

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУВПО "Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева"

Рузаевский институт машиностроения

Кафедра автоматизации производственных процессов

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Конспект лекций**

(часть 1)

Составители: А.М. Коленченко  
Е.Н. Коленченко

САРАНСК  
2014

Рецензенты:

Кузьмичёв Н. Д., доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общенаучных дисциплин Рузаевского института машиностроения Мордовского государственного университета им. Н.П.Огарёва;

Корнилова Т.В., кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой общеобразовательных и профессиональных дисциплин Самарского государственного университета путей сообщений.

**Коленченко А.М.** Теоретические основы электротехники, ч.1, конспект лекций: учебное пособие / А.М. Коленченко, Е.Н. Коленченко; Мордов. гос. ун-т. – Саранск, 2014.

Об авторах:

Коленченко А.М. - кандидат технических наук, доцент кафедры общетехнических дисциплин ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва».

Коленченко Е.Н. – старший преподаватель кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин Самарского государственного университета путей сообщений.

В учебном пособии рассматриваются основы теории линейных электрических цепей постоянного и переменного тока, методы расчета нелинейных электрических цепей, трехфазные электрические цепи, четырехполюсники, переходные процессы в электрических цепях.

Учебное пособие предназначено для студентов, проходящих подготовку по направлению подготовки бакалавров 151900.62 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

	<b>Оглавление</b>	стр
	ВВЕДЕНИЕ	6
<b>Тема №1</b>	<b>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ</b>	6
	1.1 Электрическая цепь	6
	1.2 Классификация электрических токов, ЭДС и напряжений	7
	1.3 Понятие о линейных и нелинейных элементах и цепях	8
	1.4 Элементы электрических цепей и их параметры	
	1.4.1 Сопротивление	8
	1.4.2 Индуктивность	9
	1.4.3 Взаимная индуктивность	10
	1.4.4 Емкость	10
	1.5 Понятие схемы замещения электрических цепей. Условное положительное направление токов, ЭДС и напряжений в цепи	11
	1.6 Основные определения, относящиеся к топологии электрической цепи	12
<b>Тема №2</b>	<b>ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ, РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ</b>	13
	2.1 Идеальные и реальные источники ЭДС и тока. Схемы замещения	13
	2.2 Режимы работы электрической цепи	14
	2.3 Законы электрических цепей	15
<b>Тема №3</b>	<b>АНАЛИЗ И РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА</b>	16
	3.1 Метод суперпозиции (наложения)	16
	3.2 Метод контурных токов	17
	3.3 Метод узловых потенциалов	18
	3.4 Метод двух узлов	19
	3.5 Метод эквивалентного генератора	20
	3.6 Баланс мощностей	22
<b>Тема №4</b>	<b>АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ</b>	23
	4.1 Графический метод расчета (метод эквивалентных преобразований)	24
	4.2 Аналитический метод расчета	25
<b>Тема №5</b>	<b>ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА</b>	27
	5.1 Основные понятия	27
	5.2 Получение синусоидальной ЭДС	28
	5.3 Изображение синусоидальных $e$ , $u$ , $i$ в виде векторов	29
	5.4 Представление синусоидальных величин комплексными числами	31
	5.4.1 Некоторые операции с комплексными числами	32
	5.4.2 Изображение производной синусоидальной функции	33

	5.4.3	Изображение интеграла от синусоидальной функции	33
	5.5	Метод комплексных амплитуд (символический метод). Законы Кирхгофа для синусоидальных цепей	34
	5.6	Среднее и действующее значение синусоидальных функций	35
	5.7	Простейшие линейные цепи однофазного синусоидального тока	37
	5.7.1	Резистивный элемент в цепи синусоидального тока	37
	5.7.2	Индуктивность в цепи синусоидального тока	39
	5.7.3	Конденсатор в цепи синусоидального тока	40
	5.7.4	Комплексная мощность	41
	5.7.5	Последовательное соединение RL и RC	42
	5.8	Последовательное и параллельное соединения элементов R, L, C. Резонансы напряжений и токов. Эквивалентные преобразования схем электрической цепи	44
	5.8.1	Последовательное соединение R, L, C. Резонанс напряжений. Треугольник сопротивлений	44
	5.8.2	Параллельное соединение R, L, C. Треугольники токов и проводимостей. Резонанс токов	47
	5.9	Эквивалентные преобразования схем электрической цепи	50
	5.9.1	Последовательное, параллельное и смешанное соединения	50
	5.9.2	Эквивалентные участки цепи с последовательным и параллельным соединениями	52
<b>Тема №6</b>		<b>ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ</b>	53
	6.1	Понятие о взаимной индуктивности	53
	6.2	Последовательное соединение индуктивно связанных катушек при согласном и встречном включении	54
	6.3	Входное сопротивление воздушного трансформатора	57
<b>Тема №7</b>		<b>ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ</b>	59
	7.1	Системы уравнений четырехполюсника	59
	7.2	Параметры холостого хода и короткого замыкания	61
	7.3	Режим активной нагрузки четырехполюсника	62
	7.4	Режим согласованной нагрузки	63
	7.5	Характеристические параметры четырехполюсника	64
	7.6	Вносимое затухание (усиление) четырехполюсника	65
<b>Тема №8</b>		<b>ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ</b>	66
	8.1	Основные понятия. Способы изображения симметричной трехфазной системы ЭДС	66
	8.2	Соединение фаз трехфазного источника питания звездой и треугольником	68
	8.3	Трехфазные цепи с симметричными пассивными приемниками	70
	8.3.1	Соединение звездой (3-х и 4-х проводные цепи)	70
	8.3.2	Соединение треугольником	71

8.4	Трехфазные цепи с несимметричными пассивными приемниками	72
8.4.1	Соединение звездой в 4-х проводной цепи	72
8.4.2	Соединение треугольником	73
8.5	Мощность в трехфазной цепи	74
8.5.1	Соединение звездой	74
8.5.2	Соединение треугольником	75
<b>Тема №9</b>	<b>ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ</b>	<b>76</b>
9.1	Основные понятия	76
9.2	Переходные процессы в цепях с индуктивностью	77
9.2.1	Включение RL на постоянное напряжение	77
9.2.2	Короткое замыкание RL цепи постоянного тока	78
9.2.3	Отключение цепи RL от источника постоянного напряжения	80
9.2.4	Включение цепи RL на синусоидальное напряжение	80
9.3	Переходные процессы в цепях с емкостью	81
9.3.1	Включение цепи RC на постоянное напряжение	81
9.3.2	Короткое замыкание цепи RC (разряд конденсатора C на сопротивление R)	83
9.3.3	Релаксационный генератор	84
9.4	Переходные процессы в R,L,C цепи. Включение R,L,C цепи на постоянное напряжение (ЭДС)	84
9.4.1	Апериодический процесс	86
9.4.2	Колебательный процесс	87
<b>Тема №10</b>	<b>МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ</b>	<b>88</b>
10.1	Основные понятия	88
10.2	Расчет неразветвленной магнитной цепи	91
10.3	Расчет разветвленных магнитных цепей	92
10.4	Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником	95
	<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b>	<b>97</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Электротехника** – это наука, исследующая вопросы производства, передачи, распределения и использования электрической энергии.

Электрическая энергия в настоящее время более чем любые другие виды энергии используется в различных областях жизни. Этому способствуют следующие преимущества электрической энергии перед другими видами энергии:

1) она легко преобразуется в другие виды энергии (механическую, тепловую, лучистую, химическую и др.);

2) экономично и очень быстро (со скоростью света) передается на дальние расстояния;

3) электрическими устройствами сравнительно просто управлять.

Зарождение электротехники относится к первой половине XIX века, когда были открыты основные закономерности электрических явлений, а во второй половине этого же века были разработаны основные электрические машины и трансформаторы. Это был также период строительства первых электрических станций, без которых сейчас мы не мыслим свое существование. Фактически электрификация является стержнем строительства экономики общества, а степень использования электрической энергии свидетельствует об уровне его развития.

Включение дисциплины ТОЭ в государственный образовательный стандарт объясняется тем, что принцип работы всех рабочих машин, используемых в области машиностроения, и построение устройств управления ими, базируется на основных фундаментальных понятиях данной дисциплины.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

### 1.1. Электрическая цепь

**Электрической цепью** называется совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока, процессы в которых описываются с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), электрическом токе и электрическом напряжении.

Электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии, объединенных между собой соединительными проводами.

К **источникам** электрической энергии относятся генераторы, аккумуляторы, солнечные батареи и др., в которых происходит преобразование механической, химической, тепловой и других видов энергии в электрическую.

**Приемниками** электрической энергии (нагрузкой) являются устройства (например, электрические лампы, электродвигатели и другие электрические приборы), в которых происходит обратное преобразование энергии.

Любая электрическая цепь или ее часть может быть представлена в виде **двухполюсника**, имеющего два вывода (рис.1.1).

Различают двухполюсники активные и пассивные.

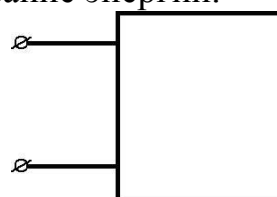


Рис.1.1

*Активным* двухполюсником называется такой двухполюсник, который содержит внутри себя источники электрической энергии, не компенсирующие взаимно друга.

*Пассивным* двухполюсником называется такой двухполюсник, который не содержит источников электрической энергии или они скомпенсированы внутри него. Двухполюсники могут быть одноэлементными (рис.1.2), двухэлементными (рис.1.3) и многоэлементными (рис.1.4).

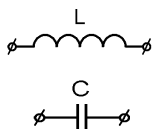


Рис.1.2

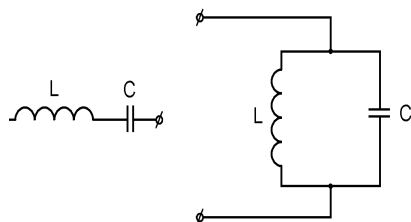


Рис.1.3

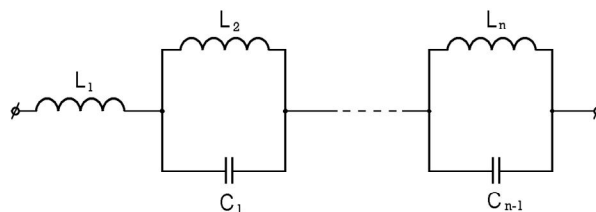


Рис.1.4

## 1.2. Классификация электрических токов, ЭДС и напряжений

Электрический ток, величина и направление которого не изменяются с течением времени, называют *постоянным*. Обозначают прописной буквой  $I$ .

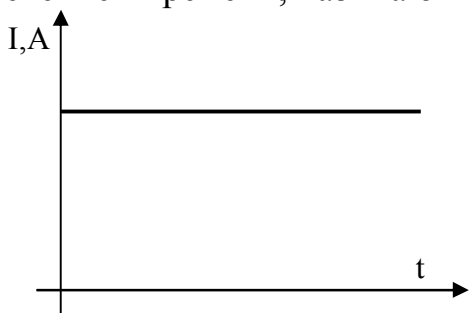


Рис.1.5

График зависимости  $I = f(t)$  представлен на рис.1.5.

Выражение для силы тока имеет вид:

$$I = \frac{q}{t},$$

где  $q$  – величина электрического заряда,  $t$  – время.

Электрический ток, величина или направление которого изменяются во времени, называется *переменным* током.

Ток измеряется в амперах (обозначается А). Ток имеет силу в 1 А, если через поперечное сечение проводника в 1 секунду проходит заряд в 1 кулон.

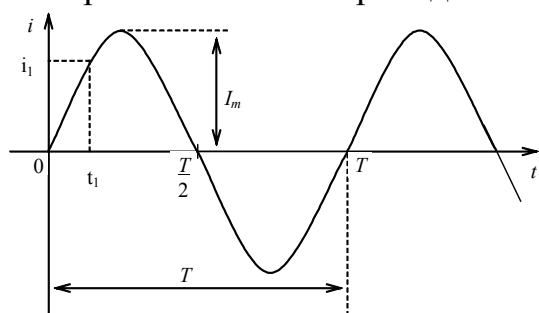


Рис.1.6

Формы кривых изменяющихся токов весьма разнообразны. Доминирующее значение среди них имеют периодические токи (рис.1.6, 1.7).

*Периодическими* называются такие токи, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени.

*Мгновенное* значение тока – значение тока в данный момент времени, например, на рис.1.6 в момент времени  $t_1$  значение тока  $i_1$ .

Минимальное время, через которое мгновенное значение тока повторяется, называется *периодом* (обозначают  $T$ ).

Число периодов в одну секунду называется *частотой* (обозначают  $f$ ).

Частота и период связаны известным соотношением

$$f = \frac{1}{T}.$$

Токи, изменяющиеся по гармоническому закону, называют *синусоидальными* токами. Кроме перечисленных выше параметров, важнейшим его параметром является *амплитудное значение*  $I_m$  (рис.1.6).

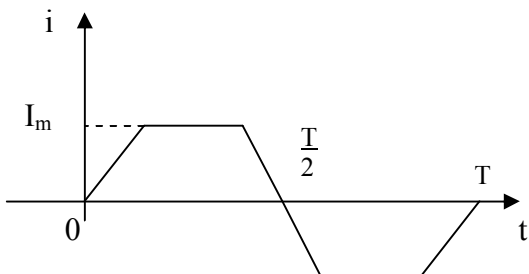


Рис.1.7

Если закон изменения мгновенных значений периодического тока отличен от гармонического, то такой ток называется *несинусоидальным* током (пример показан на рис.1.7).

Токи в электрических цепях возникают под воздействием ЭДС, возбуждаемых в источниках.

ЭДС и создаваемые ими напряжения в соответствии с законом изменения их мгновенных значений называют *постоянными, переменными, синусоидальными и несинусоидальными*.

Постоянные ЭДС и напряжения обозначают прописными буквами  $E$  и  $U$ , а переменные – строчными  $e$  и  $u$ .

### 1.3. Понятие о линейных и нелинейных элементах и цепях

Элементы цепей и составленные из них цепи различаются по виду их вольт-амперных характеристик (ВАХ).

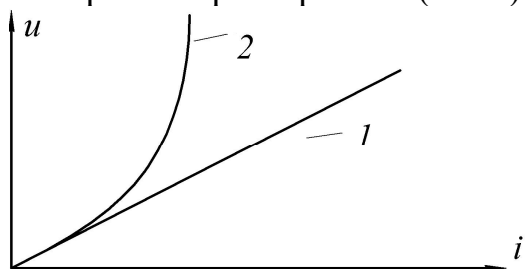


Рис.1.8

Элементы цепей, ВАХ которых линейны, называются *линейными* элементами (на рис.1.8 прямая 1).

Существует другое, по смыслу схожее понятие линейного элемента цепи: элемент цепи называется *линейным*, если его напряжение и ток связаны *линейными алгебраическими уравнениями*

или *дифференциальными уравнениями первого порядка*.

Электрические цепи, состоящие из *линейных* элементов, называются *линейными*.

Электрическая цепь, содержащая хотя бы один *нелинейный* элемент называется *нелинейной* (например, цепь, содержащая элемент с вольт-амперной характеристикой 2 на рис.1.8).



## 1.4. Элементы электрических цепей и их параметры

### 1.4.1. Сопротивление

*Сопротивлением* называется элемент электрической цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую.

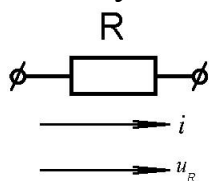


Рис.1.9

Обозначение сопротивления показано на рис. 1.9.

В 1827 г. Г. Ом экспериментально установил зависимость

$$R = \frac{u}{i}.$$

Величина, обратная сопротивлению называется

*проводимостью* 
$$g = \frac{1}{R}.$$

Единицей сопротивления является 1 Ом, а единица проводимости  $\frac{1}{\text{Ом}} = \text{См}(\text{сименс})$ .

1 Ом – это сопротивление такого проводника, в котором протекает ток в 1 ампер при напряжении на его концах в 1 вольт. На практике часто используются более крупные единицы измерения сопротивлений  $1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$ ,  $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ .

Мгновенная мощность, поступающая на сопротивление

$$p = u \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{u^2}{R}, \text{ тогда } R = \frac{p}{i^2} = \frac{u^2}{p}.$$

За время от 0 до  $t$  на сопротивление поступает и в виде теплоты рассеивается энергия  $w_R = \int_0^t p dt = \int_0^t R \cdot i^2 dt$ .

Для постоянного тока  $i = I = \text{const}$  и  $w_R = R \cdot I^2 \cdot t$ .

Заметим, что данное выражение имеет запись, аналогичную закону Джоуля-Ленца  $Q = R \cdot I^2 \cdot t$ , известного из курса физики.

Сопротивления бывают линейные и нелинейные в зависимости от вида их вольт-амперных характеристик (см. п.1.3).

### 1.4.2. Индуктивность

*Индуктивностью* называется идеализированный элемент, приближающийся по своим свойствам к индуктивной катушке, в котором накапливается энергия магнитного поля.

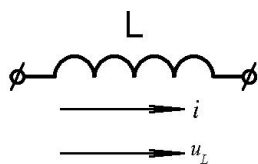


Рис.1.10

Обозначение индуктивности показано на рис. 1.10.

Если по проводнику пропустить ток, то вокруг него создается магнитный поток  $\Phi$ . Суммарный магнитный поток (поток сцепления) катушки индуктивности равен  $\Psi = w \cdot \Phi$ ,

где  $\Phi$  – магнитный поток, создаваемый одним витком;  $w$  – число витков.

По определению собственная индуктивность (или просто индуктивность) равна коэффициенту пропорциональности между потокосцеплением и током катушки

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Индуктивность измеряется в генри  $1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}}$ .

Поток сцепления катушки индуктивности равен:

$$\Psi = L \cdot i.$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции при изменении магнитного потока в катушке наводится ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt},$$

(знак “–” потому, что ЭДС имеет такое направление, что образуемый ею ток своим магнитным полем препятствует изменению магнитного потока, вызывающего данную ЭДС).

Напряжение на индуктивности уравновешивает ЭДС и может быть записано в виде:

$$u_L = -e_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}.$$

Мгновенная мощность, поступающая в катушку индуктивности равна

$$p = u_L \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}.$$

Энергия, запасаемая в катушке индуктивности равна

$$w_M = \int_0^i p dt = \int_0^i L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \cdot dt = \frac{L \cdot i^2}{2}.$$

### 1.4.3. Взаимная индуктивность

Она характеризует свойство одного элемента с током  $i_1$  создавать магнитное поле, частично сцепляющиеся с витками  $w_2$  другого элемента.

Коэффициент взаимной индуктивности определяется по формуле:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1},$$

где  $\Psi_{12}$  – поток сцепления 1-го контура, вызванный током 2-го контура (аналогично  $\Psi_{21}$ ). Измеряется в Гн.

### 1.4.4. Емкость

*Емкостью* называется идеализированный элемент электрической цепи по своим свойствам приближающийся к конденсатору, в котором накапливается энергия электрического поля.

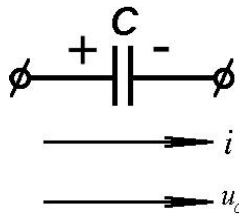


Рис.1.11

Обозначение емкости показано на рис. 1.11.

Величина  $C$  определяется из выражения

$$C = \frac{q}{u_c},$$

где  $q$  – величина заряда в емкости,  $u_c$  – напряжение на ее зажимах. Единица измерения емкости – фарада, Ф. Емкости бывают линейными и нелинейными.

Из определения тока имеем:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}.$$

Преобразуя это выражение можно получить выражение для напряжения на емкости

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

Мгновенная мощность, поступающая в емкость

$$p_c = u_c \cdot i = u_c \cdot C \frac{du_c}{dt}.$$

Энергия, запасаемая емкостью за интервал времени  $[0, t)$

$$w_{\gamma} = \int_0^t p_c dt = \int_0^t u_c \cdot C \frac{du_c}{dt} \cdot dt = \frac{C \cdot u_c^2}{2}.$$

### 1.5. Понятие схемы замещения электрических цепей. Условное положительное направление токов, ЭДС и напряжений в цепи

Для упрощения анализа реальной цепи ее представляют математической моделью – набором идеальных элементов.

*Графическое изображение цепи с помощью идеальных элементов, параметры которых являются параметрами замещаемых элементов, называют **схемой замещения цепи**.*

Идеальные элементы вводят в схему замещения для того, чтобы учесть явления, которые характеризуют их параметры. Например, для учета процесса поглощения энергии элементом цепи в схему замещения вводят сопротивление. Индуктивные и емкостные элементы вводят тогда, когда хотят учесть влияние электрических и магнитных полей.

Для однозначности описания процессов, происходящих в элементах цепи, необходимо знать не только величины токов и напряжений на них, но также их направления. В начале анализа или расчета электрической цепи их направление неизвестно. В связи с этим положительное направление тока и напряжения выбирается произвольно (стрелками или индексами  $i_{ab}$ ). Если в процессе расчета цепи оказалось, что значения величин  $U, u, I, i$  положительны, то следовательно, их действительные направления в этот момент времени совпадают с направлениями, указанными на схеме стрелками. В противном случае истинные направления  $U, u, I, i$  – противоположны условно выбранным.

Из физики известно, что за положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов, за положительное направление ЭДС – направление действия “сторонних” сил на положительный заряд, за положительное направление напряжения – направление убывания потенциала.

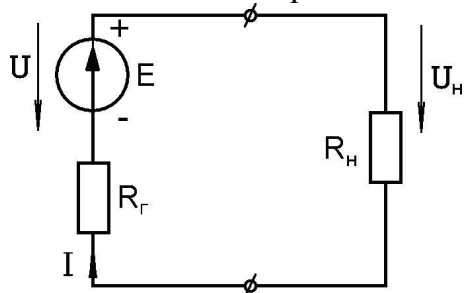


Рис.1.12

Так как положительные заряды в источнике ЭДС движутся в направлении действия “сторонних” сил, а в приемнике – в направлении убывания потенциала, то *положительное направления тока и ЭДС источника, тока и напряжения приемника совпадают* (рис.1.12).

*Положительное направление напряжения на внешних зажимах источника противоположно направлению тока источника* (рис.1.12). Это нужно учитывать при выборе условного положительного направления данных физических величин.

## 1.6. Основные определения, относящиеся к топологии электрической цепи

**Схемой** электрической цепи называется графическое изображение электрической цепи, показывающие соединение отдельных ее участков и отражающее свойства рассматриваемой цепи.

Любая электрическая цепь состоит из ветвей и узлов.

**Ветвью** называется участок цепи, в любой точке которого ток в данный момент времени имеет одно и то же значение. В ветвь может входить любое число последовательно включенных элементов.

**Узлом** называется местное соединение трех или большего числа ветвей.

**Контуром** электрической цепи называется любой путь, проходящий по нескольким ветвям.

**Графом** электрической цепи называется изображение схемы электрической цепи, в которой ветвь изображается линией, источники напряжения закорочены, а источники тока разомкнуты.

Различают контуры *зависимые* и *независимые*. Для того, чтобы дать определение независимого контура, прежде сформулируем понятие дерева цепи.

**Дерево цепи** (*дерево графа*) есть такая совокупность элементов цепи, когда при движении вдоль элементов цепи можно от любого узла исходной цепи пройти к любому другому узлу цепи, кроме рассматриваемого.

На рис. 1.13 изображена схема, а на рис.1.14,а и рис.1.14,б – ее возможные деревья.

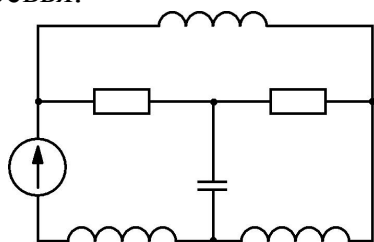


Рис.1.13

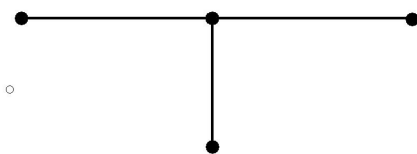


Рис.1.14,а

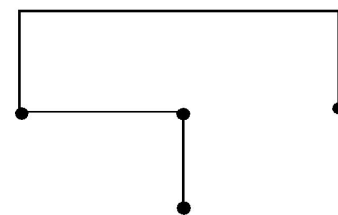


Рис.1.14,б

Элементы, которые отбрасываются при образовании дерева цепи, называются *соединительными элементами*.

**Число независимых контуров электрической цепи равно числу соединительных элементов данной цепи.**

В рассмотренной выше цепи (рис 1.13) число соединительных элементов – три, следовательно, и число независимых контуров равно трем.

Число независимых контуров можно так же получить последовательным размыканием ветвей цепи до тех пор, пока не останется ни одного замкнутого контура, по которому может протекать ток. Общее число разомкнутых ветвей при этом и равно числу независимых контуров цепи.

## 2. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 2.1. Идеальные и реальные источники ЭДС и тока. Схемы замещения

Источники электрической энергии могут быть представлены схемой замещения с источником ЭДС или схемой замещения с источником тока.

**Идеальный источник ЭДС** – это активный элемент, напряжение на зажимах которого, не зависит от тока, идущего в нагрузку (рис.2.1). Внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю  $r = 0$ .

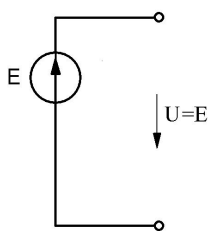


Рис.2.1

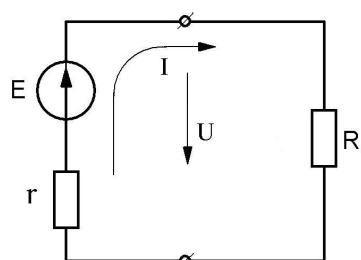


Рис.2.2

**Реальный источник ЭДС** (рис.2.2) имеет внутреннее сопротивление  $r \neq 0$ . Обычно оно очень мало и составляет доли Ома. В соответствии со вторым законом Кирхгофа  $U = E - I \cdot r$ .

Чем больше внутреннее сопротивление  $r$ , тем сильнее напряжение на нагрузке отличается от ЭДС, т.е. чем больше  $r$ , тем хуже источник ЭДС.

Вольт-амперные характеристики идеального (1) и реального (2) источников ЭДС изображены на рис.2.3. Чем больше  $r$ , тем круче кривая (2). Идеальный источник ЭДС – источник бесконечной мощности.

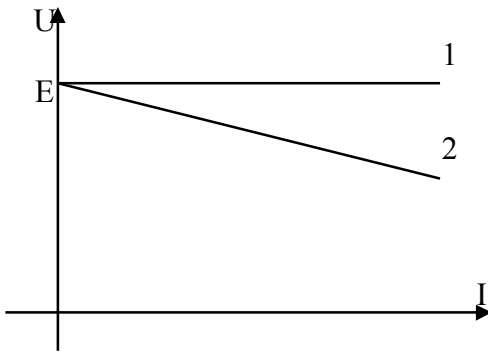


Рис.2.3

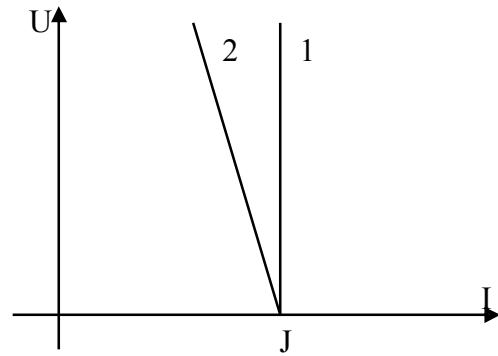


Рис.2.4

**Идеальный источник тока** – это активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах (рис.2.5) и равен току короткого замыкания  $I_k$  источника. Внутреннее сопротивление идеального источника тока  $r = \infty$ .

У реального источника тока (рис.2.6)  $r \neq \infty$ , хотя и очень большое. В соответствии с первым законом Кирхгофа  $I_n = J - I' = J - \frac{U}{r}$ . Чем меньше  $r$ , тем сильнее отличается ток в нагрузке  $I_n$  от тока источника  $J$  (т.е. чем меньше  $r$  тем хуже источник тока).

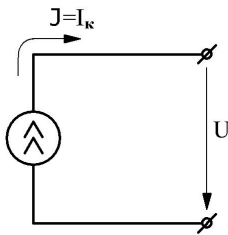


Рис.2.5

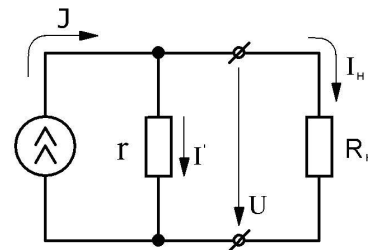


Рис.2.6

Вольт-амперные характеристики идеального (1) и реального (2) источников тока изображены на рис.2.4.

Чем меньше  $r$ , тем круче кривая.

Идеальный источник тока – источник бесконечной мощности.

## 2.2. Режимы работы электрической цепи

Различают четыре основных режима работы электрической цепи: номинальный, согласованный, режим холостого хода (хх) и режим короткого замыкания (кз).

**Номинальный режим** характерен тем, что напряжение, ток и мощность источника или приемника рассчитываются заранее на заводе – изготовителе. При этом обеспечиваются наилучшие условия эксплуатации электроустановки (экономичность, надежность).

Наиболее важным параметром является номинальное напряжение  $U_{ном}$ , т.к. оно влияет на выбор электроизоляции и конструктивное исполнение элементов.

Номинальный ток  $I_{ном}$  лимитируется предельной температурой нагрева электроустановки.

Номинальная мощность рассчитывается по формуле:

$$P_{ном} = U_{ном} \cdot I_{ном}.$$

**Согласованный** режим наступает при условии равенства сопротивления нагрузки и внутреннего сопротивления источника (генератора)  $r = R_n$ . При этом источник отдает нагрузке максимальную мощность  $P_{max} = \frac{E^2}{4R_n}$ .

Режимы **холостого хода** (рис. 2.7) и **короткого замыкания** (рис.2.8) – предельные.

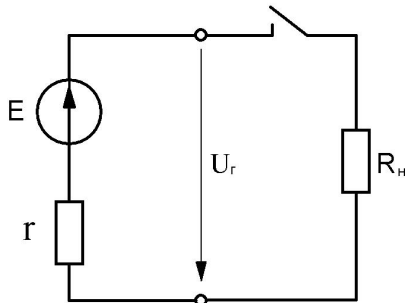


Рис.2.7

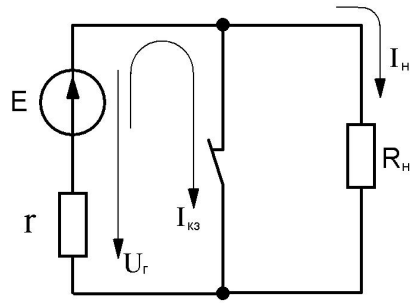


Рис. 2.8

В режиме холостого хода ключ разомкнут, поэтому  $I_n = 0$ ,  $U_r = E$ ; этот режим является безопасным.

Режим короткого замыкания – опасный. В опыте короткого замыкания ключ замыкает между собой зажимы генератора. При этом ток в нагрузке  $I_n \approx 0$ ,  $U_r \approx 0$ . В

режиме эксплуатации ток короткого замыкания  $I_{кз} = \frac{E}{r}$  чрезвычайно велик и приводит электрооборудование к выходу из строя.

### 2.3. Законы электрических цепей

#### 1. Закон Ома для пассивного участка цепи

$$I = \frac{U}{R},$$

где  $I$  – сила тока, А;  $U$  – напряжение на участке цепи, В;  $R$  – сопротивление участка цепи, Ом.

#### 2. Закон Ома для активного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_{i=1}^n E_i - \sum_{k=1}^m E_k}{\sum_{k=1}^m R_k + \sum_{i=1}^n r_i},$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – потенциалы на зажимах активного участка цепи (может быть задано

напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ );  $\sum_{i=1}^n E_i$  – алгебраическая сумма источников ЭДС,

совпадающих по направлению с током на участке цепи;  $\sum_{k=1}^m E_k$  – алгебраическая

сумма источников ЭДС, направленных навстречу току на участке цепи;  $\sum_{k=1}^m R_k$  – алгебраическая сумма сопротивлений участка цепи;  $\sum_{i=1}^n r_i$  – алгебраическая сумма внутренних сопротивлений источников ЭДС.

### 3. Закон Ома для полной цепи

$$I = \frac{E}{R + r},$$

где  $E$  – ЭДС на зажимах полной цепи;  $R$  – внешнее сопротивление цепи;  $r$  – внутреннее сопротивление источника ЭДС.

### 4. Первый закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

где  $\sum_{k=1}^n I_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$  – токи  $k$ -го узла (токи, направленные к узлу берутся со знаком минус, а от узла – со знаком плюс, или наоборот).

### 5. Второй закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^m E_k,$$

где  $\sum_{k=1}^n I_k \cdot R_k$  – алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных элементах ( $R_k$ ) некоторого замкнутого контура, при этом они берутся со знаком плюс, если токи совпадают с направлением обхода контура, а в противном случае – со знаком минус (направление обхода контура выбирается произвольно);  $\sum_{k=1}^m E_k$  – алгебраическая сумма источников ЭДС, входящих в данный замкнутый контур (берутся со знаком плюс, если направления источников ЭДС совпадают с направлением обхода контура, а в противном случае – берутся со знаком минус).

## 3. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Сложными** называются разветвленные электрические цепи с несколькими источниками питания.

Универсальным методом анализа и расчета таких цепей является метод непосредственного применения первого и второго законов Кирхгофа. Однако в сложных цепях сделать это не всегда возможно по причине очень большого числа совместно решаемых уравнений. Поэтому при расчете сложных электрических



цепей используют другие более эффективные методы, базирующиеся на использовании законов Кирхгофа.

### 3.1. Метод суперпозиции (наложения)

Метод основан на принципе независимости действия ЭДС, согласно которому токи, протекающие в цепи при наличии нескольких ЭДС, можно представить как алгебраическую сумму токов, вызываемых каждой из ЭДС в отдельности.

Расчет производится следующим образом:

- 1) полагается, что все ЭДС кроме одной, равны нулю;
- 2) для данной ЭДС, сохранив неизменными все сопротивления цепи (включая сопротивления источников питания, ЭДС которых приравнена нулю), рассчитываются токи во всех ветвях и отмечаются их направления;
- 3) подобный расчет делается столько раз, сколько ЭДС имеется в исследуемой цепи;
- 4) действительный ток в каждой из ветвей определяется как сумма найденных частичных токов (при суммировании учитывается направление частичных токов).

Рассмотрим порядок расчета следующей схемы (рис.3.1):

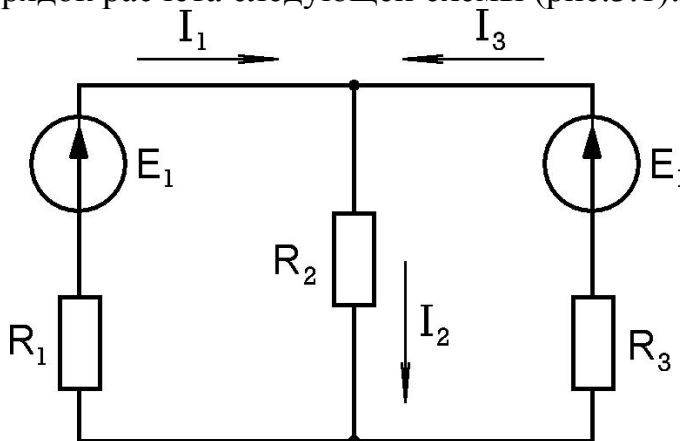


Рис. 3.1

Оставляем только один источник ЭДС, например, ЭДС  $E_1$  (рис.3.2).

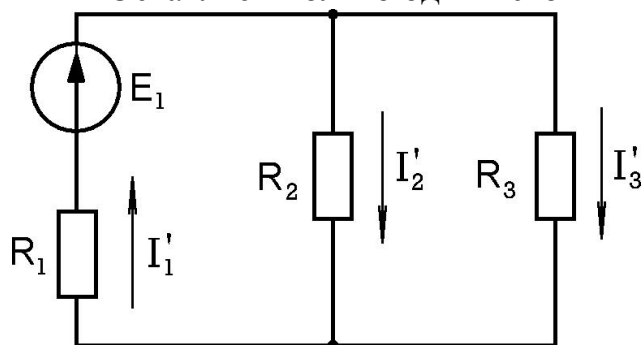


Рис.3.2

Рассчитываем токи ветвей  $I'_1, I'_2$  и  $I'_3$ .

Для этого:

- а) находим общее сопротивление цепи;
- б) находим ток в неразветвленной части цепи;
- в) методом разгонки определяем токи в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$ .

Затем выбираем другой источник ЭДС, а первый приравниваем к нулю (рис.3.3).





### 3.4. Метод двух узлов

Данный метод используется в тех случаях, когда рассчитываемая схема содержит только два узла или может быть легко преобразована в подобную схему.

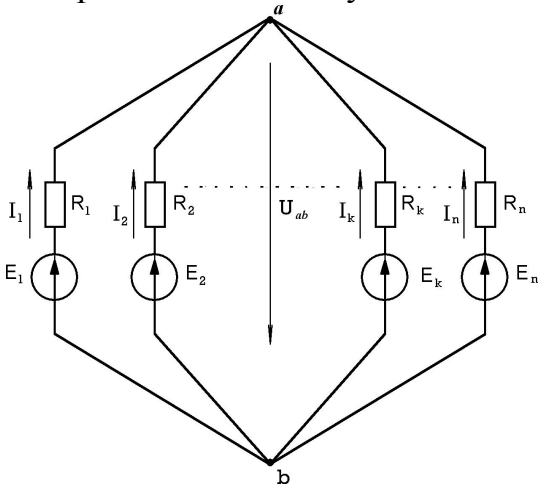


Рис.3.4

Рассмотрим обобщенную схему, состоящую из  $n$  ветвей, сходящихся в двух узлах  $a$  и  $b$  (рис.3.4).

Разность потенциалов узлов  $a$  и  $b$  можно выразить через ЭДС  $E_k$ , ток  $I_k$  и сопротивление  $R_k$  любой из ветвей, т.к. все ветви по отношению к узлам  $a$  и  $b$  включены параллельно:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \varphi_a + I_k \cdot R_k - E_k; \\ \varphi_a - \varphi_b &= U_{ab} = E_k - I_k \cdot R_k, \end{aligned}$$

где  $U_{ab}$  – узловое напряжение схемы.

Отсюда следует:

$$I_k = \frac{E_k - U_{ab}}{R_k} = (E_k - U_{ab}) \cdot g_k, \quad (3.3)$$

где  $g_k = \frac{1}{R_k}$  – проводимость  $k$ -й ветви.

Особенностью метода является то, что условно принято считать направление всех токов и ЭДС совпадающими, направленными к одному из узлов схемы (в частности к узлу  $a$ ). В действительности этого может не наблюдаться. Полученный в процессе расчета знак “-” будет говорить о противоположном (по сравнению с условно выбранным) направлении тока.

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма токов узла равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (3.4)$$

Подставим (3.3) в (3.4) и выразим напряжение  $U_{ab}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (E_k - U_{ab}) \cdot g_k &= 0; \\ \sum_{k=1}^n (E_k \cdot g_k - U_{ab} \cdot g_k) &= 0; \\ \sum_{k=1}^n E_k \cdot g_k - U_{ab} \cdot \sum_{k=1}^n g_k &= 0; \\ U_{ab} &= \frac{\sum_{k=1}^n E_k \cdot g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}. \end{aligned}$$

Зная узловое напряжение  $U_{ab}$  очень просто получить все токи ветвей:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab}) \cdot g_1;$$

.....

$$I_k = \frac{E_k - U_{ab}}{R_k} = (E_k - U_{ab}) \cdot g_k.$$

### 3.5. Метод эквивалентного генератора

Данный метод наиболее эффективен, когда требуется найти величину тока только в одной из ветвей сложной электрической цепи при различных значениях сопротивления  $R_x$  этой ветви (на практике это встречается очень часто, например, при настройке схем).

Пусть, например, дана цепь вида (рис.3.5).

Требуется определить ток  $I$  в ветви с сопротивлением  $R_x$ , который вызывается совместным действием ЭДС в левой части схемы.

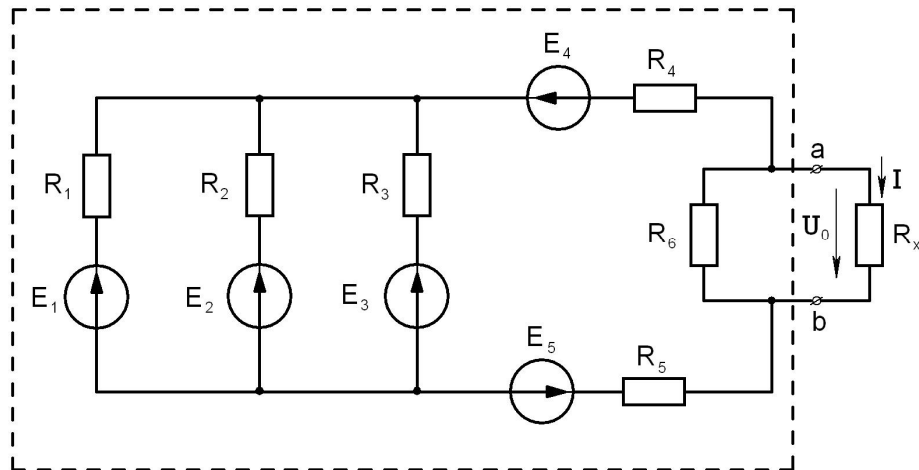


Рис.3.5

Представим данную цепь в виде активного двухполюсника (рис.3.6).

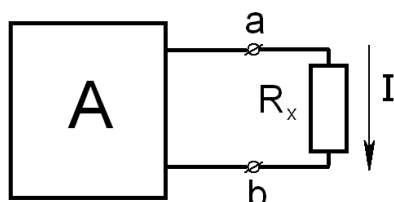


Рис.3.6

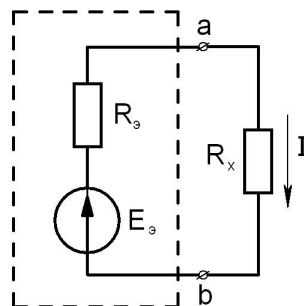


Рис.3.7

Суть метода заключается в том, чтобы заменить этот двухполюсник некоторой эквивалентной ЭДС  $E_3$  с внутренним сопротивлением  $R_3$  (рис.3.7). Тогда искомый ток  $I$  может быть определён по формуле

$$I = \frac{E_{\text{э}}}{R_{\text{э}} + R_x}$$

Докажем возможность такой замены и определим  $E_{\text{э}}$  и  $R_{\text{э}}$ .

1) Разомкнем цепь в точке **a** (рис.3.8).

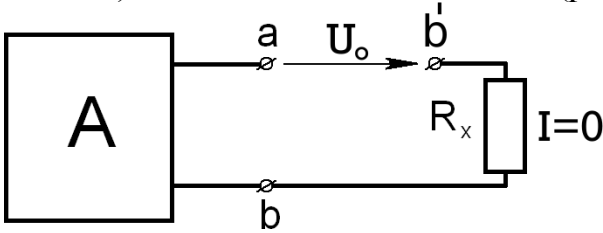


Рис.3.8

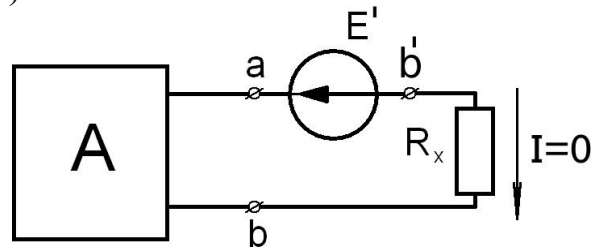


Рис.3.9

Тогда  $I = 0$ , а между зажимами **a** и **b'** будет действовать напряжение холостого хода  $U_0$ .

2) Между зажимами **a** и **b'** включим ЭДС  $E'$ , по величине равную напряжению  $U_0$ , но направленную ему навстречу (рис.3.9). Очевидно, что ток через сопротивление  $R_x$  также будет равен нулю, т.е.  $I = 0$ .

3) Введем в цепь дополнительную ЭДС  $E''$ , равную и противоположную ЭДС  $E'$  (рис.3.10).

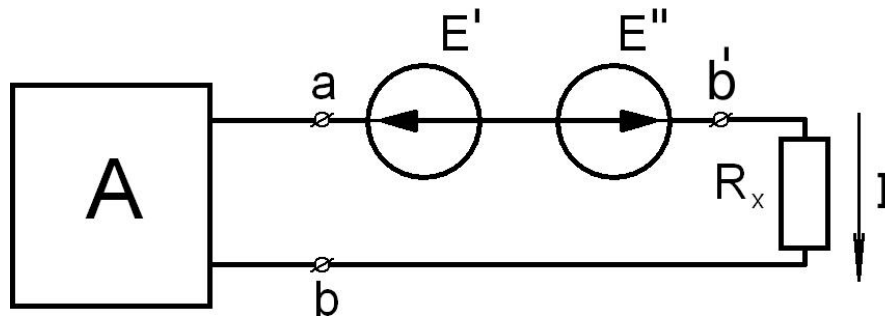


Рис.3.10

Очевидно, что эта схема на рис.3.17 эквивалентна первоначальной (рис.3.6), в которой по сопротивлению  $R_x$  протекает ток  $I$ .

Отсюда следует, что  $E'' = E_{\text{э}} = U_0$ , т.е. эквивалентная ЭДС равна напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви, в которой определяется ток. Напряжение холостого хода  $U_0$  определяется любым методом.

$$\text{Следовательно, } I = \frac{E_{\text{э}}}{R_{\text{э}} + R_x} = \frac{E''}{R_{\text{э}} + R_x} = \frac{U_0}{R_{\text{э}} + R_x}.$$

В данной формуле  $R_{\text{э}}$  представляет собой результирующее сопротивление всей цепи двухполюсника найденное при условии, что все ЭДС равны нулю, а все сопротивления, включая и внутренние сопротивления ЭДС, остались неизменными (т.е.  $R_{\text{э}}$  – есть входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно зажимов **a** и **b**).

Иногда целесообразно при расчётах (например, в схемах с электронными и полупроводниковыми элементами) заменить активный двухполюсник не

эквивалентной ЭДС, а эквивалентным источником тока. В этом случае неизменная сила тока источника тока  $I_3$  равна:

$$I_3 = \frac{E_3}{R_3},$$

а сопротивление  $R_3$  подключается параллельно источнику тока.

### 3.6. Баланс мощности

Для проверки правильности выполненных расчётов составляется баланс мощности, реализующий, фактически, закон сохранения энергии в электрической цепи. Из физики известно, что мощность связана с энергией выражением  $W = \frac{P}{t}$ .

Очевидно, что на единичном интервале времени ( $t=1\text{ с}$ ),  $W = P$ .

В соответствии с законом сохранения энергии, энергия, поступающая в электрическую цепь от источников электрической энергии (ЭДС и тока), должна быть равна энергии, поступающей в приёмники (сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ ). Энергия, поступающая в сопротивление, выделяется на нём в виде теплоты  $Q = I^2 \cdot R \cdot t$  в окружающее пространство, где  $I$  – ток, проходящий через сопротивление. В индуктивности и ёмкости поступающая из источника энергия накапливается в виде энергии магнитного поля катушки и энергии электрического поля конденсатора соответственно.

Для линейной электрической цепи постоянного тока уравнение баланса активной мощности в общем случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^n E_k \cdot I_k + \sum_{k=1}^m U_k^J \cdot J_k = \sum_{k=1}^N I_k^2 \cdot R_k,$$

где  $E_k \cdot I_k$  – мощность, выдаваемая в цепь источниками ЭДС (если направление действия ЭДС совпадает с направлением протекающего через него тока, то произведение  $E_k \cdot I_k$  берётся со знаком плюс, а в противном случае – со знаком минус);  $n$  – общее число источников ЭДС;  $U_k^J \cdot J_k$  – мощность, выдаваемая в цепь источниками тока, а  $U_k^J$  – напряжение на источнике тока (направлено навстречу стрелке источника тока);  $m$  – общее число источников тока;  $I_k^2 \cdot R_k$  – мощность, поступающая в сопротивление  $R_k$ ;  $N$  – общее число сопротивлений в цепи.

## 4. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

На практике часто встречаются цепи, параметры элементов которых нелинейно зависят от тока. Такие элементы и содержащие их цепи называются *нелинейными*.

Вообще говоря, большинство элементов электрических цепей нелинейно (например, сопротивление проводника с ростом температуры увеличивается). Однако их принимают за линейные, если в рабочем диапазоне изменений токов их вольт – амперные характеристики линейны.

Различают нелинейные элементы с симметричными (1) и не симметричными (2) характеристиками относительно осей координат (рис.4.1).

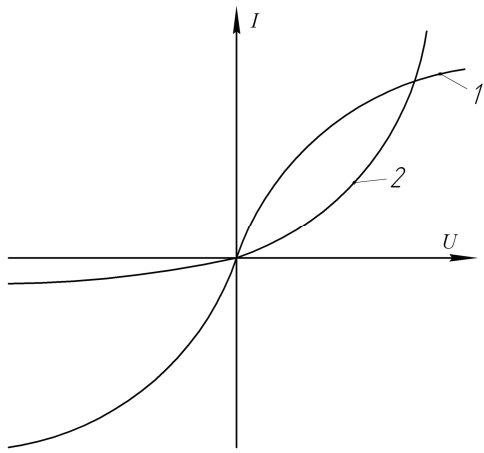


Рис.4.1

Сопротивление нелинейных элементов с симметричными характеристиками не зависят от направления тока. Нелинейные элементы с несимметричной характеристикой часто используются в цепях переменного тока в качестве выпрямителей или стабилизаторов напряжения и тока. На рис.4.1 изображена вольт-амперная характеристика (ВАХ) полупроводникового диода (кривая 2), которая несимметрична.

Нелинейные элементы, ВАХ которых изменяются под воздействием хотя бы одной из влияющих величин, называются *управляемыми*

(например, электровакуумные и полупроводниковые триоды).

Существует два основных метода расчета нелинейных цепей: графический и аналитический.

#### 4.1. Графический метод расчета (метод эквивалентных преобразований)

При расчете нелинейных цепей данным методом последовательность операций сохраняется примерно той же, что и при расчете линейных цепей, только вместо сложения или вычитания отдельных напряжений и токов, производится сложение или вычитание абсцисс и ординат соответствующих ВАХ. Рассмотрим пример последовательного соединения линейного и нелинейного сопротивлений (рис.4.2).

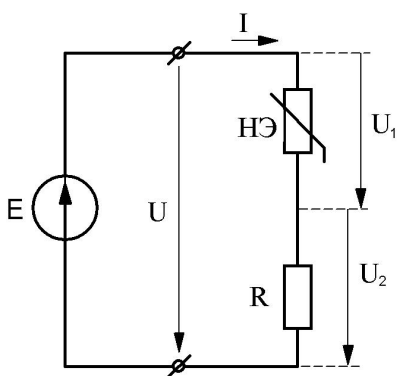


Рис.4.2

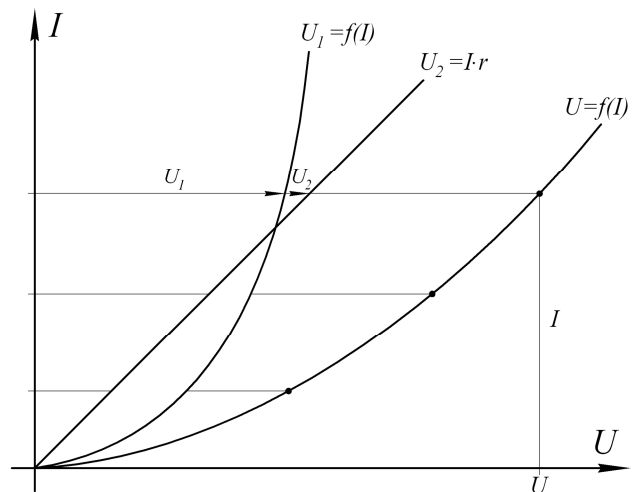


Рис.4.3

Для того, чтобы найти ток  $I$  и частичные напряжения  $U_1$  и  $U_2$  нужно построить ВАХ цепи в целом, т.е. характеристику  $U = f(I)$ .

Очевидно, что  $U = U_1 + U_2$ , а некоторому току  $I$  соответствует некоторые напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , которые определяются как абсциссы двух точек ВАХ линейного и нелинейного элементов цепи для данного неизменного тока  $I$  (рис.4.3). Сложив эти абсциссы, получим напряжение  $U$ , соответствующее силе тока  $I$



(фактически, получим одну точку результирующей ВАХ  $U = f(I)$ ). Путем подобного сложения можно получить ВАХ  $U = f(I)$  всей цепи в целом, пользуясь которой можно получить и частичные напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и силу тока  $I$  для любого заданного значения напряжения  $U$ .

Для определения режима работы изображенной выше нелинейной цепи, можно применить графическое вычитание (опрокидывание характеристики).

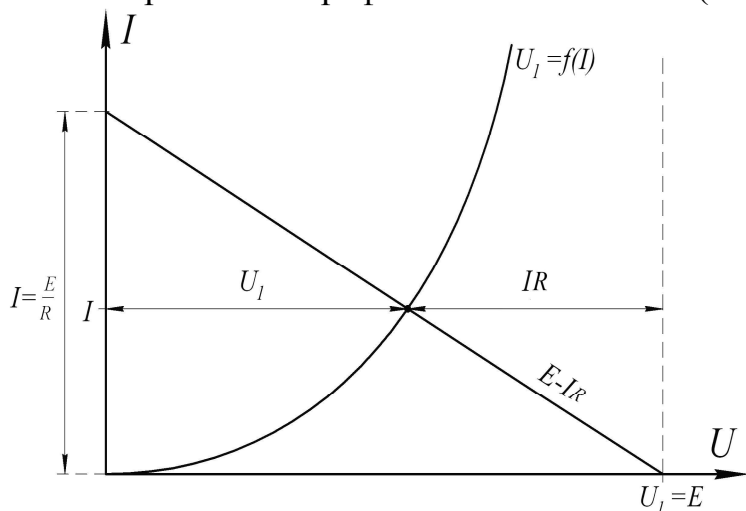


Рис.4.4

Например, на зажимах нелинейного элемента действует напряжение  $U_1 = E - I \cdot R$ .

В системе координат  $U_1, I$  — это уравнение прямой линии, которая пересекает ось абсцисс в точке  $U_1 = E$ , а ось ординат — в точке  $I = \frac{E}{R}$ .

Пересечение ВАХ нелинейного элемента и постоянной нагрузочной прямой дает рабочую точку (рабочий режим цепи).

Графический расчет параллельного соединения нелинейных элементов ведется аналогично. Используя ВАХ двух параллельно соединенных сопротивлений, строится характеристика разветвления  $I_1 = f(U_p)$ . Для этого фиксируются напряжения (т.к. при параллельном соединении  $U_p = \text{const}$ ) и определяются соответствующие им токи ветвей  $I_2$  и  $I_3$  (ординаты характеристик параллельных ветвей). Затем ординаты складываются, т.е. находятся токи  $I_1 = I_2 + I_3$  для каждого из зафиксированных значений напряжений  $U_p$  и строится результирующая характеристика  $I_1 = I_2 + I_3 = f(U_p)$ .

Графический расчет смешанного соединения ведется в том же порядке, в каком порядке ведется аналитический расчет смешанного соединения линейных сопротивлений.

## 4.2. Аналитический метод расчета

Из числа аналитических методов расчет нелинейных цепей наиболее широкое применение имеет метод *линеаризации характеристик*.

Если в пределах некоторого участка нелинейная характеристика элемента может быть приближенно заменена прямой, то в этих пределах отношение приращений величин  $\Delta U$  и  $\Delta I$  есть величина постоянная, т.е.  $\frac{\Delta U}{\Delta I} = \text{const}$  или

$\frac{du}{di} = \text{const}$ . Здесь  $\frac{du}{di} = R_\partial$  - дифференциальный параметр цепи (дифференциальное сопротивление).

Отношение  $\frac{u}{i} = R_c$  называется статическим сопротивлением.

Для линейной ВАХ  $R_\partial = R_c$ .

**Суть расчета:** пользуясь дифференциальными параметрами можно составить эквивалентную электрическую схему для нелинейного элемента цепи и, таким образом, создается возможность рассчитывать цепь как линейную при условии, что изменения режима работы цепи не выходят за пределы линейного участка характеристики.

Пусть характеристика нелинейного сопротивления имеет вид рис.4.5.

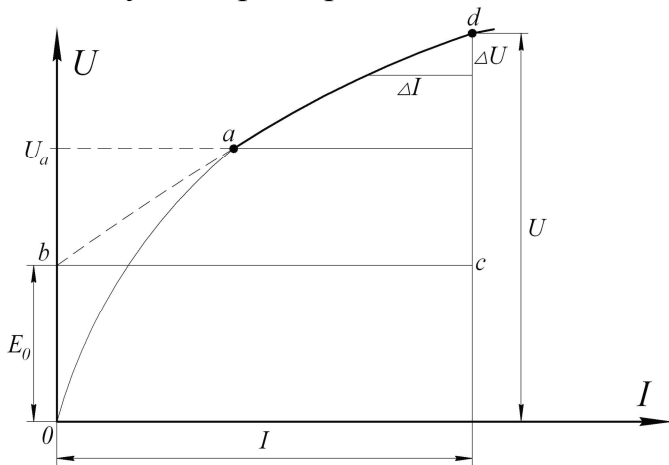


Рис.4.5

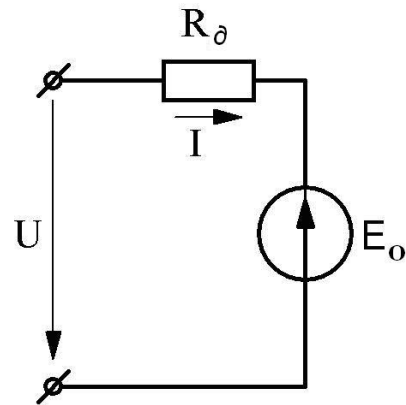


Рис.4.6

Характеристика выше точки  $a$  приблизительно линейная. Продолжим эту прямую до пересечения с осью ординат. Точка пересечения данной прямой и оси ординат изображает некоторую фиктивную ЭДС  $E_0$ .

Для линейного участка характеристики  $R_\partial = \frac{du}{di} = \frac{\Delta U}{\Delta I}$ . На основании подобия треугольников имеем  $\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dc}{bc} \cdot m_R = \frac{U - E_0}{I}$ , где  $m_R$  – коэффициент, определяемый масштабами осей абсцисс и ординат. Отсюда следует, что

$$R_\partial = \frac{U - E_0}{I}; \quad I \cdot R_\partial = U - E_0;$$

$$U = E_0 + I \cdot R_\partial.$$

Следовательно, пока нелинейный элемент находится под напряжением, не выходящим за пределы линейного участка вольт-амперной характеристики ( $U_a < U < U_\partial$ ), его можно заменить эквивалентной линейной схемой (рис.4.6).

Если характеристика нелинейного элемента наклонена в сторону оси напряжения (рис.4.7), то прямая, продолженная от начала линейного участка характеристики, отсечет на отрицательной части оси напряжения участок в масштабе равный  $E_0$ .

Аналогичные рассуждения позволяют записать:

$$R_\partial = \frac{\Delta U}{\Delta I} = m_R \frac{dc}{bc} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{U + E_0}{I},$$

откуда  $U = -E_0 + I \cdot R_\partial$ .

Эквивалентная схема нелинейного элемента изображена на рис.4.8.

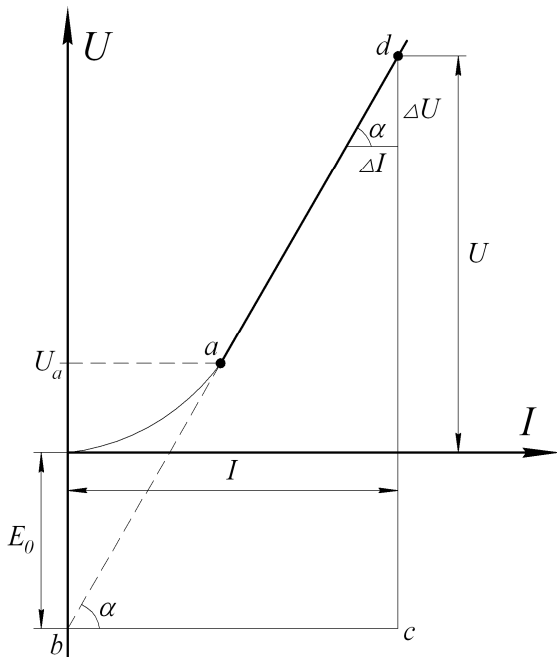


Рис.4.7

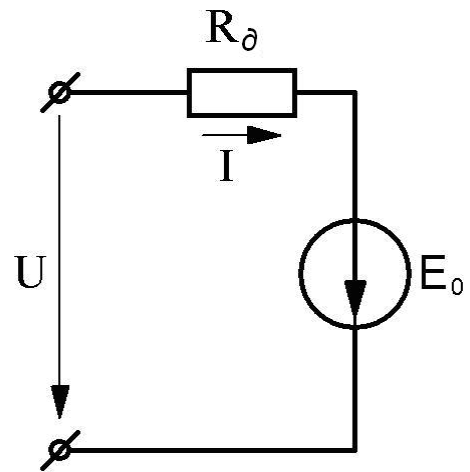


Рис.4.8

Как отмечалось выше, подобные замены можно осуществлять только в том случае, если изменения напряжения на нелинейном элементе происходят в пределах линейного участка его характеристики.

## 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 5.1. Основные понятия

Современная электроэнергетика базируется на передаче энергии на большие расстояния при помощи электрического тока. С целью уменьшения потерь для этого нужно сначала ток большой силы и малого напряжения преобразовать в ток малой силы и большого напряжения, а затем на приеме произвести обратное преобразование. Это с высоким КПД и с малыми потерями позволяют сделать трансформаторы. В связи с тем, что трансформатор является устройством переменного тока, вся современная электроэнергетика построена на применении переменного тока. В этом, в частности, состоит и актуальность изучения данного вопроса.

Выше уже отмечалось, что электромагнитный процесс в цепи, при котором значения токов и напряжений повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим.

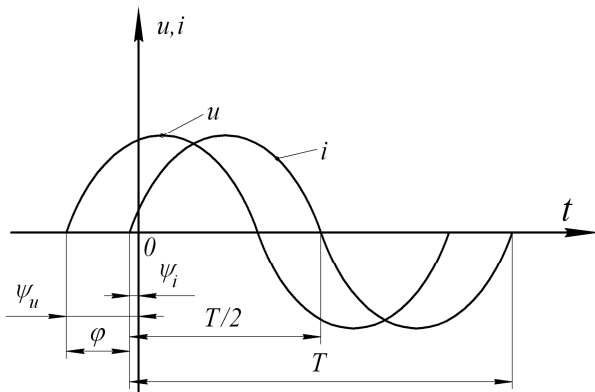


Рис.5.1

Примером простейшего периодического процесса является гармонический процесс (рис.5.1) изменения напряжения, тока и ЭДС в цепи, описываемый уравнениями:

$$\begin{aligned} i &= I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i), \\ u &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u), \\ e &= E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_e). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $I_m$  – амплитудное значение тока,

$U_m$  – амплитудное значение напряжения,  $E_m$  – амплитудное значение ЭДС.

**Амплитудным значением синусоидальной функции** называется наибольшее значение ее мгновенной величины.

Значения аргументов синусоидальных функций  $(\omega \cdot t \pm \varphi)$  называются **фазами** синусоид. **Фаза** характеризует численные значения описываемой величины в данный момент времени.

Значение фазы в начальный момент времени ( $t = 0$ ) называется **начальной фазой**. Начальная фаза это ближайшая от начала осей координат точка перехода от отрицательных значений мгновенных величин синусоид к положительным значениям. Если эта точка располагается слева от оси ординат, то фаза берется со знаком "+", если справа от нее – со знаком "-".

Разность  $\psi_u - \psi_i = \varphi$  – называется **сдвигом фаз**; в частности, на рис.5.1 напряжение  $u$  опережает ток  $i$  на величину  $\varphi$ .

Величина  $\omega$  называется **угловой частотой** и характеризует собой скорость изменения фазового угла.

Так как фазовый угол синусоиды за время одного периода  $T$  изменяется на  $2 \cdot \pi$ , то угловая частота

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f.$$

## 5.2. Получение синусоидальной ЭДС

Переменный ток промышленной частоты (50 Гц) создают синхронные генераторы трехфазного тока, в которых используется явление электромагнитной индукции. С помощью генератора механическая энергия, получаемая от первичного двигателя (турбины), преобразуется в электрическую энергию переменного тока.

Синхронный генератор состоит из неподвижного статора и подвижного ротора (рис.5.2).

Статор – полый цилиндр с пазами для проводников, соединенных специальным образом. Изготавливается из листовой электротехнической стали.

Ротор – электромагнит, возбуждаемый постоянным током. Ток возбуждения подается от **возбудителя** по проводам через щетки на медные кольца, укрепленные на валу ротора. Возбудитель – небольшой генератор постоянного тока.

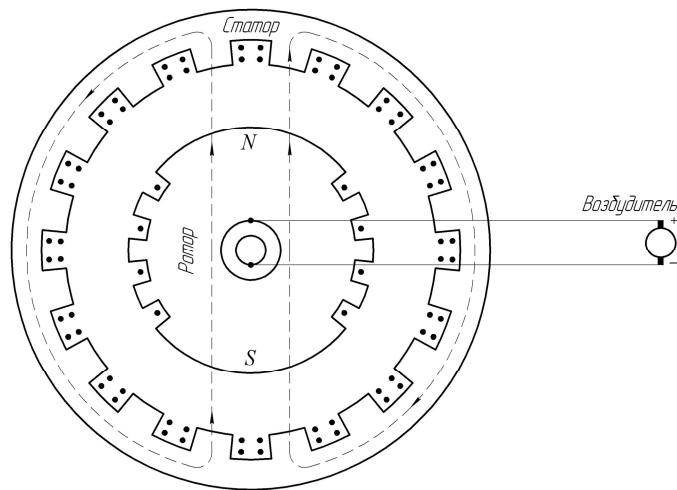


Рис.5.2

Магнитный поток ротора проходит через тело ротора, два воздушных промежутка между статором и ротором и сердечник статора.

При вращении ротора этот магнитный поток пересекает проводники статора и индуцирует в них переменную ЭДС:

$$e = B \cdot l \cdot v,$$

где  $B$  – магнитная индукция,  $l$  – активная длина проводника (охватываемая магнитным полем),  $v$  – окружная скорость (магнитного потока по отношению к проводнику).

В данной формуле  $l, v = const$ . Следовательно, изменение ЭДС  $e$  при вращении ротора вызывается только изменением магнитной индукции  $B$ . Если индукция распределена вдоль окружности ротора синусоидально  $B = B_m \cdot \sin \omega t$  (а именно так и стараются рассчитывать генераторы), то и изменение ЭДС во времени тоже синусоидально  $e = E_m \cdot \sin \omega t$ .

Одному обороту двухполюсного ротора соответствует один период переменной ЭДС. Если же ротор имеет  $p$  пар полюсов, то одному обороту ротора будет соответствовать  $p$  периодов переменной ЭДС. Если ротор делает  $n$  оборотов в минуту, то за минуту ЭДС генератора будет иметь  $n \cdot p$  периодов. Запишем

временное соотношение  $60 = n \cdot p \cdot T$ , отсюда  $T = \frac{60}{n \cdot p}$  или  $f = \frac{1}{T} = \frac{n \cdot p}{60}$ . Эти

формулы будут использоваться при изучении дисциплины “Электрические машины”.

### 5.3. Изображение синусоидальных $e, u, i$ в виде векторов

Известно несколько способов представления синусоидально изменяющихся величин: в виде тригонометрических функций (5.1), в виде графиков изменений во времени (волновых диаграмм) (рис.5.1), в виде вращающихся векторов (рис.5.3) на декартовой и комплексной плоскостях.

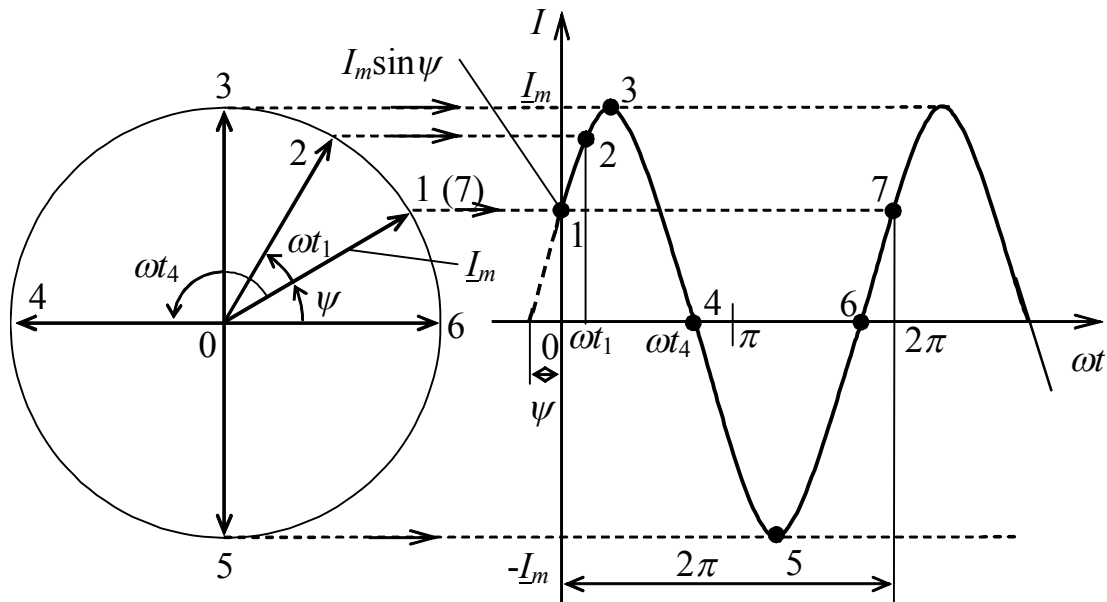


Рис.5.3

На рисунке 5.3 положениям 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 вращающегося вектора  $I_m$  соответствуют точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 волновой диаграммы синусоидальной функции.

Векторное изображение синусоидальных величин (векторная и векторно-топографическая диаграммы), изменяющихся по гармоническому закону, позволяет с помощью вращающихся векторов, расположенных в одной плоскости, представить в наглядной форме значения электрических величин для различных участков электрической цепи и их относительное отставание или опережение по фазе.

Для того, чтобы изобразить эти функции в виде векторов на декартовой плоскости требуется из начала осей координат провести векторы, равные амплитудным значениям соответствующих величин, и придать им вращение против часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ .

Фазовый угол всегда отсчитывается от положительной оси абсцисс: положительный угол откладывается от положительной оси против часовой стрелки, а отрицательный угол – по часовой стрелке; проекции вращающихся векторов на ось ординат равны мгновенным значениям соответствующих синусоидальных величин.

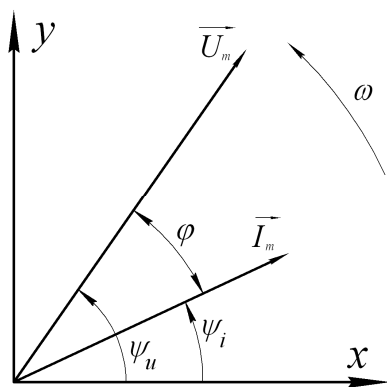


Рис.5.4

Тогда в соответствии с выражениями (5.1) векторная диаграмма на декартовой плоскости будет иметь вид рис.5.4.

Представление синусоидальных величин одной и той же частоты в виде векторов называется **векторной диаграммой**.

Данная векторная диаграмма представлена в момент времени  $t=0$ , т.к. в противном случае потребовалось бы записывать фазовые значения напряжения и тока полностью  $\omega \cdot t + \psi_u$ ,  $\omega \cdot t + \psi_i$ .

Векторные диаграммы делают расчет цепей синусоидального тока простым и наглядным. Это достигается за счет того, что аналитическое сложение и вычитание

мгновенных значений синусоидальных величин можно заменить геометрическим сложением и вычитанием соответствующих им векторов.

Пусть, например, требуется найти сумму двух токов  $i_1$  и  $i_2$ :  $i_1 + i_2 = i_3$ .

Сумме двух синусоидальных функций одинаковой частоты соответствует также синусоидальная функция той же частоты

$$I_{m1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_1) + I_{m2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_2) = I_{m3} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_3).$$

Аналитически вычислить результирующие амплитуду  $I_{m3}$  и фазу  $\psi_3$  достаточно сложно. Использование векторной диаграммы существенно упрощает процесс вычисления этих параметров.

Поскольку оба вектора вращаются с одинаковой угловой скоростью, и от этого их взаимное расположение не меняется, то вектор общего тока  $I_{m3}$  равен геометрической сумме векторов токов  $I_{m1}$  и  $I_{m2}$  (т.к. мгновенное значение общего тока равно сумме проекций векторов на ось ординат рис.5.5).

Построение векторной диаграммы в масштабе позволяет определить  $I_{m3}$  и  $\psi_3$  непосредственно из диаграммы.

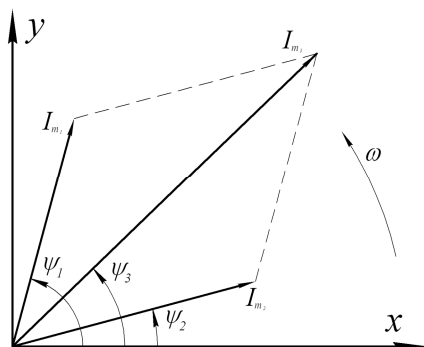


Рис.5.5

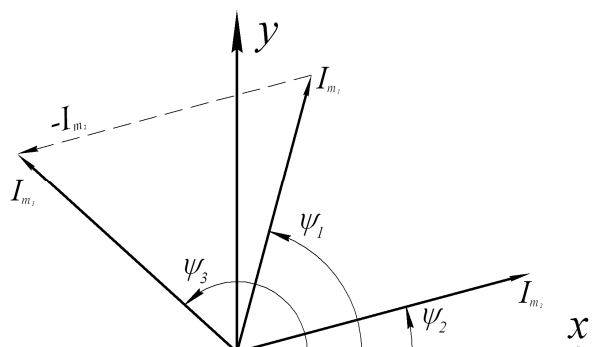


Рис.5.6

При определении разности этих двух токов:  $i_3 = i_1 - i_2$ , складываются векторы  $I_{m1}$  и обратный вектор  $-I_{m2}$  (рис.5.6).

К недостаткам геометрического расчета электрических цепей с помощью векторных диаграмм следует отнести его невысокую точность и зависимость от субъективного фактора.

#### 5.4. Представление синусоидальных величин комплексными числами

Чтобы перейти от декартовой к комплексной плоскости, ось абсцисс плоскости декартовых координат совмещают с осью действительных (вещественных) величин +1 комплексной плоскости.

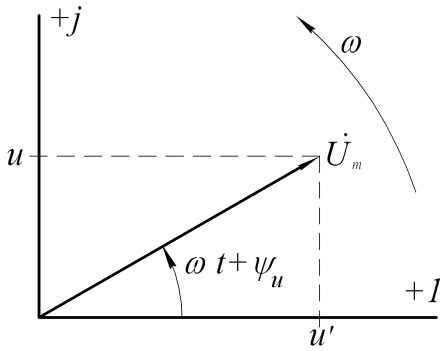


Рис.5.7

Мгновенные значения синусоидальных величин получают на оси мнимых величин  $+j$  (рис.5.7).

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует комплексное число, которое может быть записано в показательной, тригонометрической или алгебраической форме.

Например, для напряжения  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$ , изображенного на рис.5.7 получается комплексное число вида

$$U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)} = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_u) + j \cdot U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u) = u' + j \cdot u.$$

Фазовый угол  $\omega \cdot t + \psi_u$  определяется из соотношения:

$$\frac{u}{u'} = \operatorname{tg}(\omega \cdot t + \psi_u).$$

Мнимая составляющая комплексного числа определяет синусоидальное изменение напряжения  $u$  и обозначается символом  $\operatorname{Im}$

$$u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u) = \operatorname{Im} \cdot \{U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)}\},$$

а вещественная часть  $u'$  обозначается символом  $\operatorname{Re}$

$$u' = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_u) = \operatorname{Re} \cdot \{U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)}\}.$$

Комплексное число  $U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)}$  удобно представить в виде следующего произведения:

$$U_m \cdot e^{j(\omega \cdot t + \psi_u)} = U_m \cdot e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega \cdot t} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega \cdot t},$$

где  $\dot{U}_m$  – комплексная амплитуда, учитывающая положение вектора в начальный момент времени;  $e^{j\omega \cdot t}$  – оператор поворота вектора на угол  $\omega \cdot t$  относительно начального положения.

Переход от одной формы записи к другой может быть выполнен по формуле Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha.$$

Пусть, например, комплексная амплитуда напряжения задана комплексным числом в алгебраической форме:  $\dot{U}_m = U'_m + j \cdot U''_m$ .

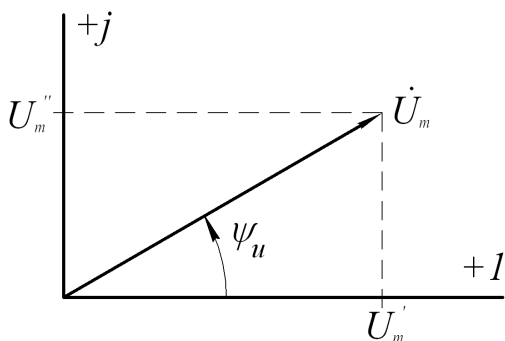


Рис.5.8

Чтобы записать ее в показательной форме, нужно изобразить данное число на комплексной плоскости и найти начальную фазу  $\psi_u$  – угол, образуемый вектором  $\dot{U}_m$  с осью  $+1$  и модуль вектора  $\dot{U}_m$  (рис.5.8).

Так как вектор  $\dot{U}_m$  находится в первом квадранте:  $\operatorname{tg} \psi_u = \frac{U''_m}{U'_m}$ .

В свою очередь, модуль вектора  $\dot{U}_m$  можно рассчитать по формулам

$$U_m = \sqrt{U'^2_m + U''^2_m}, \text{ либо } U_m = \frac{U'_m}{\cos \psi_u} = \frac{U''_m}{\sin \psi_u}.$$

Окончательно  $\dot{U}_m = U'_m + j \cdot U''_m = U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)}$ .



Если мгновенное значение напряжения задано в виде синусоиды  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$ , то комплексную амплитуду сначала записывают в показательной форме, а затем по формуле Эйлера переходят к алгебраической форме:

$$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\psi_u} = U_m \cdot \cos\psi_u + j \cdot U_m \cdot \sin\psi_u = U'_m + j \cdot U''_m.$$

Применение комплексных чисел позволяет от геометрического сложения или вычитания векторов на векторной диаграмме перейти к алгебраическим действиям над комплексными числами этих векторов.

#### 5.4.1. Некоторые операции с комплексными числами

Известно, что

$$\begin{aligned} j &= 0 + 1 \cdot j = 1 \cdot e^{j90^\circ} = e^{j90^\circ}; \\ -j &= 0 - 1 \cdot j = 1 \cdot e^{-j90^\circ} = e^{-j90^\circ}. \end{aligned}$$

Пусть дано комплексное число вида

$$\dot{A} = a + jb = A \cdot e^{j\psi}.$$

Число  $\dot{A}^*$  называется **сопряженным** по отношению к комплексному числу  $\dot{A}$ , если его модуль равен модулю числа  $\dot{A}$ , а аргумент имеет противоположный знак, т.е.  $\dot{A}^* = a - j \cdot b = A \cdot e^{-j\psi}$

У сопряженных чисел:

$$\begin{aligned} |\dot{A}| &= |\dot{A}^*| = \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \operatorname{Re}(\dot{A}) &= \operatorname{Re}(\dot{A}^*) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{A} + \dot{A}^*) = a; \\ J_m(\dot{A}) &= -J_m(\dot{A}^*) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{A} - \dot{A}^*) = b. \end{aligned}$$

Формулы перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и наоборот:

$$\begin{cases} A = |\dot{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}; \\ \psi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}; \\ a = A \cdot \cos\psi; \quad b = A \cdot \sin\psi. \end{cases}$$

Умножим вектор  $\dot{A}$  на  $j$ :

$$\dot{A} \cdot j = A \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j90^\circ} = A \cdot e^{j(\psi+90^\circ)}.$$

Следовательно, умножение вектора на величину  $j$  дает вектор по модулю равный данному, но повернутый в сторону опережения (против часовой стрелки) на  $90^\circ$  по отношению к исходному (рис.5.9).

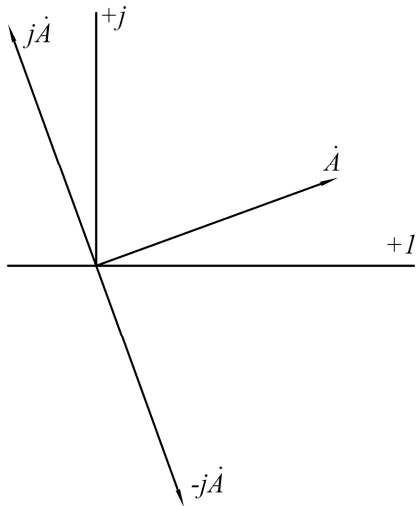


Рис.5.9

Умножим вектор  $\dot{A}$  на  $(-j)$ :

$$-\dot{A} \cdot j = A \cdot e^{j\psi} \cdot e^{-j90^\circ} = A \cdot e^{j(\psi-90^\circ)}.$$

Следовательно, умножение вектора на  $(-j)$  дает вектор, по модулю равный данному, но повернутый в сторону отставания (по часовой стрелке) на  $90^\circ$  по отношению к исходному (см. рис.5.9).

Некоторые часто встречающиеся операции с  $j$ :

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j90^\circ}} = e^{-j90^\circ} = -j;$$

$$j \cdot j = e^{j90^\circ} \cdot e^{j90^\circ} = e^{j180^\circ};$$

$$e^{j180^\circ} = \cos 180^\circ + j \cdot \sin 180^\circ = -1, \text{ т.е.}$$

$$j \cdot j = j^2 = -1.$$

### 5.4.2. Изображение производной синусоидальной функции

Пусть имеем синусоидальный ток:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) = \text{Im}\{I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}\} = \text{Im}\{I_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}\} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Комплексный ток  $\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$  называется **изображением** синусоидального тока на комплексной плоскости.

Найдем значение производной данного тока по времени:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d[I_m \sin(\omega \cdot t + \psi)]}{dt} = \omega I_m \cos(\omega \cdot t + \psi) = \omega I_m \sin\left(\omega \cdot t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \text{Im}\left\{\omega \cdot I_m e^{j\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)}\right\} = \text{Im}\left\{\omega \cdot I_m e^{j\omega t} e^{j\psi} e^{j\frac{\pi}{2}}\right\} = \text{Im}\{j\omega \cdot \dot{I}_m e^{j\omega t}\} = j\omega \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Следовательно, для получения производной некоторой синусоидальной функции достаточно изображение данной функции умножить на величину  $j \cdot \omega$ .

### 5.4.3. Изображение интеграла от синусоидальной функции

Пусть задан синусоидальный ток  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ .

Определим интеграл от данного тока

$$\begin{aligned} \int i dt &= \int I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \text{Im}\left\{\frac{I_m}{\omega} \cdot e^{j\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)}\right\} = \text{Im}\left\{\frac{I_m}{\omega} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\right\} = \text{Im}\left\{\frac{I_m}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \frac{\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}}{j \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Следовательно, для получения интеграла от синусоидальной функции требуется изображение данной функции разделить на величину  $j \cdot \omega$ .

## 5.5. Метод комплексных амплитуд (символический метод). Законы Кирхгофа для синусоидальных цепей

Сущность данного метода заключается в том, что сначала все функции времени заменяются их комплексными изображениями, интегро-дифференциальные уравнения, составленные по законам Кирхгофа, заменяются алгебраическими уравнениями в комплексной форме, содержащими комплексные значения заданных и искомых функций.

При этом мгновенное значение тока  $i$  заменяется на  $\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ ; мгновенное значение напряжения на сопротивлении  $R$  заменяется на  $R \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ , совпадающее по фазе с  $\dot{I}_m$ ; мгновенное значение напряжения на индуктивности  $u_L = L \frac{di}{dt}$  – комплексом  $j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ ; мгновенное значение напряжения на конденсаторе  $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$  – на  $\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} = \frac{\dot{I}_m}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot e^{j\omega t}$ .

Решая эти уравнения, находят комплексные выражения искомых функций, а от них переходят к их оригиналам.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 5.10.

По второму закону Кирхгофа  $e = u_r + u_L + u_C$ ,

$$e = i \cdot r + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

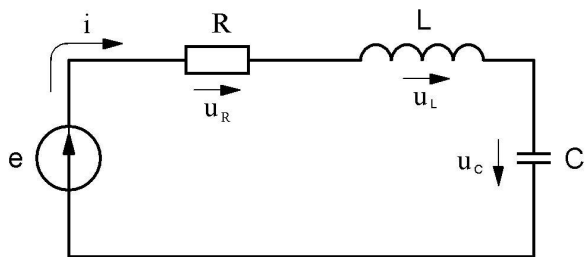


Рис.5.10

Далее выполним переход к комплексной форме:

$$e = \dot{E}_m \cdot e^{j\omega t}; \quad i = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t};$$

$$L \frac{di}{dt} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t};$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt = \dot{I}_m \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot e^{j\omega t}.$$

В результате перехода интегро-дифференциальное уравнение заменяется на алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами вида:

$$\dot{E}_m \cdot e^{j\omega t} = R \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} + \dot{I}_m \cdot L \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Поделим обе части на  $\sqrt{2}$  и на  $e^{j\omega t}$ , получим:

$$\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} \cdot \left( R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right).$$

Или

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot \left( R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right). \quad (5.2)$$

Здесь  $R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \underline{Z}$  – комплексное сопротивление

рассматриваемой цепи.

Уравнение (5.2) решается в комплексной форме относительно неизвестных функций. После этого делается обратный переход, т.е. переход от комплексной формы функций к их оригиналам.

### Законы Ома и Кирхгофа для синусоидальных цепей

Закон Ома в комплексной форме для участка цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}; \underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}},$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление элемента (участка) цепи.

Законы Кирхгофа для синусоидальных цепей в комплексной форме имеют вид:

первый закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0,$$

*алгебраическая сумма комплексных значений токов ветвей, сходящихся в узле, равна нулю.*

Второй закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} = \sum_{k=1}^n \dot{U}_{mk},$$

*алгебраическая сумма комплексных значений ЭДС любого замкнутого контура равна алгебраической сумме комплексных значений напряжений его участков.*

Часто на практике при записи уравнений Кирхгофа пользуются не амплитудными, а действующими значениями. Для этого достаточно обе части уравнения разделить на  $\sqrt{2}$ .

Тогда получим:

первый закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0;$$

второй закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k.$$

## 5.6. Среднее и действующее значения синусоидальных функций

Среднее значение любой функции определяется по формуле:

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Геометрически  $\int_0^T f(t) dt$  есть площадь фигуры, ограниченной функцией  $f(t)$  и осью абсцисс (рис.5.11). Среднее значение функции за период равно высоте

прямоугольника с основанием  $T$ , площадь которого равна площади фигуры, ограниченной функцией  $f(t)$  и осью абсцисс.

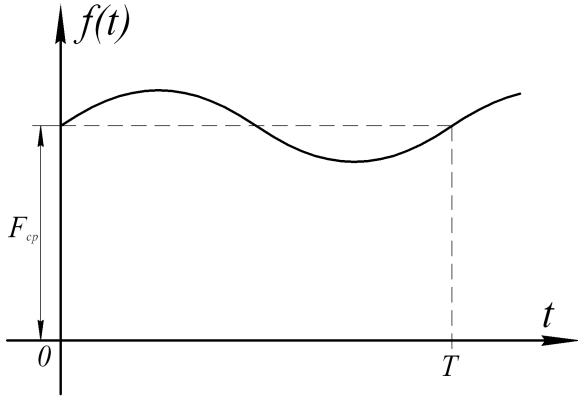


Рис.5.11

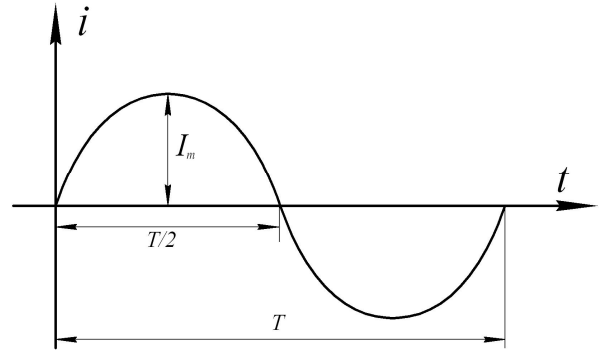


Рис.5.12

Для синусоидальных функций говорят о среднем значении за положительный полупериод (рис.5.12), т.к. за время, равное периоду  $T$  среднее значение функции  $F_{cp} = 0$ .

Определим среднее значение синусоидальной функции за положительной полупериод:

В общем виде  $I_{cp}$  может быть записано следующим образом:

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega \cdot t \cdot dt.$$

После преобразования данного выражения:

$$I_{\bar{a}o} = \frac{2}{T} \cdot I_m \int_0^{T/2} \sin \omega \cdot t \cdot dt = \frac{2 \cdot I_m}{\omega \cdot T} \cdot (-\cos \omega \cdot t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2 \cdot I_m}{\omega \cdot T} \cdot (1 + 1) =$$

$$\frac{4 \cdot I_m}{\omega \cdot T} = \frac{4 \cdot I_m}{\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot T} = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m.$$

Соответственно:

$$U_{cp} = 0,637 \cdot U_m ;$$

$$E_{cp} = 0,637 \cdot E_m .$$

Действующее значение любой периодической функции  $f(t)$  определяется по формуле:

$$F_o = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt} .$$

Следовательно, выражения для действующих значений тока  $I$ , напряжения  $U$  и ЭДС  $E$  будут иметь вид:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} ; \tag{5.3}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} ; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} .$$

Дадим физическое толкование *действующего* значения тока.

Возведем формулу (5.3) для действующего значения тока  $I$  в квадрат:

$$I_0^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Умножив обе части полученного выражения на величину  $R \cdot T$ , получим:

$$I_0^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T R \cdot i^2 dt.$$

Полученное выражение дает право утверждать, что:

**действующее значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который проходя через неизменное сопротивление  $R$  за период  $T$ , выделяет такое же количество теплоты, что и данный периодический ток  $i$ .**

Получим численное значение для  $I_0$ , если известно амплитудное значение тока  $I_m$ . Преобразуем выражение, находящееся под знаком "корень квадратный" в (5.3)

$$\begin{aligned} \int_0^T i^2 dt &= \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt = I_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} \left( \int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) = \\ &= \frac{I_m^2}{2} \cdot \left( t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot \omega} \sin 2 \cdot \omega \cdot t \Big|_0^T \right) = \frac{I_m^2}{2} \cdot \left[ T - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \left( \sin 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot T - \sin 0 \right) \right] = \frac{I_m^2}{2} \cdot T. \end{aligned}$$

Подставив полученное значение в исходное выражение (5.3), получим

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{I_m^2}{2} \cdot T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m.$$

Аналогично можно получить выражения для определения действующих значений напряжения  $U$  и ЭДС  $E$ , которые примут вид:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

## 5.7. Простейшие линейные цепи однофазного синусоидального тока

### 5.7.1. Резистивный элемент в цепи синусоидального тока

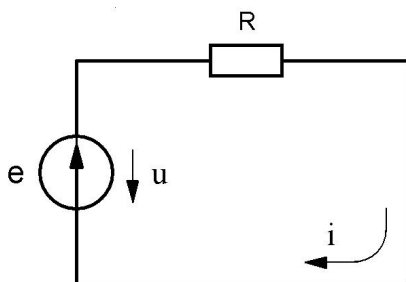


Рис.5.13

Пусть на входе цепи (рис.5.13) действует напряжение

$$u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u).$$

Требуется определить изменение тока и мощности в этой цепи.

По закону Ома  $i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$ , т.е.

синусоида тока имеет ту же частоту и начальную фазу напряжения и, что важно заметить,  $\psi_i = \psi_u$ .

Следовательно, на резисторе мгновенные значения тока  $i$  и напряжения  $u$  имеют одинаковую частоту и **совпадают по фазе**, т.е.  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$ .

Мгновенное значение мощности этой цепи равно произведению мгновенных значений  $i$  и  $u$ :

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \psi_u) = U_m \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2 \cdot (\omega \cdot t + \psi_u)) =$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} - \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos 2 \cdot (\omega \cdot t + \psi_u) = UI - UI \cos 2(\omega t + \psi_u).$$

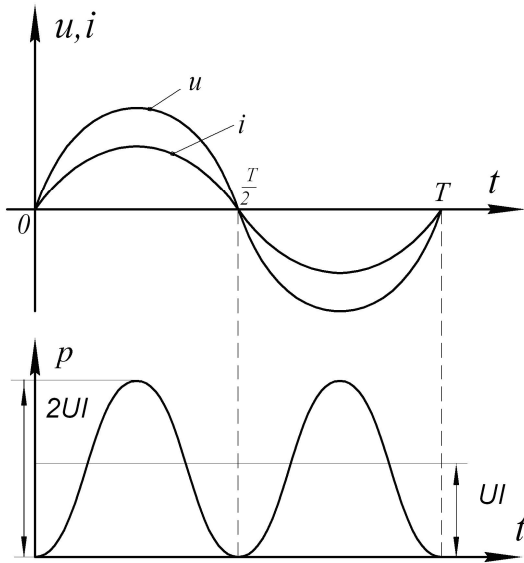


Рис.5.14

Следовательно, мгновенная мощность в данной цепи имеет постоянную составляющую  $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$  и составляющую  $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos 2 \cdot \omega \cdot t$ , изменяющуюся с частотой  $2 \cdot \omega$ . Графики зависимостей  $u$ ,  $i$  и  $p$  от времени имеют вид (рис.5.14). Из графиков видно, что мгновенная мощность, несмотря на пульсации остается *положительной*. Следовательно, при любом направлении тока, поступающая энергия на активном сопротивлении превращается в тепловую энергию.

Среднее за период значение мощности  $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U \cdot I$  или  $P = R \cdot I^2$ ,

что совпадает с выражением для активной мощности цепи.

Запишем выражения для  $u$  и  $i$  в комплексном виде:

$$u = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}; \quad i = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

На рис.5.15 построена векторная диаграмма для амплитудных значений.

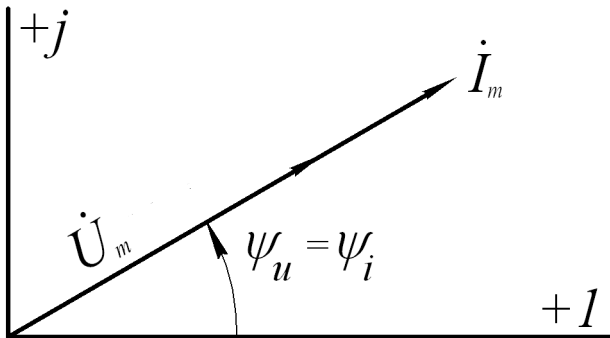


Рис.5.15

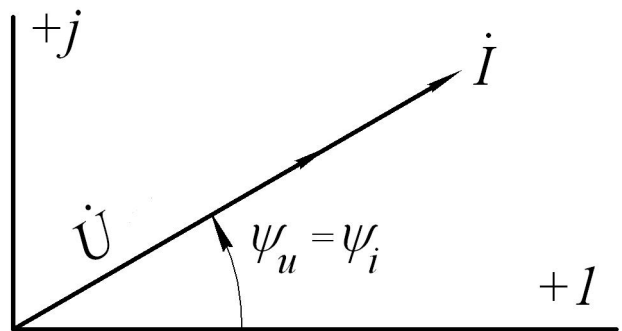


Рис.5.16

Из диаграммы видно, что вектор синусоидального напряжения на резисторе **совпадает** по фазе с вектором синусоидального тока.

При расчете синусоидальных цепей принято строить векторные диаграммы для комплексных действующих значений  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$ . Они совпадают по направлению с векторами  $\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_m$  и отличаются лишь по величине:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I \cdot e^{j\psi_u} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = U \cdot e^{j\psi_u} = R \cdot I \cdot e^{j\psi_u} = R \cdot \dot{I}.$$

Векторная диаграмма для действующих значений  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  показана на рис. 5.16.

### 5.7.2. Индуктивность в цепи синусоидального тока

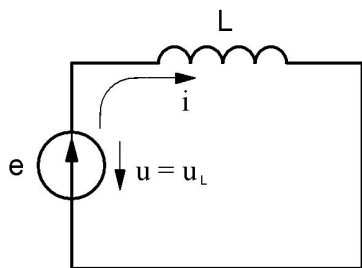


Рис.5.17

Для простоты анализа активное сопротивление катушки будем считать равным нулю. Пусть по катушке индуктивности (рис.5.17) протекает ток:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i).$$

Этот ток наводит в катушке ЭДС самоиндукции, равную

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Изображение тока в комплексном виде:  $i = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$ .

В п. 5.4.2. было показано, что для получения производной синусоидальной функции достаточно ее изображение умножить на величину  $j \cdot \omega$

$$e_L = -j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} = \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j(\omega t - 90^\circ)}.$$

**Следовательно, ЭДС самоиндукции отстает по фазе от тока на угол  $90^\circ$**

Внешнее напряжение источника  $u = u_L$  уравновешивается ЭДС самоиндукции

$e_L$ . Следовательно,  $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$ .

Очевидно, что  $u_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} = \omega \cdot L \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j(\omega t + 90^\circ)}$ .

**Следовательно, напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ .**

Произведение  $\omega \cdot L = x_L$  называется индуктивным сопротивлением.

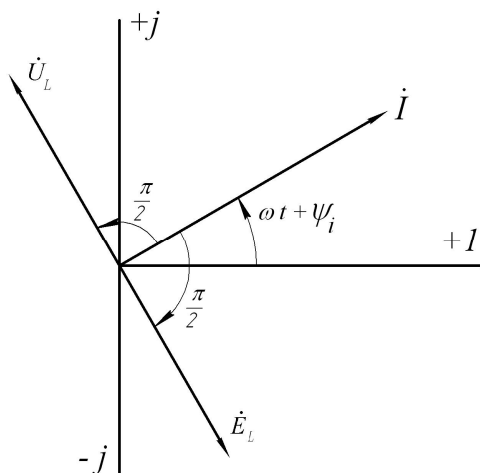


Рис.5.18

Векторная диаграмма имеет вид рис.5.18. Если комплекс тока в цепи

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}}{\sqrt{2}}, \quad \text{то комплекс}$$

действующих значений напряжения и ЭДС:

$$\dot{U}_L = \omega \cdot L \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\omega t + \psi_i + 90^\circ)};$$

$$\dot{E}_L = \omega \cdot L \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\omega t + \psi_i - 90^\circ)}.$$

Мгновенное значение мощности в цепи с индуктивностью:

$$p_L = u_L \cdot i = U_{Lm} \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i) =$$

$$= U_{Lm} \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \cos \frac{\pi}{2} - \cos\left(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= -U_L \cdot I \cdot \cos\left(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_L \cdot I \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \psi_i).$$



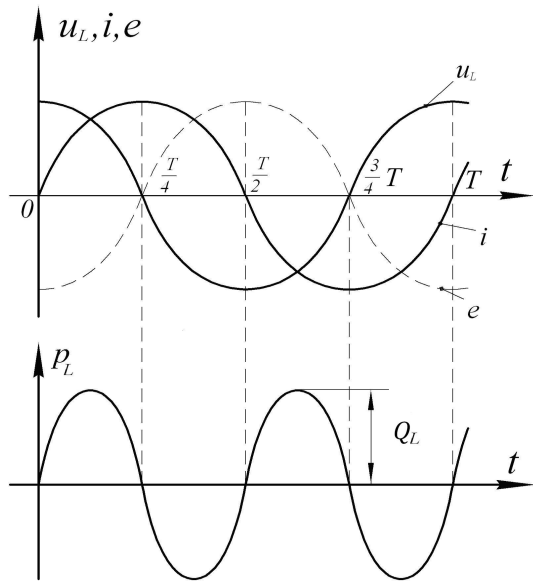


Рис.5.19

Графики зависимостей  $u_L$ ,  $i$  и  $e$  от времени и  $p = f(t)$  имеют вид, показанный на рис. 5.19 (для простоты принято  $\psi_i = 0$ ).

За время от 0 до  $\frac{T}{4}$ , когда  $u_L$  и  $i$  положительны, мощность  $p$  также положительна. Энергия  $w_i = \frac{L \cdot i^2}{2}$  из источника переходит в катушку и затрачивается на создание магнитного поля. За время от  $\frac{T}{4}$  до  $\frac{T}{2}$  ток  $i$  убывает, но положителен, а  $u_L$  и  $p_L$  —

отрицательны. Энергия магнитного поля возвращается в источник и т.д.

Следовательно, для цепи с идеальной индуктивностью среднее за период значение мощности равно 0, т.е.

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0.$$

В такой цепи происходит непрерывный процесс обмена энергией между источником и магнитным полем катушки индуктивности.

Амплитудное значение мощности называется *реактивной индуктивной мощностью*

$$Q_L = x_L \cdot I^2.$$

### 5.7.3. Конденсатор в цепи синусоидального тока

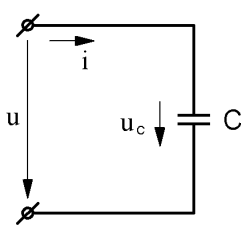


Рис.5.20

Пусть к идеальному конденсатору подведено напряжение

$$u_c = U_{Cm} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u) = \dot{U}_{Cm} \cdot e^{j\omega t}.$$

Ток в конденсаторе равен:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \dot{U}_{Cm} \cdot e^{j\omega t} = \omega \cdot C \cdot \dot{U}_{Cm} \cdot e^{j(\omega t + 90^\circ)};$$

$$\text{или } i = \omega \cdot C \cdot \dot{U}_{Cm} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u + 90^\circ).$$

Следовательно, **ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$ .**

Векторная диаграмма представлена на рис.5.21.

Перепишем выражение для тока:

$$i = \frac{U_{Cm}}{\frac{1}{\omega \cdot C}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u + 90^\circ).$$

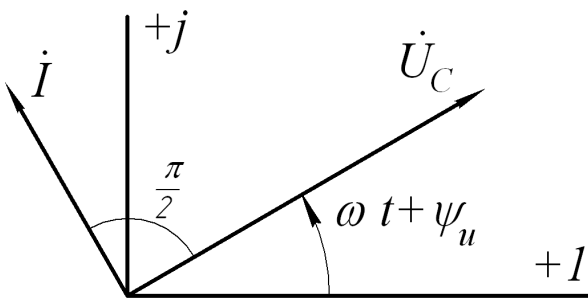


Рис.5.21

Здесь  $\frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = x_C$  - называется **реактивным сопротивлением** конденсатора или просто емкостным сопротивлением;  $-j \cdot x_C$  - комплекс емкостного сопротивления.

Мгновенное значение мощности в цепи с конденсатором:

$$p_C = u_C \cdot i = U_{Cm} \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u) \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = U_C \cdot I \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \psi_u).$$

Изобразим графики зависимостей  $u_C$ ,  $i$  и  $p_C$  от времени (рис.5.22), а для простоты возьмем  $\psi_u = 0$ .

Здесь также наблюдается колебательный процесс мощности. Следовательно, среднее значение мощности за период равно нулю, т.е.

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T p_C dt = 0.$$

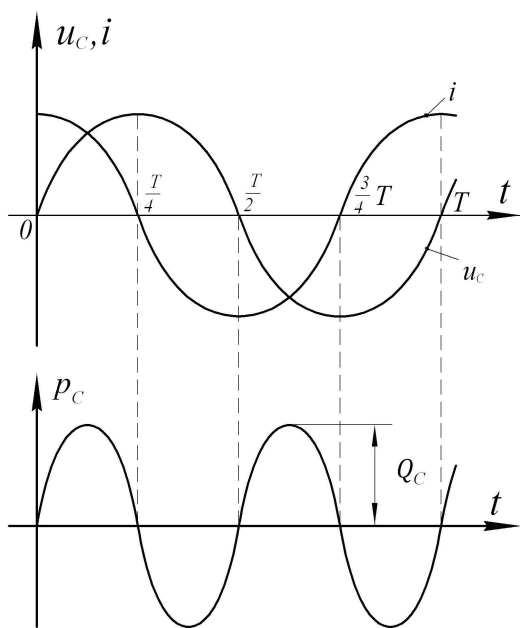


Рис.5.22

От 0 до  $\frac{T}{4}$  конденсатор заряжается, т.е.

накапливает энергию, поступающую от источника в виде энергии электрического поля конденсатора. За время от  $\frac{T}{4}$  до  $\frac{T}{2}$  конденсатор разряжается, и энергия электрического поля конденсатора возвращается в источник и т.д.

Амплитуда колебания мощности в цепи с конденсатором называется **реактивной емкостной мощностью**:

$$Q_C = x_C \cdot I^2.$$

#### 5.7.4. Комплексная мощность

Если известны напряжение и ток в цепи переменного тока, имеющие комплексные выражения  $\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_u}$  и  $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$ , а также сдвиг фаз между ними  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ , то выражение полной комплексной мощности в данной цепи определяется как произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока и имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U} \cdot I^* = U \cdot e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{-j\psi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot \cos \varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi = P + j \cdot Q, \end{aligned}$$

где  $P = \text{Re}\{\dot{U} \cdot I^*\}$ , а  $Q = \text{Im}\{\dot{U} \cdot I^*\}$ ;  $\tilde{S}$  – полная мощность ВА;  $P$  – активная мощность, измеряется в Вт, кВт, МВт;  $Q$  – реактивная мощность, измеряется в вольт-амперах реактивных ВАр, кВАр, МВАр.

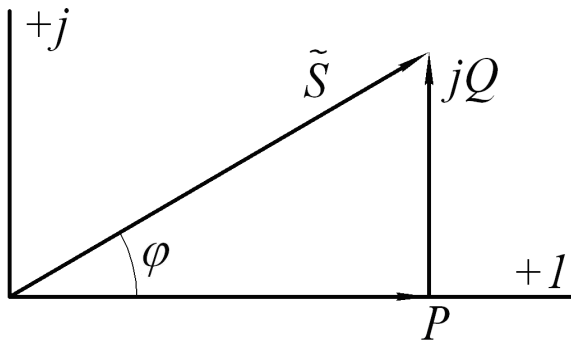


Рис. 5.23

Треугольник мощностей на комплексной плоскости показан на рис. 5.23.

Этот случай соответствует положительному значению реактивной мощности  $Q$ .

### 5.7.5. Последовательное соединение RL и RC

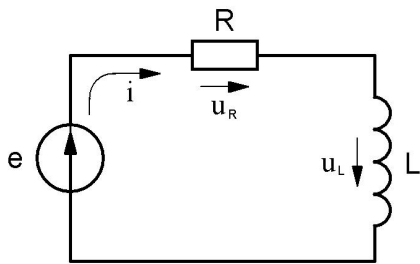


Рис.5.24

Пусть задана цепь (рис.5.24).

По второму закону Кирхгофа запишем

$$e = u_R + u_L, \text{ или } e = i \cdot R + L \frac{di}{dt}.$$

В комплексном виде это уравнение может быть записано:

$$\dot{I} \cdot R + j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I} = \dot{E},$$

или  $\dot{I} \cdot (R + j \cdot \omega \cdot L) = \dot{E}, \dot{I} \cdot \underline{Z} = \dot{E},$

где  $R + j \cdot \omega \cdot L = \underline{Z} = z \cdot e^{j\varphi}$  – комплексное сопротивление данной цепи.

Выражение для модуля полного сопротивления цепи имеет вид

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}.$$

Очевидно, что угол сдвига по фазе между общим током  $\dot{I}$  и  $\dot{E}$  можно определить по формуле:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega \cdot L}{R}.$$

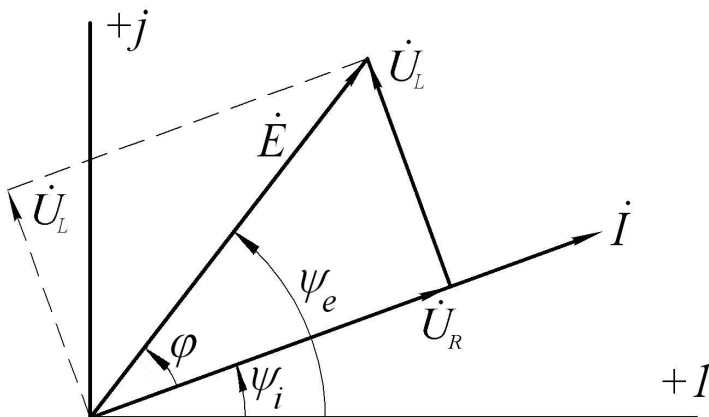


Рис.5.25

Итак, если известен ток в цепи  $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$ , или его можно определить

по закону Ома  $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j \cdot \omega \cdot L}$ , то

комплексные значения напряжения на сопротивлении и индуктивности будут иметь вид:  $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I} \cdot e^{j\psi_R}$ ,  $\dot{U}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \dot{I} = \omega \cdot L \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\psi_i + 90^\circ)}$ .

Векторная диаграмма для случая последовательного соединения R и L будет иметь вид, изображенный на рис.5.25.

Здесь  $\varphi = \psi_e - \psi_i$ , а комплекс ЭДС  $\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_e}$ .

Рассмотрим пример последовательного соединения R и C (рис.5.26).

По второму закону Кирхгофа имеем  $u_R + u_C = e$ ,

или 
$$R \cdot i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = e.$$

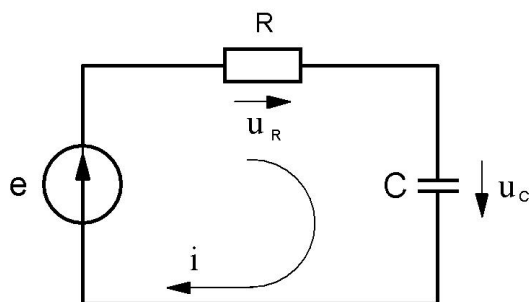


Рис.5.26

В комплексной форме это выражение имеет вид:

$$R \cdot \dot{I} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \dot{I} = \dot{E}, \quad \text{или}$$

$$\dot{I} \cdot \left( R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \right) = \dot{E}, \quad \dot{I} \cdot \underline{Z} = \dot{E},$$

где  $\underline{Z} = R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R - \frac{j}{\omega \cdot C} = z \cdot e^{j\varphi}$  –

комплексное сопротивление данной цепи.

Здесь  $z$  – модуль полного сопротивления данной цепи, равный  $z = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$ .

Нетрудно видеть, что угол сдвига по фазе между током  $\dot{I}$  и ЭДС  $\dot{E}$  равен:

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}.$$

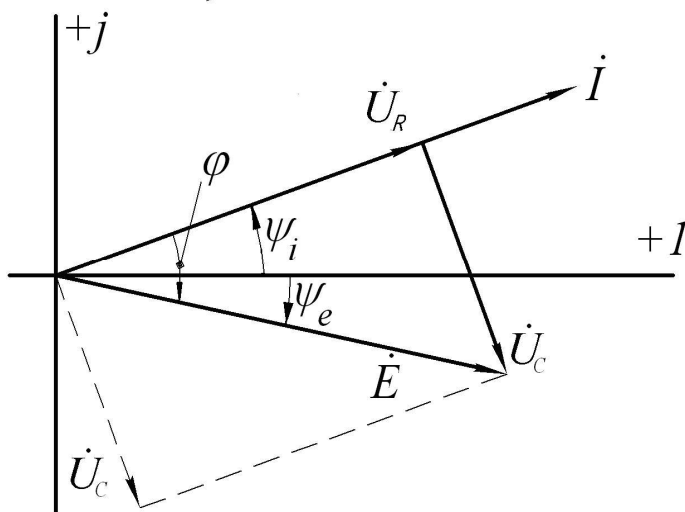


Рис.5.27

Если известен ток  $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$

или его можно рассчитать по формуле

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{E}}{R - j \cdot \frac{j}{\omega \cdot C}},$$

то комплексные значения напряжения на сопротивлении и емкости определяются

выражениями:  $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$ ,

$$\dot{U}_C = -\frac{j}{\omega \cdot C} \cdot \dot{I}.$$

Векторная диаграмма для данного случая изображена на рис.5.27. Здесь:

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\psi_e}, \quad \varphi = \psi_i + \psi_e.$$

## 5.8. Последовательное и параллельное соединения элементов R, L, C. Резонансы напряжений и токов

### 5.8.1. Последовательное соединение R, L, C. Резонанс напряжения. Треугольник сопротивлений

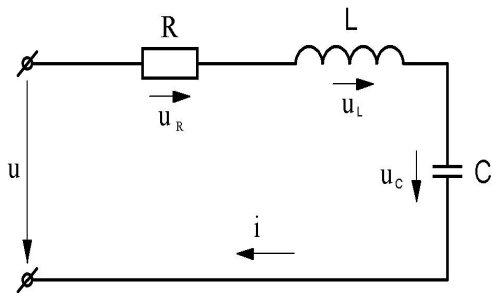


Рис. 5.28

Пусть по цепи (рис.5.28) протекает ток:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i).$$

В комплексной форме по второму закону Кирхгофа уравнение запишется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R \cdot \dot{I} + j \cdot x_L \cdot \dot{I} - \\ &- j \cdot x_C \cdot \dot{I} = (r + j \cdot x_L - j \cdot x_C) \cdot \dot{I} = \underline{Z} \cdot \dot{I}. \end{aligned}$$

Здесь  $\underline{Z} = R + j \cdot x_L - j \cdot x_C = R + j \cdot (x_L - x_C) = R + j \cdot x = z \cdot e^{j\varphi}$  – комплексное сопротивление данной цепи (см. п.5.5, где данное выражение для подобной цепи уже записывалось);  $x = x_L - x_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$  – реактивное сопротивление данной цепи;

$$z = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \text{ – модуль полного сопротивления данной цепи.}$$

Очевидно, что:

1) если  $x > 0$  ( $x_L > x_C$ ), то данная цепь будет носить индуктивный характер ( $\varphi > 0$ ); векторная диаграмма для этого случая будет иметь вид (рис.5.29), (принято  $\psi_i = 0$ ).

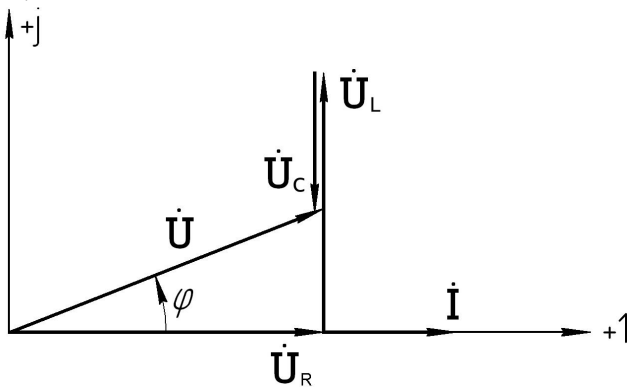


Рис.5.29

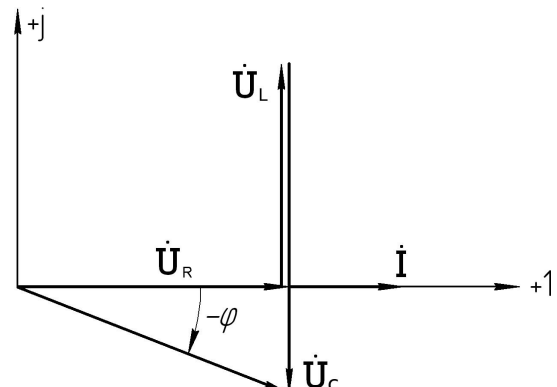


Рис.5.30

2) Если  $x < 0$  ( $x_L < x_C$ ), то данная цепь будет носить емкостной характер ( $\varphi < 0$ ). Векторная диаграмма для этого случая будет иметь вид (рис.5.30). Угол  $\varphi$  между векторами общего тока  $\dot{I}$  и общего напряжения  $\dot{U}$  в первом и во втором случаях определяется по формуле:

$$\varphi = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}.$$

3) Если  $x = 0$  ( $x_L = x_C$ ), то данная цепь будет носить активный характер, а векторная диаграмма для этого случая будет иметь вид (рис.5.31)

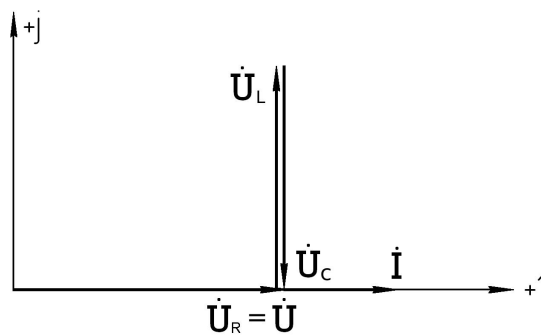


Рис.5.31

Явление, при котором в последовательной цепи из R, L, C общее напряжение совпадает по фазе с ее током, называется **резонансом напряжений**.

В этом случае индуктивное и емкостное сопротивления компенсируют друг друга ( $x_L = x_C$ ,  $x = x_L - x_C = 0$ ), значения тока и мощности максимальны, а от источника в цепь поступает только активная энергия.

Частота, на которой наблюдается резонанс напряжения, определяется из условия равенства реактивных сопротивлений на резонансной частоте  $x_L = x_C$ :

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}; \quad \omega_0^2 \cdot L \cdot C = 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

При резонансе напряжения на реактивных элементах цепи равны по величине и противоположны по фазе  $\dot{U}_L = \dot{U}_C$  и могут во много раз превышать напряжение питания  $\dot{U}$  (ЭДС  $\dot{E}$ ). Такое превышение получается, если

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} > R. \quad (5.4)$$

Подставив значение  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  в последнее выражение, получим условие превышения (5.4) в виде

$$\sqrt{\frac{L}{C}} > R \text{ или } \rho > R.$$

Величина  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$  называется *характеристическим сопротивлением* колебательного контура (Ом).

Отношение  $\frac{\rho}{R}$  определяет резонансные свойства колебательного контура и называется *добротностью* контура

$$Q = \frac{\rho}{R}.$$

Если при резонансе увеличить в одинаковое число раз  $n$  индуктивное и емкостное сопротивления, т.е.  $x'_L = n \cdot x_{L0}$  и  $x'_C = n \cdot x_{C0}$ , то ток  $\dot{I}$  в цепи не изменится, а напряжения на индуктивном и емкостном элементах увеличиваются в  $n$  раз:  $\dot{U}'_L = n \cdot U_L$  и  $\dot{U}'_C = n \cdot U_C$ . Следовательно, в принципе можно безгранично увеличивать напряжения на индуктивном и емкостном элементах при одном и том же токе

$$i = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{\dot{E}}{R}.$$

Явление резонанса в электроэнергетических установках, как правило, явление вредное (возникающие перенапряжения, во много раз превышающие рабочие номинальные напряжения, могут привести к выходу из строя электроустановки). Но в радиотехнике, связи и автоматике оно используется часто, например, для настройки цепей на заданную частоту с целью выделения колебаний напряжения данной частоты.

В качестве примера рассмотрим входную часть радиоприемника (рис.5.32).

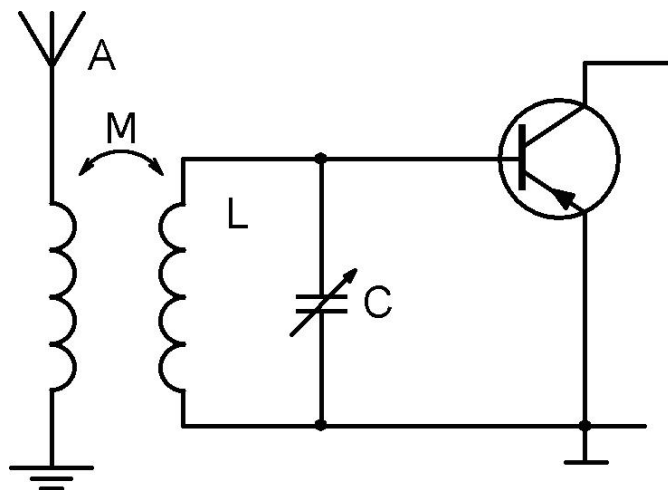


Рис.5.32

Колебательный контур LC имеет высокую добротность.

В антенне наводятся быстропеременные токи, приводящие к возникновению в катушке L колебательного контура ЭДС взаимной индукции  $E_0$  (сигналы от всех работающих радиостанций). Если  $E_0$  имеет частоту, равную резонансной частоте данного контура, то на конденсаторе и, соответственно, на входе транзистора возникает напряжение равное  $E_0 \cdot Q$ , где  $Q$  – добротность контура. Это усиление касается только резонансной частоты, что обеспечивает выделение из многих радиосигналов работающих радиостанций только одного (таким образом, осуществляется "настройка" на определенную радиостанцию).

### Треугольник сопротивлений

Треугольник, катетами которого являются векторы  $\dot{U}_R$  и  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ , а гипотенузой – вектор  $\dot{U}$  называется *треугольником напряжения* (см. векторные диаграммы, изображенные выше).

Если стороны этого треугольника поделить на ток  $\dot{I}$ , то получим треугольники сопротивлений (рис.5.33 и рис.5.34)

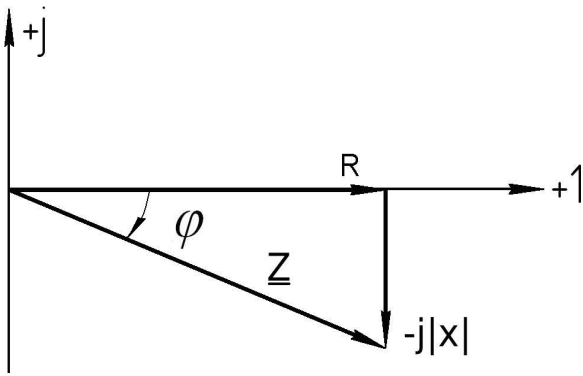


Рис.5.33

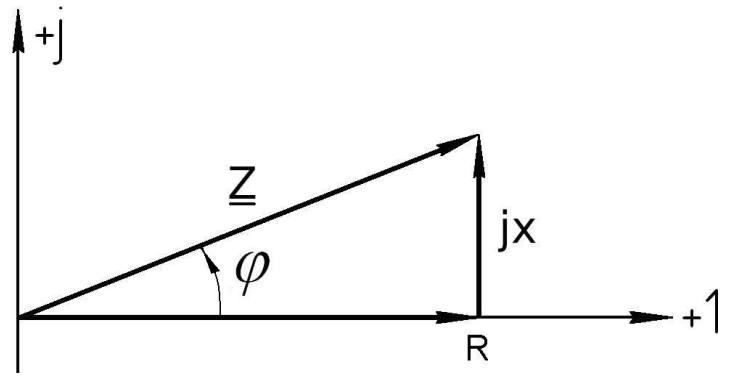


Рис.5.34

В треугольнике на рис.5.33  $x < 0$  (преобладает емкостное сопротивление), а в треугольнике на рис.5.34  $x > 0$  (преобладает индуктивное сопротивление).

Треугольник сопротивлений представляет собой геометрическую интерпретацию уравнения

$$\underline{Z} = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = z \cdot e^{j\varphi} = z \cdot \cos \varphi + j \cdot z \cdot \sin \varphi.$$

### 5.8.2. Параллельное соединение R, L, C. Треугольники токов и проводимостей. Резонанс токов

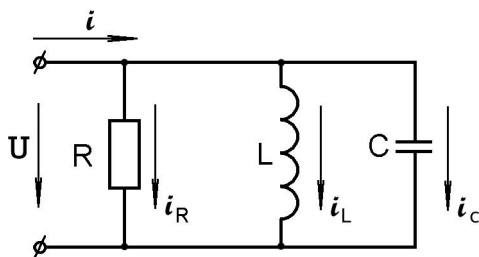


Рис.5.35

Пусть на входе цепи (рис.5.35) действует напряжение  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_u)$ , комплекс которого имеет вид  $\dot{U} = U \cdot e^{j\psi_u}$ . Под действием этого напряжения по цепи будет протекать ток  $i$ , равный

$$i = i_R + i_L + i_C \text{ или } u \cdot g + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du_C}{dt} = i.$$

Перепишем данное уравнение в комплексной форме:

$\dot{U} \cdot g + \dot{U} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} + \dot{U} \cdot j \cdot \omega \cdot C = \dot{I}$ . Выполним простые преобразования:

$$\dot{U} \cdot \left( g - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L} + j \cdot \omega \cdot C \right) = \dot{I};$$

$$\dot{U} \cdot \left[ g - j \cdot \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right) \right] = \dot{I},$$

$$\dot{U} \cdot (g - j \cdot b) = \dot{I}, \quad \dot{U} \cdot \underline{Y} = \dot{I},$$

где  $g$  – активная проводимость;  $b$  – реактивная проводимость;  $\frac{1}{\omega \cdot L} = b_L$  – индуктивная проводимость;  $\omega \cdot C = b_C$  – емкостная проводимость;  $\underline{Y}$  – комплексная проводимость данной цепи.

Модуль полной проводимости данной цепи можно рассчитать по формуле

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{g^2 + \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right)^2}.$$

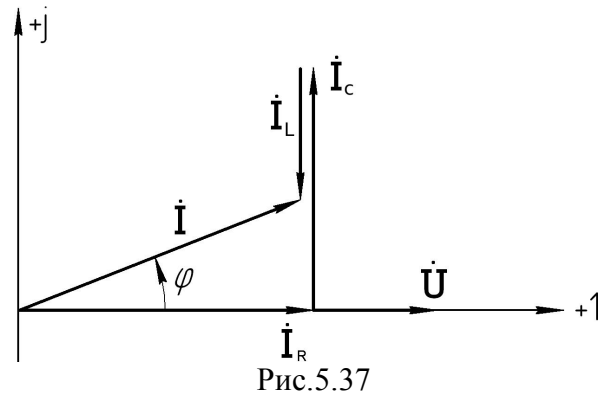
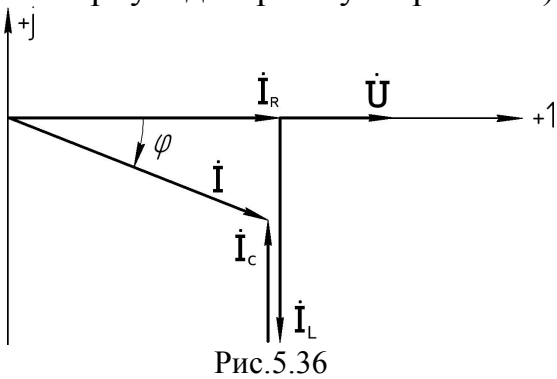


Угол между векторами общего тока и общего напряжения определяется по формуле:

$$\varphi = \arctg \frac{b}{g} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C}{g}.$$

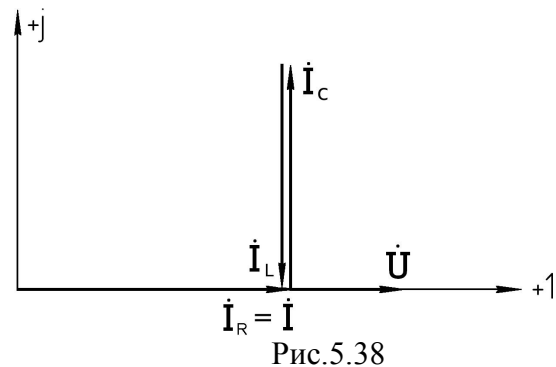
Очевидно, что

1) если  $b > 0$  ( $b_L > b_C$ ), то цепь будет носить индуктивный характер (см. векторную диаграмму на рис.5.36);



2) если  $b < 0$  ( $b_L < b_C$ ), то цепь будет носить емкостной характер (см. векторную диаграмму на рис. 5.37);

3) если  $b = 0$  ( $b_L = b_C$ ), то цепь будет носить чисто активный характер (см. векторную диаграмму на рис.5.38).



**Явление, при котором в параллельной цепи из  $R, L, C$  вектор общего напряжения совпадает по фазе с вектором общего тока, называется резонансом токов.**

Таким образом, суммарный ток в неразветвленной части цепи равен току через активное сопротивление, т.е.  $\dot{I} = \dot{I}_R$ .

В данном случае реактивная проводимость цепи равна нулю, а общая проводимость наименьшая, следовательно, и ток в неразветвленной части цепи  $\dot{I}$  минимальный (в отличие от резонанса напряжений, когда ток был максимальным).

Здесь токи  $\dot{I}_L = \dot{I}_C$  могут во много раз превосходить  $\dot{I}$ . Поэтому это явление получило название **резонанса токов**.

Резонансная частота определяется из условия возникновения резонанса токов, т.е. из условия  $b_L = b_C$ :

$$\frac{1}{\omega_0 \cdot L} = \omega_0 \cdot C; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Если при резонансе токов в одинаковое число раз  $n$  увеличить индуктивную и емкостную проводимости, т.е.

$$b'_L = n \cdot b_{L0} \text{ и } b'_C = n \cdot x_{C0},$$

то токи  $\dot{I}_L$  и  $\dot{I}_C$  увеличатся в  $n$  раз при неизменном значении общего тока в неразветвленной части цепи  $\dot{I}_0 = g \cdot \dot{U}$ . Следовательно, можно получить любой по величине ток в индуктивном и емкостном элементах при неизменном токе источника.

Резонанс токов для электроэнергетических установок явление безопасное, т.к. токи в обеих ветвях взаимно независимы и определяются приложенным напряжением (по закону Ома). Очевидно, что большие токи могут возникать только при малых значениях индуктивности  $L$  и больших значениях емкости  $C$  при заданном напряжении питания.

Явление резонанса токов широко используется на практике. Так, например, в резонансном усилителе параллельный контур с большой добротностью используется в качестве нагрузки, включаемой в коллекторную цепь транзистора усилительного каскада (для колебаний резонансной частоты его сопротивление велико, а, следовательно, велико и снимаемое с него напряжение, тогда как для остальных частот его сопротивление мало).

То свойство, что токи в ветвях в параллельном контуре много больше силы тока в неразветвленной части цепи, используется при устройстве индукционных печей, где нагревание металлов осуществляется вихревыми токами.

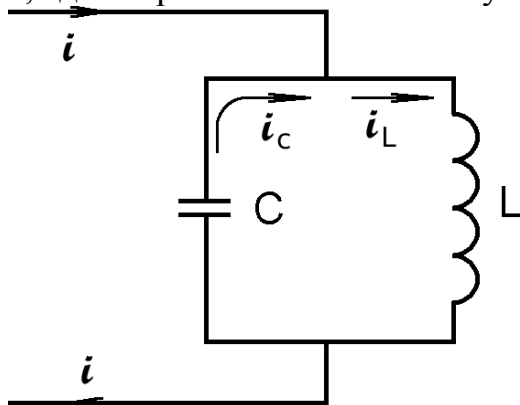


Рис.5.39

Параллельно нагревающей катушке  $L$  (рис.5.39) присоединяется конденсатор  $C$  с такой емкостью, при которой на частоте питающего генератора в данном контуре наблюдается резонанс токов.

Очевидно, что ток  $i \approx i_L - i_C$  намного меньше разогревающего тока  $i_L$ .

### Треугольник проводимостей

Прямоугольный треугольник с катетами  $\dot{I}_R$  и  $(\dot{I}_L + \dot{I}_C)$  и гипотенузой  $\dot{I}$  называется треугольником тока (см. векторные диаграммы, приведенные выше).

Если все стороны этого треугольника разделить на вектор  $\dot{U}$ , то получим треугольник проводимостей, который служит геометрической интерпретацией выражения:

$$\underline{Y} = g - j \cdot \left( \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right).$$

Векторные диаграммы треугольника проводимостей для  $b > 0$  и  $b < 0$  приведены на рис.5.40 и рис.5.41 соответственно.

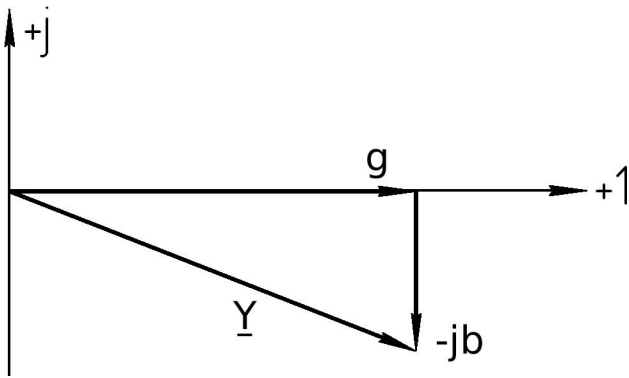


Рис.5.40

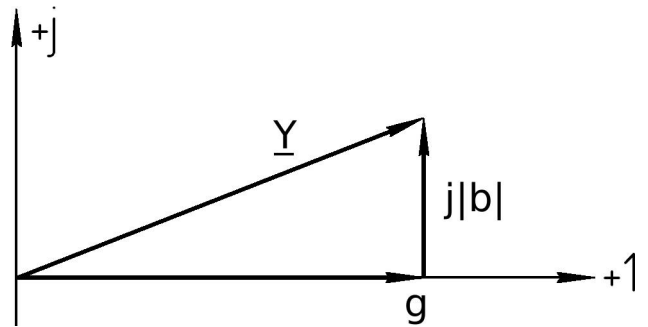


Рис.5.41

## 5.9. Эквивалентные преобразования схем электрической цепи

### 5.9.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединения

#### Последовательное соединение.

В общем случае пусть имеем цепь вида (рис.5.42)

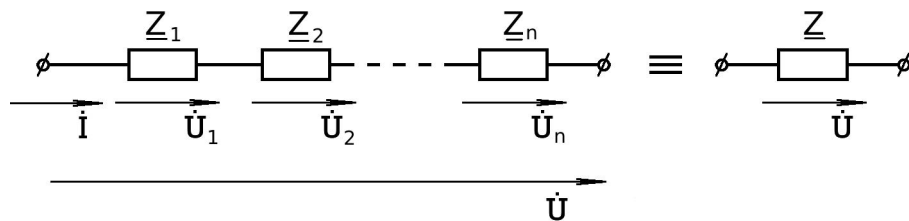


Рис.5.42

Очевидно, что  $\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$ ;  $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = \sum_{k=1}^n \dot{U}_k$ .

Сумма комплексных сопротивлений всех последовательно соединенных участков цепи  $\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$  называется **эквивалентным комплексным сопротивлением**.

Рассмотрим два примера последовательного соединения элементов: RL (рис.5.43) и RC (рис.5.44).

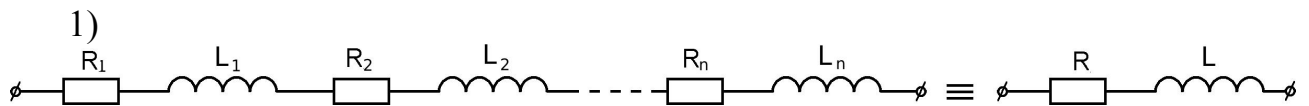


Рис.5.43

где  $R = \sum_{k=1}^n R_k$ ,  $L = \sum_{k=1}^n L_k$ .

2)

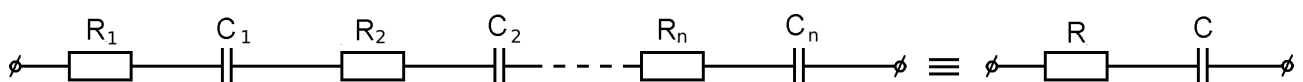


Рис.5.44

где  $R = \sum_{k=1}^n R_k$ ,  $\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$ .

Ток в таких цепях находится из выражения:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}$$

### Параллельное соединение.

В общем случае пусть имеем цепь, изображенную на рис.5.45.

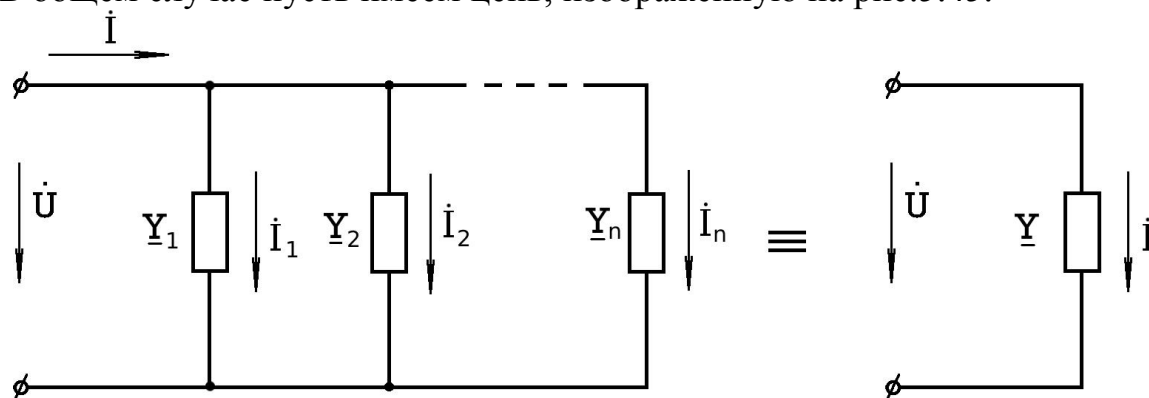


Рис.5.45

По I закону Кирхгофа имеем:

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dots + \dot{i}_n = \sum_{k=1}^n \dot{i}_k$$

Распишем компоненты данного уравнения:

$$\dot{U} \cdot \underline{Y} = \dot{U} \cdot \underline{Y}_1 + \dot{U} \cdot \underline{Y}_2 + \dots + \dot{U} \cdot \underline{Y}_n = \dot{U} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

Поделим обе части на  $\dot{U}$ , получим  $\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$ .

Сумма комплексных проводимостей всех параллельно соединенных ветвей  $\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$  называется **эквивалентной комплексной проводимостью**.

Рассмотрим два примера параллельного соединения элементов: RL (рис.5.46) и RC (рис.5.47).

1)

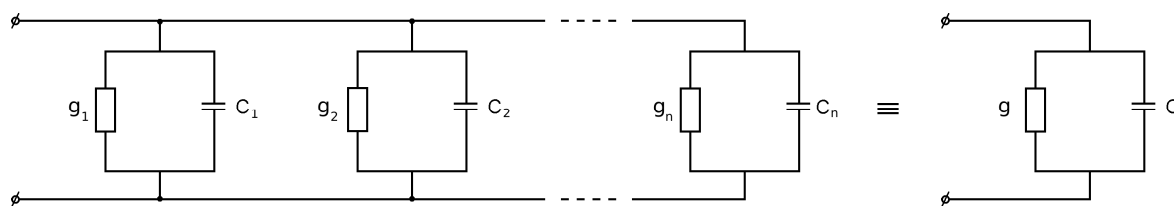


Рис.5.46

Здесь  $g = \sum_{k=1}^n g_k$ ,  $C = \sum_{k=1}^n C_k$ .

2)

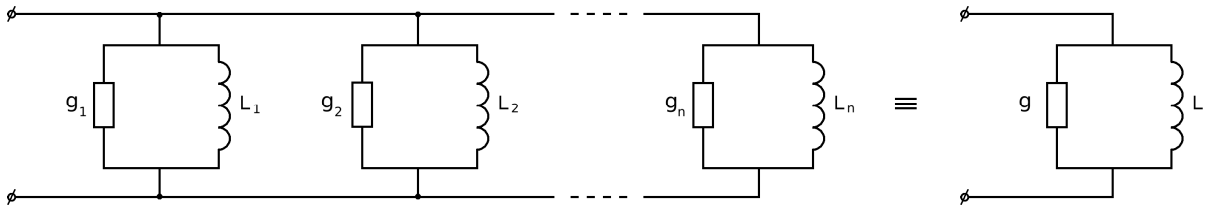


Рис.5.47

Здесь  $g = \sum_{k=1}^n g_k$ ,  $\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$ .

Общий ток для данного случая  $\dot{I} = \dot{U} \cdot \underline{Y}$ .

**Смешанное соединение.**

В общем случае пусть имеем цепь вида (рис.5.48)

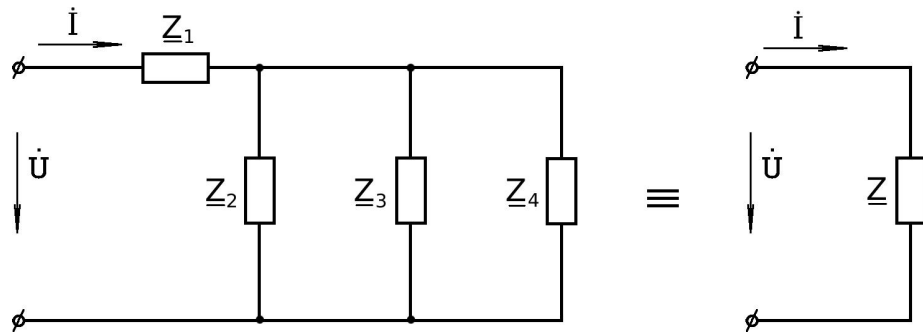


Рис.5.48

Здесь  $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{экв}}$ , где, в свою очередь,  $\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\text{экв}}}$ ,  $\underline{Y}_{\text{экв}} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}$ .

### 5.9.2. Эквивалентные участки цепи с последовательным и параллельным соединениями

Пусть имеем цепь вида (рис.5.49). Требуется перейти к цепи вида (рис.5.50).



Рис.5.49

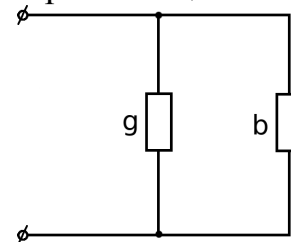


Рис.5.50

Для цепи на рис.5.49 комплексное сопротивление равно  $\underline{Z} = R + j \cdot x$ .

Для цепи на рис.5.50 имеем:

$$\underline{Y} = g - j \cdot b = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot x} = \frac{R - j \cdot x}{(R + j \cdot x) \cdot (R - j \cdot x)} = \frac{R - j \cdot x}{R^2 + x^2} = \frac{R}{R^2 + x^2} - j \cdot \frac{x}{R^2 + x^2}.$$

Следовательно,  $g = \frac{R}{R^2 + x^2}$ ,  $b = \frac{x}{R^2 + x^2}$ .

Обратная задача, т.е. задача перехода от цепи на рис.5.50 к цепи, изображенной на рис.5.49, решается следующим образом:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - j \cdot b} = \frac{1 \cdot (g + j \cdot b)}{(g + j \cdot b) \cdot (g - j \cdot b)} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \cdot \frac{b}{g^2 + b^2} = R + j \cdot x.$$

Следовательно,  $R = \frac{g}{g^2 + b^2}$ ,  $x = \frac{b}{b^2 + g^2}$ .

## 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### 6.1. Понятие взаимной индуктивности

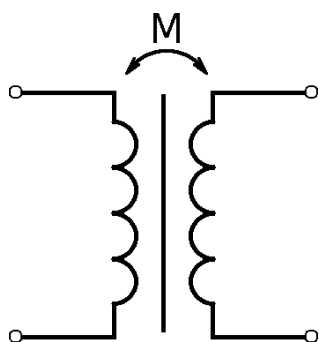


Рис.6.1

Цепи со взаимной индуктивностью находят широкое применение на практике: рис.6.1 – трансформатор, см. рис.5.32 – входная цепь приемника.

Сущность взаимоиндукции заключается в том, что изменение тока в одном элементе цепи приводит к изменению ЭДС в другом элементе другой цепи.

Такие элементы и цепи называются *индуктивно связанными*, а явление называется *взаимоиндукцией*.

При составлении уравнений для индуктивно связанных цепей необходимо знать, согласно или встречно направлены потоки самоиндукции и взаимоиндукции и соответствующие им ЭДС. Это можно узнать, если известно направление намотки катушек на сердечнике и выбрано положительное направление токов в них. Однако это сложно изобразить графически. Вместо этого удобнее показывать их одноименные зажимы (начала катушек).

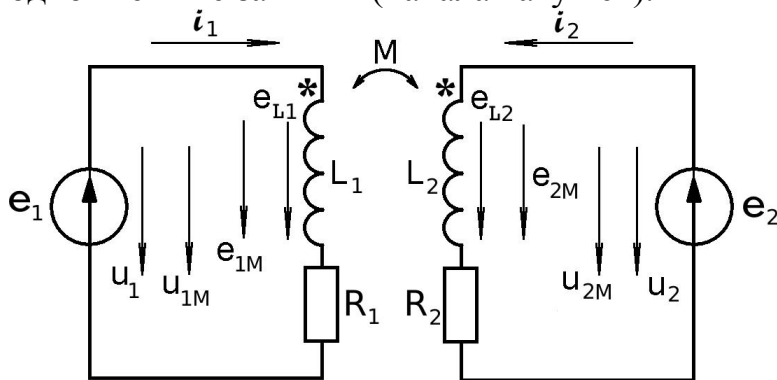


Рис.6.2

Для одноименных зажимов индуктивно связанных катушек характерно то, что при одинаковом направлении токов  $i_1$  и  $i_2$  относительно этих зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции и соответствующие им ЭДС складываются (рис.6.2). Такое включение катушек называется *согласным*.

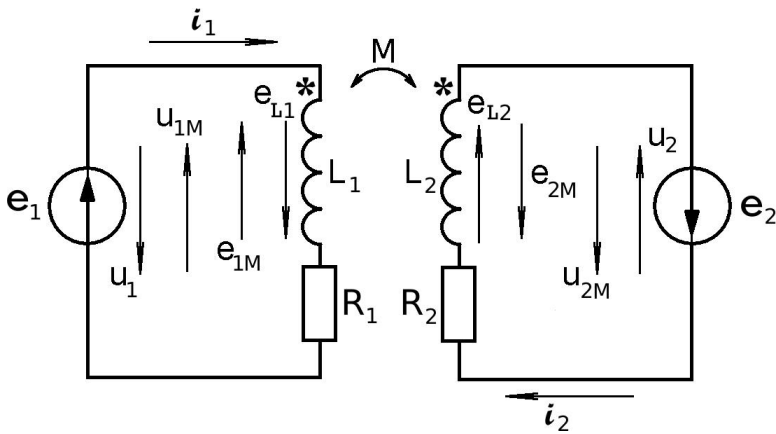


Рис.6.3

При *встречном* включении (см. рис.6.3) токи катушек неодинаково ориентированы относительно одноименных зажимов, следовательно, и магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции встречно включенных катушек противоположны; навстречу друг другу будут действовать и соответствующие им ЭДС.

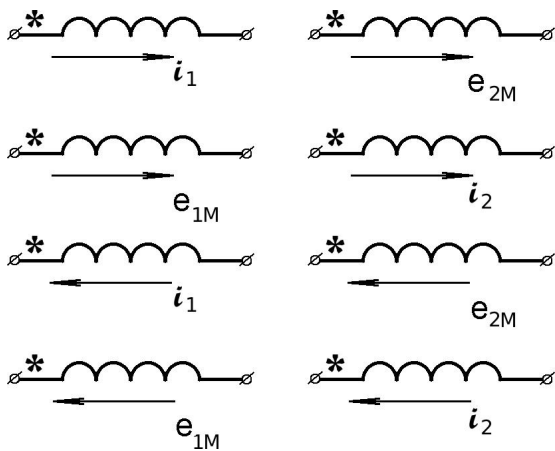


Рис.6.4

При изображении токов и ЭДС взаимной индукции, вызываемых этими токами, используют правило: *токи и наведенные ими ЭДС взаимной индукции одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов.*

На рис.6.4 это правило проиллюстрировано графически.

ЭДС взаимной индукции для катушки с сердечником при согласном включении определяются по формуле:

$$e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Для встречного включения:

$$e_{1M} = M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{2M} = M \frac{di_1}{dt}.$$

Взаимная индуктивность двух катушек  $L_1$  и  $L_2$  равна:

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2},$$

где  $k$  – коэффициент связи.

## 6.2. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек при согласном и встречном включении

Пусть имеем согласное включение двух индуктивно связанных катушек (рис.6.5).

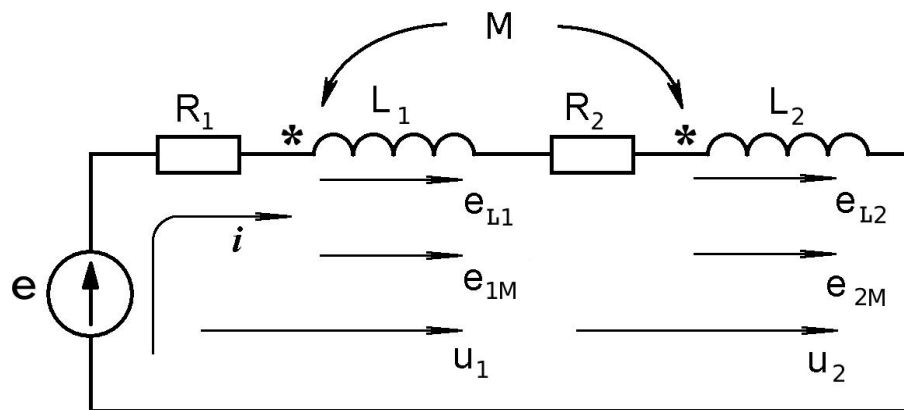


Рис.6.5

Здесь  $e_{L1}$  и  $e_{L2}$  – ЭДС самоиндукции, а  $e_{1M}$  и  $e_{2M}$  – ЭДС взаимной индукции в первой и во второй катушках соответственно.

Запишем для данной цепи уравнение по второму закону Кирхгофа

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 &= e; \quad i \cdot R_1 + i \cdot R_2 = e + e_{L1} + e_{1M} + e_{L2} + e_{2M}; \\
 i \cdot R_1 - e_{L1} - e_{1M} + i \cdot R_2 - e_{L2} - e_{2M} &= e; \\
 i \cdot R_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} &= e; \\
 i \cdot R_1 + \frac{di}{dt}(L_1 + M) + i \cdot R_2 + \frac{di}{dt}(L_2 + M) &= e.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Видим, что наличие взаимной индукции при согласном включении катушек увеличивает индуктивность цепи.

Уравнение (6.1) в комплексной форме имеет вид:

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \dot{I} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I} + \dot{I} \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \dot{I} + j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}.$$

Согласно этому уравнению на рис.6.6 построена векторная диаграмма.

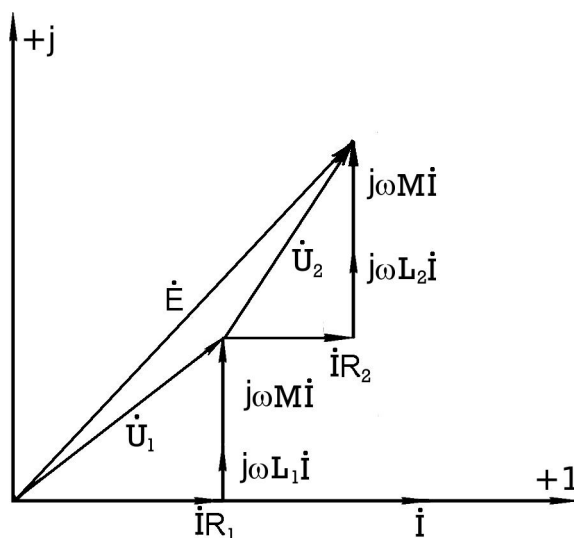


Рис.6.6

$\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  – напряжения на первой и второй катушках соответственно.

Рассмотрим схему встречного включения катушек (рис.6.7)



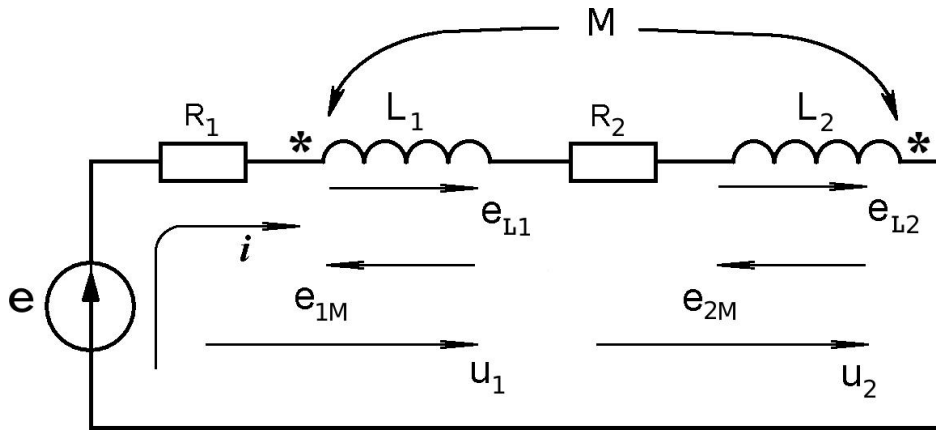


Рис.6.7

Запишем уравнение состояния для данной цепи, воспользовавшись вторым законом Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 &= e; \\
 i \cdot R_1 - e_{L_1} + e_{1M} + i \cdot R_2 - e_{L_2} + e_{2M} &= e; \\
 i \cdot R_1 + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} &= e; \\
 i \cdot R_1 + \frac{di}{dt}(L_1 - M) + i \cdot R_2 + \frac{di}{dt}(L_2 - M) &= e.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Видим, что наличие взаимной индукции при встречном включении катушек уменьшает индуктивность цепи.

Уравнение (6.2) в комплексной форме имеет вид:

$$\dot{E} = \dot{I} \cdot R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 \cdot \dot{I} - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I} + \dot{I} \cdot R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \dot{I} - j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}.$$

Согласно этому уравнению на рис.6.8 построена векторная диаграмма для случая встречного включения катушек:

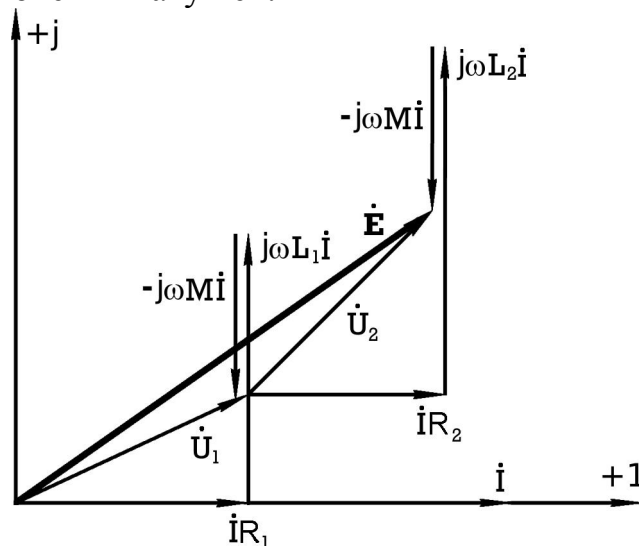


Рис.6.8

Диаграмма построена для случая  $L_1 > M$  и  $L_2 > M$ .

Очевидно, что реактивное сопротивление данной цепи при согласном и встречном включении индуктивно связанных катушек равно

$$x_{\text{созл}} = \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M), \tag{6.3}$$

$$x_{встр} = \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M). \quad (6.4)$$

Определим взаимную индуктивность  $M$ . Для этого вычтем (6.4) из (6.3)

$$x_{согл} - x_{встр} = \omega \cdot 4 \cdot M,$$

и выразим  $M$

$$M = \frac{x_{согл} - x_{встр}}{4 \cdot \omega}.$$

### 6.3. Входное сопротивление воздушного трансформатора

Трансформатор – устройство, передающее энергию из одной цепи в другую посредством электромагнитной индукции. У воздушного трансформатора отсутствует сердечник. Применяется в высокочастотных цепях (на частотах, превышающих 20 кГц).

Обмотка, к которой подводится напряжение питания, называется первичной (ПО), а обмотка, подключаемая к нагрузке называется вторичной (ВО).

На рис. 6.9 показана схема трансформатора.  $R_1$  и  $R_2$  – активные сопротивления обмоток,  $L_1$  и  $L_2$  – индуктивности первичной (ПО) и вторичной (ВО) обмоток соответственно.

Определим входное сопротивление данного трансформатора  $\underline{Z}_{ex}$ .

Очевидно, что при отсутствии ВО

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1. \quad (6.5)$$

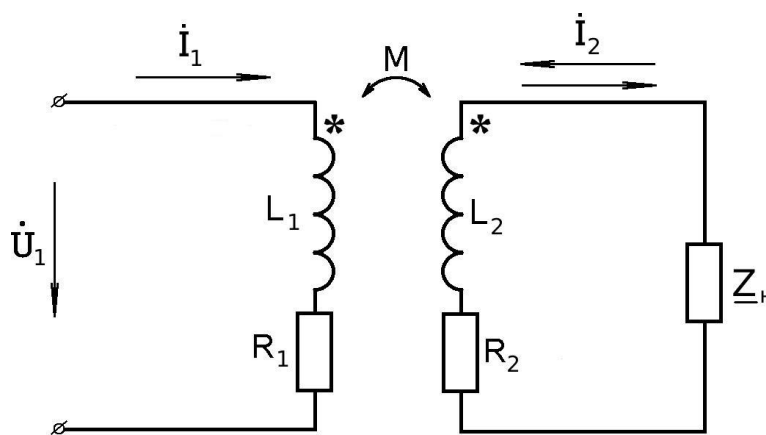


Рис.6.9

Получим выражение для  $\underline{Z}_{ex}$  с учетом взаимной индуктивной связи между ПО и ВО. По второму закону Кирхгофа для двух независимых гальванически, но индуктивно связанных контуров запишем уравнения

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_2; \\ 0 = (R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H) \cdot \dot{I}_2 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Формула для определения входного сопротивления имеет вид:

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Выразим из второго уравнения системы (6.6) ток  $\dot{I}_2$

$$\dot{I}_2 = \frac{\mp j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H}$$

и подставим его в первое уравнение системы (6.6), получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 \pm j \cdot \omega \cdot M \cdot \frac{\mp j \cdot \omega \cdot M \cdot \dot{I}_1}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H} = \\ &= (R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1) \cdot \dot{I}_1 + \frac{(\omega \cdot M)^2}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H} \cdot \dot{I}_1. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно: } \underline{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + j \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{(\omega \cdot M)^2}{R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 + \underline{Z}_H}. \quad (6.7)$$

При сравнении (6.7) и (6.5) видим, что третье слагаемое – комплексное сопротивление, *вносимое* из вторичной цепи в первичную. **Вносимое сопротивление** – это такое сопротивление, которое следовало бы "внести" в первичную цепь (включить последовательно с  $L_1$  и  $R_1$ ), чтобы учесть влияние нагрузки вторичной цепи трансформатора на ток в его первичной цепи.

Тогда эквивалентная схема для определения входного сопротивления воздушного трансформатора будет иметь вид (рис.6.10):

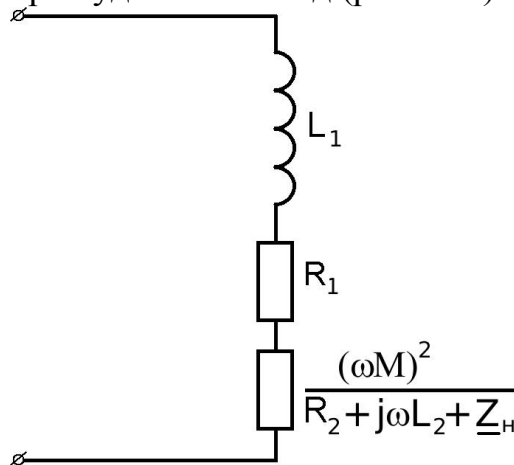


Рис.6.10

## 7. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 7.1. Основные понятия. Способы изображения симметричной трехфазной системы ЭДС

Трехфазная цепь строится на основе трехфазных синхронных генераторов, генерирующих совокупность трех ЭДС, одинаковых по частоте и амплитуде, но сдвинутых друг относительно друга на угол  $120^\circ$ . Упрощенная схема трехфазного синхронного генератора показана на рис.7.1.

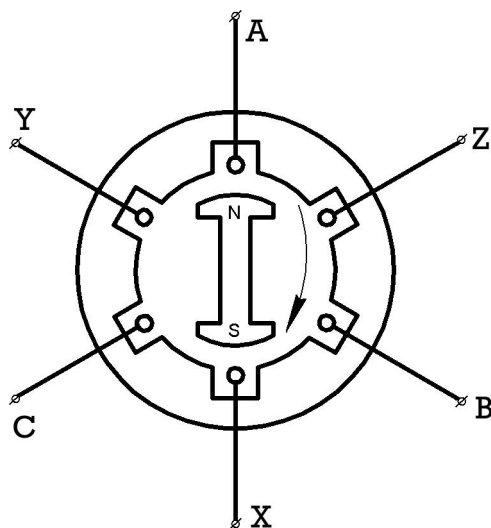


Рис.7.1

Вся обмотка статора состоит из трех частей (фаз). Обмотки фаз пространственно сдвинуты на статоре на угол  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$  (таким образом,  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$  – угол между магнитными осями фазных обмоток). Условно каждая фазная обмотка представлена всего одним проводником (витком). Начала обмоток обозначены буквами А, В, С, а концы – Х, Y, Z.

ЭДС в витках статора наводится за счет того, что магнитное поле вращающегося ротора пересекает эти витки и наводит в них ЭДС индукции. Частота этих ЭДС будет одинаковой, а по фазе они, в силу пространственного смещения обмоток, отличаются друг от друга.

**Трехфазные системы, в фазных обмотках которых наводятся ЭДС одинаковые по амплитуде, но сдвинутые относительно друг друга по фазе на угол  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ , называются симметричными.**

По определению симметричной трехфазной цепи имеем:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega \cdot t; \quad e_B = E_m \cdot \sin \left( \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \right); \quad e_C = E_m \cdot \sin \left( \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \right).$$

В комплексной форме действующие значения фазных ЭДС переписутся в виде:

$$\dot{E}_A = E \cdot e^{j \cdot 0^\circ}; \quad \dot{E}_B = E \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}}; \quad \dot{E}_C = E \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}}$$

Графическое изображение представлено на рис.7.2.

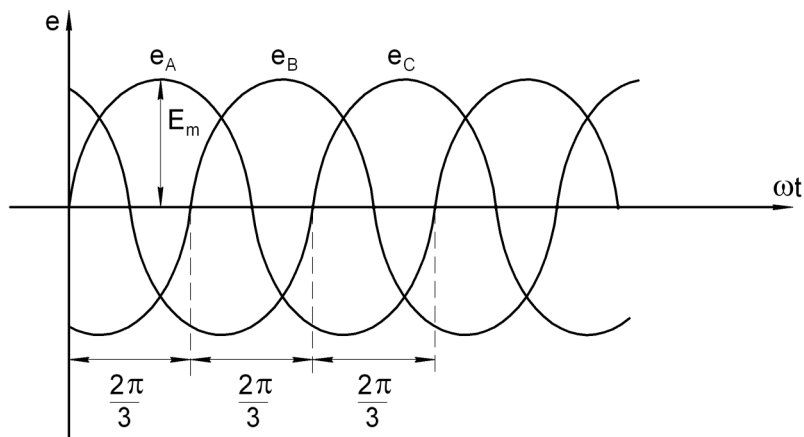


Рис.7.2

Векторная диаграмма для прямой последовательности фаз, когда ЭДС  $\dot{E}_A$  опережает ЭДС  $\dot{E}_B$ , а  $\dot{E}_B$  соответственно опережает  $\dot{E}_C$  показана на рис.8.3. Такая последовательность чередования фаз называется **прямой**. Она наиболее часто используется на практике.

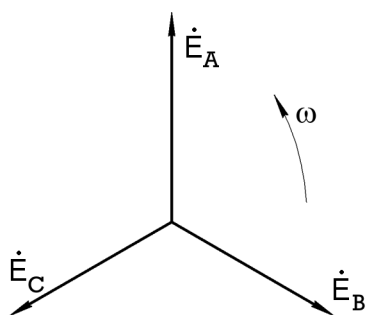


Рис.7.3

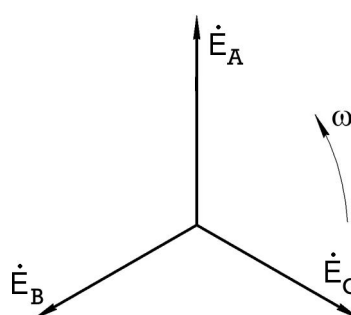


Рис.7.4

Обратная последовательность чередования фаз изображена на рис.7.4.

Очевидно, что:  $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$ .

Преимущества трехфазных цепей:

- 1) по сравнению с однофазными системами более экономичны при производстве и передаче энергии на расстояние;
- 2) возможность простого получения вращающегося магнитного поля, необходимого для работы трехфазных машин переменного тока;
- 3) возможность получения в одной установке двух эксплуатационных напряжений – фазного и линейного.

## 7.2. Соединение фаз трехфазного источника питания звездой и треугольником

Несвязанные трехфазные цепи не получили распространения на практике в силу своей неэкономичности, т.к. источник и приемник соединены друг с другом с помощью шестипроводной линии (рис.7.5).

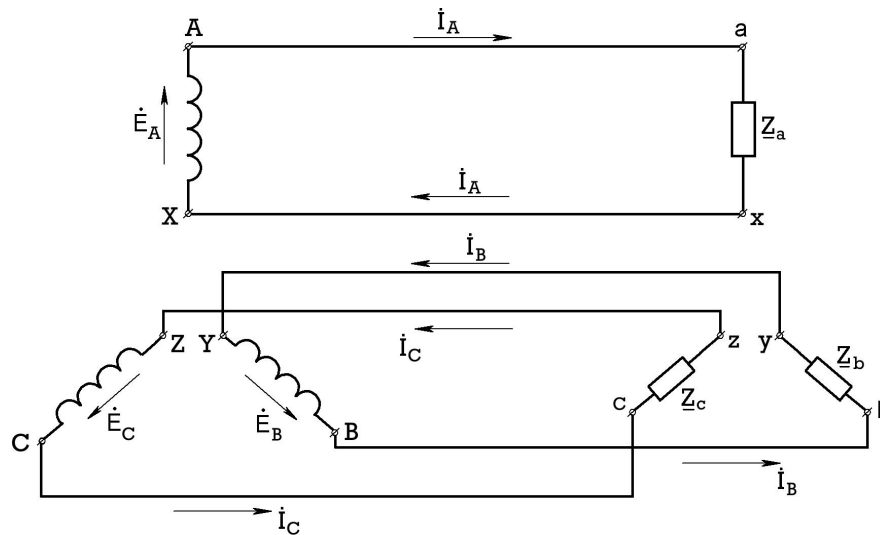


Рис.7.5

Рассмотрим соединение фаз трехфазного генератора звездой (рис. 7.6).

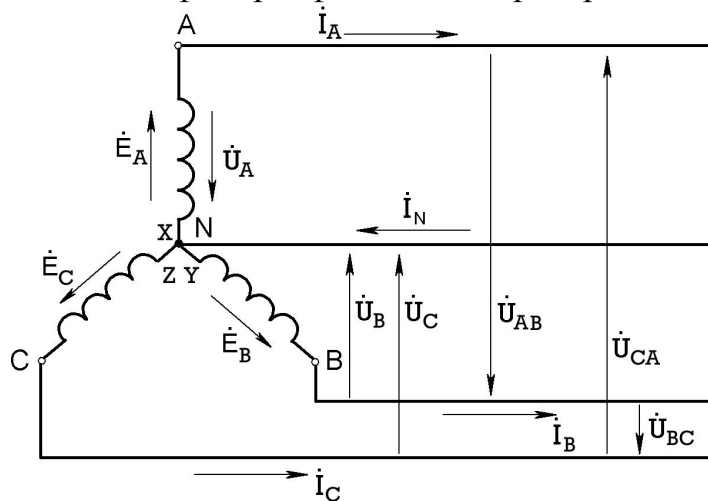


Рис.7.6

За условное положительное направление ЭДС в фазе принимают направление от конца к началу, а за положительное направление фазных напряжений – от начала к концу.

При соединении обмоток звездой, все концы обмоток соединяются в одну точку N, называемую нейтральной точкой. К началам обмоток А, В и С подключаются так называемые линейные провода, идущие к приемникам. Если нейтральные точки источника и приемника не соединены между собой, то трехфазная цепь называется **трехпроводной**. В противном случае трехфазная цепь называется **четырёхпроводной**, а провод N-n, соединяющий нейтральные точки N источника и n приемника, называется **нейтральным (нейтралью)**.

За положительное направление токов во всех линейных проводах, связывающих источник с нагрузкой, принимают направление от источника питания к нагрузке, а в нейтральном проводе – от приемника к источнику.

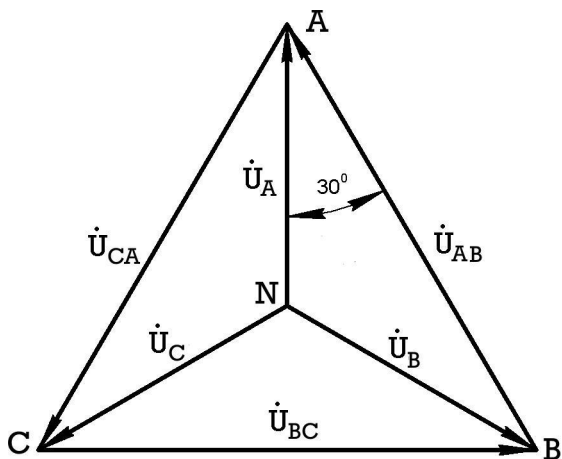


Рис.7.7

Напряжения  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  – называются **фазными**, а напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$  – называются **линейными**.

Векторная диаграмма для этого случая имеет вид, показанный на рис.8.7.

Из векторной диаграммы следует

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

**Важное свойство системы линейных напряжений:** независимо от характера нагрузки сумма их мгновенных значений или векторов всегда равна нулю.

Векторы линейного напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  опережают по фазе соответствующие векторы фазных напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  на угол  $\frac{2 \cdot \pi}{6} = 30^\circ$ .

Из векторной диаграммы легко получить численное соотношение между линейными и фазными напряжениями (величина линейного напряжения в  $\sqrt{3}$  раз больше величины фазного напряжения)  $U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi$ .

Линейный и фазные токи равны  $I_L = I_\phi$ .

Номинальные напряжения для приемников низкого напряжения по ГОСТ:

$$U_L = 380 \text{ В} \Rightarrow U_\phi = 220 \text{ В}; \quad U_L = 220 \text{ В} \Rightarrow U_\phi = 127 \text{ В}.$$

Рассмотрим соединение фаз трехфазного генератора треугольником.

При соединении треугольником в одну точку соединяются соответствующие начала и концы фаз (рис.7.8) X-B, Y-C, Z-A.

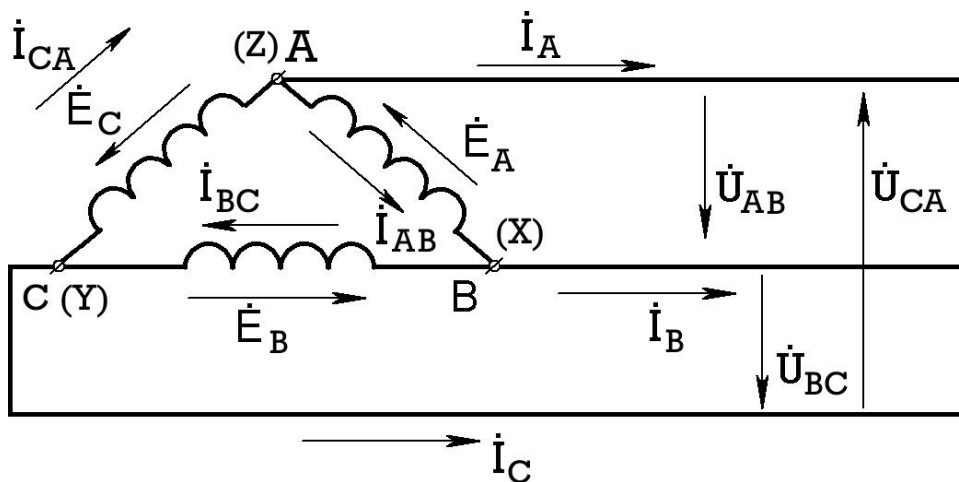


Рис.7.8

Из данной схемы следует, что при соединении фаз источника треугольником, линейные напряжения равны фазным  $U_L = U_\phi$ , а линейные токи в данном случае больше фазных в  $\sqrt{3}$  раз, т.е.  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi$  (см. рис.7.13).

Такое соединение фаз генератора не равносильно их короткому замыканию (как это имело бы место при подобном соединении фаз источников синусоидального тока), т.к. если фазы симметричны (содержат одинаковое число витков) сумма мгновенных значений фазных ЭДС или изображающих их векторов

всегда равна нулю, т.е.  $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$ . Поэтому при холостом ходе никакого тока в фазах источника нет. Однако даже незначительное отклонение от симметрии вызовет уравнительный ток в обмотках источника. В связи с этим на практике обмотки генератора стараются соединять звездой.

### 7.3. Трехфазные цепи с симметричными пассивными приемниками

#### 7.3.1. Соединение звездой (3-х и 4-х проводные цепи)

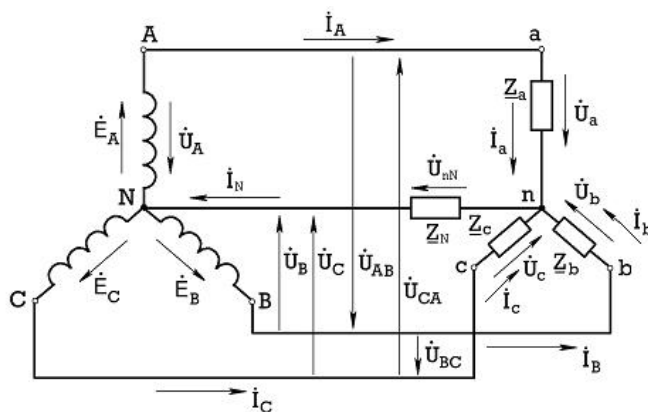


Рис.7.9

Условием симметричности нагрузки является равенство комплексных сопротивлений фаз  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$ .

Если считать, что линейные сопротивления проводов и нейтрали равны нулю, то фазные напряжения приемника равны фазным напряжениям источника:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A; \dot{U}_b = \dot{U}_B; \dot{U}_c = \dot{U}_C.$$

В этом случае фазные токи приемника, протекающие по фазам с сопротивлениями  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$ ,  $\underline{Z}_c$  можно определить по формулам:

$$\dot{i}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}; \dot{i}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}; \dot{i}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c},$$

а ток в нейтрали  $\dot{i}_N = \dot{i}_a + \dot{i}_b + \dot{i}_c$ .

Можно видеть также, что  $\dot{i}_A = \dot{i}_a; \dot{i}_B = \dot{i}_b; \dot{i}_C = \dot{i}_c$ .

Итак, при симметричной нагрузке токи в фазах равны по величине и сдвинуты на один и тот же угол относительно соответствующих фазных напряжений (рис.7.10).



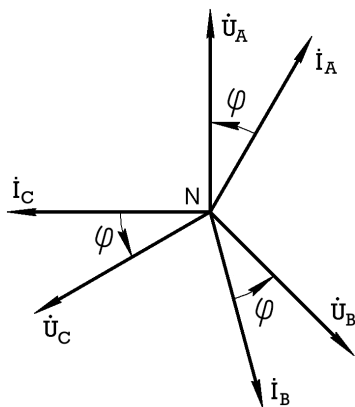


Рис.7.10

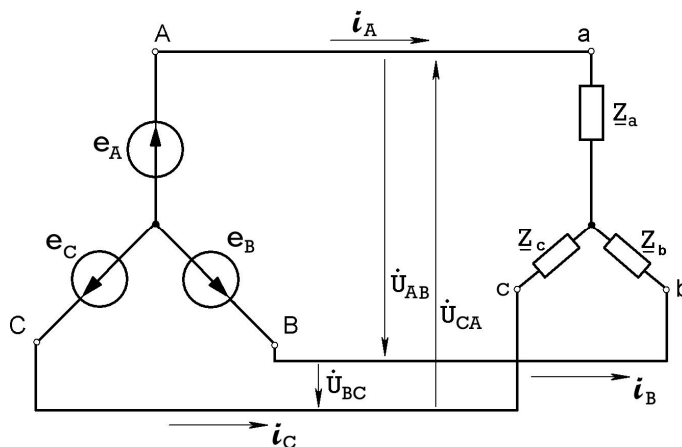


Рис.7.11

Отсюда следует, что  $i_A + i_B + i_C = 0$ , т.е. при симметричной нагрузке ток в нейтральном проводе отсутствует и, следовательно, отпадает в нем необходимость. Такая трехфазная цепь будет трехпроводной (рис.7.11).

Для определения токов в трехпроводной цепи при соединении приемников в звезду достаточно определить ток лишь в одной из фаз (остальные равны этому значению)  $I_\phi = \frac{U_\phi}{Z_\phi}$ . Линейные токи равны фазным  $I_\phi = I_L$ , а фазное напряжение в

$\sqrt{3}$  раз меньше линейного  $U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$ .

В трехпроводную цепь при соединении нагрузки звездой включают только симметричные трехфазные приемники – электродвигатели, печи, нагреватели для воды и т.д.

### 7.3.2. Соединение треугольником

В этом случае фазы приемника с равными сопротивлениями  $Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca}$  включаются непосредственно между линейными проводами трехпроводной трехфазной цепи (рис.7.12).

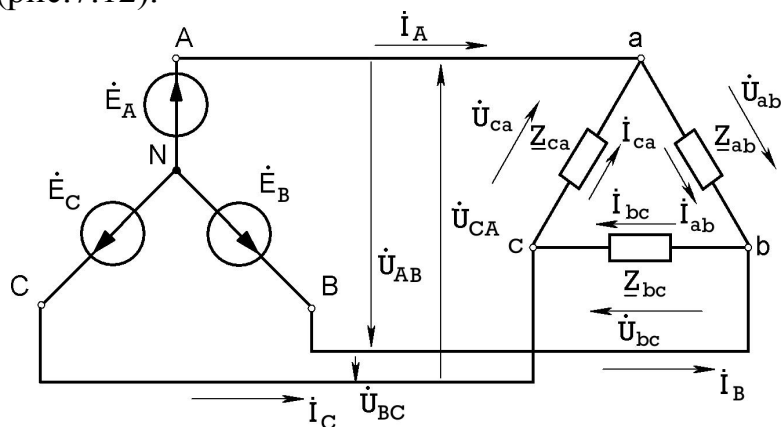


Рис.7.12

Из данной схемы видно, что если считать сопротивления линейных проводов равными нулю, то фазные напряжения приемника равны линейным напряжениям источника, т.е.  $U_{ab} = U_{AB}, U_{bc} = U_{BC}, U_{ca} = U_{CA}$ .

Фазные токи определяются по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи определяются из первого закона Кирхгофа для узлов a, b, c:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

Из данных выражений следует, что любой линейный ток равен геометрической разности соответствующих векторов токов тех двух фаз приемника, которые соединяются с данным линейным проводом.

Так как считаем нагрузку симметричной ( $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$ ), то фазные токи равны по величине и углы сдвига фаз токов по отношению к соответствующим фазным напряжениям одинаковы (рис.7.13).

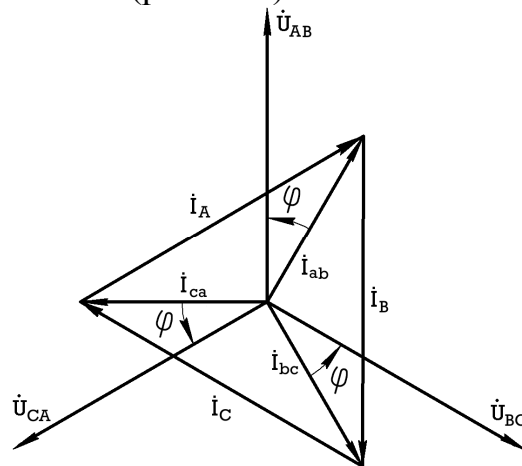


Рис.7.13

При симметричной нагрузке расчет производится также лишь для одной фазы:

$$I_\phi = \frac{U_\phi}{Z_\phi}; \quad I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi.$$

## 7.4. Трехфазные цепи с несимметричными пассивными приемниками

### 7.4.1. Соединение звездой в 4-х проводной цепи

Если считать сопротивление нейтрали равным нулю, т.е.  $\underline{Z}_N = 0$ , то несмотря на несимметричность нагрузки по-прежнему будет справедливым равенство  $U_{\phi пр} = U_{\phi ист}$ .

Фазные токи рассчитываются по тем же формулам, что и при симметричном варианте:

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}; \quad \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c},$$

но они уже не будут равны друг другу, т.к.  $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ .

Очевидно, что ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_N = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c \neq 0$ .

Если же  $\underline{Z}_N \neq 0$ , то при  $\dot{I}_N \neq 0$ , фазные напряжения  $U_{\phi пр}$  и  $U_{\phi ист}$  не будут равны друг другу из-за падения напряжения на  $\underline{Z}_N$ . Между нейтральными точками

источника и приемника возникает напряжение  $\dot{U}_{nN}$ , называемое **напряжением между нейтральными** (см. рис. 7.9). Зная  $\dot{U}_{nN}$  можно всегда определить  $U_{\phi_{np}}$ .

Напряжение  $\dot{U}_{nN}$  находится методом двух узлов по формуле (см. п. 3.4):

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \cdot \dot{U}_A + \underline{Y}_b \cdot \dot{U}_B + \underline{Y}_c \cdot \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$ ,  $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$  – комплексные проводимости фаз нагрузки и нейтрали соответственно.

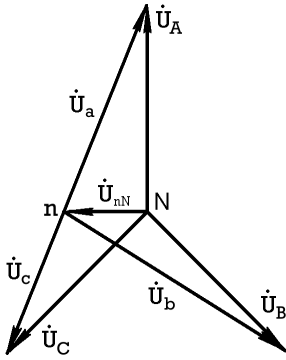


Рис. 7.14

Векторная диаграмма для случая несимметричной нагрузки имеет вид рис. 7.14 (вектор  $\dot{U}_{nN}$  ориентирован произвольно).

Из векторной диаграммы видно, что фазные напряжения приемника отличаются от фазных напряжений источника на величину  $\dot{U}_{nN}$  (это же следует и из схемы рис. 7.9 по второму закону Кирхгофа):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}.$$

Зная фазные напряжения  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$ , и  $\dot{U}_c$  можно рассчитать линейные и фазные токи

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \dot{U}_a \cdot \underline{Y}_a; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \dot{U}_b \cdot \underline{Y}_b; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \dot{U}_c \cdot \underline{Y}_c$$

и ток в нейтрали

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_N} = \dot{U}_{nN} \cdot \underline{Y}_N.$$

Очевидно, что чем больше  $\underline{Z}_N$ , тем меньше эффективность нейтрального провода, т.к. тем больше  $\dot{U}_{nN}$  и тем сильнее отличаются  $U_{\phi_{np}}$  от  $U_{\phi_{ист}}$ .

При обрыве нейтрали  $\dot{U}_{nN} = \max$ . Поэтому в нейтрали не ставят предохранителей и выключателей, т.к. могут возникнуть очень сильные фазные перенапряжения на нагрузке (на векторной диаграмме рис. 7.14 видно, что перенапряжение существует на фазах А и В).

#### 7.4.2. Трехфазная цепь с несимметричными пассивными приемниками, включенными треугольником

В этом случае фазные токи определяются по тем же формулам, что и при симметричной нагрузке:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Но вследствие несимметрии нагрузки ( $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{bc} \neq \underline{Z}_{ca}$ ) векторы токов уже не равны друг другу и не образуют симметричную систему (рис. 7.15).

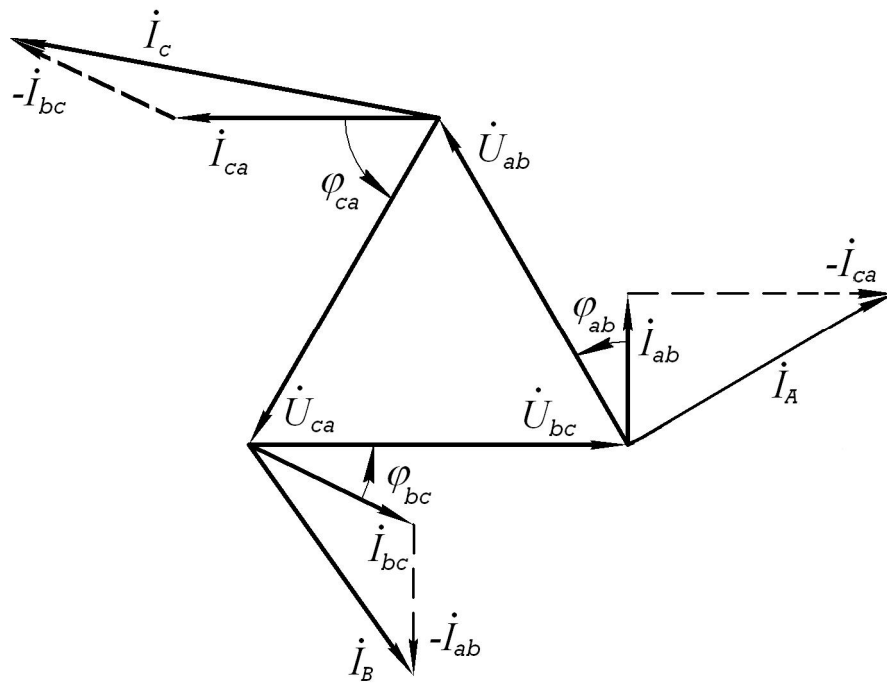


Рис.7.15

Для определения линейных токов используются уже известные уравнения, записанные с помощью первого закона Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

Линейные токи  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  можно определить также из графического построения (см. векторную диаграмму на рис.7.15).

Из этих же уравнений при суммировании левых и правых частей следует, что независимо от характера нагрузки геометрическая сумма векторов линейных токов в трехпроводной цепи всегда равна нулю, т.е.  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

Важной особенностью соединения фаз приемника треугольником является то, что при изменении сопротивления одной из фаз, режим работы двух других фаз не изменится, т.к. фазные напряжения на них остаются равными линейным напряжениям генератора, которые не меняются (изменяются только токи в данной фазе и линейные токи в проводах, соединенных с данной фазой).

## 7.5. Мощность в трехфазной цепи

### 7.5.1. Соединение звездой

Активные и реактивные мощности в каждой из фаз можно найти по следующим формулам:

$$P_A = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A; \quad Q_A = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A;$$

$$P_B = U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B; \quad Q_B = U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B;$$

$$P_C = U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C; \quad Q_C = U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C.$$

Общая мощность (активная и реактивная) равна сумме мощностей отдельных фаз

$$P = P_A + P_B + P_C; \quad Q = Q_A + Q_B + Q_C.$$

При симметричной нагрузке:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi; \quad Q_A = Q_B = Q_C = Q_\phi; \quad \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi_\phi.$$

Тогда

$$\begin{cases} P = 3 \cdot P_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi; \\ Q = 3 \cdot Q_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi; \\ S = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi, \end{cases}$$

где  $S$  – полная мощность.

Зная, что при соединении звездой справедливо:  $I_L = I_\phi$  и  $U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi$ , можно выразить мощности через линейные параметры цепи:

$$\begin{cases} P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi; \\ Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi; \\ S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L. \end{cases}$$

### 7.5.2. Соединение треугольником

Формулы для определения мощности в данном случае такие же, как и в предыдущем случае. Мощности отдельных фаз:

$$\begin{aligned} P_{AB} &= U_{AB} \cdot I_{AB} \cdot \cos \varphi_{AB}; & Q_{AB} &= U_{AB} \cdot I_{AB} \cdot \sin \varphi_{AB} \\ P_{BC} &= U_{BC} \cdot I_{BC} \cdot \cos \varphi_{BC}; & Q_{BC} &= U_{BC} \cdot I_{BC} \cdot \sin \varphi_{BC} \\ P_{CA} &= U_{CA} \cdot I_{CA} \cdot \cos \varphi_{CA}; & Q_{CA} &= U_{CA} \cdot I_{CA} \cdot \sin \varphi_{CA}. \end{aligned}$$

Общая мощность равна сумме мощностей отдельных фаз:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}; \quad Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}.$$

При симметричной нагрузке, когда мощности фаз равны:

$$\begin{cases} P = 3 \cdot P_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi; \\ Q = 3 \cdot Q_\phi = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi; \\ S = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi. \end{cases}$$

Учитывая, что при соединении треугольником  $U_L = U_\phi$  и  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi$ , получим мощности, выраженные через величины линейного тока и линейного напряжения:

$$\begin{cases} P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi; \\ Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi; \\ S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L. \end{cases}$$

Таким образом, независимо от способа включения трехфазной нагрузки мощности рассчитываются по одинаковым формулам.

## 8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 8.1 Основные понятия

Процессы в цепи, возникающие при переходе от одного установившегося (стационарного) режима к другому, называются *переходными*.

В электрической цепи переходные процессы возникают при изменении режима ее работы: включении или отключении цепи, изменении параметров  $R$ ,  $L$  или  $C$ . Такие действия, вызывающие переходные процессы, называются *коммутацией*.

Каждому состоянию цепи, имеющей индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , соответствуют определенные запасы энергии магнитного и электрического поля:

$$W_M = \frac{L \cdot i_L^2}{2}; \quad W_{\mathcal{E}} = \frac{C \cdot u_C^2}{2}.$$

Для изменения энергии поля на конечную величину необходимо некоторое время, т.к. скачкообразное изменение энергии было бы равносильно тому, что мощность источника достигала бы бесконечных значений ( $P = \frac{dW}{dt} = \infty$ ), что физически невозможно.

В связи с этим – скачкообразные изменения тока  $i_L$  в катушке индуктивности и напряжения  $u_C$  на конденсаторе невозможны. Следовательно, переход от одного установившегося значения к другому совершается не мгновенно, а лишь за некоторое время (хотя и очень быстро – за доли секунды).

#### ***Первый закон коммутации.***

*Ток в цепи с индуктивностью не может изменяться скачком и в начальный момент времени переходного процесса ( $t=0$ ) сохраняет свое предшествующее значение.*

#### ***Второй закон коммутации.***

*Напряжение на зажимах конденсатора не может изменяться скачком и в начальный момент времени переходного процесса ( $t=0$ ) сохраняет свое предшествующее значение.*

Математический анализ переходных процессов в электрических цепях базируется на том, что законы Кирхгофа применимы не только к установившимся, но и к неустановившимся режимам.

Используя первый и второй законы Кирхгофа можно получить линейные дифференциальные уравнения для переходного процесса. По этим уравнениям определяют значения токов и напряжений в любой момент рассматриваемого процесса. Значения постоянных интегрирования находят из граничных условий, определяемых законами коммутации.

Для упрощения решения дифференциальных уравнений и их анализа переходный процесс принято рассматривать как результат наложения двух режимов: принужденного и свободного. В соответствии с этим действительный ток в цепи  $i$  представляется как сумма принужденного тока  $i_{np}$ , который устанавливается в цепи по окончании переходного процесса, и свободного тока  $i_{ce}$ , протекающего в цепи только в течение переходного процесса

$$i = i_{ce} + i_{np}.$$

Свободный ток постепенно уменьшается и при установившемся режиме ( $t=\infty$ ) становится равным нулю, т.е.  $i|_{t=\infty} = i_{np}$ .

Оперируя в расчетах принужденной и свободной составляющими тока, необходимо помнить, что реально существуют не эти отдельные составляющие, а результирующие токи или напряжения.

## 8.2. Переходные процессы в цепях с индуктивностью

### 8.2.1. Включение RL цепи на постоянное напряжение

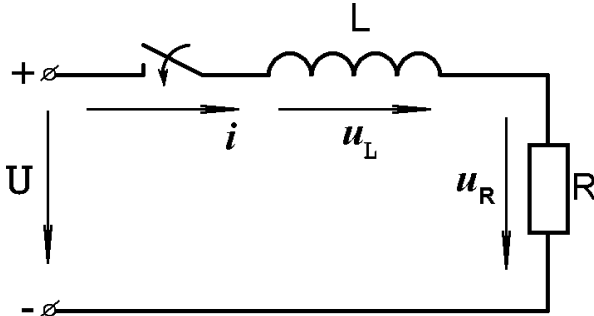


Рис.8.1

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для данной цепи (рис.8.1):

$$u_L + u_R - U = 0;$$

$$U = u_L + u_R.$$

Или (раскрыв  $u_L$  и  $u_R$ )

$$U = L \frac{di}{dt} + i \cdot R. \quad (8.1)$$

Пусть мгновенный переходный ток в цепи равен  $i = i_{np} + i_{св}$ . Стоит задача нахождения составляющих тока  $i_{np}$  и  $i_{св}$ . Подставив это выражение в уравнение (8.1), получим:

$$L \frac{d}{dt}(i_{np} + i_{св}) + (i_{np} + i_{св}) \cdot R = U. \quad (8.2)$$

Очевидно, что  $i_{св}|_{t=\infty} = 0$ , т.е. в установившемся режиме  $i_{св} = 0$ . Тогда уравнение (8.2) можно записать относительно принужденной составляющей тока

$$L \frac{di_{np}}{dt} + i_{np} \cdot R = U. \quad (8.3)$$

Очевидно, что  $i_{np}|_{t=\infty} = const$ , следовательно:

$$L \frac{di_{np}}{dt} = 0 \quad \text{и} \\ i_{np} = \frac{U}{R}. \quad (8.4)$$

Вычтем (8.3) из (8.2), получим

$$L \frac{di_{св}}{dt} + i_{св} \cdot R = 0. \quad (8.5)$$

Решением данного дифференциального уравнения является выражение:

$$i_{св} = A \cdot e^{pt},$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;  $p$  – корень характеристического уравнения.

Как уже отмечалось выше (в п.8.1), постоянные интегрирования определяются из граничных условий, задаваемых законами коммутации.

В данном случае постоянная интегрирования  $A$  определяется из следующего граничного условия, записанного на основе первого закона коммутации

$$(i_{np} + i_{св})|_{t=0} = i|_{t=0} = 0.$$

Отсюда: 
$$i_{cs} \Big|_{t=0} = -i_{np} = -\frac{U}{R}.$$

С другой стороны  $i_{cs} \Big|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A.$

Следовательно, 
$$A = -\frac{U}{R}.$$

Корень  $p$  определяется из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.5)  $p \cdot L + R = 0$ . Откуда  $p = -\frac{R}{L}$ . В результате ток  $i_{cs}$  равен:

$$i_{cs} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = \frac{L}{R} = -\frac{1}{p}$  – постоянная времени цепи, определяющая скорость протекания переходного процесса. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако принято считать, что он закончился, если ток  $i$  составляет 99% от установившегося значения  $I = \frac{U}{R}$ . Это имеет место при  $t \approx (3 \div 4) \cdot \tau$ .

Искомый ток равен 
$$i = i_{np} + i_{cs} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Временная диаграмма процесса включения цепи с R и L на постоянное напряжение изображена на рис.8.2.

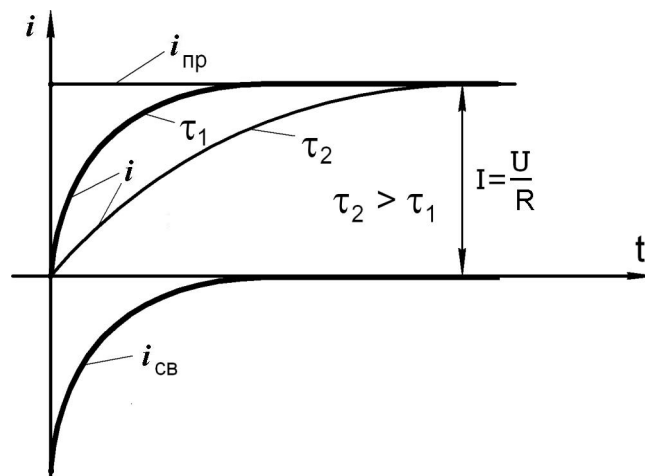


Рис.8.2

На этом же рисунке показаны два графика изменения тока в цепи в зависимости от постоянной времени  $\tau$ . Видно, что чем больше значение  $L$ , при неизменном сопротивлении  $R$ , тем больше энергия магнитного поля, накапливаемая в магнитном поле катушки  $W = \frac{L \cdot i^2}{2}$ , и тем больше постоянная времени цепи  $\tau$ .



## 8.2.2. Короткое замыкание RL цепи постоянного тока

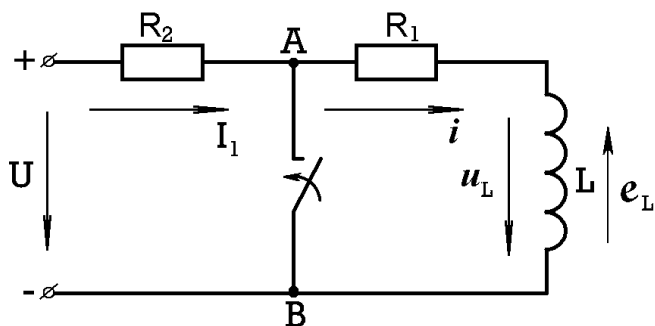


Рис.8.3

Если ключ на рис.8.3 не замкнут, то через некоторое время в цепи установится ток  $I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}$ , определяемый напряжением источника и активным сопротивлением цепи. При замыкании ключа в момент времени  $t = 0$  напряжение на участке АВ равно нулю.

Запас энергии магнитного поля  $\left(\frac{L \cdot I_1^2}{2}\right)$  и ток  $i$  начинают исчезать, но не скачком, а постепенно, т.к. при изменении тока в замкнутой цепи на катушке L наводится ЭДС самоиндукции, поддерживающая ток  $i$ . Энергия магнитного поля преобразуется в тепловую энергию на сопротивлении  $R_1$ , которая выделяется в окружающее пространство.

Для замкнутого контура с катушкой второй закон Кирхгофа имеет вид:

$$\begin{aligned} u_L + i \cdot R_1 &= 0; \\ L \frac{di}{dt} + i \cdot R_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Очевидно, что  $i_{np} |_{t=\infty} = 0$ , и, следовательно,  $i = i_{cs} + i_{np} = i_{cs}$ .

Уравнение (8.6) примет вид:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + R_1 \cdot i_{cs} = 0.$$

Решением данного уравнения является

$$i_{cs} = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  определим из первого закона коммутации:

$i_{\text{на}} |_{t=0} = i |_{t=0} = \frac{U}{R_1 + R_2}$  – это с одной стороны;  $i_{cs} |_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$  – с другой стороны.

Следовательно,  $A = \frac{U}{R_1 + R_2}$ .

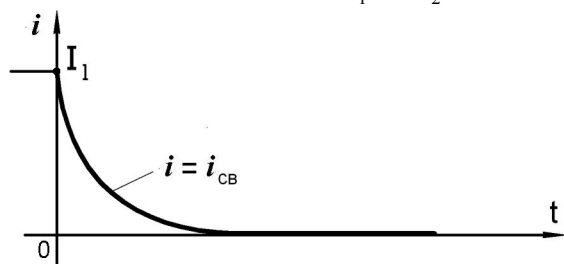


Рис.8.4

Окончательно,

$$i = i_{cs} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{R_1}{L} \cdot t} = I_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\text{где } \tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R_1}.$$

Временная диаграмма для данного процесса показана на рис.8.4.

### 8.2.3. Отключение цепи RL от источника постоянного напряжения

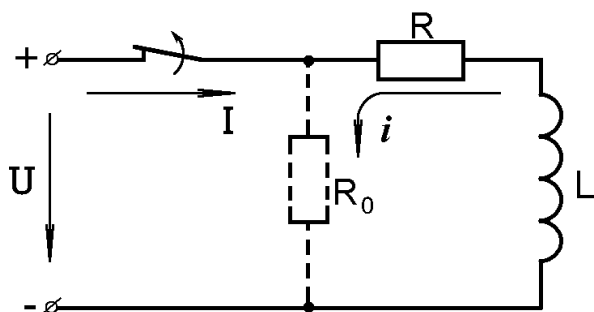


Рис.8.5

При отключении цепи, содержащей катушку индуктивности (рис.8.5), возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая мгновенному прекращению тока.

В момент разрыва между контактами выключателя возникает дуга, поддерживаемая энергией магнитного поля катушки.

Скорость затухания тока определяют переходное сопротивление контактов и дуги.

Если индуктивность  $L$  велика, а ток уменьшается быстро, то ЭДС самоиндукции  $e_L = -L \frac{di}{dt}$  может во много раз превышать приложенное к цепи напряжение  $U$ . Такое перенапряжение опасно (возможен пробой изоляции).

Если в момент размыкания параллельно ветви  $RL$  включить сопротивление  $R_0$ , то перенапряжение уменьшается, т.к. энергия  $W_M = \frac{L \cdot I^2}{2}$  постепенно в виде тепла будет выделяться в этом сопротивлении. В результате процесс спадания тока окажется более продолжительным, а ЭДС самоиндукции меньше. На практике используют различные дугогасительные устройства.

### 8.2.4. Включение цепи RL на синусоидальное напряжение

При включении цепи  $RL$  (рис.8.1) на синусоидальное напряжение  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$  в цепи устанавливается ток  $i_{np} = \frac{U_m}{z} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi)$ ,

где  $z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$ ,  $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega \cdot L}{R}$ .

Для свободной составляющей уравнение имеет вид:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + R \cdot i_{cs} = 0.$$

Его решение

$$i_{cs} = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Постоянная интегрирования определяется из первого закона коммутации  $i|_{t=0} = i_{cs}|_{t=0} + i_{np}|_{t=0} = 0$ . Отсюда следует, что  $i_{cs}|_{t=0} = -i_{np}$ , а с другой стороны  $i_{cs}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ . Тогда,  $A = -i_{np} = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\psi - \varphi)$  ( $t = 0$ , поэтому отсутствует компонента  $\omega \cdot t$ ). Следовательно,  $i_{cs} = A \cdot e^{p \cdot t} = -\frac{U_m}{z} \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

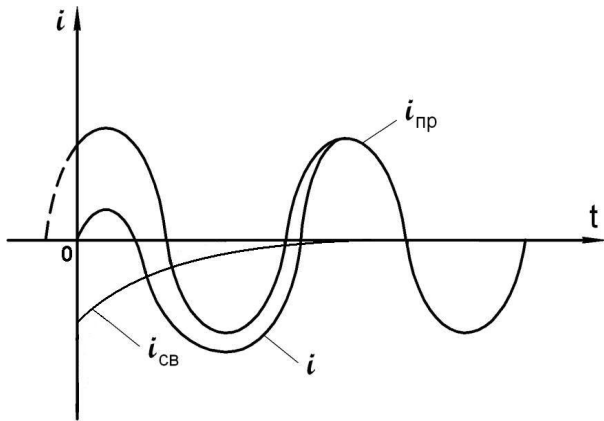


Рис.8.6

Поскольку общий ток  $i = i_{св} + i_{пр}$ , то

$$i = -\frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_m}{z} \sin(\omega \cdot t + \psi - \varphi)$$

Графики свободного, принужденного и переходного токов в общем случае изображены на рис.8.6. Если включение происходит в момент, когда ток  $i_{пр}$  проходит через нуль, то свободный ток  $i_{св}$  не возникает и в цепи сразу наступает установившийся режим.

Если включение произошло в момент, когда ток  $i_{пр} = \max$  (рис.8.7), т.е.  $\omega \cdot t + \psi - \varphi = 90^\circ$ , ( $\omega \cdot t|_{t=0} = 0$ ), то через половину периода (при  $t = \frac{T}{2}$ ) общий ток  $i$  достигает максимума, который при больших  $\tau$  почти в 2 раза больше тока в установившемся режиме.

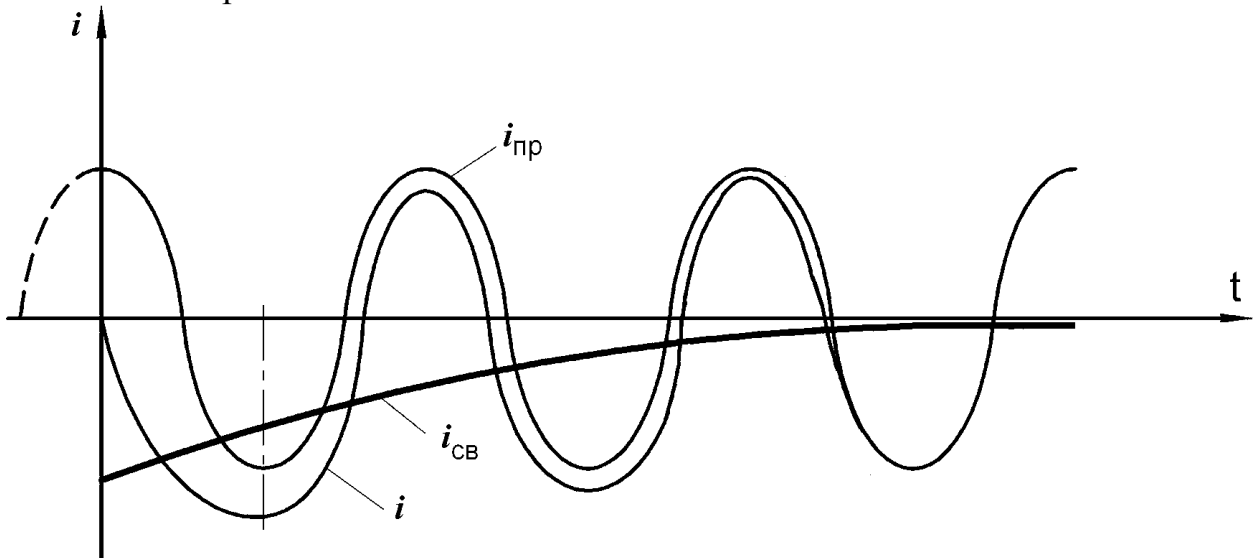


Рис.8.7

При расчете цепей (устройств) этот факт нужно учитывать, например, при расчете электродвигателя.

### 8.3. Переходные процессы в цепях с емкостью

#### 8.3.1. Включение цепи RC на постоянное напряжение

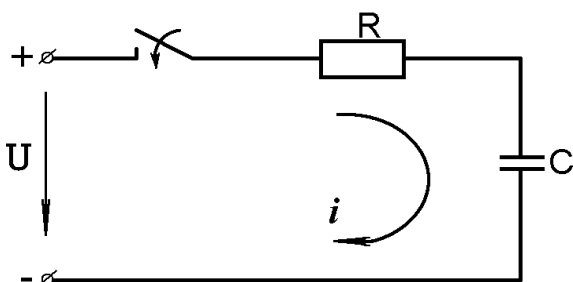


Рис.8.8

Для цепи (рис.8.8) уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$u_R + u_C - U = 0, \text{ или } u_R + u_C = U.$$

Зная, что  $u_R = i \cdot R$  получим:

$$C \cdot R \frac{du_C}{dt} + u_C = U, \text{ т.к. } i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Пусть  $u_C = u_{C_{np}} + u_{C_{св}}$ . Подставив данное выражение в предыдущее уравнение, получим:

$$R \cdot C \frac{d}{dt}(u_{C_{np}} + u_{C_{св}}) + u_{C_{np}} + u_{C_{св}} = U.$$

Очевидно, что  $u_{C_{np}}|_{t \rightarrow \infty} = U$ , т.к. за время  $t \rightarrow \infty$  емкость полностью зарядится до входного напряжения.

Подставим это значение в последнее уравнение и учтем, что  $\frac{du_{C_{np}}}{dt} = 0$ , получим:

$$R \cdot C \frac{du_{C_{св}}}{dt} + u_{C_{св}} = 0. \quad (8.7)$$

Решением данного уравнения является выражение  $u_{C_{св}} = A \cdot e^{p \cdot t}$ .

Постоянную интегрирования  $A$  найдем из второго закона коммутации:

$$(u_{C_{np}} + u_{C_{св}})|_{t=0} = 0.$$

Отсюда  $u_{C_{св}}|_{t=0} = -u_{C_{np}} = -U$ . С другой стороны  $u_{C_{св}}|_{t=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ .

Тогда  $A = -U$ .

Величина корня  $p$  определяется из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.7)

$$R \cdot C \cdot p + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что  $p = -\frac{1}{R \cdot C}$ .

Тогда свободная составляющая напряжения на емкости будет равна

$$u_{C_{св}} = -U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (8.8)$$

где  $\tau = -\frac{1}{p} = R \cdot C$ .

Окончательно, напряжение на емкости в процессе заряда равно

$$u_C = u_{C_{np}} + u_{C_{св}} = U - U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

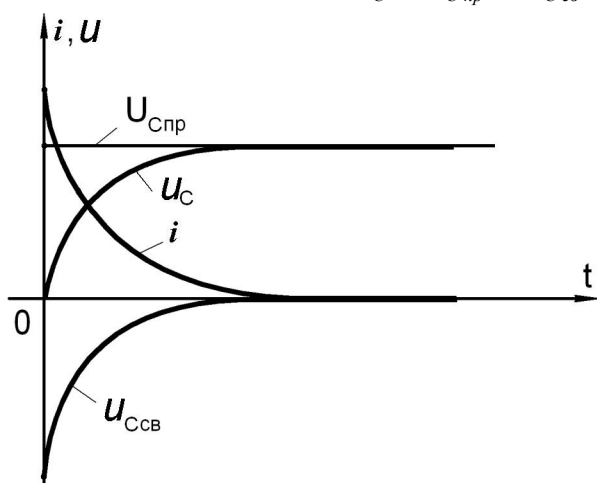


Рис.8.9

Воспользовавшись этим уравнением можно определить ток  $i$ :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -U \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Временная диаграмма данного процесса изображена на рис.8.9.

### 8.3.2 Короткое замыкание цепи RC (разряд конденсатора C на сопротивлении R)

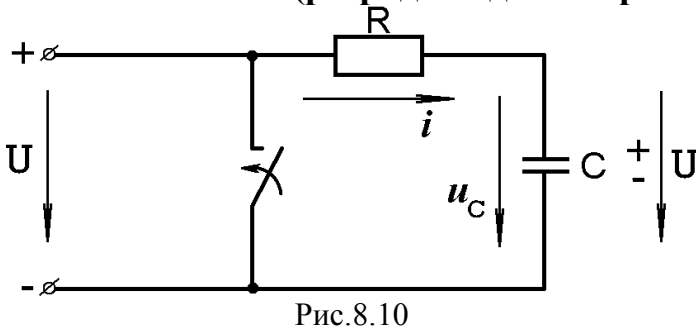


Рис.8.10

До коммутации конденсатор был заряжен до входного напряжения  $U$ , потому что  $u_C|_{t=0} = U$ .

После замыкания ключа по цепи RC (рис.8.10) будет протекать ток  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

Ток будет существовать до тех пор, пока энергия электрического поля  $W_э = \frac{C \cdot U^2}{2}$  не преобразуется в тепло в сопротивлении R.

По второму закону Кирхгофа имеем  $i \cdot R + u_C = 0$ , или

$$R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (8.9)$$

Так как конденсатор за время  $t = \infty$  разрядится полностью, то  $u_{C_{np}}|_{t=\infty} = 0$ . Поэтому в любой момент переходного процесса  $u_C = u_{C_{св}}$ .

Решением уравнения (8.9) является выражение

$$u_C = u_{C_{св}} = A \cdot e^{pt}.$$

Значение A определяется из условия, задаваемого вторым законом коммутации  $u_C|_{t=0} = (u_{C_{св}} + u_{C_{np}})|_{t=0} = u_{C_{св}}|_{t=0} = U$ .

С другой стороны  $u_C|_{t=0} = u_{C_{св}}|_{e=0} = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ .

Следовательно,  $A=U$ . Величина корня  $p$  для RC – цепи была получена выше, см.(8.8):  $p = -\frac{1}{R \cdot C}$ . Окончательно получим:

$$u_C = u_{C_{св}} = U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

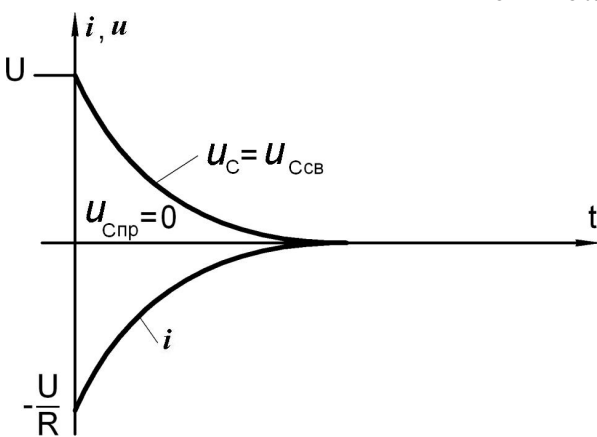


Рис.8.11

Выражение для тока разряда  $i$  в этой цепи:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \cdot U \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Очевидно, чем больше  $R$  и  $C$ , тем медленнее протекает процесс разряда конденсатора (рис.8.11).

Процессы заряды и разряда конденсатора, рассмотренные в параграфах 8.3.1 и 8.3.2, называются **релаксационными**.

На основе этих процессов построены релаксационные генераторы, используемые для получения пилообразного напряжения необходимого для работы осциллографов, телевизоров и др.

### 8.3.3. Релаксационный генератор

Принципиальная схема простейшего релаксационного генератора показана на рис.8.12.

Здесь УЭ – управляющий элемент (неоновая лампа).

**Принцип работы генератора** заключается в следующем.

После замыкания ключа конденсатор медленно заряжается через большое сопротивление  $R$  с постоянной времени  $\tau_1 = R \cdot C$ . При напряжении  $u_C = u_{зак}$  проводимость неоновой лампы резко увеличивается за счет ионизации газа. Конденсатор очень быстро разряжается с постоянной времени  $\tau_2 = R_{нл} \cdot C$ , где  $R_{нл}$  – сопротивление неоновой лампы при тлеющем разряде.

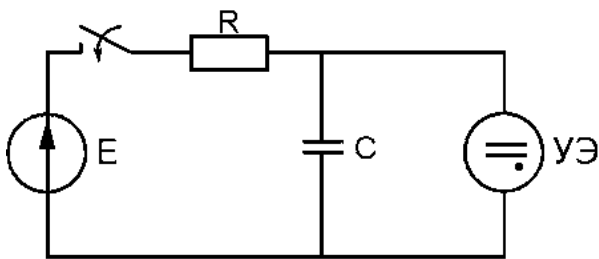


Рис.8.12

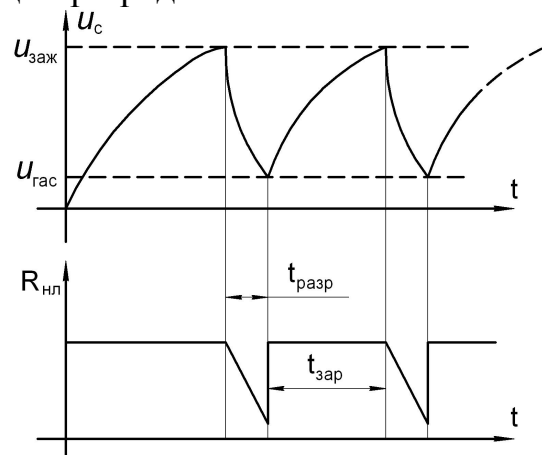


Рис.8.13

Выбирают  $R \gg R_{нл}$ , вследствие чего  $t_{зар} \gg t_{разр}$ .

При уменьшении напряжения на конденсаторе до напряжения  $U_{рас}$ , разряд в лампе прекращается, а ее сопротивление резко возрастает. В результате этого снова начинается заряд конденсатора до  $u_C = u_{зак}$ . И т.д.

Если цепь не разомкнуть, то этот процесс будет длиться бесконечно долго (рис.8.13).

### 8.4. Переходные процессы в R, L, C цепи.

#### Включение R, L, C цепи на постоянное напряжение (ЭДС)

Пусть начальные условия в цепи (рис.8.14) следующие  $u_C(0) = U$ ;  $i(0) = 0$ , что означает, что до замыкания ключа емкость была заряжена до напряжения  $U$ .

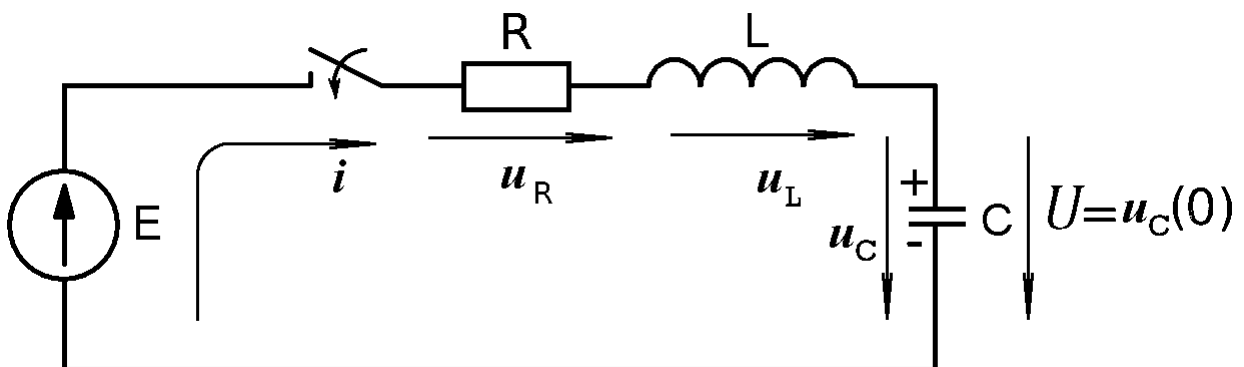


Рис.8.14

Очевидно, что эти параметры после завершения переходного процесса будут равны:

$$u_{C_{np}} = E; i_{np} = 0.$$

Это означает, что конденсатор дозарядится (или разрядится) до входного напряжения  $E$ , после чего ток заряда (разряда) прекратится.

По второму закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R + u_C = E;$$

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R + u_C = E; \quad (8.10)$$

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt = E. \quad (8.11)$$

Продифференцируем обе части уравнения (8.11)

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (8.12)$$

Пусть  $i = i_{np} + i_{cs}$ . Так как  $i_{np} = 0$ , значит  $i = i_{cs}$ .

Решением (8.12) является

$$i = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}. \quad (8.13)$$

Коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$  находятся из характеристического уравнения, записываемого по виду уравнения (8.12):

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0.$$

Это уравнение также можно получить, записав его по виду комплексного сопротивления  $\underline{Z}_{ex}$  относительно входных зажимов:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ex} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = 0 \text{ или} \\ \frac{R \cdot j \cdot \omega \cdot C + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C + 1}{j \cdot \omega \cdot C} = 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Умножим на  $j \cdot \omega \cdot C$  левую и правую части выражения (8.14)

$$(j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C + (j \cdot \omega) R \cdot C + 1 = 0.$$

Разделим на  $C$  и заменим  $(j \cdot \omega)$  на  $p$ :

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0.$$

Решением этого уравнения являются корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2 - \frac{1}{L \cdot C}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega_{cs}, \quad (8.15)$$

где  $\delta = \frac{R}{2 \cdot L}$  – коэффициент затухания;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  – резонансная частота;

$\omega_{cs} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – угловая частота свободных колебаний в контуре.

Постоянные интегрирования найдем из совместного решения следующих уравнений, найденных с помощью законов коммутации.

Известно  $i|_{t=0} = 0$ . Тогда из (8.13) получим первое уравнение:

$$0 = A_1 + A_2 \quad (8.16)$$

Для получения второго уравнения выполним следующие операции. Продифференцируем обе части уравнения (8.13), получим:

$$\frac{di}{dt} = A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t}.$$

Очевидно:

$$\left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 \quad (8.17)$$

Далее, подставим начальные условия в уравнение (8.10)

$$L \cdot \left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} + 0 \cdot R + U = E \text{ и выразим производную}$$

$$\left( \frac{di}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \frac{E - U}{L}. \quad (8.18)$$

Сравнивая (8.17) и (8.18) получим второе уравнение для определения постоянных интегрирования и запишем систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 = \frac{E - U}{L} ; \\ 0 = A_1 + A_2. \end{cases} \quad (8.19)$$

Найдем постоянные интегрирования из решения системы (8.19).

Выразим из второго уравнения  $A_2 = -A_1$  и подставим в первое

$$A_1 \cdot p_1 - A_1 \cdot p_2 = \frac{E - U}{L}.$$

Таким образом, постоянные интегрирования будут равны:

$$A_1 = \frac{\frac{E - U}{L}}{p_1 - p_2} = \frac{E - U}{L \cdot (-\delta + \gamma + \delta + \gamma)} = \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} = -A_2. \quad (8.20)$$

Подставим найденные значения  $p_1$  и  $p_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$  в уравнение (8.13), получим

$$i = \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} \cdot e^{(-\delta + \gamma)t} - \frac{E - U}{2 \cdot L \cdot \gamma} \cdot e^{(-\delta - \gamma)t}. \quad (8.21)$$

В зависимости от величины  $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ , а именно, от соотношения между собой  $\delta^2$  и  $\omega_0^2$  ( $\left(\frac{R}{2 \cdot L}\right)^2$  и  $\frac{1}{L \cdot C}$ ), процесс изменения тока в R, L, C цепи может быть *апериодическим* либо *колебательным*.

#### 8.4.1. Апериодический процесс

Данный процесс наблюдается при  $\delta^2 > \omega_0^2$ , в результате чего корни уравнения  $p_{1,2}$  есть вещественные отрицательные числа  $p_1 = -\delta + \gamma$  и  $p_2 = -\delta - \gamma$ , показанные на комплексной плоскости на рис.8.15.



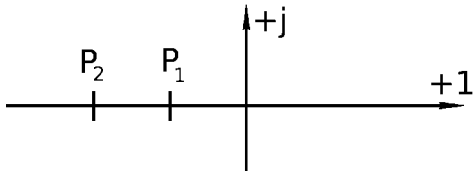


Рис.8.15

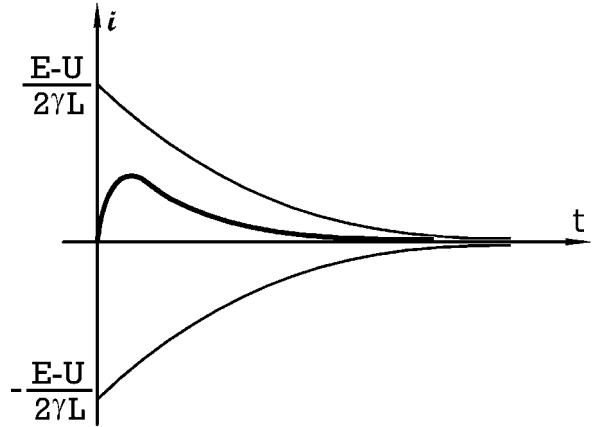


Рис.8.16

В этом случае ток  $i$  описывается уравнением (8.21), а график процесса изображен на рис.8.16.

### 8.4.2. Колебательный процесс

При соотношении  $\delta^2 < \omega_0^2$  наблюдается колебательный процесс изменения тока в цепи. В этом случае корни  $p_{1,2}$  являются комплексными сопряженными числами  $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_{св}$  и  $p_2 = -\delta - j \cdot \omega_{св}$ , где  $\omega_{св}$  – собственная частота свободных колебаний ( $T_{св} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{св}}$  – период свободных колебаний). Они располагаются симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости, на полуокружности, центр которой совпадает с началом координат, а радиус равен  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (рис.8.17).

В этом случае постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  находятся также из совместного решения системы уравнений (8.19), но для  $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_{св}$  и  $p_2 = -\delta - j \cdot \omega_{св}$ .

$$\text{В результате получим } A_1 = \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} = -A_2.$$

Подставим  $p_1, p_2, A_1$  и  $A_2$  в (8.13), получим

$$\begin{aligned} i &= \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{(-\delta + j \cdot \omega_{св})t} - \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{(-\delta - j \cdot \omega_{св})t} = \\ &= \frac{E-U}{2 \cdot j \cdot \omega_{св} \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_{св} \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_{св} \cdot t}) = \\ &= \frac{E-U}{\omega_{св} \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_{св} \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_{св} \cdot t}}{2 \cdot j} = \frac{E-U}{\omega_{св} \cdot L} \cdot \sin \omega_{св} t \cdot e^{-\delta \cdot t} \end{aligned}$$

При преобразовании была использована формула  $\frac{e^{j \cdot Z} - e^{-j \cdot Z}}{2 \cdot j} = \sin Z$ .

Временная диаграмма колебательного процесса представляет собой экспоненциально затухающую синусоиду (рис.8.18).

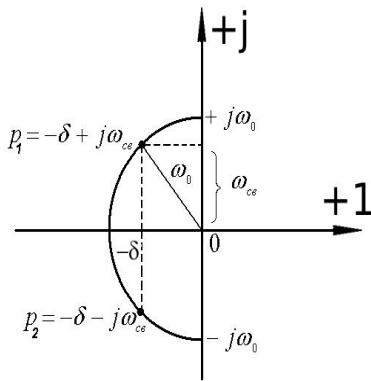


Рис.8.17

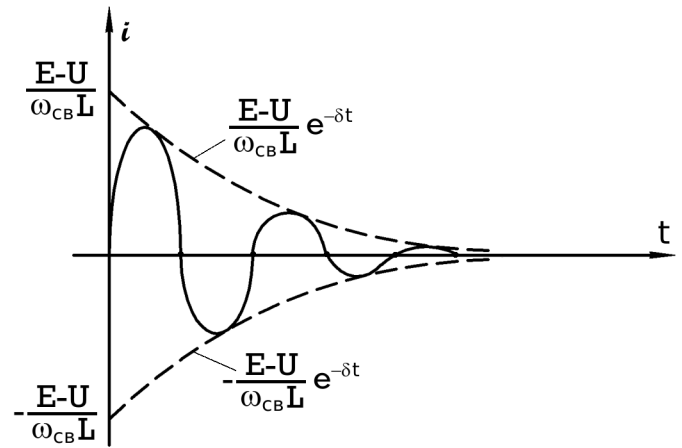


Рис.8.18

## 9. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### 9.1. Основные понятия

Часть электротехнического устройства, предназначенного для создания в его рабочем объеме магнитного поля заданной интенсивности, называется **магнитной цепью**.

Магнитная цепь состоит из элементов, возбуждающих магнитное поле (катушек с током, постоянных магнитов) и магнитопровода. Магнитопровод содержит ряд тел и сред, образующих замкнутые пути для основной части магнитных линий созданного поля.

Магнитные цепи подобно электрическим подразделяются на группы. Они могут быть с одним или несколькими элементами, возбуждающими магнитное поле, разветвленными и неразветвленными, с постоянными и переменными токами и т.п.

Основной величиной, характеризующей интенсивность и направление магнитного поля в любой его точке, является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к силовой магнитной линии (рис.9.1).

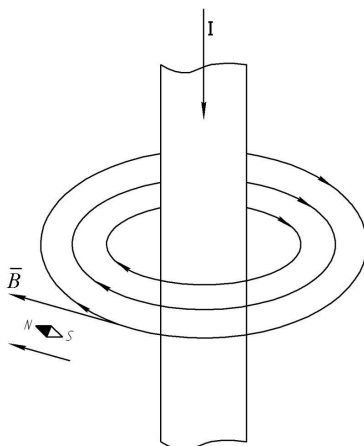


Рис.9.1

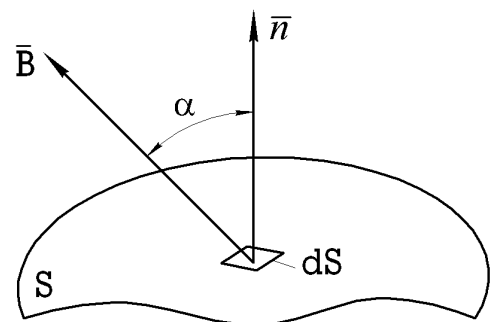


Рис.9.2

Направление вектора  $\vec{B}$  совпадает с направлением магнитной стрелки, помещенной в рассматриваемую точку поля и определяется по правилу правоугового винта (буравчика). Измеряется в теслах, Тл.

Второй важной величиной, характеризующий магнитное поле, является магнитный поток  $\Phi$ , характеризующий густоту силовых линий поля.

Элементарным магнитным потоком сквозь бесконечно малую площадь называется скалярная величина

$$d\Phi = B \cdot \cos \alpha \cdot dS,$$

где  $\alpha$  - угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  (рис.9.2).

Поток через всю поверхность  $S$  равен

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B \cdot \cos \alpha \cdot dS.$$

Если  $S$  – плоскость, то  $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$ .

Если плоскость  $S$  перпендикулярна к  $\vec{B}$ , то  $\alpha = 0$ , а магнитный поток рассчитывается по формуле

$$\Phi = B \cdot S \quad (9.1)$$

и измеряется в веберах, Вб.

Расчетной величиной является напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ , А/м – описывающая магнитное поле макротоков (токов проводимости).

Известно соотношение, связывающее  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad (9.2)$$

где  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (материала магнитопровода), показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков усиливается за счет микротоков среды;  $\mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость среды. Для ферромагнитных материалов (медь, алюминий, воздух)  $\mu$  практически не отличается от магнитной проницаемости вакуума. У ферромагнитных материалов  $\mu$  не является константой, а зависит от величины  $\vec{B}$ .

В основе расчета магнитных цепей лежит закон полного тока:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H \cdot \cos \alpha \cdot dl = \sum I,$$

где  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля в данной точке пространства;  $d\vec{l}$  – элемент длины замкнутого контура  $l$ ;  $\alpha$  – угол между направлениями векторов  $\vec{H}$  и  $d\vec{l}$ ;  $\sum I$  – алгебраическая сумма токов, пронизывающих контур  $l$ .

Ток  $I_k$ , пронизывающий контур  $l$ , считается положительным, если его направление и направление обхода контура связаны правилом правого винта (рис.9.3).

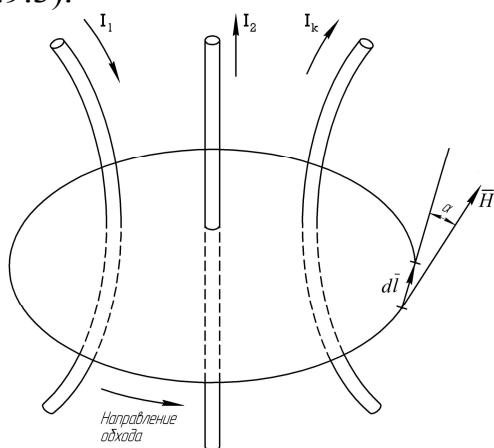


Рис.9.3

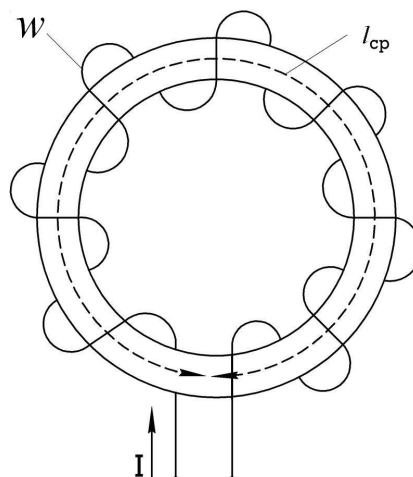


Рис.9.4

Для кольцевого магнитопровода (рис.9.4) закон полного тока запишется в виде  $\int_{\vec{n}\delta} \vec{l}_{\vec{n}\delta} = I \cdot w$ , т.к. угол  $\alpha = 0$  (векторы  $\vec{H}$  и  $d\vec{l}$  совпадают), величина напряженности на средней линии  $H_{cp}$  во всех точках контура из-за симметрии устройства одинакова, а сумма токов, пронизывающих контур равна  $I \cdot w$ , где  $w$  – число витков обмотки.

Из этого выражения следует

$$H_{cp} = \frac{I \cdot w}{l_{cp}}. \quad (9.3)$$

С учетом (9.1) и (9.2)

$$\Phi = \mu_a \cdot H \cdot S. \quad (9.4)$$

Подставим (9.3) в (9.4) получим закон Ома для магнитной цепи:

$$\Phi = \mu_a \cdot \frac{I \cdot w}{l_{cp}} \cdot S = \frac{I \cdot w}{\frac{l_{cp}}{\mu_a \cdot S}} = \frac{F}{R_m}. \quad (9.5)$$

Здесь  $F = I \cdot w$  – величина намагничивающей силы обмотки с током, а  $R_m = \frac{l_{cp}}{\mu_a \cdot S}$  – магнитное сопротивление магнитопровода (по аналогии с электрическим сопротивлением  $R = \frac{l}{\gamma \cdot S}$ ).

Величина  $\mu$  для ферромагнитных материалов непостоянна и сложно зависит от  $B$ , а значит и  $R_m$  тоже непостоянно, что затрудняет аналитический расчет магнитных цепей.

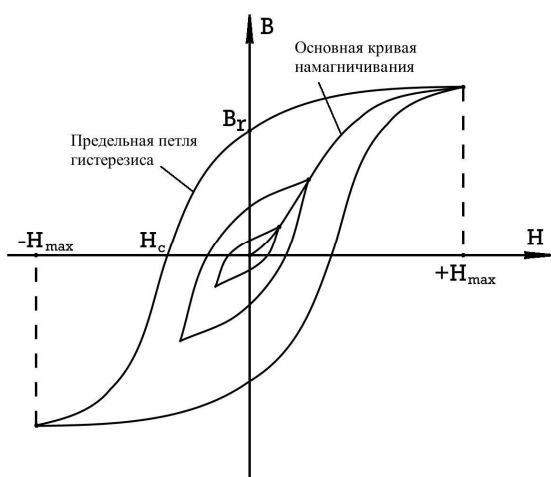


Рис.9.5

Поэтому, для расчета магнитных цепей нужно иметь кривые намагничивания  $B(H)$ , получаемые экспериментальным путем (рис.9.5). Первоначальному намагничиванию соответствует кривая, называемая **основной кривой намагничивания**. Если образец подвергать циклическому перемагничиванию при изменении напряженности магнитного поля от  $+H_{max}$  до  $-H_{max}$ , то можем получить семейство **петель гистерезиса**.

При увеличении напряженности магнитного поля в образце сверх значений  $H_{max}$  ( $-H_{max}$ ) площадь петли гистерезиса уже не увеличивается. Предельная петля гистерезиса определяет значения остаточной магнитной индукции  $B_r$  и коэрцитивной силы  $H_c$ .

Из физики известно, что затраты энергии на один цикл перемагничивания пропорциональны площади петли гистерезиса. Поэтому магнитопроводы, работающие в условиях непрерывного перемагничивания, например, магнитопроводы трансформаторов, выполняют из магнитомягких ферромагнитных материалов, имеющих узкую петлю гистерезиса (листовая электротехническая сталь, пермаллой и др.).

Для изготовления постоянных магнитов используются магнитотвердые ферромагнитные материалы с широкой петлей гистерезиса, имеющие большую остаточную индукцию и большую коэрцитивную силу (ряд сплавов железа с вольфрамом, хромом и алюминием).

## 9.2. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Формула (9.5) получена для кольцевого магнитопровода.

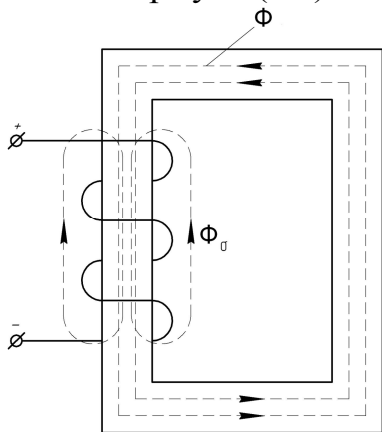


Рис.9.6

Но ее распространяют и на магнитные цепи, в которых намагничивающая обмотка сосредоточена на ограниченном участке магнитопровода, когда отдельные участки магнитной цепи выполнены из различных ферромагнитных и неферромагнитных материалов и имеют различное поперечное сечение (рис.9.6). В приближенных расчетах считается, что магнитный поток на всех участках цепи неизменен, хотя всегда имеет место поток рассеяния  $\Phi_{\sigma}$ , который замыкается по воздуху, а не следует по пути магнитопровода.

В расчетах магнитных цепей различают прямую и обратную задачи.

### Прямая задача.

Задано:

- 1) геометрические размеры магнитной цепи;
- 2) характеристики ферромагнитных материалов из которых выполнена магнитная цепь (кривые намагничивания  $B(H)$ );
- 3) магнитный поток  $\Phi$ , который надо создать в магнитной цепи.

Найти: намагничивающую силу обмотки  $F = I \cdot w$ .

Пусть, например, эту задачу нужно решить по отношению к магнитопроводу, изображенному на рис.9.7.

Магнитная цепь разбивают на три участка, у которых одинаковым является поперечное сечение  $S$  магнитопровода, выполненного из однородного материала (а-б, б-с) и воздушный зазор (с-а).

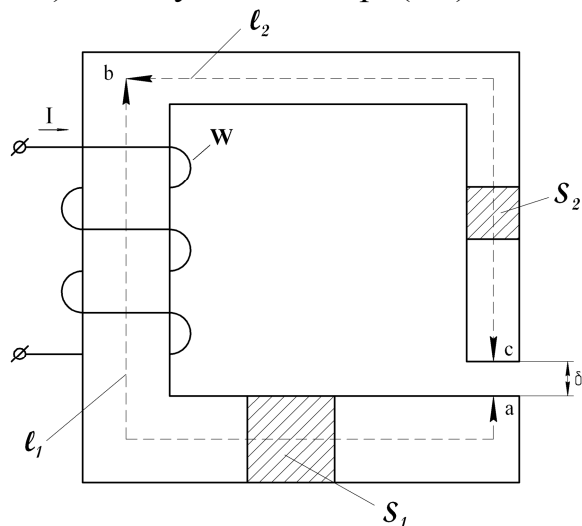


Рис.9.7

Так как магнитный поток на всех участках цепи постоянен, то, следовательно, на каждом из участков магнитная индукция  $B = \frac{\Phi}{S}$ , зависящая от площади поперечного сечения, и напряженность магнитного поля  $H$  также неизменны.

Все это облегчает нахождение  $\oint H \cdot dl$  для контура, образованного средней магнитной линией, а, значит и искомой величины намагничивающей силы  $F$ , т.к.  $F = \oint H \cdot dl$ .

Итак,

$$\oint H \cdot dl = \int_a^b H_1 \cdot dl + \int_b^c H_2 \cdot dl + \int_c^a H_3 \cdot dl = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_{\text{air}} \cdot \delta = I \cdot w.$$

Здесь  $l_1$ ,  $l_2$  и  $\delta$  находятся из рисунка, а значения  $H_1$  и  $H_2$  по известным значениям индукции  $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$  и  $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$  из кривых намагничивания  $B(H)$ . Для воздушного зазора  $\delta$  напряженность магнитного поля  $H_0$  определяется из соотношения:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 8 \cdot 10^5 \cdot B_0 = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\hat{O}}{S_\delta} \cdot \frac{A}{i},$$

где  $S_\delta$  – площадь воздушного зазора.

### **Обратная задача.**

Задано:

- 1) геометрические размеры магнитной цепи;
- 2) характеристики магнитных материалов;
- 3) намагничивающая сила обмотки  $F$ .

Найти: магнитный поток  $\Phi$ .

Использовать непосредственно формулу (10.5) нельзя, т.к.  $R_m$  само нелинейно зависит от  $\Phi$ .

Такие задачи решают методом последовательных приближений. Для этого:

- задаются рядом произвольных значений магнитного потока в цепи;
- так же, как и при решении прямой задачи для каждого из этих значений потока находят величину намагничивающей силы обмотки;
- по полученным данным строят кривую  $\Phi(F)$ .

По кривой зависимости  $\Phi(F)$  для заданного по условию задачи значения намагничивающей силы  $F$  находят требуемую величину магнитного потока  $\Phi$ .

## **9.3. Расчет разветвленных магнитных цепей**

Различают симметричные и несимметричные магнитные цепи.

### ***Симметричные магнитные цепи.***

Если разветвленную магнитную цепь можно представить в виде двух независимых частей, то это не изменит условий ее работы, а магнитные потоки ее симметричных частей будут иметь одну и ту же величину. В связи с этим достаточно провести расчет одной половины симметричной магнитной цепи согласно методике предыдущего параграфа.

### ***Несимметричные магнитные цепи.***

Такой расчет основан на использовании законов Кирхгофа для магнитных цепей и аналогичен расчету разветвленных электрических цепей с нелинейными элементами.

### ***Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.***

Алгебраическая сумма магнитных потоков узла равна нулю:

$$\sum \Phi = 0.$$

Рассмотрим пример на рис.9.8. По первому закону Кирхгофа  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ .

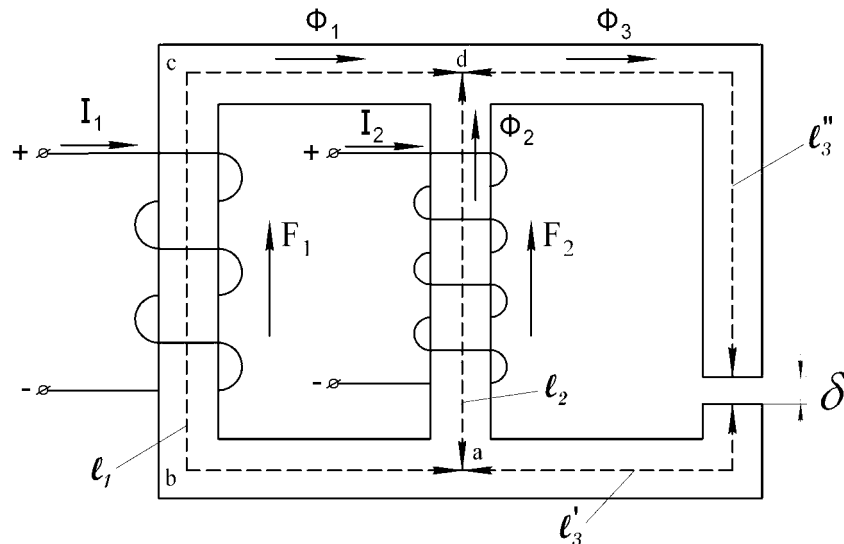


Рис.9.8

Применим закон полного тока к контуру a-b-c-d-a (обход контура выберем по часовой стрелке):

$$F_1 - F_2 = H_1 \cdot l_1 - H_2 \cdot l_2. \quad (9.6)$$

Произведение  $H_2 \cdot l_2$  взято с минусом, т.к.  $H_2$  (совпадающее с направлением  $\Phi_2$ ) противоположно направлению обхода.

Заменяем в (9.6)  $H_1$  и  $H_2$  на  $H_1 = \frac{\Phi_1}{S_1 \cdot \mu_1}$  и  $H_2 = \frac{\Phi_2}{S_2 \cdot \mu_2}$  соответственно, получим

$$F_1 - F_2 = \Phi_1 \cdot \frac{l_1}{S_1 \cdot \mu_1} - \Phi_2 \cdot \frac{l_2}{S_2 \cdot \mu_2} = \Phi_1 \cdot R_{m1} - \Phi_2 \cdot R_{m2}.$$

В общем виде второй закон Кирхгофа для магнитной цепи запишется следующим образом  $\sum F_k = \sum \Phi_k \cdot R_{mk}$ .

Произведение  $\Phi_k \cdot R_{mk}$  называют **магнитным напряжением** (по аналогии с  $I \cdot R$  – электрическим напряжением),  $R_k$  – называется магнитным сопротивлением k-го участка магнитной цепи.

Рассмотрим последовательность и порядок расчета несимметричной магнитной цепи с одной намагничивающей катушкой (рис.9.9).

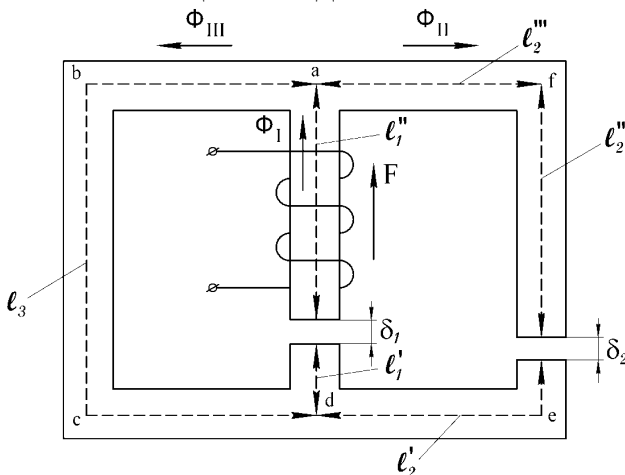


Рис.9.9

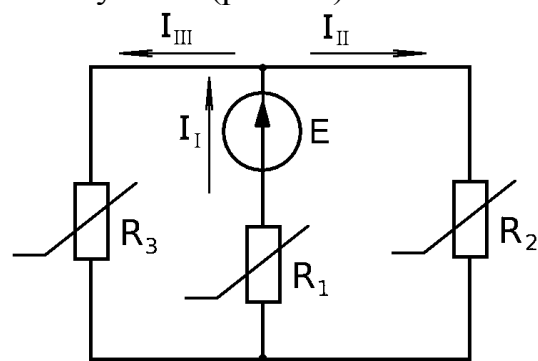


Рис.9.10

Задано:

- 1) геометрические размеры цепи;
- 2) кривые намагничивания;
- 3) намагничивающая сила обмотки  $F$ .

Требуется: определить магнитные потоки во всех участках цепи.

Обозначим магнитные сопротивления участков  $a-d$ ,  $a-f-e-d$  и  $a-b-c-d$  соответственно  $R_I$ ,  $R_{II}$  и  $R_{III}$ , а проходящие по ним потоки  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$  и  $\Phi_{III}$ .

Применим к узлу  $a$  и контурам  $a-f-e-d-a$  и  $a-b-c-d-a$  магнитной цепи первый и второй законы Кирхгофа

$$\begin{cases} F = \Phi_I \cdot R_I + \Phi_{II} \cdot R_{II}; \\ F = \Phi_I \cdot R_I + \Phi_{III} \cdot R_{III}; \\ \Phi_I = \Phi_{II} + \Phi_{III}. \end{cases}$$

Аналогом этой магнитной цепи является нелинейная электрическая цепь на рис.10.10. Система уравнений по законам Кирхгофа для нее имеет вид

$$\begin{cases} E = I_I \cdot R_1 + I_{II} \cdot R_2; \\ E = I_I \cdot R_1 + I_{III} \cdot R_3; \\ I_I = I_{II} + I_{III}. \end{cases}$$

Как известно, решение этой системы производится графическим путем на основе имеющихся ВАХ (находят неизвестные  $I_I$ ,  $I_{II}$ ,  $I_{III}$ ).

Аналогично определяют неизвестные величины потоков  $\Phi_I$ ,  $\Phi_{II}$ ,  $\Phi_{III}$ .

Для этого:

- 1) задаются несколькими значениями магнитного потока  $\Phi$ ;
- 2) для каждого значения  $\Phi$  определяют соответствующую ему намагничивающую силу  $F$ ;
- 3) для каждой ветви строят график  $\Phi(F)$  (так называемую вебер-амперную характеристику). Пусть, например, это будут кривые 1, 2 и 3 соответственно для участков  $a-d$ ,  $a-f-e-d$  и  $a-b-c-d$  (рис.9.11);
- 4) для двух параллельных ветвей  $a-b-c-d$  и  $a-f-e-d$  строят результирующую вебер-амперную характеристику 4, получаемую путем суммирования ординат кривых 2 и 3;
- 5) суммируя абсциссы кривых 1 и 4, получают результирующую вебер-амперную характеристику всей магнитной цепи 5 (рис.9.11).

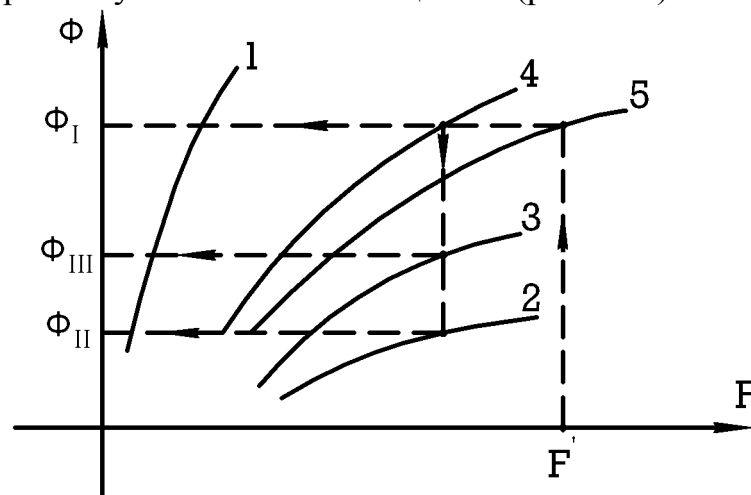


Рис.9.11



Пользуясь этой кривой нетрудно по заданному значению намагничивающей силы  $F'$  найти поток в неразветвленной части магнитной цепи, т.е. поток  $\Phi_I$ . Части этого потока  $\Phi_{II}$  и  $\Phi_{III}$  можно найти с помощью кривых 2, 3 и 4. (см. рис.9.11).

#### 9.4. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником

У катушки без сердечника магнитный поток  $\Phi = B \cdot S$  пропорционален магнитной движущей силе  $F = I \cdot w$ , а зависимость  $\Phi(I)$  является линейной.

При наличии магнитопровода магнитный поток катушки (дросселя) значительно возрастает при прочих равных условиях, т.к. он создается не только катушкой с током (источником внешнего магнитного поля), но и соответствующим ферромагнитным веществом магнитопровода (источником внутреннего магнитного поля).

Известно,  $\Phi = B \cdot S = \mu \cdot H \cdot S$ , т.е.  $\Phi \sim \mu$ , а  $\mu$  для ферромагнитных материалов на несколько порядков выше магнитной проницаемости воздуха  $\mu_0$ . Значит, одинаковый магнитный поток в катушке с магнитопроводом можно получить при значительно меньшей намагничивающей силе  $F = I \cdot w$ .

Схема замещения реальной катушки индуктивности имеет вид рис.9.12.

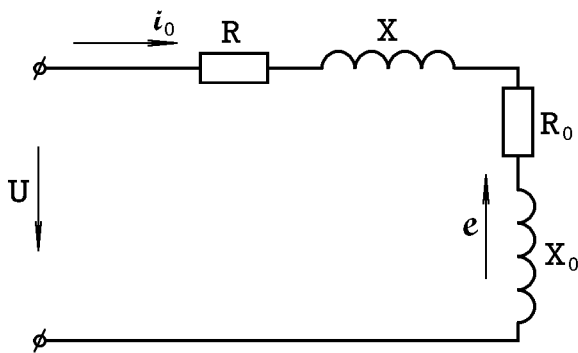


Рис.9.12

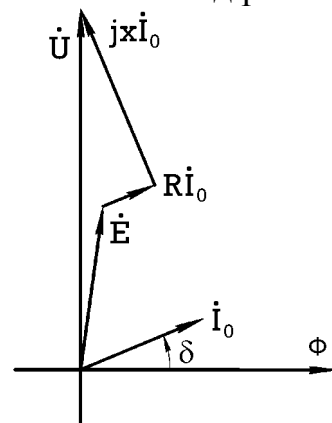


Рис.9.13

Здесь  $i_0$  - ток катушки;  $R$  - активное сопротивление проводов катушки;  $x = \omega \cdot L$  - индуктивное сопротивление катушки;  $R_0$  - активное сопротивление, обусловленное потерями мощности в катушке  $R_0 = \frac{P_M}{I^2}$ ;  $x_0$  - индуктивное сопротивление, обусловленное основным магнитным потоком.

По второму закону Кирхгофа  $\dot{U} = R \cdot \dot{I}_0 + jx \cdot \dot{I}_0 + \dot{E}$ .

Векторная диаграмма, построенная в соответствии с данным уравнением, имеет вид (рис.10.13). Так как  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ , то  $\Phi$  отстает по фазе от  $\dot{E}$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Кроме того,  $\Phi$  отстает по фазе от тока  $\dot{I}_0$  на угол  $\delta$  вследствие явления гистерезиса. Так как зависимость  $B(H)$  - нелинейная, следовательно нелинейной будет и зависимость  $\Phi(i_0)$  (рис.9.14).

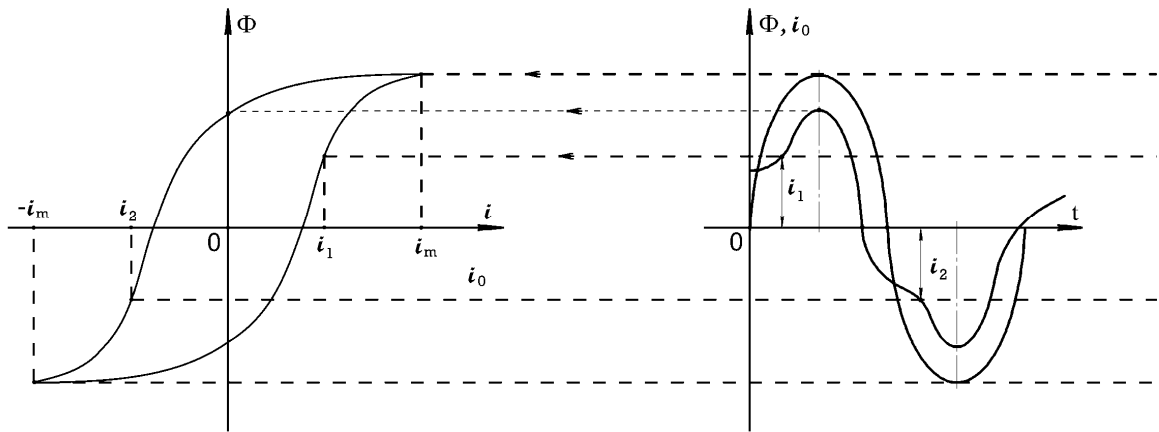


Рис.9.14

Так как напряжение  $u(t)$  синусоидальное, значит синусоидальной будет и зависимость  $\Phi(t)$ .

Но из-за нелинейности  $B(H)$  ток катушки с сердечником  $i_0(t)$  будет несинусоидальным (см. рис.9.14), а это значит, что нелинейная индуктивность является **генератором высших гармоник тока**.

Из рис. 9.14 видно, что ток  $i_0$  опережает по фазе поток  $\Phi$  на гистерезисный угол  $\delta$  (ток достигает нуля раньше магнитного потока).

Для катушки индуктивности с магнитопроводом, имеющим воздушный зазор (рис.9.15), по закону Ома

$$\Phi = \frac{F}{R_m},$$

где  $R_m$  определяются, в основном, сопротивлением воздушного зазора.

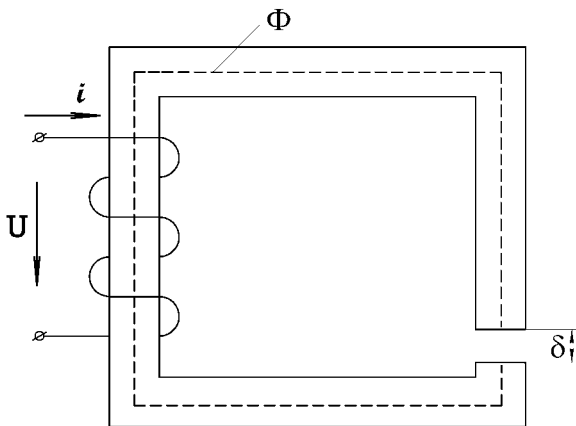


Рис. 9.15

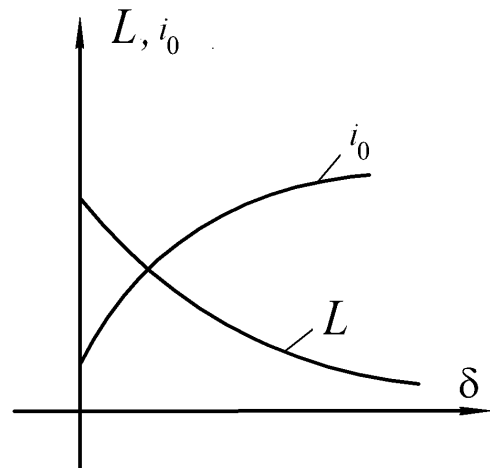


Рис.9.16

Увеличение воздушного зазора увеличивает  $R_m$ , а значит должно уменьшить поток  $\Phi$ . Но этого не происходит, т.к. из формулы  $U = 4,44 \cdot f \cdot w \cdot \Phi_m$  следует, что

$$\Phi_m = \frac{U}{4,44 \cdot f \cdot w},$$

т.е. величина потока зависит только от действительного значения питающего напряжения, которое, естественно, не меняется. Значит, не меняется и поток. Это объясняется тем, что при увеличении  $\delta$  увеличивается намагничивающая сила  $I \cdot w$  до значения, при котором поток  $\Phi$  (а значит и отношение  $\frac{F}{R_m}$ ) остается постоянным. Ток дросселя увеличивается за счет того, что уменьшается полное

сопротивление катушки вследствие уменьшения ее реактивного сопротивления (из-за уменьшения индуктивности) (см. рис.9.16).

Таким образом, путем изменения величины воздушного зазора в магнитопроводе, можно регулировать ток катушки индуктивности (дресселя) при включении ее в цепь переменного тока при неизменности питающего напряжения. В данном случае, катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником, в цепи которого имеется регулируемый воздушный зазор, выполняет функции регулируемого сопротивления.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Башарин С.А., Федоров В.В. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. М.: АСАДЕМА. 2004. – 304с.
2. Иванов И.И., Соловьев Г.И., Равдоник В.С. Электротехника. Учебник. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 496с., ил.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Основы электротехники для студентов вузов. – М.: Энергоатомиздат, 2000.