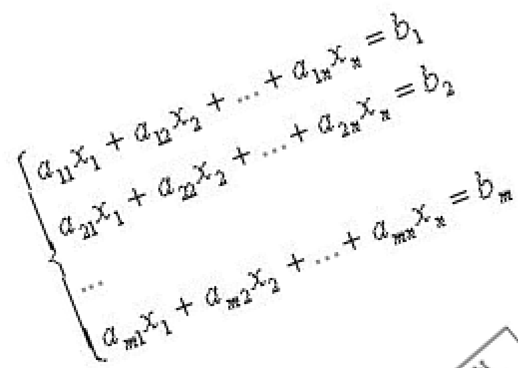
Мамыралиева А.Т., Аскарова А.К., Карбекова А.Б.



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

(Учебное пособие)

Жалалабат 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ

Жалалабатский государственный университет

Кафедра: Математические методы и экономическая теория

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
(МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ)

Жалалабат 2008

Предисловие

Данное учебное пособие написано на основе Государственного стандарта. Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с математическими методами и моделями исследования операций.

Изложены теоретические основы задач линейного и нелинейного программирования и численные методы их решения, а также задачи целочисленного программирования, их экономические приложения и методы решения, задачи управления запасами, сетевые модели, системы массового обслуживание и метод динамического программирования.

При изучении предмета «Математические методы и модели исследования операций» студенту потребуется знание общего курса высшей математики, теории вероятностей, математической статистики.

Он должен свободно владеть математическим аппаратом, необходимых для решения теоретических и практических задач экономики и планирования. Кроме того от него требуются знания и навыки по программированию на ЭВМ, а также умение пользоваться персональными ЭВМ.

В данной работе основное внимание уделяется приложениям математических методов в экономике. По этой причине в данном пособии приводится достаточное количество содержательных примеров, иллюстрирующих приемы математического моделирования экономических ситуаций.

ОПД.Г. Математические методы и модели исследование операций

Экономическое приложение (примеры типовых задач). Теория линейного программирования. Теория двойственности и экономические приложение. Численные методы решения задач линейного программирования. Задачи целочисленного программирования, их экономические приложения и методы решения. Общая теория математического программирования. Теория множителей Лагранжа, теорема Куна-Такера. Задачи управления запасами, сетевые модели, системы массового обслуживание. Метод динамического программирования.

Тема №1. Введение. Экономическое приложение (примеры типовых задач)

Впервые математические модели были использованы для решения практической задачи в 30-х годах в Великобритании при создании системы противовоздушной обороны. Для разработки данной системы были привлечены ученые различных специальностей. Система создавалась в условиях неопределенности относительно возможных действий противника, поэтому исследования проводились на адекватных математических моделях. В это время впервые был применен термин: «операционное исследование», подразумевающий исследования военной операции. В последующие годы операционные исследования или исследования операций развиваются как наука, результаты которой применяются для выбора оптимальных решений при управлении реальными процессами и системами.

Решения человек принимал всегда и во всех сферах своей деятельности. Раньше хотели, чтобы принимаемые решения всегда были правильными. Теперь принято говорить, что решения должны быть оптимальными. Чем сложнее объект управления, тем труднее принять решение, и, следовательно, тем легче допустить ошибку. Вопросам принятия решений на основе применения ЭВМ и математических моделей посвящена новая наука ***«Исследование операций»***, приобретающая в последние годы все более обширное поле приложений. Эта наука сравнительно молодая, ее границы и содержание нельзя считать четко определенными.

Некоторые ученые под «исследованием операций» понимают, главным образом, математические методы оптимизации, такие как линейные, нелинейные, динамическое программирование. Другие к исследованию операций подходят с позиции теории игр и статистических решений. Наконец, некоторые ученые вкладывают в понятие «исследование операций» чрезмерно широкий смысл, считая ее основой системного анализа и «наукой наук».

Под термином ***«исследование операций»*** мы будем понимать применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Окончательно термин «исследование операций» закрепился в конце Второй мировой войны, когда в вооруженных силах США были сформированы специальные группы математиков и программистов, в задачу которых входила подготовка решений для командующих боевыми действиями. В дальнейшем исследование операций расширило область своих применений на самые разные области практики: экономика, транспорт, связь и даже охрана природы.

Чтобы человеку принять решение без ЭВМ, зачастую ничего не надо, кроме опыта и интуиции. Правда, никакой гарантии правильности, а тем более оптимальности при этом нет. Подчеркнем, что ЭВМ никаких решений не принимает. Решение принимает человек (лицо, принимающий решение - ЛПР), а ЭВМ только помогает найти варианты решений. Непременное присутствие человека (как окончательный инстанции принятия решений) не отменяется даже при наличии полностью автоматизированной системы управления. Нельзя забывать о том, что само создание управляющего алгоритма, выбор одного из возможных его вариантов, есть тоже решение. По мере автоматизации управления функции человека перемещаются с одного уровня управления на другой - высший.

Выбор задачи - важнейший вопрос. Какие основные требования должна удовлетворять задача? Таких требований два:

- Должно существовать, как минимум, два варианта ее решения (ведь если вариант один, значит и выбирать не из чего);
- Надо четко знать в каком смысле искомое решение должно быть наилучшим (кто не знает, куда ему плыть - тому нет и попутного ветра).

Выбор задачи завершается ее содержательной постановкой. Когда производится содержательная постановка задачи, к ней привлекаются специалисты в предметной области. Они прекрасно знают свой конкретный предмет, но не всегда представляют, что требуется для формализации задачи и представления ее в виде математической модели.

Хорошую модель составить не просто. Известный математик Р.Беллман сказал так: «Если мы попытаемся включить в нашу модель слишком много черт действительности, то захлебнемся в сложных уравнениях; если слишком упростим ее, то она перестанет удовлетворять нашим требованиям». Для выполнения успеха моделирования надо выполнить три правила, которые, по мнению древних, являются признаками мудрости. Эти правила применительно к задачам математического моделирования и формулируются так: учесть главные свойства моделируемого объекта; пренебрегать его второстепенными свойствами; уметь отделить главные свойства от второстепенных.

Составление модели - это искусство, творчество. Древние говорили: «Если двое смотрят на одно и то же, это не означает, что оба видят одно и то же». И слова древних греков: «Если двое делают одно и то же, это не значит, что получится одно и то же». Эти слова в полной мере относятся к составлению математических моделей. *Если математическая модель - это диагноз заболевания, то алгоритм - это метод лечения.*

<u>Можно выделить следующие основные этапы операционного исследования:</u>

- наблюдение явления и сбор исходных данных;
- постановка задачи;
- построение математической модели;
- расчет модели;
- тестирование модели и анализ выходных данных. Если полученные результаты не удовлетворяют исследователя, то следует либо вернуться на этап 3, т.е. предложить для решения задачи другую математическую модель; либо вернуться на этап 2, т.е. поставить задачу более корректно;
- применение результатов исследований.

Таким образом, операционное исследование является итерационным процессом, каждый следующий шаг которого приближает исследователя к решению стоящей перед ним проблемы. В центре операционного исследования находятся построение и расчет математической модели.

Человек сталкивается с необходимостью принятия решения, как в бытовой, так и служебной области своей деятельности. Принимаемые решения отличаются как по степени ответственности, так и по степени значимости последствий - от личных, до государственных масштабов. Различными аспектами проблем, связанных с выработкой управленческих решений, с "оптимальным" поведением людей» с пересечением интересов нескольких сторон, занимаются многие науки: экономика, социология, право и др.

В отличие от других подходов ИО анализирует эти проблемы с помощью математического аппарата. Это означает, что хотя бы некоторые данные, фигурирующие в формулировке задачи, должны иметь количественные выражения. Качественные данные (условия) проблемы учитываются дополнительно и являются своеобразным фоном для использования математических моделей.

Принятие решения всегда предполагает наличие лица или лиц, принимающих решение (ЛПР), цели, вариантов выбора решения (множество допустимых решений). Решения принимаются с учетом определенной обстановки, сопутствующих условий, предпосылок. Это те главные факторы, присущие любой задаче принятия решения, и которые обязательно должны быть отражены в математической модели.

Цель ЛПР - с учетом существующих условий принять то решение из множества допустимых в данной ситуации решений, которое наилучшим образом способствует достижению преследуемой им цели (оптимальное решение).

Неотъемлемой частью методологии ИО является всесторонний качественный и**,** количественный анализ проблемы, предшествующий ее математическому моделированию. Поэтому, говорят о системном анализе проблемы, предполагающем выполнение следующих компонент:

- доматематический (гуманитарный) анализ проблемы;
- математический анализ проблемы;
- применение результатов исследования на практике.

Проведение такого системного анализа каждой конкретной задачи должно осуществляться операционной группой, включающей: специалистов данной области (постановщиков проблем, заказчиков), математиков, экономистов, юристов, социологов, психологов и др.

Как не существует универсальных методов построения математических моделей, так и не существует универсальных методов руководящих принципов ИО**.** Каждое отдельное исследование имеет свои особенности. Это надо знать экономистам - как будущим постановщикам задач, заказчикам научных исследований, руководителям отделов маркетинга и т.д.

В ряде с наукой Исследование операций существует и другая наука, которая занимается управлением технических систем, исходя из оптимальности критерия качества, называемой «Теория оптимального управления».

Процедура экономико-математического моделирования заменяет дорогостоящие и трудоемкие натуральные эксперименты расчетами.

Пример 1. (Планирование суточного выпуска продукции).

Процесс изготовления изделий двух видов состоит в последовательной обработка каждого из них на трех станках. Известны: время эксплуатации каждого станка в сутки, обработки единицы каждого изделия на каждом станке, стоимость реализации единицы каждого изделия.

Требуется составить для фирмы план суточного выпуска изделий так, чтобы доход от их продажи был максимальным.

При анализе упомянутых важнейших факторов будем исходить только из условия задачи. Здесь:

ЛПР - планирующий орган (фирма);

цель - максимизация дохода от продажи выпущенных за сутки изделий двух видов;

принятие решения для ЛПР состоит в определении суточных объемов выпуска каждого из двух видов изделий;

возможности ЛПР ограничены временными ресурсами эксплуатации станков трех видов - о других ограничениях или условиях в задаче ничего не говорится.

После выявления важнейших факторов нужно анализировать все параметры задачи: значение каких параметров известно (задано), какие параметры являются неизвестными (искомыми) величинами; какими из параметров мы можем управлять (управляемые переменные), а какими нет (неуправляемые параметры).

В нашем примере известными являются следующие параметры:

- суточная норма b_1 эксплуатации станка 1;
- суточная норма b_2эксплуатации станка 2;
- суточная норма b_3 эксплуатации станка 3;
- время a_{ij} обработки единицы изделия вида i (i=l,2) на станке типа j (j=1,2,3);
- стоимость c_1 (продажи) единицы изделия вида 1;
- стоимость c_2 (продажи) единицы изделия вида 2;

Все эти параметры являются неуправляемыми, т.к. они заданы (их значения можно найти в справочниках, нормативах или определить из прошлого опыта). Неизвестными или искомыми являются следующие величины:

- объем суточного выпуска изделия вида 1;
- объем суточного выпуски изделия вида 2.

Эти два параметра можно считать управляемыми, т.к. фирма сама определяет их величину (исходя из реальных условий).

Далее для составления математической модели задачи нужно ввести систему обозначений неизвестных параметров задачи.

В нашем примере обозначим:

x_1 - объем суточного выпуска изделия вида 1,

x_2 - объем суточного выпуска изделия вида 2.

Тогда доход от продажи x_1 и x_2 есть: $c_1 x_1 + c_2 x_2$,

а время, необходимое для обработки x_1, x_2 единиц изделий на станке j, есть $a_{ij} x_1 + a_{ij} x_2$ (j=l,2,3).

Теперь первоначальную задачу можно сформулировать математически: максимизировать $c_1 x_1 + c_2 x_2$, выбирая x_1 и x_2 из условия

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \le b_1,$$
$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2,$$
$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \le b_3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Условия неотрицательности переменных следует из смысла величин x_1 и x_2 - это дополнение модели недостающими сведениями. Полученную задачу запишем более компактно:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max\ ,$$

при ограничениях

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \le b_1,$$
$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2,$$
$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \le b_3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Это есть задача математического программирования с целевой функцией $c_1 x_1 + c_2 x_2$ и множеством допустимых решений X, которое описывается пятью неравенствами (на плоскости это есть многоугольник, образованный пересечением пяти полуплоскостей).

Мы рассмотрели модель одной частной задачи принятия решения. Для выяснения общей структуры таких задач введем общие обозначения.

Обозначим через N множество сторон, принимающих участие в данной конкретной задаче принятия решения:

$$N=\{1,2,...,n\},$$

где каждый элемент i множества N называется лицом, принимающим решение (ЛПР), например, отдельная личность, фирма, плановый орган большого концерна, правительства и др. Каждый элемент $i \in N$ характеризуется своими возможностями. Обозначим через X_i множество всех его допустимых решений (стратегий, альтернатив). Предположим, что такие множества математически описаны для всех участников:

$X_1, X_2, ..., X_n$.

После этого процесс принятия решения всеми ЛПР сводится к следующему формальному акту: каждое ЛПР выбирает конкретный элемент $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$ из своего допустимого множества решений. В результате получается набор $x = (x_1, ..., x_n)$ выбранных решений, который мы называем ситуацией.

Формализация целей принятия решения осуществляется по следующей схеме. Тем или иным способом строятся аналитические законы (функции) $f_1, ..., f_n$, ставящие в соответствие каждой ситуации x набор из n чисел

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x).$$

Функция $f_i(x) = f_i(x_1, ..., x_n)$ называется критерием качества i-го ЛПР. Число $f_i(x)$ является количественной оценкой ситуации x для i-го ЛПР с точки зрения преследуемой им цели. Поэтому в модели цель i-го участника формализуется так: выбрать такое свое решение $x_i \in X_i$, чтобы добиться возможно большего значения функции f_i. Однако достижение этой цели полностью от него не зависит в виду наличия других сторон, влияющих на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей. Этот факт пересечения интересов (конфликтность) отражается в том, что функция f_i помимо x_i зависит и от остальных переменных x_j $(i \neq j)$. Поэтому в моделях принятия решения со многими участниками применяются более сложные принципы оптимального поведения, чем прямая максимизация или минимизация критерия качества.

Наконец, пусть каким-то образом (математически) описаны все те условия, при которых происходит принятие решения. Совокупность всех этих условий, выступающих в модели в виде некоторых уравнений связи, обозначим одним символом Σ. Математически система Σ содержит описание связей между управляемыми и неуправляемыми переменными, описание влияния случайных факторов, учет динамических характеристик и др.

Таким образом, общая структура задачи принятия решения со многими участниками выглядит так:

$$<N; X_1...., Xn; f_1....fn; \Sigma > \qquad (1)$$

Цель математического моделирования - для поставленной специалистами конкретной задачи получить конкретное описание элементов структуры (1). Надо заметить, что математическое моделирование - эта весьма сложная задача, требующей от разработчиков больших трудозатрат, навыков, знаний и может быть выполнена лишь при наличии необходимого объема предварительной содержательной информации.

Резюмируя, можем сказать, что основными элементами математической модели любой задачи принятия решения являются:

1. Множество ЛПР (N).
2. Критерии качества (f_1,...,fn).
3. Множества допустимых решений (X_1,...,Xn).
4. Ограничения на параметры задачи, предпосылки, уравнения связи.

Конкретизируя эти элементы, их характеристики и свойства, мы получаем тот или иной конкретный класс задач (класс моделей) принятия решения. Так, если N состоит только из одного элемента (n=1), а все условия и предпосылки исходной реальной задачи можно описать в виде множества допустимых решений этого единственного ЛПР, то из (1) получаем структуру задач оптимизации (экстремальных задач):

$$\langle X,f \rangle \qquad (2)$$

В схеме (2) ЛПР может рассматриваться как планирующий орган, множество допустимых решении X задается при помощи ограничений на возможности ЛПР, а критерий качества f называется целевой функцией. Задача оптимизации ставится так:

$$\underset{x\in X}{f(x)\to\max} \qquad (3)$$

$$\underset{x\in X}{f(x)\to\min} \qquad (4)$$

Это различная форма записи одной и той же задачи: (3) - задача на максимум, в которой требуется найти точку максимума x* функции f на множестве X; (4) -задача на минимум, в которой требуется найти точку минимума x** функции f на множестве X. Решениями (оптимальными) этих задач называются пары x* ,f(x*) и x** , f(x**) соответственно.

Для построения математической модели конкретной задачи рекомендуется выполнить следующую последовательность работ:

1. Изучение условия задачи (предметной области).
2. Определение важнейших факторов.
3. Выделение известных и неизвестных параметров.

4. Выявление управляемых и неуправляемых параметров.

5. Дополнение условия задачи недостающими сведениями.

6. Введение системы обозначений.

7. Составление математической модели задачи (математическое выражение важнейших факторов, соотношений и связей между параметрами).

В приведенных ниже примерах составления моделей проследите эти этапы, которые мы выполним без комментариев

Пример 2. (Размещение заказов). Фирма получила заказ на несколько тысяч новых изделий, собирающихся из отдельных блоков. Руководство фирмы приняло решение разместить заказы на изготовление n блоков и выбрало n фирм-поставщиков. Каждый заказ настолько велик, что фирма-поставщик не может выполнить более одного заказа. Каждому поставщику предложено определить стоимость выполнения заказа, т.е. цену, по которой он готов поставить фирме различные блоки. Фирма должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом свои общие затраты на приобретение комплектующих узлов со стороны.

Обозначим: i - номер (название) блока, i = 1,....n; j - номер (название) фирмы-поставщика, j= 1,...,n; c_{ij} - стоимость выполнения i-го блока j-ой фирмой (заданное число). Кроме того, введем для каждого i и j число.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если заказ i выполняется фирмой j} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Целевая функция, имеющая смысл общих затрат на покупку комплектующих блоков, запишется так

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{n1}x_{n1} + c_{n2}x_{n2} + ... + c_{nn}x_{nn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Ограничения задачи (на переменные x_{ij}) имеют следующий смысл:

1) каждый i-й блок должен быть выполнен (каким-либо поставщиком);

2) каждая фирма-поставщик j должна выполнить один (какой-либо)

блок .

Математически эти условия запишутся соответственно:

$$x_{i1}+x_{i2} +\ldots+ x_{in} = 1,$$

$$x_{1j}+x_{2j} +\ldots+ x_{nj} = 1.$$

Таким образом, приходим к следующей оптимизационной задаче (модели):

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n,$$

x_{ij} = 0 или 1 для всех i,j.

Пример 3 (Выбор портфеля ценных бумаг). Специалисту по финансовому анализу, работающему в банке (или в страховой компании) требуется определить наилучший набор акций, облигации и других ценных бумаг на выделенную сумму с целью минимизации риска, связанного с приобретением набора ценных бумаг.

Прибыль к концу планового периода на каждый доллар, вложенный в бумагу j-го вида, характеризуется двумя показателями: aj - фактическая прибыль (случайное число), αj - ожидаемая прибыль. Требуется, чтобы ожидаемая прибыль на доллар инвестиций была для всего набора ценных бумаг не ниже заданной величины b.

Для получения модели примем все средства, выделенные на покупку ценных бумаг, равными единице и обозначим через x_j - долю от всех средств, выделяемую для приобретения ценных бумаг вида j.

Риск учитывается при помощи ковариации (см. теорию вероятностей)

$$\sigma_{ij} = M\,(a_i, - \alpha_i)\,(a_j - \alpha_j)$$

прибыли для ценных бумаг вида i и вида j.

Математическая модель имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ge b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$x_j \ge 0$, j=1,…,n

Здесь n - число разновидностей ценных бумаг. Целевая функция имеет смысл дисперсии фактической прибыли (рассеивание фактической прибыли от ожидаемой), первое ограничение есть условие на ожидаемую прибыль, а последнее – не превышение средств, выделенных на покупку ценных бумаг.

Пример 4. **(Оптимизация системы обслуживания)**

Система обслуживания состоит из n типов различных приборов (напр. кассы в магазинах, телефонные линии, автозаправочные колонки и т.д.). Каждый прибор в любой момент времени обслуживает не более одной заявки (напр. покупателя, телефонного разговора, автомобиля и т.д.). Известно количество приборов j-го типа и число заявок i-го типа, прибывших в систему в момент времени t. Известна также эффективность j-го прибора при обслуживании заявки i-го вида.

Требуется распределить свободные приборы по заявкам так, чтобы суммарная эффективность была наибольшей.

Для составления модели сначала введем обозначения свободных величин:

N_j - количество приборов j-го типа,

d_i^t - число заявок i-го типа в момент времени t.

μ_{ij} - эффективность j-го прибора при обслуживании заявки i-го вида. Обозначим искомую величину:

x_{ij} - число приборов j-го вида, отведенных для обслуживания заявок i-го типа.

Этих данных достаточно для составления математической модели задачи:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le N,\ j = 1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le d_i^{\,t},\ i = 1,\dots,m;$$

x_{ij} - целые неотрицательные числа для всех i**,** j, здесь m и n заданные числа видов заявок и приборов.

Пример 5. (**Выбор оптимального вида посевной культуры).**

Фермер может посеять одну из трех культур: A_1, A_2 или A_3. Урожаи этих культур во многом зависят от погоды. Требуется установить, какую из этих культур сеять, чтобы обеспечить наибольший доход, если известны цена a_i одного центнера культуры A_i, i = 1,2,3, и средняя урожайность каждой культуры в зависимости от погоды (будет ли лето засушливым нормальным или дождливым). Достоверный прогноз погоды отсутствует.

Обозначим через h_{ij} - урожайность i-й культуры при погодных условиях j (здесь j=1 - обозначение засушливого лета, j=2 - нормального лета, j=3 – дождливого лета). Числа h_{ij}, как и числа a_i, заданы (известны). Реально может иметь место только одна из ситуаций (i,j), i=l, 2, 3; j =l, 2, 3. Причем (i,j) означает, что посеяна культура A_j, а погода находится в состоянии j. Всего таких ситуаций девять. JIПР (фермер) может выбрать только вид культуры, состояние погоды от него не зависит.

Если фермер засеял культуру A_1, то он может получить (в зависимости от состояния погоды) один из следующих доходов:

a_1h_{11}, a_1h_{12}, a_1h_{13}

соответственно для культуры A_2 :

a_2h_{21}, a_2h_{22}, a_2h_{23}

и для культуры A_3:

a_3h_{31}, a_3h_{32}, a_3h_{33}

Напишем все эти исходы в одну таблицу (матрицу):

$$A = \begin{bmatrix} a_1h_{11}, a_1h_{12}, a_1h_{13} \\ a_2h_{21}, a_2h_{22}, a_2h_{23} \\ a_3h_{31}, a_3h_{32}, a_3h_{33} \end{bmatrix}$$

Эта матрица и есть математическая модель исходной задачи. В ней действие фермера сводится к выбору одной из строк матрицы (одной из трех стратегий). Его доход зависит от "выбора" природой одного из своих состояний (одного ряда трех столбцов матрицы). Например, если фермер посеял культуру A_2, а лето получилось дождливым, то доход фермера равен a_2h_{23}.

Тема №2. Основы теории линейного программирования.

Основные сведения из теории линейного программирования.

Линейное программирование рассматривается как революционное достижение, давшее человеку способность формулировать общие цели и находить посредством симплекс-метода оптимальные решения для широкого класса практических задач принятия решений большой сложности.

В реальном мире планирование все больше специализируется вследствие существования большого числа групп с особыми интересами и многообразием целей. Много усилий предстоит затратить на создание более упорядоченной инфраструктуры для принятия решений, в которой может быть реализован полный потенциал моделей математического программирования.

С момента появления его замысла в 1947 г., вызванного практикой военного планирования, линейное программирование получило широкое распространение. В сфере науки математики, экономисты и те, кто называют себя исследователями операций или специалистами по теории менеджмента, написали сотни книг по этому предмету и, конечно, несчетное количество статей.

Достаточно интересно, что, несмотря на его широкое применение для решения повседневных задач, линейное программирование было неизвестно до 1947 года. Правда, две или три личности могли осознавать его потенциал, например, Фурье в 1823 году и де Лаваль Пуссен в 1911 году. Но это были особые случаи. Их работы были скоро забыты. Л. Канторович в 1939 г. добился многообещающих результатов, которыми в СССР пренебрегли. Лишь после того, как на Западе были выполнены основные работы по программированию, примерно в 1959 г. стала известна статья Канторовича. Представление о том, как скудны были попытки исследований в этом направлении, дает Т.Моцкин в своей докторской диссертации, приводя список лишь из 42 статей, написанных до 1936 г. и посвященных системам линейных неравенств, среди авторов которых значатся Стоукс, Дайнз, Маккой, Фаркаш.

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

Несколько слов о самом термине линейное программирование. Он требует правильного понимания. В данном случае программирование - это, конечно, не составление программ для ЭВМ. Программирование здесь должно интерпретироваться как планирование, формирование планов, разработка программы действий.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования (кроме того, сюда относят: целочисленное, динамическое, нелинейное, параметрическое программирование). Это объясняется следующим:

- математические модели большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- данный тип задач в настоящее время наиболее изучен. Для него разработаны специальные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие программы для ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли широкое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: целевую функцию, оптимальное значение которой (максимум или минимум) требуется отыскать; ограничения в виде системы линейных уравнений или неравенств; требование неотрицательность переменных.

Определение 1:

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом:

найти переменные $x_1,x_2,...,x_n$ задачи, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$F=c_1 x_1 +c_2x_2 +...+c_nx_n \rightarrow \max(\min) , (2.1)$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_{1,} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\
a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m,}
\end{cases}
\qquad (2.2)
$$

и удовлетворяют системе ограничений (2.2),

где x = (x_1, x_2,..., x_n) -точка n-мерного пространства, которую называют планом (ЗЛП); c_1,...,c_n - постоянные коэффициенты целевой функции, не все равные нулю; a_{ij}, b_j, $b_j \ge 0$ (i =1, т; j =1, n) - заданные постоянные величины.

Определение 2: Стандартной задачей линейного программирования называется задача нахождения переменных $x_1,x_2,...,x_n$ которые обеспечивают экстремум целевой функции (2.1) и удовлетворяют системе ограничений

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1, m \\
x_j \ge 0, \quad j = 1, n
\end{cases}
\qquad (2.3)
$$

Определение 3: Канонической задачей линейного программирования называется задача нахождения переменных $x_1,x_2,...,x_n$, которые обеспечивают экстремум целевой функции (2.1) и удовлетворяют системе ограничений

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, m \\
x_j \ge 0, \quad j = 1, n
\end{cases}
\qquad (2.4)
$$

Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.

Приведение ЗЛП к каноническому виду осуществляется добавлением в левую часть соответствующего ограничения вида (2.2) r-ой дополнительной переменной $x_{n+r} \ge 0$ со знаком минус в случае ограничения типа ≥ и со знаком плюс в случае ограничения типа ≤ .

Любая переменная xj, на которую не наложено условие неотрицательность, заменяется

$$x_j = x_j^{'} - x_j^{''},\ x_j^{'} \geq 0,\ x_j^{''} \geq 0$$

Задача вычисления минимума целевой функции F(x) при ограничениях (2.1) эквивалентна задаче нахождения максимума целевой функции (-F(x)) и наоборот.

Каноническую задачу линейного программирования можно привести к общей задаче линейного программирования, осуществляя приведение системы ограничений (2.4) при помощи элементарных преобразований Гаусса-Жордана к следующему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1,r}\tilde{x}_1 = b_{1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{k,r}\tilde{x}_k = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m,r}x_r + \tilde{x}_m = b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, r;\ \tilde{x}_i \geq 0, \quad i = 1, m \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\tilde{x}_i$ - базисные переменные.

Отбрасывая переменные $\tilde{x}_i$, заменим равенства (2.5) на неравенства и изменим целевую функцию, подставив в нее значения $\tilde{x}_i$ из указанных уравнений (2.5).

Определение 4: Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется совокупность точек $\overline{x}$ =(x_1,x_2,...,x_n) n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют системе ограничений.

Множество допустимых решений задачи образует область допустимых решений.

Определение 5: Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

Свойства задач линейного программирования

1. Допустимое множество задачи ЛП либо пусто, либо является выпуклым многогранником в R^n Оно может быть (f) ограниченным, так и неограниченным; в любом случае это замкнутый многогранник.

2. Если допустимое множество не пусто, а целевая функция ограничена сверху (для задачи максимизации, а для задачи

минимизации - ограничена снизу) на этом множестве, то задача ЛП имеет оптимальное решение.

3. Оптимальные решения задачи ЛП (если они существуют) всегда находятся на границе допустимого множества. Точнее, если существует единственное оптимальное решение, то им является какая-либо вершина многогранника допустимых решений; если две или несколько вершин являются оптимальными решениями, то любая их выпуклая комбинация также является оптимальным решением (т.е. существует бесконечное множество точек максимума или минимума).

Основные теоремы линейного программирования

Для обоснования методов решения задач линейного программирования сформулируем ряд важнейших теорем, опуская их аналитические доказательства. Уяснить смысл каждой из теорем поможет понятие о геометрической интерпретации решения ЗЛП.

Однако сначала напомним о некоторых понятиях, важных с точки зрения дальнейшего разговора.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются основными, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные m-n переменных называются неосновными (или свободными).

Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называется всякое ее решение, в котором все неосновные переменные имеют нулевые значения.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

В частном случае, когда в систему ограничений входят только две переменные x_1 и x_2, это множество можно изобразить на плоскости. Так как речь идет о допустимых решениях ($x_1, x_2 \geq 0$), то соответствующее множество будет располагаться в первой четверти декартовой системы координат. Это множество может быть замкнутым (многоугольник), незамкнутым (неограниченная многогранная область), состоять из единственной точки и, наконец, система ограничений-неравенств может быть противоречивой.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек множества допустимых решений.

Из теоремы 2 можно сделать вывод о том, что единственность оптимального решения может нарушаться, причем, если решение не единственное, то таких оптимальных решений будет бесчисленное множество (все точки отрезка, соединяющего соответствующие угловые точки).

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений, и наоборот.

Следствием из теорем 2 и 3 является утверждение о том, что оптимальное решение (оптимальные решения) задачи линейного программирования, заданной (или приведенной) ограничениями-уравнениями, совпадает с допустимым базисным решением (допустимыми базисными решениями) системы ограничений.

Таким образом, оптимальное решение ЗЛП следует искать среди конечного числа допустимых базисных решений.

Методами решения задач ЛП являются: графический метод (в случае двух, трех переменных), симплекс-метод или его разновидности (в общем случае).

Широкое распространение в исследованиях экономических процессов получили линейные модели. К задачам линейного программирования приводят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов (задача о раскрое, смесях, диете и т.д.). Почти все линейные модели сводятся к системам алгебраических линейных уравнений или неравенств.

Пример 1

Филиал коммерческого банка получил задание зарегистрировать в течение рабочего дня как можно больше ценных бумаг четырех типов. Регистрация каждой ценной бумаги должна пройти по трем инстанциям. Время (в минутах), затрачиваемое на регистрацию каждого типа ценной бумаги на каждой из инстанций и нормы времени, отводимые администрацией банка каждой инстанции, приведены в следующей таблице:

Инстанция	тип ценной бумаги				Норма времени
	А	Б	С	Д	
I	5	3	2	4	120
II	10	9	8	1	180
III	6	3	4	10	100

Записать в математической форме условия выполнения задания, если за рабочий день банк должен зарегистрировать максимальное количество ценных бумаг.

Решение:

Обозначим через x_1, , x_2 , x_3, x_4, количество ценных бумаг соответственно типа: А, Б, С, Д, предназначенных для регистрации. Регистрация бумаг типа А на первой инстанции займет $5x_1$, минут, типа Б - 3 x_2, типа С - 2 x_3, типа Д- $4x_4$. Все время обработки ценных бумаг на первой инстанции составит $5x_1 +3x_2 +2x_3+4x_4$ и не должно превышать 120 минут.

$$5x_1+3x_2 +2x_3 +4x_4 \leq 120.$$

Аналогично составляются соотношения для второй и третьей инстанций.

$$10x_1 +9x_2 +8x_3 +x_4 \leq 180,$$

$$6x_1+3x_2+4x_3+10x_4 \leq 100.$$

Кроме того, из условия задачи следует, что неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 должны удовлетворять условию не отрицательности:

$$x_1\geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Количество всех обработанных ценных бумаг должно быть максимальным.

Таким образом, получили задачу линейного программирования:

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_4 \leq 180 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 \leq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

полученный оптимальный план имеет следующий вид:

$$x, = 0,\ x_2 \approx 20,\ x_3 = 0,\ x_4 \approx 4,\ f_{max} \approx 24.$$

Пример 2. (Задача о смесях).

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем - не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы (%)	0.35	0.35	0.30	0.20
Ресурсы (т)	700	600	500	300
Себестоимость	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76,чтобы его себестоимость была минимальной.

Решение:

Для решения этой задачи сформулируем ее математическую модель. Введем обозначения: пусть x_j (j= 1,2,3,4) -количество в смеси компонента с номером j. С учетом этих обозначений имеем задачу (критерий оптимальности - «минимум себестоимости»):

$$f(x) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000 & (1) \\ 0.35x_1 + 0.35x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 \leq 0.3 \cdot 1000 & (2) \\ x_1 \leq 700, x_2 \leq 600, x_3 \leq 500, x_4 \leq 300 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ограничение (1) отражает необходимость получения заданного количества смеси (1000 т), (2) и (3) - ограничения по октановому числу и содержанию серы в смеси, остальные - ограничения на имеющиеся объемы соответствующих ресурсов (компонентов) и их неотрицательность.

Полученная математическая задача - задача линейного программирования. Она может быть решена симплекс-методом, который будет рассмотрен далее. В результате решения получится оптимальное решение: x_1 = 571 т, x_2 = 0, x_3 = 143 т, x_4 = 286 т.

Подставляя найденное решение в функцию себестоимости, имеем минимальное значение 57 160 (ден. ед.), что отвечает оптимальному решению задачи.

Пример 3. (использование ограниченных ресурсов).

На участке строящейся дороги необходимо вывезти 20000 м^3 каменных материалов. В районе строительства имеются три карьера с запасами 8000 м^3, 9000 м^3, 10000 м^3. Для погрузки материалов используются экскаваторы, имеющие производительность 250 м^3 в смену в карьерах 1 и 2 и 500 м^3 в смену в карьере 3.

Эти карьеры обеспечивают каменными материалами ряд других строящихся объектов. На погрузку материалов рассматриваемого участка выделен для экскаваторов общий лимит 60 машино-смен с правом использования его по усмотрению строителей.

Транспортные затрать на 1 перевозку материалов характеризуются показателями: для перевозки 10000 м^3 материалов, из карьера 1 требуется 1000 автомобиле-смен, из карьера 2 - 1350, из карьера 3 - 1700 автомобиле-смен. Требуется найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные затраты.

Решение:

Сформулируем экономико-математическую модель задачи. Примем за единицу измерения количества материалов 10000 м^3. Обозначим через x_1 (j=1,2,3) объем добычи материалов в соответствующих карьерах. Необходимо минимизировать транспортные расходы.

$$f(x) = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3 \to \min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 = 2{,}0 & (1) \\ 40\tilde{o}_1 + 40\tilde{o}_2 + 20\tilde{o}_3 \le 60 & (2) \\ 0 \le x_1 \le 0{,}8 & (3) \\ 0 \le \tilde{o}_2 \le 0{,}9, & (4) \\ 0 \le \tilde{o}_3 \le 1{,}0. & (5) \end{cases}$$

Условие (1) отражает потребность в материалах, (2) - ограничение по наличию ресурса «фонд рабочего времени экскаваторов». Условия (3) - (5) отражают тот факт, что добыча материалов идет в соответствующих карьерах. Полученная задача - задача линейного программирования. Решив ее симплекс-методом, найдем оптимальный план (решение):

$x_1 = 0{,}8$ (8000 м^3), $x_2 = 0{,}2$ (2000 м^3), $x_3 = 1{,}0$ (10000 м^3).

Таким образом, из карьера 1 следует вывезти 8000 м^3 материалов, из карьера 2 - 2000 м^3 , из карьера 3 - 10000 м^3 . Это управленческое решение будет связано с минимальными транспортными затратами 2770 (автомобиле-смен).

Численные методы решения задач линейного программирования.

1. **Графический метод решения ЗЛП.**
2. **Симплекс-метод.**

Рассмотрим **геометрический метод решения ЗЛП** в случае функции двух переменных.

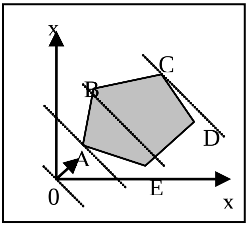
Было доказано, что оптимальное решение ЗЛП находится, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника решений.

Рассмотрим задачу в стандартной форме с двумя переменными.

$F=c_1x_1+c_2x_2+c_0 \rightarrow min\ (max),$

При ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1+ a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+ a_{n2}x_2 \le b_n\ , \end{cases}$$



при условии, что $x_1 \ge 0$,$x_2 \ge 0$.

Пусть геометрическим изображением системы ограничений является многоугольник ABCDE. Необходимо среди точек этого многоугольника найти такую точку, в которой линейная функция $F=c_1x_1+c_2x_2+c_0$ принимает максимальное (или минимальное) значение. Рассмотрим линии уровня функции F или $c_1x_1+c_2x_2=C$. Это уравнение прямой. Линии уровня функции F параллельны, т.к. их угловые коэффициенты определяются только соотношением между коэффициентами c_1 и c_2 и, следовательно, равны. Т.е., линии уровня функции F – это своеобразные «параллели», расположенные обычно под углом к осям координат.

Важное свойство линий уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону – только убывает. При фиксированном С рассмотрим линейную функцию. Чем больше значение С, тем больше значение линейной функции. Определив направление возрастания линейной функции, найдём точку, принадлежащую многоугольнику, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение.

Геометрическим изображением системы ограничений может служить и многоугольная область. Рассмотрим следующую задачу.

1. В суточный рацион включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причём продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед.

Стоимость питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта.	
		$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

<u>Решение:</u>

Обозначим x_1 – количество продукта питания $П_1$,

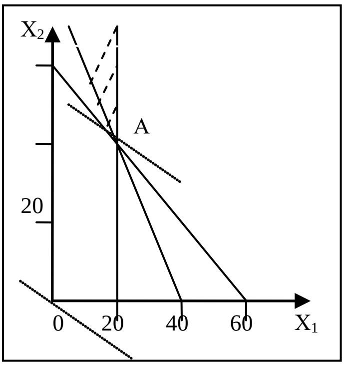
x_2 – количество продукта питания $П_2$.

$$F=2x_1+4x_2 \to min.$$

(суммарная стоимость) При ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 200, \\ 0{,}2x_1+0{,}2x_2 \ge 120, \\ 0{,}4x_1+0{,}2x_2 \ge 160. \end{cases}$$

Графическим решением системы ограничений является множество точек плоскости, называемое областью допустимых решений (ОДР). Линии уровня $2x_1+4x_2=0 \Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{2}x_1.$



Получаем, что минимальное значение, при заданных ограничениях на переменные, достигается в точке $A(200;400)$. $F(A)=2000$.

<u>*Ответ*</u>: наименьшая стоимость *2000* будет при рационе *200* ед. продукта $П_1$ и 400 ед. продукта $П_2$.

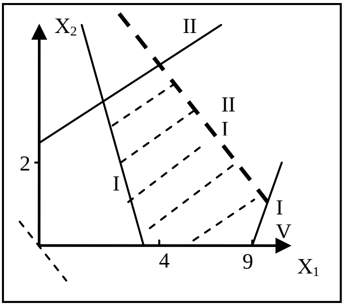
Не всегда бывает единственное оптимальное решение. Рассмотрим другую задачу.

2. $F=4x_1+4x_2 \to max$. При ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 7, \\ x_1-2x_2 \ge -5, \\ x_1+x_2 \le 14, \\ 2x_1-x_2 \le 18 \end{cases}$$

Решив, систему ограничений найдём ОДР. Линия уровня будет иметь вид $4x_1+4x_2=0 \Leftrightarrow x_2=-x_1$.

В данной задаче линия уровня с максимальным уровнем совпадает с граничной линией многоугольника решений. Найдём точку пересечения линии II с линией III:



$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x_1=14-x_1$$

$$x_1=\frac{23}{3}.$$

Найдём точку пересечения линии III с линией IV: $14-x_1=2x_1-18$. Отсюда $x_1=\frac{32}{3}$. Следовательно, $x_1=c,\ x_2=14-c,\ c\in[\frac{23}{3};\frac{32}{3}]$. Пусть $x_1=9\in[\frac{23}{3};\frac{32}{3}],\ x_2=5$.

$F=4\cdot9+4\cdot5=56.$

Ответ: $F_{max}=56$ при множестве оптимальных решений $x_1=c$, $x_2=14-c$, где $c\in[\frac{23}{3};\frac{32}{3}]$.

Рассмотренный **геометрический метод решения ЗЛП обладает рядом достоинств.** Он прост, нагляден, позволяет быстро и легко получить ответ.

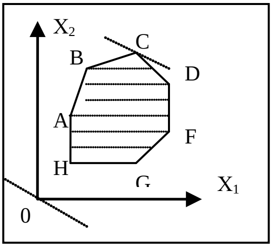
Однако есть и недостатки. Возникают «технические» погрешности, которые неизбежно возникают при приближенном построении графиков. Второй недостаток геометрического метода заключается в том, что многие величины, имеющие чёткий экономический смысл (например, такие, как остатки ресурсов производства), не выявляются при геометрическом решении задач. Его можно применять только в том случае, когда число переменных в стандартной задаче равно двум. Поэтому необходимы аналитические методы, позволяющие решать ЗЛП с любым числом переменных и выявить экономический смысл, входящих в них величин.

Одним их таких методов является **симплексный метод.**

Была рассмотрена теорема, из которой следует, что если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений. Поэтому решение ЗЛП может быть следующим: перебрать конечное число всех угловых точек многогранника решений и выбрать среди них ту, на которой функция цели принимает оптимальное решение. Однако, практическое осуществление такого перебора связано с трудностями, т.к. число решений может быть чрезвычайно велико.

Пусть ОДР изображается многоугольником ABCDEGH. Предположим,

что его угловая точка соответствует исходному допустимому решению. При беспорядочном наборе пришлось бы перебирать все 7 угловых точек многогранника. Однако, из чертежа видно, что после вершины А выгодно перейти к соседней вершине В, а затем – к оптимальной точке С. Вместо семи перебрали 3 вершины, последовательно улучшая линейную функцию.



Идея последовательного улучшения решения легла в основу универсального метода решения ЗЛП – симплексного метода. Для использования симплексного метода ЗЛП должна быть приведена к каноническому виду. Для реализации симплексного метода необходимо освоить 3 основных элемента:

- способ определения какого – либо первоначального допустимого решения
- правило перехода к лучшему решению
- критерий проверки оптимальности найденного решения.

Алгоритм конкретной реализации этих элементов рассмотрим на примере.

Практические расчёты при решении реальных задач симплексным методом выполняются в настоящее время с помощью компьютера, однако, если расчёты выполняются без ЭВМ, то удобно использовать симплексные таблицы.

Рассмотрим систему ограничений и линейную форму вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases};$$

$$Z_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$.

Используя метод Жордана-Гаусса, приведем записанную систему к виду, где выделены базисные переменные. Введем условные обозначения:

$x_1, x_2, \dots, x_r$ - базисные переменные;

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \alpha_{1r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{1n}x_n) \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2r+1}x_{r+1} + \alpha_{2r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \alpha_{rr+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{rn}x_n) \end{cases};$$

$$Z_{\min} = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+1} + \dots + \gamma_n x_n).$$

По последней системе ограничений и целевой функции Z построим табл. 1

Таблица 1

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_{r+2}	…	x_n
x_1 x_2	β_1 β_2	α_{1r+1} α_{2r+1}	α_{1r+2} α_{2r+1}	… …	α_{1n} α_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	α_{rr+1}	α_{rr+2}	…	α_{rn}
$Z_{\min}$	γ_0	γ_{r+1}	γ_{r+2}	…	γ_n

Данная таблица называется симплекс-таблицей. Все дальнейшие преобразования связаны с изменением содержания этой таблицы.

Алгоритм симплекс-метода сводится к следующему.

1. В последней строке симплекс-таблицы находят наименьший положительный элемент, не считая свободного члена. Столбец, соответствующий этому элементу, считается разрешающим.
2. Вычисляют отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс-отношение). Находят

наименьшее из этих симплекс-отношений, оно соответствует разрешающей строке.

3. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.
4. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к положительным элементам последней строки симплекс-таблицы.
5. После нахождения разрешающего элемента переходят к следующей таблице. Неизвестные переменные, соответствующие разрешающей строке и столбцу, меняют местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной и наоборот. Симплекс-таблица преобразована следующим образом (табл. 2):
6. Элемент табл. 2 соответствующий разрешающему элементу табл. 1, равен обратной величине разрешающего элемента.
7. Элементы строки табл. 2, соответствующие элементам разрешающей строки табл. 1, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 1 на разрешающий элемент,
8. Элементы столбца табл. 2, соответствующие элементам разрешающего столбца табл. 1, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 1 на разрешающий элемент и берутся с противоположным знаком.
9. Остальные элементы вычисляются по правилу прямоугольника: мысленно вычерчиваем прямоугольник в табл. 1, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом, а другая - с элементом, образ которого мы ищем; остальные две вершины определяются однозначно. Тогда искомый элемент из табл. 2 будет равен соответствующему элементу табл. 1 минус дробь, в знаменателе которой стоит разрешающий элемент, а в числителе - произведение элементов из двух неиспользованных вершин прямоугольника.
10. Как только получится таблица, в которой в последней строке все элементы отрицательны, считается, что минимум найден. Минимальное значение функции равно свободному члену в строке целевой функции, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных. Все свободные переменные в этом случае равны нулю.
11. Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача не имеет решений (минимум не достигается).

Преобразование симплекс-таблицы

Таблица 2

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_1	…	x_n
x_{r+2}	$\frac{\beta_1}{\alpha_{1r+2}}$	$\frac{\alpha_{1r+1}}{\alpha_{2r+2}}$	$\frac{1}{\alpha_{1r+2}}$	…	$\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1r+2}}$
x_2			$-\frac{\alpha_{2r+2}}{\alpha_{1r+2}}$	…	
…	…	…	…	…	…
x_r			$-\frac{\alpha_{rr+2}}{\alpha_{1r+2}}$	…	
$Z_{\min}$			$-\frac{\gamma_{r+2}}{\alpha_{1r+2}}$	…	

Пример 1. Решение задачи симплекс-методом:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5.$$

Приведем задачу к виду, допускающему применение симплекс-алгоритма:

$$x_3 = 1 - (-x_1 + x_2);$$

$$x_4 = 1 - (x_1 - x_2);$$

$$x_5 = 2 - (x_1 + x_2).$$

Подставим в выражение $Z_{\max}$ величины x_3, x_4, x_5:

$$Z_{\max} = 6x_1 - 7x_2 + 3.$$

По алгоритму целевая функция должна стремиться к минимуму:

$$Z_{\min} = -Z_{\max} = -6x_1 + 7x_2 - 3 = -3 - (6x_1 - 7x_2).$$

Составим симплекс-таблицу:

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_4	x_2
x_3	1	-1	1
x_1	1	$\boxed{1}$	-1
x_5	2	1	1
$Z_{\min}$	-3	6	-7

Разыскиваем в последней строке наименьший положительный элемент, в нашем примере он равен +6, первый столбец коэффициентов будет разрешающим. Определим отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Минимальное симплекс-отношение равно 1. Разрешающий элемент находится на пересечении строки переменной x_4 и столбца - x_1.

Переходим к следующей таблице, используя правило прямоугольника:

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_1	x_2
x_3	2	1	0
x_4	1	1	-1
x_5	1	-1	2
$Z_{\min}$	-9	-6	-1

В последней строке нет положительных элементов, следовательно, оптимальное решение найдено: $Z_{\min} = -9$; $X = (1; 0; 2, 0, 1)$; $Z_{\min} = - Z_{\max} = 9$

Пример 2. *Для производства трёх изделий A,B и C используются три вида ресурсов. Каждый из них используется в объёме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого* *из видов ресурсов на одно изделие и цена единицы изделий приведены в таблице.*

Вид ресурса	***Нормы затрат ресурсов на 1 изделие, кг***		
	A	*B*	*C*
1 *2* *3*	*4* *3* *1*	*2* *1* *2*	*1* *3* *5*
Цена изделия, у.е.	*10*	*14*	*12*

Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение оптимального дохода.

<u>Решение</u>.

x_1- количество выпускаемых изделий A

x_2- количество выпускаемых изделий B

x_3- количество выпускаемых изделий C.

Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$F=10x_1+14x_2+12\,x_3 \rightarrow max$$

при ограничениях:
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3 \le 180 \\ 3x_1+x_2+3x_3 \le 210 \\ x_1+2x_2+5x_3 \le 236 \end{cases}$$

Приведём систему к каноническому виду:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+x_4=180 \\ 3x_1+x_2+3x_3+x_5=210 \\ x_1+2x_2+5x_3+x_6=236. \end{cases}$$

Составляем таблицу

	x_1	x_2	X_3	x_4	x_5	x_6	Свободный член
x_4 x_5 X_6	4 3 1	2 1 2	1 3 5	1 0 0	0 1 0	0 0 1	180 210 236
F'	10	-14	-12	0	0	0	0

Определим ведущий элемент: $\min\left\{\frac{180}{2}, \frac{210}{1}, \frac{236}{2}\right\}$. Далее выполняем действия, следуя алгоритму.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободный член
X_2 x_5 X_6	2 1 -3	1 0 0	1/2 5/2 4	1/2 -1/2 -1	0 1 0	0 0 1	90 120 56
F’	18	0	-5	7	0	0	1260

$$\min\left\{\frac{90\cdot 2}{1},\frac{120\cdot 2}{5},\frac{56}{4}\right\}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободный член
x_2 x_5 X_3	19/8 23/8 -3/4	1 0 0	0 0 1	5/8 1/8 -1/4	0 1 0	-1/8 -5/8 1/4	83 85 14
F’	54/4	0	0	23/4	0	5/4	1330

Ответ:

Чтобы получить оптимальный доход, нужно выпускать *83* ед. изделия В, *14* ед. изделия С, а изделие А не выпускать. Оптимальный доход составит *1330* у.е. По решению задачи видим, что у предприятия остаются свободными 85 кг. второго вида ресурсов, 1 и 3 вид полностью расходуются.

Тема 3. Транспортная задача.

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции, производимой (хранимой) в нескольких пунктах производства (хранения).

Транспортная задача является представителем класса задач линейного программирования и поэтому обладает всеми качествами линейных оптимизационных задач, но одновременно она имеет и ряд дополнительных полезных свойств, которые позволили разработать специальные методы ее решения.

Частные постановки задачи рассмотрены рядом специалистов по транспорту, например О. Н. Толстым.

Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Ф. Хичкоку, поэтому в зарубежной литературе ее называют проблемой Хичкока.

Первый точный метод решения транспортной - задачи разработан Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным. Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Эти задачи являются исторически одними из первых, для решения которых использовалось линейное программирование. В зависимости от выбранного критерия эффективности различают транспортные задачи по пробегу, по стоимости, по времени, совместно по критериям пробега и стоимости, с ограничениями по пропускной способности дорог и транспорта, задачи в сетевой постановке и др.

Под термином "транспортные задачи" понимается широкий круг задач не только транспортного характера. Общим для них является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у ***m*** производителей (поставщиков), по ***n*** потребителям этих ресурсов. Различают два типа транспортных задач: по ***критерию стоимости*** (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию) и ***по критерию времени*** (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом:

Номер пункта производства (хранения) (i=1,2,…,m)

Номер пункта потребления (j=1,2,…,n)

Количество продукта, имеющиеся в i-ом пункте производства

Количество продукта, необходимое для j-го пункта потребления

Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения

Количество груза, планируемого к перевозке от i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах производства (хранения), необходимо распределить между n пунктами потребления. Стоимость перевозки единицы продукции известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были бы минимальными.

Примем следующие обозначения:

Тогда, при наличии баланса производства и потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

математическая модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом:

найти план перевозок

$X = (x_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$

минимизирующий общую стоимость всех перевозок

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условии, что из любого пункта производства вывозиться весь продукт

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ где } i = \overline{1, m} \quad (1)$$

и любому потребителю доставляется необходимое количества груза

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ где } j = \overline{1, n} \quad (2)$$

причем, по смыслу задачи

$x_{11} > 0$, …, $x_{mn} > 0$

Для решения транспортной задачи чаще всего применяется метод потенциалов, при котором вводят обозначение вектора симплексных множителей или потенциалов:

$$\mu(p_1, p_2, ..., p_m, q_1, q_2, ..., q_n)$$

Тогда:

$\Delta_{ij} = \mu A_{ij} - c_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$

Откуда следует:

$$\Delta_{ij} = p_i + q_j - c_{ij}\,, \text{ где } i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$$

При этом один из потенциалов можно выбирать произвольно, т.к. в системе (1) и (2) одно уравнение линейно зависит от остальных, а остальные потенциалы находятся, что для базисных значений $\Delta_{ij} = 0$.

Наиболее часто встречаются следующие задачи, относящиеся к транспортным:

- прикрепление потребителей ресурса к производителям;
- привязка пунктов отправления к пунктам назначения;
- взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений;
- отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования;
- оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.

Рассмотрим экономико-математическую модель прикрепления пунктов отправления к пунктам назначения. Имеются m пунктов отправления груза и объемы отправления по каждому пункту a_1, a_2 ,...,a_m . Известна потребность в грузах b_1, b_2 ,...,b_n по каждому из n пунктов назначения. Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту c_{ij} , $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$. Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, т.е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого i-го пункта отправления (от поставщика) в каждый j-ый пункт назначения (до потребителя) x_{ij} с минимальными транспортными издержками.

В общем виде исходные данные представлены в табл. 1. Строки транспортной таблицы соответствуют пунктам отправления (в последней клетке каждой строки указан объем запаса продукта a_i), а столбцы — пунктам назначения (последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности b_j). Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и правом столбце) содержат информацию о перевозке из i-го пункта в j-й: в правом верхнем углу находится цена перевозки единицы продукта, а в левом нижнем — значение объема перевозимого груза для данных пунктов.

Транспортная задача называется закрытой, если суммарный объем отправляемых грузов $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (3)$$

Если такого равенства нет (потребности выше запасов или наоборот), запасу называют открытой, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (4)$$

Таблица 1

Исходные данные

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	…	B_n	Запасы (объемы отправления)
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Для написания модели необходимо все условия (ограничения) и целевую функцию представить в виде математических уравнении.

Все грузы из i-х пунктов должны быть отправлены, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \quad (5)$$

Все j-е пункты (потребители) должны быть обеспечены грузами в плановом объеме:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} \quad (6)$$

Суммарные объемы отправления должны равняться суммарным объемам назначения (1). Должно выполняться условие неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$.

Формально транспортная задача записывается следующим образом:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (.7)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \quad (8) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} \quad (9) \\ \sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (10) \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} \quad (11) \end{cases}$$

Определение 1. Совокупность чисел (x_{ij}), $i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$ удовлетворяющих ограничениям (8-10) называется планом перевозок или планом транспортной задачи.

Решить транспортную задачу - это значит найти такие значения (x_{ij}), $i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$, которые удовлетворяют ограничениям (8-10) и доставляют минимум целевой функции (7). Целевая функция (7) определяет суммарную стоимость перевозок. Ограничения (8) соответствуют тому, что количество продукции, вызываемой i-го поставщика, не должно превосходить предложения i-го поставщика. Ограничения (9) соответствуют тому, что количество продукции, ввозимой j-му потребителю, должно полностью удовлетворять спрос j-го потребителя.

Определение 2. Задача (7-10) называется несбалансированной транспортной моделью (задачей).

Определение 3. Задача (7-10), в которой ограничения (8-10) имеют вид равенств, называется сбалансированной транспортной моделью (задачей).

Вместо матрицы стоимостей перевозок (c_{ij}) могут задаваться матрицы расстояний. В таком случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы. Как видно из выражения (5), уравнение баланса является обязательным условием решения транспортной задачи. Поэтому, когда в исходных условиях дана открытая задача, то ее необходимо привести к закрытой форме. В случае, если

- потребности по пунктам назначения превышают запасы пунктов отправления, то вводится фиктивный поставщик с недостающим объемом отправления;
- запасы поставщиков превышают потребности потребителей, то вводится фиктивный потребитель с необходимым объемом потребления.

Варианты, связывающие фиктивные пункты с реальными, имеют нулевые оценки. После введения фиктивных пунктов задача решается как закрытая.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

- распределению подлежат однородные ресурсы;
- условия задачи описываются только уравнениями;
- все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения;
- во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;
- каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Транспортные задачи могут решаться симплекс-методом. Однако перечисленные особенности позволяют для транспортных задач применять более простые методы решения.

Опорный план является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов. Существует три метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля. "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода.

3.2. Методы составления начального опорного плана

Базисный план составляется последовательно, в несколько шагов (точнее, $m + n - 1$ шагов). На каждом из этих шагов заполняется одна клетка, притом так, что, либо полностью удовлетворяется один из заказчиков (тот, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо полностью вывозится весь запас груза с одной из баз (с той, в строке которой находится заполняемая клетка).

- В первом случае мы можем исключить столбец, содержащий заполненную на этом шаге клетку, и считать, что задача свелась к заполнению таблицы с числом столбцов, на единицу меньшим, чем было перед этим шагом, но с тем же количеством строк и с соответственно измененным запасом груза на одной из баз (на той базе, которой был удовлетворен заказчик на данном шаге).

- Во втором случае исключается строка, содержащая заполняемую клетку, и считается, что таблица сузилась на одну строку при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности заказчика, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Начиная с первоначально данной таблицы и повторив (m + n - 2) раз описанный шаг, мы придем к “таблице”, состоящей из одной строки и одного столбца (иначе говоря, из одной пустой клетки). Другими словами, мы пришли к задаче с одной базой и с одним потребителем, причем потребности этого единственного заказчика равны запасу груза на этой единственной базе. Заполнив последнюю клетку, мы освобождаем последнюю базу и удовлетворяем потребность последнего заказчика. В результате, совершив (m + n - 1) шагов, мы и получим искомый опорный план.

1. Диагональный метод*, или* ***метод северо-западного угла***. При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки неизвестного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn} , т. е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Пример

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 170	50 110	15 20	80	70	300
A_2	80	90	40 80	60 70	85	150
A_3	50	10	90	11 50	25 200	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

Заполнение таблицы начинается с ее северо-западного угла, т.е. клетки с неизвестным x_{11}. Первая база A_1 может полностью удовлетворить потребность первого заказчика B_1 (a_1=300, b_1=170, $a_1 > b_1$). Полагая x_{11}= 170, вписываем это значение в клетку x_{11} и исключаем из рассмотрения первый столбец. На базе A_1 остается измененный запас $a_1^{'} = 130$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и четырьмя столбцами B_1,B_2,B_3,B_4; северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{12} . Первая база с запасом $a_1^{'} = 130$ может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 ($a_1^{'}=130$, $b_2=110$, $a_1^{'}>b_2$). Полагаем x_{12} = 110, вписываем это значение в клетку x_{12} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_1 остается новый остаток (запас) $a_1^{''}=20$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и тремя столбцами B_3, B_4, B_5 северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{13}. Теперь третий заказчик B_3 может принять весь запас с базы A_1 ($a_1^{''}=20, b_3=100, a_1^{''}<b_3$). Полагаем x_{13} = 20, вписываем это значение в клетку x_{13} и исключаем из рассмотрения первую строку. У заказчика из B_3 осталась еще не удовлетворенной потребность $b_3^{'}=80$.

Теперь переходим к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т.д.

Через шесть шагов у нас останется одна база A_3 с запасом груза (остатком от предыдущего шага) $a_3^{'}=200$ и один пункт B_5 с потребностью b_5=200 . Соответственно этому имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, положив x_{35}=200. План составлен. Базис образован неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}$. Правильность составленного плана легко проверить, подсчитав суммы чисел, стоящих в заполненных клетках по строкам и столбцам.

Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

$$S_1 = 70\cdot170+50\cdot110+15\cdot20+40\cdot80+60\cdot70+11\cdot50+25\cdot200=30650$$

2. Метод наименьшей стоимости.

При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первою заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

Пример

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 20	50	15 100	80	70 180	300
A_2	80 150	90	40	60	85	150
A_3	50	10 110	90	11 120	25 20	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвестного x_{32}, для которого мы имеем значение c_{32} = 10, наименьше из всех значений c_{ij} . Эта клетка находится на пересечении третьей строки и второго столбца, соответствующим третьей базе A_3 и второму заказчику B_2. Третья база A_3 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 (a_3=250, b_2=110, $a_3 > b_2$) . Полагая x_{32} = 110, вписываем это значение в клетку x_{32} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_3 остается изменённый запас $a_3^1 = 140$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1,A_2,A_3 и четырьмя столбцами B_1,B_3,B_4,B_5 клеткой с наименьшим значением c_{ij} клетка, где c_{34}=11. Заполняем описанным выше способом эту клетку и аналогично заполняем следующие клетки. В результате оказываются заполненными (в приведенной последовательности) следующие клетки:

$$x_{32} = 110,\ x_{34} = 120,\ x_{13} = 100,\ x_{35} = 20,\ x_{15} = 180,\ x_{11} = 20,\ x_{21} = 150$$

На пятом шаге клеток с наименьшими значениями c_{ij} оказалось две (c_{11}=c_{15}=70) . Мы заполнили клетку для x_{15} , положив x_{15} = 180. Можно было выбрать для заполнения другую клетку, положив x_{11} = 170, что приведет в результате к другому опорному плану. Общий объем перевозок в тонно-километрах для этого плана составит

$$S_1 = 70\cdot 20 + 15\cdot 100 + 70\cdot 180 + 80\cdot 150 + 10\cdot 110 + 11\cdot 120 + 25\cdot 20 = 30420$$

3. Метод Фогеля.

Шаг 1. Составляют транспортную таблицу.

Шаг 2. Для каждой строки и каждого столбца транспортной таблицы определяют разность между наименьшим тарифом и ближайшим к нему значением. Переход к шагу 3.

Шаг 3. В строке или в столбце, которым соответствует наибольшая разность, выбирают клетку с наименьшим тарифом. Переход к шагу 4.

Шаг 4. В выбранную клетку, аналогично предыдущим методам, записывают максимально возможное число единиц продукции, которое разрешается ограничениями на предложение и спрос. После этого вычеркивают либо строку, если предложение поставщика исчерпано, либо столбец, если спрос потребителя удовлетворен.

Если все клетки таблицы заполнены или вычеркнуты, то план перевозок построен. В противном случае переходят к шагу 2 без учета вычеркнутых и заполненных клеток.

В методе Фогеля используются штрафы, взимаемые за неудачный выбор маршрута. Рассчитанные на шаге 2 разности между двумя уровнями затрат на перевозку являются штрафами за неверно выбранный маршрут перевозки.

Метод Фогеля наиболее трудоемкий, однако начальный план перевозок, построенный с использованием, обычно бывает близок к оптимальному плану, а в некоторых случаях является оптимальным планом.

4. Понятие потенциала и цикла

Для перехода от одного базиса к другому при решении транспортной задачи используются так называемые циклы.

Циклом пересчета или короче, циклом в таблице перевозок называется последовательность неизвестных, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Одно из неизвестных последовательности свободное, а все остальные – базисные.
2. Каждые два соседних в последовательности неизвестных лежат либо в одном столбце, либо в одной строке.
3. Три последовательных неизвестных не могут находиться в одном столбце или в одной строке.
4. Если, начиная с какого-либо неизвестного, мы будем последовательно переходить от одного к следующему за ним неизвестному то, через несколько шагов мы вернемся к исходному неизвестному.

Второе условие означает, что у двух соседних неизвестных в цикле либо первые, либо вторые индексы одинаковы.

Если каждые два соседних неизвестных цикла соединить отрезком прямой, то будет получено геометрическое изображение цикла – замкнутая ломаная из чередующихся горизонтальных и вертикальных звеньев, одна из вершин которой находится в свободной клетке, а остальные - в базисных клетках.

Можно доказать, что для любой свободной клетки таблицы перевозок существует один и только один цикл, содержащий свободное неизвестное из этой клетки, и что число вершин в цикле всегда четно.

Так, например, в таблице перевозок, составленной по диагональному методу при решения задачи из предыдущего пункта, неизвестному x_{21} соответствует цикл $x_{21}, x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{21}$ и т.д.

Пусть теперь мы имеем некоторую свободную клетку с соответствующим ей циклом. Если мы изменим значение свободного неизвестного, увеличив его на некоторое число x, то, переходя последовательно от одной вершины цикла к другой, мы должны будем в силу неизменности сумм по строкам и по столбцам поочередно уменьшать и увеличивать значения неизвестных в цикле на то же число x. Например, в указанном выше цикле для свободного неизвестного x_{21} получим:

старые значения: $x_{21}= 0$, $x_{23}= 80$, $x_{13}= 20$, $x_{11}= 170$, $x_{21}= 0$;

новые значения:

$$x_{21}^{'} = x,\ x_{23}^{'} = 80 - x,\ x_{13}^{'} = 20 + x,\ x_{11}^{'} = 170 - x,\ x_{21}^{'} = x$$

Очевидно, если снабдить вершины цикла поочередно знаками "+" и "–", приписав вершине в свободной клетке знак "+", то можно сказать, что в вершинах со знаком "+" число x прибавляется к прежнему значению неизвестного, находящегося в этой вершине, а в вершинах со знаком "–" это число x вычитается из прежнего значения неизвестного, находящегося в этой вершине.

Если в качестве x выбрать наименьшее из чисел, стоящих в вершинах, снабженных знаком "–", то, по крайней мере, одно из прежних базисных неизвестных примет значение нуль, и мы можем перевести его в число свободных неизвестных, сделав вместо него базисным то неизвестное, которое было свободным.

Так, например, в рассмотренном выше цикле имеем отрицательные вершины x_{21} и x_{11}; следовательно, выбрав $x = \min\{80; 170\}=80$, мы получаем:

старые значения: $x_{21}= 0$, $x_{23}= 80$, $x_{13}= 20$, $x_{11}= 170$, $x_{21}= 0$;

новые значения:

$$x_{21}^{'} = 80,\ x_{23}^{'} = 0,\ x_{13}^{'} = 100,\ x_{11}^{'} = 90,\ x_{21}^{'} = 80$$

т. е. вместо прежнего базисного решения получаем новое базисное решение.

Выбор в качестве x минимального среди чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла, обеспечивает допустимость нового базиса.

Если минимальное значение среди базисных неизвестных, стоящих в отрицательных вершинах цикла, принимается не в одной отрицательной вершине, то свободной оставляют только одну из них, а в других клетках с тем же минимальным значением пишут нули. В этом случае новое базисное решение будет вырожденным.

Может случиться, что и само минимальное значение среди чисел в отрицательных клетках равно нулю. Тогда преобразование таблицы перевозок сведется к перестановке этого нуля в свободную клетку. Значения всех неизвестных при этом остаются неизменными, но решения считаются различными, так как различны базисы. Оба решения вырождены.

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	70 90	50 110	15 100	80	70	300
A_2	80 80	90	40	60 70	85	150
A_3	50	10	90	11 50	25 200	250
Потребности	170	110	100	120	200	700

Описанное выше преобразование таблицы перевозок, в результате которого преобразуется базис, называется ***пересчетом по циклу***.

Заметим, что неизвестные, не входящие в цикл, этим преобразованием не затрагиваются, их значения остаются неизменными и каждое из них остается либо в группе базисных, либо в группе свободных неизвестных, как и до пересчета.

Выясним теперь, как пересчет по циклу влияет на общий объем затрат на перевозки и при каком условии эти затраты становятся меньше.

Пусть x_{pq}–некоторое свободное неизвестное, для которого мы построили цикл и осуществили пересчет по циклу с некоторым числом x. Если вершине цикла, находящейся в i-й строке и j-м столбце таблицы перевозок, приписан знак "+", то значение неизвестного x_{ij} , находящегося в этой вершине, увеличивается на x, что в свою очередь вызывает увеличение затрат на $c_{ij}\ x$, где c_{ij} – тариф, соответствующий этой клетке; если же указанной вершине приписан знак “–”, то значение неизвестного x_{ij} уменьшается на x, что вызывает уменьшение затрат на $c_{ij}\ x$.

Сложим тарифы, соответствующие положительным вершинам цикла, и вычтем из этой суммы сумму тарифов, соответствующих отрицательным вершинам цикла; полученную разность S_{pq} назовем *алгебраической суммой тарифов* для данного свободного неизвестного x_{pq}. Подсчет алгебраической суммы тарифов можно истолковать и так: припишем тарифам те же знаки, которые приписаны соответствующим вершинам цикла, тогда алгебраическая сумма тарифов равна сумме таких тарифов со знаком (“относительных тарифов”).

Теперь, очевидно, мы можем, заключить, что в целом при пересчете но циклу, соответствующему свободному неизвестному x_{pq} общий объем затрат на перевозки изменится на произведение алгебраической суммы тарифов на x, т. е. на величину $S_{pq}x$. Следовательно, если алгебраическая сумма тарифов для некоторого свободного неизвестного x_{pq} отрицательна (S_{pq}<0), то пересчет по циклу, соответствующему этому неизвестному, приводит к уменьшению общей суммы затрат на реализацию плана перевозок. Если же алгебраическая сумма тарифов положительна (Spq>0), то пересчет по соответствующему циклу приведет к увеличению общей суммы затрат. И, наконец, если алгебраическая сумма тарифов равна нулю (S_{pq}=0), то пересчет по соответствующему циклу не изменит общую сумму затрат (два различных базисных плана требуют одинаковых затрат на их реализацию).

Так, например, для цикла $x_{21},x_{23},x_{13},x_{11},x_{21}$ в рассмотренной задаче алгебраическая сумма тарифов

$$S_{21} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11} = 80 - 40 + 15 - 70 = -15 < 0$$

Значит, пересчет по этому циклу снижает расходы. И действительно, осуществив такой пересчет, мы получаем план, по которому объем перевозок в тонно-километрах составляет

$$S_2 = 70 \cdot 90 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 100 + 80 \cdot 80 + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 + 25 \cdot 200 = 29450$$

тогда как по исходному плану он составил S_1= 30650. Имеем снижение объема перевозок на 1200 тонно-километров, что и следовало ожидать, так как алгебраическая сумма тарифов в данном случае равна –15, а пересчет по циклу осуществляется с помощью числа (изменение затрат равно -15*80 = - 1200).

Вычисление алгебраической суммы тарифов для каждого из свободных неизвестных можно производить без построения соответствующего цикла, пользуясь, так называемыми, потенциалами. Припишем каждой базе A_i, , некоторое число u_i, и каждому потребителю B_j некоторое число v_j :

$$A_i \to u_i \, (i = 1,2,..., m), \; B_j \to v_j \, (j = 1,2,..., n),$$

так что $u_i + v_j = c_{ij}$, (12)

где c_{ij} – тарифы, соответствующие клеткам, заполненным базисными неизвестными. Эти числа u_i, и v_j называются ***потенциалами*** соответствующих баз и потребителей.

Зная потенциалы, легко вычислить алгебраическую сумму тарифов. Действительно, если в алгебраической сумме тарифов по циклу, соответствующему свободному неизвестному x_{pq}, заменить тарифы базисных клеток их выражениями через потенциалы по формулам (12), то, в силу чередования знаков при вершинах цикла, все потенциалы, кроме u_p и v_q сократятся, и мы получим:

$S_{pq} = c_{pq} - (u_p + v_q)$.

Так, например, для цикла $x_{21}, x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{21}$ в рассмотренной выше задаче имеем

$$S_{21} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11} = c_{21} - (u_2 + v_3) + (u_1 + v_3) - (u_1 + v_1) = c_{21} - (u_2 + v_1)$$

Для базисных клеток сумма потенциалов строки и столбца, в которых находится эта клетка, равна тарифу, соответствующему этой клетке; если же клетка для неизвестного x_{pq} свободная, то сумму потенциалов

$$u_p + v_q = c'_{pq} \qquad (13)$$

называют *косвенным тарифом* этой клетки. Следовательно, алгебраическая сумма тарифов для свободной клетки x_{pq} равна разности ее настоящего (“истинного”) и косвенного тарифов:

$$S_{pq} = c_{pq} - c'_{pq} \qquad (14)$$

Из (14) следует, что если косвенный тариф для данной свободной клетки больше её истинного тарифа, то алгебраическая сумма тарифов по циклу, соответствующему этой клетке, будет отрицательна; если же косвенный тариф меньше истинного, то алгебраическая сумма тарифов положительна, и, наконец, если косвенный тариф равен истинному, то алгебраическая сумма тарифов равна нулю.

Потенциалы можно найти из системы равенств (13), рассматривая их как систему ($m + n$ - 1) уравнений с $m+n$ неизвестными. Так как неизвестных здесь на единицу больше, чем уравнений, то, по крайней мере, один из потенциалов мы можем выбрать произвольно, положив**,** например, u_1 = 0; тогда остальные потенциалы легко определяются из уравнений (13).

Например, для плана, полученного по диагональному методу в рассмотренной выше задаче, имеем

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 70 \\ u_1 + v_2 &= 50 \\ u_1 + v_3 &= 15 \\ u_2 + v_3 &= 40 \\ u_2 + v_4 &= 60 \\ u_3 + v_4 &= 11 \\ u_3 + v_5 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Система содержит семь уравнений с восемью неизвестными. Выбирая произвольно значение α_1, находим последовательно из первых трех уравнений значения $v_1 = 70 - u_1$, $v_2 = 50 - u_1$, $v_3 = 15 - u_1$, затем из четвертого уравнения – $u_2 = 40 - v_3$, из пятого уравнения – $v_4 = 60 - u_2$, из шестого уравнения $u_3 = 11 - v_4$ и, наконец, из седьмого уравнения – $v_5 = 25 - u_3$.

Положив, например, $u_1 = 0$, получаем значения потенциалов:

$$\begin{array}{ll} & v_1 = 70 \\ & v_2 = 50 \\ u_1 = 0 & v_3 = 15 \\ u_2 = 25 & v_4 = 35 \\ u_3 = -24 & v_5 = 49 \end{array}$$

Найдем теперь косвенные тарифы для свободных клеток и сравним их с истинными тарифами:

$$\begin{array}{ll} c'_{14} = u_1 + v_4 = 35 < c_{14} & c'_{25} = u_2 + v_5 = 74 < c_{25} \\ c'_{15} = u_1 + v_5 = 49 < c_{15} & c'_{31} = u_3 + v_1 = 46 < c_{31} \\ c'_{21} = u_2 + v_1 = 95 > c_{21} & c'_{32} = u_3 + v_2 = 26 > c_{32} \\ c'_{22} = u_2 + v_2 = 75 < c_{22} & c'_{33} = u_3 + v_3 = -9 < c_{33} \end{array}$$

Для клеток с неизвестными x_{21} и x_{32} косвенные тарифы больше истинных. Следовательно, для них мы будем иметь отрицательные алгебраические суммы тарифов:

$$S_{21} = c_{21} - c'_{21} = 80 - 65 = -15$$

$$S_{32} = c_{32} - c'_{32} = 10 - 26 = -16$$

Значение S_{21} = -15 мы уже имели раньше, вычисляя алгебраическую сумму тарифов для этой клетки непосредственно по циклу.

Из сказанного в предыдущем пункте вытекает следующий критерий оптимальности базисного решения транспортной задачи: если для некоторого базисного плана перевозок алгебраические суммы тарифов по циклам для всех свободных клеток неотрицательны, то этот план оптимальный.

Отсюда вытекает способ отыскания оптимального решения транспортной задачи, состоящий в том, что, имея некоторое базисное решение, вычисляют алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток. Если критерий оптимальности выполнен, то данное решение является оптимальным; если же имеются клетки с отрицательными алгебраическими суммами тарифов, то переходят к новому базису, производя пересчет по циклу, соответствующему одной из таких клеток. Полученное таким образом новое базисное решение будет лучше исходного – затраты на его реализацию будут меньшими. Для нового решения также проверяют выполнимость критерия оптимальности и в случае необходимости снова совершают пересчет по циклу для одной из клеток с отрицательной алгебраической суммой тарифов и т. д.

Через конечное число шагов приходят к искомому оптимальному базисному решению.

В случае если алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток положительны, мы имеем единственное оптимальное решение; если же алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток неотрицательны, но среди них имеются алгебраические суммы тарифов, равные нулю, то оптимальное решение не единственное: при пересчете по циклу для клетки с нулевой алгебраической суммой тарифов мы получим оптимальное же решение, но отличное от исходного (затраты по обоим планам будут одинаковыми).

В зависимости от методов подсчета алгебраических сумм тарифов для свободных клеток различают два метода отыскания оптимального решения транспортной задачи:

1. Распределительный метод. При этом методе для каждой пустой клетки строят цикл и для каждого цикла непосредственно вычисляют алгебраическую сумму тарифов.

2. Метод потенциалов. При этом методе предварительно находят потенциалы баз и потребителей, а затем вычисляют для каждой пустой клетки алгебраическую сумму тарифов с помощью потенциалов.

Преимущества метода потенциалов по сравнению с распределительным методом состоят в том, что отпадает необходимость построения циклов для каждой из пустых клеток и упрощается вычисление алгебраических сумм тарифов. Цикл строится только один – тот, по которому производится пересчет.

Применяя метод потенциалов, можно говорить не о знаке алгебраических сумм тарифов, а о сравнении косвенных тарифов с истинными. Требование неотрицательности алгебраических сумм тарифов заменяется условием, что косвенные тарифы не превосходят истинных.

Следует иметь в виду, что потенциалы (так же как и циклы) для каждого нового базисного плана определяются заново.

Тема №4. Теория двойственности и экономические приложение

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую ***двойственной*** или сопряженной по отношению к исходной или прямой задаче. Дадим определение двойственной задачи по отношению к ***общей задаче линейного программирования***, состоящей, как мы уже знаем, в нахождении максимального значения функции

$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max$ (1)

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n \le b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, l}, l \le n)$. (3)

Определение 1.

Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$ (4)

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_l \ge c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \ldots + a_{ml+1}y_m \le c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,k}, k \le m\right), \quad (6)$$

называется ***двойственной по*** отношению к задаче (1) – (3).

Задачи (1) – (3) и (4) – (6) образуют пару задач, называемую в линейном программировании ***двойственной парой.***

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи (1) – (3) задается на максимум, а целевая функция двойственной (4) – (6) – на минимум.

2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (2) исходной задачи (1) – (3), и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

в двойственной задаче (4) – (6) получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, а столбцов – строками).

3. Число переменных в двойственной задаче (4) – (6) равно числу ограничений в системе (2) исходной задачи (1) – (3), а число ограничений в системе (5) двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (4) двойственной задачи (4) – (6) являются свободные члены в системе (1) исходной задачи (1) – (3), а правыми частями в соотношениях системы (5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (1) исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи (1) – (3) может принимать только лишь положительные значения, то ***j***–е условие в системе (6) двойственной задачи (4) – (6) является неравенством вида "$\le$". Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то ***1 –*** соотношение в системе (3) представляет собой уравнение. Аналогичные связи имеют место между ограничениями (2) исходной задачи (1) – (3) и переменными двойственной задачи (4) – (6). Если i – соотношение в системе (3) исходной задачи является неравенством, то i–я переменная двойственной задачи $y_j \geq 0$. В противном случае переменная y_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения (2) прямой задачи и соотношения (5) двойственной задачи являются неравенствами вида “ $\leq$ ”. Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Пример 1.

Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad (9)$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \quad (11)$$

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений в системе (10), т. е. равно трем. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений (10), т.е. числа 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи (9) – (11) исследуется на максимум, а система условий (10) содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а ее переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи (9) – (11) принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида “$\geq$”. Следовательно, для задачи (9) – (11) двойственная задача такова: найти минимум функции $F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$ при условиях

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3. \end{cases}$$

Пример 2.

Для задачи, состоящей в максимизации функции

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0,$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к данной, формулируется следующим образом: найти минимум функции $n_2 = 7a_2 + b_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4, \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \ge 0.$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач. Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней. Исходная задача: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (12)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \left(i = \overline{1, m}\right);$$
(13)

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right).$$
(14)

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
(15)

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \left(j = \overline{1, n}\right).$$
(16)

Каждая из задач двойственной пары (12) – (14) и (15), (16) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1.

Если X – некоторый план исходной задачи (12) – (14), а Y – произвольный план двойственной задачи (15), (16), то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т. е. $F(X) \leq F^*(Y)$

Лемма 2.

Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ *для некоторых планов* X^* *и* Y^* *задач* (12) – (14) *и* (15), (16), *то* X^* *– оптимальный план исходной задачи, а* Y^* *– оптимальный план двойственной задачи.*

Теорема 1

(первая теорема двойственности). *Если одна из задач двойственной пары (*12) – (14) *или* (15), (16) *имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т.е.* $F_{\max} = F^*_{\min}$

Если же целевая функция одной задачи из двойственной пары неограниченна (для исходной (12) – (14) *– сверху, для двойственной* (15), (16) *– снизу), то другая задача вообще не имеет планов.*

Теорема 2 (вторая теорема двойственности).

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *задачи* (12) – (14) *и план* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ *задачи* (15), (16) *являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого* $j(j = \overline{1,n})$ *выполняется равенство* $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0$

Дадим краткие пояснение. Данная теорема называется также теоремой о дополняющей нежесткости и связывает между собой переменные исходной и функциональные ограничения двойственной задачи и наоборот. Условия $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0$ позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных ЗЛП, найти оптимальное решение другой задачи. Поэтому для решения некоторой ЗЛП можно в начале решить двойственную задачу, а затем определить решение исходной задачи. На этом основан так называемый *двойственный симплекс-метод*.

Третья теорема двойственности (теорема об оценках).

Значения переменных двойственной задачи в оптимальном плане представляют собой оценки влияния правых частей системы функциональных ограничений исходной задачи на величину целевой функции исходной задачи:

$$\frac{\partial f(\overline{X})}{\partial b_i} = y_i \quad (17)$$

Относительно этой теоремы необходимо отметить следующее. Учитывая линейный характер функции $f(\overline{X})$, соотношение (17) можно упрощенно записать в виде:

$$\Delta f(\overline{X}) = \Delta b_i y_i \quad (18)$$

где Δ - конечное приращение величины.

Равенство (18) справедливо, если величина Δb_i является относительно небольшой.

Свойства двойственных оценок

Из теорем двойственности вытекает следующие свойства двойственных оценок.

- **Свойство 1.** Оценки служат мерой дефицитности факторов производства (ресурсов).

Это свойство следует из второй теоремы двойственности: дефицитный ресурс получает положительную оценку, оценка недефицитного ресурса равна нулю; чем острее дефицитность ресурса, тем выше его оценка.

- **Свойство 2.** Оценка служат мерой влияния правых частей ограничений исходной задачи на ее целевую функцию.

Это свойство следует из теоремы об оценках: изменение на единицу правой части ограничения (объема ресурса) приведет к изменению значения целевой функции на величину двойственной оценки соответствующего ресурса.

- **Свойство 3**. Оценки служат инструментом определения эффективности отдельных вариантов решения.

Это свойство вытекает из второй теоремы двойственности, при этом в задаче оптимальность использования ресурсов эффективность означает выгодность или невыгодность выпуска данного вида продукции. Показателем эффективности выпуска j-й продукции служат величина

$$\Delta j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \qquad (19)$$

Первое слагаемое правой части выражения (19) экономически интерпретируется как затраты, которые путем вычитания сравниваются с ценой. При $\Delta j \leq 0$ делается вывод о целесообразности выпуска продукции, при $\Delta j \geq 0$ данную продукцию выпускать нецелесообразно.

- **Свойство 4.** Оценки служат инструментом балансирования суммарных затрат и результатов экономической системы (например, предприятия).

Данное свойство следует из первой теоремы двойственности, в которой устанавливается связь целевых функций взаимно двойственных задач; в конкретных задачах условие равновесия затрат и результатов в точке оптимума может иметь различное экономическое содержание.

Геометрическая интерпретация двойственных задач.

Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев:

1) обе задачи имеют планы;

2) планы имеет только одна задача;

3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

Пример 3.

Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F = 2x_1 + 7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0,$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Решение. Двойственной задачей по отношению к исходной является задача, состоящая в определении минимального значения функции $F^* = 14y_1 + 8y_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1 и 2).

Как видно из рис. 1, максимальное значение целевая функция исходной задачи принимает в точке ***B*.** Следовательно, $\boldsymbol{X}^*$=(2, 6) является оптимальным планом, при котором $F_{\max} = 46$. Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке ***E*** (рис. 2). Значит, $\boldsymbol{Y}^*$=(1; 4) является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $C \subseteq np_1G$. Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

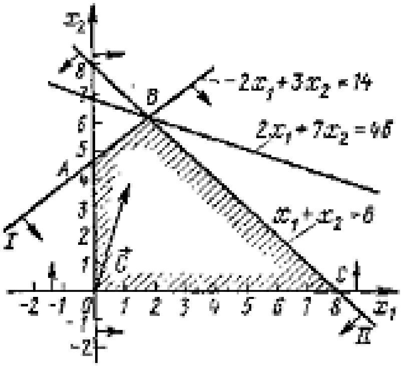


Рис.1

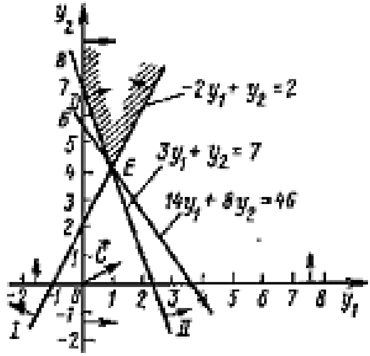


рис.2.

Из рис. 1 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно из рис. 2, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46. Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

Пример 4.

Найти решение двойственной пары задач.

Исходная задача: Двойственная задача:

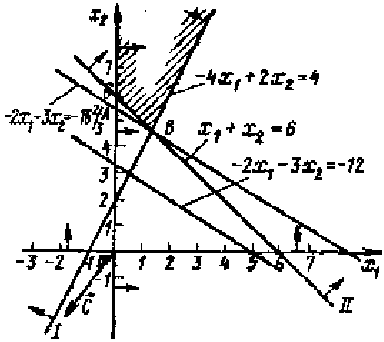
$$F=-2x_1-3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -4x_1+2x_2 \ge 4, \\ x_1+x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

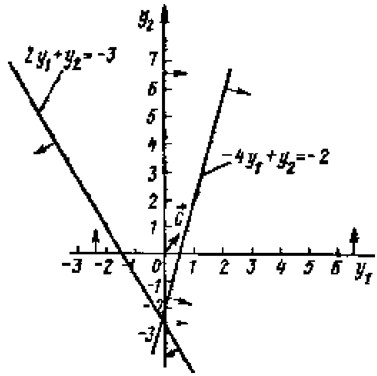
$$F^*=4y_1+6y_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -4y_1+y_2 \le -2, \\ 2y_1+y_2 \le -3 \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2 \ge 0.$$

Решение.

Как исходная, так и двойственная задача содержат по две переменные. Поэтому их решение находим, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1 и 2). Из рис. 1 видно, что исходная задача не имеет оптимального плана из-за неограниченности снизу ее целевой функции на множестве допустимых решений.

Из рис. 4 следует, что двойственная задача не имеет планов, поскольку многоугольник решений ее пуст. Это означает, что если исходная задача двойственной пары не имеет оптимального плана из-за неограниченности на множестве допустимых решений ее целевой функции, то двойственная задача также не имеет планов.





Ри.3 рис.4.

Нахождение решения двойственных задач.

Рассмотрим пару двойственных задач – основную задачу линейного программирования (12) – (14) и двойственную к ней задачу (15), (16).

Предположим, что с помощью симплексного метода найден оптимальный план $\boldsymbol{X}^*$ задачи (12) – (14) и этот план определяется базисом, образованным векторами $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$.

Обозначим через $C_\delta = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ вектор-строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции (12) задачи (12) – (14), а через P^{-1} – матрицу, обратную матрице $\boldsymbol{P}$, составленной из компонент векторов $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$ базиса. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план X^*, то $Y^* = C_\delta P^{-1}$ *является оптимальным планом двойственной задачи.*

Таким образом, если найти симплексным методом оптимальный план задачи (12) – (14), то, используя последнюю симплекс–таблицу, можно определить C_δ и P^{-1} и с помощью соотношения $Y^* = C_\delta P^{-1}$ *н*айти оптимальный план двойственной задачи (15), (16).

В том случае, когда среди векторов $P_1, P_2, ..., P_n$, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (13), имеется ***m*** единичных, указанную матрицу P^{-1} образуют числа первых ***m*** строк последней симплекс–таблицы, стоящие в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением C_δ на P^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами (***m***+1)–й строки столбцов единичных векторов, если данный коэффициент $c_j = 0$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и c_j если $c_j \neq 0$

Сказанное выше имеет место и для симметричной пары двойственных задач. При этом так как система ограничений исходной задачи содержит неравенства вида “$\leq$”, то компоненты оптимального плана двойственной задачи совпадают с соответствующими числами (***m***+1)–й строки последней симплекс–таблицы решения исходной задачи. Указанные числа стоят в столбцах векторов, соответствующих дополнительным переменным.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

Поясним экономический смысл двойственной модели.

Пусть в качестве управляющих переменных $x_j, j = \overline{1,n}$ исходной модели рассматривается число изделий, производимых некоторым предприятием, а параметров $b_i, i = \overline{1,m}$ -количество ресурсов, используемых для изготовления изделий. Через $a_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ обозначено количество ресурсов i-го типа, идущее на изготовление одного изделия j-го вида, C_j – прибыль от реализации одного изделия j-го вида. Тогда исходной модель (1), (2) соответствует задаче определения оптимального плана производства продукции, обеспечивающего максимальную прибыль.

Пусть предприятие решило прекратить производство изделий и продать ресурсы, идущие на изготовление. Обозначим через y_i цену на единицу ресурсов i-го вида, $i = \overline{1,m}$. Цены на ресурсы должны удовлетворять следующим двум условиям: во-первых, они не должны быть слишком высокими, иначе ресурсы невозможно будет продать; а во-вторых, цены на ресурсы должны быть такими, чтобы прибыль от реализации была больше прибыли от реализации готовой продукции. Первое условие выражается формулой (4), второе условие – ограничениями (5). В левой части каждого из неравенств (5) стоит прибыль от продажи ресурсов всех типов, идущих на изготовление j-го изделия, в правой части – прибыль от продажи j – го изделия, $j = \overline{1,n}$. Таким образом, двойственная (4)-(5) соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от реализации была больше прибыли полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов. Значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ часто называют теневыми ценами.

Построение двойственной задачи позволяет глубже разобраться в поставленной экономической проблеме.

Тема 5. Задачи целочисленного программирования, их экономические приложения и методы решения.

Если управляющие переменные в задаче линейного программирования определяют количество единиц неделимой продукции, то оптимальное решение должно быть получено в целых числах. К задачам такого типа относятся большое число экономических задач, например распределение производственных заказов между предприятиями, оптимальный раскрой материалов, определение загрузки оборудования, распределение транспортных средств по рейсам, задачи производства и реализации неделимой продукции. Если единица составляет малую часть от общего количества, например пи планировании массового и крупносерийного производства, то для нахождения оптимального решения применяют обычный симплекс-метод и округляют полученное решение до целого. В противном случае, например при планировании производства или реализации автомобилей, округление может привести к решению, далекому от оптимального.

Экстремальная задача, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется задачей целочисленного программирования.

В математической модели задачи целочисленного программирования как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

Математическая модель задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) имеет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m_1}; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \qquad (1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}; \\ x_j \in Z, j = \overline{1, n}, \qquad (2) \end{cases}$$

где Z – множество целых чисел.

Пример 1.

В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено $\frac{19}{3} м^2$ площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 10 тыс. сом, при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования I вида стоит 1000 сом, а II вида – 3000 сом Приобретение одного комплекта оборудования I вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования II вида – на 4 ед. Зная что для установки одного комплекта оборудования I вида требуется 2 м^2 площади, а оборудования II вида – 1 м^2 площади определить такой набор дополнительного оборудования, которых дает возможность максимально увеличить выпуск продукции

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие приобретет x_1 комплектов оборудования I вида и x_2 комплектов оборудования II вида. Тогда переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases} \quad (3)$$

Если предприятие приобретет указанное количество оборудования, то общее увеличение выпуска продукции составит

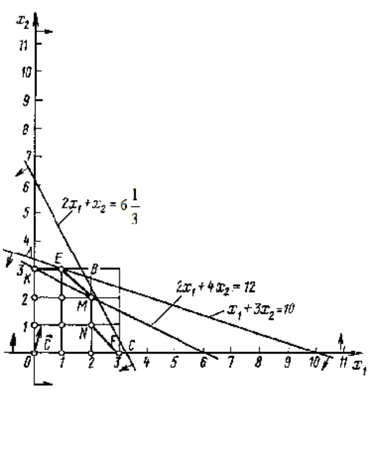
$$F = 2x_1 + 4x_2. \quad (4)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 и x_2 могу принимать лишь целые неотрицательные значения, т. е.

$$x_1,\ x_2 \le 0, \quad (5)$$

x_1, x_2 – целые.

Координаты всех точек построенного многоугольника решений OAEBC удовлетворяют системе линейных неравенств (3) и условию неотрицательности переменных (5). Вместе с тем условию целочисленности переменных, удовлетворяют координаты лишь 12 точек, отмеченных на рис. 11. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник OABC многоугольником OKEMNF, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами и таким, что координаты каждой из вершин являются целыми числами. Значит, если найти точку максимума функции (4) на многоугольнике OKEMNF, то координаты этой точки и определят оптимальный план задачи.



Для этого построим вектор $\vec{C} = (2;4)$ и прямую $2x_1 + 4x_2 = 12$, проходящую через многоугольник решений OKEMNF (число 12 взято произвольно). Построенную прямую передвигаем в направлении вектора $\vec{C}$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю общую точку ее с данным многоугольником. Координаты этой точки и определяют оптимальный план, а значение целевой функции в ней является максимальным.

В данном случае искомой является точка E(1; 3), в которой целевая функция принимает максимальное значение $F_{max}=14$. Следовательно, координаты точки E определяют оптимальный план задачи (1) – (3). В соответствии с этим планом предприятию следует приобрести один комплект оборудования 1 вида и три комплекта оборудования II вида. Это обеспечит предприятию при имеющихся у него ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуск продукции, равное 14 ед. в смену.

Определение оптимального плана задачи целочисленного программирования.

Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (6)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1, m}\right), \quad (7)$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, n}\right), \quad (8)$$

x_j– целые $\Delta j \geq 0$ (9)

Если найти решение задачи (6) – (9) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана задачи (6) – (9) требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является метод Гомори, в основе которого лежит описанный выше симплексный метод.

Метод Гомори. Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (6) – (8) без учета целочисленности переменных. После того как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования (6) – (9). Если же в оптимальном плане задачи (6) – (8) переменная x_j принимает дробное значение, то к системе уравнений (7) добавляют неравенство

$$\sum_j f\left(a_{ij}^*\right)x_j \geq f\left(b_i^*\right) \qquad (10)$$

и находят решение задачи (6) – (8), (10).

В неравенстве (10) a_{ij}^* и b_i^* – преобразованные исходные величины a_{ij}^* и b_i^* значения которых взяты из последней симплекс–таблицы, а f(a_{ij}^*) и f(b_i^*) – дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число b такое, что разность между a и b есть целое). Если в оптимальном плане задачи (6) – (8) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (10) определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане задачи (6) – (8), (10) переменные принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования (6) – (9), либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности (9) относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются частично целочисленными. Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых получается из предыдущей с помощью введения дополнительного ограничения. В этом случае такое ограничение имеет вид

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*) \qquad (12)$$

где γ_{ij} определяются из следующих соотношений:

1) для x_j , которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{*} & \text{при } a_{ij}^{*} \ge 0, \\ \dfrac{f(b_i^{*})}{1 - f(b_i^{*})} \left| a_{ij}^{*} \right| & \text{при } a_{ij}^{*} < 0; \end{cases} \quad (13)$$

2) для x_j, которые могут принимать только целочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^{*}) & \text{при } f(a_{ij}^{*}) \le f(b_i^{*}), \\ \dfrac{f(b_i^{*})}{1 - f(b_i^{*})} \left[1 - f(a_{ij}^{*}) \right] & \text{при } f(a_{ij}^{*}) > f(b_i^{*}). \end{cases} \quad (14)$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает следующие основные этапы:

1. Используя симплексный метод, находят решение задачи (6) – (8) без учета требования целочисленности переменных.

2. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (6) – (8) имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане задачи (6) – (9) должна быть целочисленной.

3. Используя двойственный симплекс–метод, находят решение задачи, получающейся из задачи (6) – (8) в результате присоединения дополнительного ограничения.

4. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана задачи (6) – (9) или установления ее неразрешимости.

Тема №6. Общая теория математического программирования.

Математическое программирование занимается теми экстремальными задачами, в которых множество допустимых решений задается (описывается) с помощью некоторых уравнений или неравенств. Следовательно, математическое программирование является разделом методов оптимизации, В зависимости от характера этих уравнений или неравенств (называемых ограничениями задачи) возникают задачи линейного программирования, нелинейного программирования, динамического программирования и некоторые их разновидности. Экстремальные задачи еще называют оптимизационными задачами или задачами оптимизации. Здесь термин «программирование» имеет смысл «планирования», «оптимизации», «сравнения вариантов» и т.п.. Поэтому его не надо путать с термином программирования на языках ЭВМ.

Математическое программирование как наука сформировалось в 50—70-х годах 20 века. Это обусловлено главным образом развитием электронных вычислительных машин, а следовательно, с возможностью проводить математическую обработку больших потоков информации, и на этой основе решать задачи управления и планирования, где применение математических методов связано в первую очередь с построением математических моделей и соответствующих им экстремальных задач, в том числе задач Математическое программирование.

Характерной особенностью вычислительной стороны методов решений задач математического программирование является то, что применение этих методов неразрывно связано с использованием электронных вычислительных машин, в первую очередь потому, что задачи математического программирование, связанные с ситуациями управления реальными системами, являются задачами большого объёма, недоступными для ручного счёта.

Важным направлением исследования в математическом программировании являются проблемы устойчивости. Здесь существ значение имеет изучение класса устойчивых задач — задач, для которых малые возмущения (погрешности) в исходной информации влекут за собой малые возмущения и в решении. В случае неустойчивых задач большая роль отводится процедуре аппроксимации неустойчивой задачи последовательностью устойчивых задач — так называемому процессу регуляризации.

Математическое программирование — математическая дисциплина, изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

Формально задача математического программирования формулируется так

$$\operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$$

В зависимости от природы множества X задачи математического программирования классифицируются как задачи дискретного программирования (или комбинаторной оптимизации) —

если X конечно или счетно; задачи целочисленного программирования — если X является подмножеством множества целых чисел; задачей нелинейного программирования, если ограничения и/или целевая функция содержат нелинейные функции и X является подмножеством конечномерного векторного пространства. Если же все ограничения и целевая функция содержат лишь линейные функции, то это — задача линейного программирования. Кроме того, разделами математического программирования являются параметрическое программирование, динамическое программирование и стохастическое программирование.

Математическое программирование используется при решении оптимизационных задач исследования операций.

В теории экстремума на независимые переменные x1,x2, …,xn не накладываются никакие дополнительные условия, т.е. не требуется, чтобы переменные удовлетворяли некоторым дополнительным ограничениям.

Рассмотрим другую задачу. Найти максимум (минимум) функции $y=f(x_1,x_2, \dots,x_n)$, при условии, что независимые переменные $x_1,x_2, \dots,x_n$ удовлетворяют системе ограничений:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_m, \\ g_{m+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_{m+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_k, \\ g_{k+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_p(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_p, \\ \quad x_1,x_2,\dots,x_n\ge 0. \end{cases}$$

Функцию $y=f(x_1,x_2, \dots,x_n)$ принято называть *целевой,* т.к. её максимизация (минимизация) часто есть выражение какой-то цели, систему ограничений (3.1) – *специальными ограничениями ЗМП,* неравенства $x_1\ge 0$ $,x\ge 0_2,$ $\dots,$ $x_n\ge 0$ – *общими ограничениями ЗМП*. Множество всех допустимых решений ЗМП $(x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n})$ называется допустимым множеством этой задачи.

Точка (x_1^0, x_2^0) называется *оптимальным решением* для функции двух переменных, если, во-первых, она есть допустимое решение этой ЗМП, а во-вторых, на этой точке целевая функция достигает максимума (минимума) среди всех точек, удовлетворяющих ограничениям (3.1), причём

$f\ (x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1,x_2)$(в случае решения задачи на отыскание максимума),

$f\ (x_1^0, x_2^0)\ \leq f(x_1,x_2)$ (в случае решения задачи на отыскание минимума).

Если в ЗМП все функции $f(x_1,x_2, ...,x_n)$, $g_i(x_1,x_2, ...,x_n)$ линейны, то имеем *задачу линейного программирования* (ЗЛП), если хотя бы одна из функций нелинейная, имеем задачу *нелинейного программирования* (ЗЛП).

Основные понятия, постановка и методы решения задачи нелинейного программирования.

Нелинейное программирование (планирование) – математические методы отыскания максимума или минимума функции при наличии ограничений виде неравенств или уравнений. Максимизируя (минимизируя) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующий поставленной цели. Он носит название целевой функции. Ограничение характеризует имеющиеся возможности решения задачи.

Целевая функция или хотя бы одно из ограничений нелинейное (т.е. на графиках изображается не прямыми-кривыми-линиями) существо решения задач нелинейного программирования заключается в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в минимум или максимум. Решение, удовлетворяющее условию задачи и соответствующее намеченной цели, называется оптимальным планом.

Общей задачей нелинейной условной оптимизации мы будем называть условную задачу минимизации $f_0(x) \to \min, \quad \xi \in \Omega, \quad (1)$

где Ω выделяется как ограничениями типа равенств

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., k, \quad (2)$$

так и ограничениями типа неравенств

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, ..., l \qquad (3)$$

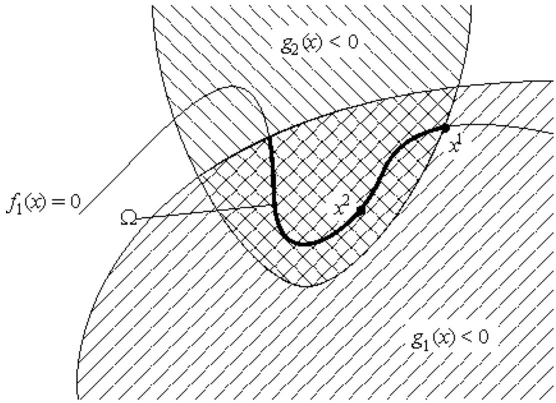


Рис.1.

Определяются *допустимые точки*, *локальный глобальный*, *строгий* и *нестрогий минимумы*. Так же мы будем использовать обозначения f и g для функций из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^l$, соответственно, определяемые координатами f_i и g_j. Поэтому задачу (1)–(3) можно записывать в виде

$$f_0(x) \to \min, \quad f(x) = \Theta, \quad g(x) \le \Theta. \qquad (4)$$

(напомним, что неравенство $g(x) \le \Theta$ означает покоординатные неравенства).

Нам также потребуется следующее обозначение: $a_+ = (a + |a|)/2$; таким образом, $a_+ = a$, если $a \ge 0$ и $a_+ = 0$, если $a \le 0$. Для векторов $a \in \mathbf{R}^m$ операция "+" определяется покоординатно: $a_+ = ((a_1)_+, ..., (a_m)_+)$. Кроме того, через $J(x)$ будет обозначаться множество индексов так называемых *активных ограничений*: $J(x) = \{j \in \{1, ..., l\}: g_j(x) = 0\}$ — это номера ограничений, которые в данной точке существенны. Например, на рис. 1 $J(x^1) = \{2\}$, а $J(x^2) = \varnothing$.

Нелинейное программирование служит для выбора наилучшего плана распределения ограниченных ресурсов в целях решения поставленной задачи. В общем виде постановка задачи нелинейного программирования сводится к следующему. Условия задачи представляются с помощью системы нелинейных уравнений или неравенств, выражающих ограничение, налагаемое на использование имеющихся ресурсов.

$Z_1(X_1, X_2,...,X_n) \ge 0;$
$Z_2(X_1, X_2,...,X_n) \ge 0;$
....

$Z_m(X_1, X_2,...,X_n) \geq 0$;

при $X_i \geq 0$,

где $Z_1, Z_2,\ldots,Z_m$ – соответствующие функции, характеризующие условие решения поставленной задачи (ограничения); Xi – искомые величины, содержащие решение задачи.

Целевая функция задается в виде:

$y = f(X_1, X_2,\ldots, X_n)$.

Причем по крайней мере одна из функций y, $Z_1, Z_2,\ldots, Z_m$ – нелинейная.

Методами нелинейного программирования решаются задачи распределения неоднородных ресурсов.

Тема №7. Теория множителей Лагранжа, теорема Куна-Такера.

Метод множителей Лагранжа

Пусть рассматривается функция $z = f(x, y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x, y) = C$, называемому уравнением связи.

Точка (x_0, y_0) называется точкой *условного максимума* (*минимума*), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x, y) из этой окрестности удовлетворяющих условию $g(x, y) = C$, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (\; f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \;).$$

Точка условного максимума (минимума) не является точкой безусловного экстремума.

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим уравнение связи $g(x, y) = C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например, выразить *y* через *x*: $y = \phi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z = f(x, y) = f(x, \phi(x))$, то есть функцию *одной* переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x, y)$.

Найти точки максимума и минимума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Выразим из уравнения $3x+2y=11$ переменную y через переменную x и подставим полученное выражение $y=\dfrac{11-3x}{2}$ в функцию z. Получаем $z=x^2+2\left(\dfrac{11-3x}{2}\right)^2$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0=3$. Соответствующее значение функции $y_0=\dfrac{11-3x_0}{2}=1$. Таким образом, (3,1) – точка условного экстремума. ◄

В рассмотренном примере уравнение связи $g(x,y)=C$ оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется *метод неопределенных множителей Лагранжа*.

Рассмотрим функцию переменных трех

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[g(x,y)-C].$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа*, а λ - *множителем Лагранжа*.

Если точка (x_0,y_0) является точкой *условного экстремума* функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0,y_0,λ_0) является *точкой экстремума* функции $L(x,y,\lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0, \\ L'_y=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0, \\ \quad L'_\lambda=g_\lambda(x,y)-C=0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи.

Найти точки экстремума функции $z=x^2+2y^2$ при условии $3x+2y=11$Б используя метод множителей Лагранжа.

Составляем функцию Лагранжа $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$. Приравняем к нулю ее частные производные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение $x = 3, y = 1, \lambda = -2)$. Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка (3,1). Нетрудно убедиться, что в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум.

Теорема (обобщенное правило множителей Лагранжа).

Пусть $f_0, f, g \in C^1$, *а* x^* *— локальное решение задачи* $f_0(x) \to \min$, $f(x) = \Theta$, $g(x) \le \Theta$. *Тогда найдутся такие* $\lambda^*_0 \in \mathbf{R}$, $\lambda^* \in \mathbf{R}^k$, $\mu^* \in \mathbf{R}^l$, *не равные одновременно нулю, такие, что* $\mu^*_j \ge 0$ *при* $j \in \underline{J(x^*)}$ *и*

$$\lambda^*_0 f'_0(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^*_i f'_i(x^*) + \sum_{j \in \underline{J(x^*)}} \mu^*_j g'_j(x^*) = \Theta. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $r > 0$ таким, чтобы $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \Omega r} f(x)$, где $\Omega_r = \Omega \cap \underline{B(x^*, r)}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ определим функцию $f^n: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ равенством

$f^n(x) = f_0(x) + n(\|f(x)\|^2 + \|g_+(x)\|^2) + \|x - x^*\|^2$.

З а д а ч а 1. Докажите, что $f^n \in C^1$, в частности, покажите, что $(\|g_+(x)\|^2)' = 2g_+(x)g'(x)$.

Поскольку f^n непрерывно дифференцируемы и поэтому непрерывны, функции f^n на шаре $\underline{B(x^*, r)}$ достигают минимума; обозначим его через x^n. В частности,

$$f^n(x^n) \le f^n(x^*), \quad (6)$$

т. е.

$$f_0(x^n) + n(\|f(x^n)\|^2 + \|g_+(x^n)\|^2) + \|x^n - x^*\|^2 \le f^n(x^*).$$

Отсюда, поскольку, как легко видеть, $f^n(x^*) = f_0(x^*)$,

$$\|f(x^n)\|^2 + \|g_+(x^n)\|^2 \le \frac{1}{n}\,[f_0(x^*) - \|x^n - x^*\|^2 - f_0(x^n)],$$

Выражение в квадратных скобках ограничено, так как $x^n \in \underline{B(x^*,\ r)}$. Поэтому $\|f(x^n)\|^2 + \|g_+(x^n)\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $f(x^n) \to Q$ и $g_+(x^n) \to \Theta$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $\{x^n{}_i\}$ — произвольная сходящаяся, скажем к y, под последовательность. Тогда, как легко видеть, во-первых, $y \in \Omega$ и, во-вторых, $f^{ni}(x^{ni}) \to f_0(y) + \|y - x^*\|^2$ при $n \to \infty$. Поэтому, подставляя в <u>(6)</u> n_i вместо n и переходя к пределу в получившемся неравенстве при $i \to \infty$, получим

$$f_0(y) + \|y - x^*\|^2 \le f_0(x^*).$$

С другой стороны, так как $x^* = \operatorname{argmin} f(x)$, $f_0(x^*) \le f_0(y)$. Отсюда $\|y - x^*\|^2 \le 0$, т. е. $y = x^*$. Таким образом, любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x^n\}$ сходится к x^*. Последнее, учитывая компактность последовательности, гарантирует ее сходимость к тому же пределу.

Далее, в силу доказанного можно считать, что при всех n точка x^n лежит внутри шара $\underline{B(x^*,\ r)}$. Поэтому в силу теоремы Ферма $(f^n)'(x^n) = Q$, т. е.

$$f'_0(x^n) + 2\sum_{i=1}^{k} f_i(x^n) f'_i(x^n) + 2\sum_{j=1}^{l} [g_j(x^n)]_+ g'_j(x^n) + 2(x^n - x^*) = Q. \qquad (7)$$

Положим теперь

$$s^n = \left(1 + 4n^2 \sum_{i=1}^{k} [f_i(x^n)]^2 + 4n^2 \sum_{j=1}^{l} [g_j(x^n)]^2\right)^{-1/2},$$

$\lambda^n{}_0 = s^n$, $\lambda^n{}_i = 2nf_i(x^n)s^n$, $\mu^n{}_j = 2n[g_j(x^n)]_+ s^n$. Поскольку $\lambda^n{}_0, \lambda^n{}_j, \mu^n{}_j \in [-1,\ 1]$ ($n \in \mathbf{N}$; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$), можно считать, не ограничивая общности, что найдутся такие $\lambda^*{}_0, \lambda^*{}_i$ и $\mu^*{}_j$, что

$\lambda^\nu{}_0 \to \lambda^*{}_0$, $\lambda^\nu{}_\iota \to \lambda^*{}_\iota$, $\mu^\nu{}_\varphi \to \mu^*{}_\varphi$ при $n \to \infty$.

Умножив <u>(7)</u> на s^n и переходя в получившемся равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lambda^*_0 f'_0(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda^*_i f'_i(x^*)+\sum_{j=1}^{l}\mu^*_j g'_j(x^*)=\text{Q}. \tag{8}$$

Остается заметить, что, во-первых, так как $|\lambda^n_0|^2+\sum^k_{i=1}|\lambda^n_i|^2+\sum^l_{j=1}|\mu^n_j|^2=1$, не все из $\lambda^*_0, \lambda^*_\iota, \mu^*_j$ равны нулю, во-вторых, поскольку $\mu^n_j = 2n[g_j(x^n)]_+ s^n \geq 0$, неотрицательны и μ^*_jи, наконец, в-третьих, если $j \notin J(x^*)$ (т. е. $g_j(x^*) < 0$), то $g_j(x^n) < 0$ при больших n; поэтому $[g_j(x^*)]_+ = 0$, что влечет равенство $\mu^*_j = 0$ и, следовательно, равенство

$$\sum_{j=1}^{\lambda}\mu^*_j g'_j(x^*)=\sum_{j\in J(x^*)}\mu^*_j g'_j(x^*).$$

Таким образом (8) — это (5).

Регулярный случай

Так же, как и в случае ограничений-равенств в случае общей задачи нелинейной оптимизации, необходимый признак, только в случае, если $\lambda^*_0 \neq 0$. В этой ситуации, можно разделить (5) на λ^*_0 и, следовательно, считать его равным единице. Это позволяет ввести *функцию Лагранжа* L: $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ (*в регулярном случае*) равенством

$$\text{L}(x, \lambda, \mu) = f_0(x) + (\lambda, f(x)) + (\mu, g(x)).$$

Условие регулярности в случае общей задачи выглядит сложнее. Именно, допустимая точка x называется *регулярной*, если векторы $f'_1(x),..., f'_k(x)$линейно независимы и для некоторого ненулевого вектора $h \in \mathbf{R}^m$

$$(f'_i(x),h) = 0 \text{ при } i = 1, ..., k$$

и

$$(g'_j(x),h) < 0 \text{ при } j \in J(x).$$

Геометрически, эти условия означают, что, во-первых, вектор h является касательным к многообразию, выделяемому ограничениями-равенствами (т. е. ортогонален всем градиентам $f'_i(x)$),и, во-вторых, он образует с градиентами $g'_j(x)$активных ограничений (указывающими, очевидно, вовне множества Ω) тупой угол (см. рис. 2).

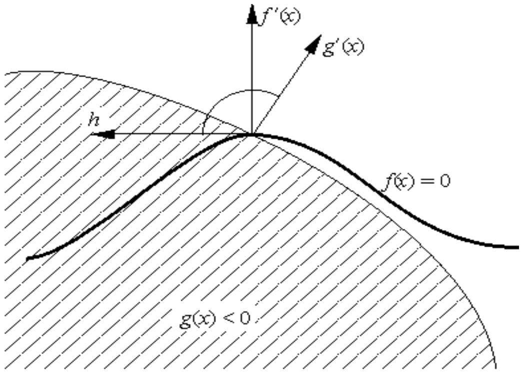


Рис. 1.

Теорема (обобщенное правило множителей Лагранжа в регулярном случае).

Пусть f_0, f, $g \in C^1$*, а* x^* *— регулярное локальное решение задачи* $f_0(x) \to \min$, $f(x) = \Theta$, $g(x) \le \Theta$*. Тогда найдутся* $\lambda^* \in \mathbf{R}^k$, $\mu^* \in \mathbf{R}^l$ *не равные одновременно нулю, такие, что* $\mu^*_j \ge 0$ *при* $j \in J(x^*)$ *и*

$$L'_x(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad (9)$$

$$(\mu^*, g(x^*)) = 0. \quad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ_0^{**}, λ^{**} и μ^{**} — величины, существование которых утверждается в теореме. Покажем, что $\lambda_0^{**} \ne 0$. В предположении противного умножим (5) скалярно на вектор h, фигурирующий в определении регулярности x^*:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{**}(f'_i(x^*), h) + \sum_{j \in J(x^*)} \mu_j^{**}(g'_j(x^*), h) = \Theta. \quad (11)$$

В силу регулярности $(f'_i(x^*), h) = 0$ и $(g'_j(x), h) < 0$, а по теореме $\mu_j^{**} \ge 0$ при $j \in J(x^*)$. Поэтому (11) влечет равенство $\mu^{**} = Q$. Но тогда (5) означает, что

$$\sum^{k} \lambda_i^{**} f'_i(x^*) = \Theta,$$

$i = 1$

что вместе с линейной независимостью $f'_i(x^*)$дает равенство $\lambda^{**} = Q$. Противоречие.

Таким образом $\lambda_0^{**} \neq 0$. Положим теперь $\lambda^*_i = \lambda_i^{**}/\lambda_0^{**}$ $(i = 1, ..., k)$,

$$\mu^*_j = \begin{cases} \mu_j^{**}/\lambda_0^{**} \text{при } j \in J(x^*), \\ 0 \text{ при } j \notin J(x^*). \end{cases}$$

Очевидно теперь, (10) выполняется автоматически, а (9) тривиально получается из (5).

Достаточные условия, существование, единственность

Ситуация с задачей (1)–(3) несколько отличается от изучавшихся ранее, поскольку минимумы здесь могут быть двух типов. В случае, когда в точке минимума x^* нет активных ограничений, т. е. $J(x^*) = \varnothing$, ситуация полностью аналогична описанной в предыдущем параграфе, поскольку ограничения-неравенства в окрестности точки x^* можно опустить (см. рис. 2а). В случае же, когда $J(x^*) \neq \varnothing$ минимум может достигаться на границе множества Ω и точка x^* может не быть стационарной точкой (см. рис. 2б).

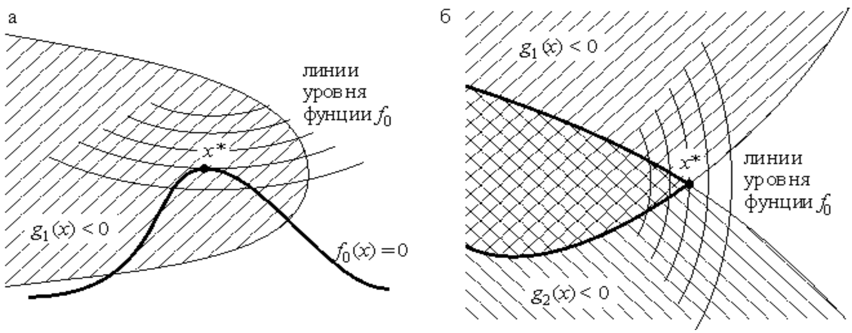


Рис.2

Мы ограничимся лишь формулировками результатов, поскольку в идейном плане они не доставляют ничего нового.

Теорема (достаточные условия минимума)

Пусть f_0, f, $g \in C^2$, а x^* — <u>*допустимая точка*</u> *такая, что для некоторых* $\lambda^* \in \mathbf{R}^k$ *и* $\mu^* \in \mathbf{R}^l$, *одновременно не равных нулю, выполнены условия* <u>*(9)*</u>*–*<u>*(10)*</u> *и при любых* $h \in \mathbf{R}^m$, $h \neq$ Q *таких, что*

$$(f'_i(x^*),h) = 0 \text{ при } i = 1, ..., k;$$

$$(g'_j(x^*),h) = 0 \text{ при } j \in \underline{J(x^*)},\ \mu^*_j > 0;$$

$$(g'_j(x^*),h) \geq 0 \text{ при } j \in \underline{J(x^*)},\ \mu^*_j = 0$$

выполнено неравенство $(\mathrm{L}''_{xx}(x^*,\lambda^*, \mu^*)h, h) > 0$. *Тогда* x^* — *локальное решение задачи* <u>*(1)*</u>*–*<u>*(3)*</u>.

Что касается утверждений о существовании и единственности, то ситуация с результатами, которые могут быть доказаны изученными выше приемами, полностью аналогична.

Об ограничениях-равенствах.

С целью упрощения изложения, начиная с этого момента, мы будем рассматривать задачу условной оптимизации, содержащую только ограничения-неравенства. Это, с одной стороны, не снижает общности изложения, поскольку ограничения-равенства сводятся к ограничениям-неравенствам: ограничение

$$f(x) = \mathrm{Q}$$

эквивалентно ограничениям

$$f(x) \leq \Theta, \quad \Box f(x) \leq \Theta.$$

С другой стороны, задачи с ограничениями-равенствами мы уже достаточно подробно рассматривали <u>выше</u>.

Здесь, правда, следует помнить об одном важном обстоятельстве. При решении задач с ограничениями-неравенствами часто бывает важна (существенно используется) выпуклость функций, фигурирующих в задаче, вернее, выпуклость минимизируемой функции f_0 и выпуклость множества Ω <u>допустимых точек</u>. Последнее гарантируется выпуклостью функций g_j в ограничениях-неравенствах. Множества же, выделяемые ограничениями-равенствами, не бывают выпуклыми, за исключением случая аффинных функций f_i. Поэтому методы решения задач условной оптимизации, существенно использующие "выпуклость задачи" могут применяться к задачам с ограничениями-равенствами с большой осторожностью.

Напомним, что множество $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ называется *выпуклым*, если $\square(x, y \in \Omega, \lambda \in [0, 1])[\lambda x + (1 \square \lambda)y \in \Omega]$.

Еще один достаточный признак условного минимума.

Напомним, что точка (x^*, λ^*) называется *седловой точкой функции* L: $\Omega_1 \cdot \Omega_2 \to \mathbf{R}$ $(\Omega_1 \subset \mathbf{R}^m, \Omega_2 \subset \mathbf{R}^l)$, если при всех $(x, \lambda) \subset \Omega_1 \cdot \Omega_2$ выполнены неравенства

$$L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*)$$

Теорема. *Пусть* (x^*, λ^*) — *седловая точка функции Лагранжа* L: $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^l_+ \to \mathbf{R}$ *задачи (1), (3) (здесь* $\mathbf{R}^l_+ = \{\lambda \in \mathbf{R}^l \colon \lambda \ge \Theta\}$*),* $\lambda^* \ge \Theta$, x^* — *допустимая точка. Тогда* x^* — *глобальное решение этой задачи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x — произвольная допустимая точка, т. е. $g_i(x) \le 0$ $(i = 1, ..., l)$. Тогда

$$f_0(x^*) + (\lambda^*, g(x^*)) = \mathrm{L}(x^*, \lambda^*) \le \mathrm{L}(x, \lambda^*) = f_0(x) + (\lambda^*, g(x)). \qquad (12)$$

Покажем, что

$$(\lambda^*, g(x^*)) = 0. \qquad (13)$$

Тогда из (12), поскольку $\lambda^* \ge \Theta$, а $g(x) \le \Theta$, будет следовать нужное неравенство $f_0(x^*) \le f_0(x)$. Для доказательства (13) заметим, что по условию теоремы $\mathrm{L}(x^*, \Theta) \le \mathrm{L}(x^*, \lambda^*)$, т. е.

$$(\lambda^*, g(x^*)) \ge 0. \qquad (14)$$

Равенство (13) вытекает теперь из (14), т.к. $\lambda^* \ge \Theta$, а $g(x^*) \le Q$.

Теорема Куна-Такера.

Пусть дана задача

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \min, \; h_j(x_1, \dots, x_n) \ge 0, \quad j = \overline{1, m} \qquad (1)$$

Составим функцию Лагранжа для этой задачи.

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = F(\mathbf{X}) - \sum_j^m u_j h_j(\mathbf{X})$$

Если допустимое множество **X**, определяемое вектор-функцией **H(X)>=**0, не пустое, то имеет место следующая теорема:

Вектор $\boldsymbol{X_o}$ *тогда и только тогда является решением задачи (1), когда существует такой вектор* $\boldsymbol{U_o}$*, что при* $\boldsymbol{X_o}$**>=0** *и* $\boldsymbol{U_o}$**>=0** *для всех* **X**>=0 *и* **U**>= 0 *справедливо*

$$L(X, U_0) \ge L(X_0, U_0) \ge L(X_0, U) \qquad (2)$$

Точка $(\mathbf{X_o},\mathbf{U_o})$ называется седловой точкой, т.к. здесь обеспечивается минимум по **X** и максимум по **U**.

Если функции $F(\mathbf{X})$, $h_j(\mathbf{X})$ дифференцируемы, то (2) можно заменить условиями Куна-Такера для всех $X_{io}>=0$ и $U_{jo}>=0$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)_{x_0U_0} \geq 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)_{x_0U_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right)_{x_0U_0} \geq 0 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right)_{x_0U_0} = 0$$

Тема №8. Задачи управления запасами, сетевые модели, системы массового обслуживание.

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф.Эджуорта и Ф. Харриса, появившимися в конце XIX – начале XX вв., в которых исследовалась простая оптимизационная модель определении экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта.

Запасами называется любой ресурс на складе, который используется для удовлетворения будущих нужд. Примерами запасов могут служить полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также такие специфические товары, как денежная наличность, находящаяся в хранилище. Большинство организаций имеют примерно один тип системы планирования и контроля запасов. В банке используются методы контроля за количеством наличности, в больнице применяются методы контроля поставки различных медицинских препаратов.

Простейшая схема системы управления запасами выглядит следующим образом (рис.1.):

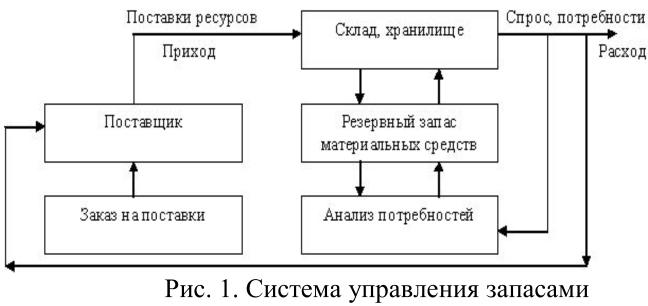


Рис. 1. Система управления запасами

Существуют причины, побуждающие организации создавать запасы:

1) дискретность поставок при непрерывном потреблении;
2) упущенная прибыль;
3) случайные колебания:
   - в спросе за период между поставками;
   - в объеме поставок;
   - в длительности интервала между поставками;
4) предполагаемые изменения конъюнктуры:
   - сезонность спроса;
   - сезонность производства;
   - ожидаемое повышение цен.

Имеются также причины, побуждающие предприятия стремиться к минимизации запасов на складе:

1) плата за физическое хранение запаса;
2) потери в количестве запаса;
3) моральный износ продукта.

Рассмотрим определяющие понятия теории управления запасами.

Издержки выполнения заказа (*издержки заказа*) - накладные расходы, связанные с реализацией заказа. В промышленности такими издержками являются затраты на подготовительно-заготовочные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль – издержки, связанные с неудовлетворительным спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенного дохода. Иногда к ним прибавляются издержки на покупку товаров.

Срок выполнения заказов – срок между заказом и его выполнением.

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

Модели управления запасами, ресурсами - экономико-математические модели, позволяющие рассчитать рациональную структуру использования ресурсов, оптимизировать запасы.

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов. В любой задаче управления запасами требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов.

В любой задаче управления запасами требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов.

<u>Спрос можно удовлетворить</u>

- путем однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени

или

- посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода.

Эти два случая соответствуют *избыточному* запасу (по отношению к единице времени) и *недостаточному* запасу (по отношению к полному периоду времени).

При *избыточном* запасе требуются более высокие удельные (отнесенные к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше.

При *недостаточном* запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают.

Для любого из этих двух крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

Обобщенная модель управления запасами.

Любая модель управления запасами в конечном счете должна дать ответ на два вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать?
2. Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос выражается через **размер заказа**, определяющего оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять всякий раз, когда происходит размещение заказа. В зависимости от рассматриваемой ситуации размер заказа может меняться во времени.

Ответ на второй вопрос зависит от типа системы управления запасами. Если система предусматривает **периодический контроль** состояния запасами через равные промежутки времени (еженедельно или ежемесячно), момент поступления нового заказа обычно совпадает с началом каждого интервала времени. Если же в системе предусмотрен **непрерывный контроль** состояния запаса, **точка заказа** обычно определяется *уровнем запаса*, при котором необходимо размещать новый заказ.

Таким образом, решение обобщенной задачи управления запасами определяется следующим образом:

1. *В случае периодического контроля состояния запаса* следует обеспечивать поставку нового количества ресурсов в объеме размера заказа через равные промежутки времени.

2. *В случае непрерывного контроля состояния запаса* необходимо размещать новый заказ в размере *объема запаса*, когда его уровень достигает *точки заказа*.

Размер и точка заказа обычно определяются из условий минимизации суммарных затрат системы управления запасами, которые можно выразить в виде функции этих двух переменных.

Суммарные затраты системы управления запасами выражаются в виде функции их основных компонент:

Суммарные затраты системы управления запасами	=	Затраты на приобретение	+	Затраты на оформление заказа	+	Затраты на хранение заказа		Потери от дефицита

Затраты на приобретение становятся важным фактором, когда цена единицы продукции зависит от размера заказа, что обычно выражается в виде *оптовых скидок* в тех случаях, когда цена единицы продукции убывает с возрастанием размера заказа.

Затраты на оформление заказа представляют собой постоянные расходы, связанные с его размещением. При удовлетворении спроса в течение заданного периода времени путем размещения более мелких заказов (более часто) затраты возрастают по сравнению со случаем, когда спрос удовлетворяется посредством размещения более крупных заказов (и, следовательно реже).

Затраты на хранение запаса, которые представляют собой расходы на содержание запаса на складе (затраты на переработку, амортизационные расходы, эксплуатационные расходы) обычно возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции.

Оптимальный уровень запаса соответствует минимуму суммарных затрат.

Модель управления запасами не обязательно должна включать все четыре вида затрат, так как некоторые из них могут быть незначительными, а иногда учет всех видов затрат чрезмерно усложняет функцию суммарных затрат. На практике какую-либо компоненту затрат можно не учитывать при условии, что она не составляет существенную часть общих затрат.

Типы моделей управления запасами.

Разнообразие моделей этого класса определяется характером спроса, который может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (задаваемым плотностью вероятности).

На рисунке приведена схема классификации спроса, принимаемая в моделях управления запасами.

Детерминированный спрос может быть **статическим**, в том смысле, что интенсивность потребления остается неизменной во времени, или **динамическим**, когда спрос известен достоверно, но изменяется от времени.

Вероятностный спрос может быть **стационарным**, когда функция плотности вероятности спроса неизменна во времени, и **нестационарным**, когда функция плотности вероятности спроса изменяется во времени.

В реальных условиях случай детерминированного статического спроса встречается редко. Такой случай можно рассматривать как простейший. Наиболее точно характер спроса может быть описан посредством вероятностных нестационарных распределений. Представленную классификацию можно считать представлением различных уровней абстракции описания спроса.

На первом уровне предполагается, что распределение вероятностей спроса стационарно во времени. Это означает, что для описания спроса в течение всех исследуемых периодов времени используется одна и та же функция распределения вероятностей. Это упрощение означает, что влияние сезонных колебаний спроса в модели не учитывается.

На втором уровне абстракции учитываются изменения от одного периода к другому, но при этом функции распределения не применяются, а потребности в каждом периоде описываются средней величиной спроса. Это упрощение означает, что элемент риска в управлении запасами не учитывается. Однако оно позволяет учитывать сезонные колебания спроса.

На третьем уровне упрощения исключаются как элементы риска, так и изменения спроса. Тем самым спрос в течение любого периода предполагается равным среднему значению известного (по предположению) спроса по всем рассматриваемым периодам. В результате этого упрощения спрос можно оценить его постоянной интенсивностью.

Хотя характер спроса является одним из основных факторов при построении модели управления запасами, имеются другие факторы, влияющие на выбор типа модели.

1. Запаздывания поставок или сроки выполнения заказов. После размещения заказа он может быть поставлен немедленно или потребуется некоторое время на его выполнение. Интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой называется запаздыванием поставки, или сроком выполнения заказа. Эта величина может быть детерминированной или случайной.

2. Пополнение запаса. Хотя система управления запасами может функционировать при запаздывании поставок, процесс пополнения запаса может осуществляться мгновенно или равномерно во времени. Мгновенное пополнение запаса может происходить при условии, когда заказы поступают от внешнего источника. Равномерное пополнение может быть тогда, когда запасаемая продукция производится самой организацией. В общем случае система может функционировать при положительном запаздывании поставки и равномерном пополнении запаса.

3. Период времени определяет интервал, в течение которого осуществляется регулирование уровня запаса. В зависимости от отрезка времени, на котором можно надежно прогнозировать, рассматриваемый период принимается конечным или бесконечным.

4. Число пунктов накопления запасов. В систему управления запасами может входить несколько пунктов хранения запаса. В некоторых случаях эти пункты организованы таким образом, что один выступает в качестве поставщика для другого. Эта схема иногда реализуется на различных уровнях, так что пункт-потребитель одного уровня может стать пунктом-поставщиком на другом уровне. В таком случае говорят о системе управления запасами с разветвленной структурой.

5. Число видов продукции. В системе управления запасами может фигурировать более одного вида продукции. Этот фактор учитывается при условии наличия некоторой зависимости между

различными видами продукции. Так, для различных изделий может использоваться одно и то же складское помещение или же их производство может осуществляться при ограничениях на общие производственные фонды.

Чрезвычайно трудно построить обобщенную модель управления запасами, которая учитывала бы все разновидности условий, наблюдаемых в реальных системах. Но если бы и удалось построить универсальную модель, она едва ли оказалась аналитически разрешимой. Рассмотрим модели, соответствующие некоторым системам управления запасами.

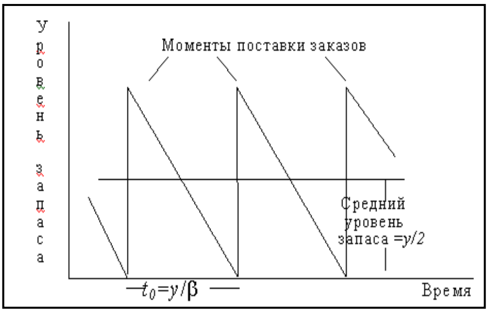
Детерминированные модели

1. Однопродуктовая статическая модель.

Модель управления запасами простейшего типа характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита. Такую модель можно применять в следующих типичных ситуациях:

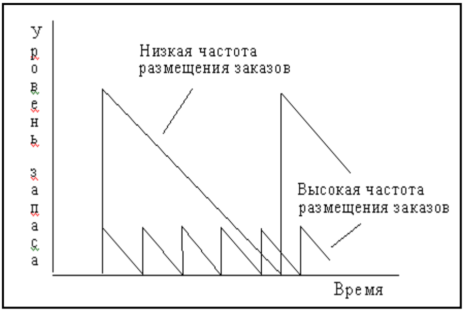
1. использование осветительных ламп в здании;
2. использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмы;
3. использование некоторых промышленных изделий, таких как гайки и болты;
4. потребление основных продуктов питания (например, хлеба и молока).

На рисунке показано изменение уровня запаса во времени.



Предполагается, что интенсивность спроса (в единицу времени) равна β. Наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером *y* (предполагается, что запаздывание поставки является заданной константой). Уровень запаса достигает нуля спустя y/β единиц времени после получения заказа размером *y*. Чем меньше размер заказа *y*, тем чаще нужно размещать заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже.

Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то величина *y* выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат. Это лежит в основе построения соответствующей модели управления запасами.



Пусть *K* – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении, h – затраты на хранение единицы заказа в единицу времени. Следовательно, суммарные затраты в единицу времени можно представить в виде:

$$C(y) = \frac{K}{y/\beta} + h\left(\frac{y}{2}\right)$$

Затраты на оформление заказа в ед. времени

Затраты на хранение запасов в ед. времени

Продолжительность цикла движения заказа составляет $t_0 = y/\beta$;

Средний уровень запаса равен $y/2$.

Оптимальное значение y получается в результате минимизации *C(y)* по *y*. Таким образом, в предположении, что *y* – непрерывная переменная, имеем:

$$\frac{dC(y)}{dy} = -\frac{K\beta}{y^2} + \frac{h}{2} = 0 \qquad (1)$$

откуда оптимальное выражение заказа определяется выражением:

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} \qquad (2)$$

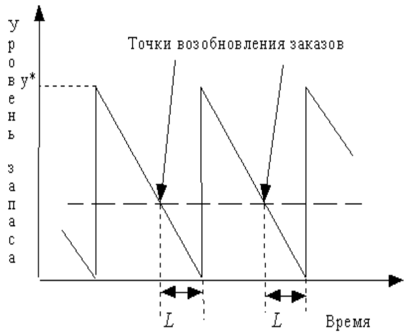
Можно доказать, что *y** доставляет минимум *C(y)*, показав, что вторая производная в точке *y** строго положительна.

Выражение (2) называют **формулой экономичного размера заказа Уилсона.**

Оптимальная стратегия модели предусматривает заказ y^* единиц продукции через каждые $t_0 = y^*/\beta$ единиц времени.

Оптимальные затраты: $C(y^*) = \sqrt{2K\beta h}$

(получены путем непосредственной подстановки).



Для большинства реальных ситуаций существует (положительный) **срок выполнения** заказа (временное запаздывание) L от момента размещения заказа до его действительной поставки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять **точку возобновления заказа**.

Следующий рисунок показывает случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на L единиц времени ожидаемую поставку. В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив **точку возобновления заказа** через **уровень запаса**, соответствующий моменту возобновлению.

На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. По этой причине эту модель еще называют **моделью непрерывного контроля состояния заказа**.

Следует заметить, что срок выполнения заказа L можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0^*.

Пример 1. Ежедневный спрос на некоторый товар (β) составляет 100ед. Затраты на размещение каждого запаса (K) постоянны и равны 100долл. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса (h) составляют 0,02долл. Определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12 дням.

Решение: Из формулы Уилсона получаем

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 100}{0{,}02}} = 1000 \text{ ед.}$$

Оптимальная продолжительность цикла составляет:

$t_0^* = y^*/\beta = 1000/100 = 10$ **дней.**

Оптимальная продолжительность цикла составляет:
$t_0^* = y^*/\ \beta = 1000/100 = 10$ дней.

Т.к. срок выполнения заказа равен 12 дням и продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа происходит, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса на 12-10=2 дня. Таким образом, заказ размером у*=1000 размещается, когда уровень запаса достигает 2*100=200ед.

Можно считать, что эффективный срок выполнения заказа равен L- t_0^* при $L > t_0^*$, при этом величина (L- t_0^*) меньше t_0^* и равен L в противном, здесь L - заданный срок выполнения заказа.

Для рассматриваемого примера определить точку заказа в следующих случаях:

а) срок выполнения заказа L=15 дней. (Ответ. 500ед.)

б) L=23 дня. (Ответ. 300ед.)

в) L=8 дней. (Ответ. 800ед.) г) L=10 дней. (Ответ. 0 ед.)

Пример 2. Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 сом. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 сом . Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 40 тыйын за один пакет. Необходимо определить: сколько пакетов должен заказывать владелец магазина для одной поставки; частоту заказов; точку заказа. Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение. Примем за единицу времени год, тогда $\nu = 500$ шт. пакетов в год, K=10 сом, s =0,4 сом/шт.·год. Поскольку пакеты супа заказываются со склада поставщика, а не производятся самостоятельно, то будем использовать модель Уилсона.

$$Q_w = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \approx 158$$ штук.

Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 штук. При расчете других параметров задачи будем использовать не Q^* = 158,11, а Q=158. Годовые затраты на УЗ равны

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25$$ сом в год.

Подачу каждого нового заказа должна производиться через $\tau = \frac{Q}{\nu} = \frac{158}{500} = 0{,}316$ года.

Поскольку известно, что в данном случае год равен 300 рабочим дням, то

$$\tau = 0{,}316 \text{ год} \cdot 300 \ \frac{\text{раб.дней}}{\text{год}} = 94{,}8 \approx 95$$ рабочих дней.

Заказ следует подавать при уровне запаса, равном $h_0 = \nu T_д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20$ пакетам, т.е. эти 20 пакетов будут проданы в течение 12 дней, пока будет доставляться заказ.

Сетевые модели.
Сетевое планирование и управление

Методы сетевого планирования и управления (СПУ), разработанные в начале 50-х годов, широко и успешно применяются для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, требующими участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов. Для оптимизации сложных сетей, состоящих из нескольких сотен работ, вместо ручного счета следует применять типовые макеты прикладных программ по СПУ, имеющиеся в составе математического обеспечения ЭВМ.

Сущность сетевого планирования и управления состоит в составлении математической модели управляемого объекта в виде сетевого графика или модели находящейся в памяти компьютера, в которых отражается взаимосвязь и длительность определенного комплекса работ. Сетевой график после его оптимизации средствами прикладной математики и вычислительной техники используется для оперативного управления работами.

Сетевое планирование применяется при управлении реализацией проектов в строительстве, инвестировании, научных разработках, создании новой техники, проведении массовых мероприятий и т.д.

Основные понятия сетевого планирования

Сетевой моделью (сетевым графиком, сетью) называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (научно-исследовательского, производственного и др.) в их логической и технологической последовательности.

Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме позволяет, во-первых, более четко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ. Таким образом, методы сетевого моделирования относятся к методам принятия оптимальных решений.

Математический аппарат теории графов базируется на теории графов.

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, называемых вершинами, и множества пар вершин, называемых ребрами.

Представление о графе можно получить, если рассмотреть некоторый геометрический многогранник, например куб. В кубе можно выделить два конечных множества, состоящих соответственно из восьми вершин и двенадцати ребер.

Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т.е. на каждом ребре задается направление, то граф называется *ориентированным*; в противном случае – *неориентированным*. Последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от одной вершины к другой, образует *путь*.

Граф называется *связанным*, если для любых его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется *несвязанным*. В экономике чаще всего используется два вида графов: дерево и сеть.

Дерево представляет собой связанный граф без циклов, имеющий исходную вершину (корень) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним называются *ветвями*.

Сеть – это ориентированный конечный связанный граф, имеющий начальную (источник) и конечную вершину (сток). Таким образом, сетевая модель представляет собой граф вида «сеть».

В экономических исследованиях сетевые модели возникают при моделировании экономических систем и процессов методами сетевого планирования и управления (СПУ).

Объектом управления в системах сетевого планирования и управления являются коллективы исполнителей, располагающие определенными ресурсами и выполняющие определенный комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку нового изделия, строительство объекта и т.п.

Основой СПУ является сетевая модель, в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий, отображающих процесс достижения определенной цели. Она может быть представлена в виде графика или таблицы.

Основные понятия сетевой модели: событие, работа и путь. На рис.1. графически представлена сетевая модель, состоящая из пяти событий и шести работ, продолжительность выполнения которых в некоторых единицах времени указана над работами.

Работа характеризует материальные действие, требующее использования ресурсов, или логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий.

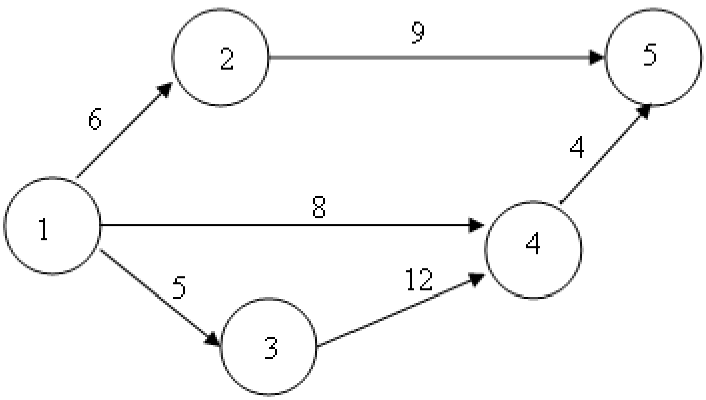


Рис.1. Сетевая модель

При графическом распределении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключенных в скобки чисел *(i, j),* где *i* – номер события, из которого работа выходит, а *j*- номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность *t(i,j).* Например, запись $t(2,5)=9$ означает, что работа (2,5) имеет продолжительность девять единиц времени выполнения. Они заключаются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой и не может выполняться, прежде чем данная работа будет завершена. Такие работы называются фиктивными и на графике изображаются пунктирными стрелками.

Событиями называются результаты выполнения одной или нескольких работ.

События не имеют протяженности во времени. События свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ. Входящая в него. Событие обозначается одним числом и при графическом представлении сетевой модели изображается кружком (или геометрической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер ($i= 1,2, \ldots, N$). В сетевых моделях имеется *начальное событие* (с номером 1), из которого работы только выходят, и *конечное событие* (с номером N), в которое работы только входят.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющихся начальную и конечную вершины.

В частности, в приведенной на рис.1. модели путями являются L_1=(1,2,5), L_2= (1,4,5) и др. продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называются критическим и обозначают $L_{кр}$, а его продолжительность – $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву всего комплекса.

Правила построения сетевых моделей.

Сетевые модели имеют ряд характеристик, которые позволяют определить степень напряженности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов в случае необходимости. Однако перед расчетом сетевой модели следует убедиться, что она удовлетворяет следующим требованиям.

1. События правильно пронумерованы, т.е. для каждой работы (i,j) $i<j$. При выполнении этого требования необходимо использовать алгоритм пронумерованы событий, который заключается в следующем:

- нумерация событий начинается с исходного события, которому присваивается №1;
- из исходного события вычеркивают все исходящие из него работы (стрелки), и на оставшейся сети находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему и присваивают №2;
- затем вычеркивают работы, выходящие из события №2, и вновь

находят событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивают №3, и так продолжается до завершающего события, номер которого должен быть равен количеству событий в сетевом графике;

- если при очередном вычеркивании работ одновременно несколько событий не имеют входящих в них работ, то их нумеруют очередными номерами в произвольном порядке.

2. Отсутствуют тупиковые события (кроме завершающего), т.е. такие, за которыми не следует хотя бы одна работа.
3. Отсутствуют события (за исключением исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.
4. Отсутствуют циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

Расчет характеристик сетевых моделей.

Для события рассчитывают *три* основные характеристики: ранний и поздний сроки свершения события. А также их резерв.

Ранний срок свершения события определяется величиной наиболее длительного отрезка пути от исходного до рассматриваемого события, причем $t_р$=1, а $t_р(N) = t_{кр}(L)$:

$$t_p(j) = \max_i \left\{ t_p(i) + t(i,j) \right\}; \quad j = \overline{2, N} \quad (1)$$

Поздний срок совершения события характеризует самый поздний допустимый срок, к которому должно свершиться событие, не вызывая при этом срыва срока свершения конечного события:

$$t_n(i) = \min_j \left\{ t_n(j) - t(i,j) \right\}; \quad i = \overline{2, N-1} \quad (2)$$

Данный показатель определяется «обратным ходом», начиная с завершающего события, с учетом соотношения $t_n(N) = t_p(N)$.

Все события, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют резерв времени $R(i)$:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \quad (3)$$

Резерв времени показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление данного события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Для всех работ *(i,j)* на основе ранних и поздних сроков свершения событий можно определить следующие показатели:

- ранний срок начала –

$$t_{рн}(i,j) = t_p(i) \quad (4)$$

- ранний срок окончания –

$$t_{po}(i,j) = t_p(i) + t(i,j) \quad (5)$$

- поздний срок окончания –

$$t_{no}(i,j) = t_n(j) \quad (6)$$

- поздний срок начала –

$$t_{nн}(i,j) = t_n(j) - t(i,j) \quad (7)$$

- полный резерв времени –

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j) \quad (8)$$

- независимый резерв времени –

$$R_н(i,j) = \max\{0; t_p(j) - t_n(i) - t(i,j)\} \quad (9)$$

или $$R_н(i,j) = \max\{0; R_n(i,j) - R(i) - R(j)\} \quad (10)$$

Полный резерв времени показывает, на сколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Независимый резерв времени соответствует случаю, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Путь характеризуется двумя показателями – продолжительностью и резервом. *Продолжительность пути* определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Резерв определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей. Из этого определения следует, что работы, лежащие на критическом пути, и сам критический путь имеют нулевой резерв времени резерв времени пути показывает, на сколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности общего срока выполнения всех работ.

Пример.

В машину грузоподъемностью 35 т. загрузить предметы с наибольшей суммарной ценой (полезностью). Характеристика предметов дана в таблице:

Номер предмета i	1	2	3	4	5	6
Вес q_i т.	4	7	11	12	16	20
Цена P_i тыс. сом	7	10	15	20	27	34

Q=35 т.

Подберем какой-нибудь вариант, чтобы его оценку использовать как первую границу при отсечении ветвей. В дальнейшем эта оценка может изменяться, если в процессе анализа будет получено лучшее решение. Итак, загружаем самый тяжелый (шестой) груз (i=6, q_6=20). Остаток грузоподъемности равен 35-20=15 т. Теперь можно загрузить третий груз (i=3, q_i=11). Остаток грузоподъемности равен 15-11=4 т. Единственная оставшаяся возможность – догрузить первый груз (i=4, q_1=4).

Получили вариант загрузки 6–3–1, $\sum_{i=1}^{6} q_i x_i = 20 + 11 + 4 = 35$ т.

$\sum_{i=1}^{6} \eth_i x_i = 34 + 15 + 7 = 56$ – значение целевой функции.

Начинаем строить дерево и оценивать ветви.

Первый шаг показан на рис. 2.

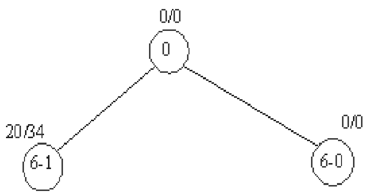


рис.2

Дерево строится перевернутым – корни вверху, ветви внизу: так удобнее их строить. Каждый кружок изображает некоторое состояние. Внутри кружка записываются номер груза, добавляемого на очередном шаге, и его количество. Над кружками через вертикальную черту показываются: слева – достигнутая загрузка ранца (машины), справа – суммарная цена (полезность) загруженных предметов. Корень дерева фиксирует начало построения. Загружено 0 предметов (внутри кружка), общая загрузка 0 т (слева над кружком), общая цена 0 (справа над кружком).

Производим первое ветвление, в данном случае дихотомию: берем или не берем самый тяжелый (шестой) груз. Слева: шестой груз берется (1), при этом в машину будет загружено 20 т и цена будет равна 34. Справа: шестой груз не берется (0), загрузка и цена равны нулю.

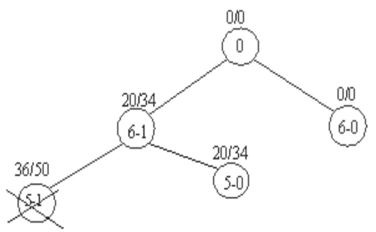


Рис. 3

Дальнейшее построение дерева показано на рис. 3.

Над состоянием (6–1) производим дихотомию, пытаясь загрузить пятый груз. Налево (5−1), направо (5−0). Но ветвь (5−1) недопустима, т.к. при этом будет загружено 36 т, что превышает грузоподъемность (35 т). Ветвь (5−1) отсекается, на рисунке зачеркивается. Дальнейшее развитие системы показано на рис. 4.

Рассматриваем ветвь (6−1)–(5–0). Так как пятый предмет не берется, загрузка машины и общая цена груза не изменяются, над состоянием (5–0) записаны те же числа (20/34), что и над предыдущим состоянием (6–1).

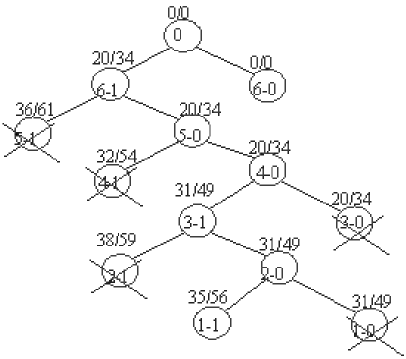


Рис. 4

Строим ветви из состояния (5–0), дихотомия (4–1) и (4–0). Вариант (4–1) возможен, но неэффективен. У состояния (4–1) нет дальнейшего развития, т. к. загрузка равна 32 т, оставшаяся грузоподъемность равна 35-33=3 т. и ни одного предмета догрузить нельзя. Допустимая цена груза равна 54<56, где 56 – полученная нами предварительная оценка целевой функции. Поэтому вариант (4–1) отбрасывается.

Развиваем состояние (4–0). Две ветви (3–1) и (3–0). Анализируем (3-1): загрузка 31, цена 49. Развиваем (3−1) на две ветви (2−1) и (2–0). Состояние (2−1) имеет загрузку 38 т., превышающую грузоподъемность. Ветвь (2–1) недопустима и поэтому отбрасывается.

Из (2−1) возвращаемся назад в (3−1) и идем по правой ветви в (2–0), у которой грузоподъемность и оценка равны соответственно 31/49. Из состояния (2–0) есть два пути: (1−1) и (1–0). Оценка (1−1) равна 35/56, допустима загрузка, а цена не меньше установленной оценки 56. Оставляем ветвь (1−1) для дальнейшего анализа. Т. к. (1−1) не имеет продолжений, возвращаемся обратно в (2–0) и анализируем вариант (1–0). Он допустим, но по цене 49 меньше оценки 56, поэтому вариант (1–0) отбрасывается.

Проанализируем, как мы двигались по дереву. Начиная от корня (0), пошли вниз и налево. И так всегда – при анализе нового состояния производили дихотомию и двигались по левой ветви, оставляя правую для дальнейшего анализа. Как только упирались в тупик, из которого дальнейшее движение вниз невозможно, как, напр., из состояний (5–1), (4–1), (2–1) и (1–1), то возвращались на шаг назад и начинали анализировать свободную (неразвитую) правую ветвь. Такой принцип (справа налево, а потом направо) не единственный, но нужен какой-то принцип, чтобы не запутаться и не оставить ни одной ветви без анализа.

Из достигнутого состояния (1–0) возвращаемся обратно в (2–0), но нет неанализированных (свободных) ветвей. Последовательно возвращаемся обратно, но свободную ветвь находим только в самом корне (0). Следовательно, все варианты от (0) в направлении (6–1) рассмотрены и лучшим оказался вариант (6–3–1), который был нами выявлен в предварительном анализе. Переходим к анализу состояния (6–0). На рисунок 5 перенесем дерево с рисунка 4, оставив только продуктивные ветви, т.е. такие, которые допустимы и увеличивают загрузку и цену.

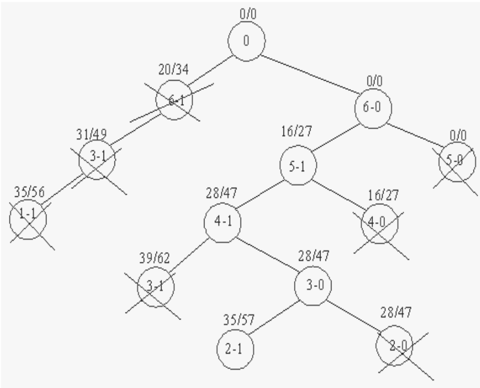


Рис. 5

Состояние (6–0) анализируется так же, как раньше анализировалось (6–1). Обрывается ветвь от (4–1) на (3–1), т.к. загрузка превышает грузоподъемность (39>35). Состояние (2–1) оказывается конечным, т.к. достигнута загрузка 35 т и больше ничего загрузить нельзя. Но в состоянии (2–1) цена равна 57, что больше, чем в найденном ранее варианте (6–3–1). Поэтому ветвь (6–1)–(3–1)–(1–1) отбрасываем (зачеркиваем). Лучшим становится вариант (5–4–2) с загрузкой 35 т и ценой 57. Изменяем теперь оценку границы с 56 на 57. Это значит, что ветви, по которым невозможно превысить цену 57, должны быть отброшены.

Из (2–0) возвратимся в состояние (4–0) и оценим его перспективность. Загрузка (4–0) равна 16, а цена 27. Оставшаяся свободная грузоподъемность равна 35-16=19 т. Наибольший прирост цены можно получить, догрузив предметы 3 и 2; при этом цена возрастет на 25 и станет равна 27+25=52, что меньше уже достигнутой цены 57. Следовательно, ветвь на (4–0) бесперспективна и ее нужно оборвать.

Возвращаемся в состояние (5–0) с загрузкой 0 и ценой 0. Оставшиеся предметы (4, 3, 2, 1) имеют общий вес 34, и их можно погрузить. При этом цена груза составит 20+15+10+7=52, что меньше 57. Значит эта ветвь не перспективна, обрываем ее. Отсечение особенно успешно было проведено в состояниях (5-0) и (4-0), что существенно сократило перебор.

Оптимальным по цене оказался вариант загрузки предметов 5, 4 и 2, общий вес при котором равен 35 т, а цена 57. Применение метода ветвей и границ дает уверенность, что оптимальный вариант не потерян.

Понятие системы массового обслуживания.

Становление теория массового обслуживания было вызвано интересом к математическим задачам, возникающим в организации телефонных сетей, датского инженера А. К. Эрланга, первые публикации которого относятся к 20-м годам 20 века. Теория массового обслуживания получила дальнейшее развитие в 40—50-х годах в работах К. Пальма (Швеция), Ф. Поллачека (Франция), А. Я. Хинчина (СССР). Последнему принадлежит сам термин «Теория массового обслуживания». Эти работы были продолжены советским математиком Б. В. Гнеденко и другими. Развитие теория массового обслуживания в значительной мере стимулируется расширением круга её применений. Являясь формально частью теории случайных процессов, теория массового обслуживания выделилась в самостоятельную область исследований со своим кругом задач и методов их решения и в свою очередь стимулирует развитие теории случайных процессов.

Данная теория позволяет изучать системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера. Случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание. Целью методов теории является отыскание разумной организации обслуживания, обеспечивающей заданное его качество, определение оптимальных (с точки зрения принятого критерия) норм дежурного обслуживания, надобность в котором возникает непланомерно, нерегулярно.

Системы массового обслуживания - это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

1. посты технического обслуживания автомобилей;
2. посты ремонта автомобилей;
3. персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
4. станции технического обслуживания автомобилей;
5. аудиторские фирмы;
6. отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
7. телефонные станции и т. д.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

- ✓ источник требований;
- ✓ входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- ✓ дисциплина очереди;
- ✓ обслуживающие устройства (каналы обслуживания)
- ✓ механизм обслуживания
- ✓ выходящий поток требованийю

Входной поток требований. Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

Дисциплина очереди - это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- ✓ первым пришел — первый обслуживаешься;
- ✓ пришел последним — обслуживаешься первым;
- ✓ случайный отбор заявок;
- ✓ отбор заявок по критерию приоритетности;
- ✓ ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечений некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.). Прежде всего следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс. По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы марковские и немарковские. В марковских системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими. Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему. В случае немарковских процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

Классификация СМО

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. В зависимости **от условий ожидания** начала обслуживания различают:

- СМО с потерями (отказами);
- СМО с ожиданием.

В СМО с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь. Классическим примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и покидает систему.

В СМО с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с ограниченным ожиданием может ограничиваться:

- ✓ длина очереди;
- ✓ время пребывания в очереди.

В системах с неограниченным ожиданием заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.

2. Все системы массового обслуживания различают **по числу каналов** обслуживания:

- ✓ одноканальные системы;
- ✓ многоканальные системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

3. По **месту нахождения источника** требований СМО подразделяются на:

- разомкнутые, когда источник требования находится вне системы;
- замкнутые, когда источник требования находится в самой системе.

Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров. Здесь неисправные телевизоры – это источник требований на их обслуживание, они находятся вне самой системы, поэтому число требований можно считать неограниченным. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, источником требований на их обслуживание, например, бригадой наладчиков.

Возможны и другие признаки классификации СМО, например, по дисциплине обслуживания. Однофазные и многофазные СМО и др.

Методы анализа СМО.

Методы и модели, применяемые в теории массового обслуживания, можно условно разделить на аналитические и имитационные.

Аналитические методы теории массового обслуживания позволяют получить характеристики системы как некоторые функции параметров ее функционирования. Благодаря этому появляется возможность проводить качественный анализ влияния отдельных факторов на эффективность работы СМО.

Имитационные методы основаны на моделировании процессов массового обслуживания на ЭВМ и применяются, если невозможно применение аналитических моделей. Далее будем рассматривать аналитические методы моделирования СМО.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является простейшим (пуассоновским).

Для простейшего потока частота поступлений требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время t ровно k требований задается формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1)$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами:
1) ординарностью 2) стационарностью 3) отсутствием последствия.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ – параметр распределения Пуассона), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последствия означает, что число требований, поступивших в систему до момента t, не определяют того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до t+Δt.

Например, если на ткацком станке в данный момент времени произошел обрыв нити и он устранен ткачихой, то это не определяет, произойдет новый обрыв на данном станке в следующий момент или нет, тем более это не влияет на вероятность возникновения обрыва на других станках.

Важная характеристика СМО – время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и особенно в практических приложениях получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Функция распределения для этого закона имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (2)$$

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(x) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \quad (2)$$

где μ- интенсивность обслуживания

Потоки заявок и обслуживании простейшие.

Пусть система работает с ***отказами***. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рис. 1), у которого имеются два состояния:

S_0 - канал свободен (ожидание);

S_1 - канал занят (идет обслуживание заявки).

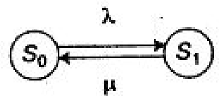


Рис. 1. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний: $P_0(t)$ - вероятность состояния «канал свободен»; $P_1(t)$ - вероятность состояния «канал занят». По размеченному графу состояний (рис.1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t). \end{cases} \qquad (3)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (3) имеет решение с учетом нормировочного условия $P_0(t) + P_1(t) = 1$. Решение данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad (4)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = 1\,. \qquad (5)$$

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q.

Действительно, P_0 - вероятность того, что в момент t канал свободен и заявка, пришедшая к моменту t, будет обслужена, а следовательно, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно $P_0(t)$, т. е.

$$q = P_0(t), \quad (6)$$

По истечении большого интервала времени (при $t \rightarrow \infty$) достигается стационарный (установившийся) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}, \quad (7)$$

Зная относительную пропускную способность, легко найти абсолютную. Абсолютная пропускная способность (A) - среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}. \qquad (8)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$P_{отк} = P_1 = \mathbf{1} - P_0 = \mathbf{1} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (9)$$

Данная величина $P_{отк}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример 1. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ = 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- ✓ относительной пропускной способности q;
- ✓ абсолютной пропускной способности A;
- ✓ вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускной способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение.

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555 .$$

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0{,}555}{1 + 0{,}555} = 0{,}356 .$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356 .$$

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644 .$$

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{0,8} = 0,555$$ (автомобилей в час).

Оказывается, что $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

В подавляющем большинстве случаев на практике системы массового обслуживания являются многоканальными, и, следовательно, ***модели с n обслуживающими каналами*** (где $n > 1$) представляют несомненный интерес.

Процесс массового обслуживания, описываемый данной моделью, характеризуется интенсивностью входного потока λ при этом параллельно может обслуживаться не более n клиентов (заявок). Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равняется $\frac{1}{\mu}$. ходной и выходной потоки являются пуассоновскими. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, причем длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования n параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышении (по сравнению с одноканальной системой) скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно n клиентов.

Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами имеет вид, показанный на рис. 2

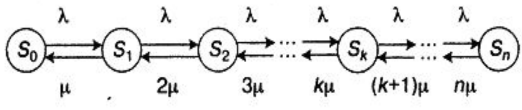


Рис. 2 Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

……………………………………………………….

S_k - заняты ровно k каналов, остальные свободны;

……………………………………………………….

S_n - заняты все n каналов, остальные свободны;

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы $P_0, \dots, P_k, \dots P_n$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k + \mu \cdot (k+1) \cdot P_{k+1}, \quad 1 \le k \le n-1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n \end{cases} \qquad (10)$$

Начальные условия решения системы таковы:

$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = \dots = P_1(0) = 0$.

Стационарное решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\dfrac{\psi^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\psi^k}{k!}} = \dfrac{\psi^k}{k!} \cdot P_0, \quad k = 0,1,2,\dots,n \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\psi^k}{k!}}, \quad k = 0,1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (11)$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формулы для вычисления вероятностей P_k называются формулами Эрланга.

Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме:

- вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0 \qquad (12)$$

так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все n каналов заняты. Величина $P_{отк}$ характеризует полноту обслуживания входящего потока;

- вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (она же - относительная пропускная способность системы q) дополняет $P_{отк}$ до единицы:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0 \qquad (13)$$

- абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{отк}) \qquad (14)$$

- среднее число каналов, занятых обслуживанием ($\bar{k}$) следующее:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \psi \cdot (1 - P_{отк}) \qquad (15)$$

Величина $\bar{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример 2. Пусть n-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (n = 3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ=1 задаче в час. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{обсл}$ = 1,8 час. Поток заявок на решение задач и поток обслуживания этих заявок являются простейшими.

Требуется вычислить финальные значения:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение

1. Определим параметр μ потока обслуживании:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$$

2. Приведенная интенсивность потока заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0,555} = 1,8$$

3. Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эр-

ланга:

$$P_1 = \frac{\psi}{1!} \cdot P_0 = 1{,}8 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} \cdot P_0 = 1{,}62 \cdot P;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = 0{,}97 \cdot P;$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\psi^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} \approx 0{,}18;$$

$$P_1 \approx 1{,}8 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}344;$$

$$P_2 \approx 1{,}62 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}301;$$

$$P_3 \approx 0{,}97 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}18.$$

4. Вероятность отказа в обслуживании заявки

$$P_{отк} = P_3 = 0{,}18$$

5. Относительная пропускная способность ВЦ

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

6. Абсолютная пропускная способность ВЦ

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}82 = 0{,}82$$

7. Среднее число занятых каналов – ПЭВМ

$$\bar{k} = \psi \cdot (1 - P_{отк}) = 1{,}8 \cdot (1 - 018) = 1{,}476$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех - остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев. Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.

Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходили 0,0180. Для этого используем формулу:

$$P_{отк} = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0$$

Составим следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,266	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{отк}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Рассмотрим ***многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием***. Процесс массового обслуживания при этом характеризуется следующим: входной и выходной потоки являются пуассоновскими с интенсивностями λ и μ соответственно; параллельно обслуживаться могут не более *S* клиентов. Система имеет *S* каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна – 1/ μ.

В установившемся режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1)\mu \cdot P_{n+1}, \qquad при \quad 1 \le n < S$$
$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + S \cdot \mu) \cdot P_n + S \cdot \mu \cdot P_{n+1}. \qquad при \quad n \ge S \qquad (16)$$

Решение системы уравнений (16) имеет вид

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\psi^n}{n!} \cdot P_0, & при \quad 1 \le n < S \\ P_n = \dfrac{\psi^n}{S! S^{n-S}} \cdot P_0, & при \quad n \ge S \end{cases} \qquad (17)$$

где

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!\left[1 - \dfrac{\psi}{S}\right]} \right\}^{-1} \qquad (18)$$

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие: $\left[\dfrac{\lambda}{\mu \cdot S} < 1\right]$.

С использованием метода математического моделирования можно определить, например, оптимальное количество автоматически действующих машин, которое может обслуживаться одним рабочим или бригадой рабочих и т.п.

Типичным примером объектов теории массового обслуживания могут служить автоматические телефонные станции - АТС. На АТС случайным образом поступают “требования” - вызовы абонентов, а “обслуживание” состоит в соединении абонентов с другими абонентами, поддержание связи во время разговора и т.д.

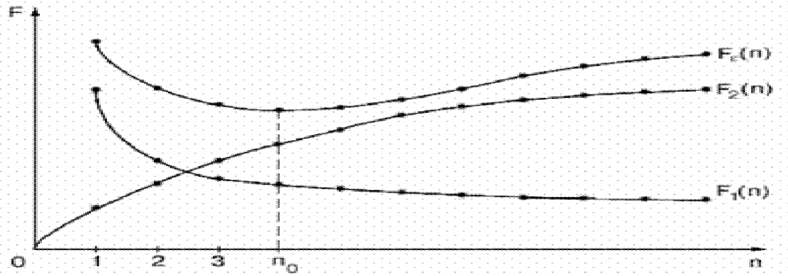


Рис.3.

Они связаны с исследованиями и анализом систем обслуживания с очередями заявок. С явлением образования очередей приходится сталкиваться в производственной практике и повседневной жизни. А также очереди клиентов в ателье бытового обслуживания; покупателей возле касс универмага и т.д.

Очереди возникают вследствие того, что поток заявок (абонентов) не управляем и случаен, а количество приборов обслуживания n (взлетно-посадочных полос аэродрома, приемщиков в ателье или кассиров в магазине) ограничено. Если количество приборов обслуживания взять довольно большим, то очереди будут образоваться редко и среднее время ожидания в очереди $\overline{\tau_\gamma}$ будет небольшим, но неизбежны продолжительные простои приборов обслуживания. Если, наоборот, количество приборов обслуживания маленькое, то возникают большие очереди и имеют место большие потери из-за ожидания в очереди: $F_1(\tau_\gamma) = r_1\tau_\gamma$, где r_1- затраты на единицу времени ожидания. Поэтому одна из возможных задач массового обслуживания следующая: определить такое число приборов n_0 при котором минимизируется сумма ожидаемых потерь от ожидания в очереди $F_1(n)$ и простоев оборудования $F_2(n)$ (см. Рис.3):

$$F_{\Sigma}(n) = F_1(n) + F_2(n) \to \min_{n}$$

Задачи теории, сформулированные математически, обычно сводятся к изучению специального типа случайных процессов.

Исходя их данных вероятностных характеристик поступающего потока вызовов и продолжительности обслуживания и учитывая схему системы обслуживания, теория определяет соответствующие характеристики качества обслуживания (вероятность отказа, среднее время ожидания начала обслуживания т.п.).

Тема №9. Метод динамического программирования.

В начале 50-х годов прошлого века американский исследователь Р. Беллман привлек внимание к новому методу решения оптимизационных задач, в основе которого лежит сведение данной задачи к последовательности однотипных, притом более простых задач. В тех случаях, когда изучаемый процесс разворачивается во времени, такое расчленение на более простые задачи обусловлено хронологией процесса. Однако и в тех случаях, когда фактор времени вообще не присутствует, часто оказывается возможным расчленение задачи на ряд более простых, когда условия каждой следующей задачи зависят от результатов решения предыдущей. Грубо говоря, оптимизационную задачу с $N_1 \cdot N_2$ неизвестными сводят к последовательности N_1 задач, решаемых по цепочке, причем в каждой из них участвует N_2 неизвестных. Метод, предложенный Р. Беллманом, получил название метода динамического программирования. Реализация различных задач оптимизации связана, как обычно, с ЭВМ. Тем более это относится к задаче динамического программирования, где решение задачи есть, как правило, трудоемкий процесс, связанный с большим объемом вычислений.

Программирование – это планирование, динамическое – значит в движении, в развитии во времени. Динамическое программирование – метод планирования развития сложных систем во времени. Напр., вывод ракеты на заданную орбиту вокруг Земли, развитие предприятия, динамическое распределение ресурсов, развитие транспортной системы и т.д.

Динамическое программирование (планирование) служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтапных действий. Для многоэтапных действий характерно протекание во времени. Кроме действий, естественно носящих многоэтапный характер (например, перспективное планирование), в ряде задач прибегают к искусственному расчленению на этапы, с тем, чтобы сделать возможным применение метода динамического программирования.

В общем виде постановка задачи динамического программирования сводится к следующему:

Имеется некоторая управляемая операция (целенаправленное действие), распадающаяся (естественно или искусственно) на m шагов – этапов. На каждом шаге осуществляется распределение и перераспределение участвующих в операции с целью улучшения ее результата в целом. Эти распределения в динамическом программировании называются управлениями операцией и обозначаются буквой U. Эффективность операции в целом оценивается тем же показателем, что и эффективность ее управления W (U).

При этом эффективность управления W(U) зависит от всей совокупности управлений на каждом шаге операции:

$W = W(U) = W(U1, U2, ..., Um)$.

Управление, при котором показатель W достигает максимума, называется оптимальным управлением. Оптимальное управление обозначается буквой U.

Оптимальное управление многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$U = (U1, U2, ..., Um)$.

Задача динамического программирования – определить оптимальное управление на каждом шаге Ui (i = 1, 2, …, m) и, тем самым, оптимальное управление всей операцией в целом.

В большинстве практических задач принимается, что показатель эффективности операции W в целом представляет собой сумму эффективности действий на всех этапах (шагах) операции:

$W = \sum \omega i$,

где ωi – эффективность операции на i-м шаге.

При этом в случае оптимального управления

$W = \max \sum \omega i$

Существо решения динамического программирования заключается в следующем:

– Оптимизация производится методом последовательных приближений (итераций) в два круга; в начале от последнего шага операции к первому, а затем наоборот от первого к последнему;

– На первом круге, идя от последующих шагов к предыдущим, находится так называемое условное оптимальное управление;

– Условное оптимальное управление выбирается таким, чтобы все предыдущие шаги обеспечивали максимальную эффективность последующего шага, иными словами, на каждом шаге имеется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение операции; этот принцип выбора управления называется принципом оптимальности;

– Так продолжается до первого шага, но поскольку первый шаг не имеет предыдущего, то полученное для него условное оптимальное управление теряет свой условный характер и становится просто оптимальным управлением, которое мы ищем;

– Второй круг оптимизации начинается с первого шага, для которого оптимальное управление известно.

Имея для всех шагов после него условное оптимальное управление, мы знаем, что необходимо делать на каждом последующем шаге. Это дает нам возможность последовательно переходить от условных к оптимальным управлениям дл всех последующих шагов, что обеспечивает оптимальность операции в целом.

Пусть имеется m типов различных грузов, которыми необходимо загрузить транспортное средство таким образом, чтобы общая ценность груза W была максимальной. Ценность груза является функцией от грузоподъемности транспортного средства:

$W = f(G)$

Известны массы грузов i-го типа P_i и их стоимости Ci.

Необходимо загрузить транспортное средство таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной:

$W = f_m(G) = \max \sum x_i C_i$,

где x_i – число предметов груза i-го типа, загружаемых в транспортное средство; xi выступает здесь в качестве управления (Ui=xi)

Ограничивающими условиями являются:

$\sum x_i P_i \leq G$

$x_i = 0, 1, 2...$

Первое условие требует, чтобы общая масса груза не превышала грузоподъемности транспортного средства, а второе – чтобы предметы, составляющие груз различных типов, были неделимы.

Введем основные понятия. Система – объект, имеющий сложную структуру, изменяющий свое состояние во времени. Самое простое определение: система есть целое, состоящее из частей.

Управляемая система – объект, который в результате воздействия человека или автомата изменяет свое состояние. Поведение – изменение состояний во времени. Состояния системы отражаются некоторыми показателями, которые называются фазовыми координатами. Пусть вектор $x_1, x_2, ..., x_m$ есть набор фазовых координат. Любой фиксированный набор фазовых координат, отвечающий ограничениям, отражает одно из возможных состояний системы. Итак, состояние – это набор фазовых координат, или точка с координатами $x_1, ..., x_i, ..., x_m$ в m-мерном пространстве. Траектория – множество состояний системы, которые она последовательно проходит в своем развитии (движении). В фазовом пространстве траектория есть линия, содержащая все точки, в которых находилась или находится система. Управление – воздействие на систему, переводящее ее из одного состояния в другое. Если рассматривается движение системы за некоторый отрезок времени, то начальное и конечное состояния – это точки, в которых находилась система в начальном и конечном моментах. При планировании развития системы может быть множество начальных и конечных ее состояний. С траекторией движения системы связано некоторое число, которое называют критерием качества управления. Математическая зависимость критерия от траектории называется целевой функцией. Цель управления – перевести систему из начального состояния в конечное при оптимальном (максимальном или минимальном) значении целевой функции. Управление, при котором целевая функция принимает оптимальное значение, называется оптимальным.

Введем обозначения:

$x_1, ..., x_i, ..., x_m$ – фазовые координаты (вектор);

S_H – множество начальных состояний (не пустое и, возможно, единственное);

S_K – множество конечных состояний системы;

U – управление;

U^*– оптимальное управление;

U^+– условно-оптимальное управление;

F(U)– целевая функция;

$F^*(U)$ – оптимальное значение целевой функции;

$F^+(U)$ – условно-оптимальное значение целевой функции.

Изобразим ситуацию на графике, для чего будем считать, что имеются всего две фазовые координаты (x_1, x_2) – рис. 1 .

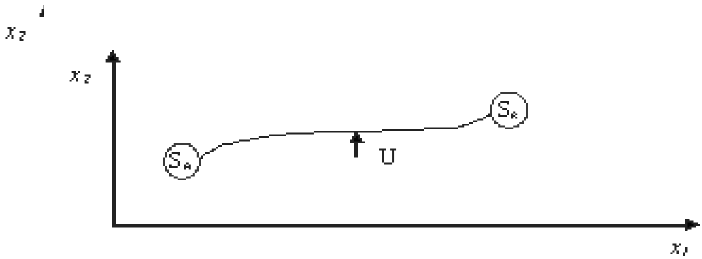


Рис.1.

Проблема состоит в том, чтобы перевести систему из Sн в Sк при оптимальном значении целевой функции. Если Sн и Sк – множества с более чем одним состоянием, то подлежат выбору единственное начальное и единственное конечное состояния. Управление – выбор траектории. Выбрать управление – выбрать траекторию. Если фазовое пространство непрерывно, если целевая функция от управления непрерывна и дифференцируема, то оптимальная траектория может быть найдена классическими математическими методами,– напр., вариационным исчислением. Но обычно экономические системы сложны, фазовое пространство дискретно, целевые функции нелинейны и недифференцируемы. Часто целевая функция не может быть выражена в явном виде, а задается в табличной форме или алгоритмом вычисления. В таких случаях задача может быть решена методом динамического программирования.

Динамическое программирование – это идеология поиска оптимальных путей развития сложных систем методом отсечения бесперспективных путей в промежуточных точках, где сходится более одного пути. Самое сложное в динамическом программировании – построить ориентированный граф, на котором задача решается.

Динамическое программирование применяется для решения сложных задач планирования развития экономических и других систем, когда множество возможных вариантов развития такой системы удается представить в виде ориентированного графа. Ориентированным называется граф, в котором дуги имеют направления и перемещаться по ним можно только в заданном направлении. Простейшая задача динамического программирования представлена на рис. 2.

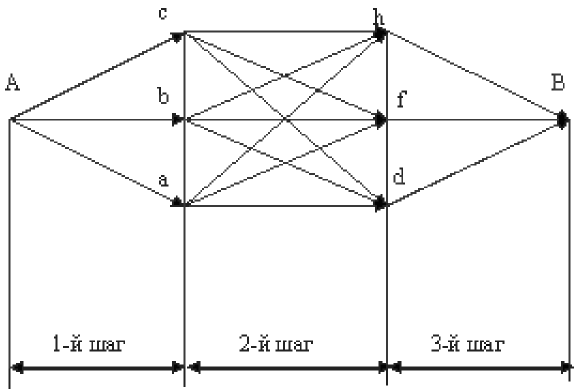


Рис.2.

Необходимо переместиться из точки А в точку В. Все возможные пути перемещения указаны стрелками. Известна длина каждой дуги. Необходимо найти кратчайший путь. Вся процедура разбита на шаги. На первом шаге можно продвинуться из А в одну из точек a, b или c. На втором шаге из любой точки – a, b или c – можно попасть в любую из точек d, f, h. Наконец, на последнем шаге из любой точки – d, f, h – осуществляется перемещение в В.

Обозначим:

$C_{Aa}, C_{Ab}, \ldots\ldots, C_{hB}$ – длина соответствующей дуги;

$F_a, F_b, \ldots\ldots, F_B$ – длина кратчайшего пути, ведущего из точки А в соответствующую точку, указанную в индексе при F – это и есть целевая функция.

Оптимальный путь можно выявить полным перебором, просчитав длины всех путей и сравнив их между собой. Посчитаем, сколько различных путей существует в нашей простой задаче. Из А в каждую из точек – a, b, c – ведет по одному пути. В каждую из точек d, f, h ведут три пути, а всего в конце второго шага имеется 9 путей. На последнем шаге количество путей не увеличивается. Конечно, можно сравнить по всей длине 9 путей. Но с ростом количества шагов и количества точек на каждом шаге число вариантов резко возрастает. Пусть m – число шагов, n – число точек на каждом шаге. В конце первого шага будет n вариантов (по одному на каждую точку). В конце второго шага будет n2. Т. к. на последнем шаге число вариантов не увеличивается, всего будет n^{m-1} вариантов. При значительных величинах m и n перебор всех вариантов становится невозможным даже на компьютере.

Основная идея динамического программирования заключается в сокращении перебора за счет отбрасывания бесперспективных путей. В любой точке, где сходится несколько путей, их можно сравнить между собой по длине, оставить лучший, запомнить его и его длину, а остальные отбросить. На рис. 2. в точке d сходятся 3 пути (из a, b и c), для каждого из них вычисляется длина, лучший путь запоминается, а два других отбрасываются.

Алгоритм расчета следующий.

1. Делается первый шаг от начала.
2. Берется первая точка a.
3. Вычисляется $F_a = C_{\mathrm{A}a}$. Запоминаются F_a и точка A – откуда пришел лучший путь (он здесь единственный).
4. Берется следующая точка b и для нее проделываются все те же процедуры, что и для a.
5. После расчетов для точки c делается следующий шаг.
6. Берется точка d. В нее входят 3 пути. Для каждого из них вычисляется $F_d^a = F_a + C_{ad}$, $F_d^b = F_b + C_{bd}$, $F_d^c = F_c + C_{cd}$. Запоминается как Fd меньшая из вычисленных длин и точка, откуда ведет путь. Пусть $F_d^c < F_d^a$ и $F_d^c < F_d^b$, тогда $F_d = F_d^c$, запоминается точка c. Это значит, что путь через точку c в d сохраняется для дальнейшего анализа, а пути в d через a и b отбрасываются.
7. После рассмотрения очередной точки осуществляется переход к следующей точке на данном шаге. Когда на рассматриваемом шаге все точки закончились, делается следующий шаг и т.д.
8. В точке B из трех сходящихся в ней путей выбирается лучший.
9. Проходя в обратном направлении, восстанавливают оптимальный путь. Напр., в точке B лучшим оказался путь из d, а в d – из c, а в c ведет единственный путь из A. Тогда оптимальный путь проходит через точки A–c–d–B.

При таком процессе в данном примере приходится сравнивать 12 путей (по 3 на каждую из точек d, f, h, B). Но сравнения проводятся на одном шаге, а не на всей длине, как это было бы при полном переборе. Перебор существенно сокращается.

В литературе распространенно утверждение, что при решении задач динамического программирования анализ вариантов нужно проводить от конца к началу. Это утверждение ошибочно. Можно проводить анализ как от начала к концу, так и наоборот. Посмотрим на рис. 2. Пусть оптимальный путь – A–c–d–B. Проведем анализ от конца.

Первый шаг – от B назад. Для каждой точки d, f и h оставляется по одному условно оптимальному пути, выходящему из нее: dB, fB и hB соответственно. На втором шаге назад рассматриваются пути, проходящие через точки a, b, c и оставляется по одному условно оптимальному пути. Так как дуга cd (по условию) входит в оптимальный путь, то для точки c остается условно оптимальный путь cd. На последнем этапе сравниваются пути, выходящие из точки A, т.к. Ac входит в оптимальный путь, то будет оставлена дуга Ac, а весь оптимальный путь выявится как A–c–d–B.

Оптимальный путь можно рассчитывать от начала к концу, и наоборот. Если в расчете нет ошибок, результат будет одинаковым. Т. к. длины дуг неизменны, длина оптимального пути не зависит от порядка его расчета

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1. Требуется наилучшим образом вложить b долларов в акции трех акционерных предприятий (АП), не более чем по b_i долл. в каждое. Цены акций известны: c_1, c_2, c_3; дивиденды составляют: $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3=0$. Известно также, что с вероятностью p цена акции третьего АП может вырасти к концу расчетного периода до величины $c_3^*>c_3$.
Какой капитал следует вложить в каждое АП, чтобы получить максимальный суммарный доход?

2. В морском порту имеются предметы (грузы) n видов. Предмет j-го вида имеет массу a_j и ценность c_j.
Требуется загрузить корабль грузоподъемностью b так, чтобы ценность груза была наибольшей.

3. Под посев n культур отведено m земельных участков площадью $a_1,...,a_n$ га. Средняя урожайность j-й культуры на i -участке составляет a_{ij} центнеров с га. Выручка за один центнер j-й культуры p_j сом.
Какую площадь на каждом участке следует отнести под каждую из культур, чтобы получить максимальную выручку, если по плану должно быть собрано не менее b_j центнеров j-й культуры?

4. Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти: А - 10 ед., В - 15 ед. При переработке из нефти получается бензин (Б) и мазут (М). Имеется три варианта технологического процесса переработки:
I: 1 ед.А + 2 ед.В дает 3 ед.Б + 2 ед.М;
II: 2 ед.А + 1 ед.В дает 1 ед.Б + 5 ед.М;
III: 2 ед.А + 2 ед.В дает 1 ед.Б + 2 ед.М;
Цена мазута - 1 долл. за единицу, цена бензина-10 долл. за единицу.
Найти наиболее выгодный технологический процесс переработки имеющегося количества нефти.

5. Для отопления дома в зимнее время летом производится закупка угля. В случае нормальной зимы для отопления дома требуется 15 тонн угля, но в годы мягкой зимы достаточно 10 тонн, а в случае суровой зимы необходимо 20 тонн. Цены на уголь зимой в случае мягкой, нормальной и суровой зимы разные - соответственно 10,15,20 ед. стоимости за тонну. Летом уголь можно купить по 10 ед. стоимости за тонну.

Следует ли покупать летом весь уголь на зиму или только его часть, докупив зимой недостающую часть, учитывая при этом, что излишек угля после зимы до следующего сезона сохраниться не может?

6. Изобразить на плоскости многогранники, задаваемые следующими системами неравенств и найти все их вершины:

а) $2x_1 + x_2 \le 8,$
$2x_1 - 5x_2 \le 20,$
$-x_1 + x_2 \le 2,$
$x_1 \ge 5;$

б) $x_1 + x_2 \le 6,$
$-3x_1 + x_2 \le 9,$
$x_1 + 2x_2 = 4;$

в) $-3x_1 + 6x_2 \le 13,$
$3x_1 + x_2 \le 9,$
$-x_1 + 2x_2 = 4;$

г) $-3x_1 + 2x_2 \le 0,$
$x_1 - x_2 \le -1,$
$-x_1 + 2x_2 \le 4;$

7. Используя графический метод, найти решения следующих задач:

а) $x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$3x_1 - 2x_2 \le 6,$

$-x_1 + 2x_2 \le 4,$

$3x_1 + 2x_2 \le 12;$

$x_1 \ge 0;$

б) $2x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$-x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 \le 7,$

$4x_1 - 3x_2 \le 6;$

$x_1, x_2 \ge 0;$

8. Ограничения следующих задач привести к диагональной форме и исключить базисные переменные из целевой функции:

а) $8x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max,$
при ограничениях
$x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4,$
$7x_1 - x_3 \le 16,$
$2x_1 - x_2 - x_3 = 2,$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$

б) $x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \to \max$
при ограничениях
$x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7,$
$x_2 - x_3 - x_4 + 6x_5 = 24,$
$x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 32,$
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5$

9. Следующие задачи решить симплекс-методом:

а) $-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$ при ограничениях
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \le 3,$
$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 \ge -1,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1,$
$x_j \ge 0,\quad j=1,\ldots,5.$

б) $x_1 + x_2 + x_3 – 2x_4 \rightarrow \min$, при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 &\le 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &\le 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &\le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j &= 1,\dots,4. \end{aligned}$$

10. Следующие задачи решить двойственным симплекс-методом:

а) $–2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 – 3x_5 \rightarrow \max$, при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 4, \\ -x_1 + x_2 - x_5 &= 4, \\ x_j \ge 0, \quad j &= 1,\dots,5. \end{aligned}$$

б) $2x_1 + x_2 – x_3 + 3x_4 – 2x_5 \rightarrow \min$, при ограничениях

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 &= 30, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 19, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 &= 3, \\ x_j \ge 0, \quad j &= 1,\dots,5. \end{aligned}$$

11. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед.

Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ – 2 сом, $П_2$ –3 сом

Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

12. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок следующие:

Поезда	Количество вагонов в поезде				
	Багажный	Почтовый	Плацкарт	Купе	СВ
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1
число пассажиров	-	-	58	40	32
парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

13. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 тонны. Овощехранилища имеют соответственно 20, 20 ,15 и 25 тонн. Тарифы (в д.е. за 1 тонну) указаны в следующей таблице:

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

14. Имеются два склада готовой продукции: A_1 и A_2 с запасами однородного груза 200 и 300 тонн. Этот груз необходимо доставить трем потребителям B_1, B_2 и B_3 в количестве 100, 150 и 250 тонн соответственно. Стоимость перевозки 1 тонны груза из склада A_1 потребителям B_1, B_2 и B_3 равна 5, 3 ,6 д.е., а из склада A_2 тем же потребителям – 3, 4, 2 д.е. соответственно.

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расход.

15. При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг.	
	корма 1	корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

16. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. Организация производства характеризуется следующей таблицей:

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	Тр уд	тяг а	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	3	1	3	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

17. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – 3 тонны, проволоки – 18 тонн. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д.е., второго – 4 д.е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

18. Совхоз отвел три земельный массива размером 5000, 8000 и 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице:

Посевы	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 центнер ржи совхоз получает 2 д.е., за 1 центнер пшеницы – 2,8 д.е., за 1 центнер кукурузы – 1,4 д.е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 тонны ржи, 158 000 тонны пшеницы и 30 000 тонн кукурузы?

19. Из трех продуктов – I, II, III составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества A, 8 ед. – вещества B и не менее 12 ед. вещества C. Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте наиболее дешевую смесь.

20. В школе проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному школьнику дано следующее поручение:

купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е.;

красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов – столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не менее 300 д.е.

В каком количестве школьник должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наименьшим?

21. Имеются три специализированные мастерские по ремонту двигателей. Их производственные мощности равны соответственно 100, 700, 980 ремонтов в год. В пяти районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соответственно 90, 180, 150, 120, 80 двигателей в год. Затраты на перевозу одного двигателя из районов к мастерским следующие:

Районы	Мастерские		
	1	2	3
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

Спланируйте количество ремонтов каждой мастерской для каждого из районов, минимизирующее суммарные транспортные расходы.

22. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д.е., 100 д.е., 150 д.е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

23. Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по Буге, пряжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину – 8 спортсменов, а в прыжках в высоту – не более 10. количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в таблице:

Разряд	Бег	Прыжки в высоту	Прыжки в длину
I	4	5	5
II	2	3	3

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 10 спортсменов.

24. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисицы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и 6000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма – 4 ед., а каждому песцу – 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 д.е., а от реализации одной шкурки песца – 5 д.е.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать не ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

25. Имеются два элеватора, в которых сосредоточено соответственно 4200 и 1200 тонн зерна. Зерна необходимо перевезти трем хлебозаводам в количестве 1000, 2000 и 1600 тонн каждому. Расстояние от элеватора до хлебозавода указано в следующей таблице:

Элеваторы	Хлебозаводы		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 тонны продукта на 1 км составляют 25 д.е.

Спланируйте перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

26. Из двух сортов бензина образуются две смеси – А и В. Смесь А содержит Бензина 60% 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В – 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А – 10 д.е., а смеси В – 12 д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензин 50 т 1-госорта и 30 т второго сорта.

27. Имеются две почвенно-климатические зоны, площади которых соответственно равны 0,8 и 0,6 млн. га. Данные об урожайности зерновых культур приведены в таблице:

Зерновые культуры	Урожайность (ц/га)		Стоимость 1 ц, д.е.
	1-я зона	2-я зона	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Определите размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

28. Для полива различных участков сада, на которых растут сливы, яблони, груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно 180, 90 и 40 ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно 100 120 и 90 ведер воды. Расстояния (в метрах) от колодцев до участков чада указаны в следующей таблице:

Колодцы	Участки		
	Сливы	яблони	груши
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	4	39

Как лучше организовать полив?

29. На заводе выпускают изделия четырех типов. От реализации 1 ед. каждого изделия завод получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 д.е. На изготовление изделий расходуются ресурсы трех видов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу изделия				Запасы ресурсов, ед.
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Спланируйте производство так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

30. При изготовлении изделий $П_1$ и $П_2$ используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия $П_1$ требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия $П_2$ требуется 400, 100, 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия $П_1$ составляет 6 сом и от единицы изделия $П_2$ – 16 сом.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

31. Ежедневно в ресторане фирменный коктейль (порция составляет 0,33 л) заказывают в среднем 600 человек. Предполагается, что в ближайшее время их количество увеличится в среднем на 50 человек. Согласно рецепту в составе коктейля должно быть:

- не менее 20%, но и не более 35% спирта;
- не менее 2% сахара;
- не более 5% примесей;
- не более 76% воды;
- не менее 7% и не более 12% сока.

В таблице приведены процентный состав напитков, из которых смешивается коктейль, и их количество, которое ресторан может ежедневно выделять на приготовление коктейля.

Процентный состав и запасы напитков

Напиток	Спирт	Вода	Сахар	Примеси	Количество, л/сут.
Водка	40%	57%	1%	2%	50
Вино	18%	67%	9%	6%	184
Сок	0%	88%	8%	4%	46

Постройте модель, на основании которой можно будет определить, хватит ли ресторану имеющихся ежедневных запасов напитков для удовлетворения возросшего спроса на коктейль.

32. В пунктах *A* и *B* находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта *A* в пункты 1, 2, 3 равна соответственно 60, 10, 40 тыс. сом за 1 т соответственно, а из пункта *B* в пункты 1, 2, 3 - 120, 20, 80 тыс. сом за 1 т соответственно.

Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

33. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 штук, втором – 30, третьем – 20, четвертому – 40 штук. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д.е.):

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей

34. Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	10
B	2	1	3	30
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

35. Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму – 70, третьему – 50 и четвертому – 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д.е. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

36. На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 – 100, пункту 3 – 200, пункту 4 – 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д.е.) 80, 30, 50, 20; со склада В – 40, 10, 60, 70; со склада С -10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

37. Завод имеет три цеха – А, В, С и четыре склада – 1; 2; 3; 4. Цех А производит 30 тыс. шт. изделий, цех В – 40; цех С – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 – 20 тыс. шт. изделий; склад 2 – 30; склад 3 – 30 и склад 4 – 10 тыс. шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 – соответственно (д.е.): 20, 30, 40, 40; из цеха В – соответственно 30, 20, 50, 10; а из цеха С – соответственно 40, 30, 20, 60.

Составьте такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

38. Имеются две станции технического обслуживания (СТО), выполняющие ремонтные работы для трех автопредприятий. Производственные мощности СТО, стоимость ремонта в различных СТО, затраты на транспортировку от автопредприятий на СТО и обратно и прогнозируемое количество ремонтов в планируемом периоде на каждом автопредприятии приведены в следующей таблице:

СТО	Стоимость ремонта ед., д.е.	Затраты на транспортировку, тыс. сом.			Производственная мощность, шт.
		АТП-1	АТП-2	АТП-3	
1	520	60	70	20	10
2	710	40	50	30	8
Потребное количество, д.е.		6	7	5	18

Требуется определить, какое количество автомашин из каждого автопредприятия необходимо отремонтировать на каждый СТО, чтобы суммарные расходы на ремонт и транспортировку были минимальными.

39. Имеются два хранилища с однородным продуктом, в которых сосредоточено 200 и 120 т продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 80, 100 и 120 т. Расстояния от хранилищ до потребителей (8 км) следующие:

Хранилище	Потребители		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км постоянны и равны 5 д.е.

Определите план перевозок продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

40. Промышленный концерн имеет два заводы и пять складов в различных регионах страны. Каждый месяц первый завод производит 40,а второй 70 ед. продукции. Вся продукция, производимая заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. Издержки транспортировки продукции от завода до склада следующие (ед.):

Заводы	Склады				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Распределите план перевозок из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

41. Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10, 8 и 6 млн. галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6, 11 и 7 млн. галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 2 км составляет 5 д.е. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее:

№ завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат.

42. Автомобили перевозятся на трайлерах из трех центров распределения пяти продавцам. Стоимость перевозки в расчете на 1 км пути, пройденного трайлером, равна 60 д.е. Один трайлер может перевозить 15 автомобилей. Стоимость перевозок не зависит от того, насколько полно загружается трайлер. В приведенной ниже таблице указаны расстояния между центрами распределения и продавцами, а также величины, характеризующие ежемесячный спрос и объемы поставок, исчисляемые количеством автомобилей:

Центр распределения	Продавцы					Объем поставок, шт.
	1	2	3	4	5	
1	80	120	180	150	50	300
2	60	70	50	65	90	350
3	30	80	120	140	90	120
Спрос на автомобили, шт.	110	250	140	150	120	770

Определите минимальные затраты на доставку автомобилей.

43. Решите задачу распределения станков четырех различных типов по шести типам работ. Пусть имеются 30, 45, 25 и 20 станков соответствующих типов. Шесть типов работ характеризуются 30, 20, 10, 40, 10 и 10 операциями соответственно. На станке 3 не может выполняться операция 6. Исходя из коэффициентов стоимости операции, представленных в следующей таблице, постройте модель и выполните оптимальное распределение станков по работам:

Тип станков	Тип работы					
	1	2	3	4	5	6
1	10	1	3	7	14	8
2	4	8	12	2	10	7
3	12	3	14	6	2	-
4	11	12	9	3	1	3

44. В данной транспортной задаче суммарный спрос превосходит суммарный объем производства. Пусть штрафы за недопоставку единицы продукции в пункты назначения 1, 2 и 3 равны соответственно 5, 3 и 2.

Исходные данные следующие:

Заводы	Потребители			Объем производства, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потребность, шт.	60	40	70	

Найдите оптимальное решение.

Для задач 45 –54 дано следующее условие.

Имеются три пункта поставки однородного груза - A_1; A_2; A_3 и пять пунктов потребления этого груза B_1; B_2; B_3; B_4; B_5. В пунктах A_1; A_2; A_3 находится груз a_1; a_2; a_3 соответственно. Груз необходимо доставить в пункты B_1; B_2; B_3; B_4; B_5 в количестве b_1; b_2; b_3; b_4; b_5 соответственно. Расстояния между пунктами в км заданы следующей матрицей:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{35} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза при условии минимизации общего пробега автомобилей, используя параметры, представленные ниже.

45. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ = (200; 450; 250);

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ = (100; 125; 325; 250; 100);

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

46. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ = (250; 200; 200);

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ = (120; 130; 100; 160; 110);

$$D = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 29 \\ 22 & 23 & 26 & 32 & 35 \\ 35 & 42 & 38 & 32 & 39 \end{pmatrix}.$$

47. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ = (300; 250; 200);

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ = (210; 170; 220; 150; 200);

$$D=\begin{pmatrix}4&8&13&2&7\\9&4&11&9&17\\3&16&10&1&4\end{pmatrix}.$$

48. $A^T=(a_1;a_2;a_3)$ **= (230; 250; 170);**

$B^T=(b_1;b_2;b_3;b_4;b_5)$ **= (140; 90; 160; 110; 150);**

$$D=\begin{pmatrix}40&19&25&26&35\\42&25&27&15&38\\46&27&36&40&45\end{pmatrix}.$$

49. $A^T=(a_1;a_2;a_3)$ **= (200; 350; 300);**

$B^T=(b_1;b_2;b_3;b_4;b_5)$ **= (270; 130; 190; 150; 110);**

$$D=\begin{pmatrix}24&50&45&27&15\\20&32&40&35&30\\22&16&18&28&20\end{pmatrix}.$$

50. $A^T=(a_1;a_2;a_3)$ **= (150; 150; 200);**

$B^T=(b_1;b_2;b_3;b_4;b_5)$ **= (110; 70; 130; 110; 90);**

$$D=\begin{pmatrix}15&3&6&10&30\\12&8&12&16&25\\14&11&9&8&15\end{pmatrix}.$$

51. $A^T=(a_1;a_2;a_3)$ **= (150; 200; 100);**

$B^T=(b_1;b_2;b_3;b_4;b_5)$ = **(90**; 150; 75; 60; 75);

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 23 & 26 & 19 & 18 \\ 17 & 13 & 14 & 25 & 10 \\ 12 & 21 & 24 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

52. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ **= (300; 300; 250);**

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ **= (150; 140; 115; 225; 220);**

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 20 & 23 & 15 & 24 \\ 25 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

53. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ **= (300; 230; 320);**

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ **= (190; 150; 130; 180; 200);**

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 31 & 32 \\ 11 & 18 & 20 & 15 & 16 \\ 10 & 9 & 16 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

54. $A^T = (a_1; a_2; a_3)$ **= (200; 300; 250);**

$B^T = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5)$ **= (120; 140; 160; 180; 150);**

55. Докажите, что если функции g_i: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ ($i = 1, ..., l$) выпуклы, то множество $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^m$: $g_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., l\}$ выпукло.

56. Докажите, что если функция g: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ выпукла, вместе с функцией $-g$, то она аффинна: $g(x) = (b, x) + c$.

57. Менеджер приобретает в течение года 1500 телевизоров для розничной продажи в свое магазине. Издержки хранения каждого телевизора равны 45 тыс. сом. в год. Издержки заказа – 150 тыс. сом. Количество рабочих дней в году равно 300, время выполнения заказа – 6 дней. Необходим найти:

- оптимальный запас заказа;
- годовые издержки заказа;
- точку восстановления запаса.

58. Менеджер продает 400 водяных кроватей в год, причем издержки хранения равны 1 тыс. сом. за кровать в день и издержки заказа – 40 тс. сом. Количество рабочих дней равно 250 и время выполнения заказа – 6 дней.

- Каков оптимальный размер заказа?
- Чему равна точка восстановления запаса?
- Каков оптимальный размер заказа, если издержка хранения равны 1,5 тыс. сом.?

59. Владелец маленькой компании, которая выпускает электрические ножи, может производить 150 ножей в день. Дневной спрос на ножи примерно равен 40. Фиксированные издержки производства равны 100 тыс. сом., издержки хранения – 8 тыс. сом. за нож в год. Каков максимальный заказ следует иметь на складе?

60. Компания закупает у завода-изготовителя лобовые стекла грузовых автомобилей для розничной продажи. В год, за 200 рабочих дней, реализуется около 10 000 стекол. Издержки заказа для компании составляют 400 тыс. сом., ежедневные издержки хранения одного стекла – 6 тыс. сом.

- Чему равен оптимальный размер заказа?
- Каковы минимальные годовые совокупные издержки?

61. Годовой заказ на тостер равен 3 000 единиц, или 10 в день. Издержки заказа равны 25 тыс. сом., издержки хранения – 0,4 тыс. сом в день. Так как тостер является очень популярным среди покупателей, то в случае отсутствия товара покупатели обычно согласны подождать. Пока не подойдет следующий заказ. Однако издержки, связанные с дефицитом, равны 0,75 тыс. сом за тостер в день.

- Сколько тостеров будет заказывать менеджер.
- Каков минимальный дефицит?
- Чему равны совокупные издержки?

62. Магазин пользуется популярностью у покупателей благодаря широкому ассортименту экологически чистых продуктов. Большинство покупателей не отказываются от услуг магазина даже том случае, когда интересующий их товар отсутствует в продаже. Они оставляют заказ на товар и ждут, когда поступит новая партия.

Сыр – не самый популярный из всего набора товаров, но администратор магазина регулярно заказывает этот продукт. Годовой спрос на сыр составляет 500 головок. Издержки заказа – 40 тыс. сом за заказ. Издержки хранения – 5 тыс. сом в год Упущенная прибыль вследствие дефицита составляет 100 тыс. сом в год на одну головку сыра.

- Сколько головок сыра следует заказывать, чтобы не допускать дефицита и иметь при этом минимальные общие издержки?
- Сколько сыра следует заказывать, если допустить возможность дефицита?
- Чету равна точка восстановления запаса, если время выполнения заказа 10 дней и число рабочих дней в году 250?
- Чему равен максимальный размер дефицита?

63. Мебельный салон продает в год около 1000 спальных гарнитуров по цене 50 тыс. сом. Размещение одного заказа на поставку гарнитуров обходится в 40 тыс. сом. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 25% его цены. Салон может получать 3%-ную скидку у поставщика, если размер заказа составит не менее 200 гарнитуров. Следует ли салону заказывать 200 или более гарнитуров и пользоваться скидкой?

64. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3 [$(N - 1) = 3$]. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность λ=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 час.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

65. Вспомним о ситуации, рассмотренной в примере 4.2, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (поста диагностики);
- среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

66. Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность λ= 2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательном у закону и равно $\bar{t}$ = 0,5 сут. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

- вероятности состояний системы;
- среднее число заявок в очереди на обслуживание;
- среднее число находящихся в системе заявок;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

67. Пусть для обслуживания десяти персональных компьютеров (ПК) выделено два инженера одинаковой производительности. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера - пуассоновский с интенсивностью λ= 0,2. Время обслуживания ПК подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного ПК одним инженером составляет: $\bar{t}$ =1,25 час.

Возможны следующие варианты организации обслуживания:

- оба инженера обслуживают все десять компьютеров, так что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае R = 2, N = 10;
- каждый из двух инженеров обслуживает по пять закрепленных за ним ПК. В этом случае R = 1, N = 5.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Используемые источники

1. Вентцель Е.С. Исследование операций.-М.: Высшая школа, 1980
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций-М.: Высшая школа, 1988
3. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике.-М.: БЕК, 2002
4. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике.-М.: Наука,200
5. Баканов М.И. Теория экономического анализа.-М.: Высшая школа, 1998
6. Замков 0.0. и.др. Математические методы в экономике.-М.:ДИС,1999
7. Акуличь И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах,.-М.:, Высшая школа, 1996
8. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследования операций в планированные управлении.-К.: Высшая школа, 1991
9. Кузнецов Ю.М., Математическое программирование. –М.: Высшая школа, 1980
10. Калихман И.Л., Сборник задач по математическому программированию –М.: Высшая школа, 1975