А.Л. Королев
Компьютерное моделирование

Учебное пособие

Челябинск
2019

Книга посвящена одному из самых важных в прикладном смысле разделов информатики – компьютерному моделированию объектов, процессов и систем, на основе которого возможно существенное расширение и углубление межпредметных связей и повышение уровня информационной компетентности учащихся.

Книга предназначена для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности «Информатика». Содержание книги полностью соответствует образовательному стандарту по специальности «Информатика». Она будет полезна учителям информатики при разработке профильных и элективных курсов. Книга содержит теоретические положения моделирования, множество лабораторных работ по построению различных моделей: математических, геометрических, имитационных, твердотельных, и т.п. Практическая часть курса построена на доступном программном обеспечении. Реализация моделей не требует применения, какой либо системы программирования. Построение моделей выполняется средствами специальных программных систем моделирования, таких как MVS, Simulink, Компас и т.д.

Введение

Цель настоящего курса – дать представление о современных методах построения, реализации и исследования моделей объектов, процессов и систем разнообразной природы. Расширить представления студентов о моделировании как о методе научного познания, познакомить с методологией моделирования, научить применять компьютер как средство познания и научных исследований в различных областях практической деятельности и научных исследований. Научить студентов применять методы моделирования для решения конкретных задач, сформировать навыки в области моделирования процессов и систем различной природы, а также в области образования.

Задачи курса:

- Обучить студентов применению моделирования в профессиональной деятельности;
- Ознакомить студентов с современными методами и технологиями построения моделей и проведения модельных экспериментов в различных видах практической и научной деятельности;
- Теоретически и практически подготовить будущего учителя к методически грамотной организации и проведению занятий с применением средств моделирования, разработки моделей и преподаванию соответствующего раздела образовательного стандарта по курсу информатики;
- Обучить эффективному использованию моделей, моделирования и модельного эксперимента в учебном процессе;
- Ознакомить студентов с возможностями современных технологий компьютерного моделирования в рамках реализации обучения, ориентированного на развитие познавательных и созидательных способностей, формирование целостной системы универсальных знаний, умений и навыков, а также самостоятельной деятельности, т.е. на развитие ключевых компетенций, определяющих современное качество образования.
- Развить творческий потенциал будущего учителя, необходимый ему для дальнейшего самообучения в условиях непрерывного развития и совершенствования информационных технологий.

Основная концепция курса – моделирование без программирования на основе универсальных инструментальных программных комплексов. Содержание курса полностью соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по специальности «Информатика».

Глава I. Основы моделирования

1.1. Исторический обзор развития моделирования

Моделирование имеет многовековую историю, это неотъемлемая сторона человеческой деятельности. Исторически моделирование имеет широкий диапазон применения – от живописи до математического моделирования сложных систем. По существу, история науки и техники – это история развития моделирования явлений, процессов и объектов. Моделирование как познавательный приём неотделимо от развития знания. Таким образом, понятия «**моделирование**», «**модель**» играли жизненно важную роль в деятельности человечества с тех пор, как оно стало стремиться к пониманию и изменению окружающей среды.

Моделирование как форма отражения действительности зарождается с возникновением научного знания. Модели и моделирование начинают широко использоваться в эпоху Возрождения. Так итальянские архитекторы того времени пользовались моделями проектируемых сооружений. Уже в XIX-XX вв. трудно назвать область науки или её приложений, где моделирование не имело бы существенного значения.

Естественно, что моделирование первоначально носило материальный и наглядный характер: рисунок, макет, схема, чертеж и т.п. Возможность и необходимость представлять знаний в виде моделей была понята не сразу. Например, древние философы считали, что отобразить явления природы можно только с помощью словесных моделей (вербальных по современной терминологии).

Через несколько столетий девизом английского Королевского научного общества стал лозунг «Ничего словами!»: признавались только выводы, подкрепленные экспериментально или математическими расчетами. В английском языке до сих пор в понятие «наука» не входят области знания, которым в русском языке соответствует термин «гуманитарные науки», - они отнесены к категории «искусств».

В истории моделирования можно выделить три направления. Первое направление связано с технологией литья в формы, которые создавались по соответствующим образцам-моделям. Второе направление связано с материальными макетами объектов, которые использовались при решении архитектурно-строительных и технических задач. Понятие масштабной материальной модели известно архитекторам еще до нашей эры. Третье направление образовано научными знаниями, для осознания модельного характера которых потребовалось двадцать с лишним веков развития науки. Примером может служить трактат Архимеда «О плавающих телах», который является моделью для исследования, описания и объяснения наблюдаемых на практике явлений.

Использование материальных моделей как инструмента для решения технических и технологических задач началось еще в глубокой древности. Создаваемые материальные модели служили средством для разработки новой и усовершенствования существующей техники. Они сыграли важную роль в переходе к машинному производству. В этот период моделирование становится средством и способом поиска рациональной конструкции устройств. Такого рода модели были основой творчества мастеров-изобретателей, усилиями которых создавалась техническая база перехода к более совершенным способам производства.

Научная составляющая подобных технических моделей была крайне малой в силу слабого развития науки и ее сословного отрыва от технической практики. Например, основой творчества Джеймса Уатта был, прежде всего, модельный эксперимент.

По мере развития науки и расширения ее технологического применения модели постепенно насыщались теоретическим содержанием, а сами материальные модели из наглядных пособий превращались в средство для применения научных методов в конкретных прикладных задачах. Начиная с 70-х годов XIX века материальные модели – вещественно подобные и аналоговые - становятся составной частью науки. В целом ряде областей научного знания и его практических приложений они сохраняют большое значение и в настоящее время.

Энергичное применение науки в технической практике привело к насыщению модельных экспериментов теоретическим содержанием. Выявленные наукой законы становились исходными данными при постановке конкретного модельного эксперимента, направленного на решение определенной технической задачи, или применялись при обработке результатов экспериментов.

Применение науки в технике и технологии обозначило **два класса моделей:**

- модели и теоретические зависимости, полученные на основе научных законов и представленные математическими формулами;
- модели, полученные опытным путем, представленные в форме таблиц, графиков и эмпирических зависимостей.

Теоретические и эмпирические модели дополняют друг друга, обеспечивая достижение главной цели научно-технической деятельности - создание новых технических средств и технологических процессов с заранее заданными свойствами. Совокупность таких моделей, относящихся к некоторому классу технических задач, совершенствовались, дополнялись инженерными методиками и приобретали статус самостоятельных инженерных научных дисциплин. Примерами являются такие науки как сопротивление материалов (теория прочности), термодинамика, гидро и аэродинамика и т.д.

Примечательно, что в практике кораблестроения моделирование впервые получило твердую научную основу в виде **теории подобия**. При проектировании пароходов одной из важных задач является снижение сопротивления движению судна. От ее решения зависит запас топлива, мощность и масса двигателя, грузоподъемность и скорость хода корабля. Прямое опытное решение этой задачи невозможно по очевидным экономическим причинам. Не поддается эта задача и теоретическому решению, несмотря на существование развитой гидромеханической теории. Подобные задачи с требуемой точностью могут быть решены только современными весьма мощными вычислительными комплексами на основе достаточно сложных численных методов и математических моделей.

Выход был найден путем соединения теории и экспериментального исследования малых геометрически подобных моделей кораблей. Теория подобия позволила выполнить перенос результатов испытаний моделей кораблей на проектируемые суда. Экспериментальное исследование гидродинамических характеристик кораблей с помощью масштабных моделей стало первым в истории примером применения научной методологии моделирования и стимулировало развитие теории подобия применительно к целому ряду явлений разнообразной физической природы.

В последней четверти XIX века возникло другое направление моделирования – **аналоговое моделирование.** В этом случае свойства и характеристики некоторого объекта воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы. По мере математизации естественных наук стало очевидным, что целый ряд явлений различной природы описываются совпадающими (аналогичными) по форме математическими моделями. Это позволяет исследовать свойства моделей как самостоятельных абстрактных объекты, что привело к развитию прикладных направлений математики. Примером может быть математическая физика, теория устойчивости, теория колебаний и т.п.

С развитием науки и техники все большее значение приобретали **вероятностно-статистические** модели, которые оказывались более адекватными многим реальным явлениям. Развитие теории автоматического управления, теории информации и кибернетики позволило уточнить понятие «модель», независимо от того, реализована она материально или представляет собой некоторый идеальный объект. В любом случае смысл и суть существования модели заключается в том, что она несет в себе информацию о свойствах объекта-оригинала, существенных с точки зрения решаемой задачи.

В настоящее время от моделирования процессов и явлений происходит переход к моделированию **знаний и рассуждений**, т.е. к моделированию логического вывода новых знаний на базе уже имеющихся. Методология моделирования и формализации знаний, ориентированная на их компьютерную обработку, является одним из основных направлений развития искусственного интеллекта.

Даже небольшой экскурс в историю показывает, что моделирование прошло огромный путь развития, от сформулированных на естественном языке непосредственно наблюдаемых закономерностей реальности до сложнейших алгоритмических и интеллектуальных систем, опирающихся на возможности современной вычислительной техники.

В XX в. понятие модели становится всеобщим, охватывающим и реальные, и идеальные модели. При этом понятие абстрактной модели вышло за пределы математических моделей, стало относиться к любым знаниям и представлениям о мире: модель есть способ существования знаний.

Таким образом, моделирование постепенно распространялось на все новые области научно-технических знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и общественные науки. Компьютерная техника существенно расширила сферу применения методов моделирования, породила принципиально новые возможности, виды моделей и целые технологии. Поэтому в настоящее время понятия «модель», «моделирование» неявно отождествляются с компьютерными моделями и компьютерным моделированием. Этим и объясняется название данной работы и содержание рассматриваемых в ней вопросов.

1.2. Основные понятия моделирования

Рассмотрим основные понятия моделирования.

Объект моделирования (объект-оригинал) – некоторая часть окружающего нас мира, реальной действительности (предмет, процесс, явление), которая может быть рассмотрена как единое целое. Под **моделью** мы будем понимать объект произвольной природы, отражающий свойства, характеристики и связи моделируемого объекта (объекта-оригинала), которые считаются существенными для решения поставленной задачи.

В идеальном случае модель отражает только главные свойства объекта моделирования и не отражает несущественные свойства. Однако модель, как самостоятельный объект, имеет и свои собственные свойства, которые никак не связаны с моделируемым объектом.

Главное назначение модели состоит в упрощении получения информации о свойствах объекта-оригинала для решения конкретных задач практической деятельности. Полное соответствие модели оригиналу невозможно по определению (рис. 1.1). В этом случае теряются все преимущества моделей, так как мы будем иметь второй экземпляр объекта-оригинала с малодоступным для изучения бесконечным набором свойств.

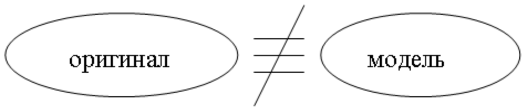


Рис. 1.1. Соотношение между моделью и оригиналом.

Самое распространенное представление о модели связано с **материальной моделью,** например, с макетом. Однако моделью является экспериментальная установка, словесное описание объекта-оригинала, его мысленный образ и т.д.

Понятие модели включает в себя следующие основные компоненты: объект-оригинал; решаемая задача; характер отражаемых свойств объекта-оригинала; способ построения и способ реализации модели. Решаемая задача является одним из главных элементов, определяющим характер создаваемой модели. Именно задача определяет отбор существенных свойств моделируемого объекта, вид и способ построения модели. Без связи с конкретной задачей понятие модели не имеет смысла.

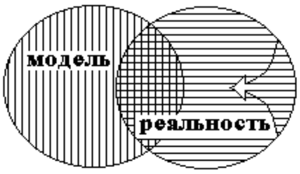
Ряд факторов определяют **множественность** моделей, используемых для описания и исследования объекта:

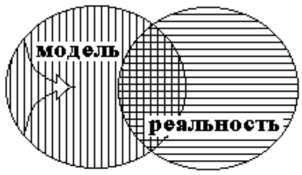
1. Любой объект имеет бесконечное количество свойств, следовательно, для его разностороннего изучения необходимо построить множество моделей, каждая из которых будет отображать определённую группу его свойств;
2. Для одного и того же объекта, для отображения одних и тех же свойств, можно построить множество моделей разными способами в зависимости от целей моделирования и доступных средств.
3. Так как созданием моделей занимается человек, то построенная модель зачастую существенно зависит от его субъективных предпочтений.
4. В зависимости от решаемой задачи для одного и того же объекта, одним и тем же способом, для отображения одних и тех же свойств можно построить множество моделей с разной степенью детализации описания свойств объекта.

Таким образом, технология моделирования подразумевает вариативность в выборе типов моделей и получении ряда различных моделей, которые различаются степенью детализации описания объекта моделирования.

В любой деятельности по созданию новых систем и технических устройств всегда имеется образ будущего объекта. Этот образ первоначально задается в виде технического задания на проектирование. Затем в ходе проектирования создается модель новой технической системы, которая позволяет получить информацию о свойствах еще не существующего объекта. Этим обеспечивается создание объекта с заданными (желаемыми) свойствами. Можно сказать, что моделирование является обязательным элементом во всякой целесообразной деятельности.

Условно можно разделить модели на две группы: познавательные и прагматические. **Познавательные модели** являются формой представления знаний. Поэтому при обнаружении расхождения между моделью и реальностью возникает задача устранения этого расхождения с помощью изменения модели. Познавательная деятельность ориентирована в основном на приближение модели к реальности, которую модель отображает (рис. 1.2а). Познавательные модели широко используются в естественных науках. Примером познавательной модели может служить модель солнечной системы.





а) б)

Рис. 1.2.

а) Познавательная модель (реальность отражается в модели);

б) Прагматическая модель (реальность «подгоняется» под модель).

Прагматические модели являются средством организации практических действий, являются отображением цели. Примерами прагматических моделей могут служить проекты, рабочие чертежи и т.п. Прагматические модели носят нормативный характер, играют роль стандарта, образца, под который «подгоняются» как сама деятельность, так и ее результат. Действительно, при создании нового объекта (например, строительство здания) отклонение от проекта считается недопустимым.

Рассмотрим основные **функции** моделей в современной науке, технике и практической деятельности. Еще раз подчеркнем, что главное назначение моделей – упрощение получения информации об объекте моделирования. Вместе с тем модели выполняют и ряд других важных функций:

- познавательная функция (получение новых знаний, познание законов функционирования объекта);
- передача информации и знаний;
- решение задач оптимизации и управления состоянием объекта;
- создание объектов с заданными свойствами;
- диагностика состояния объекта, прогнозирование его поведения или прогнозирование развития процесса;
- имитация объектов и создание тренажеров;

- разработка игровых моделей и моделей обучения.

В целом **моделирование** – это общенаучный метод изучения свойств объектов и процессов по их моделям, используемый в целях познания, исследования, проектирования, принятия решений. Процесс моделирования можно представить в виде нескольких этапов:

реальный объект → построение модели → изучение модели → получение знаний об объекте на основе модельных экспериментов → перенос результатов моделирования на реальный объект.

Термин «**моделирование**» используется также и для обозначения собственно процесса построения модели. В этом смысле он понимается как технология построения моделей.

Первоначально, при создании модели, от нее в первую очередь требуется **отображение свойств** объекта моделирования, актуальных для решения задачи. Далее, при экспериментах с моделью возможен **прогноз** поведения объекта-оригинала в иных ситуациях по сравнению с теми, на основе которых модель создавалась. При этом сведения, полученные в ходе моделирования, т.е. исследования модели, объективно представляют собой информацию о свойствах самой модели, поэтому далее они должны быть перенесены на оригинал на основе определенных правил перехода с целью предсказания свойств уже самого объекта моделирования.

В принципе существует два пути исследования любого объекта или процесса: прямое изучение объекта-оригинала или изучение объекта по его модели. Естественно, что во многих случаях используется и моделирование, и прямое изучение объекта моделирования.

Необходимо признать, что моделирование особо актуально в следующих случаях:

1. **Объект либо ещё, либо уже не существует**, однако необходимо изучить его свойства. Так, например, методами математического моделирования была реставрирована картина развития процессов при падении Тунгусского метеорита, а на основе анализа результатов моделирования были качественно объяснены все последствия падения космического тела и определены его параметры. Модель изменения климата вследствие ядерного конфликта убедительно доказала реальную возможность развития глобальной экологической катастрофы (ядерная зима) и неприемлемость применения ядерного оружия даже в ограниченном варианте. Как уже отмечалось ранее, любое производство предусматривает проектирование. Результатом проектирования является модель будущего объекта, который после его создания (производства) должен обладать определенными свойствами.
2. **Масштаб времени реальных процессов или геометрические размеры объекта несоизмеримы с возможностями нашего восприятия**. Моделирование позволяет изучать и весьма быстрые (химические и ядерные реакции) и достаточно медленные процессы (старение материалов, движение материков и т.п.), микро и макроскопические объекты (модель атома и модель планеты Земля).
3. **Реальный объект или процесс недоступен для прямого изучения**. Средства наблюдения (измерения) способны существенно исказить естественный ход событий, либо прямые измерения в принципе невозможны. Такие ситуации возможны и в технике, и в фундаментальных науках, и в социально-экономической сфере.

4. **Эксперименты с реальным объектом дороги или слишком опасны**. Подобная ситуация имеет место в экономических и социальных науках, где эксперименты с реальными системами могут привести к необратимым катастрофическим последствиям. Всем известно, чем закончился натурный эксперимент на четвертом энергоблоке Чернобыльской АЭС.

Таким образом, модель служит для получения информации об объекте исследования, которую затруднительно или невозможно получить путем непосредственного исследования оригинала, во многих случаях моделирование – это единственно возможный путь изучения объектов и процессов.

Рассмотрим три типовые задачи моделирования:

Прямая задача моделирования. Требуется определить реакцию объекта или его поведение в ответ на известное внешнее воздействие. Решение данной задачи выполняется с помощью проведения модельных экспериментов. Такие задачи возникают в ходе изучения свойств объектов или процессов.

Обратная задача моделирования. Реакция объекта известна или задана, требуется определить, какое внешнее воздействие способно вызвать подобную реакцию. Для решения этой задачи необходимо также иметь уже разработанную модель. Обратные задачи актуальны, например, в управлении: как необходимо воздействовать на объект, таким образом, чтобы он сохранял заданное состояние или выполнял необходимые действия.

Задача идентификации или синтеза модели. Известно внешнее воздействие на объект, известна реакция объекта, требуется определить параметры модели объекта или построить собственно модель. Подобная задача возникает в тех случаях, когда модель в целом разработана, но требуется по результатам испытаний или экспериментов с реальным объектом определить некоторые ее параметры. Если модель еще не разработана, то методами математической статистики и регрессионного анализа можно построить чисто формальную модель объекта типа «черный ящик».

Рассмотрев основные понятия моделирования, области его применения, решаемые задачи можно перейти к следующему разделу, посвященному особой роли моделей в науке и технике.

1.3. Роль моделирования в науке и технике

Цель данного параграфа – показать роль моделей и моделирования в современной науке и технике. Моделирование – это один из основных методов научного познания. Суть этого метода заключается в том, что из сложного явления выделяются некоторые его главные части и замещаются моделями, более понятными, более простыми, более удобными для изучения и объяснения. Таким образом, в научных исследованиях всегда приходится иметь дело с моделями.

В основе любой науки особую роль имеют **концептуальные модели**, т.е. представления об объекте-оригинале, которые сложились в сознании человека. Основой для формирования таких моделей являются и результаты наблюдений свойств объекта-оригинала, и теоретический багаж исследователя, и его опыт, аналогии, логические выводы. Объединение всех этих представлений в концептуальную модель осуществляется неформально. Таким образом, построение концептуальной модели предполагает применение для описания объекта строгих научных понятий и выявление наиболее существенных факторов.

С помощью концептуальных моделей строится первичная система простейших абстрактных моделей, которые отражают свойства реальных объектов, представляющих интерес для данной науки. Например, «материальная точка», «идеальный газ», «абсолютно черное тело» и т.д. Концептуальная модель «материальная точка» отражает свойство инерции тела (материальная точка имеет массу) и способность занимать определенное положение в пространстве (материальная точка имеет координаты). Концептуальные модели занимают самый нижний уровень научного знания, но именно они связаны с практической деятельностью и рождаются в ее ходе.

В свою очередь **научные законы** формулируются как описание связей и взаимодействий между концептуальными моделями. Примером могут служить законы Ньютона, законы Кирхгофа, закон Гука и т.п. Таким образом, научные законы также являются в определенном смысле моделями реальности.

Научные законы носят общий характер и занимают более высокий уровень по сравнению с концептуальными моделями. Законы имеют вполне конкретную объектную область. На базе концептуальных моделей и соответствующих законов строятся модели целых классов явлений и процессов, которые образуют **научные теории**.

И так, с точки зрения моделирования научные теории являются системой концептуальных моделей и законов, описывающих взаимодействие между концептуальными моделями. Например, теория относительности, квантовая теория, теория твердого тела, теория колебаний, теория устойчивости и т.п.

Давно известное науке понятие **гипотезы**, которые можно считать моделью реальности в условиях неполной изученности явлений. Наука допускает существование нескольких гипотез, поскольку одни и те же наблюдения могут одинаково хорошо объясняться с различных точек зрения.

Как бы хорошо не описывали процессы и явления, существующие модели, всегда возможно их дальнейшее уточнение, которое постоянно происходит в любой науке.

Проектирование и эксплуатация современных сложных технических систем все больше требует «поддержки» со стороны моделирования. Давно ушли в историю методы проектирования, основанные на опыте и интуиции инженеров и техников. Современные технологии проектирования подразумевают применение, научных знаний, математических моделей, методов оптимизации с целью получения объекта с наилучшими свойствами и т.п. Кроме того, техническая документация проекта (чертежи) создается программными средствами автоматизированного проектирования.

Как уже отмечалось, применение моделирования в ходе проектирования неизбежно, так как оно позволяет в итоге создать объект с требуемыми свойствами. Моделирование позволяет существенно сократить затраты на доработку спроектированного изделия по данным испытаний опытных образцов.

Однако полностью исключить испытания и натурные эксперименты в силу сложности современных технических систем не удастся. Профессия летчика-испытателя в обозримом будущем останется крайне необходимой.

Функционирование современных сложных технических систем требует управления и регулирования режимов их работы. Управление производится компьютерными системами на основе моделей объектов управления, которые позволяют учесть возможные взаимосвязи, ограничения, установить оптимальные режимы функционирования.

В ходе эксплуатации технических объектов возможны аварии и неисправности. Для обеспечения высокой надежности технических систем важно вовремя распознать приближение аварийной ситуации. Такая задача решается методами диагностики состояния объекта. Для подобных задач необходимо на основе моделирования аварийных ситуаций получить информацию состояниях, предшествующих аварии, т.е. получить картину динамики развития аварии. Теперь в случае распознания предаварийного состояния, технический объект может быть своевременно выведен из эксплуатации для проведения ремонта. Например, при работе подшипников турбин или двигателей их состояние можно диагностировать по частоте и амплитуде вибраций, зависящих от степени износа подшипников.

Если авария все же произошла, то модель системы помогает установить ее причины и исключить их в будущем. Так при установлении причин аварии энергоблока на Чернобыльской АЭС была создана модель функционирования энергоблока и установлены возможные причины аварии.

Рассмотренные выше примеры применения моделей показывают, что роль моделирования в современной технике трудно переоценить. Пройденный путь начат с применения макетов и материальных моделей на сегодня продолжен сложнейшими математическими и имитационными компьютерными моделями.

1.4. Особенности компьютерного моделирования

В настоящее время методы компьютерного моделирования прочно вошли в практику решения широкого круга теоретических проблем и прикладных технических задач в различных сферах практической деятельности. В самом деле, ведь исторически первая роль компьютера – «вычислитель», т.е. численное решение задач моделирования в первую очередь технических систем.

Сущность компьютерного моделирования состоит в построении модели, которая представляет собой некоторый программный комплекс, алгоритмически описывающий развитие процесса или поведение объекта. **Компьютерная модель** предназначена для проведения с ней экспериментов на вычислительной машине. Она имеет две составляющие - **программную и аппаратную**. Программная составляющая выполняется процессором компьютера и отображает свойства объекта моделирования.

Главной особенностью компьютерных моделей является относительная простота создания и модификации. Изменениям подвергается только сама программа, а аппаратная составляющая остается неизменной. Если добавить практически неограниченную функциональную и структурную сложность компьютерных моделей, высокую точность результатов, то становится ясно, почему в настоящее время под моделированием почти всегда понимают компьютерное моделирование.

Выделим ряд особенностей компьютерного моделирования:

1. Компьютер – мощный инструмент проведения вычислительных экспериментов, так как позволяет хранить и быстро обрабатывать большие объемы информации.

Это существенно увеличило возможности численного решения задач математического моделирования и на порядки сократило время их решения.

2. Компьютерное моделирование позволяет исследовать модели высокой степени сложности, учитывать и анализировать влияние множества факторов. Только применение компьютерного моделирования дало возможность использовать технологии, опирающиеся на тонкие физико-химические эффекты.
3. Применение компьютера в моделировании привело к рождению новых направлений как в самом моделировании (имитационное и стохастическое моделирование, моделирование знаний), так и в различных прикладных науках (вычислительная физика, автоматизированное проектирование и т.п.).
4. Компьютерные модели стали основой математизации ряда областей научного знания и практической деятельности, которые ранее развивались как описательные и носили сугубо качественный характер. Это, в первую очередь, относится к моделированию знаний и технологиям искусственного интеллекта.
5. В ходе компьютерного моделирования возможна визуализация результатов моделирования, отображение их в наиболее обозримой и наглядной форме средствами виртуальной реальности. Такую возможность, например, дает компьютерная технология трёхмерного твердотельного моделирования.
6. Компьютер не только средство реализации модели и проведения эксперимента, но и инструмент создания самих моделей: предоставляется возможность автоматизированного построения модели, выбора численных методов и создания программы, реализующей вычислительную модель.

Далеко не полный перечень сфер применения компьютерного моделирования в технике, который постоянно расширяется, представляется следующим:

- Анализ свойств объекта и выбор оптимальных решений.
- Техническая диагностика состояния объекта – распознавание образа состояния объекта и прогноз динамики его изменения, например, с целью предупреждения аварий.
- Автоматизированное управление объектом.
- Создание имитаторов и тренажеров.

Построение модели с использованием компьютерной техники содержит в себе несколько необходимых этапов. На первом формируется теоретическое представление об исследуемом объекте, строится его **концептуальная модель**.

На втором этапе концептуальная модель переводится на формальный язык математики и численных методов, язык описания алгоритмов: создается **математическая** и **алгоритмическая модели** объекта.

Переложение модели на язык программирования, дает **компьютерную модель**, позволяющую оперировать с цифровой информацией. Наконец, используя эмпирическую информацию о параметрах исследуемой системы, можно получить полноценную компьютерную модель, которая позволяет с той или иной степенью достоверности исследовать свойства объектов, прогнозировать последствия принятых решений, иными словами – проводить модельный **вычислительный эксперимент**.

В настоящее время актуален вопрос создания автоматизированных систем моделирования, которые позволят выполнять быстрое построение моделей, проведение модельных экспериментов, обработку и анализ их результатов. В связи с этим рассмотрим разделение ролей при разработке модели. Естественно, что представленное разделение несколько утрированно, что не меняет его сути.

Традиционный путь создания реальной компьютерной модели начинается с выявления или синтеза структуры объекта, при этом проводится предварительный качественный анализ его свойств. Постановка всех задач моделирования осуществляется **специалистом в конкретной предметной области** в терминах соответствующего профессионального языка - строится концептуальная модель объекта, процесса или явления.

Далее необходима работа **математика,** который выполняет математическую постановку всех задач, создает описание (модель) объекта средствами языка математики. При этом в диалоге со специалистом-предметником происходит уточнение описания модели, т.к. многие очевидные для предметника факты и предположения, как правило, в его модели отсутствуют. Таким образом, на этом этапе модель формализуется и существенно уточняется математиком. В итоге его работы является математическая модель объекта. Кроме того, математик должен выбрать надежные и эффективные численные методы ее реализации, т.е. преобразовать математическую модель в вычислительную.

На следующем этапе **программист** разрабатывает алгоритмы и программы, реализующие решение задачи моделирования, с учетом возможностей конкретной системы программирования и компьютера. Естественно, что программист должен выполнить отладку программы и предъявить первичные результаты моделирования математику, оценивающему их качество с математической точки зрения.

Общая оценка модели по данным предварительных расчетов должна быть выполнена специалистом-предметником, которому далее и предстоит использовать разработанную компьютерную модель в своей практике.

Если потребуется совершенствование и переработка модели, то весь путь должен быть пройден вновь. Ясно, что данная схема весьма громоздка и инертна. Следовательно, необходимо **приближение компьютера** к специалисту.

В свое время в XX веке для решения этой проблемы создавались модели знаний конкретной предметной области. На основе этих моделей знаний и проводилось построение модели конкретного объекта. В рамках этого подхода были разработаны несколько программных систем «МАВР», «ПРИЗ», «ДЕКАРТ».

В системе «ПРИЗ» модель знаний предметной области строится в виде **семантической сети** с помощью специального языка «УТОПИСТ». На этом языке пользователь и должен сформулировать свою задачу. Система моделирования «МАВР» была предназначена для автоматизации всего процесса построения модели и реализующего ее программного обеспечения на основе описания объекта моделирования средствами формализованного языка. Создавалась эта система для автоматизации проектирования энергетических установок и систем.

В данной системе предварительно должна быть построена модель знаний конкретной предметной области. В ней имеется язык описания объекта моделирования, близкий к профессиональному языку, которым должен пользоваться специалист-предметник для описания объекта моделирования при построении модели. Таким образом, интеллектуальный пакет «МАВР» дает возможность конечному пользователю решать задачи по их описаниям и исходным данным без разработки математической модели и программирования.

Идея программного комплекса Simulink, который входит в состав математического пакета MatLab, состоит в том, что модель визуально конструируется в виде блок-схемы из стандартных функциональных блоков (рис. 1.3).

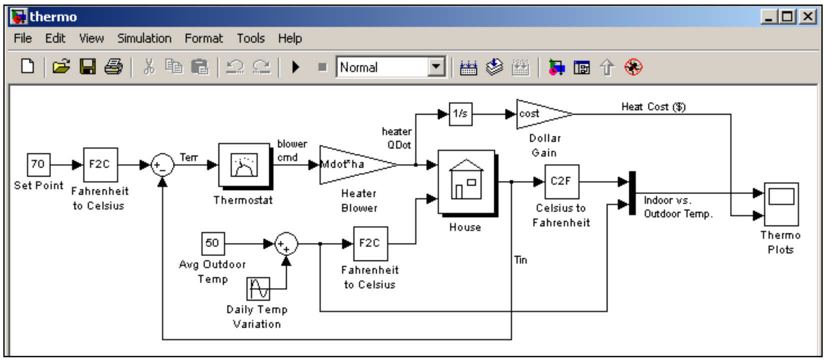


Рис. 1.3. Пример блок-схемы Simulink-модели.

Каждый блок является объектом, параметры которого можно менять. Каждый блок реализует определенную функцию преобразования входного сигнала в выходной. Пакет Simulink имеет средства отображения результатов моделирования в графической форме (рис. 1.4). Собственно моделирование сводиться к построению **функциональной блок-схемы** объекта путем копирования блоков из библиотеки, установления (рисования) связей между ними и заданием параметров элементов системы. В данном программном комплексе реализована идея аналоговых вычислительных машин (АВМ), в которых построение модели сводилось к подобным действиям с реальными электронными блоками.

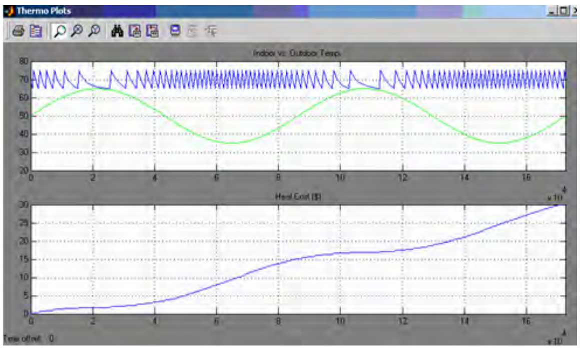


Рис. 1.4. Отображение результатов моделирования средствами Simulink.

Пакет Simulink имеет развитую библиотеку стандартных функциональных блоков общего и специального назначения (рис. 1.5), кроме того, имеется возможность создавать собственные новые функциональные блоки. Моделирование систем возможно по блочно-иерархическому принципу.

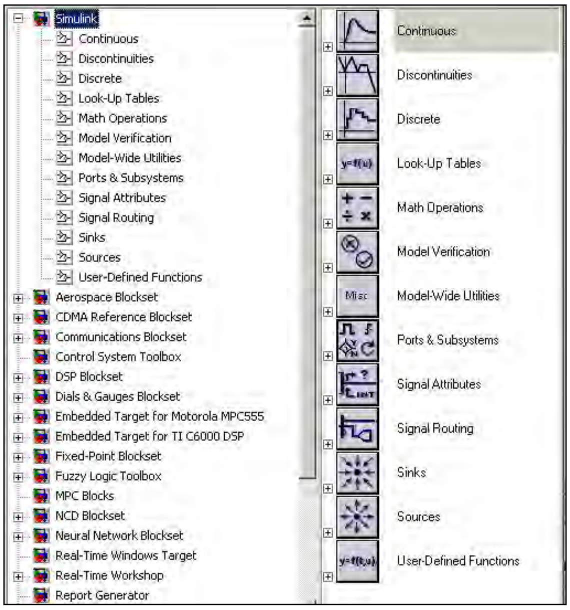


Рис.1.5. Библиотека блоков Simulink.

Simulink автоматизирует решение уравнений, которые описывают созданную функциональную блок-схему. Пакет автоматически меняет модель системы при вводе в схему новых элементов. Таким образом, в рамках этого пакета автоматизируются функции и математика, и программиста, а модель объекта в виде блок-схемы строится самим пользователем.

Инструментальная среда Stratum предназначена для имитационного и математического моделирования. Использование объектно-ориентированного подхода в моделировании позволяет свести к минимуму программирование, повысить скорость создания моделей и легко их модифицировать. На базе библиотек моделей возможно оперативное создание целого виртуального мира. Среда Stratum поддерживает весь цикл разработки модели.

Визуальные средства среды Stratum **имиджи** (рис. 1.6) обеспечивают построение модели системы в виде иерархически связанных подсистем. Внешний вид и поведение объекта определяется пользователем в удобной для него форме. Визуальные средства проектирования позволяют наглядно представить структуру системы.

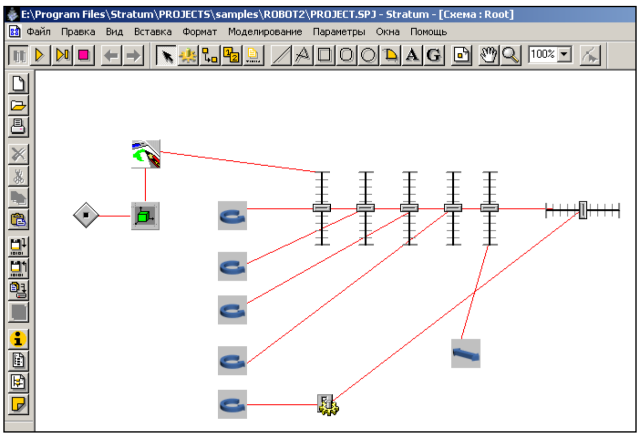


Рис. 1.6. Отображение в среде Stratum взаимодействия элементов манипулятора.

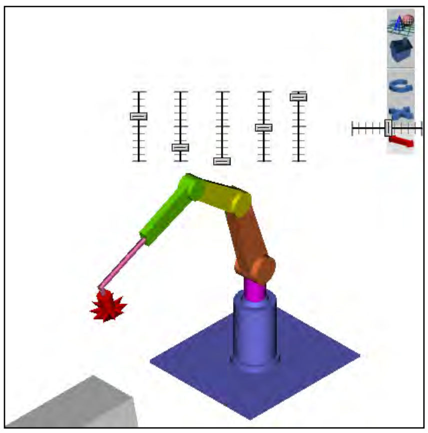


Рис. 1.7. Модель манипулятора.

Средства генерации кода среды Stratum автоматически преобразуют модель объекта в исполняемую программу. В среде Stratum возможно использование стандартных и создание пользовательских 2d и 3d объектов, манипулировать ими и изменять их параметры (рис. 1.7.), открывается возможность наблюдения за функционированием системы.

Современный программный комплекс SolidWorks совместно с встроенным пакетом CosmoWorks позволяет построить трехмерную твердотельную модель объекта (рис.1.8) и провести расчеты полей напряжений и деформаций или температурных полей под действием заданных пользователем внешних воздействий (рис.1.9). При этом пользователь строит только трехмерную модель объекта и определяет внешние воздействия. Построение математической и вычислительной моделей, получение и представление результатов исследования производится полностью автоматически.

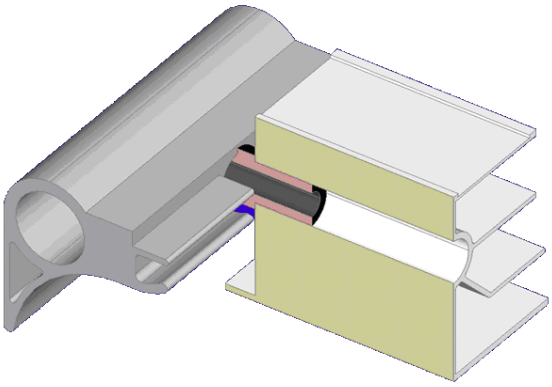


Рис.1.8. Трехмерная модель узла конструкции.

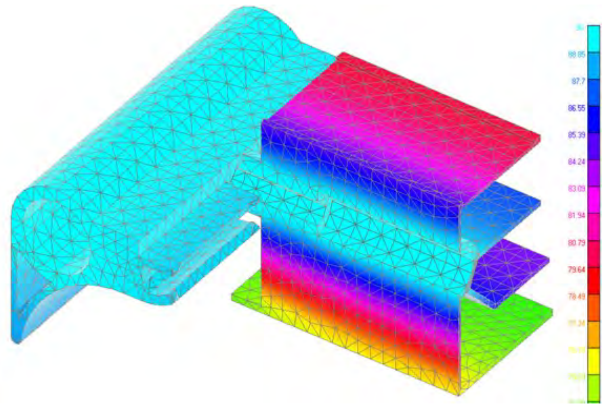


Рис. 1.9. Отображение результатов расчета температурных полей.

Одной из универсальных систем моделирования является система MVS (Model Vision Studium). MVS - это интегрированная графическая система для быстрого создания интерактивных визуальных моделей сложных динамических систем и проведения с ними вычислительных экспериментов. MVS – упрощенный вариант профессионального пакета моделирования AnyLogic.

Главными особенностями MVS является: использование технологии объектно-ориентированного моделирования; адекватное описание гибридных (дискретно-непрерывных) систем; обеспечение численного решения; обеспечение визуализации результатов моделирования без традиционного программирования.

Пакет выполнять моделирование гибридных систем, которые обладают одновременно непрерывными и дискретными свойствами. При создании MVS принято, что выбор и настройка математического метода решения должны выполняться MVS. Пользователь имеет возможность активно вмешиваться в ход вычислительного эксперимента.

Любая модель, создаваемая в MVS представляет собой Проект, содержащий стандартные компоненты (рис. 1.8). Система MVS позволяет на основе карты поведения (рис. 1.10) наглядно представить и описать логику смены поведения объекта.

Основным элементом при построении модели в MVS является устройство (CDevice). Устройство - это некоторый объект, функционирующий параллельно и независимо от других объектов в непрерывном времени. Устройство содержит следующие элементы: вход, выход, переменные состояния, константы, параметры, систему уравнений, карту поведения и т.д. (рис. 1.12).

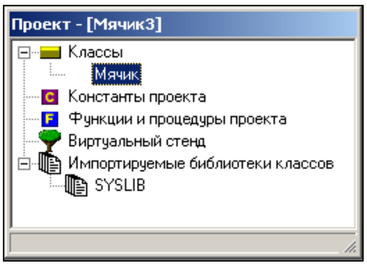


Рис.1.8. Проект MVS.

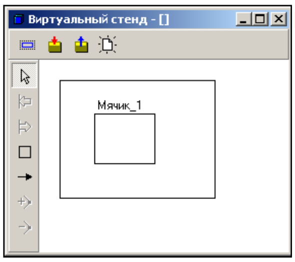


Рис. 1.9. Виртуальный стенд проекта.

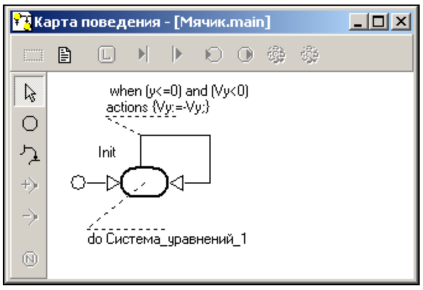


Рис. 1.10. Карта поведения.

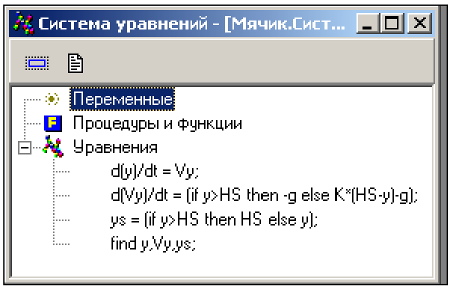


Рис. 1.11. Система уравнений.

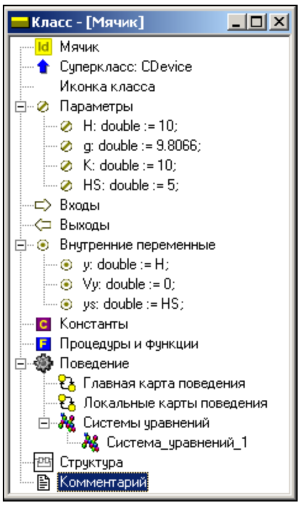


Рис. 1.12. Компоненты класса.

Непрерывное поведение объекта в общем случае может быть задано системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\frac{ds}{dt} = f(s,t)$, или совокупностью алгебраических уравнений вида $F(s,t) = 0$ или формул вида *s* = *<выражение, не зависящее от s>* (рис. 1.11).

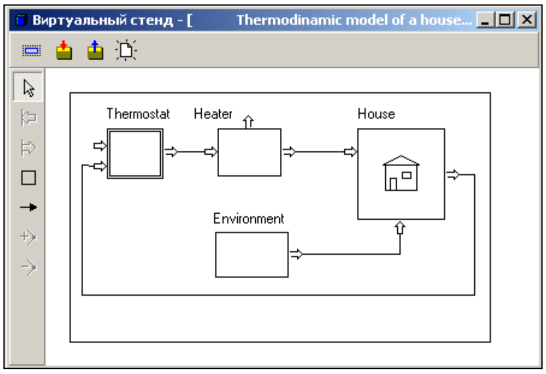


Рис.1.13. Модель, построенная в виде блок-схемы.

Устройства могут объединяться в блоки, что позволяет строить модели систем по блочно-иерархическому принципу. Все взаимодействия блока осуществляются только через его входы и выходы, составляющие интерфейс блока (рис. 1.13). Блок получает сигналы на входе, преобразует их и передает к выходу. Все остальные свойства блока инкапсулированы внутри него.

Блоки могут соединяться между собой функциональными связями и входить в состав других блоков, образуя определенную структуру. Конкретная модель, с которой будет проводиться вычислительный эксперимент, собирается в окне виртуального стенда из экземпляров классов, определенных в данном проекте или из библиотечных классов. Она дополняется средствами графического отображения результатов моделирования (рис. 1.14).

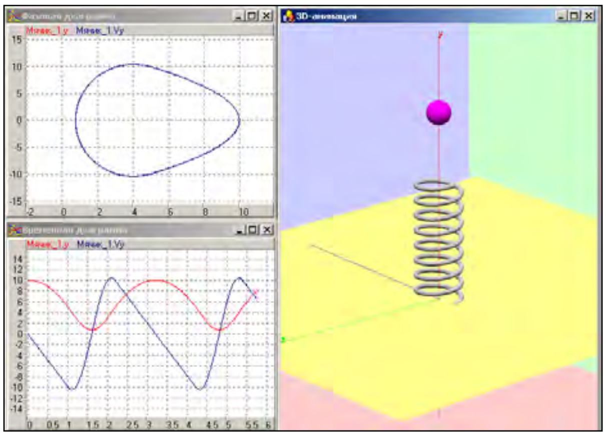


Рис. 1.14. Отображение результатов моделирования в виде временной и фазовой диаграмм, а также средствами 3D-анимации.

Для отображения поведения объекта служит **карта поведения** - это ориентированный граф, в котором узлам соответствует локальное непрерывное поведение, а дуги интерпретируются как переходы от одного поведения к другому. В каждый момент времени один из узлов графа является активным (рис. 1.15).

Рис. 1.15. Отображение смены состояний на карте поведения.

Смена текущего узла происходит в результате срабатывания переходов. Для перехода между узлами должно быть задано запускающее событие: логическое условие, определяющее возможность срабатывания перехода; поступление внешнего сигнала; истечение заданного времени пребывания в текущем узле, а также действия (actions) в переходе (рис. 1.16).

Срабатывание перехода представляет собой следующую последовательность действий: данный узел перестает быть текущим; выполняется последовательность мгновенных действий в том порядке, как они записаны для перехода; текущим становится новый узел.

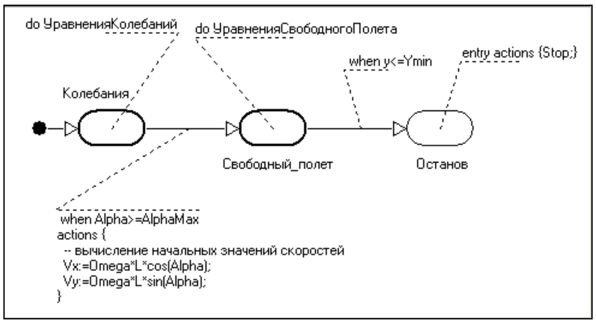


Рис. 1.16. Карта поведения с условиями срабатывания переходов.

Для каждого узла могут быть заданы входные действия (entry actions) и выходные действия (exit actions). Действия в переходах, входные и выходные действия, представляют собой программы, записанные на языке MVL.

В MVS имеется достаточно богатый набор численных методов предназначенных для воспроизведения поведения гибридных систем. Это программные реализации методов решения нелинейных алгебраических уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений (рис. 1.17).

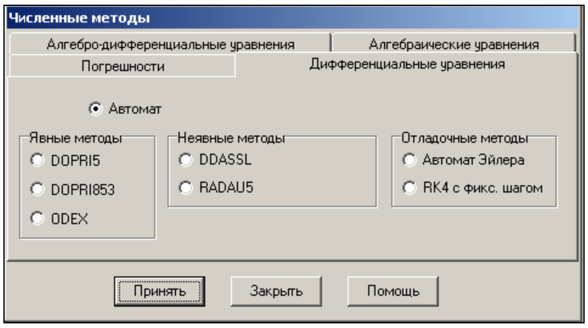


Рис. 1.17. Выбор численного метода.

Для каждой группы задач имеется свой автоматический решатель, цель которого обеспечивать получение решения на заданном временном участке, любыми имеющимися в пакете методами.

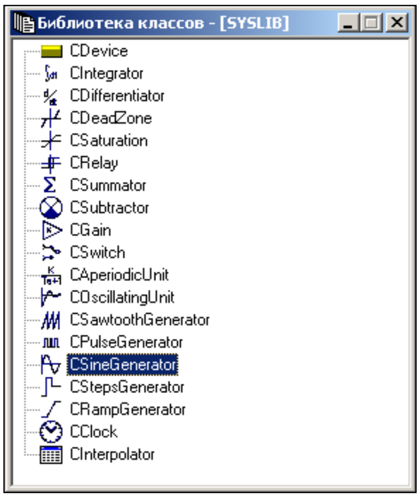


Рис. 1.18. Библиотека классов.

К проекту, созданному в MVS, могут быть присоединены любые ранее созданные библиотеки классов, таким образом, при создании своей модели пользователь может использовать уже готовые классы устройств. Пакет поставляется со стандартной библиотекой классов SysLib, содержащей набор наиболее типичных блоков и источников сигналов. Элементы библиотеки можно использовать при построении блок-схемы модели. Состав библиотеки представлен на рис. 1.18.

Система AnyLogic — профессиональный инструмент имитационного моделирования нового поколения, основанный на результатах, полученных в теории моделирования и в информационных технологиях за последнее десятилетие. По сравнению с другими системами он предоставляет существенно более широкий спектр возможностей (рис. 1.19) при меньших трудозатратах, поскольку позволяет:

- Моделировать при помощи визуальных и повторно используемых объектов, как стандартных, так и разработанных пользователем.
- Моделировать, применяя любые подходы, в любом сочетании.
- Создавать интерактивные 2D и 3D анимации, визуально отображающие результаты работы модели в реальном времени.
- Использовать как визуальные способы построения моделей, так и программирование на объектно-ориентированном языке Java.
- Использовать мощный арсенал средств анализа и оптимизации непосредственно из среды разработки модели.
- Просто и эффективно интегрировать модель с офисным и корпоративным ПО, включая электронные таблицы, БД, ERP и CRM системы.

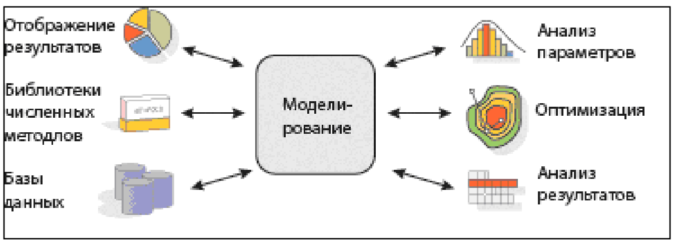


Рис. 1.19. Возможности AnyLogic в моделировании.

В AnyLogic поддерживаются все существующие подходы дискретно-событийного и непрерывного моделирования: блок-схемы процессов, системная динамика, агентное моделирование, карты состояний, системы уравнений и т.д. (рис. 1.20).

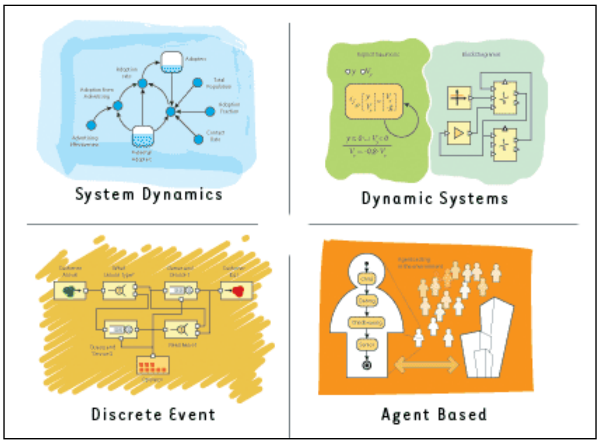


Рис. 1.20. Подходы к моделированию в AnyLogic

AnyLogic позволяет сроить как стохастические, так и детерминированные модели и проводить анализ результатов моделирования. В AnyLogic встроен оптимизатор, который, используя эвристики, нейронные сети и математическую оптимизацию, позволяет находить значения дискретных и непрерывных параметров модели, соответствующие максимуму или минимуму целевой функции, в условиях неопределённости и при наличии ограничений.

С помощью технологии визуализации AnyLogic позволяет создавать интерактивные анимации произвольной сложности (рис.1.21). Поскольку модели AnyLogic - Java-модели, их можно не только запускать на большинстве современных платформ, но и помещать на web-сайты в виде апплетов. Это позволяет удалённым пользователям запускать интерактивные модели в web-браузере без необходимости устанавливать какое-либо программное обеспечение.

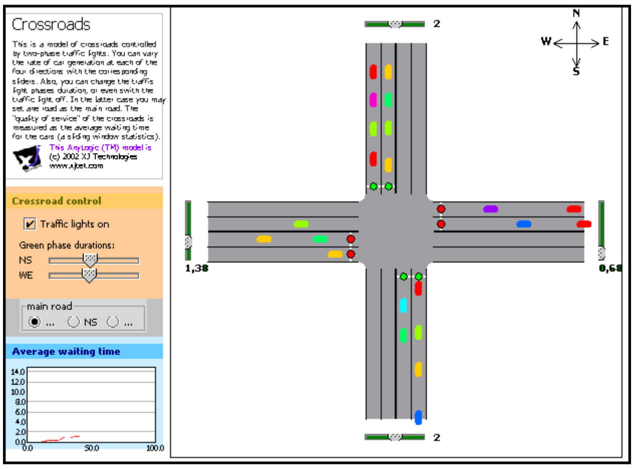


Рис. 1.21. AnyLogic-модель перекрестка.

Следует отметить, что в данном разделе рассмотрены только некоторые системы моделирования общего назначения. Кроме них существует множество специализированных систем моделирования, которые применяются для решения узкоспециальных задач конкретной предметной области.

Дополнительную информацию о компьютерных инструментальных системах моделирования можно получить в монографиях: [4], [6], [24], [33], [38], [50], [64-67], [111].

1.5. Системный подход в моделировании

Системный подход – это подход к анализу объектов, в основе которого лежит исследование объектов как **систем**. Под **системой** будем понимать совокупность взаимодействующих между собой элементов, которая обладает определенной целостностью.

Любой объект окружающего мира можно рассматривать как систему. Сам термин указывает на необходимость всестороннего исследования объекта, комплексно, в отличие от ранее принятого разделения исследований на физические, химические, биологические и т.д. Оказалась, что на этой основе можно получить более полные представления о реальных объектах, выявить их новые свойства, определить взаимоотношения с окружающей средой и т.д. Применение методологии системного подхода позволило решать задач проектирования, анализа целенаправленной деятельности, функционирования, планирования, управления и оптимизации для систем самой разнообразной природы и сложности. Таким образом, значение системного подхода для моделирования трудно переоценить.

Определить систему – значит выделить её из состава окружающей среды. Элемент системы – это ее некоторая самостоятельная часть системы. В принципе разделить систему на элементы можно несколькими способами в зависимости от характера решаемой задачи. Для любой системы существует **системообразующий фактор**, это то, что объединяет элементы в систему и придаёт системе целостность. Системообразующий фактор позволяет выделить систему как самостоятельный объект окружающего мира.

В принципе, каждый элемент системы можно рассматривать как другую систему более низкого уровня - **подсистему**. С другой стороны, любую систему можно рассматривать как элемент более **общей системы**. Возможность деления системы на подсистемы связана с вычленением совокупности взаимодействующих элементов, способных выполнять относительно независимые функции.

Любая система имеет **структуру**. В структуре отображается состав элементов системы и связи между ними. Структура системы может быть отображена в виде графа (рис. 1.23). Связи между элементами обеспечивают сохранение структуры и свойств системы.

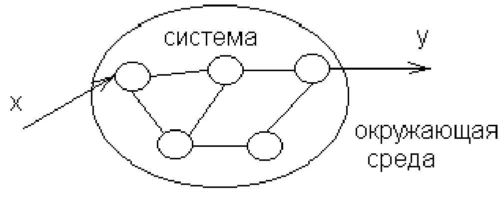


Рис. 1.23. Представление структуры системы.

На рис. 1.23 X – вход, внешнее воздействие на систему. Это либо управляющее воздействие, либо воздействие со стороны окружающей среды, Y – выход системы, воздействие системы на окружающую среду, т.е. реакция системы.

Функции и свойства системы зависят и от свойств элементов системы и от ее структуры. Свойства системы не являются простой суммой свойств её элементов. Соединение элементов в систему всегда дает новые свойства.

Информация о свойствах системы в определенный момент времени определяет **состояние системы**. **Целенаправленное поведение** системы представляется как стабильная способность к определенным действиям. **Движение (поведение)** системы - это процесс перехода системы из одного состояния в другое и т.д. Если переход системы из одного состояния в другое происходит скачкообразно, то система называется **дискретной**. Если при переходе между любыми двумя состояниями система обязательно проходит через **промежуточное** состояние, то она называется непрерывной (**динамической**).

Можно выделить следующие режимы поведения системы:

- **стационарный режим** системы соответствует положению равновесия, система находится все время в одном и том же состоянии;
- **динамический режим** – состояние системы непрерывно меняется во времени;
- **периодический режим** - система через равные промежутки времени проходит одни и те же состояния;
- **переходный режим** соответствует движению системы из одного стационарного состояния в другое.

Возможность отражения поведения системы зависит от того, каким образом мы представляем объект моделирования. Например, воздух в комнате можно представить в виде системы молекул, каждая из которых имеет свои координаты и скорость. В этом случае мы получим сверхсложную систему с хаотическим движением молекул, которую исследовать вряд ли возможно. Если же воздух в комнате представить как систему, состоящую из одного элемента, параметрами которого являются давление, температура и влажность, то такую систему достаточно просто описать в соответствии с законами термодинамики. Для всех практических задач этот способ определения системы предпочтительнее.

Всё, что не входит в систему, но взаимодействует с ней, называется **окружающей средой** (рис. 1.23). Любая система всегда существует и функционирует, взаимодействуя с окружающей средой. Это взаимодействие происходит по принципу обратной связи (рис. 1.24):

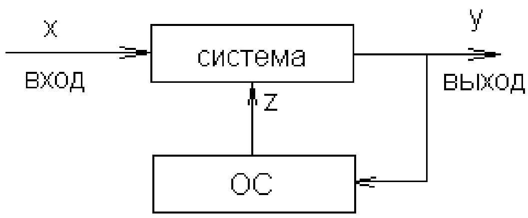


Рис. 1.24. Схема взаимодействия системы и окружающей среды.

Реакция системы *Y* воздействует на окружающую среду. В результате окружающая среда (ОС) вырабатывает ответную реакцию *Z*, дополнительно воздействующую на систему.

Классификацию систем можно провести и по критериям: сложности, детерминированности и непрерывности. По степени сложности системы можно разделить на **простые, сложные и сверхсложные**. К простым системам относятся системы, имеющие соответствующую простую структуру, достаточно легко поддающиеся математическому описанию. Сложными являются системы, имеющие много элементов и внутренних связей и, соответственно, сложное математическое описание. Математические модели таких систем реализуются только с использованием вычислительной техники. Сверхсложные системы не поддаются математическому описанию, их исследование возможно исключительно методами имитационного моделирования (см. п.4.2).

Сложность системы может определяться ее поведением. Примером являются гибридные системы, которые сочетают непрерывное и дискретное поведение.

Системы можно разделить на **детерминированные** и **стохастические** (вероятностные). На поведение стохастических систем оказывают влияние случайные факторы.

Возможные варианты систем получаются комбинированием указанных классов: от простых детерминированных до сверхсложных вероятностных.

Например, **непрерывно-детерминированные** системы описываются моделями на основе дифференциальных уравнений. Искомые переменные является непрерывными. Подобные модели, как правило, отражают динамику изменения состояния системы.

К **дискретно-детерминированным** системам относятся так называемые конечные автоматы. Автомат – это некоторое устройство, на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные. У конечного автомата множество входных сигналов и множество внутренних состояний является конечным. Если состояние автомата имеет случайный характер, то такая система относится к классу **дискретно-стохастических** систем.

Изучение и описание любой системы неизбежно связано с моделированием. Моделирование систем осуществляется на двух уровнях. На **внешнем уровне** происходит выделение самой системы и ее связей с окружающей средой. На **внутреннем уровне** моделирование системы состоит в том, что производится выделение элементов системы и связей между ними. На практике при моделировании систем решается два типа задач: задача анализа – исследование свойств существующей системы; задача синтеза – построение новых систем с заранее заданными свойствами.

В заключение данного раздела отметим, что системный подход позволяет сделать ряд простых, но весьма важных для моделирования выводов: при построении модели системы необходимо разработать не только модель **собственно системы**, но и модель её взаимодействия с **окружающей средой.**

При построении модели объекта требуется провести его системный анализ, при этом необходимо выявить:

1. Из каких элементов и подсистем он состоит;
2. Как эти элементы взаимодействуют между собой;
3. Каким образом происходит взаимодействие системы и окружающей среды.

Рассмотренные положения системного подхода в определенном смысле составляют методологическую основу моделирования, что в первую очередь, относится к моделированию сложных систем.

Дополнительную информацию по вопросам системного анализа можно найти в монографиях: [9-10], [13], [16], [30], [39], [42], [54], [79], [107].

1.6. Общая схема построения модели

Долгое время построение моделей считалось искусством. Успех в этой деятельности определялся, практическим опытом, экспериментаторским мастерством, интуицией. Основой моделирования, особенно при создании новой техники, оставался метод проб и ошибок. В этом случае создание новой технической системы сопровождалось длительной отработкой объекта проектирования на основе испытаний опытных образцов. Эти факторы и сегодня играют достаточно большую роль. Вместе с тем опыт моделирования все более сложных технических систем убедительно показывает, что качество моделей решающим образом зависит от того, насколько целесообразно построен весь процесс их создания.

Общая логика моделирования получила развитие в рамках работ по исследованию операций, теории планирования эксперимента, теории подобия, прикладному системному анализу и теории идентификации как инструмента построения моделей слабо изученных сложных систем. Достижения в данных дисциплин составляют сегодня научный фундамент методологии моделирования.

В общем случае построение модели и моделирование актуально при возникновении некоторой **проблемы**. Анализ проблемы приводит к формулированию **задач** исследования, которые включают в себя и описание **объекта** моделирования. В технике результаты данной работы фиксируются в виде технического задания на проектирование.

Следующим шагом в построении модели является **анализ** объекта моделирования с точки зрения поставленной задачи. В итоге формируется некий образ объекта, который можно назвать **когнитивной** моделью. При этом с целью получения компактного описания объекта, сложная реальность упрощается путем отсечения всего второстепенного для решения задачи.

На основе когнитивной создается **концептуальная** модель, при построении которой используются научные положения, законы и понятия той предметной области, в которой решается задача. В технике на основе концептуальной модели удается выполнить математическое описание объекта.

Если объект достаточно изучен применяется **теоретический** путь построения модели. Альтернативой является **идентификация** модели объекта, т.е. определение связей между свойствами объекта на основе статистической обработки результатов наблюдений.

Рассмотрим общую схему построения модели без учета особенностей конкретных видов моделей. Данная схема содержит этапы, характерные для моделирования в целом, они реализуются независимо от того, имеем ли мы представление об их существовании или нет. Содержание этапов построения модели представляется следующим:

1. На основе существующей проблемы формулируется задача. Выбирается объект, действия с которым приведут к решению поставленной задачи.
2. Выполняется анализ объекта моделирования: устанавливается из каких элементов состоит объект, как они взаимодействуют между собой. Устанавливаются свойства объекта актуальные для решения поставленной задачи. Выявляются факторы, определяющие эти свойства.
3. Выполняется создание собственно модели, при этом производится выбор вида модели и способа её построения. Естественно, что выбор существенно зависит от решаемой задачи и возможностей исследователя.
4. Решается вопрос об интерпретации результатов моделирования, если это необходимо. Каким образом результаты эксперимента с моделью будут перенесены на реальный объект. При этом следует учесть, что модель - это самостоятельный объект, обладающий рядом таких собственных свойств, которые не имеют никакого отношения к объекту моделирования.
5. Проводятся эксперименты с моделью, осуществляется проверка ее адекватности. Адекватность - это степень соответствия по моделируемым свойствам между моделью и объектом. Адекватность характеризует качество отображения моделью свойств реального объекта с точки зрения решаемой задачи.
6. Выполняется корректировка или переработка модели в случае ее слабой адекватности.
7. Модель применятся для решения поставленной задачи.

Следует отметить, что любые правила разработки моделей могут служить лишь в качестве определенного каркаса. По-видимому, основой успешной методики моделирования может быть последовательная разработка системы моделей. Начав с относительно простой модели, постепенно необходимо продвигаться к более совершенной ее форме, отражающей ситуацию более точно. По мере проведения испытаний, получения дополнительных данных обычно возникает уточненный вариант модели и т.д.

1.7. Адекватность моделей

Адекватность – это характеристика точности отражения моделью свойств объекта-оригинала, которая необходима для решения поставленной задачи. Модель, с помощью которой успешно решается поставленная задача, будем называть **адекватной**. Таким образом, адекватность модели означает, что требования точности отражения свойств выполнены в той мере, которая достаточна для решения поставленной задачи.

Естественное различие между моделью и оригиналом вызвано тем, что в модели отображаются лишь самые важные для решения задачи свойства объекта. В результате приближенность модели неизбежна, но оказывается, что даже простых моделей достаточно для человеческой практики.

Следует помнить, что модель – это самостоятельный объект, имеющий и свои собственные свойства, которые могут быть никоим образом не связанны со свойствами моделируемого объекта. Таким образом, проблема адекватности одна из важнейших, от которой зависит степень доверия к результатам моделирования. В ряде случаев удается ввести некоторую меру адекватности модели. В таких случаях можно ставить вопрос о наиболее адекватной модели.

Рассмотрим некоторые причины неадекватности. При построении моделей всегда производится отбор свойств объекта, которые актуальны для решения поставленной задачи. Причем, в первую очередь, естественно, рассматриваются известные свойства и отношения. Вполне вероятно, что моделируемый объект имеет еще **неизвестные** свойства, которые также значимы и актуальны для данной задачи. Таким образом, причиной неадекватности может быть **неполный учет свойств**, существенно влияющих на поведение объекта. Кроме того, модель всегда есть продукт деятельности человека, и несет в себе определенную долю субъективизма.

Другой возможной причиной неадекватности может быть **неполный учет факторов**, которые определяют актуальные свойства объекта моделирования, вынужденное упрощение закономерностей, неполнота и неточность используемых при построении моделей данных наблюдений и экспериментов.

При построении любой модели неизбежно производится упрощение, схематизация, принимаются определенные **допущения**, которые ограничивают область применения модели. Применение модели в условиях, когда эти допущения нарушаются, с большой вероятностью даст неадекватные результаты.

Проверка адекватности возможна путем сравнения результатов моделирования и данных экспериментов с реальным объектом. Для доказательства адекватности модели можно провести ретроспективный анализ поведения объекта моделирования. Если данные о прошлой «жизни» объекта достаточно хорошо описываются моделью, то есть основания предполагать, что такое же соответствие будет в случае прогноза развития процессов в будущем.

Можно различать адекватность на качественном и количественном уровне. Модель адекватная на качественном уровне воспроизводит определенные эффекты, например, наличие резонанса, развитие автоколебаний и т.д. Если модель адекватна на качественном уровне, то только после этого можно говорить об адекватности на количественном уровне. Адекватность на количественном уровне – это отражение с необходимой степенью точности изменения параметров системы в пространстве и во времени.

Адекватность непосредственно связана со степенью детализации описания объекта. Естественно, что детализация описания протекающих в объекте моделирования процессов ограничена общим уровнем знаний и возможностью проведения экспериментов с самой моделью. Как показано на рис. 1.25 сложность (простота) модели и ее адекватность – конкурирующие свойства.

Слишком простые модели совершенно не гарантируют отражения свойств объекта во всей необходимой полноте. С другой стороны, слишком сложные модели лишь **потенциально** «богаче», чем простые модели. Для исследования сложных моделей требуется применение достаточно сложных методов, что неизбежно вносит определенную погрешность, требует намного больших затрат времени и средств. Кроме того, в любой модели используются эмпирические и полуэмпирические законы, низкая степень точности которых существенным образом влияет на качество результатов моделирования.

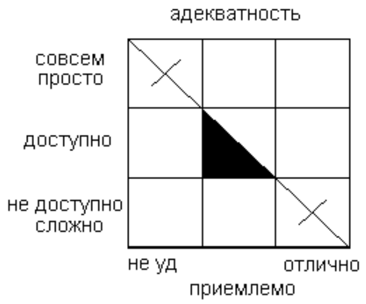


Рис. 1.25. Соотношение адекватности и сложности модели.

С практической точки зрения бессмысленно строить детальные модели и проводить слишком точные численные решения, если при разработке модели приняты весьма грубые исходные допущения. Многие крупнейшие инженеры-математики рассматривали излишнюю точность методов получения результатов как грубейшую ошибку. Следовательно, при неточности исходных данных и детальная модель не гарантирует высокой степени адекватности. Для разрешения данной проблемы обычно создают ряд моделей, начиная с самых простых.

Таким образом, любой результат модельного исследования должен восприниматься критически. Такие исследования всегда основаны на тех или иных гипотезах или допущениях, которые могут оказаться и ошибочными.

Результаты моделирования и результаты экспериментов с объектом всегда различаются. Это обусловлено не только свойствами модели, но неустранимой погрешностью измерений в ходе экспериментов и влиянием случайных факторов. Возникает задача установления соответствия модели реальному объекту на основе неточных результатов измерений. В ряде случаев решение подобной задачи возможно методами математической статистики.

В заключение отметим, что проверка адекватности модели является один из важнейших этапов ее разработки.

1.8. Формализация и моделирование

Во многих случаях при построении модели необходимо описание объекта, которое не допускает неоднозначного толкования. Такое описание требует определенной формы представления и выполняется по строгим правилам. Подобное описание называется **формализованным,** оно необходимо, если, например, требуется исследование свойств модели **математическими методами**.

Термин «формализация» означает сведение содержания к определенной форме, т.е. некоторые знания приводятся к достаточно строгой и точной форме представления. Потребность в формализации возникла вследствие необходимости описания профессиональных знаний и введения четких профессиональных понятий для массового обучения. «**Определяйте значения слов, и вы избавите мир от половины его заблуждений**» - Рене Декарт.

По мнению академика Н.Н.Моисеева: «На первой ступени познания всегда лежит опыт человеческой деятельности: наблюдение, эксперимент, изучение явления, накопление фактов. Вторая ступень – это абстрактное описание изучаемого объекта, обобщение, построение теории. При этом описание объекта выполняется на одном из языков, которые отличаются разным уровнем формализации».

Наиболее ярко это видно на примере конкретных наук. Разделение наук объективно потребовало специализированных языков, более точных, чем естественный язык. Модели специальных наук более точны и конкретны, они содержат больше информации.

Преобразование смысла в информацию – есть, по сути, первый этап формализации, который осуществляется мышлением человека. Результат этой формализации можно видеть опосредованно, например, в форме устной речи. Древняя мудрость гласит: «Кто ясно мыслит, тот ясно излагает». Формализация – отображение результатов мышления в точных понятиях и сущностях, которое противопоставляется интуитивному мышлению.

Таким образом, возможность отчуждения профессиональных знаний от их носителей определяется возможностью формализации этих знаний. Области знаний, которые оказались более формализуемыми, получили название **точных наук** (science) – например, физика, химия и др. В этих науках широко применяются математические методы анализа. Остальные области знания образовали **гуманитарные науки** (art).

Всякое представление об окружающем мире связано с построением определенной модели. Описание объектов и отношений между ними средствами языка приводит к тому, что сами объекты и их свойства замещаются определенными **именами**. С помощью имени можно однозначно определить или опознать объект. Действительно, если человек встречает новый для него объект, то первым вопросом будет: «Что это такое», т.е., каково **имя** этого объекта. Принципиально новый объект именуется и в дальнейшем имя этого объекта является его заменителем в любом описании. Имена объектов, их свойств и отношений затем используются при построении моделей. Это - основа формализации.

Формализация выполняется на основе некоторой формальной системы. Формальная система – это система, определяющая множество объектов путем описания исходных объектов и правил построения новых объектов. Объекты формальной системы – это символическое или графическое представления реальных объектов, состояний, структур и т.п. Формальная система различает объекты по их ясно различимым описательным признакам.

Для формальных систем существует **проблема выводимости**. Суть проблемы состоит в следующем – можно ли с помощью конкретной формальной системы построить описание данного объекта.

И так, формализованное описание объекта моделирования позволяет построить его строгое и однозначное описание (модель). Напомним, что любая теоретическая проблема поставлена точно, если она формализована, т.е. представлена в рамках определенной формальной системы. В этом случае для решения проблемы можно использовать математические методы.

Результаты анализа формального описания (формальной модели), с целью их практического использования, необходимо перенести на реальные объекты или **интерпретировать**. Оказалось, что формальные модели, разнообразные по своей первоначальной сущности, могут быть тождественными по форме. По этой причине математические модели разделены математиками на соответствующие классы, свойства которых они исследуют.

Интерпретация результатов анализа формальной модели объекта (обратное преобразование по сравнению с формализацией) не является однозначной процедурой. Она может быть выполнена по-разному в зависимости от конкретной предметной области. Результаты математического анализа формальных моделей интерпретируются уже специалистами конкретных прикладных наук. Таким образом, одна и та же формальная модель может иметь разные интерпретации. Такое явление называется **аналогией**.

Более детально с вопросами формализации в моделировании можно познакомиться в монографиях: [1], [18], [25], [30], [41].

1.9. Классификация моделей

Задача классификации нетривиальна даже в тех случаях, когда признаки родства элементов совершенно объективны. Пример тому – классификация в биологии, которая достаточно долго является предметом научных дискуссий. Модели строятся для объектов с чрезвычайно широким спектром признаков, поэтому общепринятой классификации моделей на сегодня не существует.

Рассмотрим классификацию, которая опирается на определение модели, а также учитывает признаки, принятые в наиболее развитых областях моделирования.

Каждая модель характеризуется следующими основными признаками:

1. Принадлежностью к определенному классу задач;
2. Принадлежностью к определенному классу объектов моделирования;
3. Способом построения самой модели;
4. Характеристикой основных свойств объекта, которые отражаются моделью;
5. Целью моделирования.

Именно эти признаки часто выносятся название модели. Например, экономико-математическая модель. Ясно, что такая модель построена средствами математики (способ реализации), а объект моделирования относится к сфере экономики.

1. По классам решаемых задач модели можно разделить на познавательные; проектные; оптимизационные; технологические; управленческие и т.п. Естественно, представленный здесь перечень не покрывает всех задач, решаемых методами моделирования, а каждый класс может быть разделен далее на множество подклассов.

2. Классы объектов моделирования – второй основной классификационный признак. Перечень объектов соответствует исторически сложившимся в науке представлениям: физические, химические, биологические, экономические и т.д.

3. По способу реализации модели разделяются на материальные и абстрактные.

Материальные модели могут быть, в свою очередь, разделены на классы:

– геометрически подобные модели, воспроизводящие пространственно-геометрические характеристики оригинала (макеты, муляжи и т.п.);

- вещественно (физически) подобные модели, воспроизводящие свойства оригинала, который имеет одну и туже же с моделью физическую природу (гидродинамические модели судов, аэродинамические модели самолетов и т.д.);
- аналого-подобные модели, которые воспроизводят свойства оригинала иной физической природы на основе совпадения математических описаний исходного и моделирующего объектов.

Материальное моделирование используется при **экспериментальном методе исследования**. Здесь модель выступает как некоторая вторая система, имеющая определенное сходство с системой-оригиналом. Создаваемые материальные модели находятся с оригиналом в отношении подобия и функционируют по тем же законам, что и система-оригинал.

К абстрактным моделям можно отнести:

- **Концептуальные модели**, т.е. системы представлений об объекте-оригинале, которые сложились в сознании человека на основе непосредственных наблюдений объекта-оригинала и теоретических представлений.
- **Графические модели** средствами графики отображают свойства оригинала, доступные зрительному восприятию (художественная графика, географические карты, технические чертежи и др.).
- **Графические условные модели** воспроизводят средствами графики свойства оригинала, которые в принципе не могут наблюдаться визуально (графики, диаграммы, схемы, фазовые портреты и др.). Для восприятия подобного рода моделей требуется специальные теоретические знания определенного уровня, образующие специфический язык данного вида графических моделей. Наглядность таких моделей значительна только для специалиста.
- **Формализованные модели** состоят из компонентов, имеющих абстрактный характер, которые представляют собой формальное описание с помощью некоторого жесткого языка с однозначной семантикой и синтаксисом. Формализация описания объекта позволяет использовать логико-математические и вычислительные методы, что существенно повышает информативность моделирования, дает возможность применения количественных методов анализа и обеспечивает наибольшую общность исследования. К числу формализованных моделей относятся, например, математические модели.
- **Алгоритмические модели** представляет собой наиболее универсальное средство моделирования. Использование данных моделей связано с моделированием поведения системы в виде алгоритма.

В последнее время моделирование, в связи с использованием компьютерной техники, называется (в широком смысле слова) **информационным моделированием**. В более узком смысле информационная модель определяется как формализованное описание информационных структур и операций над ними и отождествляется с моделями данных, а также как параметрическое представление процесса циркуляции информации, подлежащей автоматизированной обработке в системе управления.

4. Характер отражаемых моделью свойств объекта-оригинала часто выносится в ее название. Например: **структурная модель** – такая модель отражает структуру системы. Если модель именуется **структурно-функциональной**, то ясно, что речь идет о взаимосвязи функций элементов системы. Геометрическая модель отражает геометрические свойства объекта: ориентацию в пространстве, взаимное расположение, размеры и форму элементов системы.

Например, при проектировании любого здания или сооружения создается ряд моделей, каждая из которых отражает свою группу специфических свойств объекта. Геометрическая модель отражает внешний вид, внутреннюю планировку и общий архитектурный замысел.

В ряде случаев модели разделяют по степени неопределенности на **детерминированные и вероятностные (стохастические)**, которые отражают влияние, каких либо случайных факторов. Следует иметь в виду, что в природе не существует чисто детерминированных процессов, однако при слабом влиянии случайных факторов ими можно пренебречь и использовать детерминированное описание объекта или процесса.

При разделении моделей по зависимости от фактора времени разделяют **динамические модели и статические модели**. Первые учитывают фактор времени, т.е. учитывают изменение состояния объекта моделирования во времени. Статические модели отражают некоторое равновесное, стационарное состояние объекта, которое не меняется во времени.

5. По цели моделирования модели можно разделить на следующие виды:

- Познавательные модели, которые создаются с целью научного познания объектов, процессов и явлений;
- Образовательные модели, предназначенные для обучения или передачи информации;
- Проектные модели строятся с целью создания новых объектов с заданными свойствами;
- Модели управления используются с целью получения желаемого состояния или поведения объектов;
- Прогностические модели, которые способны предсказать будущее состояние объекта или развитие процесса;
- Модели диагностики состояния объекта предназначены для оценки текущего состояния объекта с целью выявления неисправностей и повышения надежности его функционирования.

Представленная классификация не претендует на полноту (известно несколько десятков классификаций). Она затрагивает лишь те свойства, которые составляют основу понятия «модель». Другие варианты классификаций можно найти в монографиях: [1], [8-9], [12-13], [28], [30].

1.10. Моделирование в педагогической практике

Ранее уже отмечалось, что моделирование является общенаучным методом изучения законов окружающего мира, свойств объектов и систем самой различной природы. Как показывает опыт, активное участие в моделировании вырабатывает более глубокое понимание сути законов природы.

Развитие технологий компьютерного моделирования предоставляет в педагогической деятельности новые возможности с максимальной степенью наглядности и оперативности получить и представить информацию о свойствах объектов и характере протекающих в них процессов. Такие возможности существенно расширяют круг изучаемых явлений. Построение моделей, проведение с ними компьютерных экспериментов способствует углублению и расширению знаний в конкретной предметной области, развитию познавательной активности и творчества учащихся.

Использование современных информационных технологий моделирования с одной стороны обогащает информатику как учебную дисциплину содержательными задачами, а с другой стороны конкретные учебные предметы получают мощное средство решения собственных задач. При этом имеется возможность эффективной реализации межпредметных связей и интеграции образования в целом. Становится очевидной реальная польза от информатики и громадная область приложения полученных при ее изучении знаний.

В настоящее время известно много компьютерных программно-методических комплексов, которые построены по принципу обучающих систем. В подобных системах ставится цель в определенной степени заменить традиционные способы и источники получения знаний. В этом случае компьютер используется как техническое средство обучения, которое в определенном смысле повторяет старые средства: учебники, справочники, традиционные уроки, аудио и видео фильмы и т.д. Естественно, что и в этом случае приобретаются новые возможности и достигается определенный положительный эффект.

Однако такие методики иногда лишь количественными показателями отличаются от методов, применяемых без использования компьютеров. С другой стороны представление информации на экране монитора, например, в виде простого текста, создает проблемы восприятия, повышает утомляемость учащихся и существенно снижает влияние положительных факторов применения компьютера. В этом плане остается еще много не решенных чисто психологических проблем. Ярким примером является простой перенос обычного учебника на электронные носители.

Наибольшим эффект от внедрения компьютерных информационных технологий в обучении может быть получен в том случае, когда появляются качественно новые возможности недоступные в обычных условиях. Например, применение технологий трехмерного моделирования позволяет учащимся провести необходимые для решения задач геометрические построения и наглядно представить объект. После чего ход решения задачи становится практически очевидным, так как с моделью объекта можно провести различные манипуляции, рассмотреть ее в различных положениях, что принципиально невозможно при построении чертежа на доске или в тетради.

Долгое время достаточно сильным препятствием в этом направлении была необходимость создания моделей средствами какой-либо системы программирования. В этом случае собственно моделирование отодвигалось на второй план и становилось практически недоступным в рамках учебного процесса. В совершенстве владеть этим инструментом в мере, достаточной для создания законченного продукта может программист, но не учащийся-пользователь.

В этом смысле компьютерное моделирование, на основе специализированных инструментальных программных комплексов, предоставляет возможность построить процесс обучения, который будет принципиально отличаться от обучающих систем, тем, что ученик вовлекается в активную учебно-познавательную и исследовательскую деятельность.

При этом имеется возможность не только провести компьютерный эксперимент на основе готовой модели, но и самостоятельно построить различные модели изучаемых явлений. Следовательно, инструментальные программные комплексы моделирования, предоставляющие возможность конструирования моделей и наглядного представления результатов с минимальной потребностью в программировании, имеют особую ценность. Эффект применения компьютера в учебном процессе в этом случае существенно возрастает.

Очевидно, что для решения вопроса о применении вычислительной техники в каждом конкретном случае, следует ответить на ряд вопросов: можно ли то же самое реализовать другими доступными средствами, какие принципиально новые качественные возможности дает персональный компьютер как средство обучения, какой положительный эффект при этом будет достигнут.

С этой точки зрения главная особенность применения моделирования в учебном процессе состоит в использовании компьютера, как средства познания. Основой изучения процессов и явлений становится имитация и активный компьютерный эксперимент, анализ его результатов, построение собственно моделей, анализ их свойств. Таким образом, обучение приобретает активную, познавательную, творческую форму. Традиционные методические решения (даже с использованием вычислительной техники) не дают таких широких возможностей.

Целью современного образования является развитие творческих начал личности. Мало вложить в голову ученика фиксированную, пусть даже весьма обширную, информацию. Не менее, а скорее даже более важно, научить учиться, то есть находить источники нужной информации в их массе в окружающем мире, формулировать проблемы и задачи, искать самостоятельно их решения, анализировать и обобщать их, т.е. применять знания на практике.

Применение информационных технологий в сфере образования способно обеспечить индивидуализацию образования, каждый обучаемый может пройти свой путь развития. Обычными средствами эта цель не достижима, так как требует нереального количества ресурсов. Использование инструментальных систем моделирования помогает решить эту задачу. Общение учащегося с компьютером обеспечит развитие сообразно его наклонностям и потребностям, даст навыки работы с формализованным знанием и практику самостоятельного получения знаний.

Применение программных средств моделирования возможно в различных формах: демонстрация, достижение требуемой реакции объекта за счет выбора необходимого воздействия, в режиме эксперимента, и т.д. Все это дает возможность на деле выработать навыки самостоятельного добывания знаний. Например, визуализация - уникальная возможность компьютерной технологии моделирования. Ни один физический прибор не способен показать, например, вектор скорости.

Главным результатом обучения будет знание, полученное самим учащимся активным творческим путем. Такое знание исключает пассивное восприятие и тривиальное заучивание, так как компьютерное моделирование является и инструментом познания и инструментом обучения.

Таким образом, моделирование, в том числе компьютерное, составляет неотъемлемую часть не только современной науки, но и образования, причем по важности оно приобретает первостепенное значение.

1.11. Контрольные вопросы к главе 1

1. В каких областях научных знаний находит применение моделирование.
2. Раскройте суть понятий «модель» и «моделирование».
3. В каких случаях моделирование особо актуально.
4. Укажите причины необходимости множества моделей для всестороннего изучения объекта или процесса.
5. Каковы основные функции моделей.
6. Какие типовые задачи решаются путем моделирования.
7. Какие модели составляют фундамент любой научной теории.
8. Каковы особенности имеет компьютерное моделирование.
9. В чем суть системного подхода.
10. Раскройте понятия: система, подсистема, окружающая среда, структура системы.
11. Как происходит взаимодействие системы и окружающей среды.
12. Какие выводы для моделирования позволяет сделать системный подход.
13. Какие аспекты системного подхода используются при построении моделей.
14. Перечислите этапы построения модели.
15. Какие факторы должны учитываться при выборе вида и способа построения модели.
16. Что такое адекватность модели.
17. Каковы причины неадекватности.
18. Что такое формализация.
19. Почему возникла потребность в формализации.
20. По каким основным признакам классифицируются модели.

Глава II. Математическое моделирование

2.1. Введение в математическое моделирование

Элементы математического моделирования используются с момента появления точных наук. Собственно и само рождение науки математики связано с решением практических задач на основе вычислений и моделирования. Многие методы математического моделирования носят имена великих ученых-математиков. Второе рождение математического моделирования связано с появлением компьютеров, которые избавили ученых и инженеров от огромной рутинной работы по проведению расчетов и существенно расширили сферы приложения математического моделирования, без которого нельзя представить современную науку и технику.

Как уже отмечалось при обсуждении актуальности моделирования, прямой натурный эксперимент для многих объектов долог, дорог, опасен или невозможен. Многие из технических систем существуют в единственном экземпляре, а результаты экспериментов с реальными объектами могут привести к необратимым отрицательным последствиям. При создании новых технических объектов их необходимо сначала спроектировать, т.е. установить какие значения должны иметь параметры объекта, чтобы его свойства и функции соответствовали требуемым. Иными словами параметры нового объекта, прежде чем он будет создан, необходимо рассчитать и провести анализ его свойств.

Совершенно очевидно, что результаты теоретических исследований в любой области науки будут иметь наибольшее практическое значение, если они будут выражены в виде конкретных **количественных зависимостей,** или попросту говоря, в виде математических формул или вычислительных алгоритмов. Это залог эффективного применения теории в практических целях. Кроме того, теоретические результаты необходимо сопоставлять с результатами измерений, полученных в ходе экспериментов. Для решения подобных проблем необходимо моделирование на основе количественных закономерностей протекающих процессов. Именно такую возможность представляет математическое моделирование. Оно является незаменимой составляющей в развитии науки и техники.

Любой объект имеет множество свойств. Математическое моделирование какого-либо объекта или процесса связано с отражением **количественных характеристик** его свойств**,** как правило, в числовом виде. Количественное выражение свойства объекта выполняется с помощью системы **параметров**, но только в том случае, если эти свойства можно **измерить**. Лишь в результате измерения свойств параметры могут получить свои значения. Измерения любого свойства всегда связаны с какой-либо **шкалой**, в рамках которой они проводится. Именно шкала позволяет выполнить сравнение нескольких объектов по одному свойству.

В результате измерения наблюдаемому состоянию объекта ставится в соответствие определенное обозначение: число, номер, знак, символ. Такое соответствие обеспечивает информативность результатов измерений.

Будем рассматривать такие состояния объекта, про которые определенно можно сказать, различимы они или нет. Допустим, что число различимых состояний конечно.

Каждому состоянию поставим в соответствие свое обозначение. Суть измерений состоит в определении принадлежности результата к определенному классу и записи этого с помощью определенного обозначения. Такие измерения называются измерениями в **шкале наименований** (или в классификационной шкале).

Раз обозначения классов – символы (даже, если это цифры), то при обработке данных в шкале наименований можно выполнить только операцию проверки их различия или совпадения.

В том случае, когда наблюдения позволяют **сравнивать** разные классы, то для измерения можно выбрать более сильную **порядковую шкалу.** В этом случае между классами можно установить соотношения типа: A>B или B=A. Примеры: воинские звания, место в конкурсе, оценки успеваемости в процессе обучения. В этом случае для обозначения классов могут использоваться слова: «отлично», «хорошо» и т.д. или цифры: 5, 4, 3, 2.

Отношения порядка не определяют «расстояния» между классами. Измерения в таких шкалах нельзя обрабатывать как числа, например, вычислять среднеарифметическое значение оценок успеваемости.

В том случае, если упорядочение можно выполнить настолько точно, что становятся известны **«расстояния»** между любыми двумя классами, то измерения можно проводить в **шкале интервалов.** Расстояние между классами должно выражаться в единицах, одинаковых по всей шкале. Подобная шкала может иметь произвольное начало отсчета. Пример: измерение времени, высоты, температуры. В подобных шкалах только длины интервалов имеют смысл настоящих чисел и только над ними можно выполнять арифметические операции. Частным случаем интервальных шкал является **циклическая шкала**. Пример: время суток, фаза колебаний.

Наиболее сильной является **абсолютная шкала,** она имеет абсолютный нуль и абсолютную единицу. Абсолютная шкала безразмерна. Пример: числовая ось или абсолютная шкала температур. Над результатами измерений в такой шкале можно выполнять любые операции.

Рассмотренные выше шкалы имеют общее свойство: они основаны на том, что два состояния или результаты двух измерений либо тождественны, либо различимы. В действительности очень часто встречаются случаи, когда о результатах измерения нельзя утверждать с полной уверенностью. Наиболее ярко это видно на примере шкал, где классы обозначаются словами естественного языка. Например, «высокий», «низкий»; «тяжелый», «легкий» и т.д. В подобных случаях мы имеем дело с нечеткой оценкой свойств объекта. Размытость встречается не только в естественном языке. В математике успешно применяются понятия «значительно больше» (>>) или «приблизительно равно» (≅), которые являются типично расплывчатыми.

Опираясь на общее определение модели, можно сказать, что математическая модель – это математический объект, который по своим свойствам подобен объекту-оригиналу. Математическая модель - это абстракция, в которой отношения и связи между реальными элементами объекта моделирования заменены подходящими математическими соотношениями между параметрами. Математическая модель отражает **количественные характеристики** тех процессов, которые протекают в объекте, т.е. она отражает связи между **параметрами объекта**. Параметры можно разделить по степени принадлежности собственно объекту или взаимодействию с окружающей средой:

1. **Входные параметры** - характеризуют внешние воздействия на объект (например, внешние управляющие воздействия).
2. **Выходные параметры** - характеризуют реакцию объекта, его воздействие на окружающую среду, т.е. характеризуют внешнее проявление объекта.
3. **Внутренние параметры** – характеризуют свойства процессов, протекающих в самом объекте. Внутренние параметры могут быть **зависимыми** или **независимыми**. Естественно, что независимые параметры можно **изменять произвольно**, а зависимые параметры изменяются только **косвенно** в силу их зависимости от других факторов.

Таким образом, объект моделирования характеризуется:

- совокупностью внешних управляющих воздействий: $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$;
- совокупностью воздействий окружающей среды: $\vec{V}(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))$;
- совокупностью внутренних независимых параметров: $\vec{H}(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots, h_k(t))$;
- совокупностью внутренних зависимых параметров: $\vec{P}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_s(t))$;
- совокупностью выходных параметров системы: $\vec{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t))$.

С учетом вышесказанного, можно утверждать, что математическая модель устанавливает количественные связи между входными и независимыми внутренними параметрами с одной стороны и выходными и внутренними зависимыми параметрами с другой стороны. Как правило, математическая модель – это система уравнений.

В общем случае векторные величины $\vec{X}$, $\vec{V}$, $\vec{H}$ могут содержать как детерминированные, так и стохастические составляющие. Входные воздействия $\vec{X}$, внутренние параметры $\vec{V}$ и частично воздействия окружающей среды являются независимыми переменными. Совокупность векторных величин $\vec{X}$, $\vec{V}$, $\vec{H}$, $\vec{Y}$ полностью характеризует состояние объекта. Процесс изменения состояния объекта можно выразить следующей обобщенной математической моделью:

$$\vec{Y}(t) = F_1(t, \vec{X}, \vec{V}, \vec{P}, \vec{H}), \quad \vec{P}(t) = F_2(t, \vec{X}, \vec{V}, \vec{H}), \quad \vec{V}(t) = F_3(t, \vec{P}).$$

Представленные соотношения дополняются начальными условиями, которые определяют состояние объекта моделирования в момент времени *t=0*.

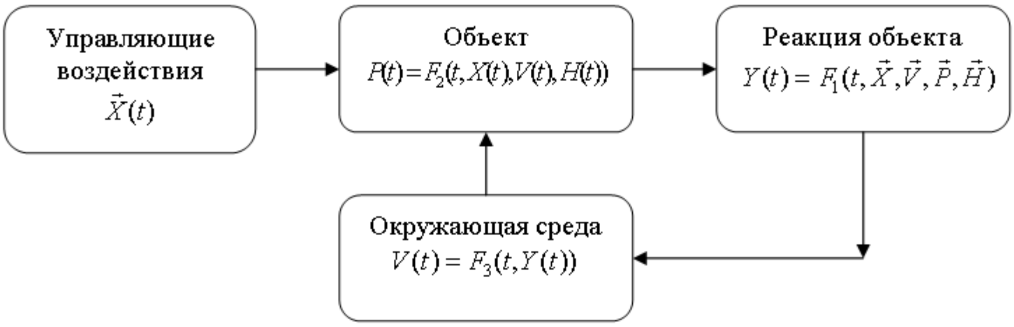


Рис. 2.1. Схема взаимосвязей параметров математической модели.

Данные соотношения называются законом функционирования объекта. Подобные модели принято называть **динамическими**. В этом случае параметры, которые изменяют свои значения во времени и требуют определения, называются **переменными**.

Статические модели отражают определенное состояние объекта, которое не меняется во времени (состояние равновесия). Совокупность переменных, определяющих состояние динамической системы, называют фазовым вектором, а область его изменения – фазовым пространством. При изменении t фазовый вектор определяет последовательность точек, называемую фазовой траекторией или фазовой диаграммой.

В большинстве случаев математическая модель представляет собой задачу некоторого раздела математики, для которой методы исследования уже разработаны.

Замечательным свойством является **формальное сходство** (аналогия) математических моделей разнородных по своей природе объектов и процессов. Таким образом, имеется возможность сгруппировать математические модели в однородные с точки зрения математики классы и исследовать их как самостоятельные абстрактные математические объекты безотносительно оригиналов.

Основой построения математической модели могут быть **фундаментальные законы природы**. Наиболее распространенный способ построения математических моделей как раз и состоит в применении фундаментальных законов к конкретной ситуации. Однако чисто теоретическим путем математическую модель какого-либо объекта построить проблематично, на определенном этапе всегда приходится использовать данные экспериментов и наблюдений, феноменологические законы или полуэмпирические зависимости.

В научной литературе в качестве необходимых условий содержательного математического моделирования предполагается наличие **априорной информации** о природе и характере исследуемых объектов и процессов, например, в форме научных теорий, законов и т.п. Кроме того, необходимо наличие некоторых опытных данных о процессах в исследуемом объекте. Из исходной априорной информации выводятся общие математические соотношения, описывающие законы функционирования объекта моделирования. А на основе статистической обработки опытных данных определяются численные значения параметров модели. Результаты такой обработки опытных данных могут использоваться в виде уже готовых полуэмпирических зависимостей, которые можно найти в специальной справочной литературе.

Таким образом, при построении математических моделей существует несколько возможностей решения задачи:

1. Построение модели на основе законов, описывающих протекающие в объекте процессы, т.е. на основе знания о механизмах процессов и явлений с привлечением фундаментальных законов природы. Такой метод можно назвать **аналитическим**.

   При построении модели составляется описание закономерностей, протекающих в объекте процессов, которые представляются в виде набора математических соотношений. Далее, на основе анализа модели делаются определенные выводы, которые проверяются на практике. Достоинством этого метода является то, что он обеспечивает получение новой информации о свойствах объекта моделирования. Например, гелиоцентрическая модель солнечной системы построена на основе законов всемирного тяготения и законов механики Ньютона. Такая модель позволила установить наличие в солнечной системе неизвестной ранее планеты.

2. Построение модели объекта путем ее идентификации, т.е. чисто формальным путем с помощью статистической обработки результатов измерений не опираясь на какие-либо знания о закономерностях процессов. Суть метода состоит в том, чтобы по данным наблюдений за входными и выходными параметрами объекта построить такую математическую модель, которая описывала бы связь между этими параметрами. Как правило, заранее выбирается определенный вид **математической зависимости**. В этом случае при идентификации определению подлежат только **параметры** принятого математического описания. Приблизительно таким методом построил свою геоцентрическую модель солнечной системы Клавдий Птолемей.

3. Построение модели системы на основе моделей элементов. Обычно этот метод используется тогда, когда необходимо построить математическую модель сложной системы на основе моделей ее элементов или когда из заданного набора элементов необходимо составить сложный объект и определить его свойства.

Первый путь реализуется при достаточной изученности общих закономерностей процессов, протекающих в моделируемом объекте. Параметры таких моделей определяются либо на основе полуэмпирических зависимостей, либо на основе теории подобия, либо путем обработки данных экспериментов. Например, для применения закона всемирного тяготения в моделировании движения космических тел, требуется экспериментальное определение гравитационной константы.

Недостатком аналитических моделей является сложность получающихся при этом уравнений. Достоинством является общность результатов моделирования и большая информативность моделей, способных предсказать новые неизвестные свойства изучаемых процессов и явлений.

Второй путь, который называется **экспериментальным** методом, применяется при отсутствии информации о механизмах процессов, слабой изученности либо сложности объекта моделирования. Он используется при исследовании объекта в достаточно узком «рабочем» диапазоне параметров. Подобные методы чаще всего основаны на предположении о линейности зависимостей и сосредоточенности параметров объекта. При таком подходе требуется постановка опытов непосредственно на самом изучаемом объекте. Достоинством экспериментального метода является простота получаемых моделей при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения параметров. Однако экспериментальный метод далеко не всегда позволяет распространить полученные результаты на другие однотипные объекты.

Сочетание обоих методов, т.е. аналитическое описание и экспериментальное определение неизвестных параметров модели, позволяет соединить сильные стороны каждого метода.

Третий путь характерен для имитационного моделирования сложных систем, когда исследователя интересуют свойства системы в целом.

В главе 1 мы уже рассматривали общую схему построения моделей. Теперь проанализируем особенности построения математических моделей.

Первоначально любая задача моделирования строится как задача какой-либо предметной области либо конкретной области науки. Описание (модель) объекта выполняется на основе естественного языка, а затем на основе более строгого научного языка, в котором используется система базовых понятий некоторой области науки. Естественно, постановка задачи должна содержать определение конечных целей моделирования, того набора свойств системы, взаимосвязи между которыми актуальны для решения данной задачи. Подобная модель носит название **концептуальной модели**.

Построение математического описания объекта всегда требует формализации задачи моделирования, т.е. ее описания в рамках какой-либо формальной системы на основе строгих и однозначных правил. Необходима, также, формулировка исходных допущений относительно исследуемого явления и упрощающих предположений.

При построении математической модели необходимо **выбрать класс математических объектов**, которые в принципе могут отображать количественные характеристики моделируемого объекта. Естественно, что выбранный математический объект должен учитывать структуру и связи объекта моделирования, иметь такое число параметров, которых достаточно для отражения его главных свойств. Значения параметров модели должны быть определены путем идентификации или с привлечением феноменологических или полуэмпирических законов. Иначе математическая модель остается неопределенной.

После построения модели необходимо сопоставление модельных результатов и результатов наблюдений, т.е. оценка адекватности модели.

Одной из серьезнейших проблем математического моделирования является большая размерность, т.е. большое число параметров. В этом случае систематизировать результаты моделирования и установить скрытые связи практически невозможно. Причиной этого является то, что к простым по форме фундаментальным законам при построении модели добавляются начальные и граничные условия, которые выделяют единственное решение. Физические свойства системы определяются физическими константами, которые должны быть определены дополнительно. Ход процессов зависит от взаимодействия с окружающей средой, что порождает ряд дополнительных параметров, характеризующих краевые условия. Аналогичным образом требуется определить геометрические свойства объекта моделирования и т.п.

Большая размерность моделей вовсе не является их собственным свойством. Оказывается, что влияние факторов (параметров) на свойства системы проявляется не порознь, а в некоторой совокупности. То есть при анализе моделей следует рассматривать не отдельные параметры, а их комплексы. Теория подобия дает способы построения таких комплексов, основанные на анализе исходной задачи. Подобная процедура позволяет существенно (иногда полностью) сократить число параметров модели, т.е. построить своеобразную обобщенную математическую модель и уже на этом этапе выявить определенные закономерности и свойства процессов. Методы построения таких моделей представлены далее в следующих разделах.

Подведем итог. В данном разделе мы познакомились с понятием математическая модель, со способами, особенностями и проблемами построения таких моделей.

Дополнительные теоретические материалы по математическому моделированию процессов и систем можно найти в изданиях [1], [11-12], [15], [35], [39], [80], [87].

2.2. Примеры построения математических моделей

В данном разделе в качестве примеров построения математических моделей используются модели физических процессов. Это классическая область применения математического моделирования. Здесь излагается материал в рамках подхода, основанного на построении обобщенных безразмерных моделей и применения инструментальной системы моделирования MVS для их реализации.

1. Движение тела под действием силы тяжести в среде с сопротивлением

На примере этой простой задачи подробно рассмотрим весь путь построения модели и принимаемые допущения, которые определяют условия адекватности моделирования. Обычно подобные задачи в учебной литературе рассматриваются без предварительного анализа всех необходимых допущений.

И так, рассматриваемый объект представляет собой тело, определенных размеров, которое совершает прямолинейное движение под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление движению со стороны окружающей среды. Расчетная схема процесса представлена на рис. 2.2.

Допущения, принятые при построении модели:

- Тело имеет правильную геометрическую форму, например шар, движение происходит прямолинейно под действием силы тяжести и силы сопротивления. Действительно, законы движения шарообразного тела и тела, имеющего форму пластины, имеют существенное различие.
- Масса тела – постоянная величина. Таким образом, модель не описывает, например, движение тел, вещество которых испаряется, сгорает или растворяется.
- В процессе движения форма тела не изменяется. Капля жидкости или пузырек газа изменяют свою форму, для описания их движения требуются намного более сложные модели.
- Плотность тела существенно выше плотности окружающей среды. Таким образом, силой Архимеда можно пренебречь. В соответствии с этим

допущением из рассмотрения исключаются процессы, в которых сила Архимеда имеет определяющее значение. Например, всплывающий газовый пузырек намного легче окружающей жидкости, его движение подчиняется более сложным законам, в соответствие с которыми траектория его движения будет иметь волнообразный характер.

– Вращение тела отсутствует. Таким образом, полет футбольного мяча данная модель в полной мере описать не в состоянии.

– Сила сопротивления линейно зависит от скорости движения тела: $F = -kV$. Данное допущение справедливо в определенном диапазоне скоростей движения тела. На практике часто реализуется квадратичный закон сопротивления: $F = -k \cdot V \cdot |V|$.

– Гравитационная сила – постоянная величина. Таким образом, модель не распространяется на описание процессов космического масштаба, например, движения космического летательного аппарата по околоземной орбите или полета метеорита.

Если перечисленные допущения выполняются, то тело можно считать материальной точкой, движение которой описывается законами классической механики. Все допущения направлены на то, чтобы определить область корректного применения законов движения материальной точки. Однако определение значения коэффициента k возможно только путем идентификации или с помощью полуэмпирических зависимостей.

На примере данной модели мы хотим подчеркнуть, что любая модель имеет свою область применения. Действительно, перечень допущений достаточно велик и невыполнение любого из них приведет к неадекватным результатам моделирования. Например, вращение тела при движении в среде с сопротивлением создает дополнительную силу (эффект Магнуса). Проявление данного эффекта можно наблюдать в ходе любого футбольного матча.

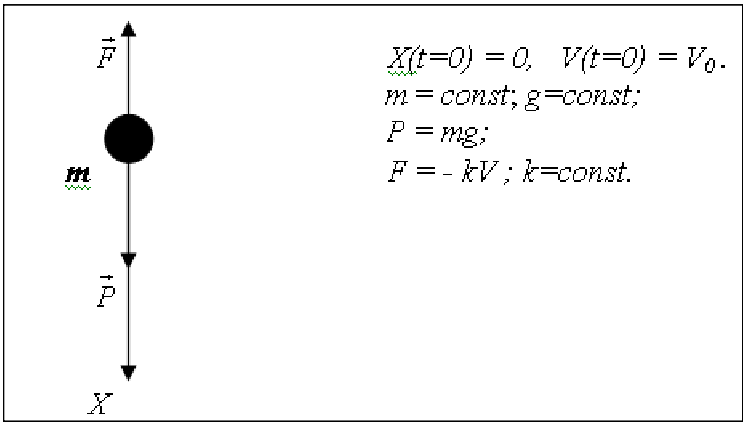


Рис. 2.2. Расчетная схема движения тела.

Цель моделирования: построить модель, на основе которой можно определить закон изменения скорости движения тела *V(t)* и закон изменения координаты *X(t)* во времени. В соответствии с принятыми допущениями, модель движения тела строится на основе второго закона механики. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение тела, имеет вид:

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV, \quad \frac{dx}{dt} = V,$$

с начальными условиями: $V(t=0) = V_0; \quad x(t=0) = 0.$

Данная модель имеет четыре параметра, что существенно затрудняет анализ. Для упрощения анализа результатов моделирования необходимо свести количество параметров к минимуму.

Преобразуем модель к безразмерному виду следующим образом:

$$\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} = 1 - \frac{k}{mg}V.$$

Определим безразмерную скорость $\overline{V}$ как отношение текущего значения скорости V к ее начальному значению V_0: $\overline{V} = V/V_0$, и преобразуем уравнение движения:

$$\frac{V_0}{g}\frac{d\overline{V}}{dt} = 1 - \frac{kV_0}{mg}\overline{V}.$$

Обозначим: $t^* = V_0/g$ - характерное время процесса. Введем безразмерное время $\bar{t} = t/t^*$. Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{d\overline{V}}{d\bar{t}} = 1 - (\frac{kV_0}{mg})\overline{V}.$$

Обозначим $\bar{k} = \dfrac{kV_0}{mg}$ - безразмерный коэффициент сопротивления. С учетом принятых обозначений уравнение движения запишем в следующей форме:

$$\frac{d\overline{V}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{k}\overline{V}.$$

Кинематическое уравнение преобразуется аналогичным образом:

$$\frac{1}{V_0 t^*}\frac{dx}{d\bar{t}} = \overline{V}. \quad \bar{x} = x/(V_0 t^*).$$

В итоге получим систему безразмерных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\overline{V}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{k}\overline{V}, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \overline{V}.$$

С начальными условиями: $\bar{x}(\bar{t}=0) = 0, \ \overline{V}(\bar{t}=0) = 1.$

После преобразований задача приведена к безразмерному виду и имеет всего один **безразмерный** параметр $\bar{k}$. Естественно, анализ свойств подобной модели проводить значительно проще, чем исходной.

При анализе модели в исходном размерном виде, задав конкретные значения параметров, мы установим свойства лишь единственной конкретной системы. Анализ модели в безразмерной форме для заданного значения $\bar{k}$ дает информацию о свойствах бесконечного числа реальных систем**,** для которых:

$\bar{k} = \dfrac{kV_0}{mg} = const.$

Различные реальные системы, имеющие одинаковые значения параметра $\bar{k}$ называются **подобными**, а параметр $\bar{k}$ для данной задачи называется критерием подобия.

В частном случае, когда $V_0=0$ можно получить безразмерную модель с нулевым количеством параметров. Такая система называется **автомодельной**. В этом случае все реальные системы подобны друг другу.

Таким образом, проделанные предварительные преобразования существенно повысили информативность модели и упростили дальнейший вычислительный эксперимент. Построенная в среде MVS для данного процесса компьютерная модель имеет вид по рис. 2.3. Результаты моделирования представлены на рис. 2.4.

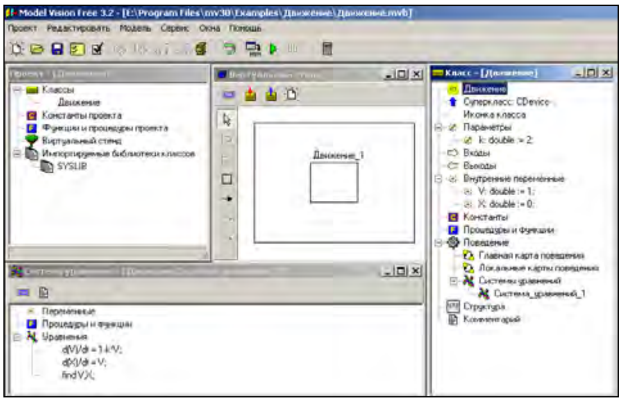


Рис. 2.3. Компьютерная MVS-модель движения тела в среде с сопротивлением.

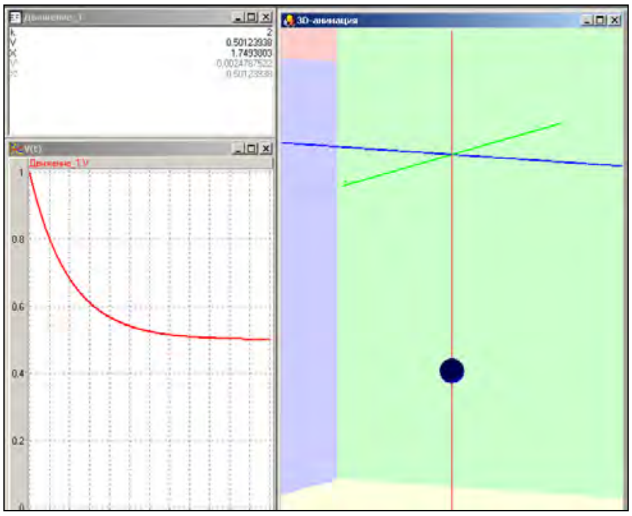


Рис. 2.4. Результаты моделирования процесса движения тела (MVS).

2. Модель движения тела по баллистической траектории.

Данная модель непосредственно связана с предыдущей. Будем считать, что все, ранее принятые допущения справедливы. Различие состоит только в начальных условиях: в **начальный момент** времени тело находится в точке с координатами: $x(t=0)=0$, $y(t=0)=0$ (рис. 2.5) и начинает движение под углом α со скоростью V_0.

Целью моделирования является построение траектории движения в прямоугольной системе координат.

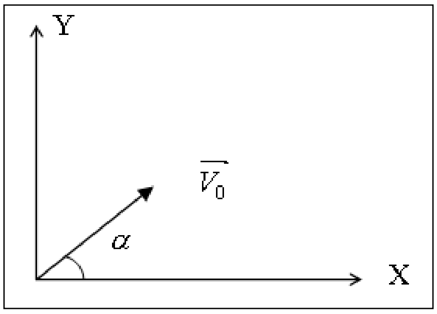


Рис. 2.5. Начальное положение тела в момент старта.

$$\overrightarrow{V}(t=0)=\overrightarrow{V_0},\quad V_x(t=0)=V_0\cos\alpha,\quad V_y(t=0)=V_0\sin\alpha\,.$$

Как и прежде, модель строится на основе второго закона механики и кинематических уравнений:

$$m\frac{dV_x}{dt}=-kV_x;\quad m\frac{dV_y}{dt}=-mg-kV_y;\qquad \frac{dx}{dt}=V_x;\quad \frac{dy}{dt}=V_y.$$

Аналогичные простейшие преобразования уравнений модели дают следующее:

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{dV_y}{dt}=-1-\frac{k}{mg}V_y;\qquad \frac{V_0}{g}\cdot\frac{d\overline{V}}{dt}=-1-\frac{kV_0}{mg}\overline{V_y};\qquad \frac{d\overline{V_y}}{d\bar{t}}=-1-\overline{k}\overline{V_y};$$

$$V_0\frac{d\overline{V_x}}{dt}=-\frac{kV_0g}{mg}\overline{V_x};\qquad \frac{V_0}{g}\cdot\frac{d\overline{V_x}}{dt}=-\frac{kV_0}{mg}\overline{V_x};\qquad \frac{d\overline{V_x}}{d\bar{t}}=-\bar{k}\cdot\overline{V_x};$$

где $\bar{t}=t/\left(\dfrac{V_0}{g}\right)$; $\overline{V}=V/V_0$, начальные условия при этом суть следующее:

$$\overline{V_x}(\bar{t}=0)=\cos(\alpha);\quad \overline{V_y}(\bar{t}=0)=\sin(\alpha);$$

Подобные преобразования проводятся и с кинематическими уравнениями. Таким образом, окончательно модель имеет два параметра: коэффициент сопротивления и угол начального движения (в отличие от исходной модели, которая имела, пять параметров). В итоге преобразований модель примет следующий вид:

$$\frac{d\overline{V_x}}{d\bar{t}}=-\bar{k}\cdot\overline{V_x};\quad \frac{d\overline{V_y}}{d\bar{t}}=-1-\overline{k}\overline{V_y};\quad \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}}=\overline{V_x};\quad \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}}=\overline{V_y};$$

$$\overline{V_x}(\bar{t}=0)=\cos(\alpha);\quad \overline{V_y}(\bar{t}=0)=\sin(\alpha);\quad \overline{x}(\overline{t}=0)=0;\quad \overline{y}(\overline{t}=0)=0.$$

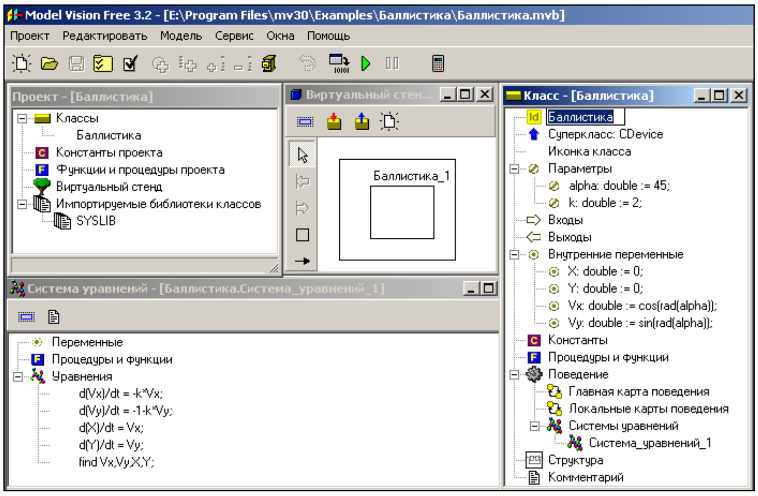


Рис. 2.6. Компьютерная MVS-модель движения тела по баллистической траектории.

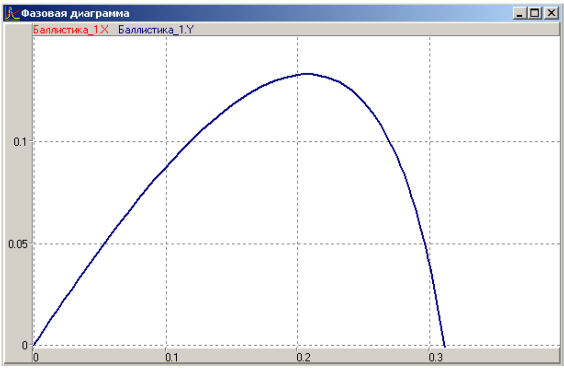


Рис. 2.7. Результат моделирования движения тела по баллистической траектории.

3. Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой.

Имеется нагретое тело с параметрами: m - масса тела, c – теплоемкость, которые неизменны с течением времени. В начальный момент времени температура тела равна заданной величине: $T(t=0)=T_1$, $T_1>T_0$, где T_0 – температура окружающей среды: $T_0=const$. Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой происходит по поверхности тела площадью $F=const$.

Задача состоит в следующем: установить характер изменения температуры тела во времени $T(t)$, после того, как началось охлаждение.

Модель процесса строится на основе закона сохранения энергии в форме уравнения теплового баланса:

$$mc\frac{dT}{dt} = F\alpha(T_0 - T).$$

Левая часть уравнения отражает скорость изменения во времени количества тепла в нагретом теле, правая часть соответствует скорости передачи тепла в окружающую среду через боковую поверхность тела. Данная величина пропорциональна площади боковой поверхности тела и разности температур. Здесь α - коэффициент теплоотдачи, который определяется на основе полуэмпирических зависимостей.

Эта модель адекватно описывает процесс только в том случае, если скорость распространения тепла внутри тела за счет теплопроводности много больше скорости теплоотдачи через боковую поверхность тела. В противном случае нельзя полагать, что температура тела по его объему будет иметь равномерное распределение.

Преобразуем уравнение к безразмерной форме:

$$\frac{mc}{\alpha F}\cdot\frac{dT}{dt}=(T_0-T),\quad t^*=\frac{mc}{\alpha F},\quad \frac{dT}{d\bar{t}}=(T_0-T).$$

Здесь t^* - характерное время (масштаб) процесса, $\bar{t}$ – безразмерное время процесса: $\bar{t}=t/t^*$. Определим безразмерную температуру следующим образом: $\bar{T}=\dfrac{T-T_0}{T_1-T_0}$. При $T=T_0 \Rightarrow \bar{T}=0,\ T=T_1 \Rightarrow \bar{T}=1$. Тогда уравнение модели можно преобразовать и представить в виде: $\dfrac{d\bar{T}}{d\bar{t}}=-\bar{T},\qquad \bar{T}(\bar{t}=0)=1.$

Полученная безразмерная модель не имеет параметров, тогда как исходная размерная модель содержала шесть параметров. Компьютерная MVS модель процесса и результаты моделирования представлены на рис. 2.8-2.9.

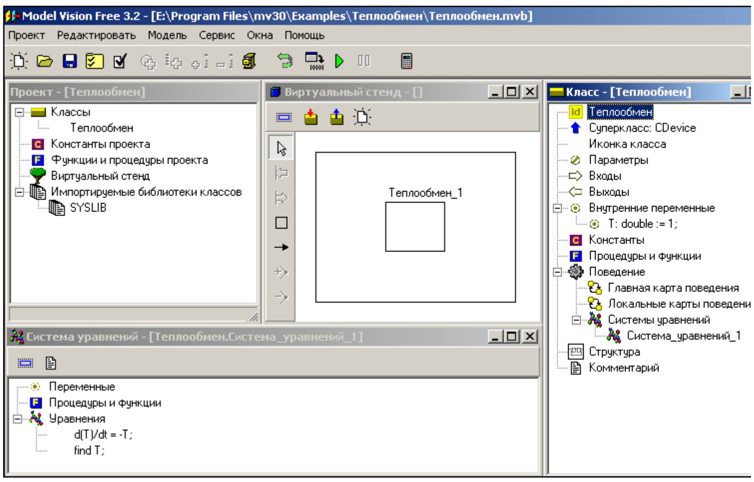


Рис. 2.8. Компьютерная MVS-модель теплового взаимодействия.

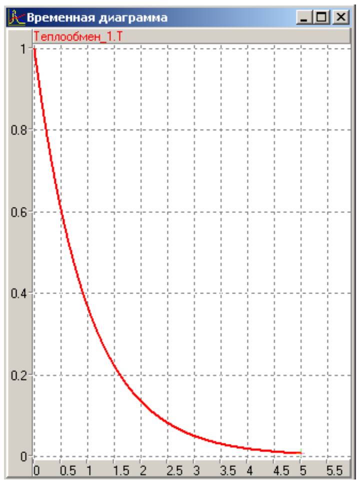


Рис. 2.9. Результат моделирования в среде MVS.

4. Кинетика химической реакции.

Имеется химический реактор, в котором происходит некая химическая реакция. Концентрация реагента одинакова по всему объему реактора. Предполагается, что скорость изменения концентрации реагента описывается на основе закона действующих масс следующим уравнением химической кинетики: $\dfrac{dc}{dt}=-kc,$

здесь k – константа скорости химической реакции (примем, что $k=const$), c – концентрация реагента. Реакция имеет первый порядок, так как ее скорость линейно зависит от концентрации.

В начальный момент времени концентрация реагента задана: $c(t=0)=c_0$. Проведем преобразования исходной модели к безразмерному виду:

$$\frac{d\bar{c}}{d\bar{t}} = -\bar{c}, \qquad \text{где } \bar{t} = t \cdot k, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}$$

После преобразования начальные условия примут вид: $\bar{c}(\bar{t}=0)=1$. Полученная модель по форме записи полностью совпадает с моделью остывания нагретого тела. Данные примеры показывают что, разнородные по своей физической природе процессы могут описываться тождественными безразмерными математическими моделями. Эти примеры демонстрируют явление аналогии.

5. Моделирование движения космического летательного аппарата по околоземной орбите.

В отличие от предыдущих моделей, данная модель будет построена в размерном виде для большей наглядности при проведении численных экспериментов и обсуждения результатов. Основа построения модели - закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона. Расчетная схема представлена на рис. 2.10.

Будем считать, что в начальный момент времени космический летательный аппарат (КЛА) находится на высоте H от поверхности Земли. Без особого ущерба для общности задачи примем следующие начальные условия: $t = 0$, $V_{0y}=0$, $V_{0x}=V_0$, $X=0$, $Y=R+H$, где R – радиус Земли.

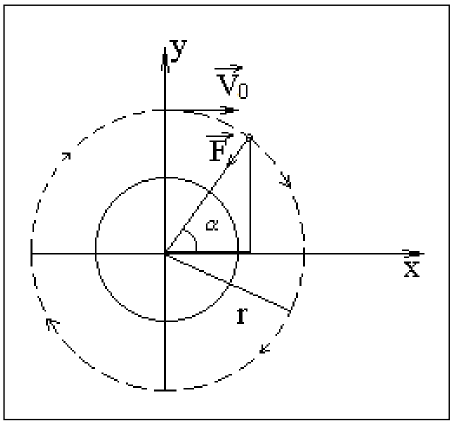


Рис. 2.10. Расчетная схема движения КЛА по околоземной орбите.

Допущения: Земля имеет форму шара, влияние атмосферы не учитываем. КЛА при решении данной задачи можно считать материальной точкой.

В векторной форме уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, V_{0y}); \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma \frac{mM\vec{r}}{r^3},$$

здесь r - расстояние от данной точки траектории до центра Земли, m - масса КЛА, M - масса Земли, γ – гравитационная постоянная.

Простейшие преобразования исходной модели дают следующие соотношения:

$$m\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\gamma m M \cdot Cos(\alpha)}{r^2}; \qquad m\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\gamma m M \cdot Sin(\alpha)}{r^2};$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{M\gamma}{R^2} \cdot \frac{Cos(\alpha)}{r^2 / R^2}; \qquad \frac{dV_y}{dt} = -\frac{M\gamma}{R^2} \cdot \frac{Sin(\alpha)}{r^2 / R^2};$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g \cdot \frac{Cos(\alpha)}{r^2 / R^2}; \qquad \frac{dV_y}{dt} = -g \cdot \frac{Sin(\alpha)}{r^2 / R^2}.$$

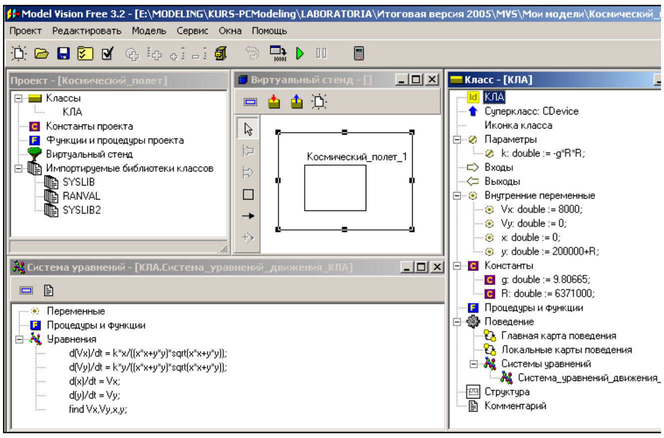
$$Cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad Sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Если добавить кинематические уравнения движения, то окончательная система, описывающая полет КЛА по околоземной орбите, будет иметь вид:

$$\frac{dV_x}{dt} = -(g \cdot R^2) \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{dV_y}{dt} = -(g \cdot R^2) \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \qquad \frac{dy}{dt} = V_y.$$

Интегрирование этой системы, с указанными выше начальными условиями, позволит построить траекторию движения КЛА. Реализация модели в среде MVS представлена на рис. 2.11. На основе данной модели можно провести анализ зависимости траектории КЛА от начальных условий, определить первую и вторую космические скорости (рис. 2.12.).



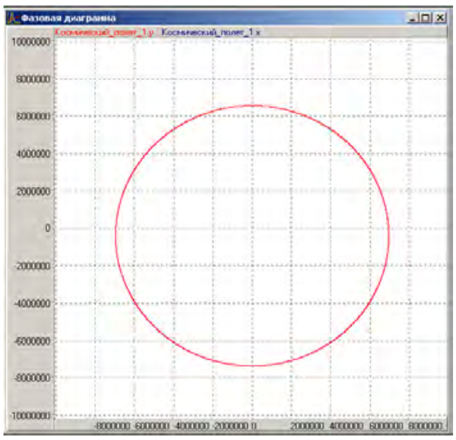


Рис. 2.11. Компьютерная MVS-модель движения

Рис. 2.12. Результат моделирования –

КЛА по орбите. траектория полета КЛА.

На примере представленных в данном разделе задач показан весь цикл построения математических моделей с момента принятия упрощающих допущений до получения уравнений, описывающих моделируемые процессы, и их компьютерной реализации в среде инструментальной системы моделирования MVS. Данная система моделирования существенно упрощает построение компьютерной модели, т.к. выбор численного метода, генерация программного кода производится автоматически средствами MVS.

Дополнительно примеры решения задач математического моделирования можно найти в изданиях [1], [3], [15], [35], [44], [52], [63], [87].

2.3. Построение безразмерных обобщенных моделей

Математические модели многих объектов или процессов, как правило, имеют достаточно большое число параметров. Это существенно затрудняет выявление каких-либо закономерностей. Построение безразмерной модели еще на этапе, предшествующем проведению вычислительных экспериментов с математической моделью, позволяет существенно повысить ее информативность и информативность результатов моделирования. Это следствие сокращения числа параметров и выявления безразмерных комплексов, которые и определяют свойства моделируемого объекта.

Построение безразмерной модели позволяет установить законы подобия. Именно при построении моделей технических объектов были впервые разработаны основные положения теории подобия, которые впоследствии нашли применение при решении многих задач. В предыдущем разделе такие преобразования уже производились. Теперь рассмотрим общую методику, суть которой состоит в следующем:

1. **Построение модели.** Математическая модель строиться в виде системы уравнений в размерной форме. Только в этом виде уравнения отражают «физическую» суть моделируемых процессов.
2. **Определение безразмерных переменных.** Все переменные (пространственные координаты, время, искомые функции) представляются в безразмерной форме путем введения неопределенных масштабов.
3. **Преобразование модели к безразмерному виду**. Уравнения, краевые и начальные условия чисто алгебраическими методами преобразуются к безразмерному виду. В этом случае в уравнениях образуются безразмерные комплексы размерных параметров, которые включают неопределенные масштабы.
4. **Определение масштабов.** Безразмерные комплексы, содержащие неопределенные масштабы, приравниваются единице. Тем самым образуется система алгебраических уравнений, решение которой дает выражения для неопределенных масштабов. Естественно, что число алгебраических уравнений, которые используются для определения масштабов, должно быть равно числу неопределенных масштабов.

В оставшихся безразмерных комплексах масштабы теперь получают конкретные значения. Эти комплексы и образуют безразмерные параметры задачи. Таким чисто формальным путем могут быть получены естественные безразмерные параметры модели, которые в каждом конкретном случае имеют свой «физический» смысл.

Результаты исследования безразмерной модели распространяются на множество реальных объектов, для которых безразмерные параметры имеют одинаковое значение.

В качестве примера рассмотрим преобразование к безразмерному виду модели динамической системы, которая представляет собой тело массой *m*, совершающее колебания под действием упругой пружины и сил трения. Схема объекта исследования представлена на рис. 2.13.

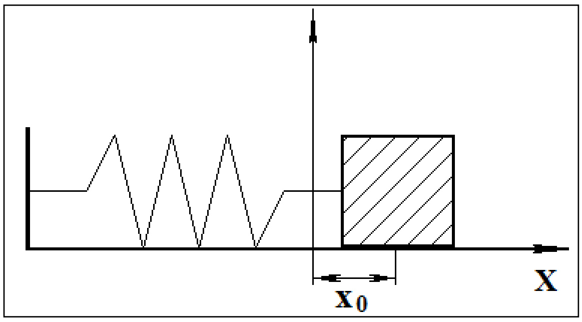


Рис. 2.13. Схема объекта исследования.

Построение модели.

Исходная размерная модель, записанная в виде системы дифференциальных уравнений, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = -cx - kV, \\ \dfrac{dx}{dt} = V; \end{cases}$$

$$x(t=0) = x_0, \quad V(t=0) = 0,$$

где m – масса тела, x - координата тела, V – его скорость, c – жесткость пружины, k - коэффициент трения. Значение $x = 0$ соответствует положению равновесия.

Определение безразмерных переменных.

Определим безразмерные переменные следующими соотношениями:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^*},\ \bar{V} = \frac{V}{V^*},\ \bar{t} = \frac{t}{t^*}.$$

Здесь x^*, V^*, t^* – неопределенные масштабы (положительные константы), x, V, t - размерные переменные.

Преобразование модели к безразмерному виду.

Преобразуем модель к безразмерному виду путем замены размерных переменных:

$$x = \bar{x}\cdot x^*,\ V = \bar{V}\cdot V^*,\ t = \bar{t}\cdot t^*.$$

Тогда уравнения и начальные условия примут вид:

$$\frac{V^* m}{t^*}\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -x^* c\cdot\bar{x} - kV^*\bar{V}; \qquad \frac{x^*}{t^*}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = V^*\bar{V}.$$

Или

$$\frac{V^* m}{x^* t^* c}\ \frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\bar{x}\ - \frac{kV^*}{cx^*}\ \bar{V}; \qquad \frac{x^*}{V^* t^*}\ \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}.$$

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = x_0 / x^*, \quad \bar{V}(\bar{t} = 0) = 0.$$

Определение масштабов.

Масштабы x^*, y^*, t^* выберем таким образом, чтобы:

$$\frac{V^* m}{x^* t^* c} = 1, \qquad \frac{x^*}{V^* t^*} = 1, \qquad x_0 / x^* = 1.$$

Тогда

$$t^* = \sqrt{\frac{m}{c}}\ ,\ \ x^* = x_0\ ,\ \ V^* = x_0\sqrt{\frac{c}{m}}\ ;$$

и система уравнений окончательно будет иметь следующий безразмерный вид:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\bar{x} - \bar{k}\bar{V}, \qquad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}.$$

Здесь $\bar{k} = \dfrac{k}{\sqrt{mc}}$ - безразмерный параметр, безразмерный коэффициент трения.

Начальные условия суть следующее: $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 1,\quad \bar{V}(\bar{t} = 0) = 0.$

Проделанные преобразования показали, что поведение и свойства системы по рис. 2.13 полностью определяется значением безразмерного параметра $\bar{k}$. Таким образом, результаты исследования модели при конкретном значении параметра $\bar{k}$ будут представлять свойства целой группы **подобных** явлений, имеющих такие же значения безразмерного параметра $\bar{k}$.

Применение данной методики позволяет свести к минимуму число параметров, что существенно упрощает задачу моделирования. Данная процедура может быть выполнена разными способами. В некоторых случаях в качестве значений масштабов изначально могут быть выбраны характерные для конкретного объекта или процесса значения. Однако такой подход не позволяет минимизировать число безразмерных параметров. В данной задаче при отсутствии трения ($\bar{k} = 0$) все системы подобны между собой (автомодельны).

В итоге получается **обобщенная безразмерная модель**, которая сама по себе лишена всякого «физического» смысла. Физический смысл результатов моделирования истолковывается только через интерпретацию безразмерных параметров и переменных. При проведении вычислительного эксперимента на основе подобных моделей во многих случаях порядок величин и порядок вычислительных ошибок может быть оценен заранее.

Таким образом, представленный метод позволяет выявить важное для моделирования свойство объектов и процессов – явление подобия. В рамках рассмотренной модели, подобными будут считаться все процессы, имеющие одинаковые значения безразмерных параметров.

Утверждение о подобии явлений есть констатация определенной общности их свойств. Исторически понятие подобия сложилось на основе сравнительного анализа явлений одной и той же физической природы. Установлено, что результаты, полученные при анализе единичного конкретного явления (объекта или процесса), могут быть по определенным правилам перенесены на множество других явлений.

Изучение и установление законов подобия явлений самой разнообразной природы есть предмет исследований теории подобия.

Для того чтобы модель замещала в каком-то отношении оригинал, между оригиналом и моделью должно быть установлено отношение подобия. Подобие может устанавливаться в процессе создания самой модели. Примерами таких отображений являются фотографии, масштабные модели самолетов, кораблей или гидротехнических сооружений, макеты зданий, и т.п. Такое подобие называется прямым. Понятие подобия заимствовано из геометрии, и означает существование определенных масштабных соотношений для параметров сопоставляемых геометрических объектов.

Понятие подобия физических процессов родственно понятию геометрического подобия. В этом случае под подобием понимается такое взаимно однозначное соответствие между сопоставляемыми объектами или процессами, при котором правила перехода от параметров одного объекта к параметрам другого объекта известны или заданы.

Замечательным свойством, окружающего нас мира, является то, что модели процессов и явлений самой разнообразной природы сводятся к тождественным по форме безразмерным математическим моделям. Таким образом, результаты исследования одного явления могут быть перенесены на явление совершенно другой физической природы. Такую, более сложную форму подобия, называют аналогией.

Наиболее известными примерами являются электротепловая аналогия и электромеханическая аналогия. Оказывается, что закономерности электрических и механических процессов, электрических и тепловых процессов описываются одинаковыми уравнениями. Различие состоит лишь в разной физической интерпретации переменных и параметров, входящих в эти уравнения. Таким образом, можно заменить неудобное и громоздкое экспериментирование, например, с механической конструкцией на простые опыты с электрической схемой.

Примером аналогии является подобие процессов переноса движущейся средой тепла (теплообмен), вещества (массообмен) и количества движения (гидродинамическое сопротивление). Таким образом, выявление законов подобия при моделировании систем различной природы показывает, как наиболее информативно представить результаты модельных экспериментов и выявить закономерности процессов.

Дополнительные примеры и теоретические материалы из области теории подобия можно найти в монографиях [57]. [80], [100].

2.4. Методы исследования моделей, численное моделирование

Построение математической модели и преобразование ее к безразмерному виду позволяет уже на этой стадии получить определенную информацию о свойствах решения и, следовательно, объекта моделирования. Существует целый класс качественных математических методов, предназначенных для выявления свойств объекта или процесса без решения уравнений, составляющих его математическую модель. Они позволяют установить свойства решения только на основе анализа параметров модели. Однако во многих случаях получение решения уравнений математической модели необходимо.

Используемые в настоящее время методы исследования различного рода математических моделей в прикладных областях можно разделить на следующие виды: точные методы; асимптотические методы; приближенные методы; численные методы.

Под **точными методами** понимаются методы, которые позволяют получить решение исходной задачи в аналитическом виде без ее упрощения. Такие методы применимы для решения достаточно простых линейных задач с постоянными коэффициентами. Достоинством точных аналитических решений является их наглядность, компактность и большая информативность. Для решения современных задач моделирования такие методы практически не применяются. Однако точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач при разработке других методов (приближенных и численных).

Технические, экономические, экологические и другие системы, изучаемые современной наукой, не поддаются исследованию в необходимой для практики полноте аналитическими методами. Это обстоятельство обусловлено сложностью и нелинейностью их математических моделей.

Для нелинейных задач большим достижением считается получение даже частных решений. Изучение любого явления начинается с определения его **основных закономерностей** на качественном уровне. При этом уравнения модели часто настолько сложны, что необходимо построение упрощенных моделей, без которых невозможно выявить механизмы процессов и составить их ясное понимание.

В ряде случаев упрощение достигается за счет того, что рассматривается такой вариант задачи, в котором удается выделить малый параметр. В этом случае решение представляется в виде разложения в ряд по малому параметру. Подобные методы носят название **асимптотических** или методов возмущений и широко применяются в гидродинамике, квантовой физике и т.д.

До сих пор сохраняют свое значение **приближенные методы**, которые опираются на неформальное понимание сути процессов. Приближенные методы удобны для получения грубых оценок на предварительном этапе исследования. Они играют большую роль в получении качественных представлений и часто используются, например, в инженерной практике, когда исходная задача имеет приближенную постановку и значения параметров определены с точность до порядка. В качестве примера приближенных методов можно привести решение нелинейной задачи по линеаризованной модели, решение задачи с переменными параметрами по алгоритмам для задач с постоянными коэффициентами и т.д.

Как бы ни были разнообразны методы приближенного или качественного анализа математических моделей, область их применения ограничена. Это либо достаточно простые модели, либо упрощенные фрагменты сложных нелинейных моделей.

Как уже отмечалось, математические модели реальных объектов являются нелинейными. Для проведения экспериментов с ними, т.е. для получения информации об их свойствах, требуется компьютерная реализация математических моделей на основе **численных методов**. Это единственный достаточно универсальный способ исследования математических моделей с помощью средств компьютерной техники.

Поэтому современное математическое моделирование всегда предполагает применение численных методов анализа и проведение компьютерных вычислительных экспериментов.

Численные решения являются всегда приближенными и имеют дискретный характер. Доступный «пониманию» компьютера вычислительный алгоритм должен удовлетворять достаточно жестким требованиям. К ним относятся, прежде всего, необходимость получить решение с заданной точностью за разумное время. Объемы обрабатываемой информации при этом не должны превышать возможностей компьютера.

Проблемы численного моделирования не решаются сами собой при развитии вычислительной техники, так как постоянно происходит усложнение задач, выдвигаемых теорией и практикой, существует необходимость проведения большого числа серий вычислительных экспериментов для более полного изучения объекта. Поэтому разработка и применение эффективных вычислительных методов остается одной из ключевых задач математического моделирования.

Для математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями, процесс создания вычислительных алгоритмов состоит из построения **дискретного алгебраического аналога** исходных уравнений и его численного решения. Дискретный аналог позволяет приближенно определить решение уравнений в конечном числе фиксированных точек по времени или пространственным координатам.

Численные методы позволяют получить решения в областях, где другие методы бессильны. Однако огромный потенциал численных методов не делает их всесильным средством. К недостаткам численных методов можно отнести слабую наглядность и информативность результатов по сравнению с аналитическими и приближенными решениями, трудоемкость реализации, трудности применения в разрывных точках, отсутствие строгого обоснования корректности вычислительных процедур для сложных нелинейных задач, проявление эффектов конечной разрядной сетки кодирования чисел. Любой численный метод привносит в решение задачи количественную погрешность, а в ряде случаев и **качественные эффекты**, распознать природу которых весьма затруднительно.

Рассмотрим основные характеристики численных методов, актуальные для моделирования:

Устойчивость метода. Неустойчивый численный метод приводит к накоплению и неограниченному росту вычислительных ошибок. Характерный признак неустойчивости вычислений: решение имеет пилообразный характер с быстро растущей амплитудой (рис. 2.14). Естественно, что неустойчивые методы применять нельзя. Существуют **условно и безусловно** устойчивые методы. Условно устойчивый метод это такой метод, когда устойчивое решение получается при выполнении определённого условия для параметров вычислений. Для безусловно устойчивого метода устойчивость вычислений обеспечивается при любых сочетаниях вычислительных параметров.

Степень точности метода (порядок метода)**.** Любой численный метод имеет основной характерный параметр. Обычно степень точности метода указывается в виде зависимости погрешность метода от величины этого параметра. Например: $\delta \sim h^2$, где δ

– погрешность метода, h - шаг вычисления. Такой метод называется методом второго порядка точности.

Выбор численного метода при реализации математической модели имеет большое значение. Так как любой численный метод является приближенным, то результаты моделирования будут содержать определенную заранее неизвестную ошибку. Существует множество научных публикаций, в которых проявление свойств численных методов ошибочно принималось в качестве свойств объекта моделирования.

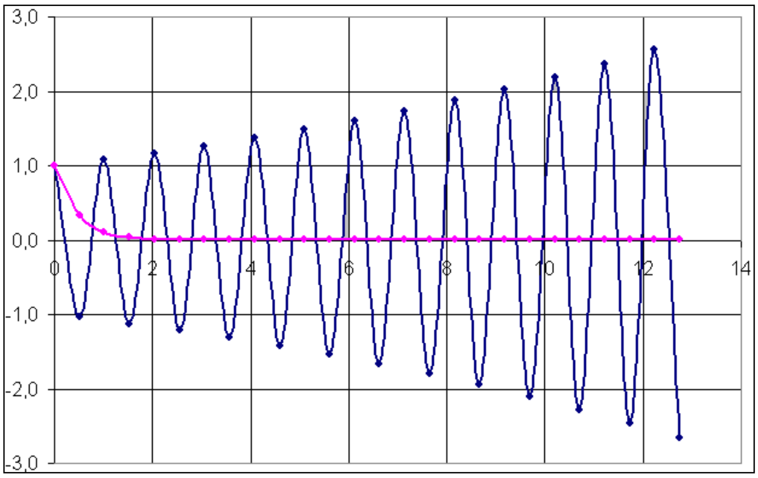


Рис. 2.14. Результаты решения задачи устойчивым и неустойчивым методами.

Следует иметь в виду, что выбор численного метода определяется задачей моделирования исходя из принципа «оптимальной неточности». Это означает, что в задачах с весьма приближенными исходными данными или при качественном анализе процессов применение методов высокой степени точности ничем не оправдано. В большинстве случаев результат может быть получен на основе простейших методов первого или второго порядка точности.

Сходимость метода. Сходимость – это теоретическая характеристика метода, которая констатирует тот факт, что в пределе метод может дать точное решение при стремлении его основного параметра к нулю (или бесконечности). В практике численного моделирования играет большую роль **скорость сходимости** метода. Например, при решении нелинейных алгебраических уравнений наибольшую скорость сходимости имеет метод Ньютона.

Во многих случаях математические модели представляют собой системы дифференциальных уравнений. Суть методов интегрирования дифференциальных уравнений рассмотрим на примере обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ с начальными условиями: $y(t=0) = y_0$ (задача Коши).

Численное интегрирование данного дифференциального уравнения сводится к вычислению дискретного ряда значений переменной y: $y_0,\ y_1,\ y_2 \dots y_k$ для заданных значений переменной t: $t_0, t_1, t_2 \dots t_k$. В большинстве случаев интегрирование проводится с постоянным шагом по времени: $\tau = t_{j+1} - t_j = const$.

Пусть в момент времени t_n значение $y_n=y(t_n)$ нам известно. Такая точка всегда имеется, т.к. для дифференциального уравнения задано начальное условие: $y_0=y(t=0)$.

Необходимы расчетные соотношения для получения значения y в момент времени t_{n+1}: $y_{n+1}=y(t_{n+1})$. Проинтегрируем данное дифференциальное уравнение от t_n до t_{n+1} :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \; .$$

Простейшее преобразование этого соотношения дает основную вычислительную формулу:

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \; .$$

В последней формуле для конкретного численного метода интегрирования необходимо выбрать какой-либо способ вычисления определенного интеграла в правой части.

Явный метод Эйлера

Значение интеграла в правой части основной формулы вычислим по формуле прямоугольников (рис. 2.15): $y_{n+1} - y_n \approx f(t_{n,} y_n) \cdot \tau$

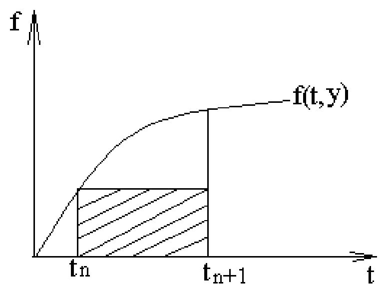


Рис. 2.15. Применение формулы прямоугольников в явном методе Эйлера.

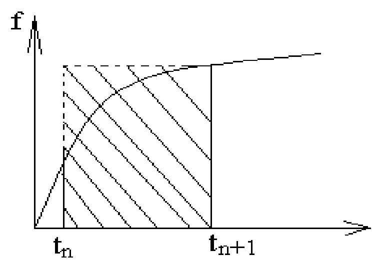


Рис. 2.16. Применение формулы прямоугольников в неявном методе Эйлера.

При реализации данного метода значение функции $f(t,y)$ берется в момент времени t_n. При этом значение y_n известно, таким образом, значение функции f может быть вычислено. Явный метод Эйлера - метод первого порядка точности, он имеет жесткие условия устойчивости. При решении многих практически значимых задач обеспечение устойчивости требует малых значений шага интегрирования τ . В силу этих свойств явный метод Эйлера применяется достаточно редко.

Неявный метод Эйлера

В этом случае интеграл в правой части основной формулы вычисляется по методу прямоугольников как показано на рис. 2.16: $y_{n+1} - y_n \approx f(t_{n+1}, y_{n+1}) \cdot \tau$.

Вычислительная формула неявного метода реализуется элементарно, если функция $f(t,y)$ линейная. В случае нелинейной функции f значение y_{n+1} вычисляется с применением интеграций по методу Ньютона. Неявный метод Эйлера абсолютно устойчив, однако имеет первый порядок точности. Тем не менее, данный метод достаточно широко применяется в силу своей безусловной устойчивости. Таким образом, при использовании данного метода выбор шага интегрирования τ производится только из соображений обеспечения необходимой точности вычислений.

Метод Эйлера-Коши

Теперь для вычисления значения интеграла в правой части основной формулы используется метод трапеций: $y_{n+1} - y_n \approx (f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \cdot \tau / 2.$

Данный метод имеет второй порядок точности и практически устойчив. Так как в правой части содержится неизвестная величина y_{n+1}, то метод реализуется в два этапа:

1. На первом этапе применяется явный метод Эйлера первого порядка точности и вычисляется вспомогательное значение $\tilde{y}_{n+1}$: $\tilde{y}_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \cdot \tau.$
2. На втором этапе решение уточняется по формуле трапеций: $y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) + f(t_n, y_n)).$

Практическое применение численных методов при решении задач моделирования рассмотрим на примере численной реализации модели прямолинейного движения тела под действием силы тяжести в среде с сопротивлением. Данная модель представляется системой дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = 1 - k\bar{V}, \qquad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{V},$$

с начальными условиями: $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0, \ \bar{V}(\bar{t} = 0) = 1.$

Эту задачу решим неявным методом Эйлера первого порядка. Применив соответствующую формулу, получим:

$$V_{n+1} = V_n + (1 - kV_{n+1}) \cdot \tau, \qquad V_{n+1} + kV_{n+1} \cdot \tau = V_n + \tau,$$

$$V_{n+1}(1 + k\tau) = V_n + \tau, \qquad V_{n+1} = \frac{V_n + \tau}{1 + k\tau}.$$

Напоминаем, что в момент времени t_n значения переменных: V_n, x_n, считаются известными, значения переменных V_{n+1} и x_{n+1} в момент времени t_{n+1} требуется определить. Для расчета значения координаты x_{n+1} используем метод трапеций, т.к. значения скорости уже известны и x_{n+1} рассчитывается независимо от V_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{2}(V_n + V_{n+1}).$$

На рис. 2.17 представлено решение задачи для различных значений параметра k.

	A	B	C	D	E	F	G
1	k1	k2	k3	tay			
2	2	4	8	0,1			
3	t	V1	V2	V3	X1	X2	X3
4	0,00	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000
5	0,10	0,917	0,786	0,611	0,096	0,089	0,081
6	0,20	0,847	0,633	0,395	0,184	0,160	0,131
7	0,30	0,789	0,523	0,275	0,266	0,218	0,164
8	0,40	0,741	0,445	0,208	0,342	0,266	0,189
9	0,50	0,701	0,389	0,171	0,414	0,308	0,208
10	0,60	0,667	0,350	0,151	0,483	0,345	0,224
11	0,70	0,640	0,321	0,139	0,548	0,379	0,238
12	0,80	0,616	0,301	0,133	0,611	0,410	0,252
13	0,90	0,597	0,286	0,129	0,672	0,439	0,265
14	1,00	0,581	0,276	0,127	0,731	0,467	0,278
15	1,10	0,567	0,269	0,126	0,788	0,494	0,290
16	1,20	0,556	0,263	0,126	0,844	0,521	0,303
17	1,30	0,547	0,259	0,125	0,899	0,547	0,316
18	1,40	0,539	0,257	0,125	0,954	0,573	0,328
19	1,50	0,532	0,255	0,125	1,007	0,599	0,341
20	1,60	0,527	0,253	0,125	1,060	0,624	0,353
21	1,70	0,523	0,252	0,125	1,113	0,649	0,366
22	1,80	0,519	0,252	0,125	1,165	0,674	0,378
23	1,90	0,516	0,251	0,125	1,216	0,700	0,391
24	2,00	0,513	0,251	0,125	1,268	0,725	0,403

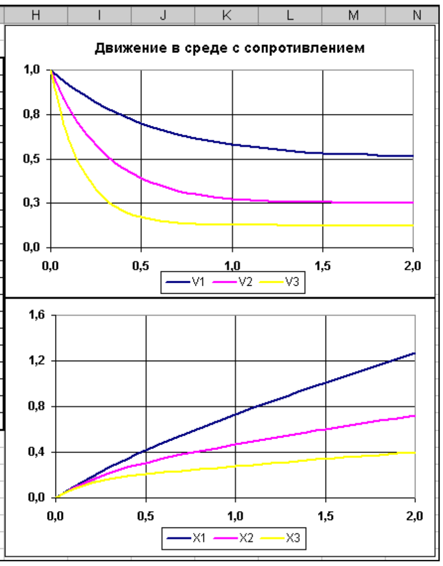


Рис. 2.17. Решение задачи моделирования в среде электронных таблиц.

В другой подобной задаче расчет траектории движения тела по баллистической траектории проводится аналогичным образом.

$$\frac{d\overline{V}_x}{d\overline{t}} = -\overline{k}\cdot\overline{V}_x; \quad \frac{d\overline{V}_y}{d\overline{t}} = -1-\overline{k}\overline{V}_y; \quad \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} = \overline{V}_x; \quad \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}} = \overline{V}_y;$$

$$\overline{V}_x(\overline{t}=0) = \cos(\alpha); \quad \overline{V}_y(\overline{t}=0) = \sin(\alpha); \quad \overline{x}(\overline{t}=0) = 0; \quad \overline{y}(\overline{t}=0) = 0.$$

Ниже представлен вывод расчетных соотношений, который в особых комментариях не нуждается.

$$V_x^{n+1} = V_x^n - kV_x^{n+1}\cdot\tau, \quad V_x^{n+1} = \frac{V_x^n}{(1+k\tau)}; \qquad V_y^{n+1} = V_y^n - (1+kV_y^{n+1})\cdot\tau, \quad V_y^{n+1} = \frac{V_y^n - \tau}{(1+k\tau)};$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{2}(V_x^n + V_x^{n+1}), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2}(V_y^n + V_y^{n+1}).$$

Движение тела по балистической траекторией с сопротивлением

t	Vx	Vy	X	Y
0,00	0,707	0,707	0,000	0,000
0,04	0,655	0,618	0,027	0,026
0,08	0,606	0,535	0,052	0,050
0,12	0,561	0,458	0,076	0,069
0,16	0,520	0,387	0,097	0,086
0,20	0,481	0,322	0,117	0,100
0,24	0,446	0,261	0,136	0,112
0,28	0,413	0,204	0,153	0,121
0,32	0,382	0,152	0,169	0,129
0,36	0,354	0,104	0,184	0,134
0,40	0,328	0,059	0,197	0,137
0,44	0,303	0,018	0,210	0,138
0,48	0,281	-0,021	0,222	0,138
0,52	0,260	-0,056	0,232	0,137
0,56	0,241	-0,089	0,243	0,134
0,60	0,223	-0,119	0,252	0,130
0,64	0,206	-0,148	0,260	0,124
0,68	0,191	-0,174	0,268	0,118
0,72	0,177	-0,198	0,276	0,111
0,76	0,164	-0,220	0,282	0,102
0,80	0,152	-0,241	0,289	0,093
0,84	0,140	-0,260	0,295	0,083
0,88	0,130	-0,278	0,300	0,072
0,92	0,120	-0,294	0,305	0,061
0,96	0,112	-0,310	0,310	0,049
1,00	0,103	-0,324	0,314	0,036

K	tay	alpha
2	0,04	45

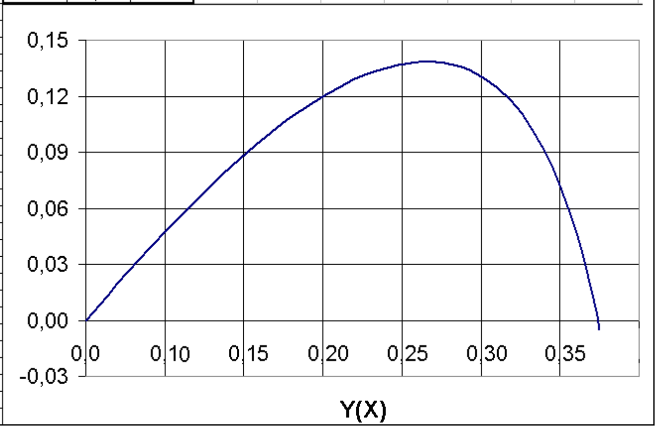


Рис. 2.18. Решение задачи моделирования движения по баллистической траектории.

Точность полученного решения можно проверить простым практическим путем двойного решения задачи – с шагом τ и с шагом τ/2, или сравнением численных решений разного порядка точности. Сравнение решений позволяет оценить правильность выбора шага интегрирования τ. Если решения заметно отличаются, то шаг необходимо уменьшить, если решения совпадают с достаточной точностью, то шаг интегрирования выбран верно.

τ	0,5			
t	**T_1**	**T**	**T_2**	**$T_{всп}$**
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	
0,5	0,6667	0,606531	0,6250	0,500
1,0	0,4444	0,367879	0,3906	0,313
1,5	0,2963	0,22313	0,2441	0,195
2,0	0,1975	0,135335	0,1526	0,122
2,5	0,1317	0,082085	0,0954	0,076
3,0	0,0878	0,049787	0,0596	0,048
3,5	0,0585	0,030197	0,0373	0,030
4,0	0,0390	0,018316	0,0233	0,019
4,5	0,0260	0,011109	0,0146	0,012
5,0	0,0173	0,006738	0,0091	0,007
5,5	0,0116	0,004087	0,0057	0,005
6,0	0,0077	0,002479	0,0036	0,003
6,5	0,0051	0,001503	0,0022	0,002

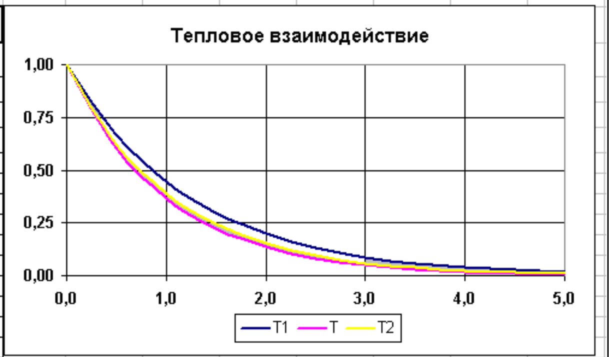


Рис. 2.19. Решение задачи теплового взаимодействия различными методами.

T – аналитическое решение; **T_1** – решение методом Эйлера; **T_2** – решение методом Эйлера-Коши.

На рис. 2.19 представлено решение задачи теплового взаимодействия нагретого тела различными численными методами. Задача моделирования представлена уравнением:

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} = -\bar{T}, \qquad \bar{T}(\bar{t}=0) = 1.$$

Она имеет точное аналитическое решение: $T(t) = -\exp(t)$. Решение методом Эйлера проводилось на основе соотношений:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = -T^{n+1}, \quad T^{n+1} = \frac{T^n}{1+\tau}.$$

Метод Эйлера-Коши для данной задачи реализуется в два этапа:

1. $\tilde{T}$ $-\tau \cdot T^n$;
2. $T^{n+1} = T^n - \frac{\tau}{2}(T^n + \tilde{T}$

Вспомогательное решение $\tilde{T}$ на рис. 2.19 обозначено как $T_{всп}$.

Известны и другие, более точные методы, например, метод Рунге-Кутты. Однако в большинстве случаев простые методы способны дать вполне приемлемое решение.

Дополнительные материалы к данному разделу можно найти в монографиях: [1], [3], [12], [87], [99], [101], [112].

2.5. Модели процессов с распределенными параметрами

В предыдущих разделах рассматривались математические модели систем, параметры которых являются сосредоточенными величинами, имеющими в каждый конкретный момент времени единственное значение. Многие процессы описываются моделями с **распределенными параметрами**. Такие параметры представляют собой некоторое множество (поле) значений и усреднить их (свести к единственному значению) зачастую не представляется возможным. Использование при моделировании более простых моделей с сосредоточенными параметрами является весьма грубым приближением. Примерами таких процессов является распространение волн, течение газов и жидкостей, передача тепла, диффузия и другие процессы, протекающие в **сплошных средах**.

Подобные модели строятся на основе дифференциальных уравнений в **частных производных.** В области исследования процессов в сплошных средах компьютерное численное моделирование позволило достичь существенного прогресса и перейти от решения простых классических задач математической физики к анализу сложнейших процессов различной физической природы, представляющих интерес для науки и техники. Родилось целое научное направление - **вычислительная физика**.

Далее мы рассмотрим подобные процессы, модели и методы их численного исследования. Анализ всех рассматриваемых моделей завершается описанием вычислительных алгоритмов, по которым можно провести вычислительный эксперимент.

1. Моделирование переноса.

Первая модель отражает процесс переноса тепла жидкостью (теплоносителем). Аналогичные модели строятся и для процессов переноса вещества движущейся средой.

Пусть имеется теплообменник, представляющий собой канал, обогрев которого производится путем пропускания электрического тока через его стенки или каким либо другим способом. Примем следующие предположения: в теплообменник поступает холодная жидкость с известной температурой T_0; скорость движения жидкости внутри канала считается неизменной; свойства теплоносителя (плотность, теплоемкость) слабо зависят от его температуры и могут считаться неизменными. Температура теплоносителя по сечению канала считается одинаковой.

В начальный момент времени $t = 0$ включается обогрев канала, т.е. $q=0$, при $t<0$ и $q>0$, при $t>0$. Здесь q – количество тепла, которое передается через стенки канала к теплоносителю в единицу времени через единицу площади поверхности канала.

Расчетная схема объекта моделирования представлена на рис. 2.20.

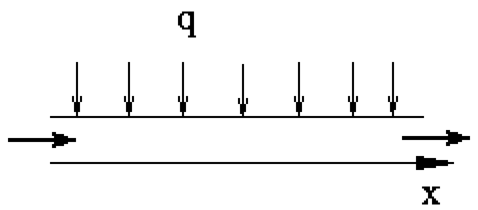


Рис. 2.20. Расчетная схема объекта исследования.

До начала обогрева теплообменник находится в **стационарном** тепловом режиме. После включения обогрева теплообменник через некоторое время выйдет на новый стационарный режим. Задачей моделирования является установить **закон** изменения температуры теплоносителя в канале теплообменника как функцию координаты и времени – *T(t,x)*.

С учетом принятых допущений, динамика изменения температуры теплоносителя в теплообменнике может быть описана следующим уравнением, которое является следствием закона **сохранения энергии**:

$$S(\rho c\frac{\partial T}{\partial t} + c\rho u\frac{\partial T}{\partial x}) = q\Pi$$

$$S = \pi R^2 \quad \Pi = 2\pi R.$$

Здесь S – площадь поперечного сечения канала теплообменника, Π – его периметр, ρ - плотность теплоносителя, c – его теплоемкость, u - скорость движения теплоносителя по каналу теплообменника. Таким образом, через выделенный элемент канала (рис. 2.21) идет поток теплоносителя, который нагревается за счет подвода тепла через стенки канала.

Физический смысл уравнения состоит в том, что его левая часть отражает изменение запаса тепловой энергии в элементе канала длиной Δx (рис. 2), а правая часть уравнения учитывает количество тепла, которое подведено к элементу канала через боковую поверхность за счет обогрева. Левая часть уравнения содержит частную производную температуры по времени, которая собственно и отражает изменение во времени температуры выделенного элемента канала, а также частную производную температуры по координате, которая отражает изменение запаса тепла в выделенном элементе вследствие движения теплоносителя через выделенный элемент.

Вид уравнения, соответствующий его физическому смыслу, представлен ниже.:

$$\Delta x \cdot S(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c u \frac{\partial T}{\partial x}) = q\Pi \cdot \Delta x.$$

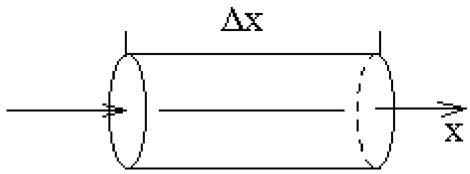


Рис. 2.21. Элемент канала.

Простейшее преобразование исходного уравнения дает следующее:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q\Pi}{S \cdot \rho c} = Q\,.$$

Пусть L – длина канала, выберем этот параметр в качестве масштаба для продольной координаты. В качестве масштаба времени выберем время прохождения теплоносителя по каналу L/u. Конечно, мы могли бы провести преобразование уравнения к безразмерному виду чисто формальным путем, однако осмысленный выбор масштабов в данном случае более прозрачен с физической точки зрения. С учетом этого безразмерные соотношения для продольной координаты и времени представим в следующем виде:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \qquad \bar{t} = t/(\frac{L}{u})\,.$$

Преобразования уравнения дают соотношения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{L}\frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = Q; \quad \frac{L}{u}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = Q\frac{L}{u}; \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = \frac{L}{u}Q\,.$$

Здесь $Q = q\Pi/(S\rho c)$. Теперь каждый член уравнения имеет размерность температуры. В качестве ее безразмерного аналога выберем переменную y, которую определим следующей зависимостью:

$$y = (T - T_0)/(\frac{L}{u}Q).$$

Представление для безразмерной температуры обусловлено упрощением уравнения и нормированием переменной y. Теперь диапазон изменения y находится в пределах от 0 до 1. После простейших преобразований безразмерное уравнение процесса переноса тепла примет вид:

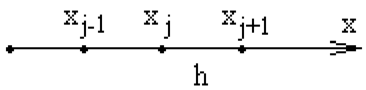
$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = 1.$$

Краевые и начальные условия, с учетом преобразований, задаются следующими соотношениями:

$$y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 0 \qquad y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 0.$$

Для численного решения данной начально-краевой задачи применим метод конечных разностей. Идея данного метода состоит в том, что дифференциальные операторы $\dfrac{\partial}{\partial t}$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial x}$ заменяются их приближенными конечно-разностными аналогами. Методом конечных разностей будет построено приближенное дискретное и по времени и по пространственной координате решение. В результате будут получены приближенные значения y в узловых точках x_j для дискретных моментов времени t_n:

$x_{j+1} = x_j + h$, $t_{n+1} = t_n + \tau$, h – шаг по координате, τ - шаг по времени.



Введем общепринятую индексную форму обозначения: $y_j^n = y(t_n, x_j)$, $y_j^{n+1} = y(t_{n+1}, x_j)$, $y_{j-1}^{n+1} = y(t_{n+1}, x_{j-1})$. Пусть в момент времени $t = t_n$ нам известны значения y_j^n в любой точке канала по оси x.

Используем следующие конечноразностные соотношения для дифференциальных операторов $\dfrac{\partial}{\partial t}$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial y^{n+1}}{\partial x} \approx \frac{y^{n+1}(x_j) - y^{n+1}(x_{j-1})}{h}; \quad \frac{dy_j}{dt} \approx \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} + \frac{y_j^{n+1} - y_{j-1}^{n+1}}{h} = 1.$$

Последнее соотношение есть конечно-разностный аналог исходного дифференциального уравнения в частных производных, который имеет первый порядок точности и по координате, и по времени. Первое слагаемое есть конечно-разностный аналог частной производной по времени, а второе слагаемое есть конечно-разностный аналог частной производной по координате.

Преобразуем конечно-разностный аналог уравнения следующим образом:

$$y_j^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}\right)=1+\frac{y_j^n}{\tau}+\frac{y_{j-1}^{n+1}}{h}, \qquad y_j^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}\right)}+y_j^n\frac{\frac{1}{\tau}}{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}\right)}+y_{j-1}^{n+1}\frac{\frac{1}{h}}{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}\right)}.$$

Последнее соотношение есть окончательная расчетная формула, последовательно применяя которую для $j=2-M$, (M – номер последней точки по координате x) по известным значениям y_j^n получим искомые величины y_j^{n+1}. Для $j=1$, т.е. при $x=0$, значение y_j^{n+1} всегда известно, так как задано краевыми условиями.

Рассмотренный метод решения уравнения в частных производных называется методом «бегущего счета». Метод безусловно устойчив, т.е. значения τ и h выбираются только исходя из требуемой точности решения. Решение задачи переноса в координатах $Y(x)$ для различных моментов времени представлено на рис. 2.22-2.23.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**h**	**Xi**	**Y0**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**Y5**	**Y6**	**Y7**	**Y8**	**Y9**	**Y10**
2	**0,02**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**tay**	0,02	0	0,014	0,018	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
4	**0,05**	0,04	0	0,024	0,034	0,038	0,039	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
5	**A**	0,06	0	0,032	0,048	0,055	0,058	0,059	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
6	**0,285714**	0,08	0	0,037	0,059	0,071	0,076	0,078	0,079	0,08	0,08	0,08	0,08
7	**B**	0,1	0	0,041	0,068	0,084	0,093	0,097	0,099	0,099	0,1	0,1	0,1
8	**0,714286**	0,12	0	0,043	0,075	0,096	0,108	0,114	0,117	0,119	0,12	0,12	0,12
9	**C**	0,14	0	0,045	0,081	0,106	0,122	0,131	0,135	0,138	0,139	0,14	0,14
10	**0,014286**	0,16	0	0,047	0,085	0,114	0,134	0,146	0,153	0,156	0,158	0,159	0,16
11		0,18	0	0,048	0,089	0,121	0,145	0,16	0,169	0,174	0,177	0,179	0,179
12		0,2	0	0,048	0,092	0,127	0,154	0,172	0,184	0,191	0,195	0,198	0,199
47		0,9	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,399	0,448	0,497
48		0,92	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,399	0,449	0,497
49		0,94	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,449	0,498
50		0,96	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,449	0,498
51		0,98	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,449	0,499
52		1	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,449	0,499
53													

Рис. 2.22. Электронная таблица для решения задачи переноса.

$$A=\frac{1/\tau}{(1/\tau+1/h)}; \quad B=\frac{1/h}{(1/\tau+1/h)}; \quad C=\frac{1}{(1/\tau+1/h)}.$$

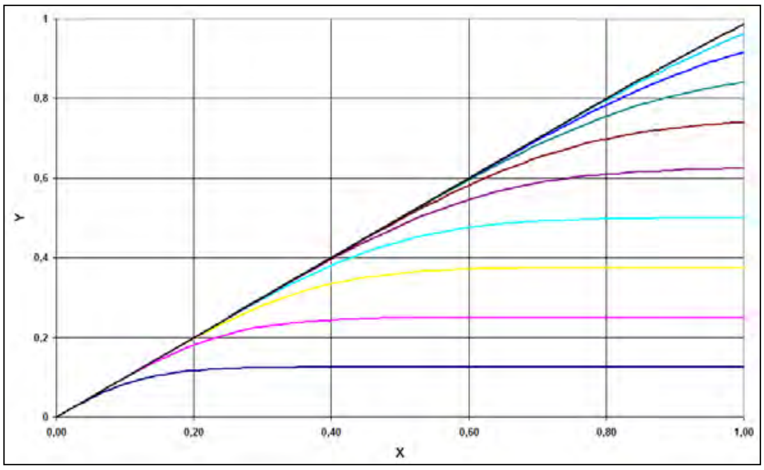


Рис. 2.23. Результат решения задачи переноса в среде электронных таблиц.

2. Моделирование волновых процессов.

Данная задача впервые стала актуальной при эксплуатации московского водопровода еще в XIX веке. Актуальность была вызвана тем, что по непонятным причинам водопровод стал часто выходить из строя: происходили разрывы магистральных линий. Проблема с успехом была разрешена российским ученым Н.Е.Жуковским, который впервые разработал модель этого явления. Обнаруженный им эффект получил название гидроудара.

На примере гидроудара рассмотрим волновой процесс распространения упругих возмущений в длинном трубопроводе. И так, имеется длинный трубопровод постоянного сечения, который подсоединен к достаточно большому резервуару с жидкостью. На другом конце трубопровода находится клапан. Под действием перепада давления по трубопроводу течет жидкость с известной скоростью V_0. В момент времени $t=0$ клапан моментально закрывается. С учетом того, что жидкость является упругой средой, в трубопроводе развивается ударно-волновой процесс. Результатом этого процесса является многократное повышение давления в трубопроводе, что на практике часто приводит к его разрыву. В тоже время будем считать, что в фазе падения давления кавитации (холодного вскипания) жидкости не происходит.

Предположим, что резервуар достаточно большой и в любой момент времени давление жидкости в нем остается постоянным. Схема объекта исследования представлена на рис. 2.24:

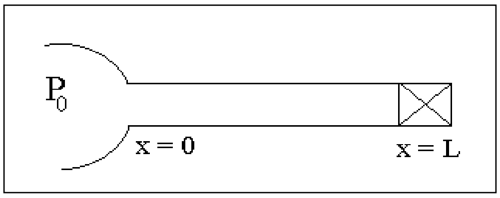


Рис. 2.24. Схема объекта исследования.

Примем следующие, вполне оправданные, допущения. Все физические характеристики жидкости в ходе процесса есть неизменные величины. Влиянием трения на распространение волн по каналу пренебрегаем. Сам трубопровод считаем идеально жесткой конструкцией. В момент времени $t=0$ закрытие клапана происходит мгновенно.

Краевые условия для данной задачи имеют вид:

$V(t, x=L)=0, \qquad P(t, x=0)=P_0.$

Эти условия мы уже обсуждали: скорость движения жидкости у закрытого клапана всегда равна нулю, давление на входе в трубопровод в любой момент времени есть постоянная величина.

Начальные условия соответствую тому, что в момент времени $t=0$ по всему каналу скорость движения жидкости и давление постоянны:

$$P(t=0, x)=P_0; \qquad V(t=0, x)= V_0.$$

Модель распространения упругих волн по каналу строится на основе уравнения количества движения (второй закон Ньютона):

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

и уравнения упругой деформации жидкости в трубопроводе:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

где ρ - плотность жидкости, c - скорость распространения звука в жидкости (скорость распространения упругих возмущений).

Возвращаясь к истории с московским водопроводом, Н.Е.Жуковский задачу сформулировал и успешно ее решил. Мало того, он предложил, как исключить развитие гидроудара в водопроводных магистралях. Оказывается, в качестве запорной арматуры использовались вентили как у самоваров (других просто не знали), имеющие малое время закрытия, что и порождало гидроудар. Николай Егорович Жуковский предложил использовать запорные вентили, которые значительно медленнее перекрывали трубопровод, и тем самым исключали развитие гидроудара. Тем не менее, это явление наблюдается в магистральных водоводах и в наше время. Порождает его массовое увеличение расхода воды в определенное время суток, затем такое же массовое прекращение потребления, например, целым микрорайоном. В этом случае происходит резкое торможение движения тысяч тонн воды в магистральном водоводе и соответствующее развитие волновых процессов. Естественно, этот процесс намного сложнее, чем тот, который мы рассматриваем в данном разделе.

Поставленная задача имеет пять параметров, поэтому предварительно преобразуем ее к безразмерному виду. Обратите внимание, в итоге мы получим модель волнового процесса, которая не будет содержать ни одного параметра!

В качестве естественного масштаба для продольной координаты выберем длину канала, а качестве масштаба скорости – скорость звука. В соответствие с этим выбором введем безразмерную координату и скорость:

$$\bar{x} = x / L, \quad \bar{V} = V / c.$$

С учетом этих соотношений исходные уравнения примут вид:

$$\rho\, c\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{L\partial \overline{x}}; \qquad \rho\, cL\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \overline{x}};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\rho c^2 \frac{c}{L})\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{x}} = 0\,; \quad \frac{1}{\rho c^2}\cdot(\frac{L}{c})\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{x}} = 0.$$

В качестве естественного масштаба времени выберем время распространения звуковой волны по каналу $\frac{L}{c}$. Тогда безразмерное время можно задать соотношением: $\bar{t} = t/(\frac{L}{c})$. С учетом этого уравнения процесса можно записать так:

$$\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial P}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{x}} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial P}{\partial \overline{x}} = 0.$$

Для решения задачи величина абсолютного давления в канале P_0 не имеет значения, поэтому будем решать задачу в отклонениях от стационарного значения давления P_0:

$$\Delta P = P - P_0;$$

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial (P - P_0)}{\partial \overline{x}} = 0; \qquad \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial (P - P_0)}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{x}} = 0.$$

$$\frac{\partial \Delta \overline{P}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{x}} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \Delta \overline{P}}{\partial \overline{x}} = 0\ ,$$

где $\Delta \overline{P} = \Delta P / \rho\, c^2$.

С учетом принятых масштабов переменных начальные условия задачи примут вид:

$$\Delta \overline{P}(\bar{t} = 0, \overline{x}) = 0; \quad \overline{V}(\bar{t} = 0, \overline{x}) = \frac{V_0}{c} = \overline{V_0}.$$

Они содержат параметр $\overline{V_0}$ - безразмерную начальную скорость движения жидкости. Этот параметр можно исключить, если провести следующие преобразования переменных:

$$\overline{\overline{V}} = \overline{V} / \overline{V_0}; \quad \Delta\overline{\overline{P}} = \Delta \overline{P} / \overline{V_0}.$$

В этом случае уравнения, краевые и начальные условия примут следующий окончательный вид:

$$\frac{\partial \overline{\overline{V}}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \Delta \overline{\overline{P}}}{\partial \overline{x}} = 0; \quad \frac{\partial \Delta \overline{\overline{P}}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{\overline{V}}}{\partial \overline{x}} = 0.$$

$$\Delta\overline{\overline{P}}(\overline{t}, \overline{x} = 0) = 0 \qquad \Delta\overline{\overline{P}}(\overline{t} = 0, \overline{x}) = 0$$

$$\overline{\overline{V}}(\overline{t}, \overline{x} = 1) = 0. \qquad \overline{\overline{V}}(\overline{t} = 0, \overline{x}) = 1.$$

Еще раз обращаем внимание, что мы получили **автомодельную задачу**, которая не содержит параметров. Таким образом, в рамках принятых допущений, все реальные процессы волнового движения жидкости с разнообразными параметрами подобны между собой.

Полученную выше математическую модель волнового процесса с целью проведения компьютерных экспериментов необходимо реализовать в виде, какой либо вычислительной схемы. Численное решение данной задачи выполним на основе конечно-разностного метода Лакса-Вендроффа. Этот метод - явная, конечно-разностная схема особого рода. Метод имеет второй порядок точности по пространственной координате и первый порядок точности по времени. Метод условно устойчив. Шаг по времени и шаг по координате выбирается из следующих соображений: приемлемая точность решения и устойчивость метода. Условие устойчивости: $\tau < \frac{1}{2} h.$

Метод реализуется в два этапа:

1. Предварительно производится вычисление вспомогательного решения. Этот этап называется предиктор (предсказание).

2. На втором этапе определяется окончательное уточненное решение для момента времени t_{n+1}. Этот этап называется корректор.

На предварительном этапе вычисляется решение (все переменные – безразмерные величины) в узлах с дробными индексами по следующей разностной схеме:

$$\frac{\tilde{V}}{\tau} + \frac{}{h} = 0, \qquad \frac{\tilde{}}{\tau} + \frac{}{h} = 0$$

$$V^n_{j+1/2} = 0.5(V^n_j + V^n_{j+1}) \quad \Delta P^n_{j+1/2} = 0.5(\Delta P^n_j + \Delta P^n_{j+1}).$$

$x_{j+1/2}=x_j+h/2, \quad x_{j-1/2}=x_j-h/2, \quad x_{j+1}=x_j+h$.

Окончательное решение для момента времени t_{n+1} вычисляется по схеме:

$$\frac{V^{n+1}_j - V^n_j}{\tau} + \frac{\Delta\tilde{} \qquad \tilde{}}{h} = 0; \qquad \frac{\tilde{}}{\tau} + \frac{\tilde{} \qquad \tilde{}}{h} = 0,$$

причем $j = 2 \div (M-1)$, где M- количество точек по оси x.

В концевых точках решения рассчитываются особым образом с учетом краевых условий. Для точки *x=0* *j=1* расчетную формулу построим на основе соотношений:

$$\Delta P_j^{n+1} = 0, \qquad \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \frac{\Delta \tilde{I} \qquad {}^{n+1}}{h/2} = 0.$$

Расчет в концевом сечении *j=M* $\bar{x} = 1$ выполним аналогичным образом:

$$V_j^{n+1} = 0, \qquad \frac{\Delta P_j^{n+1} - \Delta P_j^n}{\tau} + \frac{V_j^{n+1} - \tilde{I}}{h/2} = \upsilon.$$

Таким образом, последовательность решения задачи состоит в выполнении следующих действий:

1. Расчет $\tilde{I}$ $\tilde{}$ во всех точках с дробными индексами.
2. Расчет $\Delta P^{n+1}, V^{n+1}$ для всех внутренних точек со значениями индексов от *j=2* до *(n-1)*.
3. Расчет $\Delta P^{n+1}, V^{n+1}$ в концевых точках: *j=1, j=M*.

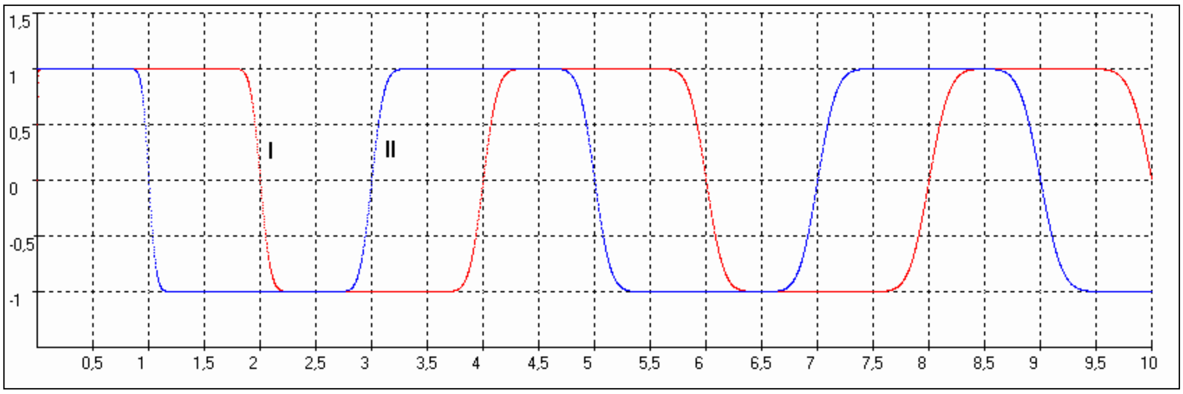


Рис. 2.25. Результаты моделирования гидроудара: I - $\Delta\overline{\overline{P}}(\bar{t}, \bar{x} = 1)$, II - $\overline{\overline{V}}(\bar{t}, \bar{x} = 0)$

3. Моделирование процессов теплопроводности и диффузии.

Процессы теплопроводности и диффузии сводятся к абсолютно идентичным математическим моделям. Построение модели процесса теплопроводности рассмотрим на основе следующей задачи.

Имеется длинный металлический стержень, который в начальный момент времени имеет одинаковую температуру по всей длине. В тот же самый начальный момент времени температура на правом торце стержня изменяется скачкообразно до значения T_1 и сохраняет это значение в течение всего времени. Левый торец стержня сохраняет постоянную температуру T_0 в любой момент времени. По боковой поверхности стержень имеет возможность взаимодействовать с окружающей средой (нагреваться или охлаждаться). Целью моделирования является исследование динамического

переходного процесса изменения температуры стержня после скачкообразного изменения температуры правого торца стержня.

Считаем, что длина стержня значительно больше его радиуса *L>>R*. Материал стержня имеет достаточно высокую теплопроводность, следовательно, изменением температуры в поперечном сечении пренебрегаем (она считается однородной в любом поперечном сечении). Ниже на рис. 2.26 представлена расчетная схема объекта исследования:

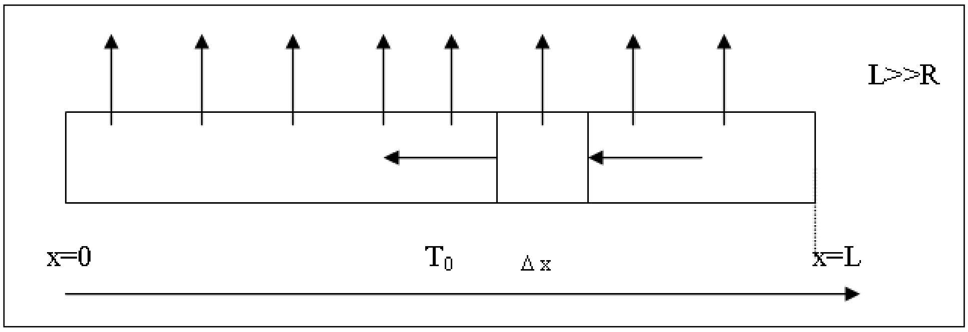


Рис. 2.26. Расчетная схема объекта исследования.

Процессы передачи тепла в стержне описывается следующим уравнением:

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Pi}{F}\alpha\left(T_0 - T\right),$$

здесь x – продольная координата, t – время, П – периметр поперечного сечения стержня, F - площадь поперечного сечения, α – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду через боковую поверхность стержня, λ - коэффициент теплопроводности материала стержня, ρ - его плотность, T_0 – температура окружающей среды, $T\,(t,x\,)$– температура стержня, функция времени и координаты.

В начальный момент времени $T(t=0,\ x)=T_0$, а краевые условия имеют вид:

$T(t,\ x=0)=T_1$, $T(t,\ x=L)=T_0$.

Уравнение теплопроводности построено на основе закона сохранения энергии и закона Фурье, который связывает величину осевого потока тепла по стержню за счет теплопроводности с градиентом температуры:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Тепловой поток в окружающую среду через боковую поверхность стержня определяется законом Ньютона:

$$q = \alpha(T_0 - T).$$

Данные законы имеют чисто феноменологический характер. Тепловой поток – это количество тепла, проходящее за единицу времени через сечение площадью в 1м^2.

Физический смысл членов уравнения теплопроводности состоит в следующем:

1.Скорость изменения запаса тепла в выделенном элементарном объёме.

2.Изменение запаса тепла в элементарном объёме, которое вызвано теплопроводностью.

3.Изменение запаса тепла в элементарном объёме вследствие теплоотдачи в окружающую среду

$$\Delta x \cdot F \cdot \rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta x \cdot F \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \alpha(T_0 - T)\Pi \cdot \Delta x,$$

Таким образом, в выделенном элементе протекают следующие процессы: накопление тепла, продольная передача тепла по стержню вследствие теплопроводности и теплоотдача через боковую поверхность в окружающую среду.

Уточним цели моделирования. Представляет интерес, какой новый стационарный температурный режим установится по окончанию переходного процесса, а также закономерность и время протекания переходного процесса. В соответствие с этим различают задачи стационарной и нестационарной теплопроводности.

Предварительно преобразуем задачу к безразмерному виду. Простейшее преобразование исходного уравнения теплопроводности дает следующее:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k(T_0 - T), \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}, \quad k = \frac{\Pi \alpha}{F \cdot \rho \cdot c}.$$

В качестве масштаба по продольной координате выберем длину стержня *L*. Тогда безразмерная координата определяется соотношением: $\bar{x} = x / L$.

После преобразования уравнение примет вид:

$$\frac{L^2}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{kL^2}{a}(T_0 - T).$$

В качестве масштаба по времени примем $t^* = L^2 / a$. Безразмерное время определим следующим образом: $\bar{t} = t / t^*$. Безразмерную температуру зададим соотношением: $y = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$. С учетом данных соотношений уравнение теплопроводности, начальные и краевые условия преобразуется к следующему:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} - \bar{k} \cdot y, \quad y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 0, \quad y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 0, \quad y(\bar{t}, \bar{x} = 1) = 1.$$

Безразмерный параметр $\bar{k}$ является критерием подобия и характеризует соотношение интенсивности процессов теплообмена с окружающей средой и теплопроводности по стержню.

Для решения данной начально-краевой задачи применим метод конечных разностей. Значение производной по времени приближенно зададим соотношением:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} \approx \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x = x_j}.$$

Значение второй производной по координате выразим через известную формулу:

$$\frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Тогда конечно-разностный аналог уравнения теплопроводности примет вид:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} - ky_j^{n+1},$$

$$\left(\frac{1}{h^2} y_{j-1}^{n+1} - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k\right) y_j^{n+1} + \frac{1}{h^2} y_{j+1}^{n+1}\right) = -\frac{y_j^n}{\tau}.$$

Последнее соотношение справедливо для $j = 2 \div (M-1)$, (для внутренних узловых точек по *x)*. Для краевых точек значения y_j^{n+1} заданны краевыми условиями: *j*=1, $y_j^{n+1} = 0$, а для *j=M,* $y_j^{n+1} = 1$.

Таким образом, применение метода конечных разностей позволяет преобразовать дифференциальное уравнение в систему линейных алгебраических уравнений относительно y_j^{n+1}, которая даст искомое решение. Подобная специфическая система линейных уравнений с трехдиагональной ленточной матрицей решается с помощью специальной разновидности метода исключения Гаусса, который называется методом прогонки. Полученная выше разностная схема безусловно устойчива и имеет первый порядок точности по времени и второй по координате.

В общем случае полученная система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в следующем каноническом виде:

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = -F_j \\ y_1 = \chi_1 y_2 + \upsilon_1 \\ y_M = \chi_2 y_{M-1} + \upsilon_2 \end{cases}$$

В рассматриваемом случае коэффициенты *A, B, C* и *F* имеют конкретные значения:

$$A_j = \frac{1}{h^2},\ B_j = \frac{1}{h^2},\ C_j = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k,\ F_j = \frac{y_j^n}{\tau};$$

$$\chi_1 = 0,\ \upsilon_1 = 1,\ \chi_2 = 0,\ \upsilon_2 = 0.$$

Главная идея метода прогонки состоит в том, что решение системы уравнений ищется в виде рекуррентного соотношения: $y_j = \alpha_j y_{j+1} + \beta_j$. Коэффициенты α_j и β_j называются прогоночными. Положим *j=1*, тогда $y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1$, в тоже время $y_1 = \chi_1 y_2 + \upsilon_1$, из чего следует, что $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \upsilon_1$. Расчет остальных прогоночных коэффициентов выполняется по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_j = \frac{B_j}{C_j - A_j \alpha_{j-1}};\quad \beta_j = \frac{F_j + A_j \beta_{j-1}}{C_j - A_j \alpha_{j-1}}.$$

После определения прогоночных коэффициентов, решение определяется по соотношению:

$$y_j = \alpha_j y_{j+1} + \beta_j \ , \quad \text{где} \ \ j = (M-1) \div 2 .$$

Таким образом, алгоритм решения задачи содержит следующие этапы:

1. Определить значения коэффициентов A_j, B_j, C_j, F_j.
2. Исходя из краевых условий, определить значения χ_1, υ_1, χ_2, υ_2.
3. Задать значения прогоночных коэффициентов α_1 и β_1.
4. Рассчитать α_j и β_j, причем j изменяется от *j=2* до *j*= (M-1).
5. Рассчитать y_j^{n+1}, в этом случае *j* изменяется от *j=(M-1)* до *j= 2.*

Результат численного решения задачи теплопроводности в координатах $Y(x)$ для различных моментов времени и значения параметра $\bar{k} = 4$ представлен на рис. 2.27-2.28.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**tay**	**Xi**	**Y0**	**alfa**	**beta**	**Y1**	**alfa**	**beta**	**Y2**
2	**0,01**	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	**h**	0,0200	0,0000	0,4898	0,0000	0,0000	0,4898	0,0000	0,0001
4	**0,02**	0,0400	0,0000	0,6444	0,0000	0,0000	0,6444	0,0000	0,0002
5	**k**	0,0600	0,0000	0,7157	0,0000	0,0000	0,7157	0,0000	0,0003
6	**4,00**	0,0800	0,0000	0,7542	0,0000	0,0001	0,7542	0,0000	0,0004
7	**A**	0,1000	0,0000	0,7768	0,0000	0,0001	0,7768	0,0000	0,0005
8	**2500,00**	0,1200	0,0000	0,7906	0,0000	0,0001	0,7906	0,0000	0,0006
9	**B**	0,1400	0,0000	0,7994	0,0000	0,0001	0,7994	0,0000	0,0008
10	**2500,00**	0,1600	0,0000	0,8050	0,0000	0,0002	0,8050	0,0000	0,0009
11	**C**	0,1800	0,0000	0,8087	0,0000	0,0002	0,8087	0,0000	0,0011
12	**5104,00**	0,2000	0,0000	0,8111	0,0000	0,0003	0,8111	0,0000	0,0014
42		0,8000	0,0000	0,8158	0,0000	0,1305	0,8158	0,0127	0,2579
43		0,8200	0,0000	0,8158	0,0000	0,1600	0,8158	0,0156	0,3005
44		0,8400	0,0000	0,8158	0,0000	0,1962	0,8158	0,0191	0,3492
45		0,8600	0,0000	0,8158	0,0000	0,2404	0,8158	0,0235	0,4046
46		0,8800	0,0000	0,8158	0,0000	0,2947	0,8158	0,0288	0,4673
47		0,9000	0,0000	0,8158	0,0000	0,3613	0,8158	0,0352	0,5375
48		0,9200	0,0000	0,8158	0,0000	0,4429	0,8158	0,0432	0,6157
49		0,9400	0,0000	0,8158	0,0000	0,5429	0,8158	0,0530	0,7018
50		0,9600	0,0000	0,8158	0,0000	0,6655	0,8158	0,0649	0,7953
51		0,9800	0,0000	0,8158	0,0000	0,8158	0,8158	0,0796	0,8954
52		1,0000	1,0000			1,0000			1,0000

Рис. 2.27. Электронная таблица решения задачи теплопроводности.

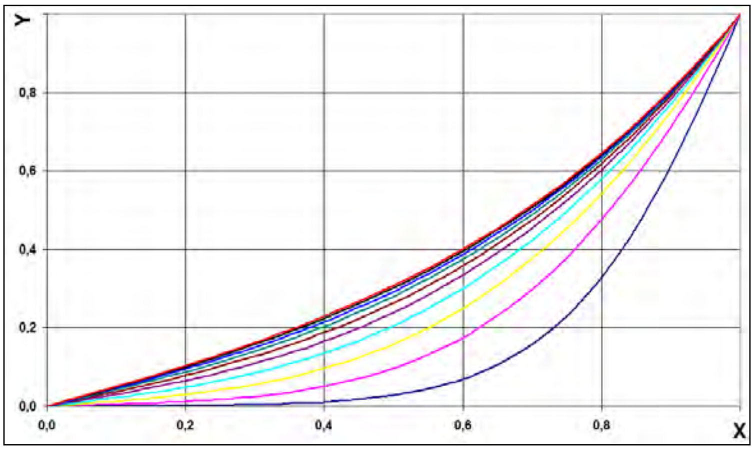


Рис. 2.28. Результат решения задачи теплопроводности в координатах $y-\bar{x}$ для различных моментов времени.

Выше мы рассмотрели решение задачи теплопроводности для случая, когда краевые условия заданы в виде значений искомой функции. Такие краевые условия называются краевыми условиями первого рода. Однако рассмотренные методы позволяют решать задачу и для более сложных краевых условий, с которыми мы познакомимся далее.

4. Моделирование переноса и теплопроводности.

Выше мы рассмотрели модели автономных по физической сути процессов: либо перенос движущейся средой, либо теплопроводность в неподвижной среде. Однако данные процессы могут протекать в рамках одного и того же объекта одновременно. Например, если мы рассматриваем перенос тепла потоком воды, то процессы теплопроводности хоть и имеют место, но их влияние ничтожно. Представим, что в канале теплообменника теплоносителем является жидкий металл, он используется при охлаждении тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. В этом случае эффекты переноса тепла движущейся средой и вследствие теплопроводности имеют сопоставимый порядок величин.

Аналогичная задача возникает в экологии при моделировании процессов распространения загрязнений в окружающей среде (атмосфера или мировой океан). Конечно, в этом случае модели намного сложнее, чем те, которые мы рассмотрели, хотя бы в силу того, что они описывают развитие процессов в трех пространственных измерениях.

Рассмотрим задачу моделирования диффузии и переноса тепла более подробно. Пусть в теплообменнике рабочей средой является жидкий металл. Модель подобной системы достаточно проста и может быть реализована нами численно и проанализирована в ходе компьютерного эксперимента. Для нее справедливы все допущения, которые мы приняли при построении моделей переноса и диффузии, рассмотренных выше. Модель совместного протекания процессов строится на основе закона сохранения энергии путем объединения уравнений, отражающих каждый процесс в отдельности:

$$\rho \cdot c\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Pi}{F}\alpha\left(T_0 - T\right).$$

Приведение уравнения к безразмерному виду с помощью преобразований, которые мы уже проделывали выше, дает следующее:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = a\frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} - ky\,.$$

Безразмерные величины в последнем уравнении суть следующее:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \qquad \bar{t} = t/(\frac{L}{u})\,; \quad y = (T - T_0)/(T_1 - T_0)\,; \quad a = \frac{\lambda}{\rho c \cdot L \cdot u}\,; \; k = \frac{\Pi \alpha L}{F \cdot \rho c u}\,.$$

Параметр a есть соотношение интенсивности процессов теплопроводности и переноса тепла движущейся средой, в свою очередь, параметр k отражает соотношение интенсивности теплоотдачи в окружающую среду через стенки канала и преносом тепла по каналу. Положив значение любого параметра равным нулю, получим модель одного из двух процессов в чистом виде.

В качестве начального и одного из краевых условий выберем следующее:

$$y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 0 \qquad y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 1.$$

Это соответствует тому, что в начальный момент времени теплоноситель имеет температуру, равную температуре стенок. В момент времени t=0 в канал начинает поступать холодная жидкость, что является причиной возникновения динамического переходного процесса из начального стационорного режима в новое стационорное состояние. По окончании переходного процесса в системе установится новое равновесие. Целью моделирования является анализ развития данного переходного процесса.

Представленная выше начально-краевая задача имеет второй порядок по пространственной координате. На входе в канал ($\bar{x}=0$) краевое условие задано и имеет простой физический смысл: жидкость, поступающая в канал, имеет постоянную температуру. Второе краевое является в некотором смысле искусственным. Полагаем, что при $\bar{x}=1$, т.е. на выходе из канала и далее в ближайшей окрестности, можно считать изменение температуры линейным. Аналогичный результат имеем, если влиянием теплопроводности в этом сечении можно пренебречь. Тогда краевое условие будет следующим:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}+\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}=-ky.$$

Переход от дифференциальной формы к конечно-разностному аналогу краевой задачи дает следующие линейные алгебраические уравнения:

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau}+\frac{y_j^{n+1}-y_{j-1}^{n+1}}{h}=a\frac{y_{j+1}^{n+1}-2y_j^{n+1}+y_{j-1}^{n+1}}{h^2}-ky_j^{n+1},$$

$$\left(\left(\frac{a}{h^2}+\frac{1}{h}\right)y_{j-1}^{n+1}-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}+\frac{2a}{h^2}+k\right)y_j^{n+1}+\frac{a}{h^2}y_{j+1}^{n+1}\right)=-\frac{y_j^n}{\tau}.$$

С краевыми условиями:

$$j=1,\quad y_j^{n+1}=0; \qquad\qquad j=M,\ \frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau}+\frac{y_j^{n+1}-y_{j-1}^{n+1}}{h}=-ky_j^{n+1}.$$

Последнее краевое условие в стандартной форме примет вид:

$$y_M=\chi_2 y_{M-1}+\upsilon_2; \qquad\qquad j=M,\quad y_j^{n+1}=\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}+k}y_{j-1}^{n+1}+\frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h}+k}y_j^n.$$

Путем сравнения последних соотношений получим значения коэффициентов χ_2 и υ_2. Используя основное соотношение прогонки $y_j=\alpha_j y_{j+1}+\beta_j$, получим выражение для y_M: $y_M^{n+1}=\dfrac{\nu_2+\chi_2\beta_{m-1}}{1-\chi_2\alpha_{M-1}}$,

которое используется для расчета остальных значений y_j^{n+1}.

5. Моделирование гидродинамических процессов.

Пусть имеется проточный канал, образованный двумя плоскими пластинами. По каналу за счет разности давления на его входе и выходе течет вязкая несжимаемая жидкость с постоянными свойствами. Длина канала значительно больше его поперечного размера: $L >> R$. Перепад давления между входом и выходом канала $\Delta p = p_1 - p_0 = const$. Движение жидкости установившееся. Ширина канала равна $2 \cdot R$. Расчетная схема объекта исследования представлена на рис. 2.29.

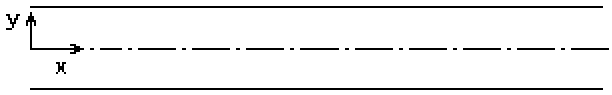


Рис. 2.29. Расчетная схема объекта исследования.

Уравнение движения жидкости, которое получено на основе второго закона Ньютона, имеет вид:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}).$$

Здесь ρ - плотность жидкости, μ - вязкость, u – скорость течения жидкости, p – давление, t- время, x, y – продольная и поперечная координаты соответственно.

Первый член этого уравнения представляет собой силу инерции, действующую на частицу жидкости, второй член отражает силовое воздействие движущего перепада давления, правая часть уравнения соответствует силе вязкого трения.

Соответственно гипотезе прилипания будем считать, что частицы жидкости на стенке канала имеют нулевую скорость. С учетом симметрии краевые условия зададим соотношениями:

$$u(t, x, y = R) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0.$$

Так как мы рассматриваем установившееся ламинарное движение жидкости с постоянными свойствами, то исходное уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решение полученной краевой задачи позволяет установить профиль скорости движения жидкости в канале.

Преобразуем уравнение к безразмерному виду в соответствии с соотношениями:

$$\bar{u} = u / u^*, \qquad \bar{y} = y / R.$$

Таким образом, в качестве естественного масштаба по поперечной координате выбран характерный поперечный размер. Масштаб скорости пока остается неопределенным. Так как движение установившееся, то градиент давления по всей длине канала можно считать неизменным и равным:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1 - p_0}{L} = -\frac{\Delta p}{L}.$$

Подстановка соотношений для $\bar{u}$, $\bar{y}$ и $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ в уравнение движения жидкости дает следующий результат:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{\Delta p}{L}\frac{R^2}{\mu \cdot u^*}.$$

Выберем масштаб скорости u^* таким, чтобы выражение в правой части последнего уравнения имело значение равное -1. Тогда получим краевую задачу в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -1, \qquad \bar{u}(\bar{y}=1)=0, \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\Big|_{\bar{y}=0} = 0.$$

Численное решение этой задачи проводится методом конечных разностей аналогично задаче теплопроводности. Результат решения представлен на рис. 2.30.

Рис.2.30. Результат расчета профиля скорости ламинарного течения жидкости.

С ростом скорости течение жидкости переходит из ламинарного в турбулентное, которое характеризуется мощным вихреобразованием в потоке. Эффект вихревого перемешивания в некоторой степени эквивалентен действию вязкости. В этом случае уравнение движения принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial y}((1+\nu_T./\nu)\frac{\partial u}{\partial y}).$$

Здесь ν_T - коэффициент турбулентной кинематической вязкости, которая обусловлена вихревым течением в канале: $\mu = \rho \cdot \nu$. Аналогичные преобразования к безразмерному виду дадут следующее:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}}((1+\nu_T./\nu)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}) = -1.$$

Экспериментальные исследования турбулентных течений позволили выявить ряд закономерностей. Добавочная турбулентная вязкость может быть определена по соотношению (гипотеза Прандтля):

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \frac{l^2}{\nu}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|,$$

где l – характерный размер турбулентного вихря.

Преобразование соотношения для турбулентной вязкости к безразмерному виду дает следующее соотношение:

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \bar{l}^{\,2} (\frac{Ru^*}{\nu}) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|.$$

Выражение в скобках в правой части определяет интенсивность турбулентных вихрей и называется числом Рейнольдса. Закон изменения размеров вихрей по сечению канала был определен экспериментально в виде следующей зависимости:

$$\bar{l} = 0{,}14 - 0{,}08 \cdot \bar{y}^2 - 0{,}06 \cdot \bar{y}^4.$$

Данная краевая задача является нелинейной, коэффициент дифференциального уравнения зависит от искомой функции. Решение подобных нелинейных краевых задач может быть выполнено методом итераций. Пусть решение, полученное на *n–й* итерации известно. Тогда по значениям u^n можем рассчитать величину $(\nu_T./\nu)^n$, используя представленные выше зависимости. После чего получаем возможность найти следующее приближение u^{n+1} . В случае применения итераций для обеспечения их сходимости необходимо несколько модифицировать нелинейное уравнение так, как это представлено ниже:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[(1 + \nu_T./\nu)^n \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} \right] + 1 = \frac{\bar{u}^{\,n+1} - \bar{u}^{\,n}}{\tau}.$$

Здесь индексы обозначают номер итерации. Правая часть уравнения вносит «инерцию» в итерационный вычислительный процесс. Значение параметра τ - выбирается таким, чтобы обеспечить сходимость итерационного процесса. В случае достижения сходимости решения на двух последовательных итерациях совпадут с требуемой точностью, и правая часть последнего уравнения становится практически нулевой величиной.

В качестве начального приближения можно взять решение задачи для ламинарного режима течения. Практически итерации выполняются до тех пор, пака не будет справедливым условие $\left| \bar{u}^{\,n+1} - \bar{u}^{\,n} \right| < \varepsilon$, где ε - малое положительное число.

Рассмотренные примеры дают достаточно полное представление об особенностях моделирования процессов с распределенными параметрами. На основе представленных методов можно решать и более сложные задачи.

Дополнительные материалы к данному разделу можно найти в изданиях: [12], [78], [90], [99].

2.6. Компьютерный вычислительный эксперимент

Компьютерный вычислительный эксперимент проводится с компьютерной математической моделью с целью получения информации о ее свойствах. В принципе компьютерный эксперимент и эксперимент с натурным объектом имеют много общего в плане методологии проведения. Однако компьютерный вычислительный эксперимент, несомненно, имеет ряд особенностей, которые состоят в следующем:

1. Простота проведения и повторения эксперимента с компьютерной моделью.
2. Возможность полного воспроизведения условий эксперимента.
3. Возможность управления экспериментом, включая его прерывание и возобновление.

4. Варьирование условий проведения эксперимента в широких пределах, включая изменение воздействия окружающей среды.
5. Возможность наглядного представления результатов экспериментирования.

Во многих случаях компьютерное математическое моделирование применяется для изучения уже произошедших событий. Однако, существует значительное количество областей практической деятельности, в которых невозможно полагаться на непосредственное наблюдение и экспериментирование с реальными системами, поскольку последствия таких действий могут оказаться необратимыми. В технике актуальной проблемой является изучение свойств еще несуществующих объектов в процессе проектирования. Вычислительный эксперимент позволяет исследовать события или явления, которые могут носить исключительно гипотетический характер (например, «ядерная зима»). Изучать такие объекты и процессы, при этом получая информацию о параметрах процессов, можно только с помощью компьютерного эксперимента с математическими моделями. Кроме того, компьютерный эксперимент позволяет выяснить механизмы развития процессов путем численного анализа влияния различных факторов на свойства системы. Это практически невозможно в натурном эксперименте.

Таким образом, в современной науке и технике появляется все больше областей, задачи в которых необходимо решать исключительно на основе компьютерного вычислительного эксперимента:

Энергетика. Прогнозирование и диагностика работы атомных реакторов, энергетических установок и энергетических систем на основе детального математического моделирования происходящих в них процессов. Имитация аварийных ситуаций в энергосистемах, выбор оптимальных режимов их работы.

Аэрокосмическая техника. Расчет траекторий летательных аппаратов, решение задач аэродинамики, автоматизированное проектирование. Компьютерная обработка данных наблюдений, полученных со спутников.

Технологические процессы. Моделирование технологических процессов, которые опираются на тонкие физико-химические эффекты.

Физика. Это классическая область применения математического моделирования. В 1982г. Нобелевская премия по физике была присуждена К.Вильсону, предложившему ряд фундаментальных моделей в теории элементарных частиц, которые исследовались численно.

В целом технологический цикл вычислительного эксперимента содержит следующие этапы:

1. Для исследуемого объекта или процесса строится математическая модель, формулируются допущения и границы применимости модели.

2. Математическая модель на основе численных методов преобразуется в такую форму, которая позволит получить информацию о свойствах объекта в ходе вычислительного эксперимента. В итоге разрабатывается вычислительный алгоритм.

3. Для реализации вычислительного алгоритма создается компьютерная программа. Компьютерная программа позволяет проводить компьютерный вычислительный эксперимент с целью получения необходимой информации о свойствах объекта моделирования.

На определенном этапе проведения вычислительных экспериментов наступает фаза прогноза - средствами математического моделирования предсказывается поведение объекта в условиях, где опыты не проводились или они вообще невозможны. Для этого уровня справедлива точка зрения Р. Хемминга: «Цель расчетов - понимание, а не числа».

В итоге схема компьютерного эксперимента может быть представлена в виде следующей цепочки: Объект - Математическая модель - Вычислительный алгоритм - Программа – Компьютерный эксперимент. Таким образом, основой компьютерного вычислительного эксперимента является математическая модель, теоретической базой - прикладная математика, а технической - электронная вычислительная техника (компьютер).

Применение инструментальных систем моделирования по содержанию не меняет указанных действий. Инструментальные системы лишь упрощают процесс создания и численной реализации математической модели. План вычислительного эксперимента и анализ его результатов всегда остается прерогативой исследователя.

Дополнительные сведения по данной тематике можно найти в публикациях: [11], [15], [68].

2.7. Контрольные вопросы к главе 2

1. Что такое математическая модель.
2. Каковы особенности математических моделей по сравнению с другими видами моделей.
3. Каковы особенности построения математических моделей.
4. Что такое параметр.
5. Какова роль измерений в математическом моделировании.
6. Какие характеристики численных методов актуальны для моделирования.
7. Какие существуют способы построения математических моделей.
8. В чём преимущество безразмерных обобщенных моделей.
9. В чём суть понятий «подобие» и «аналогия».
10. На какие классы можно разделить методы исследования математических моделей.
11. Какие этапы включает в себя технологический цикл вычислительного эксперимента.
12. Приведите примеры задач, которые решаются исключительно на основе вычислительного эксперимента.
13. Чем принципиально отличаются модели с сосредоточенными параметрами от математических моделей с распределенными параметрами.

Глава III. Разнообразие моделей

3.1. Оптимизационные модели

На протяжении всей истории практической деятельности по созданию новых объектов человек вынужден искать ответы на вопросы: «Как создать изделие с наилучшими свойствами на основе имеющихся ограниченных ресурсов» и т.п. При проектировании любого нового объекта всегда существует множество вариантов (альтернатив) выбора возможных конструктивных решений, вариантов компоновки, состава и способа соединения элементов системы и т.п. Выбрать наилучший вариант возможно формальным или творческим путем. Творческий путь основан на интуиции и опыте специалиста. Формальное решение проводится на основе на моделировании и методов **оптимизации**.

Рассмотрим один из методов решения задачи выбора наилучшего (оптимального) решения, который проводится с помощью определенного **критерия** - меры качества объекта. Суть критериального подхода состоит в следующем: формулируется критерий качества объекта (целевая функция). Критерий качества, по сути, является математической моделью этого объекта, т.к. отражает количественную характеристику определенного свойства объекта. Для каждой задачи целевая функция формулируется исходя из сути самой задачи. Например, в качестве целевой функции может быть выбрана прибыль от реализации плана, затраты на реализацию проекта, производительность технической системы и т.п. Так как значение критерия качества (целевой функции) дает количественную (численную) оценку каждого варианта решения, то это позволяет сравнивать различные варианты и выбрать наилучший.

Таким образом, при решении задач оптимального выбора в рамках критериального подхода используются математические модели особого рода – **оптимизационные модели**, которые включают следующие компоненты:

1. Перечень независимых параметров объекта, которые определяют его свойства. Значения этих параметров можно варьировать при поиске оптимального решения.
2. Критерий качества объекта (целевая функция). Могут быть заданы следующие варианты поиска значения целевой функции: максимизация; минимизация; заданное значение.

   $$F(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow Max, (Min).$$

   Здесь $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые параметры системы, которые можно варьировать при поиске решения.
3. Ограничения, которые отражают взаимозависимости между параметрами объекта:

   $$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq (= \leq) b_i.$$
4. Граничные условия, определяющие допустимые пределы изменения параметров:

   $$e_j \leq x_j \leq d_j.$$

Решение, удовлетворяющее ограничениям и граничным условиям, называется допустимым. В данном случае решение – это набор значений параметров $x_1, x_2, ..., x_n$.

Среди допустимых решений необходимо найти такое, которое дает требуемое значение целевой функции (*max, min*). Это и есть оптимальное решение задачи. Получение оптимального решения позволяет обойтись без экспериментов с самим объектом. В ряде случаев целевая функция и ограничения задаются линейными соотношениями. Такие задачи называются задачами линейной оптимизации.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального проектирования. При проектировании любого объекта ряд параметров может быть задан, другие параметры необходимо определить расчетным путем исходя из некоторых условий, которые оговорены в техническом задании на проектирование. Такие методы расчета параметров объекта называются проектными.

Суть задачи состоит в следующем: требуется спроектировать бак для жидкости, имеющий форму параллепипеда. Бак имеет днище и четыре боковые стенки. Требуется определить размеры бака: длину, ширину и высоту. Эта задача может быть сформулирована следующим образом: Определить размеры бака заданного объема, изготовление которого потребует минимум материала.

Для расчета параметров бака используем следующие формулы:

$$V = abh, \qquad S = ab + 2(a+b)h.$$

Здесь a и b стороны основания (размеры днища), h - высота бака, V – объем бака, S - площадь необходимого листового материала (площадь боковой поверхности бака + площадь днища). Таким образом, в этой задаче формула расчета площади и есть целевая функция, значение которой необходимо сделать минимальным. Ограничения в задаче суть следующие: параметры бака имеют положительные значения, объем бака должен быть равен заданной величине.

Данная задача может быть решена с помощью надстройки электронных таблиц «**Поиск решения**» (рис. 3.1).

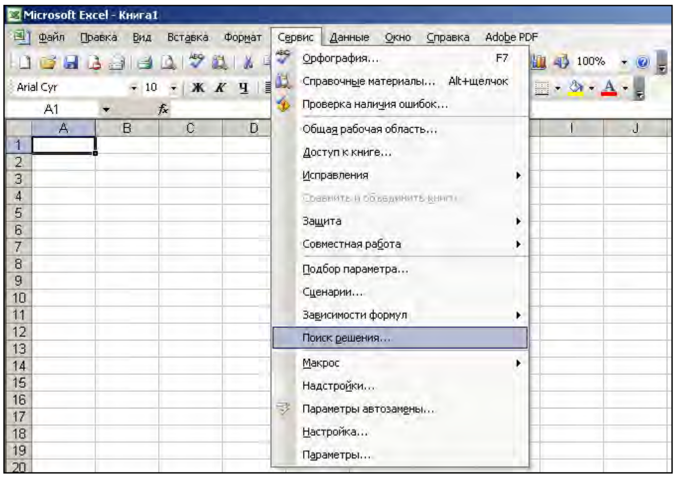


Рис. 3.1. Запуск надстройки электронных таблиц Excel «Поиск решения».

Для решения задачи оптимального проектирования бака предварительно необходимо в среде Excel создать таблицу по рис. 3.2.

	A	B	C	D	E
1	Переменные				
2		a	b	h	
3	Значения	2,00	1,50	1,00	
4	Нижняя граница	0	0	0	
5		Зависимости			
6		обозначение	формула	знак	Ограничение
7	Объем бака	V	3,00	=	3
8	Площадь стального листа	S	10,00	→	Minimum

Рис. 3.2. Таблица для решения задачи проектирования.

Поиск оптимального решения по нелинейной модели (задача нелинейной оптимизации) производится методом итераций, поэтому в ячейки B3-D3 (изменяемые ячейки) предварительно необходимо ввести начальные значений переменных более или менее правдоподобные. В эти ячейки автоматически будет помещено найденное решение. В ячейки B4-D4 вводятся граничные значения переменных. В ячейки C7–C8 по правилам электронных таблиц вводятся формулы расчета объема бака и площади его поверхности. В ячейку E7 вводится требуемое значение объема бака.

Для построения собственно оптимизационной модели в диалоговом окне «Поиск решения» (рис. 3.3) необходимо задать адрес целевой ячейки, вид определяемого значения целевой функции, адреса изменяемых ячеек и ограничения.

Параметры поиска решения, задаваемые по умолчанию, обеспечивают решение задачи в подавляющем большинстве случаев, и менять их нет необходимости.

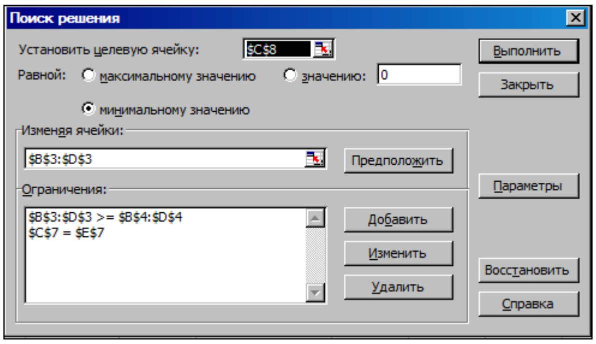


Рис. 3.3. Окно «Поиск решения».

Нажатие кнопки «**Выполнить**» даст решение задачи.

Аналогичным образом могут быть решены задачи оптимального использования ресурсов, выбора оптимального плана перевозок и т.п. Большое число задач оптимизации связано с некоторыми структурами (графами). Например, задача поиска кратчайшего маршрута между заданными вершинами графа, задача оптимального плана перевозок по некоторой транспортной сети, поиск критического пути, задача «коммивояжера» и т.п.

На практике оценка альтернатив одним критерием затруднена. Любая система характеризуются многими положительными или отрицательными качествами. Например, производительность, мощность, энергоемкость, стоимость, трудоемкость изготовления и т. п. Обычно оценка решения делается с учетом нескольких частных критериев – такая задача называется задачей **многокритериальной оптимизации.** Как правило, нет решения, соответствующего экстремальному значению всех альтернатив, так как частные критерии качества имеют конкурирующий характер. Улучшение одного критерия ведет к ухудшению другого и т.д. В этом случае при выборе решения требуется принятие определенного **компромисса**. Рассмотрим некоторые варианты методов принятия компромиссных решений.

1. **Метод уступок.** Этот прием основан на том, что с точки зрения решения конкретной задачи частные критерии неравнозначны между собой, одни более важны, чем другие. Пусть частные критерии упорядочены по степени их важности. Возьмем первый, самый важный критерий и найдем по этому критерию наилучшее решение. Затем определим уступку, т.е. величину, на которую мы согласны изменить полученное значение самого важного критерия, чтобы за счет этого попытаться улучшить значение следующего критерия, и т.д.
2. **Введение интегрального критерия,** т.е. сведение многокритериальной задачи к однокритериальной. Важным элементом подобной оптимизации является назначение коэффициентов веса для каждого частного критерия. При построении таких критериев используются аддитивные и мультипликативные функции, которые определяют вклад каждого частного критерия в интегральный критерий. Однако, полученное подобным способом решение может быть весьма чувствительным к изменению весовых коэффициентов.
3. **Определение множества Парето.** Этот метод позволяет существенно сократить поле поиска оптимального решения. Суть метода состоит в установлении предпочтения между вариантами решения (альтернативами). Предпочтение имеет место, если одна альтернатива по некоторым частным критериям не уступает, а по остальным частным критериям превосходит другую альтернативу. Таким образом, выявив предпочтения между альтернативами, худшие альтернативы можно отсеять. Оставшиеся альтернативы образуют множество Парето. Затем для выбора единственной альтернативы можно применить, например, метод экспертных оценок.

Главный вывод, который мы должны сделать из представленного обзора методов состоит в том, что для задач многокритериальной оптимизации не существует единственного метода решения. Частные варианты приводят, как правило, к разным результатам.

В качестве примера решения многокритериальной задачи оптимизации рассмотрим подход, основанный на построении интегрального критерия качества системы. И так, система характеризуется рядом частных критериев, каждый из которых отражает одно из свойств системы. Весовые коэффициенты для частных критериев могут быть заданы экспертами непосредственно путем оценки важности каждого критерия. При этом сумма весовых коэффициентов должна быть равна единице. После определения весовых коэффициентов конструируется интегральная целевая функция:

$$F_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{F_k}{F_k^{норм}} \Rightarrow \max \ , \quad \text{причем } \sum \alpha_к = 1 .$$

Здесь F_k - целевая функция, соответствующая k-му частному критерию , m – число частных критериев (целевых функций), α_k - коэффициент веса *k*-й целевой функции, $F_k^{норм}$ - нормирующее значение *k-й* целевой функции.

Для обобщенного критерия решается задача поиска максимума, при этом значения весовых коэффициентов частных критериев, которые соответствуют максимизируемым свойствам, берутся со знаком плюс, минимизируемые – со знаком минус. В качестве нормирующих величин следует взять максимальные значения частных критериев, если эти качества надо увеличивать, и минимальные, если эти качества необходимо уменьшать.

Например, требуется определить оптимальный план производства изделий, которые требуют расходования одних и тех же ресурсов (трудовых, сырьевых, финансовых). Причем заданы верхняя и нижняя границы по количеству каждого вида изделий. При этом, необходимо получить максимум прибыли от реализации продукции и израсходовать минимум финансовых ресурсов.

Пусть F_1 - прибыль от реализации продукции, F_2 - расход финансовых ресурсов на производство продукции. Для каждой целевой функции зададим весовые коэффициенты: α_1, α_2, которые отражают значимость каждого критерия. Значения весовых коэффициентов выбираются путем экспертных оценок.

Интегральный критерий качества для данной задачи будет иметь вид:

$$F_\Sigma = \alpha_1 \frac{F_1}{F_1^{макс}} - \alpha_2 \frac{F_2}{F_2^{мин}} \Rightarrow \max .$$

Здесь $F_1^{макс}$ - максимальная прибыль, которая может быть получена при выполнении всех ограничений, $F_2^{мин}$ - минимальные финансовые затраты, которые требуются для выпуска продукции при выполнении всех ограничений. Таким образом, данная задача требует определения трех экстремальных значений целевых функций: F_Σ , $F_1^{макс}$, $F_2^{мин}$

В заключение данного раздела отметим, что оптимизация получила широкое применение в практике проектирования технических систем, а так же в административной и управленческой деятельности. И это не удивительно, так как повышение эффективности любой целенаправленной деятельности – естественное стремление человека.

Нахождение оптимальных вариантов особенно важно для оценки состояния современной техники и экономики, определения перспектив ее дальнейшего развития. Часто оказывается, что оптимальное решение всего на несколько процентов превосходит существующее. Но нередко оптимизация вскрывает значительные резервы улучшения качества систем.

При всей очевидной полезности оптимизации требуется осторожное обращение с подобным подходом. Основания для такого заключения получены в ходе практического решения задач оптимизации и состоят в следующем:

– Оптимальное решение часто оказывается весьма чувствительным к незначительным изменениям в условиях задачи.
– В понятии оптимальности важную роль играют ограничения. Не задав всех необходимых ограничений, мы можем одновременно с оптимизацией по основному критерию получить нежелательные сопутствующие эффекты.

И так, отношение к оптимизации можно сформулировать следующим образом: практическое применение решений задач оптимизации прямо зависит от того, насколько хороша исходная модель. Для сложных систем моделирование является всегда приблизительным, и использовать средства поиска оптимальных решений необходимо тем осторожнее, чем сложнее исследуемая система. Следует отметить, что существуют и другие подходы к решению задачи выбора, например, выбор на основе бинарных отношений.

Дополнительные сведения о методах решения задач оптимизации можно найти в монографиях: [32], [74], [96].

3.2. Структурные модели

В разделе 1.5 мы определили систему как совокупность взаимодействующих между собой элементов. Любая система имеет **структуру** – это одно из ее основных свойств. В структуре отображается состав элементов системы и связи между ними. Структура – это внутренняя форма организации системы, определяющая способ взаимодействия составляющих ее элементов. Она придает целостность системе и обуславливает возникновение новых качеств. Так как структура – одно из важнейших свойств системы, то ее моделирование, представляет особый интерес.

Полезность моделирования структуры системы очевидна. Такие модели могут помочь упорядочить нечеткие представления о системе. Например, представление совокупности работ в виде структурной модели позволяет продумать последовательность проведения работ для обеспечения выполнения проекта в заданные сроки. Такая модель помогает выявить временные ограничения, требуемые ресурсы, имеющиеся резервы и т.п.

При моделировании структуры главным свойством системы является наличие или отсутствие **связей** между элементами, пространственное же размещение элементов для структурных моделей не имеет значения.

Примеры структурных моделей: схема метрополитена, схема энергоснабжения предприятия, электрическая схема, блок-схема алгоритма и т.п. Положение элементов на подобных схемах выбирается из соображений наглядности и удобства анализа, оно никак не связано с их реальным пространственным размещением в отличие, например, от плана местности или географических карт, т.е. геометрических моделей.

Например, схема метрополитена (рис. 3.4) содержит информацию о существующих маршрутах и станциях пересадки пассажиров. Естественно, что в реальности кольцевой маршрут это не окружность, радиальные маршруты по конфигурации далеки от прямых линий. По такой схеме невозможно определить расстояние и время движения по маршруту.

Рис. 3.4. Схема метрополитена.

Все структурные модели имеют нечто общее, что позволило рассматривать их как особый объект. Для этого необходимо отвлечься от содержательной стороны, оставив в схеме только общее: **наличие элементов и связей между ними**. Такая схема называется **графом**. Теория графов родилась непосредственно в ходе решения прикладных задач. Это работы Эйлера (1737г., задача о кёнигсбергских мостах, рис. 3.5.), работы Кирхгофа в области анализа электрических цепей, работы Кэли в области органической химии. Теория графов является разделом прикладной математики.

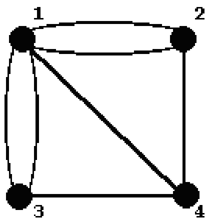


Рис. 3.5. Граф в задаче о кёнигсбергских мостах.

Граф состоит из элементов произвольной природы, называемых **вершинами**, и связей между ними, называемых **ребрами** или **дугами**. Для отображения направленности связей, ребра изображают со стрелками. Если направление обозначено, то граф называется ориентированным, в противном случае неориентированным. Пара вершин может быть соединена любым количеством ребер. Вершина может быть соединена сама с собой, в этом случае ребро называется **петлей**. Если указаны количественные характеристики вершин или ребер, то граф называется **взвешенным**.

Если нет ограничений на пересечение ребер, то можно утверждать, что графы могут отображать структуры любой сложности.

Некоторые виды структур имеют особое значение для практики, они получили специальные названия: линейные, древовидные (иерархические), сетевые, матричные. Особое место занимают структуры с обратными связями, которые соответствуют кольцевым путям в ориентированных графах.

Построение структурной модели в виде графа позволяет формализовать описание структуры системы. Если представить граф в виде матрицы инценденций, то структура системы может быть подвергнута анализу средствами вычислительной техники.

Рассмотрим несколько примеров применения структурных моделей в практической деятельности.

Структурные модели достаточно широко используются в сфере управления в виде **моделей сетевого планирования**. Подобные модели отражают взаимосвязи различных работ, в их технологической последовательности, при реализации какого либо проекта. Анализ сетевой модели позволяет установить ту последовательность работ, которая определят сроки выполнения всего проекта (критический путь).

Основными понятиями сетевой модели планирования и управления являются событие, работа, путь. Работа характеризует действие, требующее использования ресурсов. Графически работа отображается стрелкой, которая соединяет два события. Каждая работа имеет определенную продолжительность.

Событиями называются результаты выполнения одной или нескольких работ. События в сетевой модели - это вершины графа (рис. 3.6). Естественно, что всегда имеется начальное событие (начало работы по реализации проекта) и конечное событие (полное завершение проекта). Работы, выходящие из некоторого события, не могут начинаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие. Путь – это цепочка работ, соединяющих начальную и конечную вершины.

Главное значение при планировании и управлении реализацией проекта играет **критический путь**, который имеет максимальную длину. Несвоевременное выполнение работ, составляющих критический путь, ведет к срыву выполнения всего проекта. Сетевая модель планирования и управления позволяет выявить резервы времени для работ, которые не принадлежат критическому пути при неизменных сроках реализации проекта в целом. Таким образом, сетевая модель планирования и управления позволяет выявить главные работы и оптимизировать сроки реализации всего проекта в целом. Пример сетевой модели планирования представлен на рис. 3.6.

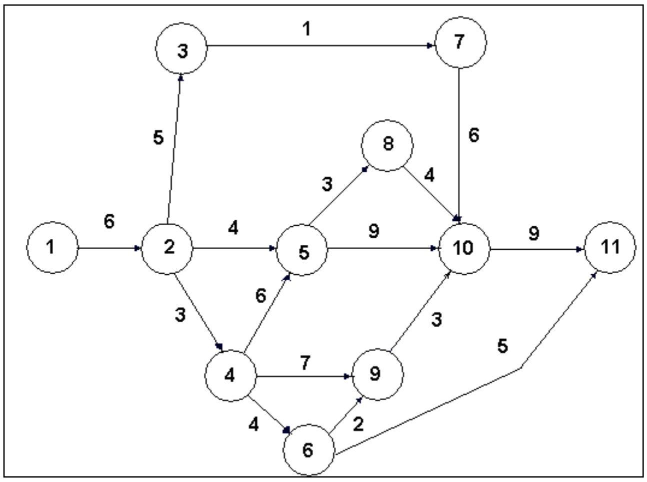


Рис.3.6. Структурная модель сетевого планирования.
Критический путь: 1-2-4-5-10-11, длительность 33 единицы времени.

Особую роль структурные модели играют при проектировании новых технических объектов. Так построение **структурно-функциональной** модели технической системы позволяет создать новые технические решения на уровне изобретений. Действительно, в каждой технической системе любой элемент выполняет определенные функции и функционально связан с другими элементами. Любой элемент технической системы реализует свои функции на основе каких-либо физических, химических либо других эффектов. Выяснение функциональных связей между элементами системы на основе структурной модели позволяет получить четкое представление об ее устройстве.

Структурно-функциональную модель можно представить в виде графа, отражающего **взаимодействие элементов** при выполнении своих функций. При этом вершины такого графа - элементы системы, а ребра – функции, выполняемые элементами системы. Ребра выходят из вершин-элементов, чьи функции они описывают, и заканчиваются в вершинах-элементах, чью работу они обеспечивают или в вершинах-объектах окружающей среды, взаимодействующих с рассматриваемым элементом. Из каждой вершины выходит столько ребер, сколько функций он выполняет.

Имея функционально-структурную модель системы можно выбрать различные физические эффекты для реализации функций элементов. Подобный подход позволяет, на базе вычислительной техники, автоматизировать процесс поиска новых технических решений. Пример функционально-структурной модели одной простой технической системы представлен на рис. 3.7.

Функции элементов: Ф0-снижение трения вращения втулки вокруг оси; Ф1-Обеспечение качения втулки по шарикам; Ф2-обеспечение качения шариков по оси; Ф3- Обеспечение равного удаления между шариками. Структурно-функциональная модель, представленная на рис. 3.7, позволяет путем вариации физических эффектов получить любой тип подшипника, который известен на сегодня.

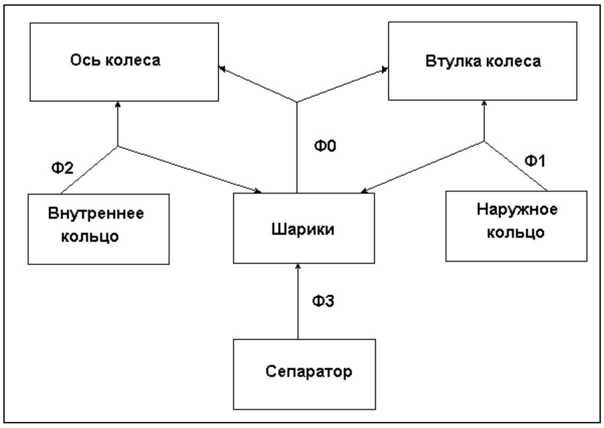


Рис. 3.7. Структурно-функциональная модель подшипника.

Одно лишь построение структурной модели позволяет выявить определенные **качественные свойства** системы. Примером могут служить **когнитивные модели,** которые являются отображения качественных представлений человека. Такие модели отражают причинно-следственные связи между различными факторами сложной системы или процесса. Они могут быть представлены в виде структурных схем.

Построение когнитивной модели – это необходимый этап любого мыслительного процесса, предшествующий постановке проблемы или формулировке задачи. Психологи считают, что подобного рода модели создаются человеком на уровне подсознания и всегда предшествуют сознательному анализу любой проблемы. С их помощью отражается путь размышлений о возможных причинах данного следствия. Это позволяет человеку делать **причинно-следственные выводы** на основе ограниченной информации (по крайней мере, строить определенные гипотезы).

Например, при принятии решений в различных ситуациях у эксперта возникает модель проблемной области, на основе которой он пытается объяснить происходящие в реальности процессы. При этом объективные закономерности реального мира представляются субъективными экспертными оценками. В результате образ наблюдаемой ситуации отражает не только законы и закономерности ситуации, но и мировоззрение субъекта.

Построение когнитивной модели - объективно необходимый этап моделирования. Действительно, наблюдения за объектом позволяют сформировать некоторый качественный образ объекта - когнитивную модель. Дальнейшие этапы моделирования связаны с построением более точных моделей с привлечением теорий, законов, эмпирических зависимостей, а главное, с использованием строгого понятийного аппарата конкретной науки.

Цель построения когнитивной модели состоит в формировании и уточнении гипотез о функционировании исследуемого объекта, который рассматривается как сложная система, состоящая из отдельных элементов и подсистем. Для анализа поведения сложной системы строится **схема** (граф) причинно-следственных связей. Элементы схемы отображаются в виде вершин, соединенными ориентированными дугами, направления отражают причинно-следственные связи.

Если фактор A влияет на фактор B, то на схеме это отображается в виде связи: A ⟶B, где A - причина, B – следствие. Причем количественная мера взаимодействия факторов может быть неизвестна. Тем не менее, во многих случаях удается получить содержательные выводы, пользуясь только качественными оценками.

В рамках когнитивной схемы причинно-следственные связи делятся на положительные и отрицательные. Связь $A \xrightarrow{+} B$ называется положительной, если увеличение фактора A приводит к росту фактора B, а уменьшение A ведет к снижению B. Отрицательная связь обозначается $A \xrightarrow{-} B$, т.е. увеличение A ведет к уменьшению B, а уменьшение A ведет к росту B. Подобные схемы широко используются для анализа сложных систем в социологии и экономике.

Когнитивная модель, в первую очередь, позволяет выявить **обратные связи**. Различают положительные и отрицательные обратные связи. Положительная обратная связь интенсифицирует исходный процесс, в то время как отрицательная обратная связь направлена на торможение процесса, поддерживая его в определенных пределах, т.е. является стабилизирующим фактором. Если схема содержит контуры с положительной обратной связью, то это указывает на возможность неустойчивости системы.

В качестве примера рассмотрим когнитивную модель потребления электроэнергии некоторого региона (рис. 3.8). Данная схема отражает взаимодействие различных социально-экономических факторов с развитием энергетического потенциала данного региона.

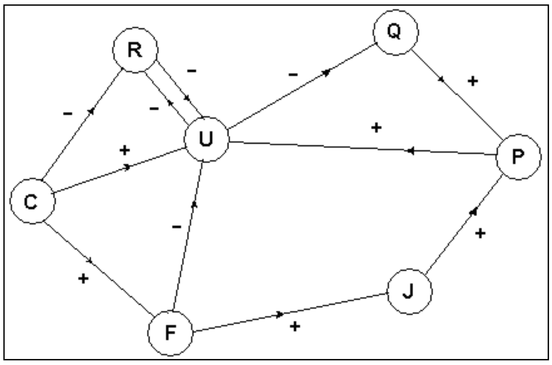


Рис. 3.8. Когнитивная модель потребления электроэнергии

C	-	энергетические мощности	R	-	стоимость электроэнергии
F	-	число предприятий	J	-	число рабочих мест
Q	-	состояние окружающей среды	P	-	численность населения
U	-	потребление электроэнергии			

Дуга (Q,P) является положительной связью, т.к. улучшение окружающей среды ведет к росту населения, а ухудшение окружающей среды ведет к оттоку населения. Дуга (U,Q) отрицательна, так как увеличение потребления электроэнергии ухудшает состояние окружающей среды. Дуга (P,U) имеет знак плюс ввиду того, что рост числа жителей вызывает увеличение потребления электроэнергии. Рассмотрим взаимодействие факторов в контуре P, U, Q, P. Предположим, что численность населения возросла. Это приведет к увеличению потребления электроэнергии и, следовательно, к ухудшению состояния окружающей среды; такое изменение окружающей среды приведет к уменьшению числа жителей. Таким образом, контур компенсирует влияние импульса в вершине P, стабилизируется ли поведение системы - на этот вопрос может дать ответ количественный анализ (анализ устойчивости). В контуре U, C, F все дуги положительные, и, следовательно, любое отклонение в этом контуре будет усилено.

Данная схема соответствует интуитивным приближенным представлениям о причинности. Расставленные знаки указывают лишь на определенную тенденцию, которую нельзя считать абсолютной и линейной. Взаимодействие факторов может быть более сложным и нелинейным. Например, положительная связь между факторами имеет место только до определенного уровня, после которого наступает так называемое насыщение.

Когнитивная модель особенно полезна для анализа взаимодействия **трудно формализуемых факторов**, измерение которых является сложной проблемой (рис. 3.9).

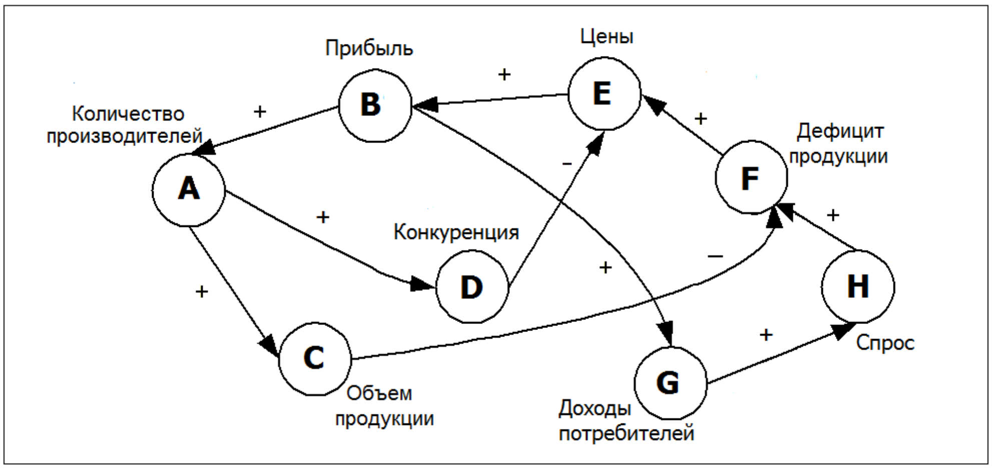


Рис. 3.9. Когнитивная схема некоторой экономической ситуации.

Технология когнитивного моделирования имеет программную поддержку. Например, программный комплекс «Канва» (рис. 3.10) используется для концептуального анализа и моделирования сложных и плохо определенных политических, экономических или социальных ситуаций, разработки стратегий управления и механизмов их реализации. Программный комплекс может быть инструментом мониторинга состояния ситуации, порождения и проверки гипотез механизмов развития и механизмов управления ситуацией.

Применение системы концептуального моделирования «Канва» значительно расширяет аналитические возможности экспертов, освобождая их от рутинной работы, стимулирует интуицию для генерации оригинальных управленческих решений в запутанной ситуации. Например, возможно решение прямой задачи анализа «Что будет, если …» или получение советов и рекомендаций по управлению ситуацией, т.е. решение обратной задачи синтеза «Что нужно, чтобы …».

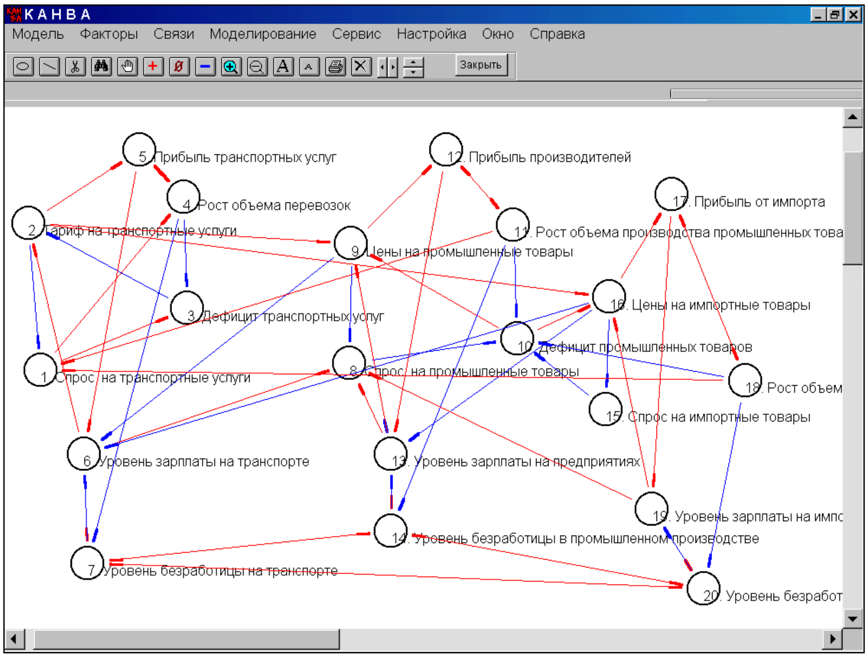


Рис. 3.10. Когнитивная модель в среде пакета «КАНВА».

В заключение отметим, что рассмотренный в данном разделе специфический вид моделей играет весьма важную роль в моделировании, так как широко используется как одно из средств построения многих других видов моделей.

Дополнительную информацию о структурном моделировании можно найти в монографиях: [13], [16], [30], [71], [73], [89], [91], [98], [103].

3.3. Геометрические и графические компьютерные модели

Геометрическое моделирование изучает и применяет методы построения моделей, описывающих геометрические свойства различных объектов. К геометрическим свойствам относятся пространственные отношения между реальными объектами их **форма и размеры**, **положение, ориентация** в пространстве. Геометрическое моделирование позволяет отражать эти свойства объектов, не вдаваясь в подробности других свойств.

Сам термин «компьютерная графическая модель» говорит о том, что отражение свойств объекта-оригинала осуществляется средствами компьютерной графики, т.е. в наименовании модели отражен способ ее построения и реализации. Подобные модели как наиболее наглядные широко используются в практике моделирования.

Теоретической основой компьютерного геометрического моделирования являются методы построения подобных моделей, которые разрабатываются несколько веков:

1. Геометрия Евклида, построения с помощью циркуля и линейки.
2. Аналитическая геометрия, применение алгебраических методов в геометрии.
3. Начертательная геометрия, проективная геометрия.
4. Вычислительная геометрия (40-70-е годы XX века): разработка теории и прикладных методов геометрического моделирования на основе сплайн-функций, методов сплайн-аппроксимации трехмерных поверхностей.

Таким образом, современное геометрическое моделирование, основанное на компьютерных технологиях, базируется на аналитической и дифференциальной геометрии, вычислительной математике, вариационном исчислении и топологии, а также разрабатывает собственные методы. Описание геометрических свойств объектов происходит путем построения **математических моделей**, отражающих эти свойства, что позволяет проводить различные преобразования, редактировать и строить графические отображения этих объектов.

Для построения геометрических моделей используются идеализированные геометрические объекты: **точка, линия, плоскость, поверхность** и т.п., которые в отличие от реальных объектов обладают набором только наиболее существенных свойств. Ясно, что эти идеализированные объекты являются концептуальными моделями геометрии. Так геометрическая точка отличается от реальной точки на чертеже тем, что имеет только координаты, но не имеет размеров, геометрическая линия не имеет ширины и цвета, геометрическая плоскость - толщины и т.д.

Из многих вариантов компьютерных графических моделей рассмотрим один, который имеет особую актуальность - отображение **трехмерных объектов на плоской поверхности**.

Еще задолго до появления компьютеров подобные задачи решались на основе законов перспективы и проекционного черчения. На базе точной геометрической интерпретации этих законов родилась целая техническая наука – **начертательная геометрия**. Однако, и картина художника, и чертеж инженера дают статичное и одностороннее отображение объекта, с которым невозможно производить преобразования и различные манипуляции.

В практической деятельности человек имеет дело с трехмерными объектами, для описания которых вынужден был строить модели на плоской поверхности. Основной недостаток традиционного двумерного изображения (например, чертежа), состоит в том, что конструктор вынужден использовать проекции трехмерного объекта на базовые ортогональные плоскости. Ограничение двумерных графических моделей особо проявляются, когда поверхность детали имеет сложную криволинейную форму. Трудности восприятия по чертежу формы, взаимодействия и взаимного расположения различных деталей механизма в рамках двумерных графических моделей неустранимы.

Исторически, возможности компьютерного графического моделирования претерпели существенное изменение, прежде чем они сравнялись с возможностями обычного рисунка или чертежа. Достаточно сказать, что первоначально отображение даже двумерных объектов (графиков, диаграмм и т.п.) производилось с помощью символов алфавита.

Следующий этап развития компьютерного графического моделирования связан с технологиями растровой и векторной графики. Естественно, что с тех пор, как компьютер «научился» рисовать на уровне пикселей, отображение плоских двумерных объектов не представляет особых трудностей.

На современном уровне развития информационных технологий модели трехмерных объектов по принципу их построения можно разделить на три вида: **каркасные** модели**; поверхностные** модели**; твердотельные** (сплошные) модели.

Каркасная модель трехмерного геометрического объекта полностью описывается в терминах точек и линий (рис 3.11). Элементами модели объекта являются линии (ребра) и точки (вершины). Подобный вид моделирования давно известен в черчении – это аксонометрическая проекция, которая непосредственно связана с прямоугольным проецированием при построении чертежа.

Главное ограничение каркасных моделей это недостаток информации о гранях, заключенных между ребрами. Они строятся наблюдателем чисто умозрительно. Вследствие чего невозможно однозначно распознать ориентацию и видимость граней трехмерного каркасного изображения. Этот эффект, которым иногда умышленно пользуются художники, обусловлен самой природой каркасной модели и может привести к непредсказуемым результатам. Для каркасной модели нельзя однозначно отличить видимые грани и ребра от невидимых. Еще сложнее в рамках каркасной модели обстоит дело с отображением криволинейных поверхностей. Подобная задача в общем виде в рамках каркасной технологии принципиально не имеет решения.

Каркасное моделирование - это моделирование трехмерных объектов самого низкого уровня. По своей сути оно является воспроизведением средствами компьютерной графики технологий трехмерного моделирования, которые были разработаны для черчения на бумаге.

Поверхностное моделирование трехмерных объектов связано с использованием точек, линий и поверхностей как графических примитивов. Результатом подобного моделирования является некоторая оболочка, которая описывает поверхность моделируемого объекта.

В поверхностном моделировании создаются и модифицируются поверхности, описывающие отдельные элементы объекта. Эти поверхности обрезают по линиям пересечения, сопрягают друг с другом и т.п.

Метод поверхностного моделирования наиболее эффективен для объектов, которые изготавливаются из листового материала и имеют сложные криволинейные поверхности, например, корпус автомобиля или самолета. В рамках этой технологии сложные поверхности образуются из элементарных геометрических поверхностей: поверхностей вращения, поверхностей, заданных аналитическими выражениями или поверхностей, образованных параллельным переносом линий (рис. 3.12).

Системы поверхностного моделирования представляют тело просто как совокупность поверхностей, соединенных друг с другом, и ограничивающих «пустой» объем. Применение данного метода моделирования, не смотря на ряд его достоинств, ограничено сложностью отображения внутренних полостей тела. Впрочем, при проектировании корпуса автомобиля или фюзеляжа самолета этого и не требуется.

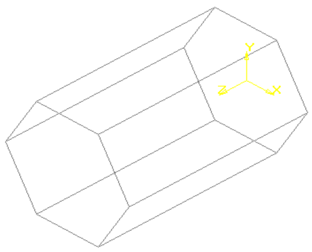


Рис. 3.11. Каркасная модель.

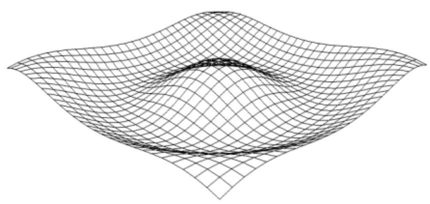


Рис. 3.12. Поверхностная модель.

Твердотельная модель. Основным элементом твердотельной модели является трехмерный объект как таковой. В твердотельном моделировании с самого начала построения модели работа производится с оболочками тел, а не с отдельными поверхностями. Оболочка полностью описывает поверхности объекта, отделяющие его внутренний объем от остальной части пространства. В модели отражено, что одну часть пространства занимает объект, а другая часть находится вне объекта. Модель объекта может иметь одну или несколько оболочек: одна является внешней, другие ограничивают внутренние пустоты тела.

Представление тела как совокупности оболочек, ограничивающих его объем является наиболее общим подходом. Каждая оболочка строится из набора стыкующихся друг с другом поверхностей, содержащих полную информацию о своих границах и связях с соседями. Такое описание тел называется представлением с помощью границ. Оно дает возможность выполнять над телами множество операций, сохраняя при этом единый способ их «внутреннего» устройства. Такое представление тел позволяет моделировать объекты произвольной формы и сложности (рис. 3.13-3.14).

Процесс построения твердотельной модели аналогичен процессу изготовлении материальной модели. Сначала создается некоторая простая заготовка. Далее заготовка изменяется требуемым образом путем присоединения или отсечения. Процесс создания конструкции основан на использовании булевых операций объединения, исключения и пересечения.

Таким образом, технология твердотельного моделирования основана на конструировании модели из некоторого набора базовых трехмерных твердотельных простейших объектов. Каждый такой объект строится пользователем на основе плоских эскизов с применением трехмерных операций. Самая простая твёрдотельная модель образуется при движении какого-либо контура. Движение может быть поступательным, вращательным или по произвольной траектории. На базе созданных таким образом тел можно получать новые тела. Например, можно сгладить рёбра, отклонить грани, соединить одно тело с другим и т.д. В каждом случае получается один объект - твёрдое тело. Данная технология актуальна, прежде всего, для машиностроения: создание трехмерных моделей деталей и сборок.

Для редактирования геометрической модели тела необходима информация о последовательности построения модели. Поэтому в модель тела включают **дерево построения**. В итоге результатом твердотельного геометрического моделирования некоего объекта является математическая модель его геометрии. Трехмерный объект определен многими изменяемыми параметрами. Вся эта информация содержится в математической модели его геометрических свойств, поэтому твердотельное моделирование называют **параметрическим**.

Компьютерное графическое изображение объекта является результатом использования его геометрической модели. Для того чтобы «увидеть» модель объекта нужно смоделировать **поток падающих и отраженных от его поверхностей лучей света**. Модель можно «осветить» с разных сторон светом различного цвета и интенсивности. Исходная информация для построения изображения на экране компьютера предоставляет геометрическая модель этого объекта.

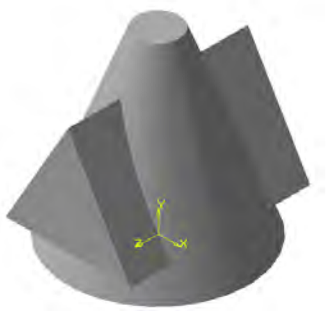


Рис. 3.13. Твердотельная модель. Пересечение конуса и призмы.

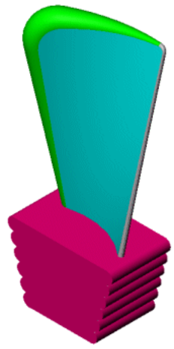


Рис. 3.14. Твердотельная модель лопатки турбины

Можно получить реалистическое изображение объекта близкое к его фотографии. При этом поверхностям модели можно придать необходимый цвет, зеркальность, прозрачность и другие оптические свойства. И так, при графическом отображении твердотельная модель, полностью определяя форму объекта, обеспечивает автоматическое удаление невидимых линий, позволяет эффективно имитировать движение, управлять цветовой гаммой для получения тоновых эффектов.

С твердотельной моделью можно производить операции как с реальным объектом: перемещать, вращать, рассекать, приближать, или удалять, выполнять сборку из деталей и разборку на простейшие элементы, выполнять деформацию или отображать самые сложные движения трехмерного объекта в соответствии с законами механики и т.д.

Твердотельное моделирование позволяет не только отображать чисто геометрические свойства, оно позволяет, например, наделить модель свойством инерции (массой), отображать поведение и функции целостного объекта и происходящие в нем процессы (рис. 3.15).

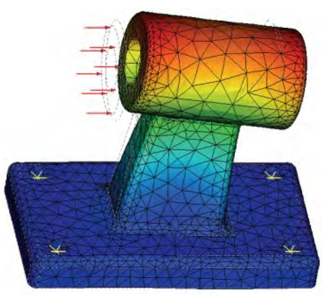


Рис. 3.15. Графическое представление результатов расчета напряжений и деформаций.

Информативность и наглядность компьютерного эксперимента возрастает на порядок, если его результаты представить не в виде традиционных числовых таблиц и графиков, а в виде наглядных образов. Технологии 3-D моделирования позволяют полностью автоматизировать модельные исследования, например, температурных полей, полей напряжений и деформаций. Так для объекта, представленного на рис. 3.15, после построения его трехмерной модели и задания внешних воздействий, расчет и отображение температурного состояния детали выполнены полностью автоматически. Теперь конструктору достаточно одного взгляда, чтобы определить наиболее нагретые участки. Имея эту информацию можно принять необходимые меры для обеспечения надежности.

Численные результаты моделирования могут быть отображены в виде **виртуального движения** трехмерных твердотельных моделей объектов. Действительно, если твердотельная модель – это объект, то программным путем можно изменять его свойства и отображать поведение объекта, изменение его состояния и параметров на экране компьютера в виде 2-D или 3-D анимации (рис. 3.16-3.17).

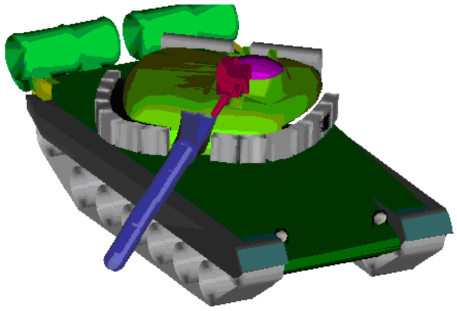


Рис. 3.16. Виртуальная 3D модель боевой машины.

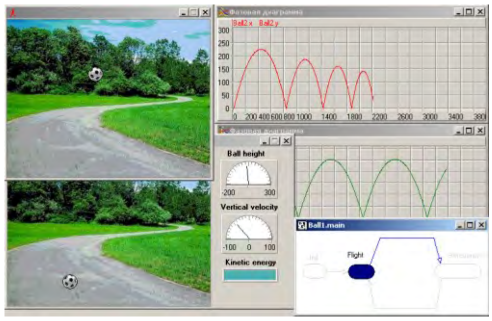


Рис. 3.17. Представление результатов моделирования движения упругого мяча.

Инструментальные системы моделирования MVS, Stratum, SolidWorks и т.п. позволяют использовать подобную технологию. Аналогичные технологии использует современный кинематограф для создания сцен фантастических событий.

Твердотельное моделирование позволяет создавать модели, состоящие из множества взаимодействующих объектов, так называемые **сборки** (рис.3.18). Наглядность подобных моделей не нуждается в комментариях.

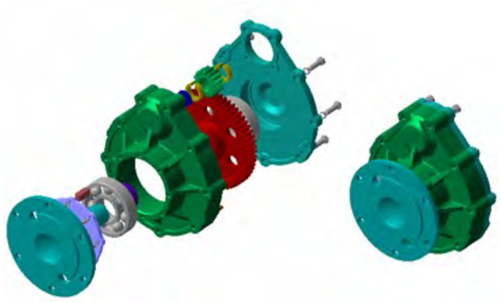
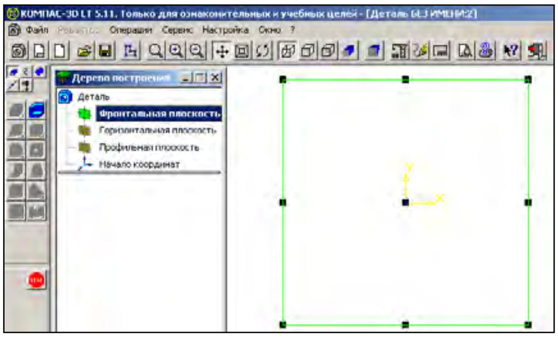


Рис. 3.18. Моделирование сборки средствами САПР КОМПАС.

Таким образом, современное компьютерное графическое моделирование объектов представляет собой синтез математической модели формы объекта и графического отображения геометрических свойств, а также позволяет отображать другие (не геометрические) свойства объекта.

Рассмотрим в качестве примера построение 3D модели цилиндра с продольным отверстием. Моделирование проводится средствами системы автоматизированного проектирования «Компас» (версия 3D LT 5.11). В режиме «Новая деталь» выбираем для построения эскиза фронтальную плоскость (рис. 3.19).



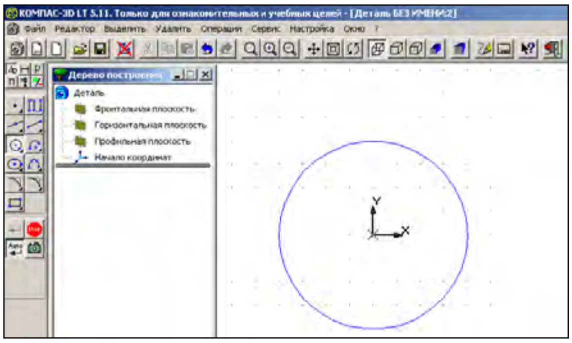


Рис. 3.19. Выбор базовой плоскости для построения эскиза.

Рис. 3.20. Построение эскиза.

Далее строим **эскиз** – окружность, которая будет использована для образования цилиндра (рис. 3.20). Применяем к эскизу трехмерную операцию «**выдавливания**» (рис. 3.21). Результат операции представлен на рис. 3.22.

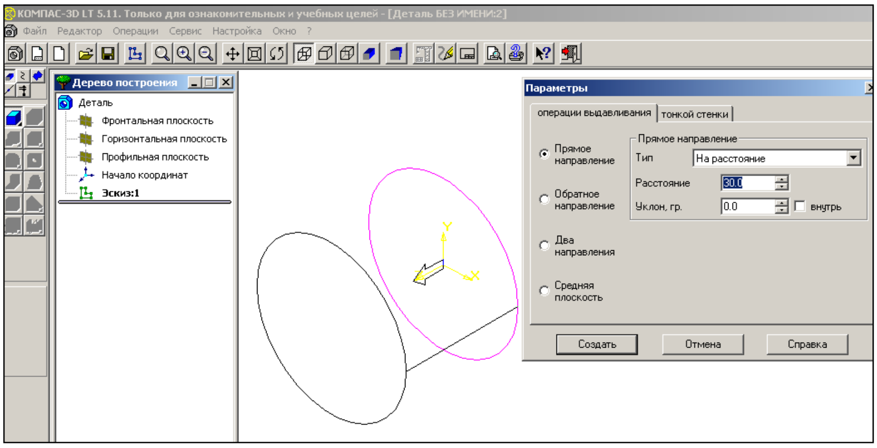
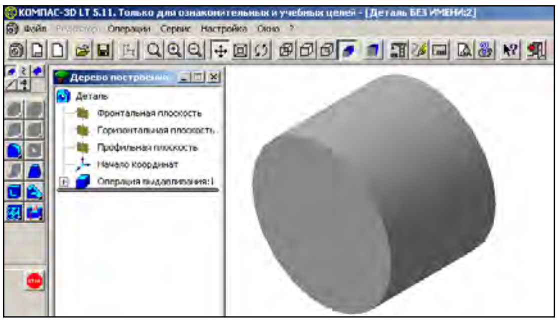


Рис. 3.21. Выполнение операции выдавливания.

Для образования продольного отверстия в построенном цилиндре строим второй эскиз (рис. 3.23) и выполняем операцию «**вырезать выдавливанием**» (рис. 3.24).



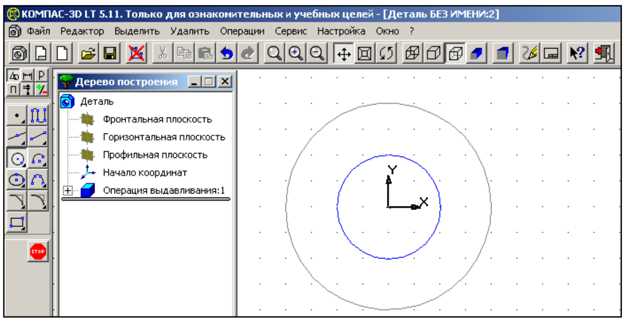


Рис. 3.22. Результат операции выдавливания.

Рис. 3.23. Построение второго эскиза для операции «вырезать выдавливанием».

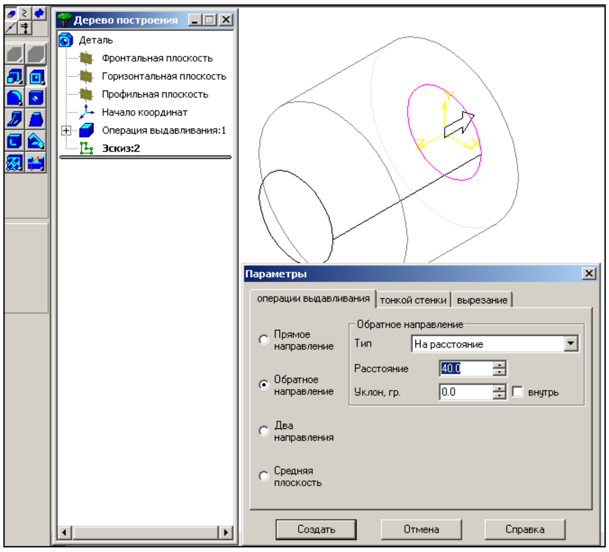


Рис. 3.24. Выполнение операции «вырезать выдавливанием».

Результатом всех операций является требуемая деталь – цилиндр с продольным сквозным отверстием (рис. 3.25).

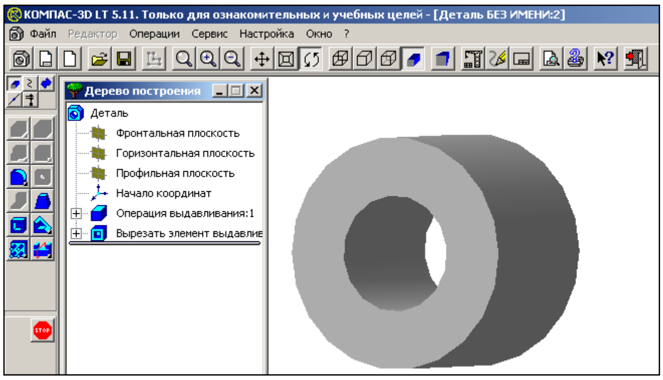


Рис. 3.25. Готовая деталь.

Таким образом, новые технологии компьютерного графического моделирования существенно расширили возможности проектирования. В комплексе с другими методами в системах автоматизированного проектирования (САПР) они играют ведущую роль.

САПР это проектирование, осуществляемое при взаимодействии человека с компьютером. Под проектированием понимается процесс создания описания, необходимого для производства в заданных условиях еще не существующего технического объекта.

Термин САПР связан с английской аббревиатурой CAD. Эта аббревиатура соответствует программным комплексам: CAD (Computer Aided Drawing) - черчение с помощью компьютера; CAD (Computer Aided Design) - проектирование с помощью компьютера. Аббревиатура CAM (Computer Aided Manufacturing) означает компьютерную технологическую подготовку производства. Аббревиатура CADD означает - черчение и проектирование с помощью компьютера. Сокращение CAE

(Computer Aided Engineering) означает компьютерный инженерный анализ. Аббревиатуры PDM (Product Data Management) обозначает компьютерные системы управления данными о продукции на протяжении всего жизненного цикла изделия при проектировании и подготовке производства; TDM (Technical Data Management) - управление документооборотом конструкторской и технологической документации. Итогом работы таких систем являются не столько чертежи деталей, а в первую очередь программы для станков с ЧПУ для изготовления этих деталей.

Исторически разработка и развитие CAD систем определялась, в первую очередь, потребностями аэрокосмической, автомобильной и военной промышленности. Основные успехи CAD систем связаны с развитием компьютерной графики, геометрического моделирования и компьютерного аппаратного обеспечения:

1. При построении модели создается цифровой документ. Средства САПР значительно превосходят возможности традиционных инструментов черчения.
2. Геометрическая модель объекта фактически представляет собой математическую модель формы объекта, которая может быть передана для обработки в другие приложения для получения чертежей заготовок, подготовки конструкторской документации, исследования свойств модели математическими методами, подготовки управляющих программ для станков с ЧПУ и др.
3. Возможна интеграция технологий трехмерного моделирования с другими методами в частности с методами численного моделирования процессов в проектируемом объекте.

В настоящее время известно множество CAD/CAM -систем различного уровня.

Система **CATIA** (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) - одна из самых распространенных САПР высокого уровня. Это комплексная система автоматизированного проектирования (CAD), технологической подготовки производства (CAM) и инженерного анализа (CAE), включающая в себя передовой инструментарий трёхмерного моделирования, подсистемы программной имитации сложных технологических процессов, развитые средства анализа и единую базу данных текстовой и графической информации. Система позволяет эффективно решать все задачи технической подготовки производства - от предварительного проектирования до выпуска чертежей, спецификаций, монтажных схем и управляющих программ для станков с ЧПУ.

AutoCAD – одна из первых САПР, ориентированная на решение задач машиностроения. В настоящее время это – одна из мощных CAD-систем для разработки конструкторской документации практически в любой сфере промышленного производства. Имеется множество приложений, интегрированных с AutoCad и образующих САПР решения многочисленных и разнообразных задач проектирования.

В то же время, высокая степень универсальности и связанное с этим обстоятельством усложнение программы, делают её непривлекательной при решении достаточно простых задач геометрического моделирования, т.е. при использовании в качестве электронного кульмана такую мощную и дорогостоящую систему.

T-FLEX CAD - профессиональная универсальная система параметрического двухмерного и трёхмерного геометрического моделирования в интересах, прежде всего, машиностроительного производства. Система позволяет полностью решить проблему подготовки технической документации – чертежей, схем, спецификаций и т.д. Обладая мощным параметрическим геометрическим ядром, позволяет существенно повысить скорость типового проектирования. Система позволяет создавать трёхмерные модели практически любого уровня сложности и чертежи на основе проекций трёхмерных моделей. Система имеет пакет анализа, который позволяет проводить прочностные расчеты, используя построенные трехмерные модели (рис. 3.26-3.27).

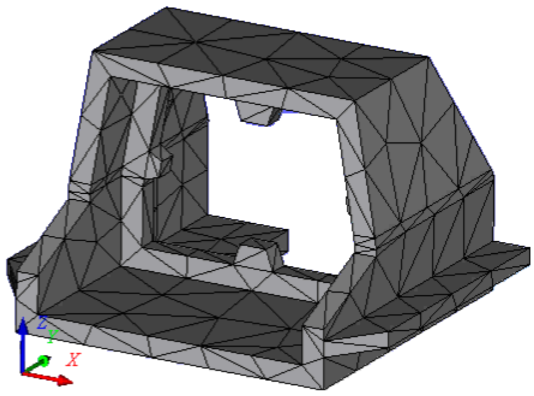


Рис. 3.26. 3D модель с расчетной сеткой.

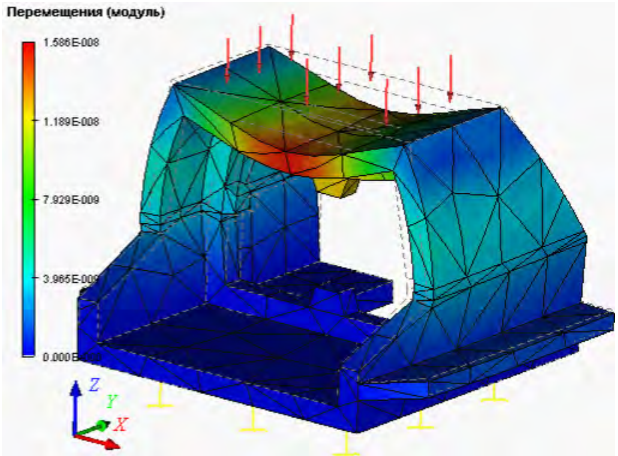


Рис. 3.27. Результаты расчета напряжений и деформаций.

САПР **ADEM** предназначена для автоматизации решения конструкторских и технологических задач производства. Система ADEM объединяет все известные методы геометрического моделирования, что позволяет сформировать конечный вид изделия и создать необходимую конструкторскую документацию. Начиная с 7-ой версии можно строить любые виды, разрезы и сечения без непосредственного обращения к 3D модели. Изображение стрелки вида приводит к автоматическому созданию соответствующего вида или сечения.

CAD-система SolidWorks позволяет строить самые разнообразные комплексы автоматизации проектирования, инженерного анализа и технологической подготовки производства. Для оптимизации состава комплексов и их функциональных возможностей в соответствии с решаемыми задачами в систему включен базовый модуль специальных API-функций для программирования прикладных задач. Результат - во многих популярных прикладных системах появились средства прямого доступа к моделям SolidWorks. Более того, специально для SolidWorks было создано большое число модулей, работающих непосредственно в его среде.

Преимущества такого построения сквозного интегрированного решения очевидны. Возможность прямой передачи данных между различными приложениями позволяет создать гибкий программный комплекс, в котором могут быть задействованы лучшие в своем классе приложения. И сейчас пользователь SolidWorks может выбирать из нескольких сотен программных и аппаратных партнеров такие дополнительные модули, которые решат именно его задачи с минимальными финансовыми издержками. И тот факт, что отдельные модули созданы самыми разными производителями, для конечных пользователей остается незаметным.

Например, **COSMOSWorks** - мощный и простой в использовании программный комплекс, который полностью встроен в SolidWorks. Созданный для нужд аэрокосмической промышленности, COSMOSWorks позволяет решать многие инженерные задачи на основе трехмерных моделей, построенных средствами SolidWorks.

CAD-система КОМПАС-3D предназначена для создания трёхмерных параметрических моделей и сборок и последующего создания их чертежей, содержащих все необходимые виды, разрезы и сечения, имеет определённые преимущества перед другими системами:

1. Система русскоязычна изначально, термины и определения полностью соответствуют терминологии отечественного конструирования.
2. Заложено выполнение всех требований стандарта ЕСКД.
3. Имеется очень широкий и одновременно практически необходимый набор функций редактирования изображений.
4. Система включает прикладные библиотеки (конструкторские библиотеки, справочники материалов и др.), ориентированные на отечественное производство.

Система КОМПАС, подобно SolidWorks, имеет средства для расширения своей функциональности силами самих пользователей. В ее состав входит инструментальная система КОМПАС-МАСТЕР, предназначенная для разработки дополнительных модулей и прикладных библиотек к пакету КОМПАС на языках программирования высокого уровня C++, Delphi, Basic. САПР на основе системы КОМПАС в настоящее время стремительно развивается и успешно конкурирует в России с другими системами.

В заключение данного раздела можно с уверенностью сказать, что на современном этапе компьютерное геометрическое и графическое моделирование развивается самыми быстрыми темпами.

Дополнительную информацию о геометрическом и графическом моделировании можно получить в монографиях: [2], [5], [33], [38], [40], [50].

3.4. Геоинформационные модели

Еще со школы известно, что в географии используется множество карт различного назначения: физические, политические, экономические и т.д., которые отражают различные характеристики определенных территорий. Географические карты представляют собой систему моделей, которые отображают **один и тот же объект**, одним и тем же **способом,** но с разной **степенью детализации**. Во многих случаях одновременно приходится использовать карты различного масштаба и назначения. Например, политическую, экономическую или другую карты. Кроме той информации, что традиционно отображается на картах, часто возникает необходимость в получении более детальных и разнообразных сведений, поиск объектов определенного рода, определение маршрутов движения и т.п. Решением подобных вопросов средствами современных информационных технологий занимается геоинформационное моделирование.

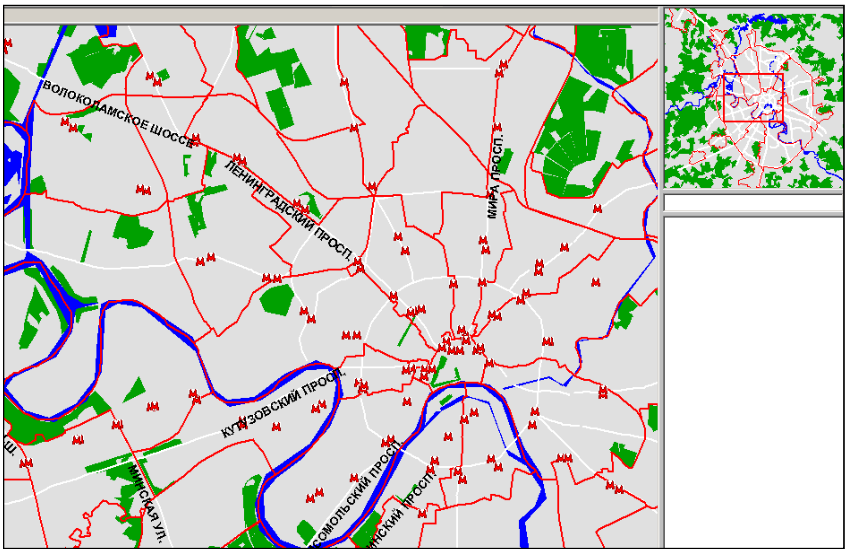


Рис. 3.28. Электронная карта Москвы

Геоинформационное моделирование, один из видов компьютерного моделирования, который базируется на создании **многослойных** электронных карт. При этом опорный слой описывает географию определенной территории, а остальные - один из видов состояния этой территории: экономическое развитие, политическое и административное деление и т.п.

Рис. 3.29. План микрорайона из городской информационной системы «Дубль ГИС»

На электронную карту могут быть выведены различные слои, которые отражают различные объекты и связи между ними: города, дороги, аэропорты и т.п. Широкое распространение получили интерактивные географические карты (мира, различных частей света, России, Москвы и других городов - рис.3.28-3.29).

Геоинформационные интерактивные карты, обычно реализуются с использованием векторной графики и поэтому позволяют выбирать нужный масштаб при работе с подобной моделью (рис.3.29-3.30).

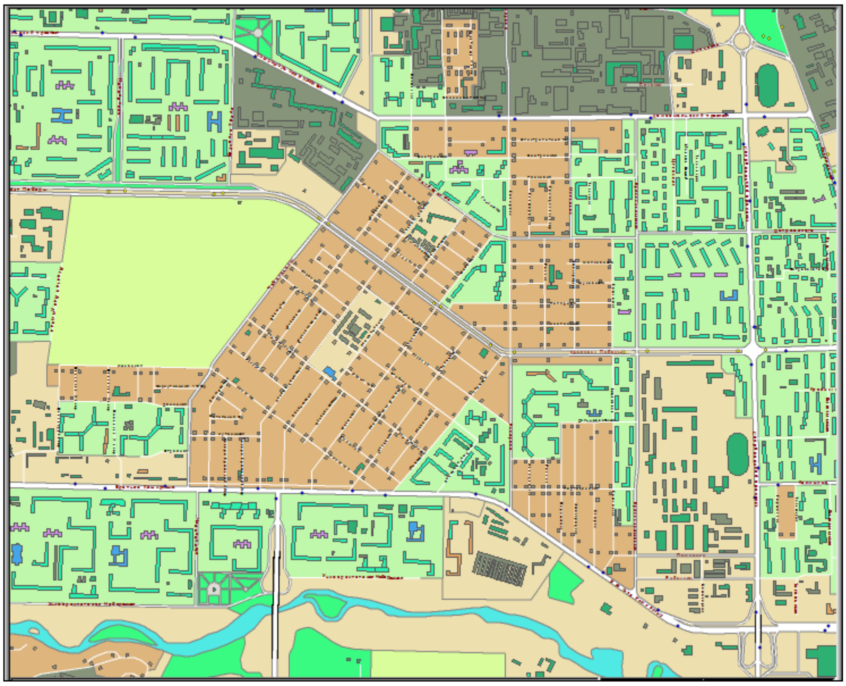


Рис. 3.30. Карта города (информационная система «Дубль ГИС»).

Карты связаны с базами данных, в которых хранится вся необходимая информация об объектах. Пользователь может осуществлять поиск необходимого ему объекта на карте поисковой системы. Например, для того чтобы найти дом на интерактивной карте города требуется ввести название улицы и номер дома. Можно выполнить поиск маршрута перемещения из одной заданной точки в другую средствами общественного транспорта и т.п. Особую ценность геоинформационные модели приобретают при их соединении с технологией **спутникового позиционирования.**

Геоинформационные модели позволяют с помощью географических карт представлять статистическую информацию о различных регионах. Хранящаяся в базах данных информация о количестве населения, развитии промышленности, загрязнении окружающей среды, полезных ископаемых и др. может быть связана с географическими картами и отображена на них.

Таким образом, модели данного вида обеспечивают оперативный доступ к разнообразной информации о различных географических объектах, которая представляется в самой наглядной форме.

3.5 Табличные модели

Табличное представление информации о свойствах объектов является для человека традиционной и наглядной формой. Если учесть, что такая форма представления информации достаточно просто отображается в виде **структур данных** (в виде массивов записей) в компьютерных программах, то это дает специфический вид моделей, удобный для их компьютерной реализации. Например, табличная форма организации информации о свойствах объектов и взаимосвязях между ними используется при построении реляционных баз данных.

Практически всегда исследование любого объекта начинается с изучения опытных данных о его свойствах и характере протекающих в нем процессов.

Результаты экспериментов или наблюдений, как правило, фиксируют в форме **таблиц**, а затем используются для той цели, ради которой был проведен эксперимент. В некоторых видах практической деятельности обработка экспериментальных данных, представленных в виде таблиц, является главным этапом при построении моделей, например, средствами регрессионного анализа.

Одним из распространенных видов моделей, которые строятся в табличной форме, являются **классификационные модели**. Подобные модели играют важную роль, так как изучение любого объекта всегда начинается с выявления его сходства и различия с другими объектами. В принципе любая наука начинается с классификации и систематизации.

В результате классификации множество объектов разбивается на классы. Внутри класса объекты объединены общим набором свойств. У каждого свойства есть свое имя, а у каждого конкретного объекта есть значение этого свойства. Объединив группу объектов в класс, мы можем рассматривать свойства присущие всему классу в целом.

Таблица как средство представления информации, может содержать данные об объектах одного класса, о взаимодействии объектов разных классов, о свойствах, которые характеризуют взаимодействие объектов и т.п.

Таблицы, в которых отражаются свойства объектов одного класса, называются таблицами типа «**объект-свойство**». Основные элементы подобных таблиц: **записи** – это строки таблицы, содержащие конкретные данные, относящиеся к одному объекту; **поля** – столбцы таблицы, содержат данные, характеризующие одно свойство, присущее всем элементам класса; **реквизиты** – это конкретные значения свойств объектов, которые содержатся в ячейках таблицы.

Класс	
Номер	Руководитель
….	….

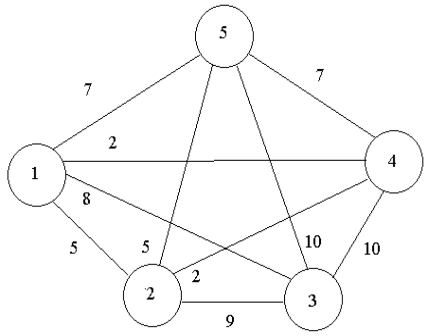
Ученик						
Фамилия	Класс	Литература	Алгебра	Химия	….	**Код**
….	….	….	….	….	….	….

Адрес		
Домашний адрес	Телефон	**Код**
….	….	….

Рис. 3.31. Связанные таблицы.

Таким образом, табличная модель такого типа отражает важное свойство элементов класса – общий набор свойств. Анализ табличной модели позволяет установить закономерности, обусловленные взаимозависимостью свойств объекта.

Если объекты, каким то образом взаимосвязаны, то между таблицами, которые отражают их свойства необходимо установить связи. Такая связь показана на рис. 3.26 между таблицами «**Класс**» и «**Ученик**»: каждый ученик учится в определенном классе. Связь также необходима между таблицами, которые отражают различные группы свойств одного объекта. На рис. 3.31 такая связь показана между таблицами «**Ученик**» и «**Адрес**»: каждый ученик имеет домашний адрес и телефон.



	1	2	3	4	5
1	0	5	8	2	7
2	5	0	9	2	5
3	8	9	0	10	10
4	2	2	10	0	7
5	7	5	10	7	0

Рис. 3.32. Граф и матрица инценденций системы.

Таблица, в которой отражаются свойства, характеризующее взаимодействие между парой объектов, причем эти свойства не принадлежат самим объектам, называется таблицей типа «**объект-объект**». Подобная таблица отражает свойства, порождаемые взаимодействием объектов. Примером подобной таблицы может служить матрица инценденций, отражающая наличие связей между элементами системы (рис. 3.32). Путем комбинации таблиц основных видов можно получить и более сложные таблицы.

3.6. Информационные модели

В настоящее время термин «**информационная модель**» получил достаточно широкое распространение. Вместе с тем смысл этого термина многими авторами трактуется весьма противоречиво. В этом разделе не преследуется цель дать однозначные ответы на все вопросы, связанные с понятием «информационная модель», мы рассмотрим разные точки зрения, которые представлены в современной учебной и научной литературе по информатике и моделированию.

И так, в зависимости от целей моделирования возможно несколько уровней формализованного описания систем: символический, теоретико-множественный, абстрактно-алгебраический, топологический, логико-математический и информационный. На информационном уровне описания систем предполагается, что в любом процессе управления или регулирования происходит переработка входных информационных сигналов в выходные сигналы. В данном случае информация выступает, как способность процессов и явлений порождать многообразие состояний, которые передаются от одного объекта к другому посредством отображения состояния источника в состоянии приемника [9].

Согласно **А.П. Ершову**, «Информационная модель - это модель, в которой изучаемое явление отображается в виде процессов передачи и обработки информации, а параметры модели представлены в числовой, текстовой или иной сигнальной форме» [34]. Данное определение подчеркивает информационный аспект изучения объектов и процессов. Таким образом, из этого определения следует, что при информационном моделировании отображаются, в первую очередь, процессы передачи и преобразования сигналов, например, в системах управления и регулирования. Подобное понимание сущности информационной модели, по нашему мнению, наиболее приемлемо, т.к. отражает специфику данного вида моделей.

В учебной и научной литературе встречается множество определений понятия «информационная модель». Например, можно встретить такие определения:

1. Информационная модель объекта это его описание [28].

Иными словами, если построено описание объекта, то построена его информационная модель. Это определение можно понимать и так, что описание объекта есть его информационная модель, потому что оно содержит определенную информацию об объекте. Но любая модель, в том числе и материальная, содержит подобную информацию. Это основное свойство моделей отражать определенные свойства объекта моделирования. Следовательно, такое определение информационной модели имеет весьма общий характер, который не отражает специфических особенностей информационного моделирования.

2. Информационную модель характеризует формализованное описание информационных структур и операций над ними или параметрическое представление процесса циркуляции информации, подлежащей автоматизированной обработке в системе управления [37].

3. Информационная модель это класс знаковых моделей, описывающих информационные процессы (возникновение, передачу, преобразование и использование информации) в системах самой разнообразной природы [36].

Данные определения согласуются с определением А.П. Ершова. Они выделяют специфику информационного моделирования и самостоятельный класс моделей.

4. Информационная модель – целенаправленно отобранная информация об объекте, которая отображает наиболее существенные для исследователя свойства этого объекта [26].

При построении любой модели информация об объекте моделирования отбирается целенаправленно в соответствии с поставленной задачей, решить которую предстоит путем моделирования.

5. Информационная модель – совокупность информации, характеризующая свойства и состояние объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с внешним миром [27].

Можно только повторить, что данное утверждение относится к любым моделям. Действительно, предположим обратное, что модель не содержит информации, которая характеризует свойства и состояние объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь его с внешним миром.

6. Информационная модель – это модель, представляющая объект, процесс или явление набором параметров и связей между ними [22]

Математические, алгоритмические и имитационные модели представляют объект в таком же виде. Если согласиться с данным определением, то все перечисленные выше модели следует считать информационными.

7. Предметные модели воспроизводят геометрические, физические и другие свойства объектов в материальной форме. Модели информационные представляют объекты и процессы в форме рисунков, схем, чертежей, таблиц, формул, текстов и т.д. [45]

По поводу такого понимания информационной модели следует отметить, что и материальные (предметные) и абстрактные модели в информационном плане равнозначны. И те и другие несут в себе определенную информацию о свойствах объекта, которую можно получить на основе модельного эксперимента.

8. Информационная модель – совокупность атрибутов объекта вместе с их значениями [48].

Такому определению удовлетворяют базы данных. Действительно, каждая таблица реляционной базы данных – своего рода информационная модель объекта, который характеризуется определенным набором свойств, указанных в полях таблицы. Однако модель отражает и взаимосвязи между свойствами объектов. Следует признать, что такое определение выделяет из всего множества моделей определенный класс, к которому нельзя причислить, например, математические модели.

9. Набор величин, содержащий всю необходимую информацию об исследуемых объектах и процессах, в информатике называется информационной моделью [31].

В этом определении необходимо добавить «…всю необходимую информацию об объектах и процессах **с точки зрения решаемой задачи**…». Данное определение, по сути, соответствует предыдущему.

10. Информационная модель – описание моделируемого объекта на одном из языков кодирования информации(словесное описание, схемы, чертежи, карты и пр.) [18].

11. Для успешной работы человеку, как правило, достаточно располагать необходимой информацией о предмете своей деятельности. В этом случае говорят, что человек создает информационную модель объекта, процесса или явления. Информационные модели обычно представляют собой запись информации с помощью подходящего языка [23].

Некоторые авторы считают, что общей особенностью информационных моделей является относительно несложные, главным образом, логического характера алгоритмы (поиск, выборка, сортировка и т.п.), которые осуществляются над очень большими по объему массивами данных (ИПС, БД, АСУ) и [8]. По их мнению, различие между математическими моделями и информационными определяется соотношением данных и алгоритмов. Если данных больше и они важнее алгоритмов, имеем информационную модель, иначе – математическую. Пример информационной модели библиотеки – ее каталог (база данных). Для описания движения тела необходима математическая модель [19].

По данному поводу можно сказать, что база данных и математическая модель движения тела отличаются принципиально, и не только тем какие операции с ними можно производить. Математическая модель в некоторых случаях может иметь точное аналитическое решение, получение которого не требует численных методов и программной реализации. Во многих случаях проводится качественный анализ математических моделей исключительно аналитическими методами.

В некоторых работах выделяется структура информационной модели, которая включает параметры, связи между параметрами и упрощающие предположения. По мнению авторов именно акцент на первоочередное выделение существенной информации определяет правомерность применения термина «информационная модель». Первым структурным элементом выступают упрощающие предположения, которые позволяют из всего многообразия информации об изучаемом объекте выделить существенную информацию, определить, что будет служить параметрами и каковы связи между этими параметрами. Информационные модели относят к классу знаковых структурированных моделей. Именно эти признаки выделяют информационные модели из множества других[21].

По этому поводу следует задать вопрос: а существуют ли другие модели, которые не учитывают связи, не содержат упрощающих допущений и т.п.?

Кроме того, по данному вопросу Могилев А.В. и Е.К. Хеннер [36] справедливо отмечают, что «Имеет место тенденция к **максимальному обобщению** понятия «информационная модель». Она проявляется при построении учебных курсов информатики. Следует различать традиционное математическое моделирование без какой-либо привязки к техническим средствам информатики; вербальные языковые модели; информационные модели, имеющие приложения в информационных системах и информационные (компьютерные) технологии». С этими утверждениями можно только согласиться.

А.Я. Фридланд вводит новый термин «**информатические модели**» [46]. Данный термин, по его мнению, в определенном смысле заменяет термин «информационные модели» и определяет моделирование, языком которого является наука информатика. Это язык работы с данными. «Информатические модели» описывают процессы приема, передачи, обработки информации. Таким образом, «информатические модели» – знаковые модели, описывающие процессы обработки данных. А.Я. Фридланд выделяет следующие виды информатических моделей: модели форм произведений искусства; описательные модели в цифровом виде; математические модели, доведенные до алгоритма; модели управления процессами; базы данных; системы искусственного интеллекта; модели визуализации.

Из рассмотренного материала можно сделать простой вывод. Действительно, понятие «информационная модель» находится в стадии становления вследствие достаточно быстрого развития информатики. Его конкретное наполнение (на концептуальном уровне) разрабатывается в рамках построения современных учебных курсов по информатике. Таким образом, в настоящее время имеется множество разнообразных подходов к понятию «информационная модель», отличающихся как степенью обобщения, так и рядом принципиальных признаков. Следствием этого обстоятельства и является различие в составе класса информационных моделей.

Дополнительные сведения о информационном моделировании имеются в монографиях: [8-10], [18-19], [21-23], [26-28], [31], [36-37], [39], [42], [44-47].

3.7. Контрольные вопросы к главе 3

1. В чем суть критериального подхода при решении задач оптимизации.
2. Какие составляющие включает модель оптимизации в рамках критериального подхода.
3. Что такое многокритериальная оптимизация.
4. В чем состоит суть метода уступок.
5. Как строится интегральный критерий оптимизации.
6. Какие существуют способы построения моделей трехмерных объектов.
7. Почему современное компьютерное геометрическое моделирование называется параметрическим.
8. Какое назначение имеет дерево построения трехмерной модели.
9. Поясните суть термина «трехмерная твердотельная модель».
10. В чём состоит особенность геоинформационного моделирования?
11. В чем состоит особенность табличных моделей.
12. Какие существуют виды табличных моделей.
13. Каково назначение структурных моделей.
14. Какова принципиальна разница между геометрическими и структурными моделями.
15. Какова принципиальна разница между геометрическими и графическими моделями.
16. Каковы особенности класса информационных моделей.

Глава IV. Моделирование систем

4.1. Моделирование сложных систем

Одной из проблем современных технических, социальных и естественных наук является разработка и внедрение в практику методов моделирования **сложных систем**. Как отмечал еще академик Н.Н.Моисеев «Сложность изучаемых и проектируемых систем приводит к необходимости создания специальной, качественно новой техники исследования».

Сложными системами обычно считают крупные технологические, производственные, энергетические, коммуникационные комплексы, системы управления, социальные, экономические, экологические системы и т.п. Естественно, что сложные системы могут быть искусственного или естественного происхождения.

Сложные системы характеризуются **большим количеством элементов** и **связей**, разнообразием взаимодействий между системой и окружающей средой, наличием **случайных факторов** внутренней и внешней природы, возможностью случайного изменения структуры. Обычно выделяют **структурную** и **поведенческую** сложность моделируемых объектов.

Для систем сложного поведения характерно нескольких качественно различных, последовательно сменяющих друг друга во времени, режимов функционирования. Подобная сложная динамическая система в каждый конкретный момент времени ведет себя как некоторая относительно простая динамическая система. Однако при определенных условиях режим функционирования системы скачкообразно меняется. Например, бассейн с двумя трубами обладает сложным поведением, поскольку его поведение при переполнении качественно отличается от его поведения при нормальном уровне воды или при опорожнении.

Дать полный перечень всех функций моделей сложных систем затруднительно. Рассмотрим наиболее распространенные:

1. Модели сложных систем помогают упорядочить представления о свойствах этих систем. Такие модели используются, например, в социальных науках. А в технике такие модели служат в качестве средства для создания новых более совершенных систем.
2. Модели сложных систем часто применяются как средство обучения лиц, которые должны уметь справляться со всевозможными случайностями до возникновения критической ситуации (модели космических кораблей, тренажеры для обучения водителей, операторов АЭС и др.).
3. Одним из важных применений моделей сложных систем является прогнозирование поведения моделируемых объектов и диагностика их состояния.
4. Модели сложных систем позволяют производить контролируемые эксперименты в ситуациях, где экспериментирование на реальных объектах экономически нецелесообразно, опасно или практически невозможно.

Естественно, что при исследовании сложной системы, содержащей большое количество элементов, невозможно и не имеет смысла детально моделировать процессы в каждом элементе. Если строить детальное описание элементов, то модель сложной системы вряд ли удастся исследовать с необходимой полнотой даже средствами современной вычислительной техники. С общесистемной точки зрения представляет интерес только те **свойства элементов**, которые непосредственно влияют на **свойства системы в целом.**

Таким образом, в силу сложности системы модели элементов должны быть просты в реализации средствами вычислительной техники. Поэтому модели сложных систем строятся на основе моделей элементов типа «**черный ящик**». Такие модели отражают только зависимость между реакцией элемента, внешними воздействиями и влиянием окружающей среды, но не отражают процессы внутри элемента системы (рис. 4.1). Название модели подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании «ящика». Вектор внешних воздействий $\vec{X}(t)$ в данном случае включает в себя и действие на объект других элементов системы. Такая модель (зависимости F_1 и F_2) может быть построена на основании данных наблюдений и экспериментов исключительно формальными методами, например, на основе регрессионного анализа (см. п. 4.5).

Преимущества таких моделей состоит не только в простоте их реализации, но и в возможности построения моделей элементов, даже в том случае, если законы протекающих в них процессов не исследованы теоретически, но поведение элементов может быть изучено в ходе натурных испытаний. Таким образом, модели элементов типа «черный ящик» обеспечивает возможность создания модели сложной системы, с которой можно производить компьютерный эксперимент.

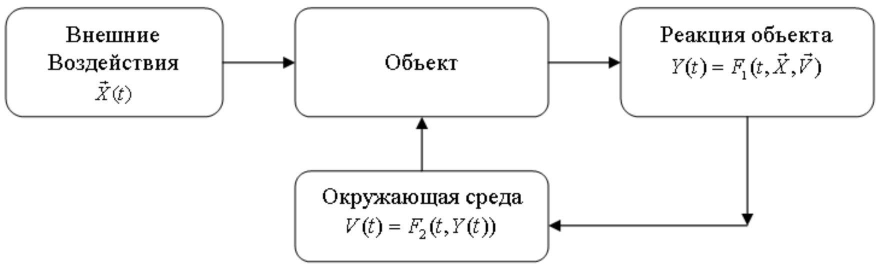


Рис. 4.1. Структура модели элемента типа «черный ящик».

Для сложных систем определяющую роль играет моделирование **структуры системы**, взаимодействия между ее частями и взаимодействия с окружающей средой. Таким образом, при моделировании сложных систем возникает задача анализа функционирования системы в целом. При этом «физическая» сущность процессов, протекающих в системе, отодвигается на второй план. Малосущественно, идет ли речь о машиностроительном предприятии, химическом реакторе, телефонной сети, информационной системе или рынке. Поэтому изучение комплексных проблем сложных систем выделилось в самостоятельное научно-техническое направление, названное **системотехникой**.

Любая модель является абстрактным, формально построенным объектом. Ясно, что модель функционирования сложной системы в состоянии охватить только основные, характерные закономерности, естественно, оставляя в стороне несущественные второстепенные факторы. Построение модели системы начинается с изучения ее структуры и протекающих в ней процессов. В результате этого появляется **содержательное описание** системы. Содержательное описание - это первая попытка четко описать закономерности, характерные для исследуемой системы и поставить задачу моделирования. На этапе содержательного описания выявляются подсистемы, которые входят в систему, определяются структурные взаимосвязи. Определяется то, что будет считаться окружающей средой.

Собственно построение модели сложной системы начинается с разработки **структурно-функциональной модели** (схемы). В этой схеме отображаются подсистемы и элементы системы, связи между ними и т.д.

Модель сложной системы строится по **иерархическому принципу** на основе моделей подсистем, входящих в состав системы, моделей элементов системы, моделирования связей между подсистемами, между элементами, моделирования взаимодействия с окружающей средой (рис. 4.2).

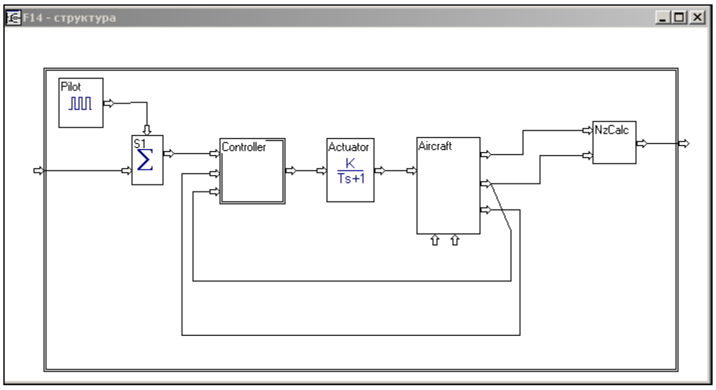


Рис.4.2. Модель системы управления, построенная по иерархическому принципу. Каждый блок – отдельная подсистема.

Первоначально в схеме отображаются только связи и сами элементы. Далее производится «наполнение» элементов законами их функционирования, задаются формальные соотношения, характеризующие взаимодействия элементов в системе и т.п.

Среди задач исследования сложных систем можно выделить задачи анализа, связанные с изучением свойств и поведения системы в зависимости от ее структуры и значений параметров, задачи синтеза, сводящиеся к выбору структуры системы и значений параметров исходя из желаемых свойств системы в целом. Одной из задач является исследование способов управления сложной системой, которая может быть решена исключительно средствами моделирования.

Итак, характерными признаками сложной системы является наличие большого количества взаимодействующих элементов; сложность функций, выполняемых системой; возможность разбиения системы на подсистемы; наличие управления и взаимодействия с окружающей средой; функционирование в условиях воздействия случайных факторов (рис.4.3).

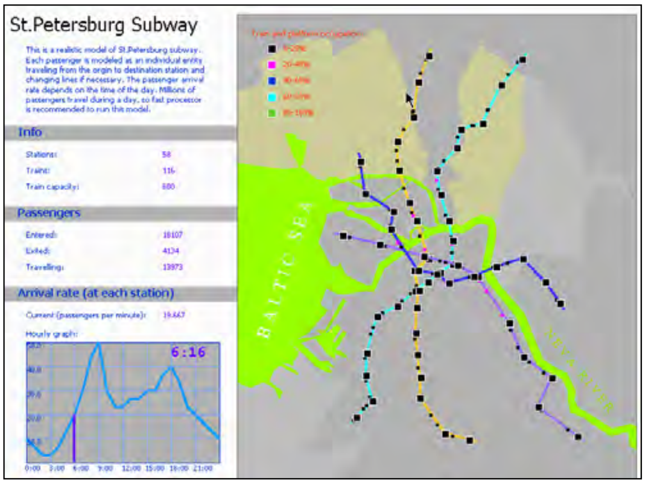


Рис. 4.3. Пример сложной системы – метрополитен Санкт-Петербурга.

Модельное исследование сложных динамических систем может быть выполнено на основе современных пакетов **визуального моделирования** (рис.4.4). Такие пакеты на сегодняшний день являются одним из основных инструментов быстрого построения и исследования моделей в инженерной и научной практике.

Пакеты визуального моделирования позволяют вводить описание моделируемой системы в естественной для прикладных наук форме. Имеется возможность в буквальном смысле рисовать функциональную схему, размещать на ней блоки и соединять их связями. Примеры инструментальных систем визуального моделирования были нами рассмотрены ранее в разделе 1.4.

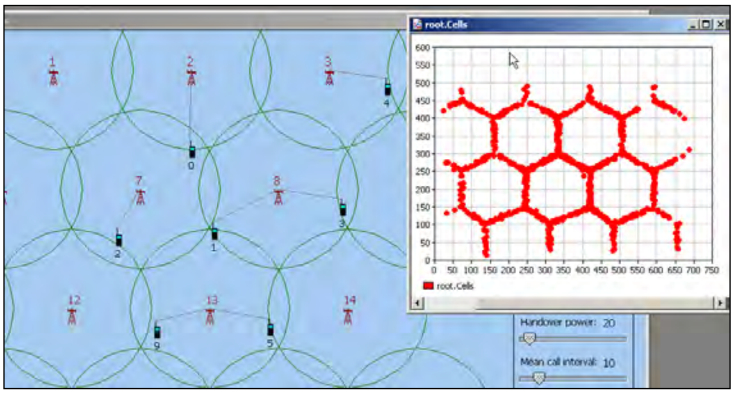


Рис.4.4. AnyLogyc - модель сотовой телекоммуникационной системы.

Современные универсальные пакеты визуального моделирования позволяют строить из блоков иерархические функциональные схемы, предоставляют пользователю библиотеки численных методов, средства визуализации поведения, поддерживают технологию объектно-ориентированного моделирования. Пакеты визуального моделирования позволяют, не заботится о программной реализации модели, они предоставляют компьютерную среду, в которой можно создавать виртуальные, параллельно функционирующие системы и проводить эксперименты с ними. Графическая среда позволяет создать «испытательный стенд», где вместо реальных измерительных приборов пользователь будет иметь дело с их образами на экране монитора (рис.4.5). Результаты эксперимента с моделью предоставляются в виде графиков, гистограмм, схем, с применением анимации и т.д.

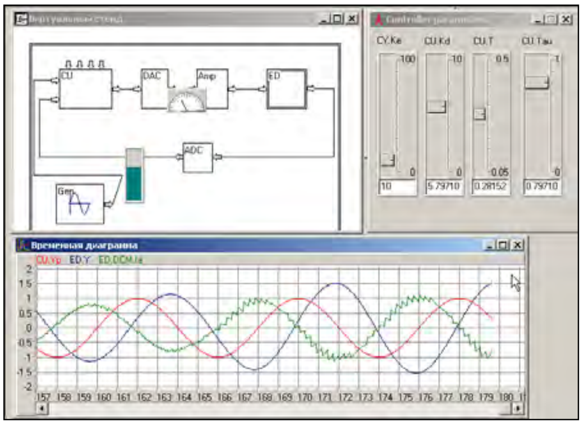


Рис. 4.5. Виртуальный стенд моделирования в среде пакета MVS.

Однако при моделировании на основе универсальных пакетов наиболее критичным параметром модели чаще всего является ее производительность. Последнее обстоятельство привело к появлению чрезвычайно большого количества различных специализированных моделирующих средств и языков, ориентированных на конкретные области применения.

Вопросы моделирования сложных систем широко представлены в научной литературе. Примером могут служить монографии: [4], [6], [9], [13-14], [24], [30], [43], [54-55], [64], [79], [91].

4.2. Имитационное моделирование

Имитация (simulation), симуляция и моделирование являются словами-синонимами. Имитация тесно связана с моделированием функционирования сложных систем. Как известно, система есть совокупность объектов, объединенных какой-либо формой регулярного взаимодействия с целью выполнения определенных функций. Примерами систем, которые исследуются методами имитационного моделирования, могут быть промышленное предприятие, транспортная сеть, больница, человек и машина, которой он управляет. Например, при полете космического корабля «Апполон-13» имитационное моделирование было применено для анализа чрезвычайных мер до того, как были даны команды на их осуществление. Эти меры дали возможность космонавтам благополучно вернуться на Землю после аварии на борту корабля и частичного выхода из строя важных энергетических систем.

Сам термин «**имитационное моделирование**» означает, что мы имеем дело с моделями систем такой степени сложности, что предсказание их поведения принципиально возможно только в ходе **компьютерного модельного эксперимента**, т.е. в ходе компьютерной имитации поведения системы на определенном промежутке времени.

Исторически первым сложился аналитический подход к исследованию систем. Однако аналитическое исследование процессов функционирования сложных систем, содержащих сотни или тысячи элементов, сталкивается со значительными трудностями, преодоление которых в принципе невозможно.

Имитационные модели являются более универсальными и могут быть построены и при **отсутствии математической модели оригинала**. В свое время С.Уолфрем высказал гипотезу, согласно которой для многих сложных систем не существует простого (математического) описания, их анализ возможен только путем вычислительного компьютерного эксперимента.

Идея имитационного моделирования очень проста. В имитационной модели поведение элементов сложной системы может быть задано в форме алгоритма его функционирования, т.е. в виде **алгоритмической модели**, которая реализуется компьютерной программой. Такое описание поведения элементов системы в ряде случаев является наиболее простым, естественным и единственно возможным.

Например, В.Н.Глушков предложил использовать методы имитационного моделирования для систем, характеризующихся так называемыми **качественными параметрами.** Подобные параметры измеряются в шкале **наименований** и способны принимать дискретное множество значений. При этом не исключается возможность, что ряд параметров может принимать обычные числовые значения, непрерывные или дискретные. Такой подход применим при моделировании плохо формализуемых систем, например, в медицине, позволяет получить информацию о поведении системы в шкале качественных параметров и прогнозировать развитие событий.

Помимо сложности, характерной особенностью многих систем является воздействие различного рода внешних или внутренних **случайных факторов**. Исследование влияния случайных факторов на поведение системы связано с проведением множества компьютерных экспериментов (**стохастическое моделирование**) с целью получения статистических данных, на основе которых делается вывод о законах распределения параметров системы как случайных величин (см. п.4.3).

Естественно, что подобная информация другими способами кроме компьютерного имитационного эксперимента не может быть получена. Действительно, экстремальную оценку влияния случайных факторов можно получить по принципу «наихудшего или наилучшего случая». При этом предполагается, что все случайные величины одновременно получили максимально возможные отклонениями в какую-либо сторону. Однако по законам теории вероятности такие события имеют ничтожно малую вероятность, т.е. практически невозможны. Если делать выводы на основе подобного предположения, то результаты дадут весьма затратное, неэффективное или практически неосуществимое решение.

Имитационное моделирование позволяет достаточно просто учитывать такие факторы как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов, запаздывание и т.д. Взаимодействие элементов сложной системы характерно тем, что оно может происходить дискретно в определенные моменты времени, которые либо заданы, либо определяются выполнением каких-то условий, либо являются следствием определенных случайных событий. Таким образом, имитируемые процессы в сложных системах могут протекать параллельно, взаимодействуя только в определенные моменты времени. Подобные системы образуют особый класс систем, называемый гибридными.

Другой особенностью имитационного моделирования является возможность его использования даже **при слабой изученности процессов**, протекающих в элементах системы. При попытке построения математической модели подобных процессов обнаруживается, что не все параметры уравнений известны, не все зависимости могут быть представлены в виде конкретных соотношений, механизмы протекания ряда процессов слабо изучены или модель процесса получается настолько сложной, что только для ее реализации необходимы существенные затраты времени и других ресурсов. Однако поведение элементов системы хорошо изучено по результатам их натурных испытаний или специальных экспериментов. В этом случае возможно построение моделей элементов чисто формальными методами регрессионного анализа по принципу «черный ящик». Об этом виде моделей уже говорилось в предыдущем разделе. Способы их построения описаны в разделе 4.5.

Большинство имитационных моделей и представляют собой совокупность моделей подобного типа. Это означает, что описание элементов системы представлено в виде формальных функциональных зависимостей между входными и выходными параметрами. Подобные модели обеспечивают выдачу выходного сигнала, если на ее воздействует входной сигнал. Поэтому для получения результатов необходимо осуществлять компьютерный «прогон» имитационных моделей.

Ранее мы уже отмечали эту проблемы моделирования сложных систем: применение моделей типа «черный ящик» связано еще и с тем, что в силу ограниченности возможностей исследования моделей сложных систем, содержащих сотни и тысячи элементов (даже исследований с использованием современных компьютеров), ученые и инженеры вынуждены упрощать описания (модели) элементов системы. Только таким образом можно создать модель сложной системы, пригодную для проведения компьютерного эксперимента, позволяющую получить какую либо информацию о поведении системы в ограниченные сроки.

Следует еще раз отметить, что имитационное моделирование зародилось и широко применяется в ходе разработок сложных систем современной техники и исследований по конкретным техническим проектам. В этом случае, с учетом жесткой производственной дисциплины, **результаты моделирования должны быть получены не позднее установленного срока**. Этот временной фактор является весьма серьезным ограничением для всего процесса разработки модели и ее исследования.

Таким образом, при имитационном моделировании сложных систем строится модель, в первую очередь, адекватно отражающая внутреннюю структуру системы, связи между элементами системы, их взаимодействие, динамику изменения состояния каждого элемента и всей системы в целом.

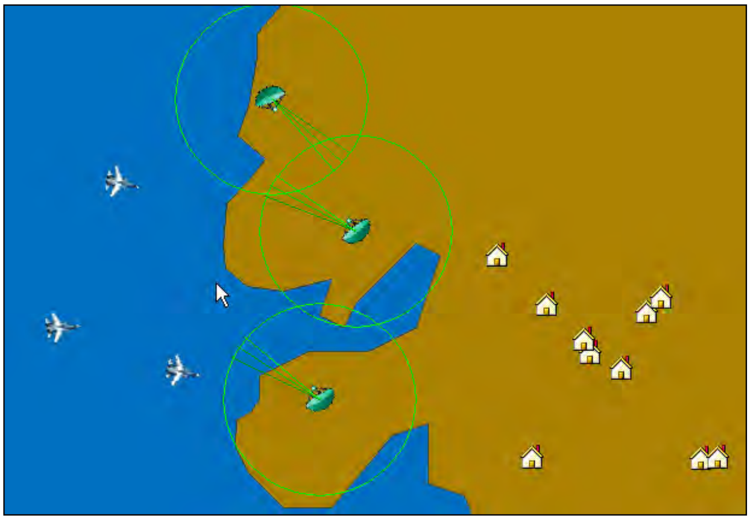


Рис.4.6. Пример имитационной модели - имитационная модель системы ПВО.

Имитационные модели не способны формировать решение в том виде, в каком это имеет место в аналитических моделях, а могут лишь служить в качестве средства для анализа поведения системы в условиях, которые определяются экспериментатором (рис.4.6).

Возникает естественный вопрос, в каких случаях имитационное моделирование особенно актуально. Мы определяем имитационное моделирование как экспериментирование с компьютерной моделью в отличие от экспериментирования с реальной системой. Натурные эксперименты иногда затруднены, поскольку:

1. Натурные эксперименты могут нарушить установленный порядок или привести к необратимым последствиям.
2. Если составной частью системы являются люди, то на результаты экспериментов может повлиять изменение поведения людей, если им известно, что за ними наблюдают.
3. Поддержание одних и тех же условий при каждом повторении эксперимента сложно или невозможно.
4. Эксперименты с реальными системами не позволяют провести исследование множества альтернативных вариантов.

Дополнительным преимуществом имитационного моделирования можно считать широчайшие возможности его применения в сфере образования и профессиональной подготовки. Разработка и использование имитационной модели позволяет экспериментатору «разыгрывать» на модели разнообразные ситуации. Это, в свою очередь, должно в значительной мере помочь ему понять и прочувствовать проблему, что стимулирует процесс поиска новых идей и решений.

Когда спеиалист, экспериментируя с имитационной моделью, достигает подлинного понимания проблемы и начинает свободно управлять ей, он обретает способность видеть содержание своей работы с иных точек зрения. Он захочет проиграть на модели множество альтернативных вариантов, чтобы проверить правильность своих представлений и оценить открывшиеся новые возможности. По сути дела, он использует модель для повышения мастерства управления, позволяющего ему на новом уровне четко установить все существенные последствия вносимых в систему изменений. Возможно, он мог бы проделать это и на реальной системе, но вследствие ее сложности это было бы очень дорого и сопряжено с ошибками. Вот почему он обращается к модели как к средству оценки своих новых интуитивных предположений и умозаключений.

Однако кажущаяся простота идеи имитационного моделирования порождает ряд проблем:

1. Разработка хорошей имитационной модели часто обходится дорого и требует много времени и высококвалифицированных специалистов.
2. Может оказаться, что имитационная модель не отражает реальное положение вещей с требуемой степенью адекватности.

Имитация представляет собой крайнее средство для решения задачи. Несомненно, что в том случае, когда задача может быть сведена к более простой модели, нет никакой нужды в имитации.

Существует несколько способов построения моделирующих имитационных алгоритмов. Одним из них является **принцип Δt** – принцип повременного моделирования. Суть его состоит в том, что состояние системы анализируется через постоянные промежутки времени Δt. Состояние системы в момент времени $t+\Delta t$ определяется на основе состояний системы в предыдущие моменты времени. Таким образом, в соответствие с принципом Δt, состояние всех элементов системы изменяется на интервале времени Δt независимо друг от друга. По истечении шага, который равен Δt, объекты обмениваются информацией друг с другом о своих состояниях, которые являются входной информацией для следующего шага. Следовательно, все объекты влияют друг на друга только в отдельных временных точках - на границе шага. Данный принцип является наиболее универсальным принципом построения алгоритмов моделирования широкого класса непрерывных и дискретных систем. При моделировании по принципу Δt процесс функционирования сложной системы рассматривается как последовательность состояний: $Z_1(t_1), Z_2(t_2),\ldots,Z_n(t_n)$.

Для увеличения точности моделирования необходимо уменьшение Δt. Чаще всего размер шага неизменен. Поэтому возможно, что на отдельных интервалах состояние системы не меняется, а время на вычисления затрачивается. Этот недостаток проявляется в динамических системах, с отличающимся на порядок значением параметров инерционности у различных элементов.

Если в системе можно выделить два типа состояний: обычные состояния, в которых система находится почти все время; особые состояния, связанные с поступлением в систему входных сигналов или выходом одной из характеристик системы на границу существования и т.д. Особые состояния характерны тем, что свойства системы в эти моменты времени изменяются скачком. Изменение состояния системы в другие моменты времени происходит плавно и непрерывно. Как правило, свойства таких систем оцениваются по информации об особых состояниях. Например, в простейшей системе массового обслуживания (подробнее о моделировании СМО см. п.4.7) особые состояния появляются в моменты поступления новых заявок на обслуживание или в моменты освобождения канала обслуживания.

Очевидно, что для описания подобных систем должны быть построены алгоритмы по специальному принципу (**принцип особых состояний**). Он отличается от принципа Δt тем, что включает в себя процедуру определения момента времени наступления особого состояния, по известным характеристикам данного или предыдущих состояний системы.

Таким образом, по принципу особых состояний расчет состояния системы осуществляется только в те моменты, когда в ней происходит переход из одного состояния в другое. Это существенно экономит время вычислений, но усложняет систему управления расчетом, да и сами модели. В общем случае события, порождающие особые состояния, могут быть зависимыми.

При моделировании процессов обработки заявок в системах массового обслуживания иногда удобно строить моделирующие алгоритмы с последовательным воспроизведением истории отдельных заявок в порядке поступления их в систему. Алгоритм обращается к сведениям о других заявках лишь в том случае, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем обслуживании данной заявки. Такой принцип называется принципом **последовательной проводки заявок.** В рамках данного принципа один элемент входного сигнала проводится через все блоки системы до ее выхода. Потом проводится следующий элемент и так далее. Реализация подобных моделей затруднена за счет необходимости непрерывного отслеживания памяти системы.

В настоящее время получил развитие принцип **объектно-ориентированного моделирования**, согласно которому элементы модели - объекты, существующие в некоторой среде, могут обмениваться друг с другом сообщениями. Среда при этом должна выполнять функцию их интерфейса. Каждый элемент имеет имя и посылает сообщения другим объектам. Объекты могут «спать» до момента, пока кто-либо их не «разбудит» их сообщением. На одном такте объекты могут обменяться сообщениями сколько угодно раз, поэтому проблемы задержки также не существует. Подобный подход реализуется, например, при моделировании многоагентных систем. Это децентрализованные системы, динамика, функционирования которых определяется не глобальными правилами, а наоборот, поведение таких систем есть результат индивидуальной активности членов группы (агентов). Цель моделирования подобных систем – получить представление о законах поведения многоагентной системы исходя из информации об индивидуальном поведении агента и его взаимодействиях.

Имитационные модели обычно имеют очень сложную логическую структуру, характеризующуюся множеством взаимосвязей между элементами системы, причем многие из этих взаимосвязей претерпевают в ходе выполнения программы динамические изменения. Эта ситуация, в силу ряда особенностей имитационного моделирования, побудила разработать специальные языки и инструментальные системы имитационного моделирования. Известны десятки подобных систем и языков моделирования.

В настоящее время наиболее широко используются три группы инструментальных систем: системы имитационного моделирования непрерывных динамических процессов, системы моделирования дискретных процессов и универсальные системы имитационного моделирования.

Системы имитационного моделирования непрерывных процессов предназначены для моделирования динамических объектов с непрерывным изменением состояния. Как правило, такие объекты описываются системами дифференциальных уравнений с детерминированными или стохастическими параметрами. Классическим примером систем моделирования данного типа является система DYNAMO, разработанная Дж. Форрестором. Язык данной системы был успешно применен для моделирования развития как мировой экономики, так и ряда крупных государств.

Широко известной системой имитационного моделирования дискретных процессов является система GPSS (General Purpose Simulation System), которая появилась еще в 1961 году. Основное ее назначение – моделирование систем массового обслуживания или им подобных.

Главными понятиями языка этой системы являются: транзакт, блок, оператор. Транзакт – это динамический объект, под которым может подразумеваться клиент (в обычном смысле этого слова), требование, вызов или заявка на обслуживание. Транзакты могут создаваться, уничтожаться, задерживаться, сливаться, накапливаться и т.д. Блок представляет собой некоторый самостоятельный элемент моделируемой системы. Каждый блок реализует одну или несколько операций над транзактом или параметрами транзактов. Совокупность блоков составляет моделирующую программу. В целом программа имеет блочную структуру и может применяться для структурно-функционального моделирования не очень сложных систем.

Не смотря на ряд достоинств, система GPSS мало пригодна для моделирования сложных иерархических объектов с большим количеством связей. Подобные системы лучше описываются сетевыми моделями.

Особое место среди языков имитационного моделирования занимает язык СИМУЛА-67. В нем впервые нашла практическое воплощение концепция объектно-ориентированного программирования. В рамках данного языка действия, выполняемые объектом, задаются с помощью операторов, описывающих сценарий функционирования объекта. Во время работы программы, составленной на языке СИМУЛА, могут существовать несколько объектов, находящихся на разных стадиях исполнения своего сценария функционирования. При этом управляющая программа передает управление от одного объекта к другому. Исключительность СИМУЛА является то, что этот язык позволяет создать другие языки имитационного моделирования любого типа.

Одной из современных универсальных систем имитационного моделирования является система AnyLogic — профессиональный инструмент имитационного моделирования нового поколения. В AnyLogic поддерживаются все существующие подходы дискретно-событийного и непрерывного моделирования: блок-схемы процессов, системная динамика, агентное моделирование, карты состояний, системы уравнений и т.д. AnyLogic позволяет сроить как стохастические, так и детерминированные модели и проводить анализ результатов моделирования.

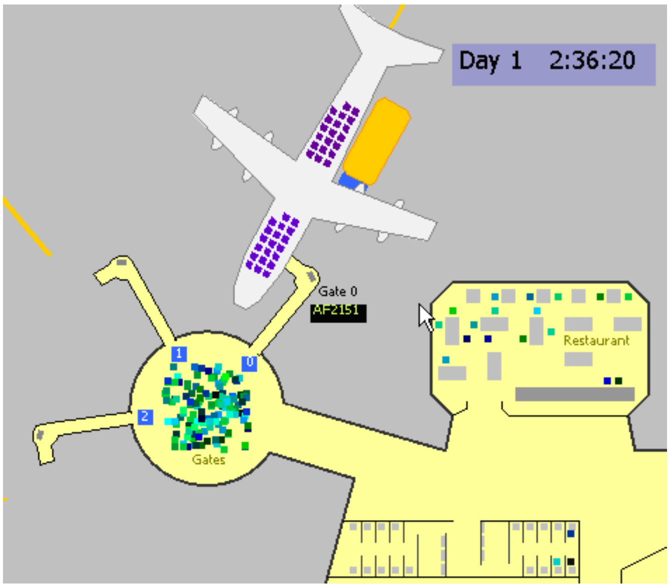


Рис. 4.7. Имитация движения потока пассажиров в аэропорту.

Подводя итог данному разделу, отметим еще раз, что имитационное моделирование зародилось и стало актуальным вследствие необходимости исследования сложных систем, имеющих важное практическое значение, которые проанализировать обычными способами в заданные сроки, кроме компьютерного эксперимента, в принципе, не представляется возможным.

Имитационное моделирование позволяет экспериментально исследовать сложные внутренние взаимодействия в рассматриваемой системе, позволяет изучать воздействие на функционирование системы различного рода факторов, в том числе и случайных, и проследить их влияние (рис. 4.7). Детальные компьютерные эксперименты с имитационной моделью системы позволяют лучше понять законы ее функционирования и разработать предложения по ее улучшению, которые были бы невозможны без имитации.

Имитация сложных систем дает представление о наиболее существенных факторах, определяющих ее свойства. Имитация позволяет исследовать новые ситуации, которые ранее были неизвестны, и провести предварительную проверку различных стратегий в принятии решений перед проведением экспериментов на реальной системе. Имитация позволяет экспериментально исследовать сложные внутренние взаимодействия в системе, будь то отрасль, отдельная фирма или экономика в целом.

Имитационное моделирование является чрезвычайно ценным и полезным методом решения сложных задач, однако, это не панацея для решения всех проблем моделирования.

Вопросам имитационного моделирования посвящены монографии [4], [6], [13-14], [43], [54-55], [75], [86], [104], [113-114].

4.3. Модели на основе клеточных автоматов

Модели на основе **клеточных автоматов** – это яркий пример имитационного моделирования. Действительно, модели данного вида представляют собой алгоритм функционирования системы, который не имеет аналога в виде математической модели. Динамика изменения состояния автомата может быть исследована только путем модельного эксперимента. Заранее предсказать какие-либо закономерности развития невозможно. Еще в 1970 году А.Н. Колмогоровым давался прогноз, что «С развитием современной вычислительной техники будет во многих случаях разумно изучение реальных явлений вести, исключая промежуточный этап их стилизации в духе математики бесконечного и непрерывного, переходя прямо к дискретным моделям».

История развития нового направления моделирования начата математиками с изучения необычной абстрактной конструкции – клеточный автомат, который был реализован в форме игры «Жизнь», предложенной математиком Джоном Конвеем в 1970 году. Название связано с тем, что игра имитирует рост, распад и различные изменения в популяции живых организмов, которые происходят по определенным правилам.

Клеточным автоматом называется сеть из дискретных элементов (клеток), меняющих свое состояние в дискретные моменты времени. Чаще всего рассматриваются двумерные клеточные автоматы, элементами которых являются квадратные клетки. Впрочем, форма клеток может быть иной: треугольник, шестиугольник и т.п.

Каждая клетка может находиться в конечном числе состояний. Время в данной модели является дискретным множеством тактов. Состояние каждой клетки автомата в следующий момент времени определяется ее собственным состоянием и состоянием ближайших соседей в предыдущий момент времени. Среда предполагается однородной, т.е. правила изменения состояний для всех клеток одинаковы. Если это правило зависит от случайных факторов, то автомат называется **стохастическим**, в противном случае **детерминированным**.

Оказалось, что мир подобных систем необычайно богат, и с их помощью целесообразно моделировать такие сложные процессы как самоорганизация, морфогенез, турбулентность и даже социальные процессы. Кроме того, результаты моделирования на основе клеточных автоматов имеют простую наглядную графическую форму отображения.

Возникающие в процессе игры «Жизнь» ситуации очень похожи на реальные процессы, происходящие при зарождении, развитии и гибели колоний (популяций) живых организмов. По этой причине «Жизнь» можно отнести к категории моделирующих игр, которые в той или иной степени имитируют процессы, происходящие в реальной жизни.

Для игры «Жизнь», если не пользоваться компьютером, понадобятся большая (строго говоря, бесконечная) доска, разбитая на клетки, и много фишек двух цветов. Основная идея игры состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения фишек (организмов, особей), расставленных по различным клеткам доски, проследить за эволюцией исходной позиции под действием «**генетических законов**» Конвея, которые управляют рождением, гибелью и выживанием фишек.

Генетические законы эволюции клеток таковы, что не существует ни одной исходной конфигурации, для которой возможен неограниченный рост популяции. Начальные конфигурации, которые в течение определенного промежутка времени претерпевают разнообразные изменения, могут закончить свою эволюцию одним из трех способов:

- полностью исчезают из-за перенаселенности или разреженности жизненного пространства, т.е. популяция вырождается;
- переходят в устойчивую конфигурацию — эволюция вышла на стационарный режим;
- выходят на колебательный режим, при котором совершают некий бесконечный цикл превращений с определенным периодом.

Прежде чем сформулировать законы жизни популяции, обратим внимание на то, что каждую клетку окружают восемь соседних клеток: четыре имеют с ней общие стороны, а четыре другие — общие вершины. Множество соседних клеток называется окрестностью. В игре «Жизнь» окрестность клетки – это восемь соседних клеток (окрестность Мура). Генетические законы (правила игры) состоят в следующем:

Правило выживания. Каждая клетка, у которой имеются две или три соседних, выживает и переходит в следующее поколение.

Правило рождения. Если число клеток, с которыми граничит какая-либо пустая клетка, равно трем, то на ней происходит рождение нового организма.

Правило гибели. Каждая клетка, у которой оказывается более трех соседних, погибает от перенаселения. Каждая клетка, вокруг которой свободны все клетки или занята только одна, погибает от одиночества.

Гибель и рождение всех организмов происходит одновременно. Выжившие и вновь рожденные организмы образуют одно поколение эволюции. Как показал многолетний опыт, различные начальные конфигурации порождают ряд типовых периодических или стационарных структур. Примеры клеточных структур представлены на рис. 4.8.

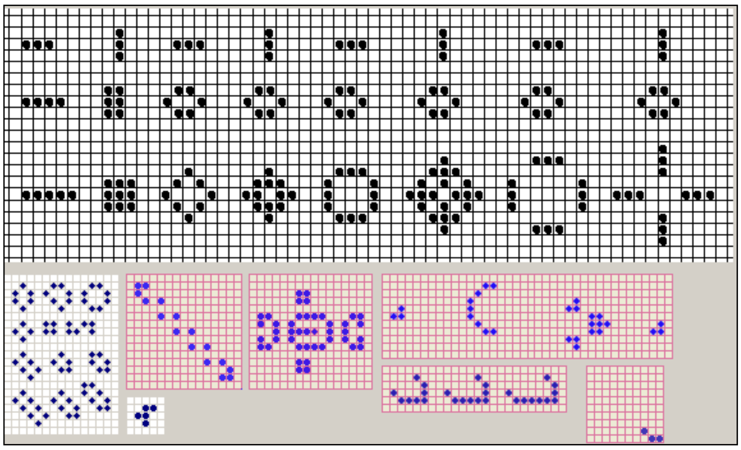


Рис. 4.8. Примеры структур, порождаемых клеточным автоматом «Жизнь».

Эволюция состояний клеточных автоматов во многом аналогична динамике сложных нелинейных систем. Выделяют четыре основных класса клеточных автоматов:

1. Независимо от начального состояния клеточный автомат за определенное число шагов переходит в состояние покоя.

2. В процессе эволюции автомат приходит к локализованным стационарным или периодическим решениям.
3. Автомат генерирует апериодические неповторяющиеся структуры, демонстрирует хаотическое поведение.
4. Динамика поведения автомата существенно зависит от начального состояния, изменяя которое можно получить самые разнообразные конфигурации и типы поведения. К этому типу принадлежит игра «Жизнь».

Еще один клеточный автомат - «Ант» изобретен математиком К.Лангтоном. Клеточный автомат в этой игре может иметь два состояния - черное и белое. Игра так же происходит на клеточном поле, все клетки которого в начальный момент имеют белый цвет. «Ант» стартует из центральной клетки в заданном направлении и переходит в соседнюю клетку. Если новая клетка имеет черный цвет, то Ант перекрашивает ее в белый и поворачивает налево на 90°. Если клетка имеет белый цвет, то Ант делает его черным и поворачивает направо на 90° и т.д. Данный весьма простой автомат демонстрирует весьма сложное поведение. Через приблизительно 500 шагов он возвращается в исходную точку, оставив после себя ряд симметричных орнаментов. Примерно после 10000 шагов картина приобретает хаотичный характер. Ант неожиданно начинает строить магистраль, повторяя цикл через 104 шага, он формирует диагональ. Поведение автомата не изменяется, если в начальном положении имеется много черных клеток.

На основе клеточного автомата можно построить ряд моделей социальных процессов. В модели процесса голосования избирателей предполагается, что предпочтение избирателей определяется установками его ближайшего окружения. Будем считать, что индивид в момент времени $t + 1$ принимает решение за кого голосовать (за партию А или за партию В) в соответствии с правилом простого большинства. При этом учитываются взгляды индивида и четырех его ближайших соседей в момент времени t (окрестность фон Неймана). Если из пяти человек трое или более поддерживают партию А, то индивид голосует за партию А. Если большинство составляют сторонники партии В, то индивид и в этом случае разделяет точку зрения большинства. Начальное распределение предпочтений избирателей задается случайным образом.

Эксперименты с этой моделью показали, что партийная борьба приводит к очень сложным конфигурациям, существенно зависящим от исходного распределения предпочтений.

Модель диффузии инноваций строится на основе клеточных автоматов следующим образом. Каждый индивид соответствует одной клетке, которая может находиться в одном из двух состояний: 1 - новинка принята, 0 - новинка пока еще не принята. Вместо цифр для обозначения состояния клетки можно использовать цвет. Если новинка принимается, то состояние клетки остается неизменным до конца.

Автомат решает принять или отвергнуть новинку, опираясь на мнение своих ближайших соседей (окрестность Мура). Пусть в окрестности клетки имеется m сторонников новинки. Генерируется случайное число p – вероятность принятия новинки.

Если $p \cdot m \geq r$, где r - фиксированное пороговое значение, то автомат принимает нововведение, в противном случае новинка отвергается.

Авторы данной модели полагают, что вероятность принятия новинки со временем должна уменьшаться, так как новизна постепенно теряется. Проделанные эксперименты дают хорошее согласование с моделью диффузии инновации, построенной на основе дифференциальных уравнений.

Исследования последних лет показывают, что многие физические и информационные процессы прекрасно и достаточно просто описываются моделями на основе клеточных автоматов. Оказалось, что если поведение клетки связать с датчиком времени, то можно получить новые формы представления процессов, протекающих в живой и неживой природе. Весьма перспективным является направление исследования процессов кооперации и конкуренции с использование для принятия решений моделей теории игр (рис.4.9).

Например, модель конкуренции двух или более товаров может быть построена следующим образом. Пусть каждому товару соответствует свой цвет клетки. Начальное распределение цветов задается случайным образом. Для каждого товара реализуется модель диффузии инновации. Каждый пятый такт можно вмешиваться в ход процесса, добавляя по одному стороннику. На базе этой игры можно выбрать оптимальную маркетинговую стратегию.

Клеточные автоматы моделируют поведение системы, имитируя шаг за шагом ее эволюцию. Многие сложные физические системы не допускают построение моделей традиционными средствами. Единственным способом их исследования и анализа является физический или компьютерный эксперимент. Установлено, что существует система 10 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает некоторую среду, эквивалентную игре «Жизнь».

Моделирование на основе клеточных автоматов интересно еще и потому, что они представляют собой точно решаемые модели, использование которых не требует приближенных численных методов, которые, как известно, вносят свои отрицательные «эффекты» в результаты моделирования, обусловленные собственно методом и конечностью разрядной сетки.

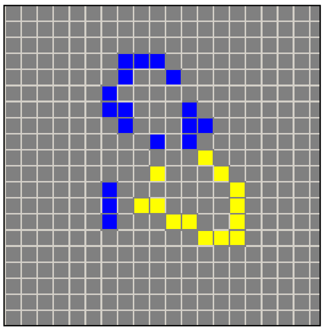


Рис. 4.9. Моделирование взаимодействия двух популяций на основе клеточного автомата.

Подводя итог, можно сказать, что клеточные автоматы дают нам качественно новый тип моделей, которые оказались весьма гибким инструментом для исследования сложных нелинейных процессов в разнообразных системах. Подобные процессы традиционными математическими методами исследовать чрезвычайно сложно, если вообще это возможно. Модели на основе клеточных автоматов нельзя отнести к математическим, они описывают алгоритм функционирования системы в рамках специфической организации модельной системы в виде множества взаимодействующих элементов-клеток. В силу дискретности состояний поведение модели-автомата при компьютерном моделировании имеет наглядное графическое отображение.

Дополнительные сведения о клеточных автоматах можно найти в монографиях [1], [3], [12], [51], [58].

4.4. Моделирование стохастических процессов

Моделирование случайных (стохастических) процессов – это одно из важнейших направлений имитационного моделирования. Само понятие «случайный» является фундаментальным как в математике, так и повседневной жизни. Событие называется **случайным**, если оно достоверно **непредсказуемо**. Случайность играет в нашей жизни и положительную, и отрицательную роль. Например, в ходе эволюции естественный отбор закрепляет положительные свойства живых организмов, которые появились как следствие случайного изменения.

В практике моделирования весьма часто приходится иметь дело с системами, которые в процессе функционирования подвергаются случайным воздействиям окружающей среды или содержат внутренние механизмы, порождающие случайное изменение параметров. Примером могут служить экономические, социальные, экологические, производственные и любые другие системы, в которых значительную роль играет человеческий фактор.

В задаче оптимального размещения ресурсов предполагается, что для всех параметров задачи известны их точные значения. Иными словами все параметры задачи считаются **детерминированными**. Однако на практике точных значений этих параметров просто не существует. Действительно, при выполнении любой работы могут быть **непредсказуемые** перебои с поставками сырья, цены на рынке подвержены колебаниям и т.п. Все эти факторы имеют случайный характер, говорить об их конкретных значениях можно только с определенной **вероятностью**.

Существует несколько точек зрения на природу случайности. Согласно первой точке зрения, случайным нам представляется нечто такое, в чем мы не уловили еще закономерности. Ярким представителем данной точки зрения был Лаплас, который считал, что случайность не присуща самим объектам, а связана только с незнанием, которое в принципе устранимо.

Противоположная точка зрения состоит в том, что случайность является объективным свойством всех явлений. Промежуточная позиция признает существование как вполне детерминированных явлений, так и в принципе случайных, описываемых статистическими закономерностями: законы Менделя, статистические законы физики, химии, термодинамики и т.п.

В последние годы представители школы И. Пригожина развивают подход, согласно которому случайные и детерминированные периоды сменяют друг друга. Детерминированные процессы постепенно сменяются хаотическими, пока случайность не становится причиной перехода системы в одно из возможных новых равновесных состояний.

Говоря о случайных явлениях, прежде всего, обращают внимание на их непредсказуемость, противопоставляя случайность детерминированности, хаотичность упорядоченности. Однако следует подчеркнуть, что случайность – это такой вид неопределенности, которая подчинятся строгой закономерности в виде **распределения вероятности.**

При моделировании случайных процессов значительно изменяется сама методология моделирования - основным методом изучения подобных систем становится **стохастическое моделирование и статистическая обработка** его результатов.

Стохастическое моделирование, один из видов имитационного моделирования**,** представляет собой метод получения статистических данных с помощью компьютера о процессах, происходящих в моделируемой системе, параметры которой изменяются случайным образом с заданным законом распределения. Иными словами сущность метода стохастического моделирования сводится к построению некоего моделирующего алгоритма, имитирующего: функционирование системы, случайные воздействия на систему, случайные изменения параметров системы и случайные изменения начальных условий.

Данный алгоритм **многократно реализуется** с помощью компьютерных программных средств. В результате получается серия частных значений искомых величин, статистическая обработка которых позволит получить информацию о свойствах системы (рис.4.10). Если количество реализаций велико, то полученные результаты с достаточной точностью могут характеризовать процесс функционирования системы. В ходе модельных экспериментов с помощью имитационной модели, прежде всего, воспроизводится влияние случайных факторов, при этом, естественно, для получения статистических данных о свойствах объекта или процесса требуется его многократное воспроизведение в ходе моделирования.

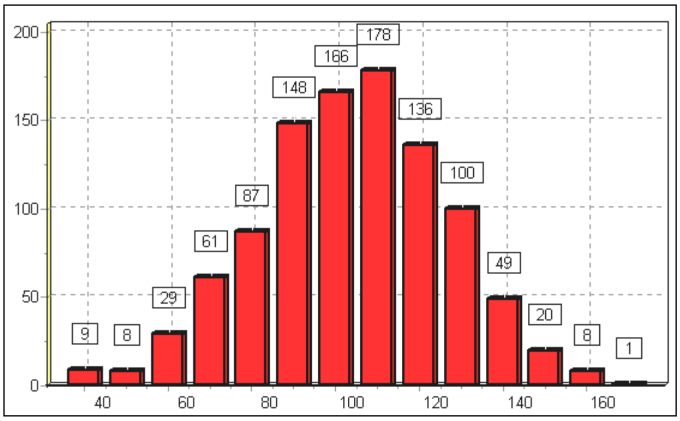


Рис.4.10. Результат моделирования - гистограмма распределения случайной величины.

Например, точно предсказать результат бросания монеты весьма трудно. Однако экспериментально можно легко установить, что с равной вероятностью может выпасть либо один результат, либо другой.

Первоначально подобный метод был разработан и применялся для решения **детерминированных** аналитических задач и получил название метода Монте-Карло. В рамках этого метода, детерминированная вычислительная задача заменяется эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики которой совпадают с результатом решения этой задачи. Естественно, что будет получено приближенное решение, точность которого увеличивается с ростом числа испытаний. Затем подобный метод стал применяться для компьютерной имитации функционирования систем, подверженным случайным воздействиям, т.е. появился метод стохастического моделирования.

Теоретической основой метода стохастического моделирования являются **предельные теоремы теории вероятности**. Множество случайных явлений (событий, величин) подчиняется определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценивать их усредненные характеристики, которые имеют определенную устойчивость. Характерные закономерности проявляются в **распределениях вероятности** случайных величин, образующихся при сложении множества воздействий. Так называемые предельные теоремы и являются выражением этих закономерностей. Совокупность этих теорем теории вероятностей, устанавливающих устойчивость средних показателей, еще называют законом больших чисел:

Теорема Бернулли.

Если проводится N независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие осуществляется с вероятность p, то относительная частота появления данного события m/N при $N \to \infty$ стремится к p, где m – число положительных исходов появления события. На основе теоремы можно дать определение вероятности события как частоты его проявления.

Теорема Чебышева.

Если в N независимых испытаниях наблюдается ряд значений некоторой случайной величины, то при $N \to \infty$ среднее арифметическое значений случайной величины стремится к ее математическому ожиданию.

Центральная предельная теорема.

Если существует N независимых случайных величин, имеющих одинаковый закон распределения, математическое ожидание и дисперсию, то при $N \to \infty$ закон распределения их суммы неограниченно приближается к нормальному закону.

Теоремы гарантируют высокое качество статистических оценок при бесконечном числе испытаний. Практически значимые результаты получаются уже при сравнительно небольшом числе реализаций.

При статистическом моделировании формальное описание случайных факторов проводится с использованием понятий: **случайная величина, случайное событие, случайный процесс** и т.п.

Случайной величиной называется такая величина, которая может принимать ряд значений, причем заранее неизвестно какое именно. Таким образом, случайная величина – это величина определенного физического смысла, которая поддается измерению, но ее значения подвержены некоторому неконтролируемому разбросу при повторениях процесса.

Под событием понимается всякий факт, который может наблюдаться в данных условиях. Наступление события всегда связано с определенным комплексом условий. Реализация данного комплекса условий называется **испытанием**.

Различают **достоверное событие**, которое наступает каждый раз при реализации данного комплекса условий. **Невозможное** (недостоверное) **событие** никогда не наступает при реализации комплекса условий. Случайное событие при реализации комплекса условий может наступить или не наступить. Достоверное и невозможное события можно рассматривать как два крайних варианта случайного события.

Частотой события называется отношение числа испытаний, в котором появлялось данное событие, к общему числу испытаний. Частота события обладает определенной устойчивостью, что отражает связь между комплексом условий и возможностью наступления события. Количественной мерой возможности проявления события является его **вероятность** (см. теорему Бернулли). При большом числе испытаний частота события близка к его вероятности.

Свойства вероятностей событий:

1. Вероятность события A заключена между нулем и единицей: $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице.
3. Для любого события A вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

В результате многократного повторения испытаний получается ряд значений случайной величины. В пределе такой бесконечный ряд называется **генеральной совокупностью**. На практике всегда имеют дело с конечным числом значений. Такая совокупность называется **выборочной** или выборкой. Чем большее число значений содержит выборка, тем ближе она соответствует той генеральной совокупности, частью которой она является.

Случайные величины подразделяются на дискретные, имеющие конечное или счетное множество значений, и непрерывные, значения которых принадлежат какому-либо интервалу числовой оси.

Закономерность распределения значений в генеральной или выборочной совокупности называется распределением. Распределение можно изобразить в виде зависимости значения случайной величины от частоты появления этого значения. График такой зависимости называется кривой **плотности распределения вероятности**. График плотности распределения вероятности случайной величины показывает, какие ее значения наиболее часто реализуются.

При решении многих практических задач часто достаточно указать отдельные числовые характеристики случайной величины. Среднее значение или **математическое ожидание** случайной величины:

$$M[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ \ M[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Здесь x_i - значение случайной величины в *i*–й реализации, p_i - вероятность появления *i-го* возможного значения, *n* – число реализаций.

Среднеквадратичное отклонение определяет разброс случайной величины относительно математического ожидания. Для некоторой выборки случайных величин из генеральной совокупности среднеквадратичное отклонение может быть определено зависимостью:

$$\sigma[x] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M[x])^2}{n-1}}.$$

Третьей важной характеристикой случайной величины является **коэффициент вариабельности**, который показывает относительную величину разброса:

$$v[x] = \frac{\sigma[x]}{M[x]}.$$

Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон ее распределения, который имеет две формы представления: в виде функции плотности распределения вероятности $f(x)$ и в виде функции распределения вероятности $F(x)$ (обзор законов распределения вероятностей см. в конце данного раздела).

Эти функции связаны соотношением:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность появления случайной величины, имеющей значение $x \le a$, можно определить с помощью соотношения:

$$P(x \le a) = F(a).$$

Формирование компьютерных реализаций случайных объектов любой природы из выше перечисленных сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел с **равномерным распределением вероятности** на интервале [0;1].

С помощью равномерно распределенных случайных величин можно сконструировать как случайные события, возникающие с любой заданной вероятностью, так и случайные величины с любым законом распределения.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании являются случайные события. Пусть в модели необходимо реализовать случайное событие *A*, которое наступает с заданной вероятностью *p*. Для компьютерной реализации данного события необходим датчик случайной величины, равномерно распределенной на интервале [0;1]. Пусть такой датчик генерирует последовательность случайных чисел: x_1, x_2, ... x_i. Определим, что событие *A* наступает в том случае, если значение случайной величины x_i удовлетворяет неравенству $x_i < p$.

Таким образом, процедура моделирования случайного события состоит в компьютерной генерации последовательности значений x_i и их сравнения с *p*. При этом вероятность события *A* будет равна:

$$P(A) = \int_{0}^{p} dx = p.$$

Вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $P(\overline{A}) = 1 - p$. Таким образом, если соотношение $x_i < p$ выполняется, то исходом моделирования испытания является событие *A*, в противном случае исходом испытания является событие $\overline{A}$.

Аналогичным образом можно моделировать полную группу случайных событий. Пусть возможна реализация только одного события из группы A_1, A_2, ... A_s. События наступают с вероятностями $p_1, p_2, \ldots p_s$, причем обязательно наступает только одно из событий. Таким образом $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$.

Определим, что событие A_m наступает, если для сгенерированного значения случайной величины x_i, имеющей равномерный закон распределения на интервале $[0,1]$, выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_i < x_i \le \sum_{i=1}^{m} p_i .$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательной генерации случайных чисел x_i и проверке для них данного условия. Подобная процедура называется «**определение исхода по жребию**» с заданными вероятностями.

Данный метод моделирования соответствует тому, что интервал $[0;1]$ делится на s отрезков, длины которых составляют $p_1, p_2, \ldots p_s$. Если случайное число x_i попало на отрезок p_m, то это означает, что произошло событие A_m .

Подобная задача моделирования случайных событий возникает, например, при моделировании процессов «развития» систем. Представим, что система может находиться в одном из состояний $A_1, A_2, \ldots A_s$. В силу ряда причин состояние системы случайным образом изменяется через дискретные промежутки времени. Находясь в состоянии A_n , система с вероятностью p_n может перейти в состояние A_{n+1} и с вероятностью q_n может перейти в состояние A_{n-1}. Вероятность того, что система сохранит свое состояние, равна $(1- p_n- q_n)$.

Рассмотрим способ получения случайной дискретной величины, которая принимает значения $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_i \le \ldots y_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots p_n$. Данный способ можно реализовать аналогично тому, как реализован выбор события из группы по жребию на основе следующего алгоритма: Если $x_i<p_1$, то $y=y_1$, иначе, если $x_i<p_1+p_2$, то $y=y_2$, иначе, …., если $x_i < \sum_{J=1}^{m} p_j$, то $y=y_m$, иначе, ….. и т.д.

При компьютерном моделировании часто необходимо моделировать события, результат которых является сложным событием, зависящим от нескольких простых событий. Пусть независимые события A и B имеют вероятность наступления p_A и p_B. Возможными исходами совместных испытаний могут быть события:

$$AB,\ \overline{A}B,\ A\overline{B},\ \overline{A}\overline{B},$$

с вероятностями $p_A \cdot p_B$, $p_A(1-p_B)$, $p_B(1-p_A)$, $(1-p_A)(1-p_B)$.

В этом случае имеем четыре несовместимых события, вероятности, наступления которых заданы. Определить результат моделирования можно «по жребию», т.е. методом, который описан выше.

Если события A и B являются **зависимыми**, причем событие B наступает с некоторой вероятностью $P(B/A)$ при условии, что событие A произошло. В этом случае из последовательности случайных чисел x_i извлекается очередное число x_m и проверяется справедливость неравенства $x_m \le p_A$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие A. Далее из совокупности чисел x_i извлекается следующее число

x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \le P(B/A)$. При выполнении этого условия считается, что наступило и событие В. В противном случае считается, что произошло событие $\overline{B}$.

При моделировании непрерывных случайных величин часто используется метод обратной функции. Пусть имеется случайная величина *x* с равномерным законом распределения на интервале [0,1] и случайная величина z с функцией распределения *F(z).* Доказано, что между случайными величинами существует взаимно однозначное соответствие. Отсюда следует, что $z=F^{-1}(x)$, где F^{-1} – обратная функция. Следовательно, если последнее уравнение имеет аналитическое решение, то для моделирования случайной величины z можно использовать датчик случайных чисел равномерно распределенной случайной величины.

Например, если случайная величина имеет показательный закон распределения: $F(z) = 1 - e^{-\lambda z}$, то, применив метод обратной функции, получим: $x = F(z) = 1 - e^{-\lambda z}$, откуда $z = -\dfrac{1}{\lambda} Ln(1-x)$. Поскольку *(1-x)* имеет также равномерное распределение, то последнее соотношение можно заменить зависимостью: $z = -\dfrac{1}{\lambda} Ln(x)$.

Для многих законов распределения теоретически установлены зависимости получения случайных величин с определенным законом распределения на основе случайной величины ξ с равномерным распределением на интервале [0,1]. Примеры представлены в таблице 4.1:

Таблица 4.1.

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирования
Нормальное распределение	$f(x) = \dfrac{\exp[-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2]}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$x_i = \bar{x} + \sigma\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j - n/2\right)$
Экспоненциальный закон распределения	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\dfrac{1}{\lambda} \ln \xi_i$
Гамма-распределение, *k* – целое число	$f_k(x) = \dfrac{\lambda^k \cdot x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$x_i = -\dfrac{1}{\lambda} \sum\limits_{j=1}^{k} \ln(1-\xi_i)$

Примеры показывают, что для компьютерной реализации случайных событий, случайных величин с заданным законом распределения необходима программная реализация генератора случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале [0;1].

Проблема генерации цепочки случайных чисел с равномерным законом распределения связана с тем, что компьютер является полностью детерминированной машиной, который получает случайные числа по вполне конкретному алгоритму. Такая последовательность в действительности является псевдослучайной и может повторяться с определенным периодом. Во многих генераторах случайных чисел используются алгоритмы, в которых каждое последующее число получается на основе предыдущего. Таким образом, последовательность определяется начальным значением. В основе наиболее распространенных генераторов лежит метод вычетов. Каждое последующее число определяется по соотношению:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m \ ,$$

где *a, c* и *m* – натуральные числа. Так как требуются число в интервале [0,1], то генератор выдает значение отношения x_{n+1}/m, которое всегда меньше единицы. В общем случае период генерируемой последовательности зависит от этих параметров. Разработаны специальные правила выбора значений *a, c* и *m* для получения наибольшего периода последовательности.

Одним из способов увеличения периода последовательности является перемешивание или тасование результатов работы двух генераторов случайных чисел.

Другим способ улучшения качества последовательности является использование рекуррентных методов более высокого порядка. В этом случае новое случайное число получается на основе нескольких предыдущих.

В качестве примера моделирования случайных событий рассмотрим моделирование случайного изменения состояния системы. Любая достаточно сложная система может менять свое состояние с течением времени. Переход из одного состояния в другое часто является случайным событием, т.е. происходит случайным образом с некоторой заданной вероятностью. Переход из одного состояния в другое возможен по четко определенной цепочке промежуточных состояний. Для некоторых состояний возможен также обратный переход. Если вероятность любого возможного состояния системы в будущем зависит только от состояния в текущий момент и не зависит от того, каким путем система пришла в текущее состояние, то такой случайный процесс смены состояний называется марковским.

Марковские процессы могут быть непрерывными и дискретными. Марковские процессы с дискретными состояниями удобно представить в виде графа состояний. На графе обозначаются возможные состояния системы: S_1, S_2,…S_n. А стрелки обозначают возможные непосредственные переходы из одного состояния в другое. Задержки в текущем состоянии изображают петлей, т.е. стрелками из данного состояния в него же. Для каждого состояния заданы вероятности возможных переходов в другие состояния.

Пример графа состояний представлен на рис. 4.11.

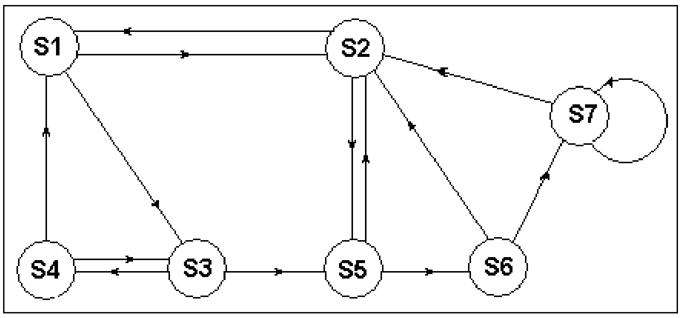


Рис.4 .11. Граф состояний системы и возможных переходов.

Для того, чтобы исследовать поведение системы, необходимо смоделировать случайные события смены состояний, и провести серию экспериментов. По их результатам оценить вероятности нахождения системы во всех возможных состояниях в течение заданного периода времени.

Дополнительные сведения о стохастическом моделировании содержатся в монографиях [13-14], [17], [66].

4.5. Модели корреляционного и регрессионного анализа

В настоящем разделе мы познакомимся с методами построения моделей типа «черный ящик». Значение моделей данного вида при моделировании сложных систем было раскрыто в разделах 4.1-4.2.

В имитационном моделировании сложных систем с применением моделей «черный ящик» прослеживается одно из характерных явлений современной науки – это стремление перейти к изучению сложных, больших и плохо организованных систем.

Со времен Ньютона и до начала XX века точные науки стремились иметь дело с системами, в которых можно было выделить явления или процессы одной физической природы, зависящие от небольшого числа параметров. Результаты экспериментов представлялись простыми и хорошо интерпретируемыми математическими зависимостями, которые получали статус научных законов.

В течение более 200 лет считалось, что единственно правильной является методология **однофакторного эксперимента**. Предполагалось, что исследователь мог с необходимой степенью точности стабилизировать все независимые переменные (факторы) своей системы, затем, поочередно варьируя некоторыми из них, установить интересующие его зависимости.

В начале XX века на основе методов математической статистики были сделаны первые шаги по изучению плохо организованных систем, в которых нельзя выделить отдельные физически однородные явления и разграничить их действие. Это обусловлено тем, что путем моделирования стали исследоваться реальные производственные и технологические процессы и системы. Примерами могут служить любые химико-технологические процессы, которые включают в себя процессы теплопередачи, диффузии, переноса и химической кинетики протекающих реакций.

В последние десятилетия четко определился подход в изучении подобных систем – применение имитационного моделирования и использование идей и методов математической статистики для построения моделей элементов системы. Методы математической статистики по существу хорошо обоснованная система формализации эмпирических наблюдений, когда исследователь сознательно отказывается от детального традиционного изучения механизмов всех протекающих в системе процессов.

Одним из результатов таких исследований является построение уравнения регрессии или регрессионной модели. При этом немедленно возникают проблемы выбора стратегии эксперимента, обработки результатов эксперимента и т.п. Это типичные задачи математической статистики. Некоторые методы статистического подхода рассматриваются нами в данном и следующем разделах.

Пусть эксперимент поставлен и проведен, результаты наблюдений получены. Теперь их необходимо представить в какой-то компактной форме, удобной для практического применения. Пусть явление или процесс характеризуется двумя величинами X и Y, значения которых фиксируются в процессе эксперимента или наблюдений и имеют случайный характер. Задачей исследования является установление так называемой статистической зависимости между случайными величинами, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение другой величины. Поскольку X и Y - случайные величины, то для заданного значения X

величина Y не может быть предсказана точно, а может быть указана лишь с определенной вероятностью. Вероятностная функциональная зависимость между случайными величинами называется регрессией.

Задачами регрессионного анализа является определение собственно функции регрессии. Впрочем, следует помнить, что уравнение регрессии лишь формально устанавливает соответствие между переменными, хотя реально такой зависимости может и не быть (ложная регрессия). Уравнение регрессии представляет собой математическую форму зависимости измеряемой величины от влияющих на нее факторов. Выбор той или иной формы зависимости определяет точность, с которой модель описывает реальную действительность. Регрессионный анализ сводится к тому, что на основе экспериментальных данных или данных наблюдений определить коэффициенты модели и выполнить оценку ее адекватности.

Существуют различные виды регрессий:

1. Простая и множественная регрессия. Простая регрессия отражает зависимость между двумя переменными, т.е. уравнение регрессии представляет собой функцию одного аргумента, для множественной регрессии уравнение регрессии есть функция многих аргументов.
2. По форме зависимости различают линейную и нелинейную регрессии.

Регрессия связана с корреляцией. В регрессионном анализе исследуется форма связи, а в корреляционном анализе оценивается ее сила. Корреляция в широком смысле означает взаимосвязь между объективно существующими явлениями. Если случайные величины **причинно обусловлены**, тогда в вероятностном смысле можно утверждать об их связи, т.е. о корреляции.

Корреляционный анализ проводится с использование коэффициента корреляции, который и характеризует силу связи между величинами:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}} .$$

Здесь $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - средние значения соответствующих величин, r_{xy} - коэффициент корреляции. Значение коэффициента корреляции заключены в пределах от -1 до +1. В случае $r_{xy}=0$ связь между x и y отсутствует.

Построение регрессионной модели обычно проводится в несколько этапов:

1. **Априорное исследование проблемы.** Проводится конкретизация описания процессов и явлений, формулируются гипотезы о взаимозависимости явлений.
2. **Формирование перечня факторов и их анализ.** Исходя из содержательного описания объекта и предварительной информации теоретического характера выявляются параметры модели, производится их разделение на зависимые и независимые. На основе информации о функционировании объекта формулируется гипотеза о форме связи между параметрами модели: линейная, нелинейная, простая или множественная.

   На данном этапе в модель включаются все факторы, которые, **по мнению исследователя**, могут оказать какое-либо влияние на свойства системы, т.е. на ее зависимые переменные. Таких факторов может оказаться достаточно много. Действительно, какие факторы являются главными, а какие второстепенными еще предстоит выяснить. Таким образом, возникает дилемма: мало факторов – модель может иметь низкую адекватность; много факторов – модель неустойчива, малые изменения параметров или объема выборки, по которой строится регрессионная модель, могут привести к существенным изменениям зависимых переменных.

Пусть исходная информация о свойствах объекта, полученная в ходе экспериментов, представлена таблицей 4.2. Здесь y - зависимый параметр, а $x_1, x_2, ..., x_n$ - факторы, определяющие, по мнению исследователя, свойства объекта, т.е. значение y. По этим данным необходимо построить регрессионную зависимость: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Таблица 4.2

X_1	X_2	X_3	….	X_n	Y

3. **Отбор главных факторов.** Для снижения размерности модели, т.е. уменьшения количества факторов, необходимо провести анализ их значимости и взаимозависимости (мультиколлинеарности), т.е. их взаимной парной корреляции. Так как на этапе предварительного анализа в число факторов могут быть включены и малозначимые факторы, которые оказывают несущественное влияние на величину зависимой переменной.

Для отбора главных и исключения взаимозависимых факторов необходимо построить корреляционную матрицу, которая будет иметь следующий вид (таблица 4.3):

Таблица 4.3

	X_1	X_2	X_3	…	X_n	Y
X_1	1	Rx_1x_2	Rx_1x_3	…	Rx_1x_n	Rx_1y
X_2	Rx_2x_1	1	Rx_2x_3	…	Rx_2x_n	Rx_2y
X_3	Rx_3x_1	Rx_3x_2	1	…	Rx_3x_n	Rx_3y
…	…	…	…	…	…	…
X_n	Rx_nx_1	Rx_nx_2	Rx_nx_3	…	1	Rx_ny
Y	Ryx_1	Ryx_2	Ryx_3	…	Ryx_n	1

Качественная оценка силы связи двух величин может быть выполнена по шкале Чеддока (таблица 4.4):

Таблица 4.4

Сила связи	Значение коэффициента корреляции при наличии:	
	Прямой связи	Обратной связи
Слабая	0,10-0,30	(-0,10)-(-0,30)
Умеренная	0,30-0,50	(-0,30)-(-0,50)
Заметная	0,50-0,70	(-0,50)-(-0,70)
Высокая	0,70-0,90	(-0,70)-(-0,90)
Весьма высокая	0,90-0,99	(-0,90)-(-0,99)

Мультиколлинеарная зависимость факторов присутствует, если коэффициент парной корреляции $\left|Rx_ix_j\right| \geq 0,7$. Опыт показывает, что если для двух факторов $\left|Rx_ix_j\right| \geq 0,7$, то одну из переменных можно исключить. Обычно в модели оставляют тот фактор, который является хорошо управляемым, т.е. исследователь представляет каким образом можно изменить его значение. Кроме того, факторы, для которых $\left|Rx_iy\right| \leq 0,1$, т.е. фактически не связанные с y, также подлежат исключению как малозначимые.

4. **Построение регрессионной модели.** На этом этапе выбирается класс функций, в рамках которого строится регрессионная модель и методом наименьших квадратов определяются коэффициенты модели. Модель строится уже без учета исключенных факторов.

Рассмотрим простой пример построения регрессионной модели. Предположим, выполнено N измерений величин X и Y - (x_i, y_i). Допустим, что зависимость y от x предполагается линейной:

$$f(x) = a\,x + b.$$

Результаты измерений (x_i, y_i) содержат определенную (неизвестную) случайную величину, которая обусловлена погрешностями измерений и неконтролируемыми случайными факторами. Требуется построить такую линейную зависимость, которая наилучшим образом описывает результаты наблюдений. Иными словами, требуется определить параметры линейной функции a и b. Для решения данной задачи наиболее часто используется метод наименьших квадратов (МНК). Параметры линейной функции должны иметь такие значения, чтобы в целом точки *(x_1,y_1), (x_2,y_2), … (x_n, y_n)* лежали как можно ближе к прямой.

Назовем отклонением разность вида: $f(x_i)-y_i$. Подберем параметры a и b таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна:

$$\sum_{i=1}^{N}(f(x_i)-y_i)^2 \to \min .$$

В этом и состоит требование метода наименьших квадратов. Данная сумма есть функция искомых параметров a и b:

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{N}((a\cdot x_i+b)-y_i)^2 .$$

Для отыскания *min* найдем частные производные функции F и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0 , \qquad \frac{\partial F}{\partial b}=0 .$$

Последние соотношения после выполнения операций дифференцирования дают систему линейных уравнений относительно неизвестных a и b, решение которой представляется следующими формулами:

$$a=\frac{N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i y_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\sum_{i=1}^{N}y_i}{N\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2} , \qquad b=\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i-a\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i}{N} .$$

Аналогичным образом метод наименьших квадратов применяется для нахождения параметров множественной линейной и нелинейной регрессии. При этом соответственно возрастает число уравнений для определения параметров. Пример регрессионной модели представлен на рис. 4.12.

Рис. 4.12. Линейная регрессионная модель.

Для оценки точности регрессии используется коэффициент детерминации, который характеризует степень соответствия уравнения регрессии, имеющимся эмпирическим данным:

$$D=1-\frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2} .$$

Величина $\sigma^2_{общ}$- общая дисперсия, характеризует разброс наблюдаемых величин y_i относительно среднего значения $\bar{y}$; $\sigma^2_{ост}$- остаточная дисперсия, характеризует отклонения наблюдаемых величин y_i от значений, полученных по регрессионной зависимости:

$$\sigma^2_{общ} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}, \qquad \sigma^2_{ост} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{N-1}.$$

На основе коэффициента детерминации может быть проведена оценка адекватности регрессионной модели. Если *D=1,* значит $\sigma^2_{ост} = 0$, т.е. все наблюдаемые точки соответствуют построенной регрессионной зависимости. В противном случае при *D≈0* имеет место ложная регрессия.

Для оценки точности регрессии используется коэффициент детерминации, который характеризует степень соответствия уравнения регрессии, имеющимся эмпирическим данным:

$$D = 1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}.$$

Величина $\sigma^2_{общ}$- общая дисперсия, характеризует разброс наблюдаемых величин y_i относительно среднего значения $\bar{y}$; $\sigma^2_{ост}$- остаточная дисперсия, характеризует отклонения наблюдаемых величин y_i от значений, полученных по регрессионной зависимости:

$$\sigma^2_{общ} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N-1}, \qquad \sigma^2_{ост} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{N-1}.$$

На основе коэффициента детерминации может быть проведена оценка адекватности регрессионной модели. Если *D=1,* значит $\sigma^2_{ост} = 0$, т.е. все наблюдаемые точки соответствуют построенной регрессионной зависимости. В противном случае при *D≈0* имеет место ложная регрессия.

Определение простой регрессионной зависимости может быть выполнено средствами электронных таблиц путем построения **линии тренда**. При этом ЭТ реализуют метод наименьших квадратов автоматически. Кроме линейной функции могут быть использованы следующие (табл. 4.5) типы зависимостей:

Таблица 4.5

Тип зависимости	Уравнение	Параметры
Линейная	$Y=ax+b$	a, b
Полиномиальная	$Y=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+b$	$a_1, \ldots a_n$, b
Логарифмическая	$Y=a + b\ln(\mathbf{x})$	a, b
Экспоненциальная	$Y=a\exp(bx)$	a, b
Степенная	$Y=a\,x^{\mathbf{b}}$	a, b

Для построения уравнения регрессии необходимо создать таблицу числовых данных. Затем по таблице построить диаграмму «точечная». При этом выбрать вариант диаграммы, который отображает табличные данные в виде точек. Далее необходимо выбрать команду **«Добавить линию тренда»** (пункт меню «Диаграмма»). В открывшемся диалоговом окне **«Линия тренда»** (рис. 4.13) выбрать **тип зависимости**.

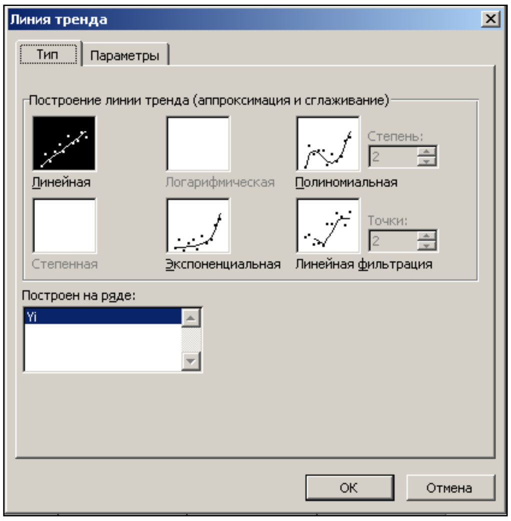


Рис. 4.13. Диалоговое окно «Линия тренда».

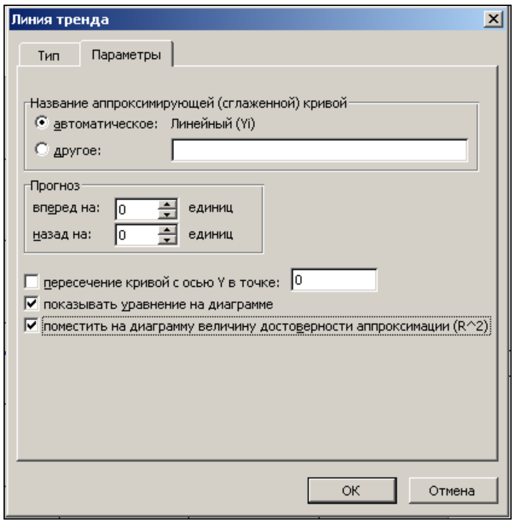


Рис. 4.14. Вкладка «Параметры».

На вкладке **«Параметры»** (рис. 4.14) выбрать опции «Показывать уравнение» и «Поместить величину достоверности». Результат представлен на рис. 4.12.

Проблемам регрессионного и корреляционного анализа посвящены монографии: [13], [17], [49], [63], [76].

4.6. Планирование модельного эксперимента

В разделе 2.1 отмечалось, что в ряде случаев математические модели строятся путем статистической обработки результатов натурного эксперимента с объектом моделирования. Такой подход применяется, когда законы протекания моделируемых процессов сложны и слабо изучены. Естественно, конечной целью подобного эксперимента является установление количественных зависимостей некоторых свойств объекта от параметров, которые предположительно влияют на эти свойства.

Эксперимент с реальным объектом, как правило, достаточно сложное и дорогостоящее мероприятие, поэтому он должен выполняться по определенному **плану.** Основная задача планирования эксперимента – обеспечение получения необходимой информации об исследуемой системе при ограничениях на ресурсы, которые могут использоваться в эксперименте.

К настоящему времени сложилась математическая **теория планирования эксперимента**, которая имеет методы, позволяющие повысить его эффективность. Рассмотрим основные понятия теории планирования эксперимента.

Модель, которая будет построена путем обработки результатов эксперимента – модель типа «черный ящик». При таком подходе у исследуемого объекта выделяют только входные и выходные переменные, которые называются **факторами** и **откликами**. Факторы – это управляемые переменные, значения которых в ходе эксперимента можно менять. Каждый фактор в эксперименте может принимать определенные значения, которые называются уровнями. Набор **уровней** значений факторов определяет одно из возможных состояний системы в эксперименте.

Классический эксперимент является однофакторным: варьируется один из факторов, а остальные поддерживаются на постоянном уровне. Ясно, что в условиях большого числа факторов такая схема проведения эксперимента непригодна. В этом случае единственно возможным является статистический подход к планированию эксперимента, когда исследователь может изменять все факторы одновременно.

В ходе эксперимента регистрируются некоторые величины, характеризующие свойства изучаемого процесса или явления. Такие величины называются **функциями отклика**. С аналитической точки зрения эксперимент представляет собой выявление связи отклика y с рядом независимых переменных x_1, $x_2,...,x_k$. Эта связь в итоге выражается с помощью уравнения регрессии:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Уравнение регрессии определяет некоторую поверхность в (*k+1*)-мерном пространстве. Таким образом, целью эксперимента является получение такого количества точек в пространстве факторов, которое будет с достаточной степенью точности характеризовать **поверхность отклика**. Планирование эксперимента при этом заключается в выборе оптимального количества точек (опытов) и размещении их в пространстве факторов таким образом, чтобы уравнение регрессии было определено с наибольшей точностью.

Суть одного из видов активного эксперимента, который называется **полным факторным экспериментом** (ПФЭ), заключается в том, что каждый фактор варьируется в эксперименте вместе со всеми другими факторами. При этом чтобы исследовать *k* факторов на *m* уровнях, требуется выполнить m^k опытов. Простейшие методы планирования предполагают изменение каждого фактора на двух уровнях.

Планирование эксперимента можно предельно формализовать и упростить. Теория планирования эксперимента предполагает получение регрессионной модели в унифицированном виде, которая может быть пригодна для любых откликов и факторов. Подобной моделью может служить алгебраический многочлен (отрезок ряда Тейлора):

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i \neq j}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \ldots,$$

где *b* – коэффициенты регрессии, *k* – количество факторов, x_i представляет собой *i-й* фактор.

План экспериментов должен содержать, по крайней мере, такое же количество различных экспериментальных точек, какое количество коэффициентов модели требует определения. План эксперимента можно представить в виде матрицы *D*. В этой матрице каждая стока – набор значений факторов в *j-м* эксперименте. Реализовав *n* экспериментов, получим вектор наблюдений *Y*. Где y_j – реакция, соответствующая одной строке матрицы плана эксперимента.

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots x_{k2} \\ \dots & & \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots x_{kn} \end{vmatrix}, \qquad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{vmatrix}.$$

Для построения плана эксперимента требуется определение границ варьирования переменных и их основного (нулевого) уровня. Для каждой переменной задается нулевой уровень x_{i0}, соответствующий наилучшим условиям построения модели. Для каждой переменной задается интервал варьирования Δx_i, который должен быть достаточно большим для статистической различимости уровней фактора на фоне ошибок его измерения. В рамках выбранной модели в виде алгебраического многочлена строится план эксперимента путем варьирования каждого из факторов x_i на нескольких уровнях относительно нулевой точки, представляющей центр эксперимента.

Если выбранная модель включает в себя только линейные члены и произведения факторов, то для оценки коэффициентов модели используется план экспериментов с варьированием всех k факторов на двух уровнях. Такие планы ПФЭ называются планами типа 2^k, где $N = 2^k$ - число всех необходимых испытаний.

В качестве уровней варьирования выбираются значения факторов, симметрично расположенных относительно нулевой точки. Нижний и верхний уровни выбираются по соотношениям:

$$x_{iн} = x_{i0} - \Delta x_i, \qquad x_{iв} = x_{i0} + \Delta x_i.$$

Для упрощения записи плана проводится нормирование факторов, при этом нижнему уровню фактора будет соответствовать значение -1, а верхнему уровню значение +1. Преобразование проводится по формулам:

$$\bar{x}_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i.$$

Планы ПФЭ типа 2^2 и 2^3 представлены ниже в таблицах 4.6 и 4.7:

Таблица 4.6

Номер испытания	**1**	**2**	**3**	**4**
$\bar{x}_1$	-1	+1	-1	+1
$\bar{x}_2$	-1	-1	+1	+1

Таблица 4.7

Номер испытания	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_1$	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
$\bar{x}_2$	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
$\bar{x}_3$	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1

Полный факторный эксперимент дает возможность определить не только коэффициенты регрессии, соответствующие линейным членам, но и коэффициенты, соответствующие взаимодействиям факторов, которые проявляются при одновременном варьировании факторов. То есть действие одного фактора зависит от уровня на котором находятся другие факторы. Для оценки свободного члена и определения эффектов взаимодействий план ПФЭ типа 2^3 для модели $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$ план расширяют путем добавления фиктивной переменной $\bar{x}_0$ и столбцов произведений типа x_1x_2, x_1x_3, …, $x_1x_2x_3$ (таблица 4.8):

Таблица 4.8

Номер испытания	$\bar{x}_0$	**План ПФЭ**			$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	y
		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$					
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Таким образом, для определения коэффициентов представленной выше модели достаточно провести 8 экспериментов. Матрица планирования (таблица 4.7) позволяет, пользуясь методом наименьших квадратов, вычислить коэффициенты регрессии независимо друг от друга по результатам всех испытаний.

Формулы вычислений по представленной матрице планирования (таблица 4.8) для модели $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$ имеют вид:

$$b_0 = \sum_{t=1}^{N} x_0 y_t / N, \quad b_i = \sum_{t=1}^{N} x_{it} y_t / \sum_{t=1}^{N} x_{it}^2, \quad b_{ij} = \sum_{t=1}^{N} (x_i x_j)_t\, y_t / N, \quad b_{ijk} = \sum_{t=1}^{N} (x_i x_j x_k)_t\, y_t / N.$$

Здесь индекс t означает номер испытания, N - общее количество испытаний, остальные обозначения соответствуют таблице 4.7. Результат обработки двухфакторного эксперимента представлен на рис. 4.15.

В данном разделе рассмотрен только один вид плана эксперимента. Однако, существует достаточно большое количество других методов планирования, основанных на дисперсионном анализе и комбинаторике, целью которых является получение адекватных моделей, оптимальных в определенном смысле.

В заключение следует отметить, что применение активных методов планирования эксперимента позволяет построить модель процесса, когда информация о нем скудна, а сам процесс весьма сложен. Теория планирования эксперимента позволяет применять унифицированные методы к задачам самой разнообразной природы, проводить строгую статистическую обработку экспериментальных данных и оценку модели на основе статистических критериев значимости, повысить эффективность экспериментов за счет сокращения числа опытов до минимума.

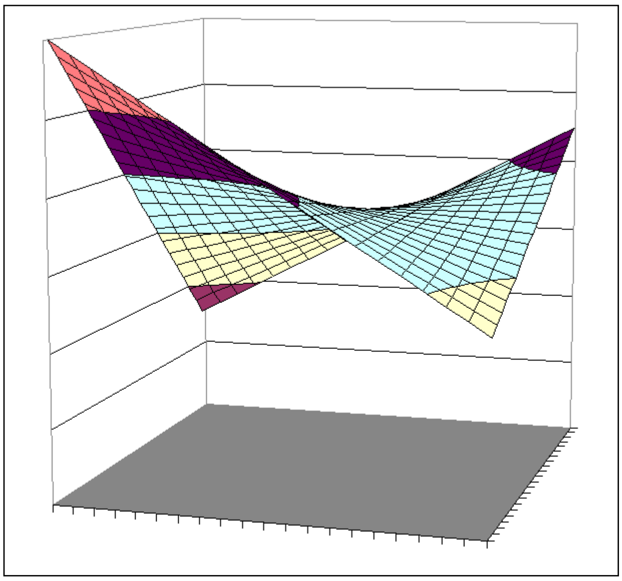


Рис. 4.15. Поверхность отклика – результат построения регрессионной модели.

Дополнительные сведения из области теории планирования эксперимента можно получить в монографиях: [13], [54], [72-73].

4.7. Моделирование систем массового обслуживания

Потребности обслуживания клиентов АТС, билетных кассах, магазинов и т.п. выдвинули ряд интересных задач моделирования нового типа. Первоначально эти задачи касались преимущественно обслуживания абонентов телефонной сети, покупателей магазинов, установления рационального числа продавцов и кассиров в торговых предприятиях. Со временем оказалось, что такие задачи возникают в самых разнообразных областях техники и естествознания, экономики и транспорта, в военном деле и в организации производства. Подобные задачи решаются теорией массового обслуживания. В настоящее время теория массового обслуживания – это область прикладной математики, которая занимается анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, где однородные события повторяются многократно.

Развитие теории систем массового обслуживания связано с именем датского ученого А. Эрланга. Российские математики А.Н. Колмогоров, Е.С. Вентцель, Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин внесли большой вклад в развитие этой теории.

Рассмотрим несколько областей, порождающих задачи из области теории массового обслуживания.

Предположим, что на телефонную станцию в случайном порядке поступают вызовы. Если в момент поступления вызова на станции имеются свободные линии, то происходит подключение абонента и начинается разговор в течение того времени, которое необходимо для его завершения. Продолжительность разговора также является случайной величиной. Если все линии заняты, то возможно обслуживание с ожиданием или отказ в обслуживании. В первом случае вызов становится в очередь ожидания, при этом интерес представляет среднее время ожидания начала обслуживания и средняя длина очереди. Во втором случае, поступивший вызов получает отказ, и интерес представляет вероятность отказа.

Ситуация, которая создается у театральной кассы при обращении за билетами, весьма напоминает описание предыдущей задачи. Стремление рационально обслуживать потребителей приводит к необходимости изучения закономерностей образования очереди. Знание этих закономерностей поможет решить вопрос о численности касс. Так как содержание касс требует расходов, но и потеря клиентов приводит к потере прибыли, то возникает задача поиска оптимального решения. Такая же задача актуальна для касс универсама.

Аналогичная задача возникает при обслуживании одним наладчиком группы станков, которые в случайные моменты времени выходят из строя и требуют обслуживания. Длительность ремонта станка, вообще говоря, является случайной величиной. Спрашивается, как велика вероятность того, что в определенный момент времени будет ожидать обслуживания то или иное число станков. Как велико среднее время простоя? Сколько станков можно поручить рабочему для обслуживания?

В ядерной физике широко используется счетчик Гейгера. Частица, попавшая в счетчик, вызывает разряд определенной длительности. В течение этого времени другие частицы, попавшие в счетчик, не регистрируются. Поэтому счетчик показывает несколько искаженный ход явления. Поэтому возникает задача построения поправок к показаниям счетчика.

Мы хорошо знаем из личного опыта, что зачастую отказываемся от обслуживания только из-за длительной задержки начала обслуживания. Если размер очереди достаточно велик, то мы откладываем предполагаемую покупку. Точно также мы поступаем при заказе телефонного разговора.

Несколько иная постановка задачи возникает, когда ограничено не время ожидания, а время пребывания в системе обслуживания. Такая ситуация возникает, например, при оказании помощи лицам, попавшим в аварию, которые требуют немедленной медицинской помощи.

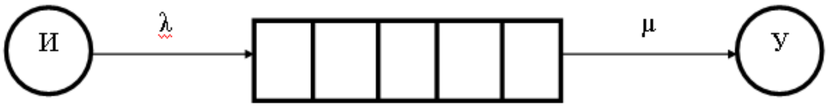
На основе рассмотренных примеров видно, что можно сформулировать несколько групп типовых задач для описанных выше проблемных ситуаций, которые исследуются теорией массового обслуживания. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном счете должны определить вариант системы, при котором будет обеспечен оптимальный конечный эффект от обслуживания.

Таким образом, в качестве систем массового обслуживания могут быть представлены различные по своей природе системы. Как видно из рассмотренных примеров, для любой системы массового обслуживания характерно наличие трех отличительных элементов: объекты, у которых может возникнуть потребность в удовлетворении некоторых заявок на обслуживание (источник заявок); агрегаты или узлы для обслуживания заявок; система приема заявок на обслуживание (накопитель заявок - очередь). Структура простейшей системы массового обслуживания представлена на рис. 4.16.

Природа потока требований или заявок на обслуживание обычно не играет роли. Имеют значение лишь **моменты времени поступления требований на обслуживание**, которые могут быть случайными или детерминированными. Для описания входного потока заявок требуется задать закон, определяющий моменты времени поступления заявок. Время обслуживания заявки также считается случайной величиной.

Различают системы с отказами на обслуживание (все каналы обслуживания заняты), системы с ожиданием обслуживания, в которых заявка поступает в очередь, когда все каналы обслуживания заняты. Ожидание может быть ограниченным и неограниченным. Ограничение ожидания может относиться к длине очереди или ко времени нахождения в ней. Системы массового обслуживания могут также различаться числом каналов обслуживания - одноканальные и многоканальные.

Система массового обслуживания характеризуется также правилами расположения заявок в очереди. Дисциплина очереди определяет принципы обслуживания, которые могут быть следующими: первым пришел - первым обслуживаешься; пришел последним - обслуживаешься первым; случайный отбор заявок; отбор по критерию приоритета; отбор с учетом ограничения времени ожидания.



Источник заявок. Очередь. Узел обслуживания заявок.

Рис. 4.16. Структура простейшей системы массового обслуживания.

Поступив в обслуживающую систему, заявка присоединяется к очереди других, ранее поступивших требований. Узел обслуживания выбирает заявки из очереди с целью ее обработки. После завершения обслуживания одной заявки система приступает к обслуживанию следующей и т.д. Цикл функционирования системы массового обслуживания повторяется многократно.

Как правило, цель исследования системы массового обслуживания состоит в **выборе оптимальных параметров** системы по некоторому заданному критерию. При моделировании систем массового обслуживания определяются и вероятности определенных событий, например, вероятность отказа в обслуживании, и некоторые характеристики случайных величин, например, среднее время ожидания в очереди, средняя длина очереди и т.п. Рассмотрение процесса обслуживания отдельно взятой заявки представляет лишь ограниченный интерес.

Как уже отмечалось, обычно предполагается, что заявки образуют поток, который представляет собой последовательность заявок, а момент времени их появления является случайной величиной. Если с точки зрения обслуживания все заявки данного потока являются равноправными, то играет роль лишь сам факт наступления события поступления заявки. Такие потоки называются потоками однородных событий. Если в любой момент времени может поступить только одна заявка, то поток называется ординарным.

Математическое описание ординарного потока однородных событий начинается с того, что каждое событие поступления заявки характеризуется моментом времени t_j, в который оно наступает. Если поток событий детерминирован, то необходимо задать график поступления заявок. Однако более существенное значение имеют потоки случайных событий. Для описания случайного потока достаточно задать закон распределения случайных величин $t_1,\ t_2,...,t_m,...$. Удобнее рассматривать случайные величины, которые являются длинами интервалов времени τ_j между последовательными моментами времени t_j:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \tau_1, \ \ t_2 = \tau_1 + \tau_2, \ \ t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \ \dots \ t_k = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_k.$$

Для решения многих задач можно ограничиться частными случаем более простых по своим свойствам потоков. Такими потоками являются потоки без последействия. Т.е. момент времени поступления данной заявки не зависит от времени поступления предыдущих заявок. В этом случае τ_j являются независимыми случайными величинами.

Большой практический интерес представляют стационарные потоки, для которых вероятностные характеристики неизменны во времени. В этом случае математическое ожидание m случайной величины τ_j имеет смысл средней длины интервала между последовательными заявками. Величина $\lambda = 1/m$ имеет смысл среднего количества заявок, поступающих в единицу времени, она часто называется интенсивностью потока заявок.

Для простейшего потока вероятность наступления k событий за время t выражается распределением Пуассона:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Из последнего соотношения следует, что функция плотности вероятности для случайной величины τ_j для простейшего потока имеет вид показательного закона:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau} \ ,$$

где λ - интенсивность потока заявок. Если в нашем распоряжении имеется случайные числа x_i с равномерным законом распределения на интервале [0,1], то для получения случайной величины τ_j с экспоненциальным законом распределения можно воспользоваться соотношением, полученным по методу обратных функций:

$$\tau_j = -\frac{1}{\lambda} \ln x_j .$$

Методику моделирования СМО рассмотрим для простейшего случая. Пусть имеется одноканальная система с одним обслуживающим устройством (рис. 4.14). В подобную систему поступают заявки, образующие поток событий с заданным законом распределения. Интервалы времени между двумя последовательными заявками независимы и имеют экспоненциальное распределение плотности вероятности с параметром λ.

Время обслуживания (время занятости канала обслуживания) также распределено экспоненциально с параметром μ. Заявки образуют очередь в порядке поступления. Если поступившая заявка застает канал занятым, то она ожидает освобождения канала, но не более, чем время равное θ, после чего получает отказ в обслуживании. Величина θ также может представлять собой случайную величину.

В результате моделирования необходимо получить характеристики качества обслуживания: долю обслуженных заявок, долю заявок, получивших отказ, среднее время ожидания обслуживания и т.д.

Процесс функционирования системы массового обслуживания рассматривается на заданном интервале времени [0,T]. Обслуженными считаются заявки, которые были выполненными к моменту времени $t=T$. Необслуженные к моменту времени $t=T$ заявки считаются, получившими отказ.

Имитационное моделирование функционирования системы массового обслуживания состоит из этапов:

1. Генерация случайных величин с равномерным законом распределения.
2. Преобразование равномерно распределенных величин в случайные величины с заданным законом распределения.
3. Определение времени поступления требований на обслуживание, времени ухода из очереди, времени обслуживания;
4. Моделирование функционирования системы в целом с накоплением статистических данных о процессе обслуживания;
5. Определение показателей качества функционирования системы путем обработки результатов моделирования.

Исследование свойств и закономерностей функционирования систем массового обслуживания это широкое поле применения методов имитационного моделирования. Уже из постановок самих задач следует, что они отражают ситуации, характеризующиеся наличием случайных событий. Подобные задачи в классической постановке исследовались методами теории вероятностей. Реальные системы в силу своей сложности допускают только модельное исследование методами имитационного моделирования.

Моделирование систем массового обслуживания – весьма яркий пример приложения методов имитационного моделирования для решения целого класса специфических задач, весьма актуальных в проектировании, бизнесе и другой практической деятельности.

Вопросы моделирования подобных систем отражены в монографиях: [13-14], [17], [20], [43], [59], [75].

4.8. Контрольные вопросы к главе 4

1. Что такое сложная система.
2. Каковы особенности моделирования сложных систем.
3. Какие основные задачи решаются при моделировании сложных систем.
4. В чем сущность метода статистического моделирования.
5. Что такое имитационное моделирование.

6. Каковы основные принципы построения имитационных алгоритмов.
7. Каковы причины актуальности имитационного моделирования.
8. Какие недостатки имеет имитационное моделирование.
9. Каков принцип «работы» клеточного автомата.
10. Преимущества моделей типа «клеточный автомат».
11. Каковы особенности моделей типа «черный ящик».
12. Порядок построения имитационных моделей.
13. Как построить модель случайного события.
14. Как построить модель полной группы событий.
15. Как построить модель событий, которые могут проявляться совместно.
16. Что такое регрессионная модель.
17. Какова цель корреляционного анализа.
18. Какова главная цель планирования эксперимента.
19. Какова структура простейшей системы массового обслуживания.
20. В чем состоят особенности моделирования систем массового обслуживания.

Глава V. Применение моделирования в гуманитарной сфере и в экологии

5.1. Моделирование в социально-экономических и исторических науках

Широкое применение моделирования в науке, технике, социальной и экономической сферах наглядно демонстрирует **общенаучный характер** данного метода. Действительно, можно ли вообразить современную технику без результатов математического и компьютерного моделирования. В данной главе будут представлены примеры применения моделирования в гуманитарной сфере.

В свое время моделирование долго развивалось в связи с потребностями техники, физики и других естественных наук. Первые опыты построения математических моделей в общественных науках связаны с использованием физических аналогий при изучении процессов в экономике. Они датированы XVII—XVIII веками.

Среди общественных наук экономика - самая близкая к математике социальная наука. Экономика - это наука об использовании ограниченных ресурсов с целью максимального удовлетворения материальных потребностей населения. В тоже время сфера социальных и экономических явлений отличается от естественнонаучной области, в первую очередь, сложностью, действием множества случайных факторов и невозможностью поставить эксперимент непосредственно на реальном объекте.

Тем не менее, количественные и качественные методы математического моделирования являются наилучшим вспомогательным аппаратом для получения ответов на основные вопросы экономики: что и в каком количестве производить; с помощью каких ресурсов и технологий; кем и как произведенная продукция будет потребляться и т.п. Задачи, которые поставила экономика, привели к возникновению и развитию таких разделов математики, как линейное и нелинейное программирование, теория массового обслуживания, теория игр и т.д.

Принято считать, что математическое моделирование как метод анализа макроэкономических процессов впервые применено лейб-медиком Ф.Кенэ, который в 1758г. опубликовал работу «Экономическая таблица». В ней была сделана первая попытка количественно описать национальную экономику. В работе О.Курно «Исследование математических принципов теории богатства» (1838г.), положившей начало современной математической экономике, впервые использованы количественные методы для анализа конкуренции между товарами при различных рыночных ситуациях.

В последующие годы происходила интенсивная математизация экономической теории. Например, в книге У.Джевонса «Краткое описание общей математической теории политической экономии» (1862г.) изложена одна из первых версий теории полезности, которая было построена для формализованного описания поведения потребителя на рынке. О роли и значении математического моделирования при исследовании экономики лучше всего говорит следующий факт, что практически все лауреаты Нобелевской премии по экономике обращались к математическим методам моделирования в своих научных исследованиях.

Усложнение проблем экономики и управления в XX веке вызвало дальнейшее развитие методов их анализа. Усилиями Л.Вальраса, В.Парето, Ф.Эджворта и др. классическая экономическая наука была переведена в достаточно строгое математическое изложение. В результате сложилась современная методология исследования социально-экономических проблем, опирающаяся на системный подход, который предполагает вместе с содержательным анализом процессов их математическое моделирование.

Вопросы моделирования процессов в экономике всегда были в центре внимания отечественных ученых. Е.Е.Слуцким разработана модель поведения потребителя; Н.Д. Кондратьев установил наличие длинных волн в экономике и разработал ряд математических моделей подобных процессов. На основе баланса народного хозяйства СССР за 1923—1924 гг. построена широко известная ныне модель В.В.Леонтьева; Л.В.Канторович разработал методы исследования линейных систем применительно к задачам экономики. В 1965г. Л.В.Канторовичу, В.С.Немчинову и В.В.Новожилову была присуждена Ленинская премия за фундаментальные экономико-математические исследования.

В основу классификации экономико-математических моделей можно положить степень агрегирования объектов исследования. Можно выделить модели микроэкономики (на уровне покупателя, продавца, производителя и рынка), модели макроэкономики, которые рассматривают процессы на уровне государства в целом и т.п.

Суть моделирования в экономике, как и в других областях науки, заключается в замене изучаемого объекта или процесса адекватной моделью и последующем исследовании свойств этой модели. Экономисты рассматривают модели как упрощенные теории, позволяющие изучать взаимосвязи между различными факторами и свойствами экономических систем. В силу сложности экономических систем, экономические модели обычно учитывают только небольшое количество факторов, влияющих на свойства, которые стремиться объяснить экономическая теория. Так как проведение натурных экспериментов невозможно, а использование интуиции способно привести к обратному результату, моделирование в экономике остается единственным методом анализа.

Потенциальная возможность компьютерного моделирования многих процессов не означает, разумеется, ее успешной осуществимости при данном уровне экономических и математических знаний, имеющейся конкретной информации и вычислительной техники. Нельзя указать абсолютные границы математического описания экономических проблем, всегда будут существовать еще неформализованные проблемы, а также ситуации, где математическое моделирование неэффективно.

Например, длительное время главным тормозом практического применения моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей **достоверной информацией.**

Реальные **социальные системы**, также как и экономические, относятся к классу сложных систем. Для объектов такого рода затруднено или в принципе невозможно воспроизведение начальных условий, а значит, и повторение результата или применение привычных методов экспериментального исследования.

Социальные системы представляют особую сложность для объективного исследования и моделирования еще и из-за невозможности взглянуть на них «со стороны». Данное обстоятельство проявляется и при сборе экспериментальных данных, и в интерпретации результатов.

В отличие от экономических и естественных наук, в социологии чаще всего применяются содержательные и когнитивные модели. Однако, проводя прикладные исследования, социологи и политологи вынуждены применять формальные математические методы и модели, занимаясь измерениями и статистическим анализом собранных данных. Использование формальных методов анализа позволяет изучить поведение социальной системы, выявить неочевидные свойства и закономерности.

Сложность и динамизм современного социально-политического процесса делают неэффективными традиционные методы анализа результатов социологического исследования. Выводы, основанные на использовании опыта, аналитических возможностей и интуиции, не в состоянии охватить многоплановый эмпирический материал, уловить многочисленные взаимосвязи между разнообразными параметрами общественного развития.

Все это побуждает искать возможность формализации реальных взаимосвязей, определяющих социально-политическое и экономическое развитие, его описание на языке строгих логических или математических процедур. В итоге возникают модели, с той или иной степенью достоверности, описывающие реальные процессы. Реализация этих моделей с помощью современных компьютеров позволяет в короткие сроки обрабатывать эмпирические данные и анализировать возможные варианты развития событий под воздействием различных факторов. Проникновение математических методов и компьютерных технологий в практику социально-политического и экономического исследования имеет и другие причины - нарастание информационных потоков.

Сама по себе задача формализации, математического описания и модельного исследования социальных процессов полезна еще и тем, что исследователь по необходимости конкретизирует свои представления, строго организует имеющуюся информацию, обнаруживает проблемы понимания взаимосвязей в объекте. Сам процесс формализации и построения моделей является хорошим стимулом для системного восприятия, рассматриваемого явления.

Подведем итог: компьютерное моделирование получает все более широкое применение в прикладных социальных исследованиях. Его использование становится тем более необходимым, чем сильнее проявляются следующие обстоятельства:

1. Наличие широкого информационного массива и большого числа исследуемых параметров, делающее невозможным или неэффективным традиционные, неавтоматизированные методы обработки эмпирических данных;
2. Динамичный характер исследуемых процессов, не оставляющий времени для «ручной» обработки информации;
3. Необходимость учета большого числа параметров системы и случайных факторов, влияющих на ее поведение;
4. Многовариантный характер развития исследуемых систем.

Компьютерное моделирование в гуманитарных, например, исторических науках применяется еще с 70-х гг. XX в., а сейчас это направление считается одним из самых перспективных. Действительно, возможность моделирования событий, явлений и длительных процессов может стать для историка неоценимым подспорьем.

В настоящее время в компьютерном моделировании исторических процессов можно выделить как минимум два направления: имитационное моделирование и моделирование на основе технологий искусственного интеллекта.

В тоже время следует помнить, что моделирование - метод экспериментальный, достоверность и объективность полученных результатов напрямую зависит от того, насколько точно сформулирована задача моделирования, все ли необходимые факторы она учитывает. Кроме того, общественные силы и психологические установки исторических деятелей - объекты, слабо формализуемые, и с трудом поддаются математическому анализу. Потеря нескольких таких факторов неизбежно приводит к недостоверности полученных результатов.

Но, несмотря на все сложности, метод все же используется историками. В частности, Б.И.Греков использовал имитационное моделирование в своей работе «Германский политик Вальтер Ратенау и его представления о России в 1914-1922 гг.». На основе формализованного анализа текстов, принадлежащих перу Ратенау, ему удалось построить общую модель его политического мышления. Эта модель позволила детально рассмотреть основные интересы, приоритеты и представления о роли Германии в общеевропейском процессе и сделать выводы о характере Рапалльского договора 16 апреля 1922г., возможностях сотрудничества Запада с Россией в то время.

Историки имеют дело с уже свершившимися событиями. Между тем во многих случаях модели способны дать ответ на иной, не менее важный вопрос: как процесс не мог протекать при определенных исходных условиях. Учитывая неизбежную относительность наших знаний о прошлом, сокращение набора возможных трактовок уже само по себе имеет значение.

Ценность компьютерных моделей этим далеко не исчерпывается. Историк имеет дело со следами исторического процесса, с производимыми этим процессом результатами: письменными источниками, предметами материальной культуры и т.п. Любое историческое исследование представляет собой реконструкцию тех явлений, которые могли бы оставить такие следы. Подобная реконструкция может быть выполнена в виде компьютерной модели. Если результаты моделирования сопоставимы в какой-то форме с данными исторических источников, то подобная реконструкция должна вызывать в силу своей математической строгости больше доверия, чем просто словесное описание.

Одна из первых попыток компьютерного моделирования исторических процессов предпринята историками России. Группа исследователей во главе с В.А. Устиновым разработала и реализовала на ЭВМ БЭСМ-6 модель экономики древнегреческих полисов - участников Пелопонесской войны.

В основу работы был положен системный анализ. Хозяйство полиса рассматривалось как система, имеющая ряд взаимосвязанных параметров: численность населения, количество обрабатываемой земли, ежегодный урожай, производство, импорт продовольственных и иных товаров, уровень потребления, а также изменения этих параметров в результате военных действий, когда часть территории захватывалась и разорялась противником, а морская блокада прерывала торговые связи и т. п.

Состояние источников информации не позволяло определить точные значения многих параметров, поэтому исследователи заменили их оценочными. Несмотря на очевидные погрешности, модель позволила авторам сформулировать некоторые выводы, достойные проверки с помощью иных методов и углубленного изучения.

Другой сферой эффективного применения компьютерных моделей оказались процессы, связанные с демографическим воспроизводством населения. Для того, чтобы организоваться в семьи, общины и другие общественные структуры, принимать участие в исторических событиях, человеческие индивиды должны сначала родиться и дожить до возраста активной деятельности. Так, американский ученый М.Вобст с помощью компьютерной модели определил минимальный размер замкнутой популяции первобытных охотников, при котором каждый индивид мог найти себе брачную пару, а также воздействие на этот размер социальных факторов.

Не менее эффективной может быть модель и в качестве инструмента получения нового знания. Об этом говорит успешный опыт применения метода моделирования в археологии 1970-1980-х годов. При этом были использованы разработки, уже накопленные к тому времени в этнографии, исторической демографии и экономической географии, где давно нашли применение количественные методы обработки материалов исследований. Моделирование сочеталось с методами математической статистики и пространственного анализа объектов. Сначала исследователь рассматривал либо распределение археологических объектов по размерам и вероятному социальному значению, либо их размещение в пространстве и датировку, выражая выявленные закономерности в математической форме. Затем предпринималась попытка воссоздать с помощью компьютерного моделирования процесс образования памятников, результаты которого отвечали бы тем же математическим характеристикам.

В заключение данного раздела рассмотрим **особенности** моделирования в различных областях его применения. Естественно, что модели в технических науках весьма существенно отличаются от моделей естественных, социальных и экономических систем. Они создаются разными путями и служат разным целям. В технике модели используются при проектировании новых систем, т.е. с целью создания новых систем с определенными свойствами. В технике модели в большей мере соответствуют реальным системам в отношении их структуры и функционирования, чем в классических экономических моделях. В естествознании, экономике и социологии модели обычно применяются для объяснения поведения уже существующих систем.

Модели технических систем строятся на основе данных об отдельных составных частях. Разработка моделей производится в восходящем порядке, отталкиваясь от строго определенных и наблюдаемых ее элементов. В экономике модели нередко создаются в обратном порядке, исходя из суммарного результата действия всей системы.

Однако большинство объектов, изучаемых экономической наукой, являются сложными системами. Они характеризуются наличием таких свойств, которые не присущи ни одному из элементов, входящих в систему. Поэтому недостаточно пользоваться методом их расчленения на элементы с последующим изучением этих элементов в отдельности. Одна из трудностей экономических исследований состоит в том, что почти не существует экономических объектов, которые можно было бы рассматривать изолированно.

Модели социально-экономических систем отличаются от моделей естественных наук, прежде всего, высокой сложностью. Модели солнечной системы, атома, а также механизма наследственности намного проще, чем модели социальных и экономических систем. Кроме того, в естественных науках модели строятся на основе явлений, многие из которых поддаются экспериментальному исследованию.

Большинство моделей естественных наук содержат в себе намного меньше неопределенностей по сравнению с социальными системами. Технические и социальные системы имеют непрерывную градацию факторов по степени их влияния от несомненно, важных к второстепенным и незначительным. В отличие от этого естественнонаучные системы характеризуются разрывом между несколькими важнейшими факторами, которые включаются в состав модели, и совершенно несущественными, которыми пренебрегают. В этом состоит поразительная особенность естествознания – грубые модели дают вполне адекватный результат.

В свою очередь для социальных и технических систем характерно наличие множества контуров обратных связей, что несвойственно большинству моделей в естественных науках.

Проверка адекватности модели различна в зависимости от того, применяется она в технике или экономике. В естественных и технических науках достаточным условием истинности результатов моделирования является совпадение результатов исследования с наблюдаемыми фактами.

Сложность явлений в экономике процессов и другие отмеченные выше особенности экономических и социальных систем затрудняют не только построение моделей, но и проверку их адекватности. В экономике затруднительно оценивать модель по ее способности предсказать конкретное состояние системы в будущий момент времени. Здесь модельное исследование имеет целью углубление понимания закономерностей протекания внутренних процессов в системе. Модель следует оценивать по ее способности предсказывать качественные характеристики поведения: колебания, устойчивость, рост или падение, тенденцию к усилению или ослаблению внешних возмущений.

Специфика проверки адекватности моделей экономики состоит в том, далеко не всегда можно поставить чистый эксперимент по верификации модели, устранив влияние некоторых воздействий на моделируемый объект. Ситуация еще более усложняется для моделей долгосрочного прогнозирования и планирования. Ведь нельзя же 10-15 лет ждать наступления событий, чтобы проверить правильность выводов моделирования.

Представленные далее примеры демонстрируют возможности применения компьютерного моделирования для анализа социальных и экономических явлений.

Более подробно вопросы моделирования в экономике и социальной сфере представлены в монографиях: [7], [17], [20], [48], [55-56], [60], [62], [69-70], [78], [83], [85], [95], [98], [105].

5.2. Примеры моделирования социально-экономических процессов

При исследованиях в социально-экономической области применяются самые разнообразные модели: математические, структурные, имитационные, оптимизационные, стохастические и т.д. Многие задачи анализа и разработки проектов в бизнесе сводятся к моделям систем массового обслуживания. В данном разделе в качестве примеров рассмотрим модели конкретных процессов и явлений, протекающих в экономике и социальной сфере. Их практическая реализация может быть осуществлена в рамках лабораторных занятий, которые проводятся по данному курсу.

1. Определение ставки налога.

Суть проблемы состоит в выборе оптимальной ставки налога на прибыль с целью увеличения наполнение бюджета. Как источником развития бизнеса, так и наполнения бюджета является прибыль предприятий. Государство устанавливает ставку налога на прибыль и получает средства в бюджет в виде определенного процента прибыли. Предприятия вкладывают в бизнес собственный капитал, производят прибыль и отчисляют по налоговой ставке средства в бюджет. Размер прибыли характеризуется уровнем рентабельности, т.е. отношением прибыли к вложенным в бизнес средствам.

Моделирование, в данном случае, позволит проверить утверждение экономистов, что большие ставки налога сдерживают развитие экономики, следовательно, препятствуют росту отчислений в бюджет.

При построении модели будем считать, что оставшаяся после уплаты налогов часть прибыли предприятие полностью включает в собственный капитал и вкладывает в развитие бизнеса. Моделирование позволяет определить оптимальную ставку налогообложения предприятий и ее зависимость от уровня рентабельности.

Более того, моделирование показывает, что для государства, с целью получения максимального наполнения бюджета, выгодно снизить ставку налога в течение определенного промежутка времени (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Рентабельность**	120%	**Ставка налога**	20%								
2	**Время**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	**Капитал на начало года**	100	195,5	382,0	746,7	1459,6	2852,9	5576,2	10899,2	21303,6	41639,8	81389,0
4	**Прибыль**	0	120,0	234,6	458,5	896,1	1751,5	3423,5	6691,5	13079,1	25564,3	49967,8
5	**Отчисления в бюджет**	0	24,5	48,0	93,8	183,3	358,2	700,1	1368,4	2674,7	5228,0	10218,7
6	**Остаток прибыли**	0	95,5	186,6	364,7	712,8	1393,3	2723,3	5323,0	10404,3	20336,3	39749,1
7	**Поступления в бюджет за весь период**	0	24,5	72,5	166,3	349,5	707,7	1407,8	2776,3	5451,0	10679,0	20897,7
8												
9	**Рентабельность**	120%	**Ставка налога**	20%								
10	**Время**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**Капитал на начало года**	100	220,0	484,0	1064,8	2081,3	4068,0	7951,3	15541,5	30377,4	59375,5	116055,0
12	**Прибыль**	0	120,0	264,0	580,8	1277,8	2497,5	4881,6	9541,6	18649,9	36452,9	71250,6
13	**Отчисления в бюджет**	0	0,0	0,0	0,0	261,3	510,8	998,3	1951,3	3814,0	7454,8	14571,1
14	**Остаток прибыли**	0	120,0	264,0	580,8	1016,5	1986,8	3883,3	7590,3	14835,9	28998,1	56679,5
15	**Поступления в бюджет за весь период**	0	0,0	0,0	0,0	261,3	772,1	1770,4	3721,7	7535,7	14990,5	29561,6

Рис. 5.1. Повышение отчислений в бюджет при налоговых льготах.

2. Моделирование циклических процессов в экономике.

Ряд исследователей для объяснения циклических процессов в экономике предлагают анализировать конкурентные отношения между «молодыми», развивающимися отраслями, в которых широко используются инновационные технологии, и традиционными отраслями.

Предлагается следующая содержательная модель экономической системы. В первой фазе (процветание) успешное функционирование старых отраслей поддерживает инновационные процессы в новых отраслях производства. Но постепенно развитие старых отраслей замедляется, так как необходимая прибыль обеспечивается выпуском традиционной продукции. Начинают замедляться и процессы инновации в новых отраслях.

Во второй стадии (спад) подавление инновационных процессов продолжается. Отсутствие инноваций способствует старению и износу оборудования старых отраслей, что приводит к спаду.

В третьей фазе (депрессия) негативные процессы в старых отраслях производства приводят к их кризису. Старые отрасли, занятые своими проблемами, в меньшей степени способны подавлять молодые отрасли производства и не мешают оживлению в них инноваций.

В четвертой фазе (восстановление) успехи в молодых отраслях оздоравливают экономику и поднимают производство в старых отраслях. Подобные циклические процессы в экономике называются волнами Кондратьева.

Для построения модели подобных процессов введем понятие кооперативной и антагонистической переменных. Активная переменная X является кооперативной по отношению к пассивной переменной Y, если увеличение X усиливает Y при больших значениях X, но снижает Y при малых значениях X (кооперативная переменная X стремится согласовать свое значение и значение Y). Активная переменная X является антагонистической по отношению к пассивной переменной Y, если X подавляет Y при больших значениях X и усиливает Y при малых значениях X (антагонистическая переменная стремится увеличить разницу между переменными). Подобное кооперативное и антагонистическое поведение характерно для социально-экономических систем.

Пусть X – объем производства в молодых отраслях, а Y – объем производства в старых отраслях. X по отношению к Y является кооперативной переменной, а Y по отношению к X является антагонистической переменной. Предполагается, что X и Y являются ограниченными по росту во времени функциями. Взаимодействие функций описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = x(a(y)\cdot s - x)\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b(x)\cdot s - y)\,.$$

Здесь t – время, s – параметр, функции *a(y)* и *b(x)* задают вид взаимодействия переменных: кооперативный или антагонистический. Оказалось, что симметричное отношение между x и y (обе переменные либо кооперативные, либо антагонистические) приводит к равновесным состояниям, тогда как ассиметричные отношения (одна переменная кооперативная, другая антагонистическая) порождают циклические процессы.

Для того чтобы задать кооперативное взаимодействие между x и y функцию *b(x)* определим следующим образом:

$$b(x) = \begin{cases} b_- < 0 \text{ для } 0 < x < x_s \\ b_+ > 0 \text{ для } x_s < x < \infty \end{cases},$$

где b_- и b_+ - константы, а x_s - точка переключения. Очевидно, что функция *b(x)* приводит к уменьшению y при малых значениях x и увеличению y для $x > x_s$.

Для того чтобы задать антагонистическое взаимодействие, определим *b(x)* следующим образом:

$$b(x) = \begin{cases} b_+ > 0 \text{ для } 0 < x < x_s \\ b_- < 0 \text{ для } x_s < x < \infty \end{cases}$$

Аналогичным образом кооперативное или антагонистическое взаимодействие определяется функцией *a(y):*

$$a(y) = \begin{cases} a_- < 0 \text{ для } 0 < y < y_s \\ a_+ > 0 \text{ для } y_s < y < \infty \end{cases}, \quad a(y) = \begin{cases} a_+ > 0 \text{ для } 0 < y < y_s \\ a_- < 0 \text{ для } y_s < y < \infty \end{cases}.$$

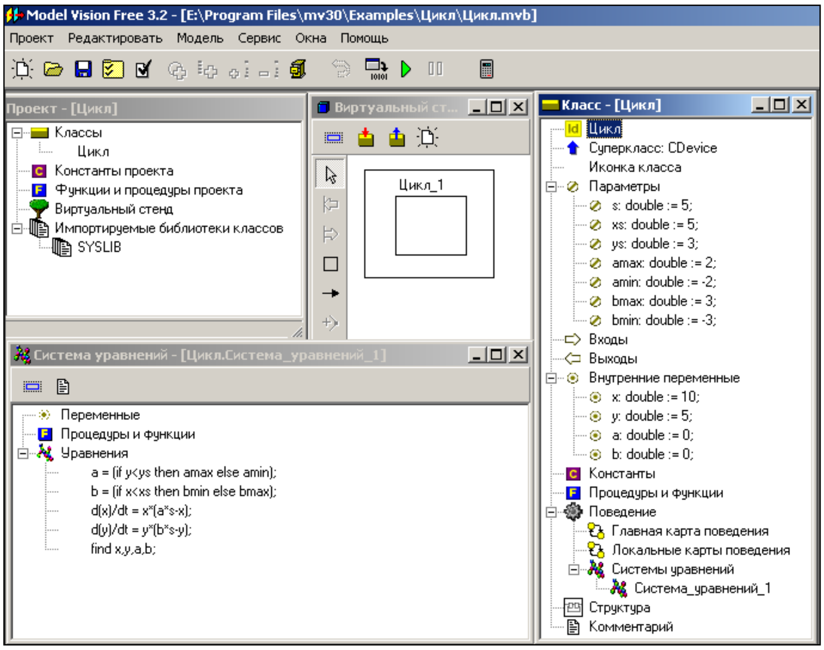


Рис. 5.2. MVS-модель циклического развития.

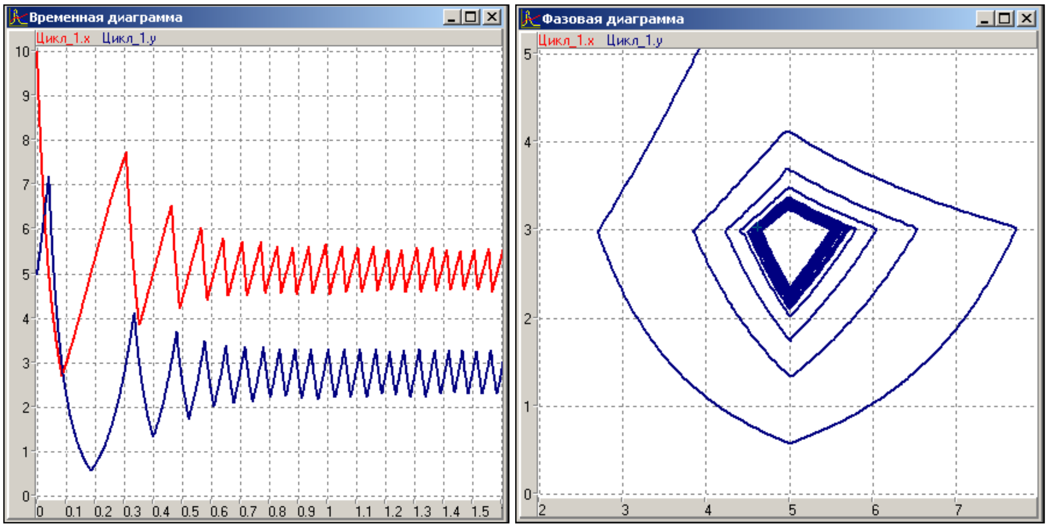


Рис. 5.3. Результаты моделирования циклического развития.

Комбинация различных вариантов функций влияния позволяет получить четыре случая взаимодействия:

- *x, y* являются кооперативными переменными по отношению к друг другу:
- *x, y* являются антагонистическими переменными по отношению к друг другу;
- *x* кооперативно влияет на *y*, а *y* антагонистически влияет на *x*;
- *y* кооперативно влияет на *x*, а *x* антагонистически влияет на *y*.

В двух первых случаях взаимодействие дает две точки равновесия, и все траектории стремятся к тому или иному положению равновесия, в последних двух случаях решения представляют собой циклы вокруг определенного центра (рис. 5.3).

Данная модель может быть интерпретирована как модель взаимодействия народа и правительства. В этом случае результаты моделирования вполне согласуются с реалиями и предсказывают несколько характерных состояний политических процессов:

- Состояние кооперативной демократии – народ поддерживает правительство, которое, в свою очередь, доверяет народу;
- Состояние противоборствующей демократии – народ не одобряет и саботирует политику правительства, а правительство не учитывает общественное мнение и подавляет волеизлияние народа;
- Состояние диктатуры – правительство правит, а народ терпит;
- Состояние анархии – народ саботирует решения правительства, а правительство безвольно допускает хаос.

Конкретная реализация варианта взаимодействия зависят от традиций и менталитета общества, именно они обуславливают кооперативное или антагонистическое взаимодействие народа с правительством.

3. Модель рыночного ценообразования.

Модель процесса динамики изменения цен на рынке включает взаимодействие трех подсистем: «производитель», «потребитель» и «рынок». Данная модель отражает процесс формирования рыночной цены на какой-либо товар. Она является одной из исторически первых динамических моделей, которая отражает поведение участников экономического процесса. Многие современные более сложные модели приводят к подобному паутинообразному или спиральному процессу установления равновесия.

В основе модели лежат следующие гипотезы: товаропроизводитель принимает решение об объеме предложения товара на рынок, ориентируясь на цену предыдущего периода; рынок всегда находится в состоянии локального равновесия. Формально эти две гипотезы означают следующее:

- Объем предложения на рынке в каждый период времени определяется значением цены предыдущего периода;
- В каждый период времени на рынке устанавливается равновесная цена, при которой весь товар будет реализован.

Пусть P_n - цена товара в момент времени t_n, D_n - спрос на товар и S_n - предложение товара производителем в этот же момент времени. Для построения модели примем следующие предположения: зависимость спроса от цены является линейной: $D_n = A - BP_n$, где *A, B* – заданные коэффициенты, определенные на основе рыночных законов; зависимость предложения товара от его цены, в свою очередь, суть следующее: $S_n = C + EP_{n-1}$, где *C* и *E* – заданные коэффициенты. В начальный момент времени цена товара на рынке известна.

Предложение и спрос связаны условием локального равновесия рынка – равенство спроса и предложения: $S_n = D_n$,

Константы *A, B, C* и *E* оцениваются с помощью экономометрических (статистических) методов исследования закономерностей рынка. Следует отметить что, качественный характер динамики изменения цен на рынке существенным образом зависит от соотношения значений констант *B* и *E.*

Допустим, что производитель имеет необходимую информацию о ценах на рынке в предшествующие отрезки времени. На этой основе он формирует объем поставки товара S_n. В соответствии с рыночными законами, объемом предложения и величиной спроса устанавливается рыночная цена товара, обеспечивающая равенство спроса и предложения: $P_n = (A - S_n)/B$. В дальнейшем производитель учитывает новую рыночную цену товара и корректирует свое предложение. Так как реакция производителя всегда имеет запаздывание, то рыночное равновесие наступает после некоторых колебаний цены.

Аналогичная модель может быть построена, когда производитель при определении объема предложения в каждый период времени ориентируется на спрос в предыдущий период. Эта гипотеза приводит к росту предложения в случае, когда спрос больше предложения.

Процесс установления равновесной рыночной цены можно представить в виде сходящейся спирали. Поэтому данная модель рынка носит название паутинной. В зависимости от параметров рынка *A, B, C* и *E* эта спираль может привести к равновесному состоянию или колебаниям постоянной или увеличивающейся амплитуды. Колебания цены – свойство рыночного механизма, которое проявляется и при детерминированной постановке задачи (рис. 5.4).

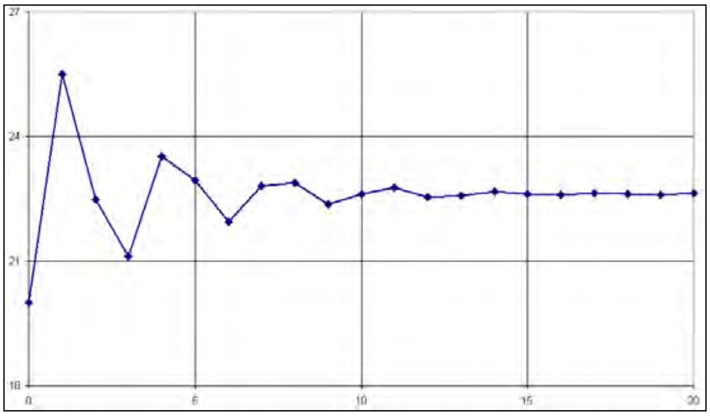


Рис. 5.4. Динамика рыночного ценообразования.

Данная модель ценообразования может быть модифицирована. Ранее предполагалось, что равновесная цена устанавливаться моментально. В действительности процесс установления равновесной цены на рынке может занять некоторое время. Тогда рыночная цена будет устанавливаться по закону: $P_n = P_{n-1}\exp(r(D_{n-1} - S_{n-1}))$, где *r>0* – некоторый коэффициент адаптации.

Последняя модель имеет свойство бифуркации, т.е. перехода к режиму детерминированного хаоса (рис. 5.5.). В заключение отметим, что исследование моделей динамики ценообразования является одним из актуальных направлений современной экономической науки.

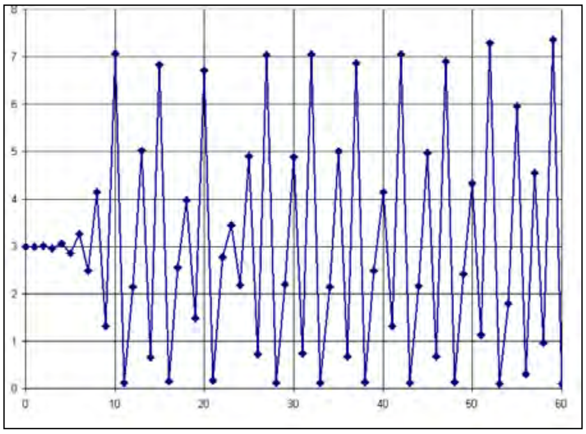


Рис. 5.5. Развитие хаоса в ценообразовании.

4. Модель гонки вооружений.

Два враждующих государства наращивают свой военный потенциал. Первая страна вооружается, опасаясь потенциальной угрозы со стороны второго государства. В свою очередь, второе государство, зная о росте затрат на вооружение первого государства, также увеличивает расходы на вооружение.

Естественно предположить, что чем больше текущий уровень затрат на оборону, тем меньше скорость их роста. Кроме того, государства наращивают свои вооружения, руководствуясь своими великодержавными притязаниями и враждебностью к другим государствам, даже если они и не угрожают существованию данного государства.

Если данные рассуждения отразить количественно, то в итоге получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha y - \beta x + \gamma \,;$$

$$\frac{dy}{dt} = ax - by + c \;;$$

где x- количество вооружений 1-го государства, y - количество вооружений 2-го государства, α и a- коэффициенты «страха», β и b - коэффициенты затрат на содержание уже имеющихся вооружений, γ и c - коэффициенты притязаний каждого государства (рис. 5.6.).

Данная модель разработана Л. Ричардсоном, который по данным о затратах на вооружения перед первой мировой войной доказал адекватность своей модели. Политологи установили пригодность модели Ричардсона для анализа серьезных международных конфликтов. За последние 200 лет из 30 конфликтов, сопровождавшихся гонкой вооружений, 25 закончились войной. При отсутствии гонки вооружений только 3 из 70 конфликтов привели к войне.

Варианты развития событий, предсказанные по модели Ричардсона: гонка вооружений, мирное сосуществование, разоружение.

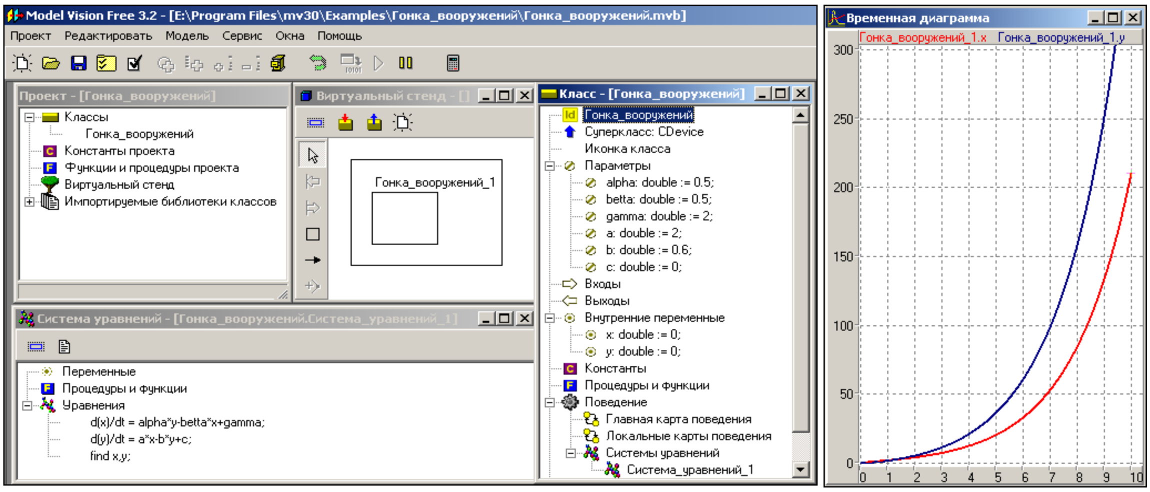


Рис. 5.6. MVS-модель гонки вооружений.

5. Модель распространения инноваций.

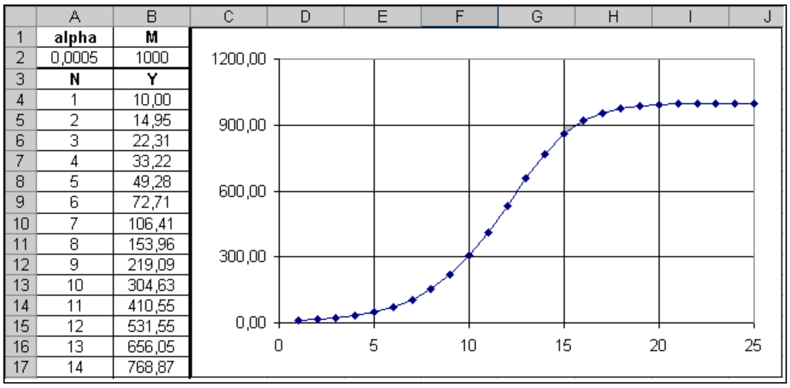
Рассмотрим модель распространения инноваций в обществе. Распространение новинки ограничено, в первую очередь, емкостью данного сегмента рынка. Одним из главных факторов, определяющих скорость процессов распространения нововведений (инноваций), является межличностное общение между сторонниками данной новинки и теми, кто еще колеблется или ничего не слышал о нововведении. Если обозначить численность людей, принявших инновацию к моменту времени t, через y_i, то число лиц, которых, в принципе, можно сагитировать равно $M - y_i$, где M – емкость рынка, максимально возможное число лиц, которые могут принять нововведение.

Можно считать, что прирост числа сторонников новинки пропорционален числу встреч между сторонниками новинки и сомневающимися. Число таких встреч пропорционально произведению $(M - y_i)\, y_i$.

В итоге получим следующее разностное уравнение для прироста числа сторонников инновации:

$$y_{i+1} - y_i = \alpha\,(M - y_i)\, y_i.$$

Здесь α - коэффициент пропорциональности. Решением этого разностного уравнения является логистическая *S*-образная функция, которая имеет верхний предел равный *M*. Так как в течение достаточно большого отрезка времени информация о новинке достигнет всех потенциально возможных потребителей.



	A	B
1	alpha	M
2	0,0005	1000
3	N	Y
4	1	10,00
5	2	14,95
6	3	22,31
7	4	33,22
8	5	49,28
9	6	72,71
10	7	106,41
11	8	153,96
12	9	219,09
13	10	304,63
14	11	410,55
15	12	531,55
16	13	656,05
17	14	768,87

Рис. 5.7. Моделирование распространения инноваций.

Подобная модель хорошо описывает процессы обновления техники, смену технологий, эволюционные процессы в социокультурной сфере, роста народонаселения и даже распространение движений протеста в обществе.

Реализация и исследование представленных выше моделей возможна средствами универсальных пакетов моделирования типа Simulink, MVS, электронных таблиц, а также на основе инструментальных систем программирования.

Дополнительную информацию о моделировании социальных и экономических систем можно найти в монографиях: [7], [17], [20], [48],[55-56], [60], [62], [69-70], [78], [83], [85], [95], [98], [105].

5.3. Моделирование процессов в экологических системах

Особенность моделирования экологических систем состоит в том, что в силу их **сложности** основные законы развития изучаются на **простых моделях**, а результаты моделирования формулируются в виде некоторых **качественных** выводов, а затем распространяются на реальные системы.

Проверить результаты моделирования можно на основании сопоставления с данными реальных наблюдений только на уровне качественных выводов. Прямое экспериментальное исследование экологических систем, с целью проверки результатов моделирования практически невозможно по очевидным причинам.

Известно лишь несколько единичных случаев, когда при искусственном вмешательстве реальные условия развития экологических систем соответствовали допущениям, использованным при построении моделей. Подобные обстоятельства, которые лишь подчеркивают особую роль моделирования, имеют место также при исследовании экономических систем и социальных процессов.

В данном разделе рассматриваются достаточно простые модели экологических систем, которые можно назвать классическими.

1. Модели роста и развития отдельной популяции.

Рассмотрим изолированную популяцию, взаимодействующую с окружающей средой, которая, естественно, ограничивает ее развитие. Одной из первых моделей роста популяции была модель Мальтуса, в которой рассматривалась однородная популяция в условиях неограниченных ресурсов среды обитания. При этом считалось, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности x. Такая модель может быть представлена следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = Rx .$$

Здесь R – врожденный биологический коэффициент скорости роста популяции. Данное уравнение имеет экспоненциальное решение с неограниченным ростом. В соответствие с этим законом изолированная популяция развивалась бы неограниченно в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко и в ограниченные периоды времени. Примером может служить размножение животных и птиц (на начальном этапе существования популяции), завезенных в места, где имеется много пищи, но нет естественных конкурентов и хищников.

В действительности растущая популяция со временем исчерпает наличные ресурсы окружающей среды и ее численность стабилизируется. В этом случае динамика развития популяции описывается так называемым логистическим уравнением Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = Rx\left(\frac{k-x}{k}\right).$$

Здесь k – экологическая емкость среды, т.е. максимальная численность вида, которую способна «прокормить» данная экологическая система. Уравнение имеет весьма простую интерпретацию – скорость роста популяции пропорциональна ее численности и свободной части среды обитания.

Логистическое уравнение обладает тем свойством, что при малых значениях x его решение носит экспоненциальный характер, а с ростом численности популяции монотонно приближается к предельному значению $x = k$. Если первоначальная численность популяции больше k, то произойдет монотонное уменьшение ее численности до равновесного значения. Модель развития популяции и результаты моделирования при различных начальных значениях, представлены на (рис. 5.8).

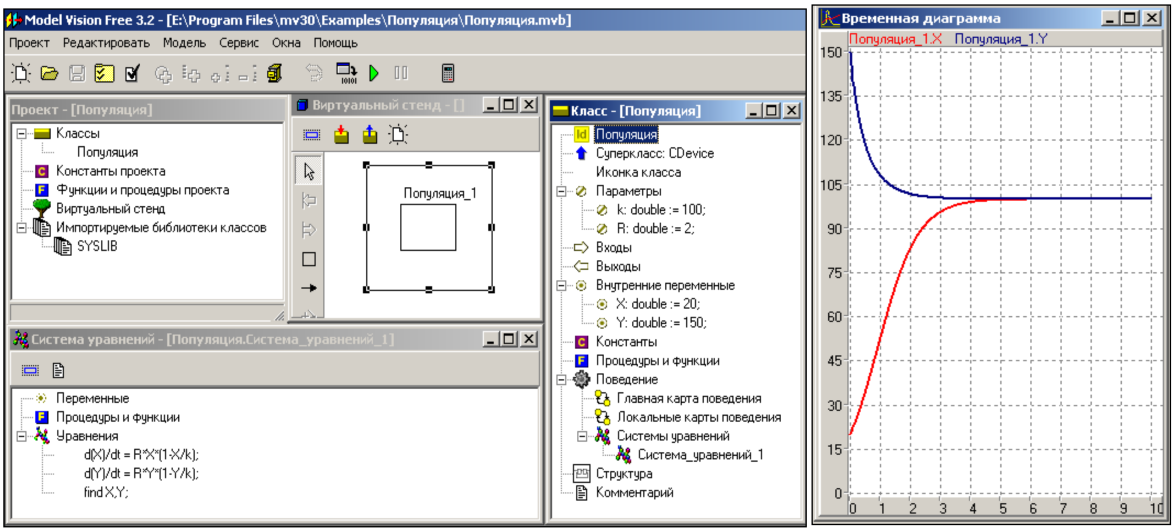


Рис. 5.8. Моделирование внутривидовой конкуренции в популяциях X и Y при различных начальных значениях их численности.

В рассмотренной модели рост численности популяции считается пропорциональным количеству особей, что, строго говоря, характерно при размножении путем деления или самооплодотворения. При половом размножении прирост будет тем выше, чем большее количество встреч происходит между разнополыми особями.

В этом случае при низкой плотности популяции скорость ее размножения резко падает, т.к. вероятность встречи особей разных полов пропорциональна квадрату численности популяции. Плотность популяции не должна опускаться ниже определенного критического уровня. Если это произойдет, то популяция вымирает. Модель, учитывающая нижнюю границу численности, естественную смертность и внутривидовую конкуренцию, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Rx(x-l)\left(\frac{k-x}{k}\right).$$

Здесь l - нижняя граница вырождения популяции. Эта величина – биологическая характеристика конкретного вида, она различна для различных популяций. Наблюдения биологов показали, что для ондатр это всего лишь пара особей на тысячу квадратных километров, и сотни тысяч особей для американского странствующего голубя. Заранее было трудно предполагать, что такой многочисленный вид уже перешел критическую границу и обречен на вымирание. Практическое применение данной модели состоит в возможности оценки степени приближения к нижней границе при промысловом значении биологического вида, т.к. скорость восстановления численности особей зависит от этой характеристики.

2. Модель системы двух популяций, конкурирующих за общий ресурс.

Рассмотрим более сложную модель. Пусть в экологической системе существует две популяции, которые эксплуатируют **общий жизненный ресурс** (общая пища или территория существования) и находятся в конкурентной борьбе за его использование. Развитие каждой популяции описывается модифицированным логистическим уравнением, которое учитывает взаимодействие популяций путем изменения экологической емкости окружающей среды за счет наличия другого вида. Модель построена для непрерывного процесса и имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = R_1 x\left(\frac{k_1 - x - \alpha y}{k_1}\right), \quad \frac{dy}{dt} = R_2 y\left(\frac{k_2 - y - \beta x}{k_2}\right).$$

Здесь R_1, R_2 - коэффициенты размножения, k_1, k_2 - параметры, характеризующие экологическую емкость среды для каждого вида соответственно. Коэффициент α – отражает влияние вида *y* на *x*. В свою очередь, коэффициент β отражает влияние вида *x* на вид *y*. Естественно, что при нулевых значениях α и β взаимодействие между видами отсутствует.

Приведем систему к безразмерному виду по методу неопределенных масштабов. Используем следующие безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}.$$

Здесь x^*, y^*, t^* – неопределенные масштабные множители. Преобразование системы уравнений, на основе представленных соотношений для безразмерных переменных, проводится в следующем порядке:

$$\frac{x^*}{t^*}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = R_1 x^* \bar{x}\left(\frac{k_1 - x^*\bar{x} - \alpha y^* \bar{y}}{k_1}\right); \quad \frac{y^*}{t^*}\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = R_2 y^* \bar{y}\left(\frac{k_2 - y^*\bar{y} - \beta x^* \bar{x}}{k_2}\right).$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{R_1}{k_1} t^* \bar{x}\left(1 - \frac{x^*}{k_1}\bar{x} - \frac{\alpha y^*}{k_1}\bar{y}\right); \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{R_2}{k_2} t^* \bar{y}\left(1 - \frac{y^*}{k_2}\bar{y} - \frac{\beta x^*}{k_2}\bar{x}\right).$$

Выберем неопределенные масштабы таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{x^*}{k_1} = 1, \quad \frac{y^*}{k_2} = 1, \quad \frac{R_1 t^*}{k_1} = 1.$$

Тогда $\quad x^* = k_1, \quad y^* = k_2, \quad t^* = \dfrac{k_1}{R_1}.$

Для оставшихся безразмерных комплексов – параметров задачи, введем следующие обозначения:

$$\frac{\alpha y^*}{k_1} = \frac{\alpha k_2}{k_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\beta x^*}{k_2} = \frac{\beta k_1}{k_2} = \varepsilon_2, \quad \frac{R_2}{k_2} t^* = \frac{R_2 k_1}{R_1 k_2} = \gamma.$$

Окончательно система уравнений примет вид:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}\left(1 - \bar{x} - \varepsilon_1 y\right); \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \gamma \bar{y}\left(1 - \bar{y} - \varepsilon_2 x\right).$$

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0, \quad \bar{y}(\bar{t} = 0) = \bar{y}_0.$$

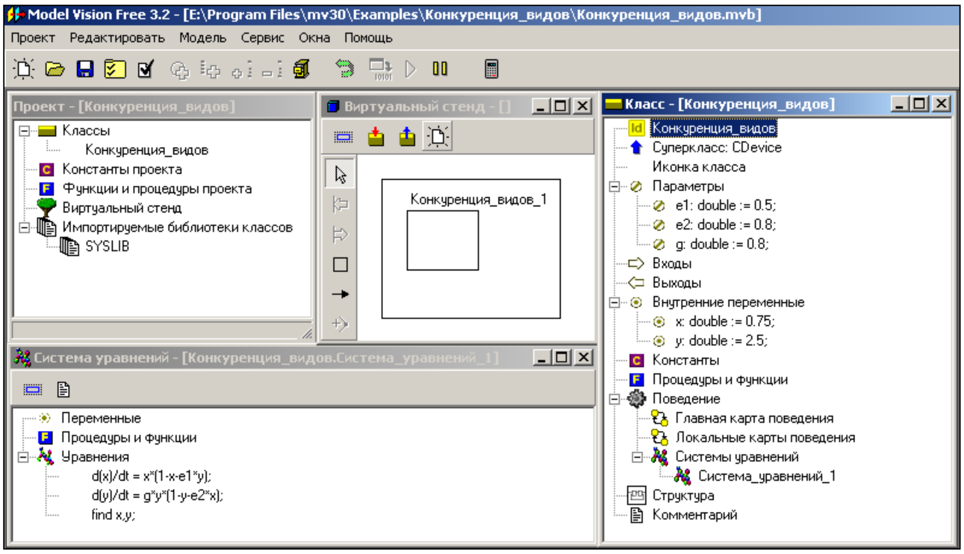


Рис. 5.9. MVS-модель межвидовой конкуренции за общий ресурс.

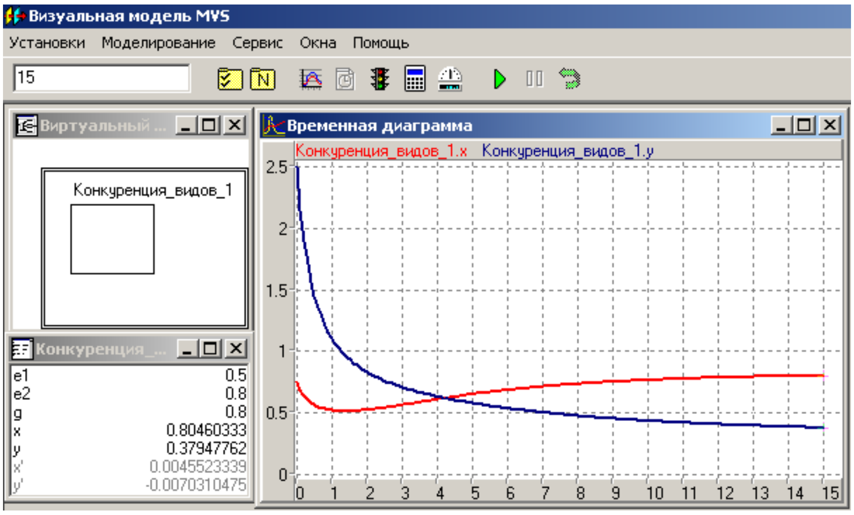


Рис. 5.10. Результаты моделирования конкуренции за общий ресурс.

На основе данной модели можно проследить следующие варианты развития популяций:

1. $\varepsilon_1 < 1, \varepsilon_2 < 1$ с экологической точки зрения это означает, что межвидовая конкуренция слабее, чем внутривидовая. Вывод: возможно совместное существование двух видов.
2. $\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 > 1$ межвидовая конкуренция является главным фактором, результат конкуренции зависит от начальных условий.
3. $\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 < 1$; $\varepsilon_1 < 1, \varepsilon_2 > 1$ один из видов вытесняет другой.

3. Модель системы «хищник-жертва».

Рассмотрим изолированную от прочих сторонних воздействий экологическую систему. В этой системе существует два вида: «хищник» и «жертва». В экологической системе для «жертвы» имеется неограниченное количество корма. «Жертва» размножается естественным путем, ее смертность обусловлена только воздействием со стороны «хищника». «Жертва» является единственным источником пищи для «хищника». В отсутствие жертв хищник, естественно, вымирает. Обозначим через x – количество «жертв», y – количество «хищников». Динамика взаимодействия между «жертвой» и «хищником» описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Rx - P_1xy, \quad \frac{dy}{dt} = P_2xy - Dy.$$

Первое уравнение отражает закономерность изменения популяции «жертв», второе – «хищников». Слагаемое Rx характеризует скорость размножения «жертвы» в отсутствии «хищника», а слагаемое P_1xy характеризует скорость гибели «жертвы» за счет уничтожения её «хищником». Скорость этого процесса пропорциональна количеству парных встреч. Слагаемое P_2xy характеризует увеличение численности «хищников» за счет поедания «жертв», а слагаемое Dy характеризует естественную смертность «хищника» в отсутствии пищи, т.е. «жертв». Коэффициенты уравнений $P, D, R – const >0$. Представленную систему уравнений называют уравнениями Лотки - Вольтерра.

Применив метод неопределенных масштабов, преобразуем переменные к безразмерному виду: $\bar{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*},$ здесь x^*, y^*, t^* – неопределенные масштабные множители. Используя эти безразмерные соотношения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= \bar{x}\left(1-\bar{y}\right), \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \bar{y}\left(\bar{x}-k\right). \end{aligned} \qquad \text{где } k = \frac{D}{R}.$$

В результате преобразования система уравнений вместо четырех параметров содержит только один – отношение коэффициентов смертности и рождаемости, которое, оказывается, и определяет взаимодействие «хищника» и «жертвы». Естественно, что для полной определенности данная система уравнений должна быть дополнена начальными условиями: $\bar{x}(\bar{t}=0) = \bar{x}_0$, $\bar{y}(\bar{t}=0) = \bar{y}_0$ – количеством «жертв» и «хищников» в начальный момент времени, которые вместе с коэффициентом k являются параметрами задачи.

Анализ данной системы уравнений показывает, что она имеет устойчивое стационарное решение при начальных условиях:

$$\bar{x}(\bar{t}=0) = k, \quad \bar{y}(\bar{t}=0) = 1.$$

Малые начальные отклонения от этого состояния порождают почти синусоидальные гармонические колебания неизменной амплитуды. Другое, но неустойчивое стационарное состояние соответствует начальным условиям:

$$\bar{x}(\bar{t}=0)=0, \quad \bar{y}(\bar{t}=0)=0.$$

Любое малое отклонение от этого состояния приводит к развитию нелинейных колебаний в системе.

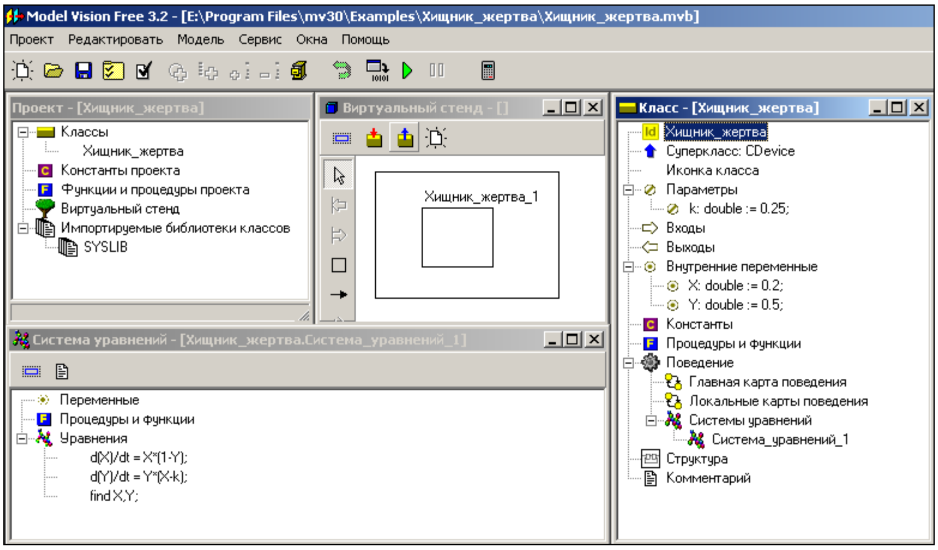


Рис. 5.11. Компьютерная MVS-модель системы «Хищник-жертва».

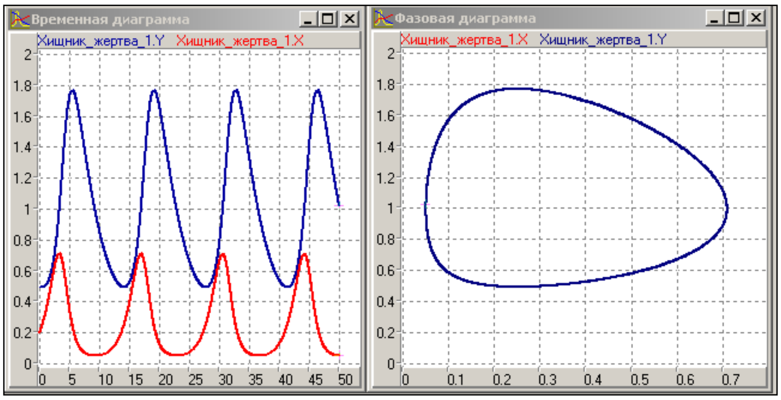


Рис. 5.12. Результаты моделирования системы «хищник-жертва».

Несмотря на ряд недостатков, модель Лотки - Вольтерра для математической экологии считается базовой, при помощи этой простой модели были установлены некоторые качественные закономерности, в частности, колебание численности видов.

4. Уточненная модель взаимодействия типа «хищник» - «жертва»

Представленная выше модель взаимодействия популяций типа «хищник» -«жертва» является биологически не корректной так как не учитывает многие важные факторы: ограниченность ресурсов для развития «жертвы» и «хищника», эффект насыщения «хищника» и т.д. Поэтому предлагаются другие модели, уточняющих поведение популяций на основе экспериментальных наблюдений. Модель А.Д.Базыкина является обобщением классической модели Лотки - Вольтерра. Она учитывает следующие важные биологические факторы:

1. **Насыщение хищников**. В модели Лотки-Вольтерра предполагается, что интенсивность поедания жертв хищниками линейно растет с ростом плотности популяции жертв. Это положение не соответствует экспериментальным данным. В действительности с ростом плотности популяции жертв рацион хищников асимптотически стремится к постоянному значению. Это означает, что «аппетит» хищника имеет определенные пределы. А.Д.Базыкин описывает эту зависимость функцией следующего вида: $x/(1+px)$.
2. **Конкуренция жертв**. Из ограниченности жизненных ресурсов вытекает невозможность безграничного размножения популяции жертв. Этот эффект можно учесть логистическим членом вида $Rx(k-x)/k$, что эквивалентно введению в уравнения слагаемого: $-Ex^2$.
3. **Конкуренция хищников**. Даже при неограниченном питании популяция хищников не может расти безгранично. Недостаток, например территории, приводит к конкуренции, которую можно учесть с помощью дополнительного слагаемого $-My^2$.

С учетом данных уточнений модель взаимодействия хищника и жертвы представляется следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1+px} - Ex^2, \quad \frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1+px} - My^2.$$

С помощью замены переменных по методу неопределенных масштабов

$$\bar{x} = Ax/D, \quad \bar{y} = Ay/D, \quad \bar{t} = t/A, \quad \gamma = C/A, \quad \alpha = PD/A, \quad \varepsilon = E/D, \quad \mu = M/B.$$

исходная система уравнений приводится к следующему безразмерному виду:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x} - \frac{\overline{xy}}{1+\alpha\bar{x}} - \varepsilon\bar{x}^2, \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = -\gamma\bar{y} + \frac{\overline{xy}}{1+\alpha\bar{x}} - \mu\bar{y}^2.$$

Естественно, что данная система уравнений существенно отличается от модели Лотки - Вольтерра, т.к. она учитывает более сложный характер внутривидового и межвидового взаимодействия. В данной системе возможно устойчивое равновесие, существование устойчивого предельного цикла и другие варианты поведения. Например, только учет насыщения «хищника» существенно меняет поведение системы (рис. 5.13).

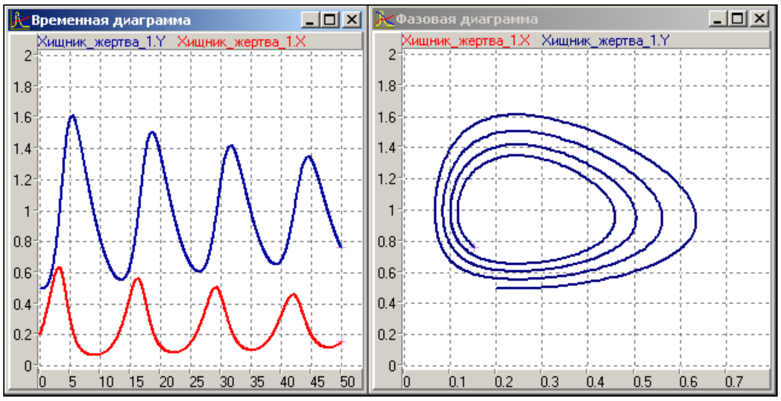


Рис. 5.13. Развитие процесса по модели А.Д.Базыкина.

Более подробный анализ данной модели можно провести путем численного эксперимента. Для полного качественного исследования необходимо строить фазовые диаграммы поведения системы для различных сочетаний параметров.

5. Дискретные модели популяций с непересекающимися поколениями.

Ранее мы рассматривали непрерывные модели, что правомерно для достаточно больших популяций. Во многих случаях численность популяции представляет собой дискретную функцию времени. Многие популяции развиваются путем полной смены поколений. Такие закономерности имеют место, например, у некоторых растений и насекомых.

Если предположить, что численность данного поколения зависит от численности предыдущего поколения, то для описания динамики численности популяции можно применить разностные уравнения вида: $N_{t+1} = F(N_t)$. Где N_{t+1}, N_t - численность двух последовательных поколений популяции.

В качестве разностного аналога логистического уравнения можно использовать следующее уравнение: $N_{t+1} = N_t \exp(R(1 - N_t / k))$, или более простую зависимость, в которой правая часть принимается равной нулю, если $N_t / k > 1$: $N_{t+1} = R \cdot N_t \cdot (1 - N_t / k)$.

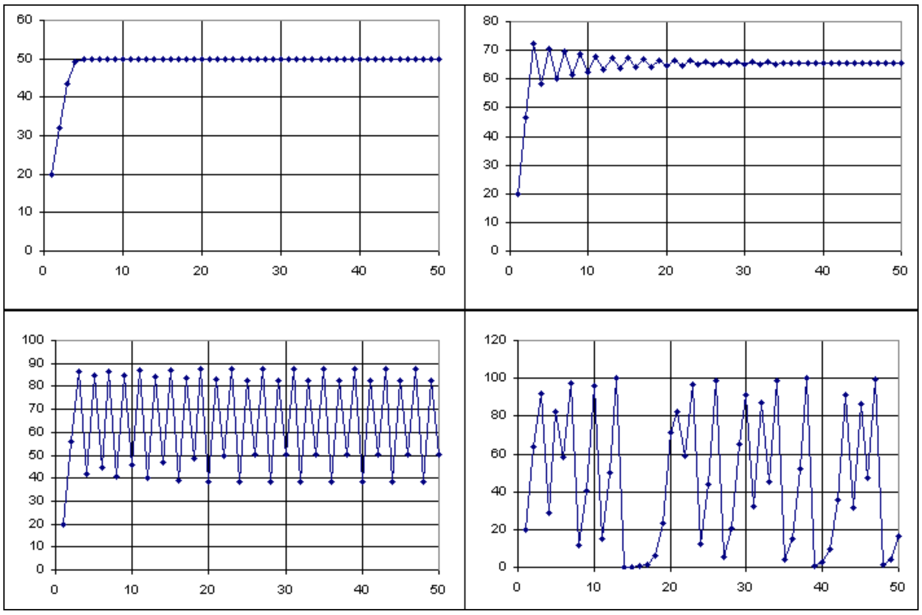


Рис. 5.14. Результаты моделирования дискретного размножения для различных значений параметра R.

В зависимости от сочетания параметров в подобных системах могут возникать самые разнообразные режимы: монотонное и колебательное приближение к состоянию равновесия, автоколебания и хаотическое поведение. Качественные закономерности динамики развития популяций необходимо установить, построив и реализовав соответствующие модели в ходе численного эксперимента (рис. 5.14).

В заключение данного раздела следует отметить, что представленные в нем модели могут иметь и другую интерпретацию. В частности логистическая модель описывает распространение инноваций, модель Лотки - Вольтерра, в другой интерпретации физического смысла параметров, в точности соответствует модели кинетики некоторых химических реакций и т.д.

Дополнительную информацию о моделировании экологических систем можно найти в монографиях [52], [58], [97], [102].

5.4. Порождение хаоса детерминированными системами

Может ли быть символом нашего мира устойчивость и периодическое движение? Всегда ли справедлива концепция, согласно которой все явления подчиняются динамическим законам - настоящее есть необходимое следствие прошлого, а будущее предопределено настоящим? В нашей среде обитания мы обнаруживаем неожиданные крупномасштабные флуктуации. Например, климат на Земле сильно флуктуировал на протяжении периодов, которые имеют малую протяженность по сравнению с характерным временем эволюции Солнца. Как такое возможно? Каким же должен быть механизм развития, который привел к такому разнообразию живой природы?

В представлениях о развитии природы спор сторонников **эволюции** и **катастроф** имеет длительную историю. Сторонники эволюционного пути представляют развитие как непрерывный процесс: «природа не делает скачков» (Ч.Дарвин, Ч.Лайель). Их оппоненты считают развитие последовательностью катастроф, уничтожающих все созданное ранее, чтобы потом возникал совершенно иной мир (Ж.Кювье).

Современная наука придерживается точки зрения, что развитие природы содержит несколько последовательных этапов: **эволюция, кризис, катастрофа**, затем переход к новому этапу эволюции. Этап эволюционного развития заканчивается кризисом, который является следствием накопления противоречий эволюционного периода. Кризис сопровождается ослаблением внутренних связей, что приводит к возникновению неустойчивости в системе. Кризис разрешается катастрофой. В порожденном хаосе на осколках старой системы зарождается новое поколение живой и неживой природы – возникает новое переходное устойчивое состояние к очередному этапу эволюции.

Такая последовательность фаз составляет характерный цикл развития. Можно сказать, что наш мир – мир неустойчивостей и флуктуаций, которые, в конечном счете, ответственны за поразительное разнообразие форм и структур окружающей нас природы.

В данном разделе мы познакомимся с некоторыми причинами указанных явлений.

Для многих систем малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям результата, т.е. конечного состояния. Но есть ситуации, для которых справедливо противоположное. Например, сторона, на которую упадет монета, зависит от слабого прикосновения и заранее не предсказуема. В последние годы стало ясно, что высокая чувствительность к начальным условиям, приводящая в ряде случаев к **хаотическому поведению** во времени, никоим образом не исключение, а типичное свойство многих систем. С точки зрения математики в нелинейных динамических системах (биологические, метеорологические, экономические и т.п.) можно обнаружить хаос, который связан с неустойчивостью систем. На достаточно продолжительных промежутках времени поведение таких объектов не предсказуемо.

Известно, что нелинейная система в случае ее неустойчивого поведения может либо выйти на новое устойчивое состояние, либо перейти в режим автоколебаний, либо перейти в режим хаотического поведения.

Метеоролог Е. Лоренц обнаружил, что простая система 3-х нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая моделирует конвективное движение воздуха в атмосфере, может привести к развитию хаотического движения:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(X - Z), \quad \frac{dY}{dt} = -XZ + rX - Y, \quad \frac{dZ}{dt} = XY - bZ.$$

Лоренц открыл один из первых примеров детерминированного хаоса, т.е. хаоса, который порождается в системах с детерминированными параметрами (рис. 5.15).

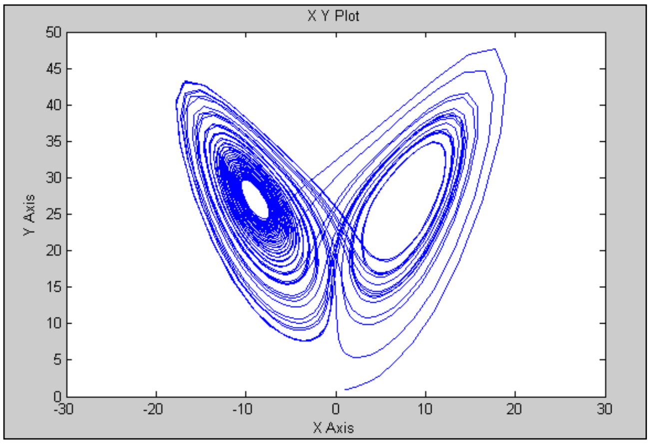


Рис. 5.15. Фазовая диаграмма решения уравнений Лоренца.

Примерами нелинейных систем, в которых проявляется детерминированный хаос, являются: движущаяся жидкость вблизи порога развития турбулентности; химические реакции; развитие биологических популяций; взаимодействие волн в плазме и т.п. Совсем недавно в 1977 году развитие хаоса было обнаружено при моделировании динамики биологической популяции. При этом рассматривалось достаточно простое разностное логистическое уравнение вида:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)\,.$$

Суть уравнения состоит в следующем. Численность популяции в следующем году x_{n+1} пропорциональна численности популяции в этом году x_n, а также пропорциональна свободной части жизненного пространства (см. п.5.3). Причем результаты, полученные на данной простой модели, справедливы для большого числа биологических, химических и физических систем. Пример подобного поведения представлен на рис. 5.16.

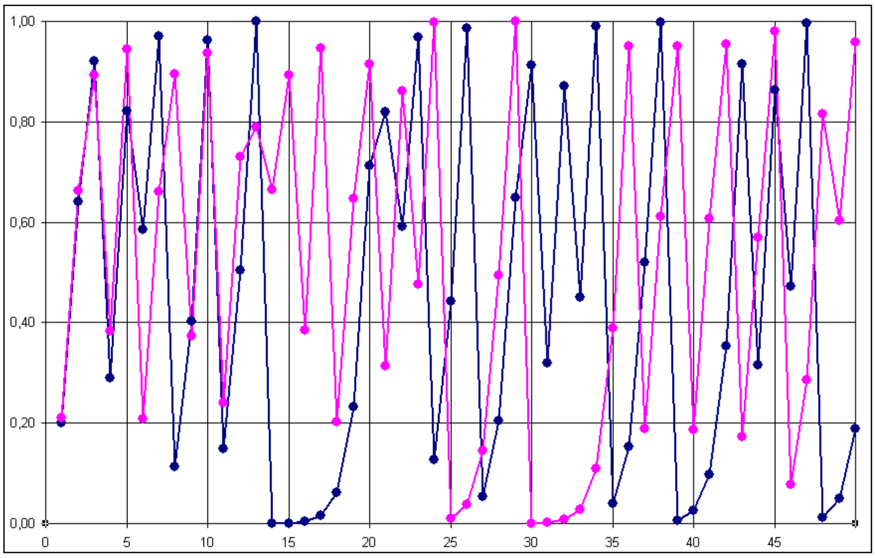


Рис. 5.16. Хаотическое поведение популяций при близких начальных условиях.

Казалось бы, что благодаря механизму обратной связи численность популяции будет стремиться к некоторому среднему значению. Однако моделирование процессов при определенных сочетаниях значений параметров дает более сложное хаотическое поведение. Практический вывод, который следует из представленных примеров: простые динамические системы не обязательно приводят к простому поведению.

Можно привести еще десятки примеров порождения хаоса и развития неустойчивости из области экономики, химии, квантовой механики, биологии и других наук. Например: потеря устойчивости тонкостенной конструкции под действием веса и ветровой нагрузки, внезапное разрушение кристаллической решетки, самоорганизация биохимических систем, взрывное развитие популяций, возникновение турбулентности, флаттер самолетов и т.д. В то же время следует отметить и обратное явление в нелинейных системах – зарождение и развитие из хаоса упорядоченных структур. В качестве примера можно привести правильную форму снежинки, которая порождена в хаосе снежных туч.

Впрочем, эти эффекты – предмет целого научного направления, называемого синергетикой, которое занимается исследованием нелинейных процессов в открытых диссипативных системах вдали от состояния равновесия. Компьютерное моделирование подобных систем позволяет наиболее наглядно выявить их свойства и совсем неочевидные закономерности. Однако одна из закономерностей – прогноз поведения системы, в случае ее хаотического поведения (рис. 5.16), на длительное время невозможен, так как весьма близкие по начальным условиям состояния системы с течением времени расходятся кардинально.

Дополнительную информацию по данному вопросу можно получить в монографиях [12], [51], [84], [93], [106].

5.5. Контрольные вопросы к главе 5

1. В чем состоят особенности моделирования экономических систем.
2. В чем состоят особенности моделирования экологических систем.
3. В чем состоят особенности моделирования социальных систем.
4. Различия в моделировании технических, естественных и социально-экономических систем.
5. Какие стационарные состояния имеет система «хищник-жертва».
6. В чем причины хаотического поведения нелинейных систем.
7. Приведите примеры моделирования исторических процессов.
8. Приведите примеры моделирования экономических систем.

Список литературы

Основная научная литература

1. Введение в математическое моделирование. Под ред. П.В. Трусова. - М.: Логос, 2007.-440с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.-472с.
3. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: в 2-х частях. – М.: Мир, 1990.
4. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.-400с.
5. Компьютерная геометрия/ Н.Н. Голованов, Д.П. Ильютко, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко – М.: Академия, 2006.-512с.
6. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004. 320с.
7. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики. – М.: НТВ-Дизайн, 2002.-256с.
8. Неуймин Я.Г. Модели в науке и технике. – Л.: Наука, 1984.- 283с.
9. Острейковский В.А. Теория систем. – М.: Высшая школа, 1997.-240с.
10. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.-367с.
11. Плохотников Э.К. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – М.: Едиториал УРСС, 2003.-280с.
12. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2005.-320с.
13. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Высшая школа, 2007.-343с.
14. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Лабораторный практикум. - М.: Высшая школа, 2007.- 127с.
15. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. – М.: Едиториал УРСС, 2004.-440с.

Основная учебная литература

16. Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сенюченков Ю.Б. Практическое моделирование динамических систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.-464с.
17. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2003.-368с.
18. Бешенков С.А., Ракитина Е.А. Моделирование и формализация. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.-336с.
19. Бочкин А.И. Методика преподавания информатики. Учеб. Пособие. - Мн.: Высш. шк., 1998.- 431с.
20. Варфоломеев В.И., Назаров С.В. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2004.-264с.
21. Гейн А.Г. Обязательный минимум содержания образования по инфоматике//Информатика, 2001, №30. – С.2-30.

22. Гейн А.Г., Сенокосов А.И., Юнерман Н.А. Информатика: Учебное пособие для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2000.- 255с.
23. Гейн А.Г. Информатика 7-9кл.: Учеб. Для общеобразоват. учебн. заведений/ А.Г. Гейн, А.И.Сенокосов, В.Ф.Шолохович. – М.: Дрофа, 1998.-240с.
24. Дьяконов В.П. Simulink-4. Специальный справочник. – СПб: Питер, 2002. – 528с.
25. Информатика: Энциклопедический словарь для начинающих. Сост. Поспелов Д.А. - М.: Педагогика-Пресс, 1994.-352с.
26. Информатика. 7-9 класс. Базовый курс. Под ред. Н.В.Макаровой. - СПб.: Питер, 2001.-376с.
27. Информатика. 9 класс. / Под ред. Н.В.Макаровой. - СПб.: Питер Ком, 1999.-304с.
28. Информатика. Задачник-практикум в 2т. / Под ред. И.Г. Семакина, Е.К. Хеннера: М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
29. Информатика в школе: Приложение к журналу «Информатика и образование»// Бещенков С.А., Ракитина Е.А. Решение типовых задач по моделированию. №1-2005. М.: Образование и Информатика, 2005.-96с.
30. Казиев В.М. Введение в анализ, синтез и моделирование систем. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.-244с.
31. Кодирование информации. Информационные модели: 9-10 кл. : Учебник для общеоразоват. учебных заведений / Кушниренко А.Г., Леонов А.Г., Эпитектов М.Г. и др. М.: Дрофа, 1996.- 208с.
32. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel.-СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.-384с.
33. Кудрявцев Е.М. КОМПАС-3D V6. Основы работы в системе. – М.: ДМК Пресс, 2004.-528с.
34. Математический энциклопедический словарь.- М.: Сов. Энциклопедия, 1988.-847с.
35. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика. М.: Издательский центр «Академия» , 2004.-816с.
36. Могилев А.В., Хеннер Е.К. О понятии «Информационное моделирование» //Информатика и образование, 1997, №8. - С.3-8.
37. Першиков В.И., Савинков В.М. Толковый словарь по информатике. М.: Финансы и статистика, 1995.- 227с.
38. Потемкин А.М. Трехмерное твердотельное моделирование в системе КОМПАС-3D. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512с.
39. Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Информационные системы и модели. Элективный курс: Учебное пособие. - М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005.-309с.
40. Сиденко Л.Н. Компьютерная графика и геометрическое моделирование.- СПб.: Питер, 2009.-224с.
41. Стариченко Б.Е. Теоретические основы информатики. – М.: Горячая линия-Телеком, 2003.-312с.
42. Суворова Н.И. Информационное моделирование. Величины, объекты, алгоритмы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.-128с.

43. Томашевский В.Н., Жданова Е.Г. Имитационное моделирование в среде GPSS. – М.: Бестселлер, 2003. - 416с.
44. Угринович Н.Д. Исследование информационных моделей. Элективный курс: Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.-200с.
45. Угринович Н.Д. Информатика и ИКТ. Базовый уровень: Учебник для 11 класса. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 188с.
46. Фридланд А.Я. Информатика: процессы, системы, ресурсы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 232с.
47. Шафрин Ю.А. Информационные технологии.- М.: ЛБЗ, 1998.- 704с.
48. Цисарь И.Ф., Нейман В.Г. Компьютерное моделирование экономики. - М.: Диалог-МИФИ, 2008.-384с.

Дополнительная литература

49. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. - 471с.
50. Алямовский А.А. SolidWorks/CosmoWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2004.-432с.
51. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992.-544с
52. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. - М.: Наука, 1985.- 271с.
53. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики. - М.: Наука, 1983. – 328с.
54. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем.- М.: Наука, 1988. – 427с.
55. Вавилов А.А. и др. Имитационное моделирование производственных систем - М.: Техника, 1983. -276с.
56. Вайдлих В. Социодинамика. Системный подход к математическому моделированию в социальных науках.- М.: Едиториал УРСС, 2005.- 480с.
57. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирование.— М.: Высшая школа, 1984. - 345с.
58. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Мир, 1976.-286с.
59. Гнеденко Б.Д., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1987.-295с.
60. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. - М.: ЮНИТИ, 1995.- 136с.
61. Дильман В.В., Полянин А.Д. Методы модельных уравнений. – М.: Химия, 1988.-304с.
62. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 283с.
63. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств. – М.: Высш. шк., 1991.-400с.
64. Колесов Ю.Б. Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2004. - 240 с.

65. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 224с.
66. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Объектно-ориентированный подход. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 192с.
67. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем: Практикум по компьютерному моделированию. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 352с.
68. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. Под ред. А.А. Самарского. - М.: Наука, 1988.-176с.
69. Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А. Законы истории. Математическое моделирование развития. Демография, экономика, культура. - М.: Комкнига, 2007.- 224с.
70. Коротаев А.В., Малков С.Ю. История и синергетика. Математическое моделирование социальной динамики М.: КомКнига, 2005. - 192 с.
71. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
72. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Изд-во МГУ, 1983.-264с.
73. Кулинич А.А. Субъектно-ориентированная система концептуального моделирования «Канва». Материалы 1-й Международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». Москва, октябрь, 2001.- С. 87-92.
74. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel.- СПб.: БХВ-Петербург, 2005.-704с.
75. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. - М.: Сов. радио, 1978.- 248с.
76. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel. – М.: Финансы и статистика, 2002.-368с.
77. Математическое моделирование/ Под ред. Дж. Эндрюса, Р.Мак-Лоуна.– М.: Мир, 1979.– 277с.
78. Математическая экономика на персональном компьютере. Под. ред. Кубонивы М. – М.: Финансы и статистика, 1991.
79. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.- 488с.
80. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Едиториал УРСС, 2004.-192с.
81. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971.-208с.
82. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента.- М.: Металлургия, 1980.-152с.
83. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М.: Мир, 1975.
84. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. - М : Мир, 1990.-344с.
85. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели. Компьютерное моделирование.- М.: Вузовский учебник, 2007.-368с.
86. Павловский Ю.Н., Белотелов Н.В., Бродский Ю. И. Имитационное моделирование. - М.: Академия, 2008.-240с.

87. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло - и массообмена.-М.: Наука, 1984.- 286с.
88. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. - М.: Энергоатомиздат, 1996.-357с.
89. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998.-280с.
90. Половинкин А.И. Основы инженерного творчества. - М.: Машиностроение, 1988.-368с.
91. Поспелов Д.А. Большие системы. Ситуационное моделирование. – М.: Знание, 1975.-128с.
92. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект-основа новой информационной технологии. - М.: Наука, 1983.-280с.
93. Пригожин И. От существующего к возникающему.- М.: Наука,1985.- 328с.
94. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ - М.: Мир, 1987. 345с.
95. Проблемы математической истории. Математическое моделирование исторических процессов. Под ред. Г.Г. Малинецкого, А.В. Коротаева. - М.: Либроком, 2008.-208с.
96. Реклейтис Г. и др. Оптимизация в технике: В 2-х кн./ Пер. с англ.– М.: Мир, 1986.
97. Ризниченко Ю. П. Математические модели в биофизике и экологии. – М. Изд-во МГУ, 2003.-237с.
98. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели в приложении к социальным, биологическим и экономическим задачам.-М.: Мир, 1986.-473с.
99. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989.-432с.
100. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике.- М.: Наука, 1967.-428с.
101. Сениченков Ю.Б. Численное моделирование гибридных систем. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 206 с.
102. Солбриг О., Солбриг Д. Популяционная биология и эволюция.- М.: Мир, 1981. - 488с.
103. Солсо Р.Л. Когнитивная психология.-М.: Тривола, 1996.-523с.
104. Строгалев В.П., Толкачева И.О. Имитационное моделирование. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. - 280с.
105. Тихомиров Н.П., Райцин В.Я., Гаврилец Ю.Н., Спиридонов Ю.Д. Моделирование социальных процессов. - М.:, 1993.
106. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир, 1985. – 254с.
107. Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем.- М.: Мысль, 1978.- 257с.
108. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.- М.: Мир, 1985.-384с.
109. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. - М.: Прогресс, 1971.-367с.
110. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985.
111. Хернитер М.Е. Multisim - современная система компьютерного моделирования и анализа. - М.: ДМК Пресс, 2006.- 492 с.

112. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных математических моделей.- М.: Мир, 1991.-368с.
113. Шеннон Р.Е. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. - М.: Мир, 1978. - 418с.
114. Шрайбер Т.Дж. Моделирование на GPSS. - М.: Машиностроение, 1980.- 379с.