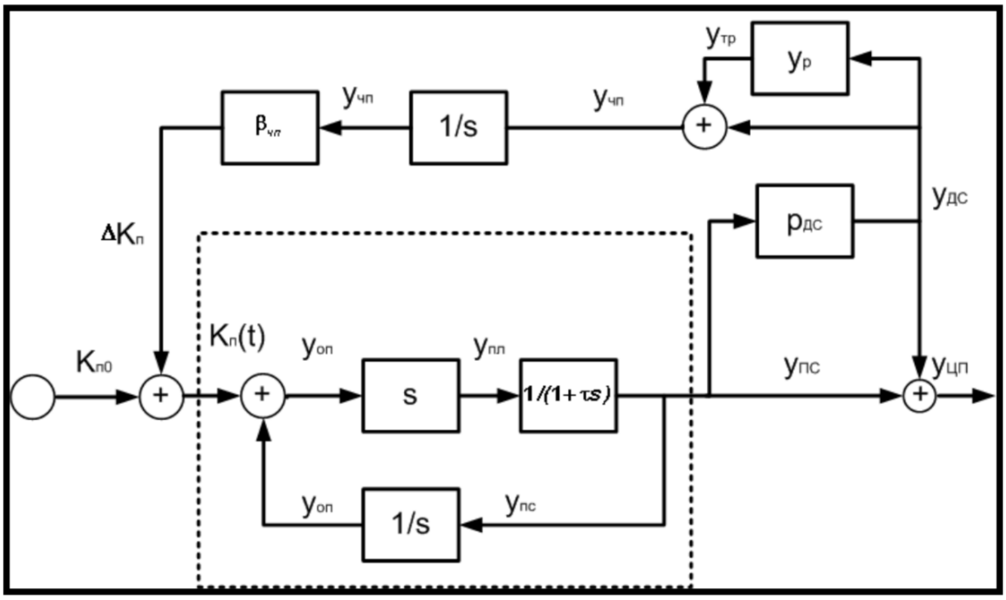


Рис. 2. Двухконтурная блок-схема модели предприятия

В блок-схеме на рис. 2 выделены два контура обратной положительной связи: контур, отображающий оборот капитала, и контур, учитывающий прирост капитала. Вектор $y_{ОП}$ представляет оборот денежных платежей от реализации продукции предприятия нарастающим итогом за минусом добавленной стоимости, а $y_{пс}$ – суммарный оборот с учетом капитала предприятия. Вычислим $y_{ПС}/K_{пр}$, иначе говоря, определим коэффициент передачи для части схемы, очерченной пунктирной линией.

На основе теории систем с обратной связью коэффициент передачи определяется из формулы

$$y_{ПС}/K_{пр} = K_{пр}(s)/(1 - K_{ОС}(s)K_{пр}(s)), \qquad (21)$$

где

$K_{пр}(s)$ – коэффициент передачи прямого канала;

$K_{ОС}(s)$ – коэффициент передачи канала обратной связи.

Для контура, очерченного пунктиром в схеме на рис. 2, имеем:

$$K_{пр}(s) = s/(1+\tau s); \tag{22}$$

$$K_{ОС}(s) = 1/s. \tag{23}$$

После подстановки (22) и (23) в (21) получим

$$y_{ПС}/K_{пр} = 1/\tau. \tag{24}$$

По определению $y_{ПС}/K_{пр}$ равен частоте оборачиваемости производственного капитала, т.е. обратной величине времени оборачиваемости, из чего следует равенство

$$\tau = \tau_{об}. \tag{25}$$

Таким образом, блок-схема на рис. 2 эквивалентна блок-схеме на рис. 1, а постоянная времени инерционного звена равна времени оборачиваемости капитала.

9.6. Возможности практического применения модели

Агрегированные показатели, используемые в модели, определяются из бухгалтерского баланса предприятия. Целесообразно воспользоваться ежемесячными данными: ежемесячным доходом, расходами, среднедневными величинами собственных производственных активов и привлеченных ресурсов.

Добавленная стоимость определяется как разность между платежами за реализованную продукцию и платежами за перенесенную стоимость (комплектующие, энергозатраты, платежи за коммунальные услуги, за услуги сторонних предприятий и прочие платежи, содержащие оплату налога с добавленной стоимости).

Для вычисления коэффициента затрат $\gamma_Д$ суммируются расходы на оплату труда, платежи в налоговые органы, в различные фонды, процентные расходы за привлеченные ресурсы. Полученная сумма делится на величину добавленной стоимости. Величина коэффициента капитализации чистой продукции $\beta_{ЧП}$ зависит от ежемесячных платежей дивидендов, спонсорских расходов и других платежей, уменьшающих долю чистой продукции, направляемую на увеличение собственного капитала предприятия. При отсутствии этих платежей $\beta_{ЧП} = 1$, при этом коэффициент капитализации добавленной стоимости становится равным $\beta_Д = 1 - \gamma_р$.

Относительную трудность может вызвать расчет среднедневной величины производственного капитала, состоящего, как правило, из собственных активов (производственные фонды, оборотные средства) и привлеченных ресурсов. Расчет потребует определения ежедневного сальдо по счетам активов и привлеченных ресурсов и расчета среднедневного сальдо за месяц. Для такого расчета можно рекомендовать использовать специализированные программы.

Относительная простота определения агрегированных показателей, используемых в модели, позволяет применить ее при составлении бюджета предприятия на плановый период с определением этих показателей на каждый месяц. Модель ориентирует руководство предприятия на осуществление контроля и управления ограниченным числом важнейших показателей, определяющих его развитие.

Список литературы к § 9

1. *Царьков В.А.* О проблеме единого критерия оценки экономической эффективности научно-технической и производственной деятельности: препринт доклада. М.: Институт экономики АН СССР, Научный Совет по экономическим проблемам научно-технической революции. М., 1982. 25 с.

2. *Царьков В.А.* Использование методов теории автоматического управления при построении и анализе динамических моделей экономики производства // Измерения. Контроль. Автоматизация. 1984. № 4. С. 66–78.

3. *Царьков В.А.* Экономическая динамика и эффективность капитальных вложений. М.: ЛЕКСИКОН, 1997. 104 с.

4. *Царьков В.А.* Агрегированная динамическая модель банка // Банки и технологии. 1998. № 3. С. 66–71.

5. *Царьков В.А.* Моделирование экономической динамики банка // Банковское дело. 2000. № 6. С. 25–30.

6. *Царьков В.А.* План-прогноз на основе модели экономической динамики банка // Банковское дело. 2000. № 12. С. 25–28.

7. *Царьков В.А.* Моделирование экономической динамики предприятия (опыт применения методов теории автоматического регулирования для моделирования экономических объектов) // Аудит и финансовый анализ. 2002. № 4. С. 253–257.

Приложения

Самостоятельная работа № 1

Решение автономных ЛОДУ, систем ЛОДУ, ЛРУ. Устойчивость автономных ЛОДУ, систем ЛОДУ, ЛРУ

Упражнение 1. Решить следующие задачи Коши. Найти передаточную функцию и функцию Коши, записать формулу Коши.

1. $\begin{cases} x''(t)+4x'(t)=1, \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x''(t)-4x'(t)+5x(t)=0, \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+10x(t)=2e^{-t}\cos(3t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x''(t)+3x'(t)=4, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x''(t)+4x'(t)=\cos(3t), \\ x(0)=2,\ x'(0)=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=0, \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x''(t)+x(t)=4, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x''(t)+x'(t)=t, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+x(t)=1, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=2, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+5x(t)=\sin(t), \\ x(0)=0,\ x(0)=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)=2e^{t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x''(t)-9x(t)=\sinh(t), \\ x(0)=-1,\ x'(0)=3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x''(t)+9x(t)=\cos(3t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x''(t)-4x'(t)+5x(t)=e^{t}, \\ x(0)=1/2,\ x'(0)=1/2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)=e^{2t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x''(t)-x'(t)-2x(t)=t, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+x(t)=e^{t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x''(t)+x(t)=\sinh(t), \\ x(0)=0,\ x'(t)=1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+2x(t)=e^{-t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x''(t)+5x'(t)+6x(t)=e^{t}\cos(t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)-3x(t)=e^{3t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x''(t)+x'(t)-2x(t)=e^{-t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x''(t)-9x(t)=0, \\ x(0)=1,\ x'(0)=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x''(t) + x(t) = 4e^t, \\ x(0) = 4, \;\; x'(0) = -3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = te^t, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) = 2\sin(t), \\ x(0) = -1, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = te^t, \\ x(0) = 0, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = te^t, \\ x(0) = 0, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^{-t}, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x''(t) + x'(t) - 2x(t) = e^t, \\ x(0) = -1, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = 1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = 1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x''(t) - 9x(t) = 2 - t, \\ x(0) = 0, \;\; x'(0) = 1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x''(t) - 4x(t) = 4t, \\ x(0) = 1, \;\; x'(0) = 0. \end{cases}$

Упражнение 2. Решить следующие задачи Коши. Найти матрицу Коши, записать формулу Коши.

1. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 1, & y(0) = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'(t) = 2y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = 2x(t), & y(0) = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'(t) = -y(t), & y(0) = 1, \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 2y(t) + 10e^{2t}, & x(0) = 1, \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 7e^{2t}, & y(0) = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = x(t) + y(t) + e^t, & y(0) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = x(t) + 2y(t), & y(0) = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 6y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) + t, & y(0) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'(t) = -y(t) + 3e^{t}, & x(0) = 1/8, \\ y'(t) = -x(t) + 2e^{3t}, & y(0) = 5/8. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x'(t) = -y(t) + e^{t}, & x(0) = 0, \\ y'(t) = x(t) + e^{-t}, & y(0) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^{t}, & x(0) = 1, \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^{t}, & y(0) = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x'(t) = -y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = -x(t), & y(0) = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -x(t) - 4y(t) + 1, & y(0) = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x'(t) = -2y(t) + 3t, & x(0) = 2, \\ y'(t) = 2x(t) + 4, & y(0) = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 8y(t), & x(0) = 6, \\ y'(t) = -x(t) - 3y(t), & y(0) = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x'(t) = -9y(t), & x(0) = 3, \\ y'(t) = x(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x'(t) = -3x(t) - 4y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t), & y(0) = 4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 5y(t), & x(0) = -2, \\ y'(t) = -x(t) - 3y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 4y(t) + 9e^{2t}, & x(0) = 2, \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 3e^{2t}, & y(0) = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + \cos(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + \sin(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x'(t) = -7x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 3t^2/2, & x(0) = 0, \\ y'(t) = -4x(t) - 2y(t) + 4t + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x'(t) = -y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -x(t), & y(0) = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x'(t) = -2y(t) + 3t, & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x(t) + 4t, & y(0) = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = -4x(t) + y(t), & y(0) = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x'(t) = y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -x(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x'(t) = y(t) + 1, & x(0) = 0, \\ y'(t) = x(t) + 1, & y(0) = -1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 5y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = 2x(t) - y(t), & y(0) = -3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x(t) = y(t) + t, & x(0) = -1, \\ y'(t) = x(t) - t, & y(0) = 1. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -x(t) + 4x(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 8y(t), & x(0) = -1, \\ y'(t) = x(t) + y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = -x(t) + y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), & y(0) = 1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 0, \\ y'(t) = -2(t) + 4y(t), & y(0) = -1. \end{cases}$

Упражнение 3. Решить следующие задачи Коши при $t = 0,1,2,\ldots$. Записать формулу Коши.

1. $\begin{cases} 3x(t+2) - 2x(t+1) - 8x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x(t+2) - 8x(t+1) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t+2) + 4x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(t+2) - 2x(t+1) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 2,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(t+2) - 2x(t+1) - x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(t+2) + 2x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x(t+2) + x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 2,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 8x(t+2) + 2x(t+1) - x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x(t+2) - 4x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x(t+2) - 6x(t+1) - 7x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x(t+2) - 2x(t+1) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x(t+2) - x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = 0, \\ x(0) = 4,\ \ x(1) = 5. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x(t+2) - 6x(t+1) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x(t+2) + 3x(t+1) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x(t+2) - x(t+1) - x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x(t+2) - 5x(t+1) + 3x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x(t+2) - 3x(t+1) - 4x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x(t+2) - 5x(t+1) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 2,\ \ x(1) = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x(t+2) - 4x(t+1) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x(t+2) + 2x(t+1) + 10x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x(t+2) + 4x(t) = 0, \\ x(0) = 2,\ \ x(1) = 2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x(t+2) + 2x(t+1) + 5x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\ \ x(1) = 1. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x(t+2) - 9x(t) = 0, \\ x(0) = -1,\ \ x(1) = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+4x(t)=0, \\ x(0)=2,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x(t+2)-3x(t+1)-10x(t)=0, \\ x(0)=3,\ \ x(1)=-1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x(t+2)+x(t+1)+x(t)=0, \\ x(0)=1,\ \ x(1)=-1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x(t+2)-\sqrt{3}x(t+1)+x(t)=0, \\ x(0)=1/2,\ \ x(1)=\sqrt{3}/2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x(t+2)+5x(t+1)+6x(t)=0, \\ x(0)=1,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x(t+2)+9x(t)=0, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x(t+2)-2x(t+1)-3x(t)=0, \\ x(0)=2,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x(t+2)+x(t+1)-2x(t)=0, \\ x(0)=1,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

Упражнение 4. Решить следующие задачи Коши при $t=0,1,2,\ldots$. Записать формулу Коши.

1. $\begin{cases} x(t+2)+x(t+1)-2x(t)=1, \\ x(0)=-1,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(t+2)-9x(t)=3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(t+2)-6x(t+1)+9x(t)=3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(t+2)-x(t+1)-6x(t)=(-1)^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(t+2)-x(t)=2, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+5x(t)=4, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+10x(t)=2+t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x(t+2)+4x(t)=t+1, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x(t+2)-2x(t+1)+2x(t)=8, \\ x(0)=1,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x(t+2)+x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x(t+2)-2x(t+1)+x(t)=1, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x(t+2)-2x(t+1)-x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=32\cdot 3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x(t+2)+x(t)=\sin(t), \\ x(0)=0,\ \ x(1)=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+4x(t)=3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x(t+2)-5x(t+1)+6x(t)=2\cdot 4^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x(t+2)-3x(t+1)-4x(t)=(-1)^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x(t+2)-5x(t+1)+2x(t)=\cos(\pi t/3), \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=2^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x(t+2)+x(t)=4t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+5x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+5x(t)=t+1, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x(t+2)-2x(t+1)+2x(t)=t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=(-1)^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x(t+2)-9x(t)=\sinh(t), \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x(t+2)+9x(t)=\sinh(t), \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+5x(t)=t+1, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x(t+2)-x(t+1)-2x(t)=t-1, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=(-1)^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x(t+2)+x(t)=\sinh(t), \\ x(0)=1,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x(t+2)-x(t+1)-6x(t)=3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=2^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x(t+2)-7x(t+1)+10x(t)=5^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=3^t, \\ x(0)=0,\ \ x(1)=0. \end{cases}$

Самостоятельная работа № 2

Исследование на устойчивость автономных ЛОДУ, систем ЛОДУ, ЛРУ

Упражнение 1. Исследовать на устойчивость нулевое решение ЛОДУ: 1) методом Рауса–Гурвица; 2) методом Льенара–Шипара.

1. $x^{(IV)}+5x'''-2x'+x=0$
2. $x^{(IV)}+4x'''+7x''+6x'+2x=0$
3. $x'''+5x''+9x'+5x=0$
4. $x^{(IV)}-2x'''+x''+2x'-2x=0$
5. $x^{(IV)}+7x'''+17x''+17x'+6x=0$
6. $x'''-3x''+12x'-10x=0$
7. $x^{(IV)}+5x'''+18x''+34x'+20x=0$
8. $x^{(IV)}+7x'''+19x''+23x'+10x=0$
9. $x^{(IV)}+11x'''+41x''+61x'+30x=0$
10. $x^{(V)}+3x^{(IV)}-5x'''-15x''+4x'+12x=0$
11. $x^{(V)}+7x^{(IV)}+33x'''+88x''+122x'+60x=0$
12. $x^{(IV)}+2x'''+4x''+3x'+2x=0$
13. $x^{(IV)}+2x'''+3x''+7x'+2x=0$
14. $x^{(IV)}+2x'''+6x''+5x'+6x=0$
15. $x^{(IV)}+8x'''+14x''+36x'+45x=0$
16. $x^{(IV)}+13x'''+16x''+55x'+76x=0$
17. $x^{(IV)}+3x'''+26x''+74x'+85x=0$
18. $x^{(V)}+2x^{(IV)}+4x'''+6x''+5x'+4x=0$
19. $x^{(V)}+2x^{(IV)}+5x'''+6x''+5x'+2x=0$
20. $x^{(V)}+3x^{(IV)}+6x'''+7x''+4x'+4x=0$
21. $2x^{(IV)}+13x'''+28x''+23x'+6x=0$
22. $x^{(IV)}+4x'''+16x''+24x'+20x=0$

23. $x^{(V)}+13x^{(IV)}+43x'''+51x''+40x'+12x=0$

24. $x^{(IV)}+x'''+8x''+x'+x=0$

25. $x^{(V)}+3x^{(IV)}+2x'''+x''+3x'=2x=0$

26. $x^{(V)}+x^{(IV)}+x'''+x''+x'=0$

27. $x^{(V)}+13x^{(IV)}+43x'''+51x''+40x'+12x=0$

28. $x^{(IV)}+2x'''-4x''+x=0$

29. $x^{(V)}-4x^{(IV)}+x''-x'+x=0$

30. $x^{(IV)}+5x'''+13x''+19x'+10x=0$

31. $x^{(V)}+4x^{(IV)}+16x'''+25x''+13x'+9x=0$

32. $x^{(V)}+3x^{(IV)}+10x'''+22x''+23x'+12x=0$

33. $x^{(V)}+5x^{(IV)}+15x'''+48x''+44x'+74x=0$

34. $x^{(V)}+2x^{(IV)}+14x'''+36x''+23x'+68x=0$

35. $x^{(IV)}+2x'''+3x''+2x'+x=0$

36. $x^{(IV)}+12x'''+x''+2x'+x=0$

Упражнение 2. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы ЛОДУ, записанной в векторной форме: $x'=Ax$, где x – вектор, A – данная матрица: 1) методом Рауса–Гурвица; 2) методом Льенара–Шипара.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 21 & -8 & -19 \\ 18 & -7 & -15 \\ 16 & -6 & -15 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Упражнение 3. Исследовать на устойчивость нулевое решение ЛРУ сведением характеристического уравнения и исследовать его методом Рауса–Гурвица.

1. $x(t+3)-x(t+2)-8x(t+1)+12x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
2. $11x(t+4)-8x(t+3)+8x(t+2)-4x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
3. $x(t+4)+x(t+3)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
4. $12x(t+4)-3x(t+3)+2x(t+2)+2x(t+1)-2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
5. $7x(t+4)-4x(t+3)+30x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
6. $x(t+4)+2x(t+3)+4x(t+2)-2x(t+1)-5x(t), \quad t=0,1,2,...$
7. $x(t+4)-x(t+2)+2x(t+1)+2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
8. $x(t+4)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
9. $x(t+4)+2x(t+3)+3x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
10. $2x(t+4)-5x(t+3)+5x(t+2)-2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
11. $x(t+4)+4x(t+2)-3x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
12. $4x(t+3)-2x(t+2)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
13. $27x(t+3)-27x(t+2)+12x(t+1)-2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
14. $4x(t+3)-10x(t+2)+4x(t+1)-3x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
15. $4x(t+3)-3x(t+2)+x(t+1)-x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
16. $4x(t+3)-2x(t+2)-4x(t+1)+3x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
17. $27x(t+3)+9x(t+2)+2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
18. $4x(t+3)+x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
19. $2x(t+3)-x(t+2)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
20. $x(t+3)+5x(t+2)+3x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
21. $2x(t+3)+x(t+2)-x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
22. $27x(t+3)-9x(t+2)+2x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$
23. $2x(t+4)+x(t+3)+x(t+2)+x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,...$

24. $2x(t+4)+2x(t+3)+x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,\ldots$

25. $2x(t+4)+3x(t+3)+4x(t+2)+2x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,\ldots$

26. $x(t+4)+x(t+3)+4x(t+2)+x(t+1)+x(t)=0, \quad t=0,1,2,\ldots$

27. $x(t+4)+2x(t+3)+4x(t+2)+5x(t+1)+5x(t)=0, \quad t=0,1,2,\ldots$

Самостоятельная работа № 3

Вопросы

Вопрос 1. Верно ли, что при последовательном соединении звеньев их передаточные функции складываются?

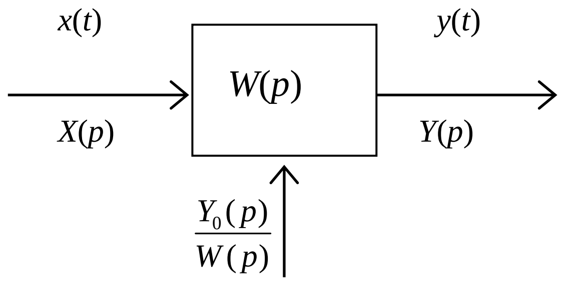
Вопрос 2. Верно ли, что при последовательном соединении звеньев их передаточные функции перемножаются?

Вопрос 3. Верно ли, что инерционное звено первого порядка может быть представлено в виде системы с обратной связью?

Вопрос 4. Верно ли, что в модели $Y(p)=W(p)X(p)+Y_0(p)$ передаточной функцией является $W(p)$?

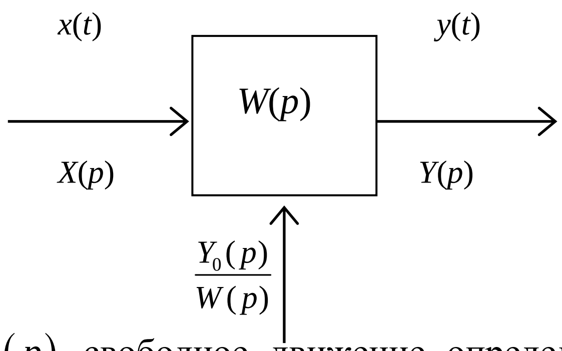
Вопрос 5. Верно ли, что в модели $Y(p)=W(p)X(p)+Y_0(p)$ вынужденное движение определяется слагаемым $W(p)X(p)$?

Вопрос 6. Верно ли, что в модели



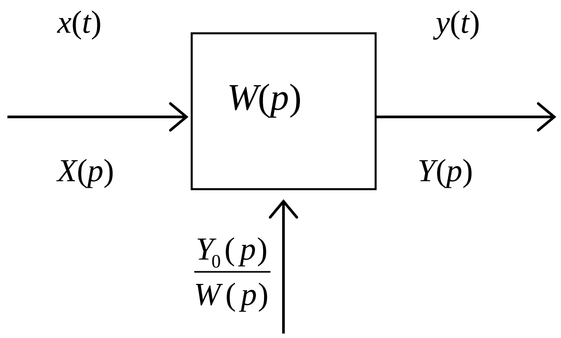
$Y(p) = W(p)X(p) + Y_0(p)$ передаточной функцией является $Y_0(p)$?

Вопрос 7. Верно ли, что в модели



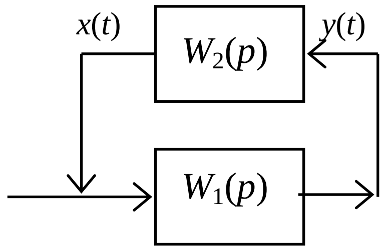
$Y(p) = W(p)X(p) + Y_0(p)$ свободное движение определяется функцией $X(p)$?

Вопрос 8. Верно ли, что в модели



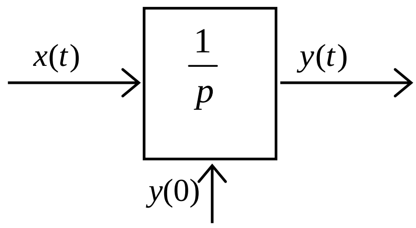
$Y(p) = W(p)X(p) + Y_0(p)$ свободное движение определяется функцией $Y_0(p)$?

Вопрос 9. Верно ли, что система



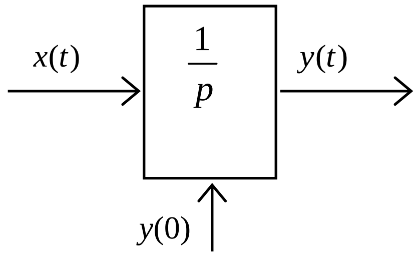
есть система с обратной связью?

Вопрос 10. Верно ли, что модель



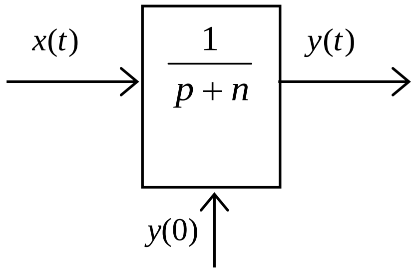
есть интегрирующее звено?

Вопрос 11. Верно ли, что модель



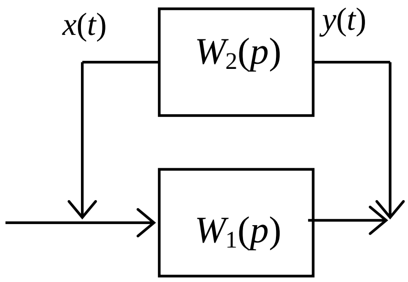
есть инерциальное звено первого порядка?

Вопрос 12. Верно ли, что модель



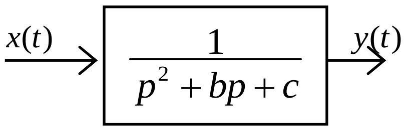
есть инерционное звено первого порядка с последовательно соединенным пропорциональным звеном?

Вопрос 13. Верно ли, что система



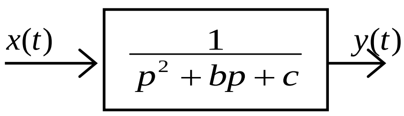
есть система с обратной связью?

Вопрос 14. Верно ли, что звено



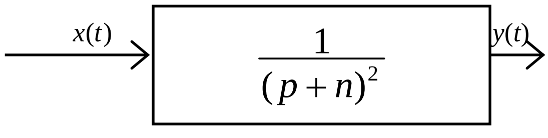
при $b>0,\ b^2-4c>0$ можно представить в виде параллельно соединенных инерционных звеньев и пропорционального звена?

Вопрос 15. Верно ли, что звено



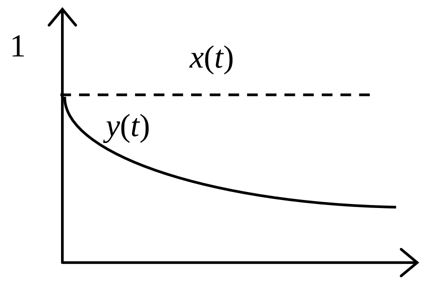
при $b>0,\ b^2-4c>0$ можно представить в виде двух последовательно соединенных инерционных звеньев и пропорционального звена?

Вопрос 16. Верно ли, что звено



можно представить в виде двух параллельно соединенных инерционных звеньев первого порядка?

Вопрос 17. Верно ли, что реакция $y(t)$ инерционного звена первого порядка при воздействии $x(t) \equiv 1$ и $y(0) = 0$ имеет следующий вид?



Самостоятельная работа № 4

Модель динамики основных производственных фондов

Упражнение 1. Модель динамики основных производственных фондов (ОПФ) с учетом остаточной стоимости F имеет вид $v = i + nF$, где v, i – прирост валовых капиталовложений и чистые инвестиции в единицу времени. Найти функции $F(t)$ и $i(t)$ и построить их графики:

1) $v(t) = 2$, $n = \frac{1}{10}$, $F(0) = 15$;

2) $v(t) = e^{-t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 10$;

3) $v(t) = t$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 100$;

4) $v(t) = e^{-t}$, $n = \frac{1}{4}$, $F(0) = 36$;

5) $v(t) = e^{-2t}$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 18$;

6) $v(t) = 3$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 7$;

7) $v(t) = 1 - e^{-\frac{1}{5}t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 5$;

8) $v(t) = 0$, $n = \frac{1}{10}$, $F(0) = 15$;

9) $v(t) = e^{t}$, $n = \frac{1}{5}$, $F(0) = 10$;

10) $v(t) = t^2$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 100$;

11) $v(t) = 1 + t$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 10$;

12) $v(t) = t^3$, $n = \frac{1}{2}$, $F(0) = 10$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Симонов Пётр Михайлович

Экономико-математическое моделирование

Часть первая

Учебное пособие

Редактор *Л. А. Богданова*
Корректор *Л. А. Семицветова*
Компьютерная верстка: *Л. Н. Калинина, П. М. Симонов, М. В. Дудина*

Объем данных 3,45 Мб
Подписано к использованию 08.11.2019

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15