О. Н. Быкова
С. Ю. Колягин
Б. Н. Кукушкин

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Математический анализ

$$\int_a^b f(x)dx$$

Москва 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский педагогический государственный университет»

О.Н. БЫКОВА, С.Ю. КОЛЯГИН, Б.Н. КУКУШКИН

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Москва

2011

УДК 378(076.5):517

ББК 22.161я73-5

Б953

Рецензенты:

проф. *А. В. Латышев* (МГОУ),

проф. *Е. В. Веретенникова* (МПГУ).

Б953 **Быкова О.Н.** Практикум по математическому анализу: Учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин. – М.: МПГУ, 2011. – 275 с.

Данное учебное пособие может служить студентам математических и физико-математических факультетов педагогических вузов руководством к практическим занятиям по курсу математического анализа. Оно будет также полезным молодым преподавателям при подготовке и проведении семинаров по данной учебной дисциплине.

ISBN 978-5-4263-0056-9

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие, по замыслу авторов, может служить студентам математических и физико-математических факультетов педагогических вузов руководством к практическим занятиям по курсу математического анализа. Оно будет также полезным молодым преподавателям для подготовки и проведения семинаров по данной учебной дисциплине. Надобность в таком пособии вызвана тем, что существующие задачники по математическому анализу не могут в полной мере отвечать этому назначению. Часто их содержание выходит за пределы действующих примерных программ по математическому анализу для направлений педагогического образования, поэтому студенту I-II курсов педвуза зачастую трудно в них ориентироваться. Таким образом, перед авторами стояла задача создать учебное пособие, материал которого был бы ограничен рамками действующих примерных программ по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлениям бакалавриата: 050100 – Педагогическое образование (профили «Математика», «Информатика», «Математика и информатика», «Информатика и математика», «Математика и экономика», «Информатика и экономика»), 010100 – Математика (профиль «Преподавание математики и информатики»). В этом, на взгляд авторов, нашёл своё воплощение принцип соответствия учебно-методических работ актуальным направлениям развития отечественной образовательной системы, включая реализацию компетентностного подхода и развитие блочно-модульной структуры обучения.

Предлагаемое учебное пособие полностью соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) и примерным образовательным программам по указанным направлениям и их различным профилям.

Пособие содержит 80 тем практических занятий по математическому анализу для студентов I и II курсов. В начале каждой темы имеется краткий теоретический материал, включающий в себя определения, обозначения, формулировки теорем и формулы, необходимый при решении задач по данной теме. Каждая тема в пособии снабжена системой задач в количестве, достаточном для изучения данной темы на двухчасовом практическом занятии. Одна-две задачи в теме приводятся с подробными решениями, остальные задачи, как правило, снабжены ответами. В конце темы имеются упражнения, которые можно использовать для самостоятельной работы студентов, в том числе – в качестве домашнего задания по изучаемой теме.

Большинство заданий в пособии заимствовано из известных задачников по математическому анализу (см. список литературы). Вместе с тем в пособии имеется и целый ряд оригинальных задач и упражнений.

Авторы выражают искреннюю признательность официальным рецензентам проф. А.В. Латышеву (МГОУ) и проф. Е.В. Веретенниковой (МПГУ) за полезные советы, несомненно, способствующие улучшению пособия.

Все пожелания и замечания авторами с благодарностью будут приняты. Их можно присылать на кафедру математического анализа МПГУ (107140, Москва, ул. Краснопрудная, д. 14) и, в том числе, по электронной почте: kafmatanmpgu@mail.ru.

Авторы

Тема 1. Действительные числа. Модуль действительного числа

Аксиома непрерывности множества действительных чисел. *Для всяких непустых числовых множеств* A *и* B *таких, что* $a \le b$ *для любых* $a \in A, b \in B$, *существует* $c \in \mathbb{R}$ *такое, что для любых* $a \in A, b \in B$ *имеет место неравенство* $a \le c \le b$.

Действительное число, представимое в виде отношения $\frac{m}{n}$ целого числа m и натурального числа n, называется *рациональным*. Действительное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным*. Будем обозначать $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел.

Можно показать, что любое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а любое иррациональное число представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Определение. *Модулем* или *абсолютной величиной* действительного числа x называется действительное число, обозначаемое $|x|$, определяемое формулой $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

Основные свойства модуля:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |x| = \max\{x, -x\}$;

2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ -|x| \le x \le |x|$, причём если $x \ne 0$, то одно неравенство строгое, а другое обращается в равенство;

3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |x| \ge 0,$ причём $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |-x| = |x|\ \ \left(\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ |x-y| = |y-x|\right)$;

5. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \left(|x|^2 = x^2 \wedge \sqrt{x^2} = |x|\right)$;

6. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ \left(|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \wedge \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ (y \ne 0)\right)$;

7. (*основное модульное неравенство*) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ \big||x| - |y|\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$, причём в случае $|x+y|$ если $xy > 0$, то левое неравенство строгое, а правое обращается в равенство; если $xy < 0$, то левое неравенство обращается в равенство, а правое неравенство строгое, в случае же $|x-y|$ наоборот; если $xy = 0$, то оба неравенства становятся равенствами;

8. $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \left(\begin{cases} x \ge -a \\ x \le a \end{cases}\right)\ \ (a \ge 0)$;

9. $\forall x\in\mathbb{R}\ |x|\ge a \Leftrightarrow x\le -a \vee x\ge a \left(\left[\begin{array}{l} x\le -a \\ x\ge a \end{array}\right.\right)\ (a\ge 0)$.

Задачи.

1. Показать, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Решение: Предположим противное, т.е. $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Поэтому существуют взаимно простые натуральные числа m и n, такие, что $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ (т.е. дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима). Отсюда имеем $2n^2=m^2$, следовательно, m^2 – чётное число. Поэтому и число m – чётное (докажите!), т.е. $m=2k\ (k\in\mathbb{N})$. Следовательно, $m^2=4k^2$, откуда $2n^2=4k^2$ или $n^2=2k^2$, т.е. n^2 – чётное и тем самым n – чётное. Таким образом, и m, и n – чётные числа, т.е. дробь $\dfrac{m}{n}$ сократима (по крайней мере, на 2), что противоречит требованию взаимной простоты чисел m и n. Поэтому предположение о рациональности $\sqrt{2}$ неверно, т.е. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

2. Показать, что число $x=0{,}1212212221...$ иррациональное.

Решение: Предположим противное, т.е. $x\in\mathbb{Q}$. Тогда десятичная дробь <u>периодическая</u>. Пусть период содержит n цифр. Так как сколь угодно далеко в записи x встречается 1, то период содержит 1. С другой стороны, т.к. начиная с некоторого места и далее, в десятичной записи x встречается $2n$ подряд идущих двоек, то период должен состоять из одних двоек. Получили два взаимно противоречивых утверждения. Таким образом, предположение о периодичности дроби неверно, тем самым дробь непериодическая, а значит, число $x\in\mathbb{I}$.

3. Десятичную периодическую дробь $1{,}7(31)$ записать в виде несократимой дроби.

Решение: <u>1 способ</u>. Имеем $x=1{,}7(31)$. Представим x в виде бесконечной суммы $x=1{,}7+\dfrac{31}{10^3}+\dfrac{31}{10^5}+\ldots$. Так как все слагаемые, начиная со второго, являются членами убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a_1=\dfrac{31}{10^3}$ и со знаменателем $q=\dfrac{1}{10^2}$, то их сумма вычисляется по известной формуле $S=\dfrac{a_1}{1-q}$. Итак, $S=\dfrac{\frac{31}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\dfrac{31}{10^3-10}=\dfrac{31}{990}$. Следовательно, $x=\frac{17}{10}+\ +\frac{31}{990}=\frac{17\cdot 99+31}{990}=\frac{1683+31}{990}=\frac{1714}{990}=\frac{857}{495}$.

2 способ. Если $x=1,7(31)$, то $1000x=1731,(31)$, а $10x=17,(31)$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $990x=1714$, откуда $x=\frac{1714}{990}=\frac{857}{495}$.

4. Показать, что сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное, а сумма двух иррациональных чисел может быть как рациональным, так и иррациональным числом.

Решение: Известно, что сумма, разность, произведение и частное (при отличном от нуля делителе) двух рациональных чисел есть число рациональное.

а) Пусть $\alpha\in\mathbb{Q}$, $\beta\in\mathbb{I}$. Предположим, что их сумма $\gamma=\alpha+\beta-$ рациональное число, а значит, таковым является и число $\beta=\gamma-\alpha$ как разность рациональных, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, и число $\gamma=\alpha+\beta-$ иррациональное.

б) Пусть теперь $\alpha,\beta\in\mathbb{I}$. Покажем, что их сумма $\alpha+\beta$ может быть иррациональным числом. Например, согласно задаче 2, числа $\alpha=0{,}1212212221...$ и $\beta=0{,}2323323332...-$ иррациональные. Их сумма $\alpha+\beta=0{,}3535535553...$ также является иррациональным числом.

Покажем теперь, что сумма иррациональных чисел α и β может быть рациональным числом. Пусть по-прежнему $\alpha=0{,}1212212221...$, а $\beta=0{,}3232232223...-$ иррациональные числа. Вместе с тем их сумма $\alpha+\beta=\ =0,(4)=\frac{4}{9}$, т.е. является рациональным числом.

5. Показать, что для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство $|a+b|\le|a|+|b|$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ab\ge 0$ (т.е. если оба числа a и b не нули, то они одного знака).

6. Решить неравенства с модулем:

а) $|x|>|x+1|$. (**Ответ:** $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$).

б) $|x+2|-|x|>1$. (**Ответ:** $x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$).

в) $|x-4|+|x+4|\le 10$. (**Ответ:** $x\in[-5;5]$).

7. Решить уравнения, содержащие модуль:

а) $|2x+3|=x^2$. (**Ответ:** $x=-1;\ x=3$).

б) $|\sin x|=\sin x+2$. (**Ответ:** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).

в) $\left|x^2-5x+6\right|=-6+5x-x^2$. (**Ответ:** $x\in[2;3]$).

Упражнения.

1. Доказать иррациональность чисел:

а) $\sqrt{3}$; **б)** 0,123456…; **в)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Показать, что произведение иррационального и рационального (отличного от 0) чисел есть число иррациональное, а произведение двух иррациональных чисел может быть как рациональным, так и иррациональным числом.

3. Показать, что иррациональная степень иррационального числа может быть числом рациональным. (Указание: рассмотрите число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$).

4. Доказать неравенство $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$, для любых $x,y\in\mathbb{R}$.

5. Решить неравенства, содержащие модуль:

а) $|2x-1|<|x-1|$. (**Ответ:** $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$).

б) $|x+2|+|x-2|\ge12$. (**Ответ:** $x\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$).

в) $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$. (**Ответ:** $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$).

6. Решить уравнения с модулем:

а) $|x|=x^2-6$. (**Ответ:** $x=\pm3$).

б) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{x-1}{x+1}$. (**Ответ:** $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$).

в) $|\cos x|-\cos x-3=0$. (**Ответ:** $x\in\varnothing$).

Тема 2. Метод математической индукции

Определение 1. Числовое множество E $(E\subset\mathbb{R})$ называется *индуктивным*, если 1) $1\in E$, 2) $\forall x\ \left(x\in E\ \Rightarrow\ x+1\in E\right)$.

Например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+=[0;+\infty)$, $\mathbb{Q}\cap[1;+\infty)$ – индуктивные множества.

Определение 2. Наименьшее индуктивное множество в $\mathbb{R}$ (т.е. пересечение всех индуктивных множеств в $\mathbb{R}$) называется *множеством натуральных чисел*, или *натуральным рядом* и обозначается $\mathbb{N}$.

Теорема (принцип математической индукции). *Если $E\subset\mathbb{N}$ и E индуктивно, то $E=\mathbb{N}$.*

Пусть требуется доказать некоторое утверждение $A(n)$. Пусть E – множество истинности доказываемого утверждения, тогда, очевидно, оно подмножество $\mathbb{N}$. Если $1\in E$ (*база индукции*) и для любого $n\in E$ вытекает, что $n+1\in E$ (*индукционный шаг*), т.е. E индуктивное множество, то по теореме $E=\mathbb{N}$, т.е. множеством истинности доказываемого утверждения является всё множество $\mathbb{N}$.

Таким образом, доказательство по индукции утверждения, зависящего от $n \in \mathbb{N}$, предполагает проверку истинности доказываемого утверждения для $n = 1$ (база индукции) и при условии, что утверждение истинно для натурального n, доказательство того, что оно верно для следующего за ним номера (индукционный шаг).

Иногда требуется доказать истинность утверждения для всех номеров, начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. В этом случае базой индукции является проверка истинности доказываемого утверждения для $n = n_0$.

<u>Задачи.</u>

1. Методом математической индукции доказать формулы:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Решение: Имеем утверждение $A(n)$: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>База индукции.</u> $A(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ – верное равенство.

<u>Индукционный шаг.</u> Проверим импликацию: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$, где $A(k)$: $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$, $A(k+1)$: $1+2+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имеем $1+2+...+k+(k+1) \overset{A(k)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Таким образом, выполнены оба условия принципа математической индукции, и доказываемая формула верна.

2. Методом математической индукции доказать равенство

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \ (n \in \mathbb{N})$$

3. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \ \left(n \in \mathbb{N}, \alpha \in [-1; +\infty)\right),$$

причём равенство имеет место при $n = 1$ или $\alpha = 0$.

4. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1 \ (n \in \mathbb{N})$; **б)** $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$;

в) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$; **г)** $n^{n+1} > (n+1)^n \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1; 2\})$.

Упражнения.

1. Доказать равенства:

а) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ (n \in \mathbb{N})$; **б)** $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \ (n \in \mathbb{N})$;

в) $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\dfrac{n\left(4n^2-1\right)}{3}\ (n\in\mathbb{N}).$

2. Доказать неравенства:

а) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\ (n\in\mathbb{N});$ **б)** $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ (n\in\mathbb{N});$

в) $(2n)!<\left(2^n n!\right)^2\ (n\in\mathbb{N}).$

Тема 3. Ограниченность числовых множеств. Границы и грани

Определение 1. Непустое числовое множество E $(E\subset\mathbb{R})$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует действительное число c такое, что $E\le c$ $(E\ge c)$. При этом число c называется *верхней* (*нижней*) *границей* множества E.

Неравенство $E\le c$ $(E\ge c)$ означает, что каждый элемент x множества E не больше c (не меньше c).

Определение 2. Непустое числовое множество E $(E\subset\mathbb{R})$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу, т.е.

$$\exists a,b\in\mathbb{R}:\ \forall x\ \left(x\in E\ \Rightarrow\ a\le x\le b\right).$$

Определение 3. Пусть $E-$ ограниченное сверху (снизу) числовое множество. *Верхней* (*нижней*) *гранью* множества E называется наименьшая из всех верхних границ (наибольшая из всех нижних границ) этого множества.

Очевидно, что если у множества имеется наименьший (наибольший) элемент, то он и является нижней (верхней) гранью этого множества.

Теорема (существование верхней (нижней) грани). *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество E имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Задачи.

1. Исследовать множество $E=[-2;\,1)$ на ограниченность и найти его грани.

Решение: Для любого $x\in E$ выполняется двойное неравенство $-2\le x<1$. Таким образом, множество E непусто и ограничено снизу числом -2, сверху числом 1. Поэтому согласно теореме существуют нижняя и верхняя грани этого множества.

Так как $-2\in E$, то существует $x=-2-$ наименьший элемент E, и, следовательно, $\inf E=-2$.

Докажем, что E не обладает наибольшим элементом. Предположим противное: существует $b=\max E$. Рассмотрим число $\dfrac{b+1}{2}$. Так как

$-2 \le b < 1$, то $-\frac{1}{2} < \frac{b+1}{2} < 1$ и, следовательно, $\frac{b+1}{2} \in E$. Но т.к. $b < 1$, то $\frac{b+1}{2} > b$, что противоречит предположению $(b = \max E)$.

Покажем, что $\sup E = 1$. По определению

1) для любого $x \in E$ выполняется $x \le 1$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in E\ \ x_0 > 1 - \varepsilon$.

Если $\varepsilon > 3$, тогда $1 - \varepsilon < -2$, и в качестве x_0 можно взять любой элемент множества E (например, $x = 0$).

Если же $0 < \varepsilon \le 3$, то $1 - \varepsilon \ge -2$, и, следовательно, в качестве x_0 можно взять любое число из интервала $(1-\varepsilon; 1)$ (например, $x_0 = \frac{(1-\varepsilon\ )+1}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$). Итак, $x_0 = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2},\ 0 < \varepsilon\ \le 3 \\ 0,\ \varepsilon\ > 3 \end{cases}$.

<u>Упражнение</u>. Используя полученное равенство для x_0, заполните таблицу при данных значениях ε. Сравните числа, полученные во втором и третьем столбцах (должно быть $x_0 > 1 - \varepsilon$).

ε	$x_0 (\in E)$	$1-\varepsilon$
$\frac{1}{10}$		
$\frac{4}{7}$		
π		
e		
100		

2. Исследовать на ограниченность и найти грани множества $E = \left\{ \frac{m}{n},\ m,n \in \mathbb{N},\ m < n \right\}$. Заполнить таблицу, подобную приведённой в упражнении к задаче 1, взяв в качестве значений ε следующие числа: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{\pi}$, 10, $\frac{\pi}{e}$.

3. Исследовать на ограниченность и найти грани множества $E = \left\{ \frac{2n}{3n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Заполнить таблицу, подобную приведённой в упражнении к задаче 1, взяв в качестве значений ε следующие числа: $\frac{1}{7}$, 1, $\frac{2}{15}$,

$\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{10}$.

4. Показать, что если E_1 и E_2 ограниченные числовые множества, то множество $E = E_1 \cup E_2$ ограничено, при этом $\inf E = \min\{\inf E_1, \inf E_2\}$, $\sup E = \max\{\sup E_1, \sup E_2\}$.

5. Исследовать на ограниченность и найти грани множества

$$E = \left\{ \frac{k}{2k^2 - 1}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Исследовать на ограниченность и найти грани множества

$$E = \left\{ \frac{k^4}{3k^2 + 2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Упражнения.

1. Найти верхнюю и нижнюю грани множества всех рациональных чисел, лежащих на отрезке $\left[1; \sqrt{5}\right]$.

2. Исследовать на ограниченность и найти грани $E = \left\{ \frac{n^3}{2n^3 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

3. Исследовать на ограниченность и найти грани $E = \left\{ \frac{2k}{k^2 + 1}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Показать, что если E_1 и E_2 – ограниченные пересекающиеся числовые множества, то множество $E = E_1 \cap E_2$ ограничено, при этом

$$\inf E \ge \max\{\inf E_1, \inf E_2\}, \ \sup E \le \min\{\sup E_1, \sup E_2\}.$$

Тема 4. Функция. График функции

Соответствием S будем называть всякое множество упорядоченных пар элементов произвольной природы.

Множество первых элементов пар соответствия S будем называть *областью определения* этого соответствия и обозначать D_S, а множество вторых элементов пар соответствия S будем называть *множеством значений* этого соответствия и обозначать R_S.

Соответствие S называется *однозначным*, если

$$\forall x \in D_S \quad \exists! y \in R_S : (x, y) \in S.$$

Определение 1. *Функцией* (или *отображением*) называется всякое однозначное соответствие.

Функции обычно обозначают буквами f, g, h и др. При этом, как правило, пишут $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и т.д., где буквой x обозначен аргумент данной функции.

Функция $f(x)$, область определения D_f и множество значений R_f которой есть подмножества $\mathbb{R}$, называется действительной (действительзначной) функцией одного действительного переменного.

Определение 2. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными*, если

1) $D_f = D_g$ (их области определения совпадают),

2) $\forall x \in D_f \left(= D_g\right) \quad f(x) = g(x)$ (в каждой точке их общей области определения совпадают значения функций).

Определение 3. Графиком функции $f(x)$ называется множество всех точек G_f координатной плоскости, абсциссы которых принадлежат D_f, а ординаты равны соответствующим значениям $f(x)$, т.е.

$$G_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f, y = f(x) \right\}.$$

<u>Задачи.</u>

1. Найти области определения рациональных функций:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Решение: Формула, определяющая функцию $f(x)$, имеет смысл для любых $x \in \mathbb{R}$, кроме значений, для которых знаменатель этого выражения равен нулю, следовательно, $x + 1 \neq 0$, т.е. $x \neq -1$. Таким образом, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

б) $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$. (**Ответ:** $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$).

в) $h(x) = \dfrac{1}{x + |x|}$. (**Ответ:** $D_h = \mathbb{R}_+^* = (0; +\infty)$).

2. Найти области определения иррациональных функций (функций, содержащих радикал):

а) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$. (**Ответ:** $D_f = [-2; 1]$).

б) $g(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x^2 - 1}}{x}$. (**Ответ:** $D_g = \mathbb{R} \setminus (-1; 1) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$).

в) $h(x) = \sqrt{x^2 (x - 2)}$. (**Ответ:** $D_h = \{0\} \cup [2; +\infty)$).

3. Найти область определения трансцендентных функций:

а) $f(x) = \ln\left(16 - x^2\right)$.

Решение: Выражение, задающее функцию $f(x)$, имеет смысл во всех точках $x \in \mathbb{R}$, для которых $16 - x^2 > 0$, т.е. $x^2 < 16$, а значит, $-4 < x < 4$. Таким образом, $D_f = (-4; 4)$.

б) $g(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x}$. (**Ответ:** $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$).

в) $h(x)=\arccos\dfrac{2x}{1-x^2}$. (**Ответ:** $D_h=\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$).

4. Совпадают ли функции:

а) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$.

Решение: Имеем $D_f=D_g=\mathbb{R}$, но $g(x)=|x|\neq x$ при $x<0$, следовательно, $f(x)\neq g(x)$.

б) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$, $g(x)=x-2$. (**Ответ:** $f(x)\neq g(x)$).

5. Найти линейную функцию $f(x)=ax+b$ и изобразить её график, если $f(1)=0$, $f(0)=-2$. (**Ответ:** $f(x)=2x-2$).

6. Исследовать свойства и изобразить эскизы графиков следующих специальных функций:

а) $y=|x|$;

б) $y=[x]$, где $[x]-$целая часть x, т.е. наибольшее целое, не превосходящее x;

в) $y=\{x\}$, где $\{x\}-$ дробная часть x, т.е. разность $x-[x]$;

г) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ (эта функция называется «сигнум x» или «знак x»);

д) $y=\pi(x)$, $-\infty<x\leq 19$ ($\pi(x)-$ число простых чисел, не превосходящих x);

е) $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$ (эта функция называется функцией Дирихле).

Упражнения.

1. Найти области определения следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$; **б)** $f(x)=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$; **г)** $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

2. Совпадают ли функции $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ и $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$.

3. Найти квадратичную функцию $g(x)=ax^2+bx+c$ и изобразить её график, если $g(-2)=2$, $g(1)=-1$, $g(3)=7$. Каковы координаты точек пересечения графика с осями координат? Найти точки пересечения графиков функций $g(x)$ и $f(x)$ из задачи 5.

Тема 5. Основные типы поведения функций

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *инъективной*, если

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right),$$

или, что то же $\forall x_1, x_2 \in D_f \quad \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$.

Очевидно, что инъективность функции $f(x)$ геометрически интерпретируется так: *любая горизонтальная прямая* (*ось* Ox *или ей параллельная*) *пересекает график функции не более чем в одной точке*.

Определение 2. *Сужением* функции $f(x)$ на множество $E \subset D_f$ называется такая функция $\left(f|_E\right)(x)$, что 1) $D_{f|_E} = E$, 2) $\forall x \ \left(x \in E \Rightarrow \left(f|_E\right)(x) = f(x)\right)$.

Отметим, что сужение неинъективной функции может оказаться инъективной функцией.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $E \subset D_f$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \ \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ \ \left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)\right).$$

Если итоговое неравенство строгое, то $f(x)$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) на множестве E.

Если $E = D_f$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) или *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

Возрастающая или убывающая функции называются *монотонными*. Строго возрастающая или строго убывающая функции называются *строго монотонными*.

Теорема (достаточное условие инъективности). *Если функция* $f(x)$ *строго монотонна, то она инъективна.*

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если её область определения D_f симметрична относительно нуля и

$$\forall x \ \left(x \in D_f \Rightarrow f(-x) = f(x) \ \ \left(f(-x) = -f(x)\right)\right).$$

Ясно, что график чётной функции симметричен относительно оси ординат (осевая симметрия), а график нечётной функции симметричен относительно начала координат (центральная симметрия).

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует действительное ненулевое число T такое, что

1) $\forall x \ \left(x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f\right)$, 2) $\forall x \ \left(x \in D_f \Rightarrow f(x+T) = f(x)\right)$.

При этом число T называется *периодом* функции $f(x)$. Если существует наименьший положительный период, то он называется *основным*.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу,* или *ограниченной сверху***,** или *ограниченной*, если таковым является множество её значений, т.е.

1) функция $f(x)$ ограничена снизу, если

$$\exists A \in \mathbb{R}: \ \forall x \ \left(x \in D_f \Rightarrow f(x) \geq A\right);$$

2) функция $f(x)$ ограничена сверху, если

$$\exists B \in \mathbb{R}:\ \forall x\ \left(x \in D_f \Rightarrow f(x) \le B\right);$$

3) функция $f(x)$ ограничена, если

$$\exists A, B \in \mathbb{R}:\ \forall x\ \left(x \in D_f \Rightarrow A \le f(x) \le B\right).$$

Определение 7. Если функция $f(x)$ ограничена снизу, (сверху), то её *нижней* (*верхней*) *гранью* называется нижняя (верхняя) грань множества R_f значений этой функции, т.е. $\inf f(x) \overset{def}{=} \inf R_f$ $\left(\sup f(x) \overset{def}{=} \sup R_f\right)$.

Определение 8. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу; сверху; ограниченной* на множестве $E \subset D_f$, если таковым является её сужение $\left(f|_E\right)(x)$ на это множество. При этом нижней; верхней гранью функции $f(x)$ на множестве E называется соответствующая грань сужения $\left(f|_E\right)(x)$.

Задачи.

1. Доказать инъективность функций: **а)** $f(x) = x^3 - 1$; **б)** $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Решение: Так как для любых x_1 и x_2 из $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ равенство $g(x_1) = g(x_2)$, т.е. $\dfrac{2x_1}{x_1+1} = \dfrac{2x_2}{x_2+1}$, влечёт только $x_1 = x_2$, то функция $g(x)$ – инъективная.

2. Показать, что всякая дробно-линейная функция $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad \ne bc)$ инъективна.

3. Показать, что функции не являются инъективными и найти их инъективные сужения на невырожденные промежутки или их объединения:

а) $f(x) = x^2 + x - 2$; **б)** $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

4. Доказать, что:

а) если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $E\ \left(E \subset D_f\right)$, то функция $\left(-f(x)\right)$ – убывает (возрастает) на этом множестве;

б) если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве $E\left(E \subset D_f \setminus \{x : f(x) = 0\}\right)$ и сохраняет знак на E, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывает (возрастает) на E;

в) сумма двух возрастающих (убывающих) на множестве E функций есть функция, возрастающая (убывающая) на этом множестве, причём, если хо-

тя бы одна из функций возрастает (убывает) на E строго, то их сумма строго возрастает (строго убывает) на E;
г) произведение двух возрастающих (убывающих) неотрицательных на множестве E функций есть функция, возрастающая (убывающая) на E;
д) композиция двух монотонных функций есть монотонная функция, причём возрастающая, если обе функции одного смысла монотонности, и убывающая в противном случае.

5. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=x^4+2x^2+3$; **б)** $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

6. Показать, что дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad\neq bc)$ строго монотонна на обоих интервалах, составляющих её область определения, причём она на каждом из них она строго возрастает (строго убывает), если число $\Delta=ad-bc$ положительно (отрицательно). Является ли функция $f(x)$ монотонной?

7. Исследовать чётность и нечётность функций:

а) $f(x)=x^4+3x^2-2$; **б)** $g_1(x)=\sin x^2$; $g_2(x)=\cos x^3$.

8. Показать, что сумма и разность двух чётных (нечётных) функций есть функция чётная (нечётная), а произведение и частное двух чётных (нечётных) функций есть всегда функция чётная. Что можно сказать о сумме, разности, произведении и частном двух функций, одна из которых чётна, а другая – нечётна?

9. Пусть функция $f(x)$ есть сужение функции $y=x^2+2x-3$ на множество $\mathbb{R}_-$. Продолжить функцию $f(x)$ на множество $\mathbb{R}_+$ 1) чётным образом; 2) нечётным образом. Изобразить графики функции $f(x)$ и функций, полученных в результате указанных продолжений.

10. Пусть функция $f(x)$ периодическая и T $\left(T\in\mathbb{R}^*\right)$ – её период. Показать, что: **а)** $\forall x\in D_f$ $f(x-T)=f(x)$; **б)** для любого $k\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ число kT также является периодом этой функции; **в)** функция $f(ax)\left(a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}\right)$ – периодическая; чему равен её основной период, если T – основной период функции $f(x)$?

11. Показать, что функции не являются периодическими:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

Решение: Рассуждаем от противного. Пусть функция $f(x)$ периодическая и $T\neq 0$ – её период. Так как для всех $x\in D_f=\mathbb{R}$ $f(x+T)=f(x)$, то имеем $\dfrac{1}{(x+T)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}$, для всех $x\in\mathbb{R}$. В частности, при $x=0$ получаем $T=0$ (проверьте). Полученное противоречие доказывает, что функция $f(x)$ – непериодическая.

По-другому: непериодичность функция $f(x)$ сразу следует и из того факта, что своё значение, равное 1, функция принимает лишь при $x=0$.

б) $g(x)=\dfrac{x-1}{e^x+1}$.

12. Доказать, что любая рациональная функция (отношение многочленов и, в частности, многочлен), отличная от постоянной, не может быть периодической.

13. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ есть сужения соответственно функций $y=x^2$ и $y=\dfrac{1}{x}$ на интервал $(0;1)$. Продолжить периодическим образом функции $f(x)$ и $g(x)$ вне этого интервала, считая $T=1$ основным периодом этих продолжений. Изобразить графики функций $f(x)$, $g(x)$ и функций, полученных в результате указанных продолжений.

14. Исследовать на ограниченность следующие функции и найти их грани, если они существуют: **а)** $f(x)=x^2-5x^2+6$; **б)** $g(x)=e^x+1$.

Упражнения.

1. Исследовать инъективность функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

2. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ не является инъективной и найти её инъективные сужения на невырожденные промежутки или их объединения.

3. Исследовать на монотонность функцию $f(x)=\ln(x^2+x+1)$.

4. Исследовать чётность и нечётность функции $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

5. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ не является периодической.

6. Исследовать на ограниченность функцию $f(x)=2\sin x-1$ и найти её грани, если они существуют.

Тема 6. Основные элементарные функции. Частичное исследование функций

К *основным элементарным функциям* будем относить:

1. Постоянные функции $y=c-\text{const}$;

2. Степенные функции $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$;

3. Показательные функции $y = a^{x}$, $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}$;

4. Логарифмические функции $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}$;

5. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

6. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными будем называть функции, получаемые из основных элементарных с помощью конечного числа арифметических операций и композиций.

Полное исследование функций нельзя провести без привлечения методов дифференциального исчисления. В данной теме будем исследовать функции частично, руководствуясь следующей схемой:

1) Найти область определения функции;
2) Найти множество значений функции и исследовать функцию на ограниченность (если это возможно);
3) Исследовать чётность-нечётность функции;
4) Исследовать периодичность функции;
5) Исследовать монотонность функции (если это возможно);
6) Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства;
7) Построить эскиз графика функции.

<u>Задачи.</u>

1. Изобразить графики основных элементарных функций.

2. Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; **б)** $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$.

Решение **б)**: Проведём исследование по вышеуказанной схеме.

1) Функция определена во всех точках, в которых знаменатель не обращается в ноль, т.е. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2) Если считать функцию равной числу a и исследовать в зависимости от значений a наличие корней полученного уравнения, то те значения a, при которых уравнение имеет корни, составляют множество значений функции. Итак, при $a = 0$ имеем $x = 0$, а если $a \neq 0$, то $\dfrac{x}{1-x^2} = a \Leftrightarrow ax^2 + x - a = 0$ и это уравнение имеет решения при любом a, т.к. $D = 1 + 4a^2 > 0$. Следовательно, $R_g = \mathbb{R}$.

3) Так как D_g симметрична относительно нуля и $\forall x \in D_g \quad g(-x) = -g(x)$, то $g(x)$ – нечётная. Следовательно, график функции $g(x)$ симметричен относительно начала координат.

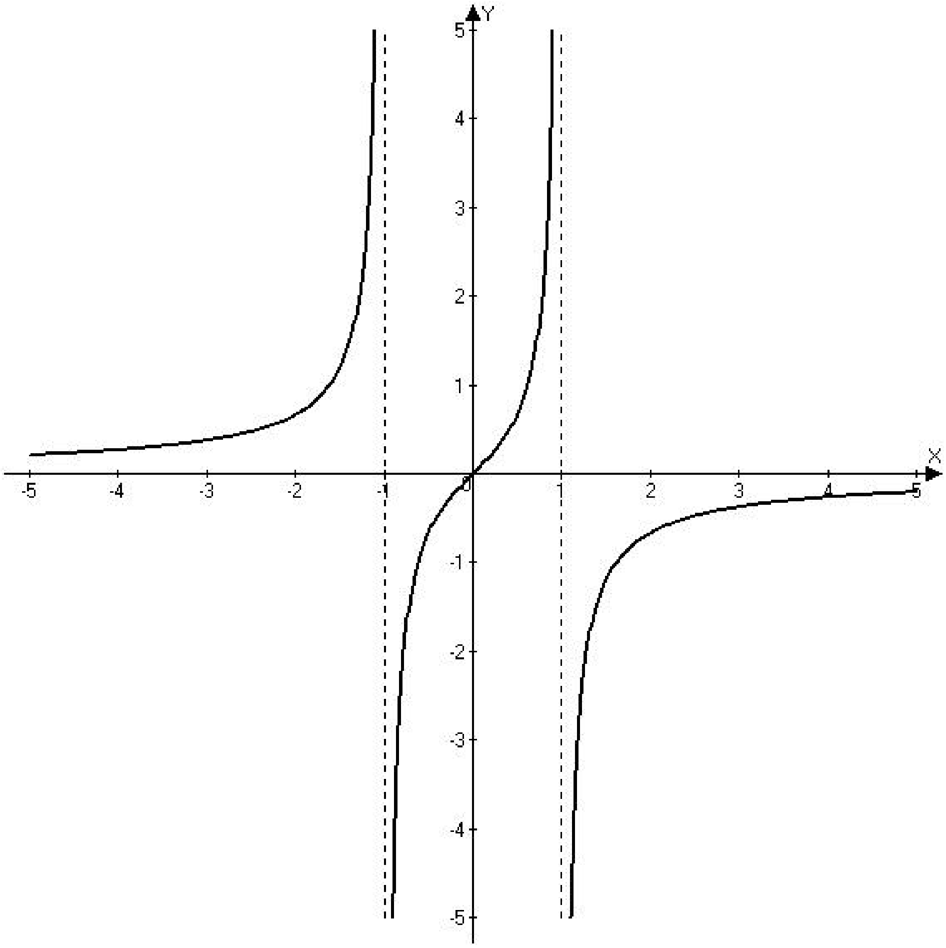
4) У периодической функции множество точек, не входящих в область определения функции, не может быть конечным, поэтому $g(x)$ – не периодическая.

5) Рассмотрим сначала полуинтервал $[0;1)$. На нём представим функцию $g(x)$ в виде произведения функций $g_1(x)=x$ и $g_2(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. Ясно, что $g_1(x)$ строго возрастает и неотрицательна на этом промежутке. Так как на $[0;1)$ функция $y=1-x^2$, очевидно, строго убывает и положительна, то функция $g_2(x)$ строго возрастает и также положительна на этом промежутке, поэтому функция $g(x)$ – возрастающая и неотрицательная на $[0;1)$. В силу нечётности на симметричном относительно начала координат полуинтервале $(-1;0]$ функция $g(x)$ также возрастает, но неположительная. На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ при $x_1<x_2$ имеем $g(x_2)-g(x_1)=$ $=\dfrac{(x_2-x_1)(1+x_1x_2)}{\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)}>0$, так как множители произведений x_1x_2 и $\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$ одного знака, и, следовательно, они положительны. Таким образом, на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция $g(x)$ строго возрастает.

6) Чтобы найти точку пересечения графика функции с осью Oy, нужно вычислить значение функции в точке $x=0$. Для нахождения точек пересечения графика $g(x)$ с осью Ox надо решить уравнение $g(x)=0$. В данном случае $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, т.е. график функции $g(x)$ пересекает обе оси только в начале координат. При исследовании монотонности мы выяснили, что $g(x)$ положительна на интервале $(0;1)$ и отрицательна на интервале $(-1;0)$. Рассмотрим интервал $(1;+\infty)$. На нём $x>0$, а $1-x^2<0$, поэтому $g(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ отрицательна на этом интервале. В силу симметрии графика функции $g(x)$ относительно начала координат на интервале $(-\infty;-1)$ данная функция положительная.

7) Для уточнения расположения графика функции $g(x)$ можно найти несколько так называемых контрольных точек: например, при $x=\pm\dfrac{1}{2}$ $y=\pm\dfrac{2}{3}$, и, следовательно, точки $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$, $A'\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$ принадлежат графику функции $g(x)$; а при $x=\pm 2$ $y=\mp\dfrac{2}{3}$, а значит, график функции проходит через точки $B\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$, $B'\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$. Ниже приведён гра-

фик исследуемой функции.



Упражнения.

1. Исследовать функции и построить эскизы их графиков:

а) $y=\dfrac{x^3+1}{x}$; **б)** $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; **в)** $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Тема 7. Линейные и модульные преобразования графиков

Под линейными преобразованиями графиков будем понимать построение графиков функций $f(x+a)$, $f(x)+a$ $\left(a\in\mathbb{R}^*,\ (x+a)\in D_f\right)$ и $f(ax)$, $af(x)$ $\left(a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\},\ ax\in D_f\right)$, если известен график функции $f(x)$.

График функции $f(x+a)$ $\left(a\in\mathbb{R}^*,\ (x+a)\in D_f\right)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Ox на $|a|$, причём влево, если $a>0$, и вправо, если $a<0$ (иначе говоря, из абсцисс всех точек графика функции $f(x)$ надо вычесть a).

График функции $f(x)+a$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Oy на $|a|$, причём вверх, если

$a>0$, и вниз, если $a<0$ (иначе говоря, к ординатам всех точек графика функции $f(x)$ надо прибавить a).

График функции $f(ax)$ $\left(a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\},\, ax\in D_f\right)$ получается из графика функции $f(x)$ «деформацией» последнего вдоль оси Ox относительно начала координат, а именно: растяжением в $\frac{1}{|a|}$ раз, если $|a|<1$, и сжатием в $|a|$ раз, если $|a|>1$ (иначе говоря, абсциссы всех точек графика функции $f(x)$ надо разделить на $|a|$). Причём, если $a<0$, то нужно осуществить последующую симметрию полученного графика относительно оси Oy.

График функции $af(x)$ $\left(a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}\right)$ получается из графика $f(x)$ «деформацией» вдоль оси Oy относительно начала координат, а именно: растяжением в $|a|$ раз, если $|a|>1$, и сжатием в $\frac{1}{|a|}$ раз, если $|a|<1$ (иначе говоря, ординаты всех точек графика функции $f(x)$ надо умножить на $|a|$). Причём, если $a<0$, то нужно осуществить последующую симметрию полученного графика относительно оси Ox.

Под модульными преобразованиями графиков будем понимать построение кривых, заданных уравнениями $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$, $|y|=f(x)$ $\left(|x|\in D_f\right)$, если известен график функции $f(x)$.

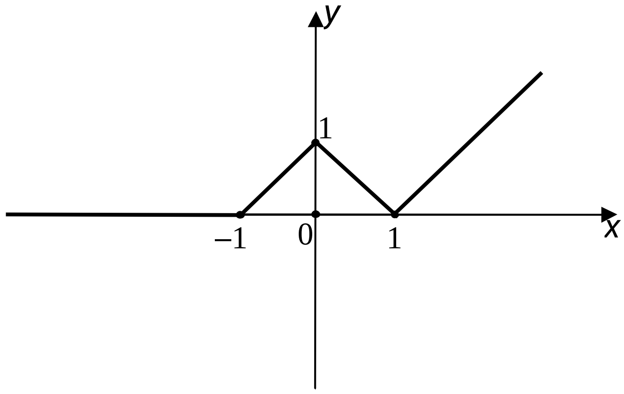
При построении графика функции $f(|x|)$ «правая» часть графика функции $f(x)$ (т.е. часть графика $f(x)$, лежащая в правой полуплоскости $\{x\geq 0\}$) сохраняется. «Левая» же часть графика функции $f(x)$ (т.е. часть графика $f(x)$, лежащая в левой полуплоскости $\{x\leq 0\}$) заменяется на часть, получаемую симметрией относительно оси Oy «правой» части графика $f(x)$.

При построении графика функции $|f(x)|$ «верхняя» часть графика функции $f(x)$ (т.е. часть графика $f(x)$, лежащая в верхней полуплоскости $\{y\geq 0\}$) сохраняется. «Нижняя» же часть графика функции $f(x)$ (т.е. часть графика $f(x)$, лежащая в нижней полуплоскости $\{y\leq 0\}$) симметрично отражается относительно оси Ox (таким образом, в нижней полуплоскости точек графика функции $|f(x)|$ нет).

При построении кривой $|y|=f(x)$ «верхняя» часть графика функции $f(x)$ сохраняется, а «нижняя» его часть заменяется на часть, получаемую симметрией относительно оси Ox «верхней» части графика $f(x)$ (отметим, что кривая $|y| = f(x)$ почти всегда не является графиком функции).

Задачи.

1. Функция $f(x)$ задана графически:

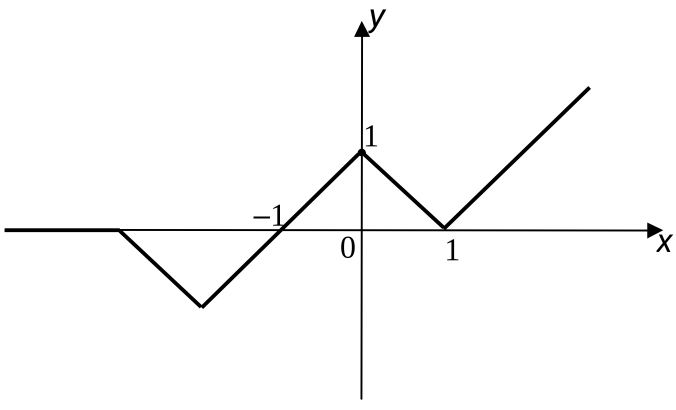


На одном чертеже построить графики функций **а)** $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$; **б)** $f(x)-1$; на другом – графики функций **в)** $f\left(\frac{x}{3}\right)$; **г)** $-2f(x)$. (М.:1 = 2 см)[1].

2. С помощью линейных преобразований построить график дробно-линейной функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. (М.: 1 = 1 см).

3. Построить график функции $-3f(1-2x)$, если $f(x)$ – функция из задачи 1.

4. Функция $f(x)$ задана графически:



Используя модульные преобразования, построить кривые:
а) $y = f(|x|)$; **б)** $y = |f(x)|$; **в)** $|y| = f(x)$ (М.: 1 = 2 см).

[1] Запись (М.: 1 = 2 см) означает рекомендуемый масштаб на обеих осях системы координат для чертежа.

5. Используя линейные и модульные преобразования графиков, построить кривые: **а)** $y = x^2 - 2|x| - 3$ (М.: 1 = 1 см); **б)** $|y| = \big|1 - |x|\big|$ (М.: 1 = 1,5 см); **в)** $y = \left|(x+1)^3 + 1\right|$ (М.: 1 = 1 см).

Упражнения.

1. Используя линейные преобразования графиков, построить графики функций:

а) $y = 2e^{x-1} - 1$ (М.: 1 = 1 см);

б) $y = \dfrac{3}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (М.: 1 = 1 см).

2. Используя модульные преобразования графиков, построить кривые:

а) $y = \left|x^2 + x - 2\right|$; **б)** $|y| = \operatorname{arctg} x$ (М.: 1 = 1 см).

3. Используя линейные и модульные преобразования графиков, построить кривые:

а) $y = -3\left|\ln\dfrac{|x|+1}{2}\right|$ (М.: 1 = 1 см);

б) $y = \left|\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1-x}{2}\right|$ (М.: 1 = 2 см).

Тема 8. Сложная функция. «Сложение» и «умножение» графиков

Определение. *Сложной функцией*, составленной из функций $f(x)$ и $g(x)$ (*композицией* функций $f(x)$ и $g(x)$), называется функция $(g \circ f)(x)$ такая, что

1) $D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f : f(x) \in D_g\right\}$, 2) $\forall x \in D_{g \circ f} \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

При этом функция $f(x)$ называется *внутренней*, а $g(x)$ *внешней* функцией композиции $(g \circ f)(x)$.

Метод сложения графиков функций. Для построения графика функции $f(x) = (f_1 + f_2)(x)$, при условии $D_{f_1} = D_{f_2}$, складывают ординаты точек графиков G_{f_1} и G_{f_2}, имеющие одну и ту же абсциссу.

Метод умножения графиков функций. Для построения графика функции $f(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$, при условии $D_{f_1} = D_{f_2}$, перемножают ординаты точек графиков G_{f_1} и G_{f_2}, имеющие одну и ту же абсциссу.

Задачи.

1. Найти 1) сложную функцию $(g \circ f)(x)$, затем 2) сложную функцию $(f \circ g)(x)$, если $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = x^2$. На одном чертеже изобразить графики функций $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$ (М.: 1 = 1,5 см).

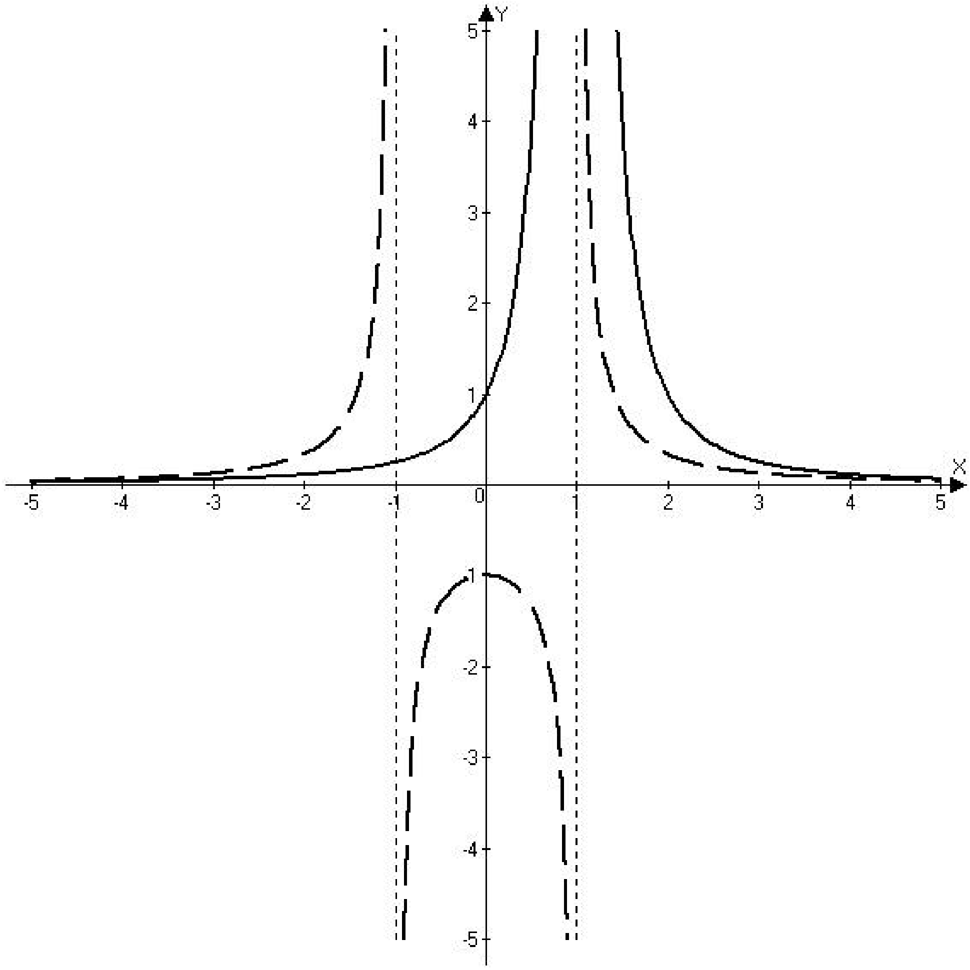
Решение:

1) Для функции $(g\circ f)(x)$ имеем $D_{g\circ f}=\{x\in D_f:\ f(x)\in D_g\}=$ $=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:\ \dfrac{1}{x-1}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}=D_f$ (заметим, кстати, что если областью определения внешней функции является $\mathbb{R}$, то область определения композиции функций совпадает с областью определения внутренней функции). Далее $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ для любого $x\in D_{g\circ f}$.

2) Для функции $(f\circ g)(x)$ имеем $D_{f\circ g}=\{x\in D_g:\ g(x)\in D_f\}=$ $=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2\neq 1\}=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Далее $(f\circ g)(x)=f(g(x))=$ $=\dfrac{1}{x^2-1}$ для любого $x\in D_{f\circ g}$

Исследуем полученные функции $h_1(x)=(g\circ f)(x)$ и $h_2(x)=(f\circ g)(x)$:

$h_1(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$	$h_2(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$
1) $D_{h_1}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $R_{h_1}=\mathbb{R}_+^*$;	1) $D_{h_1}=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; $R_{h_2}=\mathbb{R}\setminus(-1;0]$;
2) не обладает чётностью-нечётностью;	2) чётная;
3) не периодическая;	3) не периодическая;
4) $h_1(x)$ строго убывает на $(1;+\infty)$ и строго возрастает на $(-\infty;1)$;	4) $h_2(x)$ строго убывает на $[0;1)$ и на $(1;+\infty)$;
5) $h_1(0)=1$; $0\notin R_{h_1}$; $h_1(x)>0$;	5) $h_2(0)=-1$; $0\notin R_{h_2}$; $h_2(x)>0$ на $(1;+\infty)$ и $h_2(x)<0$ на $[0;1)$;
6) если $x\to1$, то $h_1(x)\to+\infty$, и поэтому прямая $x=1$ – вертикальная асимптота G_{h_1}; если $x\to\pm\infty$, то $h_1(x)\to0$ и, следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота G_{h_1}.	6) если $x\to\pm1$, то $h_2(x)\to\infty$, и поэтому прямые $x=\pm1$ – вертикальные асимптоты G_{h_2}; если $x\to\pm\infty$, то $h_2(x)\to0$ и, следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота G_{h_2}.
(график G_{h_1} на чертеже выполнен сплошной линией)	(график G_{h_2} на чертеже выполнен широким пунктиром)



2. Определить две сложные функции $g(x)=(f\circ f)(x)$ и $h(x)=(f\circ f\circ f)(x)$, если $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. Используя модульные преобразования графиков, построить графики функций $y=g(|x|)$, $y=|h(x)|$ (М.: 1 = 1,5 см).

3. Методом «сложения графиков» построить эскизы графиков следующих функций: **а)** $y=x+\operatorname{arctg}x$ (М.: 1 = 1 см); **б)** $y=x+\dfrac{1}{x}$ (М.: 1 = 2 см).

4. Методом «умножения графиков» построить эскиз графика функции $y=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ (М.: 1 = 2 см).

5. Методом «сложения графиков» построить графики гиперболических функций $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (М.: 1 = 1,5 см).

Упражнения.

1. Определить 1) сложную функцию $(g\circ f)(x)$, затем 2) сложную функцию $(f\circ g)(x)$, если $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$. На одном чертеже изобразить графики функций $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$.

2. Определить сложную функцию $g(x)=(f \circ f)(x)$, если $f(x)=\dfrac{1-x}{2x-1}$. Используя модульные преобразования графиков, построить графики функций $y=\left|g(|x|)\right|$.

3. Методом «сложения графиков» построить эскизы графиков следующих функций: **а)** $y=1+x+e^x$; **б)** $y=x+\sin x$.

4. Методом «умножения графиков» построить эскизы графиков следующих функций: **а)** $y=x\cos x$; **б)** $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

Тема 9. Обратная функция и её свойства

Определение. Функцией, *обратной* к функции $f(x)$ называется функция, обозначаемая $f^{-1}(x)$, такая, что для любого $x \in D_f$ $f^{-1}(f(x))=x$ и для любого $x \in D_{f^{-1}}$ $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$. Функция, имеющая обратную функцию, называется *обратимой*.

Имеют место следующие утверждения, связанные с обратной функцией:

1) функция $f(x)$ обратима тогда и только тогда, когда она инъективна (*критерий обратимости*), причём в случае обратимости функции $f(x)$ обратная функция $f^{-1}(x)$ единственна;

2) если функция $f(x)$ строго монотонна, то она обратима (*достаточное условие обратимости*), при этом обратная функция $f^{-1}(x)$ тоже строго монотонна с тем же смыслом монотонности.

3) если функция $f(x)$ обратима и $f^{-1}(x)$ – обратная к ней, то $D_{f^{-1}}=R_f$, $R_{f^{-1}}=D_f$;

4) если $f(x)$ обратима, то и $f^{-1}(x)$ – обратима, причём $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x)=f(x)$;

5) графики обратимой функции $f(x)$ и обратной к ней функции $f^{-1}(x)$ симметричны относительно главной координатной биссектрисы (прямой $y=x$).

Чтобы найти обратную к обратимой функции $f(x)$, надо из равенства $y=f(x)$ выразить x через y и затем переобозначить y на x и наоборот.

<u>Задачи.</u>

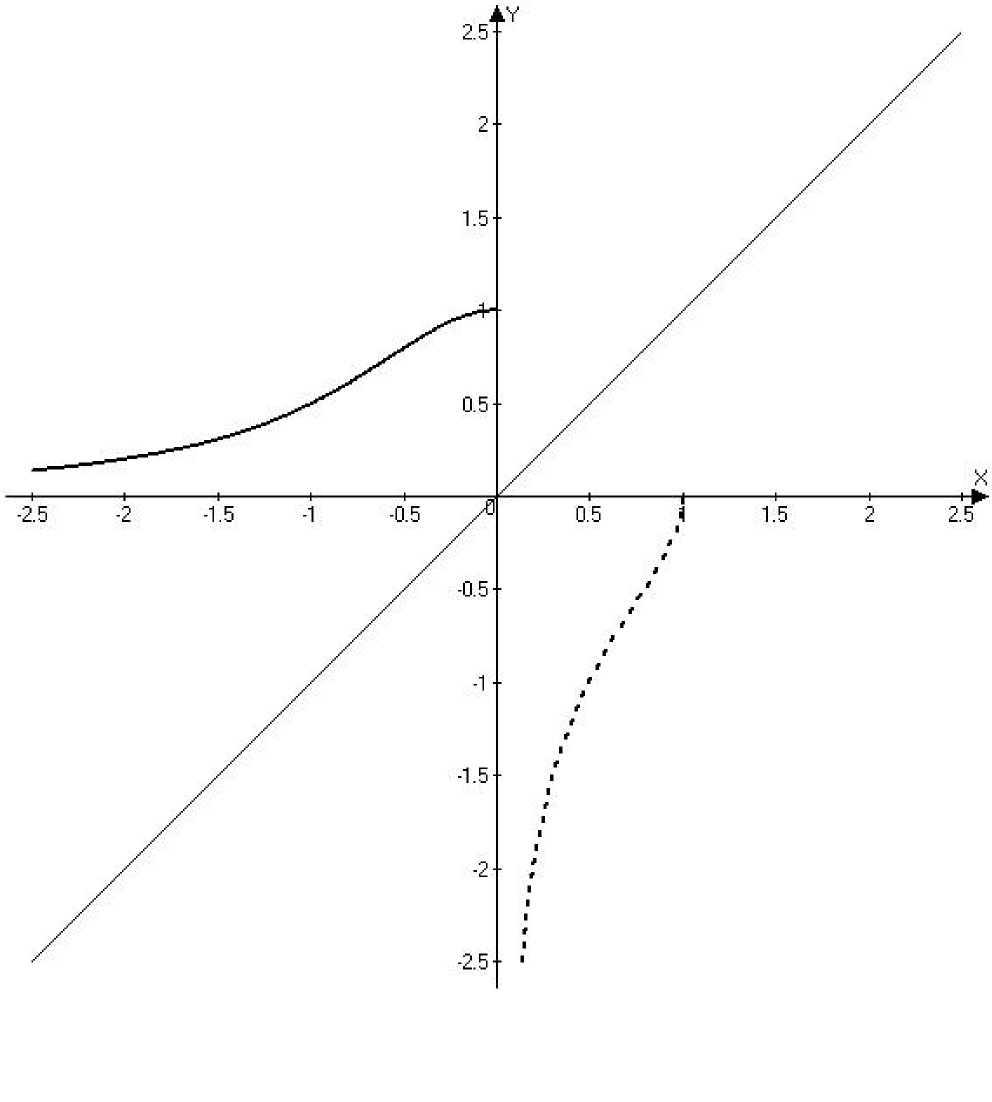
1. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ обратима на $\mathbb{R}_-=(-\infty;0]$. Найти обратную функцию. На одном чертеже построить графики обеих функций (М.: 1 = 2 см).

Решение: Известно, что функция $f(x)$ обратима тогда и только тогда, когда она инъективна, т.е. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_- \ \left(x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)\right)$, или что то же, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_- \ \left(f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2\right)$.

Имеем $\dfrac{1}{x_1^2+1} = \dfrac{1}{x_2^2+1} \Leftrightarrow x_1^2+1 = x_2^2+1 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \left(x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-\right)$.

Итак, функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ обратима на $\mathbb{R}_-$. Найдём обратную к ней функцию: $y = \dfrac{1}{x^2+1} \ \Leftrightarrow \ x^2 = \dfrac{1}{y} - 1 \ \Leftrightarrow \ x = -\sqrt{\dfrac{1-y}{y}} \ (x \leq 0)$.

Таким образом, $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. Ниже приведены графики функций $f(x)$ (сплошной линией) и $f^{-1}(x)$ (пунктиром).



2. Пусть $f(x)=\{x\}$ ($\{x\}$ – дробная часть x). Почему эта функция не обратима? Будут ли обратимы сужения этой функции на следующие множества:

$$\textbf{а) } E_1=[-1;0]; \quad \textbf{б) } E_2=[1;2); \quad \textbf{в) } E_3=\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2};2\right).$$

В случае положительного ответа получить аналитические выражения для обратной функции; на одном чертеже изобразить график обратимого сужения и обратной функции (М.: 1 = 2 см).

3. Доказать, что невырожденная дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ обратима. Показать, что обратная функция $f^{-1}(x)$ также является невырожденной дробно-линейной функцией. При каком условии обратная функция совпадает с прямой (исходной)?

4. Найти обратные к функциям $f_1(x)=\dfrac{x+7}{3x-1}$ и $f_2(x)=\dfrac{2x}{2x-1}$. На одном чертеже построить графики прямой и обратной функций (М.: 1 = 2 см).

5. Исследовать обратимость функций: **а)** $f(x)=x^2$; **б)** $g(x)=\sin x$; **в)** $h(x)=\operatorname{tg}x$. Найти их обратимые сужения этих функций на максимальные множества инъективности из их областей определения.

6. Доказать тождество: $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ $(x\in[-1;1])$.

7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие одну и ту же область определения $(D_f=D_g)$, обратимы. Что можно сказать об обратимости их суммы $(f+g)(x)$? Привести соответствующие примеры.

Упражнения.

1. Доказать обратимость функции $f(x)=x+[x]$; найти обратную к ней функцию; на одном чертеже изобразить графики прямой $(f(x))$ и обратной $(f^{-1}(x))$ функций (М.: 1 = 1 см).

2. Исследовать обратимость функций:

$$\textbf{а) } f(x)=2x-x^2; \quad \textbf{б) } g(x)=\cos x; \quad \textbf{в) } h(x)=\operatorname{ctg}x.$$

Найти обратимые сужения этих функций на максимальные множества инъективности из их областей определения.

3. Доказать тождество: $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$.

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие одну и ту же область определения $(D_f=D_g)$, обратимы. Что можно сказать об обратимости их произведения $(fg)(x)$? Привести соответствующие примеры.

5. Пусть функция $f(x)$ не является монотонной. Может ли она иметь обратную функцию? Рассмотреть примеры:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[0;1)\\ 3-x, & x\in[1;2)\end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ -x, & x\in\mathbb{I}\end{cases}.$$

6. При каких условиях обратимая функция $f(x)$ совпадает с обратной к ней функцией $f^{-1}(x)$?

Тема 10. Числовая последовательность

Определение. *Числовой последовательностью* называется функция, областью определения которой служит множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Последовательность $f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ часто записывают в виде бесконечной цепочки её значений (членов), выписывая их в порядке следования натуральных чисел (номеров членов): $\{a_1,a_2,a_3...\}$ или более кратко – $\{a_n\}$. При этом a_n называют *n-ым (или общим) членом последовательности* $\{a_n\}$.

Последовательность обычно задают либо формулой общего члена, с помощью которой можно вычислить каждый член этой последовательности по его номеру, либо так называемой *рекуррентной* формулой, позволяющей вычислять члены последовательности по известным предыдущим членам.

Например, *арифметическая прогрессия* – последовательность $\{a_n\}$ – определяется рекуррентной формулой $a_{n+1}=a_n+d$ $(n\in\mathbb{N})$, где первый член a_1 и *разность прогрессии* d – заданные числа. А геометрическая прогрессия – последовательность $\{a_n\}$ – определяется рекуррентной формулой $a_{n+1}=a_n\cdot q$ $(n\in\mathbb{N})$, где первый член a_1 и *знаменатель прогрессии* q – заданные числа. Нетрудно найти формулы общих членов арифметической и геометрической прогрессий: $a_n=a_1+d(n-1)$ $(n\in\mathbb{N})$ и $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$ соответственно. Легко получить и формулы S_n сумм n первых членов обеих прогрессий: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ (для арифметической прогрессии), $S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_n\cdot q}{1-q}=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}, & q\neq1\\ na_1, & q=1\end{cases}$ (для геометрической прогрессии).

Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ обладает некоторым свойством *финально*, если существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что указанным свойством обладают все члены данной последовательности с номерами большими, чем n_0:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(n > n_0 \Rightarrow a_n \in E\right),$$

где E – совокупность членов последовательности $\{a_n\}$, которые обладают указанным свойством. Иначе говоря, этим свойством обладают все члены последовательности $\{a_n\}$ *с достаточно большими номерами*.

Задачи.

1. Найти какие-либо две аналитические формулы общего члена последовательности $\{a_n\}$, если:

а) $\{a_n\} = \{-2; 0; 2; 4; ...\}$.

(**Ответ:** $a_n = 2n-4$, $a_n = (n-2)\left(2+(n-1)(n-3)(n-4)\right)$).

б) $\{a_n\} = \{-1; 3; -9; 27; ...\}$.

(**Ответ:** $a_n = (-1)^n 3^{n-1}$, $a_n = (-1)^n 3^{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$).

в) $\{a_n\} = \{1; 4; 27; 256; ...\}$.

(**Ответ:** $a_n = n^n$, $a_n = n^n + (n-1)(n-2)^2(n-3)^3(n-4)^4$).

2. Вычислить сумму S_n первых n членов последовательности $\{n^2\}$.

(**Ответ:** $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

3. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta$ $\left(n \in \mathbb{N}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right)$. Найти аналитическую формулу n-го члена (выразить a_n через a_1, α, β, n).

Решение: Заметим сразу, что если $\alpha = 1$, то мы имеем арифметическую прогрессию с разностью β, а если $\beta = 0$ то мы имеем геометрическую прогрессию со знаменателем α. Согласно условию $a_{k+1} = \alpha \cdot a_k + \beta$ и, следовательно, $a_k = \alpha \cdot a_{k-1} + \beta$. Вычитая из первого равенства второе, будем иметь $a_{k+1} - a_k = \alpha\left(a_k - a_{k-1}\right)$ и продолжая $a_{k+1} - a_k = \alpha\left(a_k - a_{k-1}\right) = \alpha^2\left(a_{k-1} - a_{k-2}\right) = \ldots = \alpha^{k-1}\left(a_2 - a_1\right)$, т.е. $a_{k+1} - a_k = \alpha^{k-1}\left(a_2 - a_1\right)$ $\left(k = \overline{1, n-1}\right)$. Придавая в последней формуле параметру k значения от 1 до $n-1$ и складывая полученные равенства, будем иметь $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1} - a_k\right) = \left(a_2 - a_1\right)\sum\limits_{k=1}^{n-1}\alpha^{k-1}$.

Используем формулу суммы первых $(n-1)$ членов геометрической прогрессии и равенство $a_2 = \alpha \cdot a_1 + \beta$: $a_n - a_1 = \begin{cases} \left(a_1(\alpha-1) + \beta\right) \cdot \dfrac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \beta \cdot (n-1), & \alpha = 1 \end{cases}$.

Следовательно, $a_n = \begin{cases} \alpha^{n-1} \cdot a_1 + \dfrac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \cdot \beta, & \alpha \neq 1 \\ a_1 + (n-1) \cdot \beta, & \alpha = 1 \end{cases}.$

4. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то и числа $A = \dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $B = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $C = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

5. Исследовать монотонность последовательности $\{a_n\}$, если:

а) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}$. (**Ответ:** последовательность строго возрастает).

б) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$. (**Ответ:** последовательность строго убывает).

в) $\{a_n\} = \{n^2 - 6n + 5\}$. (**Ответ:** последовательность финально (начиная с 3-го члена) строго возрастает).

6. Найти наибольший член последовательности $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+12}\right\}$.

Решение: Исследуем монотонность последовательности $\{a_n\}$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+12} - \frac{n}{n^2+12} = \frac{(n+1)(n^2+12) - n(n^2+2n+13)}{(n^2+2n+13)(n^2+12)} =$$

$$= \frac{n^3+12n+n^2+12-n^3-2n^2-13n}{(n^2+2n+13)(n^2+12)} = -\frac{n^2+n-12}{(n^2+2n+13)(n^2+12)}.$$

Следовательно, $a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 12 > 0 \Leftrightarrow n > 3 \quad (n \in \mathbb{N})$, т.е. последовательность финально строго убывает.

Итак, при $n > 3$, т.е. для любого номера, начиная с 4, выполняется неравенство $a_{n+1} < a_n$, а так как до 3-го номера члены последовательности, очевидно, возрастают, то наибольшим членом последовательности $\{a_n\}$ является или a_2, или a_3, или a_4. Сравним эти члены: $a_2 = \dfrac{1}{8}$, $a_3 = \dfrac{1}{7}$, $a_4 = \dfrac{1}{7}$. Таким образом, наибольшими членами данной последовательности являются её 3-ий и 4-ый члены, равные $\dfrac{1}{7}$.

Упражнения.

1. Найти какую-либо аналитическую формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, если: **а)** $\{a_n\}=\{-1;2;5;8;...\}$; **б)** $\{a_n\}=\{1;-2;4;-8;...\}$; **в)** $\{a_n\}=\{1;-\sqrt[3]{2};\sqrt[4]{3};-\sqrt[5]{4};...\}$; **г)** $\{a_n\}=\{2;3;5;7;...\}$; **д)** $\{a_n\}=\{a;b;c;...\}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ (это так называемая *последовательность Фибоначчи*, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих). Найти аналитическую формулу n-го члена (выразить a_n через a_1, a_2, n).

3. Исследовать монотонность последовательности $\{a_n\}$, если:

а) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n+2}{3n-1}\right\}$; **б)** $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n^2-2}{2n+1}\right\}$; **в)** $\{a_n\}=\left\{4n-n^2-3\right\}$.

4. Найти наименьший член последовательности $\{a_n\}=\left\{n^2-6n+5\right\}$.

Тема 11. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся номер n_ε, такой, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$. При этом говорят, что последовательность *сходится* и пишут: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ и $\{a_n\}\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$, или короче $\lim a_n=a$ и $\{a_n\}\to a$.

Если последовательность имеет пределом ноль (сходится к нулю), то она называется *бесконечно малой*.

Если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер n_ε, такой, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n|>\varepsilon$, то последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*. При этом пишут: $\lim a_n=\infty$ и $\{a_n\}\to\infty$.

Теорема 1 (единственность предела). *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то её предел единственен.*

Теорема 2 (ограниченность сходящейся последовательности). *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

- *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то последовательности $\{a_n+b_n\}$,* $\{a_n-b_n\}$ и $\{a_n\cdot b_n\}$ *сходятся, при этом*

$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n,\ \lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n,$$
$$\lim(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n.$$

Отсюда в частности следует:

- *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то для любого действи-*

тельного числа b *последовательность* $\{b \cdot a_n\}$ *тоже сходится, при этом* $\lim(b \cdot a_n) = \, = b \cdot \lim a_n$.

- *Если* $\{a_n\} \to a$ *и* $\{b_n\} \to b$, *причём* $b,\ b_n \neq 0\ (n \in \mathbb{N})$, *то последовательность* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *сходится, при этом* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \left(= \frac{a}{b} \right)$.

Теорема 3 (предельный переход в неравенстве). *Пусть последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся соответственно к числам* a *и* b. *Если для любого номера* n *выполняется* $a_n \leq b_n$, *то* $a \leq b$.

Следует учесть, что, даже если неравенство, связывающее общие члены последовательностей, строгое, то их пределы могут оказаться равными.

Теорема 4 (предел промежуточной последовательности). *Пусть даны три последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *такие, что для любого номера* n *выполняется* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся к одному и тому же пределу, то и промежуточная последовательность* $\{c_n\}$ *сходится, причём к тому же пределу, что и последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$.

В ходе решения задач 5-7 и 12 будет получена «цепочка» бесконечно больших последовательностей (стремящихся к $+\infty$), расположенных по скорости их роста, т.е. предел отношения каждой последовательности этой «цепочки» к любой последующей есть бесконечно малая последовательность: $\{\log_a n\}(a>1)$, $\{n^\alpha\}(\alpha \geq 1)$, $\{a^n\}(a>1)$, $\{n!\}$, $\{n^n\}$, $\{(n!)^2\}$.

Задачи.

1. Доказать, используя определение, что последовательность $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ бесконечно малая.

Решение: То, что последовательность $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ – бесконечно малая или что $\lim \frac{1}{n^2+1} = 0$ по определению означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N} \left(n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2+1} \right| < \varepsilon \right).$$

«Огрубим» итоговое неравенство: $\left|\frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Поэтому неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ влечёт $\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \varepsilon$. А условие $\frac{1}{n} < \varepsilon$ равносильно $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Следовательно, в качестве искомого номера n_ε можно взять, например, натуральное число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

Упражнение. Заполните таблицу:

$\varepsilon\ (>0)$	1	$\frac{1}{\pi}$	e	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{1000}$
$n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$					
$\forall n\left(>n_\varepsilon\right)$					
$\frac{1}{n^2+1}$					
истинность неравенства $\frac{1}{n^2+1}<\varepsilon$					

2. Доказать по определению, что $\lim\frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$. Начиная с какого номера, наверняка выполняется неравенство $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<0,01$?

3. Доказать по определению, что $\lim\frac{1}{n!}=0$.

4. Доказать, что $\lim 2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=1$.

Решение:

$a_n=2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$. Имеем $\left(\sqrt{n^2}=\right)n<\sqrt{n^2+1}<$ $<n+1\left(=\sqrt{n^2+2n+1}\right)$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$. Отсюда $2n<\sqrt{n^2+1}+n<2n+1$, следовательно, и потому $\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{1}{2n}$. Поэтому $\frac{2n}{2n+1}<\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}<$ $<\frac{2n}{2n}(=1)$, а т.к. $\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{2+\frac{1}{n}}\to 1$, то по теореме 4 $\lim a_n=1$.

5. Доказать, что $\lim\frac{n}{2^n}=0$, $\lim\frac{n^\alpha}{a^n}=0$ $\left(\alpha>0,\ a>1\right)$.

6. Доказать, что $\lim\frac{2^n}{n!}=0$, $\lim\frac{a^n}{n!}=0$ $\left(a>1\right)$.

7. Доказать, что $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim \dfrac{\log_a n}{n^{\alpha}} = 0$ $(a > 1,\ \alpha > 0)$.

8. Доказать, что $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

9. Доказать, что $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

10. Доказать, построив отрицание определения предела, что $\lim \dfrac{1}{n+1} \neq 2$.

Решение: Строим отрицание определения предела:

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\quad \left(n_0 \geq n\ \wedge \left| \frac{1}{n_0+1} - 2 \right| \geq \varepsilon \right).$$

Имеем для любого $n \in \mathbb{N}$ $\left| \dfrac{1}{n+1} - 2 \right| = 2 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} > \dfrac{2n+1}{2n+1} = 1$, поэтому в качестве $\varepsilon > 0$ можно, например, взять $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, т.к. для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\left| \dfrac{1}{n+1} - 2 \right| > 1 > \dfrac{1}{2} = \varepsilon$.

11. Доказать, что $\lim \left(1 + \dfrac{\alpha}{n} \right)^n = e^{\alpha}$.

12. Доказать, что **а)** $\lim \dfrac{n\ \ !}{n^n} = 0$; **б)** $\lim \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

***Решение*:** Требуется доказать, что $\lim \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$. Имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ $= \dfrac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{((n+1)!)^2 n^n} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n} \right)^n = \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n < \dfrac{e}{n+1} < 1$ для любого натурального $n \geq 2$, т.е. $a_{n+1} < a_n$, и, следовательно, $\{a_n\}$ строго убывает, начиная со второго члена.

Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ очевидно $0 < \dfrac{n^n}{(n!)^2}$, т.е. данная последовательность ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim \dfrac{n^n}{(n!)^2}$. Обозначим его, например, буквой a, т.е. $\lim \dfrac{n^n}{(n!)^2} = a$. Тогда, очевидно, имеем: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} = a_n \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n$, и поэтому

$$a=\lim a_{n+1}=\lim a_n\cdot\lim\frac{1}{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=a\cdot 0\cdot e=0, \text{ т.е. } a=0.$$

Упражнения.

1. Показать, что последовательность $\left\{\dfrac{3n-5}{9n+4}\right\}$ сходится к $\dfrac{1}{3}$. Найти число членов последовательности, лежащих вне интервала $\left(\dfrac{1}{3}-0{,}001,\ \dfrac{1}{3}+0{,}001\right)$.

2. Доказать, построив отрицание определения предела последовательности, что $\lim\dfrac{n^2-2}{2n^2-9}\neq 0$.

3. Доказать, используя определение, что

$$\textbf{а) } \lim\frac{2n+3}{8n+7}=\frac{1}{4};\quad \textbf{б) } \lim\frac{5n+6}{n-1}=5;\quad \textbf{в) } \lim\frac{n^2}{n^4+1}=0.$$

4. Доказать, что $\lim\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$. **Указание.** Воспользоваться двойным неравенством: $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<n^2\cdot\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ $\left(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right)$, которое может быть доказано методом математической индукции.

Тема 12. Вычисление пределов последовательностей

При вычислении пределов последовательностей часто придерживаются следующих рекомендаций:

- Предел рациональной последовательности с равными степенями числителя и знаменателя равен отношению старших коэффициентов числителя и знаменателя. Это сразу становится очевидным, если числитель и знаменатель общего члена последовательности разделить на старшую степень n. Например, $\lim\dfrac{n^3+1}{2n^3+n}\overset{:n^3}{=}\lim\dfrac{1+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}}=\lim\dfrac{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}{2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$. Это же правило сохраняется и для последовательностей, общих член которых есть алгебраическое выражение, содержащее дробную старшую степень n.
- Если числитель и (или) знаменатель общего члена последовательности содержат показательные выражения с основаниями большими 1, то следует разделить числитель и знаменатель на показательное выражение с большим основанием. При этом надо учитывать, что показательная последовательность $\left\{q^n\right\}$ такая, что $|q|<1$, сходится к нулю. Например,

$\lim\dfrac{3^{n+1}+1}{7^n-4}\overset{:7^n}{=}\lim\dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{7^n}+\dfrac{1}{7^n}}{1-\dfrac{4}{7^n}}= =\lim\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}{1-4\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}=0$. Кроме того, не следует забывать, что произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность и помнить «цепочку» сравнения роста бесконечно больших последовательностей. Например, $\lim\dfrac{\cos n^2-2n^3}{n^2\sqrt{9n^2-1}+\ln n}\overset{:n^3}{=}\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^3}\cdot\cos n^2-2}{\sqrt{9-\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{\ln n}{n^3}}=-\dfrac{2}{3}$.

- Если общий член последовательности содержит нефиксированное (переменное) число слагаемых, то предварительно нужно преобразовать общий член последовательности, используя известные алгебраические формулы. Например, $\lim\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\cdot\lim\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=2$.

<u>Задачи.</u>

Вычислить пределы последовательностей:

1. $\lim\dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{3n^2}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{3}$). **2.** $\lim\left(\dfrac{n^2+1}{2n+1}-\dfrac{3n^2+1}{6n+1}\right)$. (**Ответ:** $-\dfrac{1}{6}$).

3. $\lim\left(\dfrac{3n+1}{5n-1}\right)^2$. (**Ответ:** $\dfrac{9}{25}$).

4. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}+2}{\sqrt{n}+3}$. (**Ответ:** 0).

5. $\lim\dfrac{2n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$. (**Ответ:** 2).

6. $\lim\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}+\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}\right)$. (**Ответ:** $\dfrac{3}{2}$).

Указание. Воспользоваться свойством предела суммы.

7. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$). **Указание.** Умножить и разделить общий член последовательности на сопряжённое выражение: $\sqrt{n^2+n+1}+n$.

8. $\lim\dfrac{5^n-2^n}{5^{n+1}+2^{n+1}}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{5}$).

9. $\lim\dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$. (**Ответ:** 0).

10. $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$, $n\ge 2$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$). **Указание.** Воспользоваться формулой суммы первых n натуральных чисел (см. тему 2).

11. $\lim\dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{5n^3+n+1}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{15}$). **Указание.** Использовать формулу суммы квадратов n первых натуральных чисел (см. тему 2).

12. $\lim\left(1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. (**Ответ:** $\frac{3}{5}$). **Указание.** Воспользоваться формулой суммы n членов геометрической прогрессии.

13. $\lim\left(\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{2n^3+1}-\frac{n}{8}\right)$. (**Ответ:** $\frac{1}{4}$). **Указание.** Воспользоваться формулой суммы кубов n первых натуральных чисел (см. тему 2).

14. $\lim\frac{\pi^{\frac{n}{2}}-2^n}{2^{n+2}+\sin n}$. (**Ответ:** $-\frac{1}{4}$). **Указание.** Разделить числитель и знаменатель на степень с большим основанием.

***Упражнения*.**

Вычислить пределы последовательностей:

1. $\lim\frac{4n^2-4n+3}{4+3n+2n^2}$ (**Ответ:** 2). **2.** $\lim\left(\frac{n^2+n}{3n^2+1}\right)^3$ (**Ответ:** $\frac{1}{27}$).

3. $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)^2}$ (**Ответ:** $\frac{1}{2}$). **4.** $\lim\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}+\frac{1-5n^2}{5n+1}\right)$ (**Ответ:** $\frac{1}{5}$).

5. $\lim\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ (**Ответ:** $\frac{1}{3}$). **6.** $\lim\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ (**Ответ:** $+\infty$).

7. $\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (**Ответ:** $\frac{1}{2}$). **8.** $\lim\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-2n^2}}$ (**Ответ:** 1).

9. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$ (**Ответ:** 1). **10.** $\lim n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$ (**Ответ:** $-\infty$).

11. $\lim\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$ (**Ответ:** 0). **12.** $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$ (**Ответ:** $+\infty$).

13. $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ (**Ответ:** $\frac{1}{3}$). **14.** $\lim\frac{\cos n-e^{n-1}}{e^n+\pi^{\frac{n}{2}}}$ (**Ответ:** $-\frac{1}{e}$).

15. $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$ (**Ответ:** $+\infty$). **16.** $\lim\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(2n+1)^2}-\frac{n}{12}\right)$ (**Ответ:** $\frac{1}{24}$).

Тема 13. Предел функции. Теоремы о пределах функций

Определение 1. Точка $a\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$ называется *предельной точкой* (непустого) числового множества $E\subset\mathbb{R}$, если любая проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a содержит точку множества E. Совокупность всех предельных точек множества E обозначается E' (и называется *производным множеством*).

Определение 2. Пусть точка a $\left(a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}\right)$ является предельной точкой области определения функции $f(x)$, $\left(a \in D_f'\right)$. Говорят, что функция $f(x)$ *стремится к* b $\left(b \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}\right)$ при x, стремящемся к a, или что *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* a, *равен* b, и пишут $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

$$\forall U(b)\ \exists \dot{U}(a):\ \forall x \left(x \in D_f \cap \dot{U}(a) \Rightarrow f(x) \in U(b) \right).$$

Так как для a и b существует по четыре возможности: быть числом; $+\infty$; $-\infty$; ∞, то последнее условие, записанное на «языке окрестностей», можно записать на «языке неравенств» в 16 различных вариантах. Например, если $a, b \in \mathbb{R}$, то имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in D_f \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \right);$$

если $a = -\infty$, а $b = \infty$ то имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall x \in D_f \left(x < -\delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon \right).$$

Если $a,\ b \in \mathbb{R}$, то равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ геометрически означает, что для любой горизонтальной «ε-полосы», окаймляющей прямую $y = b$, существует вертикальная «δ-полоса», окаймляющая прямую $x = a$, такая, что все точки графика G_f функции $f(x)$, попавшие в вертикальную «δ-полосу», кроме, быть может, точки с абсциссой $x = a$, попадают в горизонтальную «ε-полосу», т.е. лежат в прямоугольном «окошке», вырезаемом полосами друг в друге.

Упражнение. Записать общее определение предела на «языке неравенств» в остальных 14 случаях, в каждом из них выявить геометрический смысл и проиллюстрировать графически.

Задачи.

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Решение: Ясно, что область определения функции $f(x) = 3x - 2$ есть $\mathbb{R}$, следовательно, $D_f' = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, т.е. $a = 2$ является предельной точкой D_f. Далее, по определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x - 2) - 4| < \varepsilon \right).$$

Очевидно, имеем: $\left|(3x-2)-4\right| = \left|3x-6\right| = 3\left|x-2\right| < \varepsilon$. Следовательно, в качестве искомого δ можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ (или меньше).

2. Доказать по определению, что $f(x)=\sqrt{x+4}\xrightarrow[x\to-3]{}1$, т.е. $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x+4}=1$.

Заполнить таблицу:

$\varepsilon(>0)$	1	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$0{,}1$	π
$\delta(>0)$				
$\forall x \in D_f \cap \dot{U}_\delta(-3)$				
$\left\|f(x)-1\right\|$				
истинность неравенства $\left\|f(x)-1\right\|<\varepsilon$				

3. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{x+3}=-\dfrac{1}{2}$.

4. Доказать, построив отрицание определения, что $\lim\limits_{x\to1}2^x \neq 0$.

5. Доказать, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке числовой прямой.

6. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$.

7. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$. Можно ли утверждать, что предел равен $+\infty$, $-\infty$?

8. Доказать, что функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ не имеют предела при $x\to+\infty$.

Упражнения:

1. Доказать, используя определение предела функции:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x-2}=\infty$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{2x+3}=-\dfrac{1}{2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x-1}=5$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{1-x}=+\infty$; **д)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-1}{1-2x}=-2$; **е)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$.

2. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to1}[x]$, $\lim\limits_{x\to0}\{x\}$.

Тема 14. Вычисление пределов функции. Первый замечательный предел

Арифметические свойства пределов

1⁰. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}c\ (\in\mathbb{R})$ и $a\in D'_{f+g}$, то $(f+g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}b+c$.

2⁰. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}c\ (\in\mathbb{R})$ и $a\in D'_{fg}$, то $(fg)(x)\xrightarrow[x\to a]{}bc$.

Из свойств **1⁰** и **2⁰** следует: если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}c\ (\in\mathbb{R})$, то для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ при $a\in D'_{\alpha f+\beta g}$ $(\alpha f+\beta g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha b+\beta c$.

3⁰. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$ и $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}c\left(\in\mathbb{R}^*\right)$ и $a\in D'_{f/g}$, то $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\frac{b}{c}$.

Добавления к арифметическим свойствам пределов

1.1. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty(+\infty)[-\infty]$ и $a\in D'_{f+g}$, то $(f+g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty(+\infty)[-\infty]$.

1.2. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\pm\infty$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\pm\infty$ и $a\in D'_{f+g}$, то $(f+g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\pm\infty$.

2.1. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\left(\in\left(\overline{\mathbb{R}}\cup\infty\right)\setminus\{0\}\right)$, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$ и $a\in D'_{fg}$, то $(fg)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

3.1. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\ (\in\mathbb{R})$ и $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$ и $a\in D'_{f/g}$, то $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$.

3.2. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$ и $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}c\left(\in\mathbb{R}^*\right)$ и $a\in D'_{f/g}$, то $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

3.3. Если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b\left(\in\left(\overline{\mathbb{R}}\cup\infty\right)\setminus\{0\}\right)$ и $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$ и $a\in D'_{f/g}$, то $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

Теорема 1 (предел сложной функции). *Пусть* $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b$, $g(y)\xrightarrow[y\to b]{}c$, $a\in D'_{g\circ f}$ *и существует проколотая окрестность* $\dot{U}(a)$ *такая, что для любого* $x\in D_f\cap\dot{U}(a)$ *функция* $f(x)\neq b$. *Тогда* $(g\circ f)(x)\xrightarrow[x\to a]{}c$.

Теорема 2 (предельный переход в неравенстве). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a *и всюду там* $f(x) \le g(x)$. *Если* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, *то* $b \le c$.

Теорема 3 (предел промежуточной функции). *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$ *и* $h(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности точки* a *и всюду в ней связаны неравенством* $f(x) \le h(x) \le g(x)$. *Если* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, *то и* $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Задачи.

Вычислить пределы:

1. 1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$, 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$, 3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$, 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Решение: Имеем $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ и $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$, следовательно, $D'_f = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, т.е. точки $1; 2; -1; \infty \in D'_f$.

1) Функция $f(x)$ – рациональная и $x = 1 \in D_f$, поэтому $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = f(1) = \dfrac{3}{2}$ (предел рациональной функции в любой точке её области определения равен значению этой функции в данной точке).

2) Так как $x = 2 \notin D_f$, то нельзя воспользоваться предыдущим методом. Но в определении предела функции участвует проколотая окрестность точки, поэтому $x \ne 2$, т.е. $x - 2 \ne 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{4}{3}$ (заметим, что $x = 2 \in D_g$, где $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$).

3) Имеем $x = -1 \notin D_f$. Нельзя воспользоваться теоремой о пределе частного, так как знаменатель функции стремится к нулю. Но так как числитель функции стремится к числу, отличному от нуля (к какому и почему?), то по добавлению к теореме о пределе частного $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = \infty$.

4) Так как степени числителя и знаменателя функции $f(x)$ равны 2, то разделив числитель и знаменатель на x^2, получим $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} =$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1, \text{ т.к. } \frac{4}{x^2},\frac{1}{x},\frac{2}{x^2}\to 0 \text{ при } x\to\infty.$$

Таким образом, при равенстве степеней числителя и знаменателя рациональной функции, если $x\to\infty(\pm\infty)$, то предел такой функции равен отношению старших коэффициентов её числителя и знаменателя.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$. (**Ответ:** $\frac{1}{4}$). **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^2-3\right)^{10}\cdot(3x+12)^{30}}{(2x-1)^{50}}$. (**Ответ:** $\frac{3^{30}}{2^{40}}$). **4.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$. (**Ответ:** $-\frac{3}{80}$). **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$. (**Ответ:** $3{,}5$). **6.** $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. (**Ответ:** $2{,}4$). **7.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$. (**Ответ:** $\frac{1}{2}$). **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$. (**Ответ:** 10). **9.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to a\left(\in\mathbb{R}^*\right)}\frac{\sin 2x}{3x}$. (**Ответы:** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 0; 3) $\frac{\sin 2a}{3a}$). **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. (**Ответ:** 4). **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. (**Ответ:** 1). **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$. (**Ответ:** 1).

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$. (**Ответ:** $\sqrt{2}$). **14.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. (**Ответ:** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$).

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$. (**Ответ:** $\frac{1}{n}$).

Упражнения.

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$; **7.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Тема 15. Вычисление пределов с использованием табличных» пределов

«Табличные» пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (1-ый замечательный предел).

Обобщение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{x}=\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$.

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (2-ой замечательный предел).

Обобщение: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$. *Обобщение*: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{\alpha}{x}}=e^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. *Обобщение*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+\alpha x)}{x}=\dfrac{\alpha}{\ln a} \quad \left(a\in\mathbb{R}_+^{*}\setminus\{1\},\ \alpha\in\mathbb{R}\right)$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$. *Обобщение*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a \quad \left(a\in\mathbb{R}_+^{*}\setminus\{1\}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$. *Обобщение*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}=\dfrac{\alpha}{n} \quad \left(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\alpha\in\mathbb{R}\right)$.

Для раскрытия «показательно-степенных» неопределённостей видов $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(0^{0}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$ можно использовать следующие равенства, сводящие эти неопределённости к неопределённости $\left(0\cdot\infty\right)$:

1) $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}\left(v(x)\cdot\ln u(x)\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}v(x)\left(u(x)-1\right)}$,

где функции $u(x)$ и $v(x)$ стремятся к соответствующим значениям при $x\to a$.

Задачи.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x+4}$.

Решение: $D_f=(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$, следовательно, точка $-\infty\in D_f'$. Данный предел является неопределённостью вида $\left(1^{\infty}\right)$. Его можно вычислить, сводя ко 2-ому замечательному пределу следующим образом:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4}=\lim_{x\to -\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3},$$

или по формуле 2):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4}=\exp\left(\lim_{x\to-\infty}(x+4)\cdot\frac{3}{x}\right)=\exp\left(3\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{x}\right)=e^3,$$

или непосредственно используя обобщение табличного предела 2).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$. (**Ответ:** e^2).

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)^{2x}$. (**Ответ:** 0).

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{2x}$. (**Ответ:** $+\infty$).

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. (**Ответ:** e).

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$. (**Ответ:** e^{-1}).

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{x}$. (**Ответ:** 2).

8. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}$. (**Ответ:** $\frac{3}{e}$).

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(1+2x^2\right)}$. (**Ответ:** $\frac{1}{2}$).

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$. (**Ответ:** $-\frac{1}{2}$).

11. $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$. (**Ответ:** e^{-2}).

Упражнения.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{\ln\left(1+e^{4x}\right)}$;

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

Тема 16. Сравнение бесконечно малых. Вычисление пределов с помощью сравнения бесконечно малых

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ $\left(a\in D'_{f/g}\right)$.

1) Если существует конечный не равный нулю предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка* при $x\to a$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентные* бесконечно малые при $x\to a$. Этот факт будем записывать кратко так $f(x)\underset{a}{\sim}g(x)$.

2) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что функция $f(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка*, чем функция $g(x)$ при $x\to a$. Этот факт будем записывать кратко так $f(x)\underset{a}{=}o(g(x))$.

3) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ и, следовательно, функция $g(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка*, чем функция $f(x)$, т.е. $g(x)\underset{a}{=}o(f(x))$.

4) Если не существует предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ несравнимы при $x\to a$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$:

1. $\sin x\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\sin\alpha x\underset{0}{\sim}\alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$);

2. $\operatorname{tg}x\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\operatorname{tg}\alpha x\underset{0}{\sim}\alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$);

3. $\arcsin x\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\arcsin\alpha x\underset{0}{\sim}\alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$);

4. $\operatorname{arctg}x\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\operatorname{arctg}\alpha x\underset{0}{\sim}\alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$);

5. $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\log_a(1+\alpha x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\alpha x}{\ln a}$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\ \alpha\in\mathbb{R}\right)$);

6. $\left(e^x-1\right)\underset{0}{\sim}x$ (*обобщение*: $\left(a^x-1\right)\underset{0}{\sim}x\ln a$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$);

7. $(1-\cos x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$ (*обобщение*: $(1-\cos\alpha x)\underset{0}{\sim}\dfrac{(\alpha x)^2}{2}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$);

8. $\sqrt[n]{1+x}-1\underset{0}{\sim}\dfrac{x}{n}$ $\left(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right)$ (*обобщение*: $\sqrt[n]{1+\alpha x}-1\underset{0}{\sim}\dfrac{\alpha x}{n}$ $\left(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ \alpha\in\mathbb{R}\right)$).

Теорема 1 (принцип замены эквивалентных бесконечно малых). *Пусть функции $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),\delta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ и $\alpha(x)\underset{a}{\sim}\gamma(x)$ и $\beta(x)\underset{a}{\sim}\delta(x)$. Если $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\xrightarrow[x\to a]{}b$, то $\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)}\xrightarrow[x\to a]{}b$.*

Теорема 2 (принцип отбрасывания бесконечно малых). *Если функции $\alpha(x),\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ и $\beta(x)\underset{a}{=}o(\alpha(x))$, то $(\alpha+\beta)(x)\underset{a}{\sim}\alpha(x)$.*

Задачи.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$.

Решение: Имеем $f(x)=\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$ и $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi k}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$, следовательно, точка $0\in D_f'$. Так как $(\cos 3x-1)\underset{0}{\sim}\left(-\dfrac{(3x)^2}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}2x\underset{0}{\sim}2x$, то, используя принцип замены бесконечно малых, легко получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{9x^2}{2}}{2x^2}=-\dfrac{9}{4}$.

Вычислить пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$). **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{n!}$). **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg}x^2}$. (**Ответ:** $-\dfrac{1}{2}$). **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\ln\dfrac{x}{2}\right)$. (**Ответ:** 2).

6. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)+xe^x}$.

Решение: Область определения функции $f(x)$, стоящей под знаком предела, задаётся системой неравенств $\begin{cases}1+3x+\sin^2 x>0\\ \ln(1+3x+\sin^2 x)\neq -xe^x\end{cases}$. Можно показать, что точка $0\in D_f'$. Нетрудно видеть, что последнее слагаемое в числителе функции $f(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем два других, а эти два слагаемых не эквивалентны одной и той же бесконечно малой с противоположными знаками[1]. Поэтому по принципу отбрасывания бесконечно малых, последним слагаемым числителя можно пренебречь.

Заметим, что оставшиеся слагаемые в числителе $f(x)$ есть бесконечно малые одного порядка $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2\operatorname{arctg}3x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\right)$. Оба слагаемых

---

[1] Например, для суммы $\arcsin\dfrac{x}{2}+\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ первое слагаемое эквивалентно $\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$, т.е. $\arcsin\dfrac{x}{2}\underset{0}{\sim}\dfrac{x}{2}$, а второе – $\left(-\dfrac{x}{2}\right)$, т.е. $\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\underset{0}{\sim}\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

знаменателя функции $f(x)$ также есть бесконечно малые одного порядка. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\left(3x+\sin^2 x\right)\right)}{xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$, т.к. $\left(3x+\sin^2 x\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$, $e^x\xrightarrow[x\to 0]{}1$ и $\sin^2 x\underset{0}{=}o(3x)$.

Таким образом, $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)+xe^x}$. Далее, обозначая для краткости $\sin 2x=a$, $2\operatorname{arctg}3x=b$, $\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)=c$, $xe^x=d$, при $a,b,c,d\neq 0$ имеем $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c+d}+\dfrac{b}{c+d}=\dfrac{1}{\frac{c}{a}+\frac{d}{a}}+\dfrac{1}{\frac{c}{b}+\frac{d}{b}}$. Поэтому

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)+xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a+b}{c+d}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{c}{a}+\frac{d}{a}}+\frac{1}{\frac{c}{b}+\frac{d}{b}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)}{\sin 2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{\sin 2x}}+$$

$$+\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)}{2\operatorname{arctg}3x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{2\operatorname{arctg}3x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}+$$

$$+\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{6x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{6x}}=\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=2.$$

Отметим, что при вычислении четырёх полученных в конце пределов использовались и принцип эквивалентных бесконечно малых, и принцип отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка.

Упражнения.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos\left(3^x-\cos x\right)\right)-\sqrt[5]{\cos x}+1}{x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-(\cos x)^{\sin x}}{\sin^2 x+\operatorname{arctg}x\left(e^x-1\right)}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^\alpha}$ $(\alpha\leq 4)$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x^2}$.

Семестровое задание по технике вычисления пределов

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-2^x}{5+2^{x+1}}$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+3x^3}}+2^{-x^2}\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$;

10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3x}$;

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$;

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$;

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos x-1}{\cos x-\sin x}$;

17. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;

18. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$;

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$;

20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$;

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$;

22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-\cos x}{\sin^2x}$;

23. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2x}-\operatorname{ctg}^2x\right)$;

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$;

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg}2x}$;

26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$;

27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\mathrm{tg}^3 x - 3\mathrm{tg}\, x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ctg}(a+2x) - 2\mathrm{ctg}(a+x) + \mathrm{ctg}\, a}{x^2}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\, x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$;

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+n}{x+m}\right)^x$;

32. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$;

33. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

35. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\mathrm{ctg}\, x}$;

36. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\mathrm{tg}\, x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$;

38. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{ctg}\, x}$;

39. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln \dfrac{2a+x}{a+x}$;

40. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\cos 2x}$;

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} \quad (a>0,\ b>0)$;

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$;

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^x)}$;

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

50. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

Тема 17. Односторонние пределы. Предел по множеству

Определение 1. Пусть действительное число $\delta > 0$. *Правой* (*левой*) *полуокрестностью* точки $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $\left(a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\right)$ радиуса δ называется интервал $U_\delta^+(a)=(a;a+\delta)$ $\left(U_\delta^-(a)=(a-\delta;a)\right)$, если $x\in\mathbb{R}$ и интервал $U_\delta^+(-\infty)=(-\infty;\delta)$ $\left(U_\delta^-(+\infty)=(\delta;+\infty)\right)$, если $a=-\infty$ $(a=+\infty)$[1)].

Определение 2. Пусть в каждой правой (левой) полуокрестности точки a имеются точки из области определения функции $f(x)$. Число b называется *правосторонним* (*левосторонним*) *пределом* функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\ \left(x\in D_f\cap U_\delta^+(a)\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(b)\right)$$

$$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\ \left(x\in D_f\cap U_\delta^-(a)\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(b)\right)\right).$$

Этот факт будем обозначать следующим образом: $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=b$ $\left(\lim\limits_{x\to a-}f(x)=b\right)$.

Теорема 1 (связь односторонних пределов с пределом)**.** *Пусть в каждой правой и левой полуокрестности точки a имеются точки из области определения функции $f(x)$. Предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ существует и равен $b\in\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, и оба они равны b.*

Определение 3. Пусть E – подмножество области определения функции $f(x)$ и $a\left(\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}\right)$– предельная точка этого множества. *Пределом функции $f(x)$ в точке a по множеству E* называется предел сужения этой функции на данное множество в указанной точке, если он существует.

Предел функции $f(x)$ в точке a по множеству E обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}}f(x)$. Итак, согласно определению $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(f|_E\right)(x)$.

Теорема 2 (связь предела по множествам с пределом). *Предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ $\left(b\in\overline{\mathbb{R}}\right)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in E}}f(x)$ по любому множеству $E\subset D_f$, для которого точка a – предельная, и он равен b.*

<u>Задачи.</u>

1. Доказать, используя определение, что $\lim\limits_{x\to 0-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Су-

---

[1)] Очевидно, левой полуокрестности точки $-\infty$, как и правой полуокрестности точки $+\infty$ не существует.

ществует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$? Изобразить график функции $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ вблизи точки $x=0$ (М.: 1 = 1 см).

Решение: Имеем $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $D_f=\mathbb{R}^*$, и следовательно, точка $x=0$ есть как лево-, так и правосторонняя[2)] предельная точка D_f. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}}=0$. Согласно определению левостороннего предела требуется показать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathbb{R}^*\left(-\delta<x<0\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}<\varepsilon\right)$.

Рассмотрим неравенство заключения импликации: $2^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$.

1) Если $\varepsilon\ge 1$, это неравенство при $x<0$ всегда выполняется. Действительно, $\frac{1}{x}<0$, а значит, $2^{\frac{1}{x}}<1$. Таким образом, в этом случае $\delta(>0)$ – любое (например, $\delta=1$).

2) Если $0<\varepsilon<1$, то имеем

$$2^{\frac{1}{x}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{x}<\log_2\varepsilon\overset{x<0}{\Leftrightarrow}x\log_2\varepsilon<1\overset{\log_2\varepsilon<0}{\Leftrightarrow}x>\frac{1}{\log_2\varepsilon}(<0).$$

Таким образом, в этом случае в качестве искомого δ можно взять $\delta=-\frac{1}{\log_2\varepsilon}(>0)$ (или меньше). Итак, окончательно $\delta=\begin{cases}1, & \varepsilon\ge 1\\ -\frac{1}{\log_2\varepsilon}, & 0<\varepsilon<1\end{cases}$.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$. В силу определения правостороннего предела требуется показать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathbb{R}^*\left(0<x<+\delta\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}>\varepsilon\right)$.

Рассмотрим неравенство заключения импликации: $2^{\frac{1}{x}}>\varepsilon$.

1) Если $0<\varepsilon\le 1$, это неравенство при $x>0$ всегда выполняется. Действительно, $\frac{1}{x}>0$, а значит, $2^{\frac{1}{x}}>1$. Таким образом, в этом случае $\delta(>0)$ – любое (например, $\delta=1$).

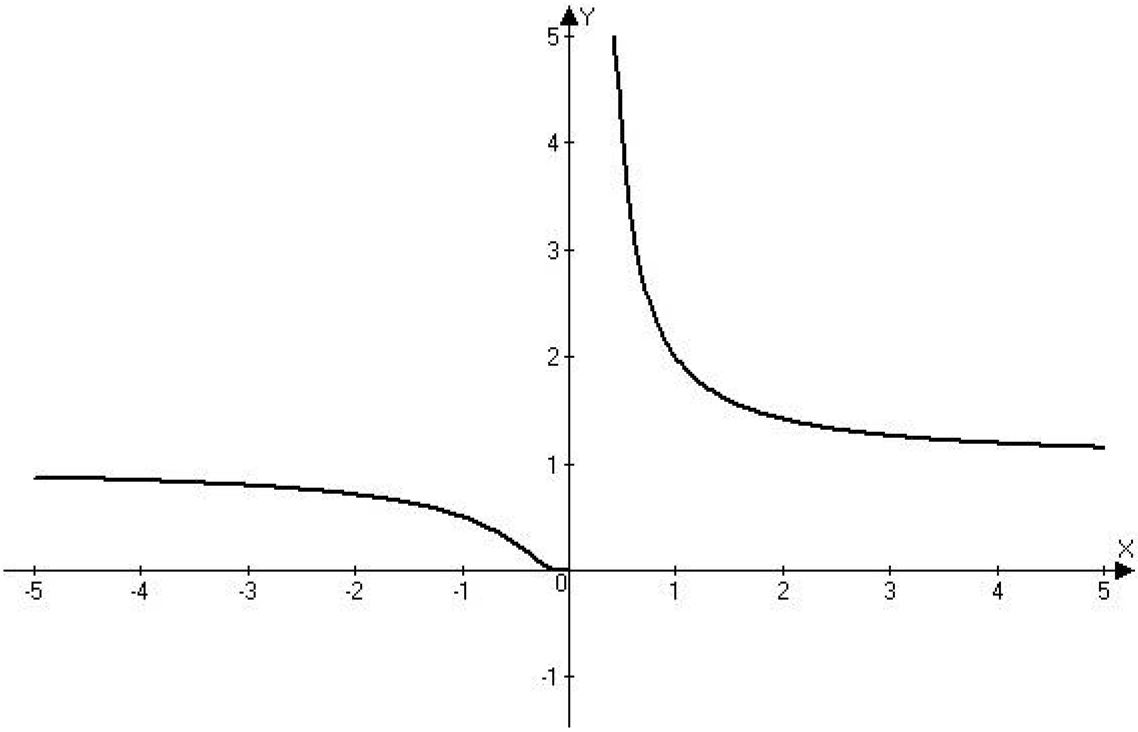
[2)] То есть любая как левая, так и правая полуокрестности этой точки содержат точку из D_f.

2) Если $\varepsilon > 1$, то имеем

$$2^{\frac{1}{x}} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \log_2 \varepsilon \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \log_2 \varepsilon < 1 \overset{\log_2 \varepsilon > 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{1}{\log_2 \varepsilon} (> 0).$$

Таким образом, в этом случае в качестве искомого δ можно взять $\delta = \frac{1}{\log_2 \varepsilon}$ (или меньше). Итак, окончательно, $\delta = \begin{cases} 1, & 0 < \varepsilon \le 1 \\ \frac{1}{\log_2 \varepsilon}, & \varepsilon > 1 \end{cases}$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0-} 2^{\frac{1}{x}} \ne \lim\limits_{x \to 0+} 2^{\frac{1}{x}}$, то по теореме не существует предела $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$. График функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ представлен ниже.



2. Существует ли предел $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$? Ответ обосновать. (**Ответ:** не существует).

3. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{1}{2 - 3^{\frac{1}{x}}}$. (**Ответ:** $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{2 - 3^{\frac{1}{x}}} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{2 - 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$).

б) $\lim\limits_{x \to 1\pm} \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$; начертить график функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$ (М: 1 = 1см). (**Ответ:** $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{x^2 - 1}{|x-1|} = 2$, $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{|x-1|} = -2$).

в) $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{x}{\sqrt{\sin^2 x}}$. (**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{\sqrt{\sin^2 x}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{\sqrt{\sin^2 x}}=-1$).

г) $\lim\limits_{x\to -1\pm}\dfrac{|x+1|}{x+1}$; начертить график функции $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$ (М: 1 = 1см). (**Ответ:** $\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{|x+1|}{x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to -1-}\dfrac{|x+1|}{x+1}=-1$).

д) $\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{2\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)-1}$.

(**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{2\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{2\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)-1}=-\infty$).

4. Найти пределы $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E_-(E_+)}}\sin x$ по множествам $E_-=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ и $E_+=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Существует ли $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$? (**Ответ:** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E_-}}\sin x=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E_+}}\sin x=1$, предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует).

5. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}D(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{I}}}D(x)$, где $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$ – функция Дирихле. Существует ли пределы $\lim\limits_{x\to 0}D(x)$, $\lim\limits_{x\to 0\pm}D(x)$? (**Ответ:** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}D(x)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{I}}}D(x)=0$, пределы $\lim\limits_{x\to 0}D(x)$, $\lim\limits_{x\to 0\pm}D(x)$ не существуют).

Упражнения.

1. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1\pm}\left(8+\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{x-1}}}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0\pm}\cos\dfrac{\pi}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3\pm}\dfrac{x}{(x-3)^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to \pi\pm}\dfrac{\cos x}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x^2-3x}$.

2. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, если

а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$; **б)** $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2-3x, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$.

Можно ли найти такую точку $a \in \mathbb{R}$, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

Тема 18. Непрерывность функции

Если x_0 – изолированная точка области определения функции, то эта функция считается *непрерывной в этой точке*.

Следующие три определения (1, 1', 1'') являются равносильными.

Определение 1 (на языке «предела»). Пусть x_0 – неизолированная точка области определения функции $f(x)$, т.е. $x_0 \in D_f \cap D'_f$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, равный $f(x_0)$.

Определение 1' (на языке «неравенств»). Пусть x_0 – неизолированная точка области определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D_f \ \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

Определение 1'' (на языке «приращений»). Пусть x_0 – неизолированная точка области определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\Delta f \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на непустом множестве* $E \subset D_f$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если она непрерывна на D_f.

Известно, что сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных в точке функций есть функции, непрерывные в этой точке (в случае частного знаменатель не должен обращаться в ноль в рассматриваемой точке).

Геометрически непрерывность функции, заданной на промежутке, означает, что её график может быть начерчен «единым росчерком» (т.е. не отрывая карандаша от листа бумаги).

Задачи.

1. Используя определение непрерывности на языке «неравенств», доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x+4}$ в точке $x_0 = 5$.

Решение: Так как $D_f = [-4; +\infty)$, то $D'_f = [-4; +\infty] \left(= [-4; +\infty) \cup \{+\infty\} \right)$ и, следовательно, $D_f \cap D'_f = [-4; +\infty)$, т.е. $x_0 (= 5) \in D_f \cap D'_f$. Имеем $f(5) = \sqrt{5+4} = 3$. Непрерывность функции $f(x)$ в точке $x_0 = 5$ по определению означает: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \left(\begin{cases} x \geq -4 \\ |x-5| < \delta \end{cases} \Rightarrow \left| \sqrt{x+4} - 3 \right| < \varepsilon \right)$. Покажем, что это так. Имеем $\left|\sqrt{x+4}-3\right|=\frac{|x+4-9|}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3}<|x-5|$, т.к. $\sqrt{x+4}+3>1$. Следовательно, если $|x-5|<\varepsilon$, то $\left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon$. Таким образом, в качестве искомого $\delta(>0)$ можно взять, например, $\delta=\varepsilon$.

2. Используя определение непрерывности на языке «приращений», доказать непрерывность функции $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Возьмём произвольную точку $x_0\in D_f$ и покажем, что функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Обозначим $\Delta x=x-x_0$ $(x\neq x_0)$, отсюда $x=x_0+\Delta x$. Тогда $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-$

$$-f(x_0)=\frac{x_0+\Delta x}{(x_0+\Delta x)-1}-\frac{x_0}{x_0-1}=\frac{x_0^2-x_0+x_0\Delta x-\Delta x-x_0^2-x_0\Delta x+x_0}{(x_0-1)(x_0+\Delta x-1)}=$$

$=\frac{-\Delta x}{(x_0-1)(x_0+\Delta x-1)}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$ (знаменатель последней дроби при $\Delta x\to 0$ стремится к числу $(x_0-1)^2\neq 0$). Итак, $\Delta f\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$, а это по определению непрерывности и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0\in D_f$. В силу произвольности выбора точки $x_0\in D_f$ заключаем, что данная функция непрерывна в каждой точке своей области определения, а значит, является непрерывной функцией.

3. Доказать непрерывность функции $f(x)=\sin(2x-3)$.

4. Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{sgn}x$ не является непрерывной в точке $x_0=0$.

Указание. Показать, что односторонние пределы функции $f(x)=\operatorname{sgn}x$ в точке $x_0=0$ не равны, т.е. не существует предела $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$.

5. Построить график функции $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<-1\\ -3, & x=-1\\ -x^2, & -1<x<1\\ -x, & 1<x<3\\ 0, & x=3\\ \operatorname{tg}x, & 3<x<4\\ (x-4)^3, & x\geq 4\end{cases}$. Используя построенный график,

а) указать несколько точек непрерывности этой функции (ответ обосновать);
б) найти все точки, в которых данная функция не является непрерывной (ответ обосновать); чему равны односторонние пределы функции в этих точках?

6. Пусть две функции определены в некоторой окрестности точки x_0. Что можно сказать о непрерывности их суммы и их произведения, если
а) дна функция непрерывна в точке x_0, а другая функция не является непрерывной в этой точке;
б) обе функции не являются непрерывными в точке x_0? Привести соответствующие примеры. Почему специально не рассматривать вопрос о непрерывности разности и частного этих функций?

Упражнения.

1. Исследовать на непрерывность и изобразить график следующих функций:

а) $f(x)=|x|$; **б)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ a\ (a\in\mathbb{R}), & x=2\end{cases}$; **в)** $f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$; **д)** $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a(a\in\mathbb{R}), & x=0\end{cases}$; **е)** $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

2. Пусть $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geq 0\end{cases}$. При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

3. Доопределить функцию $f(x)$ в точке $x=0$ так, чтобы данная функция стала непрерывной в этой точке:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; **б)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

в) $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; **г)** $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Построить пример функции, определённой на всей числовой прямой и не являющейся непрерывной ни в одной её точке, но при этом квадрат данной функции есть функция непрерывная.

Тема 19. Непрерывность сложной и обратной функций

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $(g\circ f)(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Следствие. *Если существует конечный предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *а функция* $g(y)$ *непрерывна в точке* $y_0=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $x_0\in D'_{g\circ f}$, *то в точке* x_0 *существует конечный предел сложной функции* $(g\circ f)(x)$, *при этом* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$ (предельный переход под знаком непрерывной функции).

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *определена, строго монотонна и непрерывна на промежутке* $I=\langle a;b\rangle$ $(a,b\in\overline{\mathbb{R}})$, *то обратная функция* $f^{-1}(y)$ *непрерывна на промежутке* $J=f(I)$ *с концами* $A=\begin{cases} f(a), & a\in I\\ f(a+), & a\notin I\end{cases}$ *и*

$$B=\begin{cases} f(b), & b\in I\\ f(b-), & b\notin I\end{cases}.$$

<u>Задачи.</u>

1. Доказать непрерывность следующих функций:

а) $f(x)=\dfrac{\cos x^3}{x^4-4x^2}$; **б)** $g(x)=\sin\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$.

2. Пусть $f(x)=\left(x^2+1\right)\operatorname{sgn} x$. Показать, что: **1)** $f(x)$ не является непрерывной; **2)** $f(x)$ обратима и найти обратную к ней $f^{-1}(x)$; **3)** обратная функция $f^{-1}(x)$ непрерывна. На одном чертеже изобразить графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ (М.: 1 = 2 см).

3. Привести пример непрерывной обратимой функции, обратная к которой не является непрерывной.

4. Показать, что уравнение $2^y+3^y=x$ определяет единственную непрерывную функцию y от x, заданную на интервале $\mathbb{R}_+^*=(0;+\infty)$.

Решение: Очевидно, что функция $f(y)=2^y+3^y$ определена, строго возрастает и непрерывна на всей числовой прямой $D_f=\mathbb{R}$ (как сумма таковых). При этом $\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)=+\infty$. Поэтому её множеством значений R_f является интервал $\mathbb{R}_+^*=(0;+\infty)$. Следовательно, на интервале $\mathbb{R}_+^*$ существует единственная строго возрастающая и непрерывная функция, обратная к функции $f(y)$: $f^{-1}(x)$, определяемая указанным уравнением ($D_{f^{-1}}=\mathbb{R}_+^*$, $R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$).

5. Исследовать на непрерывность сложные функции $(f\circ g)(x)$ и $(g\circ f)(x)$, если: **1)** $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=1+x^2$; **2)** $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x+1)$.

6. Доказать, что функция $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$ имеет непрерывную обратную функцию, определённую на всей числовой прямой.

7. Доказать, что сужения функции $f(x)=\lg^2 x$ на промежутки $(0;1]$ и $[1;+\infty)$ имеют непрерывные обратные функции. Каковы области определения этих обратных функций?

Упражнения.

1. Доказать непрерывность следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-2x^3}$; **б)** $g(x)=xe^{\frac{\sin x}{x}}$.

2. Пусть $f(x)=e^{|x|}\operatorname{sgn}x$. Показать, что: **1)** $f(x)$ не является непрерывной; **2)** $f(x)$ обратима и найти обратную к ней $f^{-1}(x)$; **3)** обратная функция $f^{-1}(x)$ непрерывна.

3. Доказать, что сужение функции $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}x+\dfrac{1}{1+x^2}$ на $\mathbb{R}_+$, имеет непрерывную обратную функцию. Найти её область определения.

4. Доказать, что функция $f(x)=x^4-2x^2+4$ не обратима. Найти максимальные промежутки, сужения на которые этой функции обратимы. Для каждого такого сужения найти обратную функцию и доказать, что она непрерывна.

5. Исследовать на непрерывность сложные функции $(f\circ g)(x)$ и $(g\circ f)(x)$, если; **1)** $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=x^3-x$; **2)** $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $g(x)=1+x-[x]$.

6. Пусть функция $f(x)$ определена и возрастает на отрезке $[a;b]$, непрерывна на нём всюду кроме точки $x_0\in(a;b)$. А функция $g(x)$ определена и монотонна на отрезке $[f(a);f(b)]$.

а) Привести пример таких функций $f(x)$ и $g(x)$, что сложная функция $(g\circ f)(x)$ непрерывна в точке x_0.

б) Показать, что если функция $g(x)$ строго монотонная, то сложная функция $(g\circ f)(x)$ не является непрерывной в точке x_0.

Тема 20. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва

Напомним, что правой (левой) полуокрестностью точки $x_0\in\mathbb{R}$ называется всякий ограниченный интервал, имеющий x_0 своим левым (правым) концом.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой (левой) полуокрестности точки $x_0\in D_f$. Говорят, что *функция* $f(x)$ *непре-*

рывна в точке x_0 *справа (слева)*, если существует правосторонний (левосторонний) предел данной функции в этой точке, равный $f(x_0)$. То есть

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) \wedge \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \ \left(\exists \lim_{x \to x_0-} f(x) \wedge \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)\right).$$

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и слева, и справа.*

Пусть функция $f(x)$ *определена только в некоторой правой (левой) полуокрестности точки* $x_0 \in D_f$. *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке справа (слева).*

Определение 2. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если функция определена в этой точке и не является в ней непрерывной.

Будем говорить, что точка x_0 – *двусторонняя точка* области определения функции $f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности этой точки. Если функция $f(x)$ определена только в правой (левой) полуокрестности $x_0 \in D_f$, то такую точку будем называть *односторонней точкой* области определения этой функции.

Классификация двухсторонних точек разрыва функции

Род точки разрыва	**Название точки разрыва функции**	**Существование односторонних пределов функции**	**Равенство односторонних пределов функции**	**Существование предела функции**	**Равенство предела и значения функции**	**Пример функции $f(x)$, имеющей двухстороннюю точку разрыва $x_0 = 0$**
I род	Точка *устранимого разрыва* (устранимая точка разрыва)	Существуют и конечны	Равны	Существует и конечен	Не равны	$f(x) = \lvert\mathrm{sgn}\, x\rvert$
	Точка *скачка*	Существуют и конечны	Не равны	Не существует	---	$f(x) = \mathrm{sgn}\, x$
II род	Точка *бесконечного раз-*	Существуют и хотя бы	Не равны	Не существует	---	$f(x) = \begin{cases} \ln x, x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}$

	рыва	один бесконечен	Равны (оба бесконечные)	Существует и бесконечен	Не равны	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$
	Названия не имеет	Хотя бы один не существует	---	---	---	$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$

Классификация односторонних точек разрыва функции

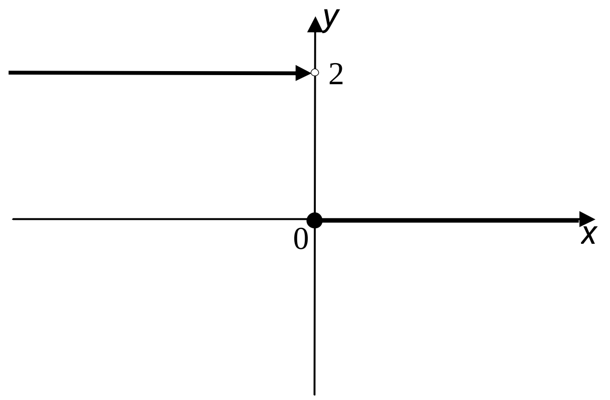
Род точки разрыва	**Название точки разрыва функции**	**Существование одностороннего предела функции**	**Существование предела функции**	**Равенство одностороннего предела и значения функции**	**Пример функции $f(x)$, имеющей одностороннюю точку разрыва $x_0=0$**
I род	Точка *скачка*	Существует и конечен	Существует и конечен	Не равны	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}, x>0, x\neq 1\\ 1, \quad x=0\end{cases}$
II род	Точка *бесконечного разрыва*	Существует и бесконечен	Существует и бесконечен	Не равны	$f(x)=\begin{cases}\ln x,\ x>0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$
	Названия не имеет	Не существует	Не существует	---	$f(x)=\begin{cases}\sin(\ln x),\ x>0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$

<u>Задачи.</u>

1. Исследовать одностороннюю непрерывность и непрерывность следующих функций в точке $x_0=0$. Изобразить графики этих функций.

а) $f(x)=\operatorname{sgn}x$; **б)** $f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{1}{\operatorname{sgn}x}-1\right|, x\neq 0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$;

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}$, $f(0)=0$. Если $x<0$, то $\operatorname{sgn}x=-1$, следовательно, $f(x)=\left|\dfrac{1}{-1}-1\right|=2$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2\neq f(0)$. Таким образом, функция $f(x)$ не является непрерывной слева в точке $x_0=0$, и тем самым не является непрерывной в этой точке. Если $x>0$, то $\operatorname{sgn}x=1$, следовательно, $f(x)=\left|\dfrac{1}{1}-1\right|=0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0=f(0)$. Таким образом, функция $f(x)$ является непрерывной справа в точке $x_0=0$. Ниже представлен график функции $f(x)$.



в) $f(x)=\frac{1}{\{x\}}$. Пусть $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{I} \end{cases}$. Как определить $f(x)$ в точке $x_0=0$, чтобы функция $\tilde{f}(x)$ стала непрерывной в этой точке хотя бы с одной стороны? Будет ли она при этом непрерывной и с другой стороны?

2. Является ли точка $x_0=0$ точкой разрыва функций из задачи 1? В случае положительного ответа классифицировать эту точку разрыва.

3. Охарактеризовать все целочисленные точки $k=\overline{-2,5}$ для функции из задачи 5 темы 18.

4. Исследовать непрерывность функции

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6}{3-9^{\frac{2-x}{x^2-3x+2}}}, & \text{где выражение имеет смысл} \\ 0, & \text{где это выражение не имеет смысла} \end{cases}.$$

Найти и классифицировать все её точки разрыва. Изобразить эскиз графика функции (М.: 1 = 1,5 см).

Упражнения.

1. Исследовать одностороннюю непрерывность и непрерывность следующих функций в точке $x_0=0$. Изобразить графики этих функций.

а) $f(x)=[x]$; **б)** $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$. Пусть $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Как определить $f(x)$ в точке $x_0=0$ так, чтобы в этой точке функция $\tilde{f}(x)$ стала непрерывной хотя бы с одной стороны?

2. Исследовать на непрерывность функции

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\log_9\left(\dfrac{3x}{x^2-3x}\right)^2}, & \text{где это выражение имеет смысл} \\ 1, & \text{где это выражение не имеет смысла} \end{cases}.$$

Найти и классифицировать все её точки разрыва. Изобразить эскиз графика функции (М.: 1 = 1,5 см).

Тема 21. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна на этом множестве.*

Теорема 2. *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.*

<u>Задачи.</u>

1. Доказать по определению, что функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

Решение: Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна на $D_f = \mathbb{R}$. По определению равномерной непрерывности должны иметь:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon\right).$$

Рассмотрим левую часть неравенства заключения импликации. Имеем $|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le |x_1 - x_2|$, т.к. $\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \le 1$ и $\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le \frac{|x_1 - x_2|}{2}$. Таким образом, если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|\sin x_1 - \sin x_2| < \delta$. Поэтому при $\delta = \varepsilon$ будем иметь $\left(|x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon\right)$, т.е. функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

2. Доказать, используя определение, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

Решение: Очевидно, что функция $f(x)$ поточечно непрерывна на $D_f = \mathbb{R}$. Построим отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x', x'' \in \mathbb{R} : \ |x' - x''| < \delta \wedge \left|(x')^2 - (x'')^2\right| \ge \varepsilon .$$

Рассмотрим две числовые последовательности $\{x'_n\} = \{\sqrt{n}\}$ и $\{x''_n\} = \{\sqrt{n-1}\}$. Имеем $|x'_n - x''_n| = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, но $\left|(x')^2 - (x'')^2\right| = n - (n-1) = 1$. Если $\varepsilon = 1$, а $x' = x'_n = \sqrt{n}$, $x'' = x''_n = \sqrt{n-1}$, то $|x' - x''| = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} < \delta$ при $n = \left[\dfrac{1}{\delta^2}\right] + 2$.

Итак, $|x' - x''| < \delta$ и $\left|(x')^2 - (x'')^2\right| = 1 \ge \varepsilon$, т.е. функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

3. Исследовать равномерную непрерывность функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на промежутках $I_1=(0;1]$, $I_2=[1;+\infty)$.

4. Исследовать равномерную непрерывность функции $f(x)=\ln x$ на следующих промежутках $I_1=[1;2]$, $I_2=(0;1]$, $I_3=(0;+\infty)$, $I_4=(1;3)$.

5. Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на своей области определения.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезках $\Delta_1=[a;c]$ и $\Delta_2=[c;b]$, то она равномерно непрерывна и на их объединении $\Delta=[a;b]$.

7. Показать, что функция $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна и ограничена на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на нём.

Упражнения.

1. Показать, что функция $f(x)=\sin x^2$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, но не является там равномерно непрерывной, а неограниченная функция $g(x)=x+\sin x$ непрерывна и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Показать, что функция $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на интервалах $I_1=(-1;0)$ и $I_2=(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на их объединении.

3. Исследовать на равномерную непрерывность следующие функции на соответствующих множествах:

а) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $I=\mathbb{R}_+^*=(0;+\infty)$; **б)** $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $I=\mathbb{R}_+^*=(0;+\infty)$.

4. Используя определение, доказать равномерную непрерывность функции $f(x)$ на указанном промежутке:

а) $f(x)=5x-3$, $I=\mathbb{R}$; **б)** $f(x)=x^2-2x-1$, $I=[-2;5]$;

в) $f(x)=2\sin x-\cos x$, $I=\mathbb{R}$; **г)** $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $I=[0;\pi]$.

Тема 22. Функции, непрерывные на отрезках

Заметим, что функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a;b]$, непрерывна на этом отрезке, если она непрерывна в каждой точке $x\in(a;b)$, в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Теорема 1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нём.*

Теорема 2. *Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём своих граней, т.е. обладает на нём наибольшим и наименьшим значениями.*

Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $f(a)\neq f(b)$, *то для любого числа* C, *заключённого между* $f(a)$ *и* $f(b)$, *существует точка* $c\in(a;b)$ *такая, что* $f(c)=C$.

Теорема 4. *Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нём.*

Задачи.

1. Показать, что алгебраическое уравнение $x^4-3x^2+2x-1=0$ имеет по крайней мере один корень на отрезке $\Delta=[1;2]$. В какой половине этого отрезка лежит корень данного уравнения?

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=x^4-3x^2+2x-1$. Имеем $D_f=\mathbb{R}$ $(\Delta\subset D_f)$ и $f(x)$ непрерывна на Δ. Вычислим значения функции $f(x)$ на концах отрезка Δ: $f(1)=-1<0$, $f(2)=7>0$. По теореме 3 существует точка $x_0\in\Delta$ такая, что $f(x_0)=0$, следовательно, данное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке Δ.

Далее, т.к. $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^4-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{5}{16}>0$ (а $f(1)=-1<0$), то один корень уравнения заведомо лежит на $\left(1;\frac{3}{2}\right)$, т.е. в левой половине отрезка Δ.

2. Охарактеризовать непрерывность функции $f(x)=5^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}+$ $+\ln\left(x^2-x+2\right)\sin\sqrt{x^2+3}$. Исследовать её ограниченность на отрезках $\Delta_1=[1;3]$, $\Delta_2=[-3;-2]$ и интервалах $\mathrm{I}_1=(-2;-1)$, $\mathrm{I}_1=(0;1)$.

3. Будет ли ограниченной на отрезке $\Delta=[-1;1]$ функция $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in[-1;0)\\ 0, & 1\le x\le 2\\ x^2-1, & x\in(0;1]\end{cases}$? Является ли $f(x)$ непрерывной на Δ? Обладает ли $f(x)$ на Δ наименьшим и наибольшим значениями? Изобразить график функции $f(x)$ (М.: 1 = 1,5см).

4. С помощью теоремы о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции решить неравенство $\sin x-\cos x>0$.

5. Известно, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $\Delta=[0;1]$, принимает на нём только рациональные значения, причём $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Найти $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Упражнения.

1. Пусть $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x-24}$. Вычислить значения $f(5)$ и $f(7)$. Можно ли утверждать, что существует точка $x_0\in(5;7)$ такая, что $f(x_0)=0$?

2. Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Delta=[0;1]$ и принимает на нём только иррациональные значения, причём $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{2}$. Найти $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

3. Доказать, что уравнение имеет корень на отрезке Δ:

а) $x^3-3x+1=0,\quad \Delta=[0;1]$; **б)** $3\sin^3 x-5\sin x+1=0,\quad \Delta=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

в) $8^x-3\cdot 2^x-16=0,\quad \Delta=[0;2]$.

Тема 23. Дифференцируемость и производная

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, называется *дифференцируемой в* этой *точке*, если её приращение $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ в точке x_0 $\left((x_0+\Delta x)\in\dot{U}(x_0)\right)$ представимо в виде

$$\Delta f=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

где $A\in\mathbb{R}$ и $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на открытом*[1] *множестве* $E\subset D_f$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой*, если её область определения открыта и $f(x)$ дифференцируема в каждой точке D_f.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если существует конечный предел разностного отношения приращения функции Δf к соответствующему ему приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{2}$$

[1] То есть каждая точка этого множества входит в него вместе с некоторой своей окрестностью. Такая точка множества называется его *внутренней* точкой.

то он называется *производной* (или значением производной) функции $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Производной функции $f(x)$ называется функция $f'(x)$, областью определения которой служат все внутренние точки D_f, в которых существует конечный предел (2) и в каждой такой точке производная функция принимает значение, равное этому пределу.

Теорема 1 (критерий дифференцируемости функции в точке). *Функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда она в этой точке имеет производную, причём* $f'(x_0)$ *равно числу* A *из равенства (1).*

Теорема 2 (связь дифференцируемости и непрерывности). *Если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Задачи.

1. Используя определение, доказать дифференцируемость функции $f(x)=x^3$.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}$. Пусть x_0 – произвольная точка из $\mathbb{R}$. Так как $\Delta f=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3=3x_0^2\Delta x+\left(3x_0\Delta x+\Delta x^2\right)\Delta x$, то имеем равенство (1), где $A=3x_0^2\ (\in\mathbb{R})$, а $\alpha(\Delta x)=3x_0\Delta x+\Delta x^2\left(\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0\right)$. В силу произвольности точки $x_0\in\mathbb{R}$ следует дифференцируемость заданной функции.

Отметим, что кроме того, найдена производная данной функции: $f'(x)=3x^2$.

2. По определению найти производную функции $f(x)=\cos x$ в точке $x_0=0$.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}$, и, следовательно, $0\in\overset{\circ}{D}_f$ ($\overset{\circ}{D}_f$ – множество внутренних точек D_f). По определению производной

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-\cos 0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\overset{\left(1-\cos x\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}\right)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2}{2\Delta x}=-\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

3. По определению найти $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, если $f(x)=$ $=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)$.

4. Исследовать дифференцируемость и найти производную показательной функции $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

5. Показать, что дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ дифференцируема и её производная равна $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

6. Доказать, что функция $f(x)=|x-1|$ не дифференцируема в точке $x_0=1$. Дифференцируема ли она в остальных точках числовой прямой?

7. Построить пример функции $f(x)$, определённой и непрерывной всюду на $\mathbb{R}$ и не дифференцируемой в точках $x_1=-1,\ x_2=1$.

8. Исследовать дифференцируемость кусочно-заданных функций:

а) $f(x)=\begin{cases} x^3, \ x<0 \\ x^2, \ x\ge 0 \end{cases}$; **б)** $g(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ \sin x, & x\ge 0 \end{cases}$.

Сделать чертёж (М.: 1 = 1 см).

9. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Доказать, что функция $\varphi(x)=(x-x_0)\cdot f(x)$ будет дифференцируемой в этой точке. Чему равно $\varphi'(x_0)$?

10. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой точке x_0 и не дифференцируема в этой точке. Показать, что для любого $a\in\mathbb{R}^*$ функция $\varphi(x)=af(x)$ не будет дифференцируемой в точке x_0.

11. Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0. Исследовать дифференцируемость в точке x_0 их суммы $s(x)=f(x)+g(x)$, если

а) обе данные функции дифференцируемы в этой точке;

б) одна из них дифференцируема, а другая не дифференцируема в этой точке;

в) обе функции не дифференцируемы в этой точке.

Упражнения.

1. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные функций $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\operatorname{tg}x$; $h(x)=\arcsin x$.

2. Найти $f'(2)$, если $f(x)=x^2\sin(x-2)$.

3. Найти производную функции $f(x)=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x<1 \\ (1-x)(2-x), & 1\le x\le 2 \\ -(2-x), & 2<x<+\infty \end{cases}$.

Построить график заданной функции и график её производной.

4. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках x_1, x_2, x_3.

5. Можно ли утверждать, что произведение $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если:

а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке;

б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в этой точке x_0?

6. Что можно сказать о дифференцируемости функции $h(x) = g(f(x))$ в точке x_0, если:

а) функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$;

б) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(y)$ не имеет производной в точке $y_0 = f(x_0)$;

в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0 и функция $g(y)$ не имеет производной в точке $y_0 = f(x_0)$?

Рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2;\quad g(y) = |y|$, **б)** $f(x) = |x|;\quad g(y) = y^2$,

в) $f(x) = 2x + |x|;\quad g(y) = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}|y|$ при $x_0 = 0$.

7. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая чётная (нечётная) функция. Показать, что $f'(x)$ будет нечётной (чётной) функцией.

Тема 24. Табличные производные и правила дифференцирования

Табличные производные:

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$[1]; **2.** $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a \quad (a > 0)$; **2а.** $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$; **3а.** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$;

4. $(\sin x)' = \cos x$; **5.** $(\cos x)' = -\sin x$;

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$; **7.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z})$;

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$; **9.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$;

[1] При некоторых значениях α ограничение на x может быть ослаблено.

10. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 1**1.** $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

12. $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$; **13.** $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$;

14. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; **15.** $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad \left(x \neq 0\right)$.

Правила дифференцирования:

1) $\left(af\left(x\right)+bg\left(x\right)\right)' = af'\left(x\right)+bg'\left(x\right)$ – дифференцирование линейной комбинации функций;

2) $\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$ – дифференцирование произведения функций;

3) $\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)' = \dfrac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}$ – дифференцирование частного функций;

4) $\left(g\circ f\right)'\left(x\right) = g'\left(f\left(x\right)\right)\cdot f'\left(x\right)$ – дифференцирование композиции функций.

Если функция $f\left(x\right)$ принимает строго положительные значения и производная её логарифма вычисляется проще, чем производная самой функции (например, в аналитическом задании функции присутствуют, в основном, действия второй и третьей ступеней – умножение, деление и возведение в степень), то при вычислении $f'\left(x\right)$ применяют формулу так называемого «логарифмического дифференцирования»:

$$f'\left(x\right) = \left(\ln f\left(x\right)\right)'\cdot f\left(x\right).$$

Задачи.

1. Найти производные следующих функций:

а) $f\left(x\right) = \left(x^2+1\right)\cos x$. (**Ответ:** $f'\left(x\right) = 2x\cos x - \left(x^2+1\right)\sin x$).

б) $f\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{\sin x}$

Решение: Имеем $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\pi n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Так как функции $\ln x$ и $\sin x$ дифференцируемы на D_f $\left(\text{и } \sin x \neq 0\right)$, то их отношение $\dfrac{\ln x}{\sin x}$ дифференцируемо и по правилу дифференцирования частного имеем:

$$f'\left(x\right) = \frac{\left(\ln x\right)'\cdot\sin x - \ln x\cdot\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x} =$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sin x-\ln x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-x\ln x\cdot\cos x}{x\sin^2 x}=\frac{1-x\ln x\cdot\operatorname{ctg} x}{x\sin x}.$$

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,2^x\operatorname{tg} x$.

(**Ответ:** $f'(x)=\dfrac{2^{x+1}}{3\sqrt[3]{x}}\operatorname{tg} x+\sqrt[3]{x^2}\,2^x\left(\ln 2\operatorname{tg} x+\sec^2 x\right)\quad\left(x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)\right)$).

г) $f(x)=\arccos\left(1-x^2\right)+\sin(\cos x)$.

(**Ответ:** $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}-\sin x\cdot\cos(\cos x)\quad\left(0<|x|<\sqrt{2}\right)$).

д) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. (**Ответ:** $f'(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x>0)$).

е) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$. (**Ответ:** $f'(x)=1\quad\left(x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right)$).

ж) $f(x)=\ln\sqrt[6]{\dfrac{\left(x^2+4\right)^5\arcsin^2 3x}{\left(\operatorname{ch}x^2\right)e^{\operatorname{tg}x}}}$.

(**Ответ:** $f'(x)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{10x}{x^2+4}+\dfrac{6}{\arcsin 3x\cdot\sqrt{1-9x^2}}-2x\operatorname{th}x^2-\sec^2 x\right)\quad\left(0<|x|<\dfrac{1}{3}\right)$).

2. Приёмом «логарифмического дифференцирования» найти производные следующих функций:

а) $f(x)=x^x$. (**Ответ:** $f'(x)=x^x(1+\ln x)\quad(x>0,\ x\neq 1)$).

б) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$.

(**Ответ:** $f'(x)=\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)(\cos x)^{\sin x}\quad\left(|x+2\pi k|<\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$).

в) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{e^{\sin 4x}\left(x^2+6x+10\right)^3}{\left(\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}\right)\left(\operatorname{sh}^6 2x\right)}}$.

(**Ответ:** $f'(x)=\dfrac{2}{7}\sqrt[7]{\dfrac{e^{\sin 4x}\left(x^2+6x+10\right)^3}{\left(\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}\right)\left(\operatorname{sh}^6 2x\right)}}\cdot\left(2\cos 4x+\dfrac{3(x+3)}{x^2+6x+10}+\dfrac{1}{x^2+1}-6\operatorname{ch}2x\right)$

$(x\neq\pi k, k\in\mathbb{Z})$).

3. Доказать «правило» дифференцирования показательно-степенной функции: *чтобы найти производную показательно-степенной функции, надо продифференцировать эту функцию как показательную (т.е. считая её основание постоянным), затем как степенную (т.е. считая её показатель степени постоянным) и сложить полученные результаты.*

Упражнения.

Найти производные функций:

1. $f(x)=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$; **2.** $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$; **3.** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

4. $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$; **5.** $f(x)=4\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^8 x}$; **6.** $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

7. $f(x)=\ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right)$; **8.** $f(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; **9.** $f(x)=(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{arctg}\,x}$;

10. $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$;

11. $f(x)=\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}$; **12.** $f(x)=\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ctg}\dfrac{1}{x^2}}}$;

13. $f(x)=\left(\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^{\cos 2x}\cdot\mathrm{tg}^2\dfrac{1}{x-2}}{\mathrm{ch}^3 3x\cdot e^{\arcsin x}}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Тема 25. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль

Определение 1. Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$, т.е. данная функция определена в некоторой окрестности точки x_0. *Касательной* к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ называется прямая, проходящая через эту точку, такая, что расстояние от текущей точки $M(x;f(x))$ $(x\neq x_0)$ графика функции $f(x)$ до данной прямой есть бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние от точки M до точки M_0 при $x\to x_0$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её график имеет в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ единственную касательную, угловой коэффициент (тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс) которой равен $f'(x_0)$, т.е. уравнение касательной имеет вид $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Геометрический смысл производной функции в точке.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Геометрический смысл дифференцируемости функции.

Геометрический смысл дифференцируемости функции состоит в том, что график этой функции в каждой своей точке имеет касательную.

Определение 2. Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$ и в этой точке функция дифференцируема. *Нормалью* к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к графику этой функции в данной точке.

Если производная функции $f(x)$ в точке x_0 не равна нулю, то уравнение нормали к графику этой функции в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ имеет вид $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$. Если же $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали есть $x = x_0$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. *Подкасательной* (*поднормалью*) функции $f(x)$ в точке x_0 называют отрезок Δ_l (Δ_n) оси абсцисс, один конец которого есть точка x_0, а другой его конец – точка пересечения касательной (нормали) с этой осью.

В этом случае длины подкасательной $|\Delta_l|$ и поднормали $|\Delta_n|$ вычисляются соответственно по формулам $|\Delta_l| = \left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$ и $|\Delta_n| = |f(x_0) \cdot f'(x_0)|$.

Пусть графики двух функций пересекаются в некоторой точке и имеют в ней касательные. Под углом между этими графиками в указанной точке будем понимать угол между данными касательными.

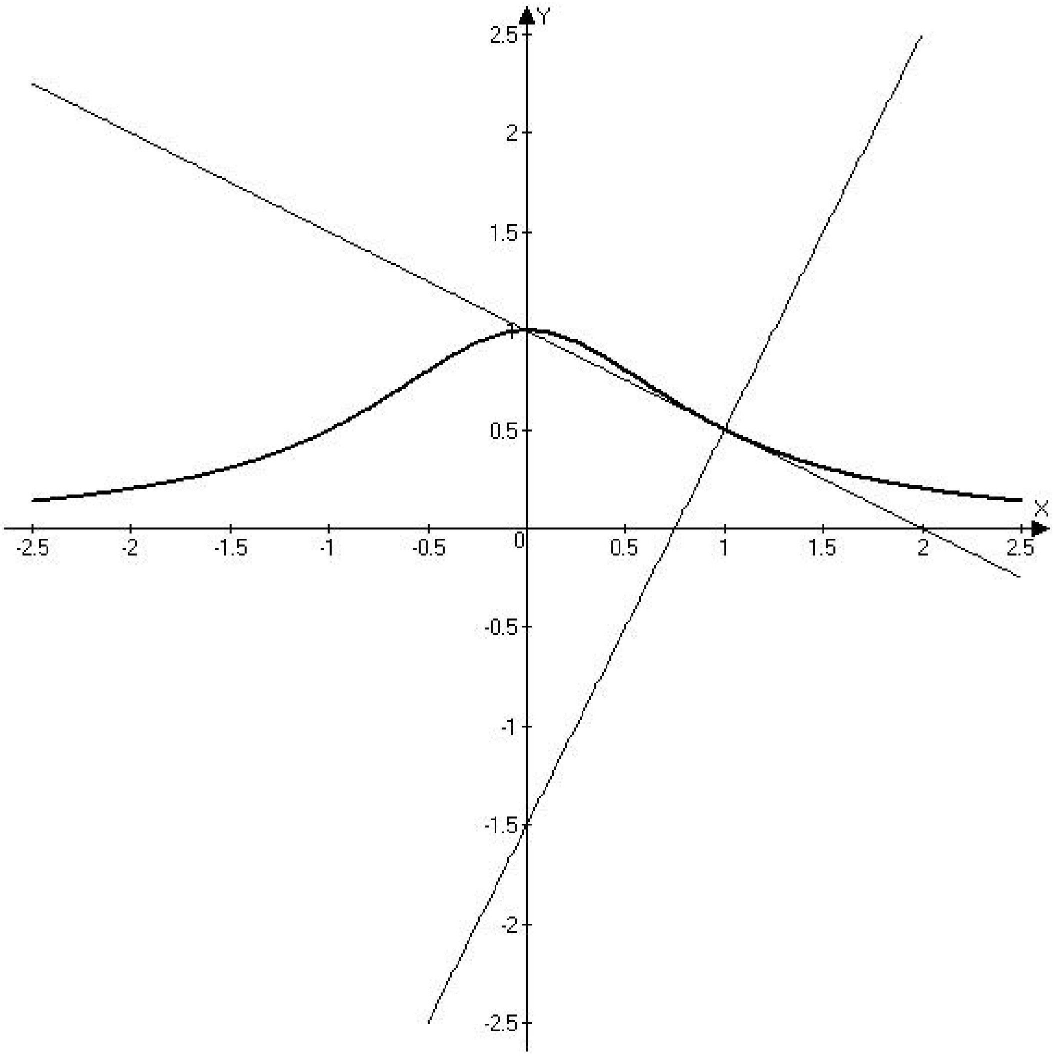
Задачи.

1. Написать уравнение касательной (l) и нормали (n) к кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ («*локон Аньези*») в точке M_0 с абсциссой $x_0 = 1$. Подсчитать длины соответствующих подкасательной и поднормали.

Решение: Имеем функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ясно, что $D_f = \mathbb{R}$ и $f(x)$ дифференцируема. Точка касания M_0 с абсциссой $x_0 = 1$ имеет ординату $y_0 = f(1) = \dfrac{1}{2}$, т.е. $M_0\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$. Найдём производную функции $f(x)$ в точке

$x_0=1$: $f'(x)=\left(\left(x^2+1\right)^{-1}\right)'=-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ и, следовательно, $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$. Поэтому уравнение касательной (l) имеет вид $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot(x-1)$ или $x+2y-2=0$, а уравнение нормали (n): $y=\dfrac{1}{2}+2\cdot(x-1)$ или $4x-2y-3=0$. Наконец, вычислим длины подкасательной и поднормали: $\left|\Delta_l\right|=\left|\dfrac{0,5}{-0,5}\right|=1$, $\left|\Delta_n\right|=\left|0,5\cdot(-0,5)\right|=0,25$.

Ниже приведён график функции $f(x)$ и найденные касательная и нормаль в заданной точке M_0.



2. В какой точке касательная (l) к параболе $y=x^2-x-2$ параллельна главной координатной биссектрисе (биссектрисе I и III координатных углов)? Написать уравнение этой касательной, уравнение соответствующей нормали (n); подсчитать длины подкасательной и поднормали. Сделать чертёж (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $M_0(1;-2)$, (l): $x-y-3=0$, (n): $x+y+1=0$, $|\Delta_l|=|\Delta_n|=2$).

3. Под каким углом α логарифмическая кривая $y=\ln x$ пересекает ось абсцисс? Написать уравнения касательной (l) и нормали (n) к этой кривой в точке её пересечения с осью абсцисс. Сделать чертёж (М.: 1 = 1,5 см). (**Ответ:** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, (l): $x-y-1=0$, (n): $x+y-1=0$).

4. Доказать, что показательная кривая $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ имеет постоянную по длине подкасательную. Дать геометрический способ построения касательной к графику показательной функции. Построить касательную к кривой $y=e^x$ в точке M_0 с абсциссой x_0 (М.: 1 = 1,5 см).

5. При каком соотношении между коэффициентами a,b,c ось Ox касается параболы $y=ax^2+bx+c$? (**Ответ:** $b^2=4ac$).

6. При каком значении параметра a парабола $y=ax^2$ «касается» логарифмической кривой $y=\ln x$? Найти в их точке касания уравнение общей касательной (l) и уравнение общей нормали (n), подсчитать величины подкасательной и поднормали. Сделать чертёж (М.: 1 = 3 см). (**Ответ:** $\alpha=\dfrac{1}{2e}$, (l): $2x-2\sqrt{e}y-\sqrt{e}=0$, (n): $2\sqrt{e}x+2y-2e-1=0$, $|\Delta_l|=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$, $|\Delta_n|=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$).

Упражнения.

1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ в точках $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(3,0)$.

2. Под какими углами пересекаются кривые $y=\sin x$ и $y=\cos x$?

3. Определив длину подкасательной к кривой $y=ax^n$, дать геометрический способ построения касательной к этой кривой.

4. При каком условии на параметры p и q ось абсцисс касается кубической параболы $y=x^3+px+q$?

5. Доказать, что если парабола $y=ax^2+bx+c$ дважды пересекает ось абсцисс, то углы между этой кривой и данной осью в точках их пересечения равны между собой. Чему равны эти углы?

Тема 26. Техника дифференцирования

Данная тема направлена на отработку техники дифференцирования и может быть предложена студентам в качестве «большого домашнего задания», рассчитанного примерно на $1{,}5-2$ недели.

Найти производные функций:

1. $f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;

2. $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;

3. $f(x)=\dfrac{\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{(1-x)^2}$;

4. $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

5. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

6. $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$;

7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

8. $f(x)=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$;

9. $f(x)=\cos 2x-2\sin x$;

10. $f(x)=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$;

11. $f(x)=\sin\left(\cos^2 x\right)\cdot\cos\left(\sin^2 x\right)$;

12. $f(x)=\sin\left[\sin(\sin x)\right]$;

13. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

14. $f(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

15. $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

16. $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

17. $f(x)=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

18. $f(x)=\sin\left[\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right]$;

19. $f(x)=e^{-x^2}$;

20. $f(x)=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

21. $f(x)=e^x\left(x^2-2x+2\right)$;

22. $f(x)=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]\cdot e^{-x}$;

23. $f(x)=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$;

24. $f(x)=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$;

25. $f(x)=\frac{1}{4\left(1+x^4\right)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$;

26. $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

27. $f(x)=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$;

28. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

29. $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$;

30. $f(x)=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$;

31. $f(x)=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

32. $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$;

33. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

34. $f(x)=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$;

35. $f(x)=\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)$;

36. $f(x)=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$;

37. $f(x)=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$;

38. $f(x)=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$;

39. $f(x)=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]$;

40. $f(x)=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$;

41. $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$;

42. $f(x)=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

43. $f(x)=\arcsin(\sin x-\cos x)$;

44. $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$;

45. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

46. $f(x)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

47. $f(x)=\frac{1}{\arccos^2\left(x^2\right)}$;

48. $f(x)=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$;

49. $f(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3\right)$;

50. $f(x)=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

51. $f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

52. $f(x)=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

53. $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$;

54. $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$;

55. $f(x)=\arccos\left(\sin x^2-\cos x^2\right)$;

56. $f(x)=\arcsin\left(\sin x^2\right)+\arccos\left(\cos x^2\right)$;

57. $f(x)=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$;

58. $f(x)=x+x^x+x^{x^x}\quad(x>0)$;

59. $f(x)=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$;

60. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;

61. $f(x)=\log_x e$;

62. $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$;

63. $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

Тема 27. Дифференциал. Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Линейная однородная функция $f'(x_0)\cdot\Delta x$ (аргумента Δx) называется *дифференциалом* этой функции в данной точке и обозначается $(df)(x_0)$. Итак,

$$(df)(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (1)$$

Если $f(x)=x$, то её дифференциал в любой точке x_0 равен Δx, т.е. $(dx)(x_0)=\Delta x$, или более кратко $dx=\Delta x$, поэтому формула (1) принимает вид

$$(df)(x_0)=f'(x_0)dx, \qquad (2)$$

следовательно, приращение Δf функции $f(x)$ и её дифференциал $(df)(x_0)$ в точке x_0 связаны равенством

$$\Delta f=(df)(x_0)+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (3)$$

где $\alpha(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$.

Из формулы (3) вытекает, что дифференциал функции в точке есть не только *линейная* часть (линейная функция) приращения функции, но в случае, когда $f'(x_0)\neq 0$, и так называемая *главная* часть приращения функции в указанной точке. То есть дифференциал и приращение функции есть бесконечно малые одного и того же порядка при $\Delta x\to 0$, тогда как второе слагаемое в формуле (3) есть бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение функции и её дифференциал при $\Delta x\to 0$.

Формула (3) применяется для вычисления приближённых значений дифференцируемой функции при условии, что Δx достаточно мало. В этом случае формулу (3) можно записать в виде $\Delta f\approx(df)(x_0)$.

При вычислении дифференциала суммы, разности, произведения и частного дифференцируемых функций имеют место формулы, аналогичные формулам соответствующих правил дифференцирования:

$$\big(d(\alpha f+\beta g)\big)(x_0)=\alpha(df)(x_0)+\beta(dg)(x_0)\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R});$$

$$\big(d(fg)\big)(x_0)=g(x_0)\cdot(df)(x_0)+f(x_0)\cdot(dg)(x_0);$$
$$\left(d\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x_0)=\frac{g(x_0)\cdot(df)(x_0)-f(x_0)\cdot(dg)(x_0)}{g^2(x_0)}\qquad \big(g(x_0)\neq 0\big).$$

Форма дифференциала (2) инвариантна относительно замены переменной, другими словами, остаётся неизменной, если переменная x сама является функцией $\varphi(t)$. То есть речь идёт о дифференциале сложной функции $g(t)=f(\varphi(t))$ при условии, что и функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, и функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$. Таким образом,

$$(dg)(t_0)\big(=g'(t_0)dt\big)=f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)dt=f'(\varphi(t_0))\cdot(d\varphi)(t_0)=f'(x_0)dx.$$

Задачи.

1. Найти дифференциал функции $f(x)=x^3+2x$ в точке $x_0=2$. Сравнить приращение и дифференциал функции в этой точке при $\Delta x=0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности (ошибки), получаемые при замене приращения функции её дифференциалом в данной точке при указанном Δx.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}$ и функция $f(x)$ дифференцируемая. Так как $f'(x)=3x^2+2$, то $f'(2)=3\cdot 4+2=14$ и $(df)(2)=f'(2)\Delta x=14\cdot 0{,}1=1{,}4$. С другой стороны, $\Delta f\big(=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=f(2{,}1)-f(2)=9{,}261+4{,}2-8-4=1{,}461$.

Вычислим абсолютную ошибку при замене приращения функции её дифференциалом: $\delta_{абс}=\left|(\Delta f)(x_0)-(df)(x_0)\right|=0{,}061$. Поэтому относительная ошибка при такой замене равна $\delta_{отн}=\dfrac{\delta_{абс}}{\left|(\Delta f)(x_0)\right|}\cdot 100\%=\dfrac{0{,}061}{1{,}461}\cdot 100\%\approx 4{,}2\%$.

2. Пусть $f(x)=\sin x-x\cos x$. Найти $f'(x)$, потом $(df)(x)$. Затем – то же, но в обратном порядке. (**Ответ:** $f'(x)=x\sin x$, $(df)(x)=x\sin x dx$).

3. Не подсчитывая $f'(x)$, найти $(df)(x)$, если

а) $f(x)=xe^x$; **б)** $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$; **в)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$;

г) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$; **д)** $f(x)=x\sqrt{64-x^2}+64\arcsin\dfrac{x}{8}$.

(**Ответы: а)** $(df)(x)=(x+1)e^x dx$; **б)** $(df)(x)=\dfrac{1-x}{e^x}dx$;

в) $(df)(x)=\dfrac{x-1}{x^2}e^x dx$; **г)** $(df)(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}dx$; **д)** $(df)(x)=2\sqrt{64-x^2}dx$).

4. Заменяя приращение функции в точке её дифференциалом в этой точке, найти приближённые значения **а)** $\cos 151°$. (**Ответ:** $\cos 151° \approx -0{,}874$). **б)** $\ln 1{,}012$.

Решение: Имеем $f(x)=\ln x$, $D_f=\mathbb{R}_+^*$ и функция дифференцируемая. Если $x_0=1$, то $\Delta x=0{,}012$. Тогда $\Delta f=\ln(1+0{,}012)-\ln 1=\ln 1{,}012$. С другой стороны, $(df)(1)=f'(1)\cdot\Delta x=\Delta x=0{,}012$. Так как Δx достаточно мало, то $\Delta f\approx(df)(x_0)$, поэтому $\ln 1{,}012\approx 0{,}012$ (отметим, что приближённое значение $\ln 1{,}012$, вычисленное на калькуляторе, равно $0{,}011928571$).

5. Доказать, что при малых значениях Δx (по сравнению со значением параметра a) имеет место приближённое равенство

$$\sqrt[n]{a^n+\Delta x}\approx a+\frac{\Delta x}{na^{n-1}} \quad (a>0, n\in\mathbb{N}).$$

Используя это равенство, вычислить приближённые значения $\sqrt[3]{1{,}02}$ и $\sqrt[10]{1000}$. (**Ответ:** $\sqrt[3]{1{,}02}\approx 1{,}00(6)$; $\sqrt[10]{1000}\approx 1{,}995$).

Упражнения.

1. Для функции $f(x)=x^3-2x+1$ вычислить её приращение, её дифференциал в точке $x_0=1$ и сравнить их, если $\Delta x=1$; $\Delta x=0{,}1$; $\Delta x=0{,}01$.

2. Найти дифференциал функции $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

3. Найти дифференциал функции $y=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

4. Найти $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

5. Заменяя приращение функции её дифференциалом, найти приближённые значения $\sin 29^0$; $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Тема 28. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Если функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, принимает в точке x_0 наибольшее или наименьшее значение в данной окрестности и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на невырожденном отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)$, то существует точка $x_0\in(a;b)$ такая, что $f'(x_0)=0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $f(x)$ найдётся точка $M(x_0;f(x_0))$, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Заметим, что такая точка графика не обязательно единственная.

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на невырожденном отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то существует точка* $x_0 \in (a;b)$ *такая, что* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$ *или* $f(b)-f(a) = = f'(x_0)\cdot(b-a)$ *(формула конечных приращений).*

Геометрически теорема Лагранжа означает, что на графике функции $f(x)$ найдётся точка $M(x_0; f(x_0))$, в которой касательная к графику параллельна хорде, стягивающей концы графика, т.е. точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$.

Заметим, что такая точка графика не обязательно единственная.

Теорема Коши. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на невырожденном отрезке* $[a;b]$, *дифференцируемы на интервале* $(a;b)$, *причём всюду там* $g'(x) \neq 0$, *то существует точка* $x_0 \in (a;b)$ *такая, что* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ *(формула Коши).*

<u>Задачи.</u>

1. Показать, что кубическое уравнение $x^3 + 3x + 6 = 0$ имеет единственный действительный корень x_0. Найти его целую часть. (**Ответ**: $[x_0] = -2$).

2. Пусть $f(x) = (x^2-1)(x^2-5x+6)$. Не вычисляя производной $f(x)$, показать, что все корни x_1, x_2, x_3 уравнения $f'(x) = 0$ действительны (т.е. все нули функции $f'(x)$ – действительны) и найти последовательные целые числа, между которыми они находятся (т.е. указать целые части этих корней).

Решение: Очевидно, имеем $D_f = \mathbb{R}$ и $f(x) = (x^2-1)(x^2-5x+6) = = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$. Ясно, что $f(-1) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Так как $f(x)$ – многочлен 4-й степени, то $f'(x)$ – многочлен 3-й степени, а значит, по основной теореме алгебры имеет не более трёх действительных нулей. На отрезках $[-1;1]$, $[1;2]$ и $[2;3]$ выполняются все условия теоремы Ролля, поэтому существует точки $x_1 \in (-1;1)$, $x_2 \in (1;2)$ и $x_3 \in (2;3)$, в которых производная функции $f(x)$ обращается в нуль, т.е. все три корня уравнения $f'(x) = 0$ действительны. Уточним местоположение точки x_1. Так как $f'(x)$ – многочлен 3-й степени, старший коэффициент которого положителен (очевидно, равный 4), то на интервале $(-\infty; x_1)$ производная $f'(x) < 0$ и, в частности, $f'(-1) < 0$. В точке же $x = 0$ производная $f'(x)$

принимает положительное значение, а именно $f'(0)=5$ (ясно, что $f'(0)$ равно коэффициенту при первой степени x в многочлене $f(x)$). Таким образом, на концах отрезка $[-1;0]$ производная $f'(x)$, будучи непрерывной функцией, принимает противоположные по знаку значения. Поэтому по теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции, точка x_1 принадлежит интервалу $(-1;0)$. Итак, $x_1 \in (-1;0)$, $x_2 \in (1;2)$, $x_3 \in (2;3)$, следовательно, $[x_1]=-1$, $[x_2]=1$, $[x_3]=2$.

3. Определить значение x_0 «средней» точки в формуле Лагранжа (конечных приращений) для функции $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ на отрезке $\Delta_1=[0;2]$. Будет ли оно единственным? Сделать то же для отрезка $\Delta_2=[-1;3]$.

Решение (для отрезка Δ_1): Имеем $D_f=\mathbb{R}$. $f'(x)=12x^2-10x+1$. Вычислим значения функции на концах отрезка Δ_1: $f(0)=-2$, $f(2)=12$. По теореме Лагранжа существует $x_0 \in (0;2)$ такое, что $f'(x_0)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=$ $=7$. Получаем уравнение $12x_0^2-10x_0+1=7$, которое имеет два корня $x_1=\dfrac{5-\sqrt{97}}{12}$ и $x_2=\dfrac{5+\sqrt{97}}{12}$. Так как корень $x_1<0$, то он не может принадлежать интервалу $(0;2)$; другой же корень $x_2 \in (0;2)$. Таким образом, на отрезке Δ_1 существует единственная точка $x_0=\dfrac{5+\sqrt{97}}{12} \in (0;2)$, удовлетворяющая теореме Лагранжа. (**Ответ**: на отрезке $\Delta_2=[-1;3]$ существуют ровно две точки $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{241}}{12} \in (-1;3)$).

4. На кубической параболе $y=x^3$ найти точки, касательные в которых параллельны прямой, содержащей хорду, соединяющую точки $A(-1;-1)$ и $B(2;8)$, или совпадают с этой прямой. Сколько таких точек существует? (**Ответ**: таких точек две – $A(-1;-1)$ и $C(1;1)$).

5. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале I, то $f'(x)\equiv 0 \Leftrightarrow f(x)=const$.

6. Для какой функции, определённой и дифференцируемой всюду в $\mathbb{R}$, производная совпадает с самой функцией? (**Ответ**: для функции вида $f(x)=ae^x$ $(a \in \mathbb{R})$ и только для неё).

7. Используя формулу конечных приращений, доказать неравенство $|\sin\alpha-\sin\beta| \le |\alpha-\beta|$ $(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

Решение: Если $\alpha = \beta$, то, очевидно, имеем равенство: $0 = 0$. Пусть $\alpha \neq \beta$, например, $\alpha < \beta$. На отрезке $[\alpha;\beta]$ рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Для данной функции на этом отрезке выполняются все условия теоремы Лагранжа. Следовательно, существует точка $x_0 \in (\alpha;\beta)$ такая, что $f(\alpha) - f(\beta) = f'(x_0)(\alpha - \beta)$, т.е. $\sin\alpha - \sin\beta = \cos x_0 \cdot (\alpha - \beta)$, а, значит, $|\sin\alpha - \sin\beta| = |\cos x_0||\alpha - \beta|$. Так как $|\cos x_0| \le 1$, то $|\cos x_0||\alpha - \beta| \le |\alpha - \beta|$ и, следовательно, $|\sin\alpha - \sin\beta| \le |\alpha - \beta|$.

8. Доказать тождество $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ для любого $x \in [-1;1]$.

9. Удовлетворяют ли условиям теоремы Коши функции:

а) $f(x) = e^x$ и $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ на отрезках $\Delta_1 = [-2;2]$ и $\Delta_2 = [0;2]$;

Решение: Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке Δ_1 и дифференцируемы на интервале $(-2;2)$, но в точке $x = 0$ из этого интервала функция $g'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ обращается в ноль, поэтому теорема Коши не применима к функциям $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке Δ_1.

Данные функции непрерывны на отрезке Δ_2, дифференцируемы на интервале $(0;2)$ и всюду на этом интервале $g'(x)$ не обращается в ноль ($\forall x \in (0;2)\ g'(x) > 0$), следовательно, теорема Коши применима к функциям $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке Δ_2, т.е. существует $x_0 \in (0;2)$ такая, что $\dfrac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. В результате получаем трансцендентное относительно x_0 уравнение $\dfrac{5}{2}(e^2 - 1) = \dfrac{(x_0^2+1)^2}{x_0}e^{x_0}$, которое имеет, по крайней мере, один действительный корень, принадлежащий интервалу $(0;2)$.

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ и $g(x) = e^x$ на отрезках $\Delta_1 = [-2;2]$ и $\Delta_2 = [0;2]$. (**Ответ**: на обоих отрезках теорема Коши применима, причём на отрезке Δ_1 существует единственная «средняя» точка $x_0 = 0 \in (-2;2)$, а на отрезке Δ_2 существует, по крайней мере, одна «средняя» точка $x_0 \in (0;2)$, являющаяся корнем того же трансцендентного уравнения, что и в решение пункта а) для того же отрезка Δ_2).

10. Определить значение x_0 «средней» точки в формуле Коши для функций $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ и $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ на отрезке $\Delta=[0;1]$. (**Ответ**: $x_0=\dfrac{1}{2}$).

Упражнения.

1. Доказать, что если все нули многочлена $P_n(x)=a_nx^n+$ $+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ $\left(a_k\in\mathbb{R}, k=\overline{0,n},\ a_n\neq 0\right)$ действительны, то его последовательные производные $P_n'(x), P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь действительные нули.

2. Можно ли на отрезке $[-1;1]$ к функции $f(x)=2-\sqrt[3]{x^2}$ применить теорему Ролля; теорему Лагранжа? (**Ответ**: обе теоремы не применимы).

3. Определить значение x_0 «средней» точки формулы Лагранжа (конечных приращений) для функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x},\quad x>1\end{cases}$ на отрезке $\Delta_1=\left[0;\dfrac{6}{5}\right]$.

Будет ли оно единственным? Сделать то же для отрезка $\Delta_2=\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Сделать чертежи (М.: 1 = 5 см). (**Ответ**: на отрезке Δ_1 существует единственная точка $x_0=\dfrac{5}{9}\in\left(0;\dfrac{6}{5}\right)$; на отрезке Δ_2 существуют две точки $x_1=\dfrac{5}{9}$ и $x_2=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ $\left(x_{1,2}\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\right)$).

4. Доказать неравенства:

а) $|\mathrm{arctg}\,a-\mathrm{arctg}\,b|\le|a-b|$; **б)** $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, если $0<b<a$.

5. Проверить, что функции $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $\Delta=[1;4]$ и найти значение x_0 «средней» точки. (**Ответ**: $x_0=2$).

6. Объяснить, почему неверна формула Коши для функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^3$ на отрезке $[-1;1]$.

7. Проверить, что функции $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ и $g(x)=\mathrm{arctg}\,x$ имеют одинаковые производные на промежутках $I_1=(-\infty;1)$ и $I_2=(1;+\infty)$. Вывести зависимость между этими функциями. (**Ответ**: на I_1 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+g(x)$; на I_2

$f(x) = -\frac{3\pi}{4} + g(x)$).

Тема 29. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале или объединении интервалов. Если производная $f'(x)$ данной функции, в свою очередь, дифференцируема на указанном множестве, то её производная $(f')'(x)$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) исходной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. Таким образом, $f^{(2)}(x) \equiv f''(x) \overset{def}{=} (f')'(x)$.

По индукции определяются производные следующих натуральных порядков (при условии, что они существуют), а именно $f^{(3)}(x) \equiv f'''(x) = (f'')'(x)$ и т.д.: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, при этом полагают, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x_0)$ в точке x_0. *Вторым дифференциалом* (или *дифференциалом второго порядка*) функции $f(x)$ в точке x_0 называется квадратичная функция $f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2$ (аргумента Δx с коэффициентом $f''(x_0)$) и обозначается $\left(d^2 f\right)(x_0)$, т.е. $\left(d^2 f\right)(x_0) \overset{def}{=} f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2$.

Аналогично определяются дифференциалы всех последующих натуральных порядков, а именно $\left(d^3 f\right)(x_0) \overset{def}{=} f'''(x_0) \cdot (\Delta x)^3$ и т.д.: $\left(d^n f\right)(x_0) \overset{def}{=} f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, при условии существования соответствующей производной в точке x_0.

Так как $\Delta x = (dx)(x_0)$ или короче $\Delta x = dx$, то $\left(d^n f\right)(x_0) \overset{def}{=} f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Можно показать, что если в точке x существуют дифференциалы функции $f(x)$ до $(n+1)$-ого $(n \in \mathbb{N})$ порядка, то имеет место формула:

$$\left(d^{k+1} f\right)(x) = d\left(d^k f\right)(x),$$

т.е. дифференциал $(k+1)$-ого порядка $\left(k = \overline{1,n}\right)$ есть дифференциал от дифференциала k-ого порядка.

В отличие от дифференциала функции первого порядка дифференциалы функции высших (начиная со второго) порядков не обладают свойством инвариантности формы, т.е., вообще говоря, $\left(d^n f(\varphi)\right)(t) \neq$ $\neq \left(f(\varphi)\right)^{(n)}(t)\cdot(dt)^n \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Табличные производные высших порядков:

1. $\left(x^\alpha\right)^{(n)}_{\alpha\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, & n\le\alpha \\ 0, & n>\alpha \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}x^{\alpha-n}, & n\le\alpha \\ 0, & n>\alpha \end{cases}$;

1′. $\left(x^\alpha\right)^{(n)}_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;

1″. При $\alpha=-1 \quad \left(x^{-1}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$;

1‴. $\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} \qquad (a\in\mathbb{R})$;

2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right); \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

3. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad \left(a\in\mathbb{R}^*_+\right)$[1]; $\qquad \left(e^x\right)^{(n)} = e^x$;

4. $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a} \qquad \left(a\in\mathbb{R}^*_+\right); \qquad (\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$;

n – я производная линейной комбинации: $(af+bg)^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)}$;

n – я производная произведения (формула Лейбница): $(f\cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Задачи.

1. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Найти $f'(x)$ и $f''(x)$, затем $(df)(x)$ и $d^2 f(x)$. Далее, найти $(df)(x)$ и $d^2 f(x)$ без предварительного вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$, затем указать эти производные.

---

[1] Таким значком будем обозначать множество строго положительных действительных чисел, т.е. $\mathbb{R}^*_+ = (0;+\infty)$. Множество неотрицательных действительных чисел, т.е. полуинтервал $[0;+\infty)$, будем обозначать $\mathbb{R}_+$. Напомним, что множество ненулевых действительных чисел мы обозначаем $\mathbb{R}^*$, т.е. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Решение: Имеем $D_f=(-1;1)$ и функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Далее

$$f'(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x^2}{1-x^2}\right)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{и } f''(x)=-\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}(-2x)=3x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Вычислив соответствующие производные, можем записать дифференциалы первого и второго порядков функции $f(x)$:

$$(df)(x)=f'(x)dx=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx,\ d^2f(x)=f''(x)dx^2=3x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}dx^2.$$

Найдём теперь $(df)(x)$ и $d^2f(x)$ без предварительного вычисления соответствующих производных: $df(x)=dx\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+xd\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=$ $=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx+x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x)dx=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$ и $d^2f(x)=d(df)=$ $=d\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx\right)$. Здесь dx как постоянный множитель можно вынести за знак дифференциала, поэтому будем иметь $d^2f(x)=dxd\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=$ $=-\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}(-2x)dx^2=3x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}dx^2$. Отметим, что из вычисленных дифференциалов можно выделить соответствующие производные: $f'(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ и $f''(x)=3x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$.

2. Найти три первые производные и дифференциала функции $f(x)=\operatorname{tg}x$. (**Ответ**: $f'(x)=\cos^{-2}x$, $f''(x)=2\operatorname{tg}x\cos^{-2}x\,(=2f\cdot f')$, $f'''(x)=$ $=2\left(1+3\operatorname{tg}^2x\right)\cos^{-2}x\left(=2\left(f'^2+f\cdot f''\right)\right)$, $(df)(x)=\cos^{-2}x\,dx$, $d^2f(x)=2\operatorname{tg}x\cos^{-2}x\,dx^2$, $d^3f(x)=2\left(1+3\operatorname{tg}^2x\right)\cos^{-2}x\,dx^3$).

3. Пусть $f(x)=x\ln x$. Найти $f^{(5)}(x)$ и $d^5f(x)$.

Решение: Ясно, что $D_f=\mathbb{R}_+^*$ и функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Вычислим пятую производную данной функции, пользуясь формулой Лейбница для нахождения $n-$ой производной произведения:

$$f^{(5)}(x)=\sum_{k=0}^{5}C_5^k x^{(k)}(\ln x)^{(5-k)}=C_5^0 x(\ln x)^{(5)}+C_5^1 x'(\ln x)^{(4)}+C_5^2 x''(\ln x)'''+$$

$$+C_5^3 x'''(\ln x)''+C_5^4 x^{(4)}(\ln x)'+C_5^5 x^{(5)}\ln x.$$

Очевидно, что в этой сумме начиная с третьего все слагаемые нулевые, поэтому, продолжая вычисления и используя табличные производные высших порядков, получим: $f^{(5)}(x)=1\cdot x\cdot\dfrac{(-1)^4 4!}{x^5}+5\cdot 1\cdot\dfrac{(-1)^3 3!}{x^4}=\dfrac{4!-5\cdot 3!}{x^4}=$ $=-\dfrac{6}{x^4}$, значит, $d^5f(x)=-6x^{-4}dx^5$.

4. Пусть $f(x)=(x+1)^2e^{3x}$. Найти $f^{(4)}(x)$. (**Ответ**: $f^{(4)}(x)=27\left(3x^2+14x+15\right)e^{3x}$).

5. Найти $f^{(10)}(x)$, если $f(x)=x^3\cos 2x$. (**Ответ**: $f^{(10)}(x)=2^9x\left(135-2x^2\right)\cos 2x+$ $+2^{10}\cdot 15\cdot\left(6-x^2\right)\sin 2x$).

6. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ $(a\in\mathbb{R})$. Вывести $f^{(n)}(x)$. (**Ответ**: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$).

7. Найти $f^{(7)}(x)$, если $f(x)=\dfrac{2}{1-3x}$. (**Ответ**: $f^{(7)}(x)=\dfrac{2\cdot 3^7\cdot 7!}{(3x-1)^8}$).

8. Найти $f^{(2011)}(x)$, если $f(x)=\dfrac{7x+4}{x^2-3x+2}$. Чему равно $f^{(2011)}(0)$? (**Ответ**: $f^{(2011)}(x)=2011!\left(\dfrac{11}{(x-1)^{2012}}-\dfrac{18}{(x-2)^{2012}}\right)$; $f^{(2011)}(0)=2011!\left(11-\dfrac{9}{2^{2011}}\right)$).

9. Найти $f^{(12)}(x)$, если $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x}$. (**Ответ**: $f^{(12)}(x)=12!\left(\dfrac{2}{(x-1)^{13}}-\dfrac{1}{x^{13}}\right)$).

10. Найти $df(x)$ и $d^2f(x)$, если $f(x)=e^x$ и **1)** x – независимая переменная; **2)** x – функция от t, т.е. $x=\varphi(t)$. Сравните результаты. (**Ответ**: **1)** $df(x)=e^xdx$, $d^2f(x)=e^xdx^2$; **2)** $df=e^{\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)dt$, $d^2f=e^{\varphi(t)}\cdot\left(\varphi'^2(t)+\varphi''(t)\right)dt^2$).

Упражнения.

1. Найти $f''(x)$, если:

а) $f(x)=e^{-x^2}$. (**Ответ**: $f''(x)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$).

б) $f(x)=x\ln x$. (**Ответ**: $f''(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$).

2. Считая x независимой переменной, найти дифференциал второго порядка функции:

а) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. (**Ответ**: $d^2 f(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2 \ (x>0)$).

б) $f(x)=x^x$. (**Ответ**: $d^2 f(x)=x^x\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)dx^2 \ (x>0)$).

3. Найти производные указанных порядков следующих функций:

а) $f(x)=x(2x-1)^2(x+3)^3$, $f^{(6)}(x)=?$ $f^{(7)}(x)=?$ (**Ответ**: $f^{(6)}(x)=4\cdot 6!$, $f^{(7)}(x)=0$).

б) $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$, $f^{(8)}(x)=?$ (**Ответ**: $f^{(8)}(x)=\frac{8!}{(1-x)^9} \ (x\neq 1)$).

в) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f^{(5)}(x)=?$ (**Ответ**: $f^{(5)}(x)=2x^{-6}(137-60\ln x) \ (x>0)$).

4. Показать, что функция $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению $y''+y=0$.

5. Найти производные n-го $(n\in\mathbb{N})$ порядка следующих функций:

а) $f(x)=\frac{1}{x(1-x)}$. (**Ответ**: $f^{(n)}(x)=n!\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$).

б) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$. (**Ответ**: $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$).

Тема 30. Правила Лопиталя. Раскрытие неопределённостей

Теорема 1 (правило Лопиталя для неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $\left(x_0\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}\right)$, причём всюду в этой проколотой окрестности $g'(x)\neq 0$. Если $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$, $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Теорема 2 (правило Лопиталя для неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $\left(x_0\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}\right)$, причём всюду в этой проколотой* *окрестности* $g'(x)\neq 0$. *Если* $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\infty$, $g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\infty$ *и существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Раскрытие неопределённостей других видов

1) Неопределённость вида $(0\cdot\infty)$ сводится к неопределённости вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (по схеме $f\cdot g=\dfrac{g}{1/f}$) или, когда это удобно, к неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ (по схеме $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}$).

2) Неопределённость вида $(\infty-\infty)$ обычно сводится к неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ (по схеме $f-g=\dfrac{1}{1/f}-\dfrac{1}{1/g}=\dfrac{1/g-1/f}{1/(fg)}$).

3) Неопределённости вида $(1^{\infty}),(0^0),(\infty^0)$ сводятся логарифмированием к неопределённости вида $(0\cdot\infty)$ (по схеме $\ln f^g=g\ln f$).

<u>Замечание.</u> Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и в случае односторонних пределов для раскрытия неопределённостей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

<u>Задачи.</u>

Вычислить пределы:

1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{\ln(1+x)^3}$.

Решение: Имеем $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\ln(1+x)^3}$ и $D_f=(-1;0)\cup(0;+\infty)$. Таким образом, $x_0=0$ является предельной точкой области определения функции $f(x)$. Ясно, что предел L есть неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Выполнены все условия теоремы 1 и $\dfrac{(\operatorname{sh}x)'}{\left(\ln(1+x)^3\right)'}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\operatorname{ch}x}{\frac{1}{1+x}}$. Так как $\operatorname{ch}x\xrightarrow[x\to 0]{}1$ и $\dfrac{1}{1+x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$, то $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x}{\frac{1}{1+x}}=\dfrac{1}{3}$ и, следовательно, $L=\dfrac{1}{3}$.

2. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$. (**Ответ**: $L=-\dfrac{9}{2}$).

3. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$. (**Ответ**: $L=1$).

4. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}$. (**Ответ**: $L=-1$).

5. $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$. (**Ответ**: $L=-2$).

6. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Решение: Имеем $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x}$ и $D_f=\mathbb{R}^*$. Значит, $x_0=+\infty$ является предельной точкой области определения функции. Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Воспользоваться правилом Лопиталя для раскрытия этой неопределённости нельзя, т.к. не выполняется одно из условий теоремы 2, а именно, при $x\to+\infty$ не существует предела функции $\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=1+\cos x$. Поэтому вычислять данный предел будем без использования правила Лопиталя. Заметим, что функция, стоящая под знаком предела, есть сумма числа 1 и произведения бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ $(x\to+\infty)$ на ограниченную $\sin x$ $f(x)=1+\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$. Ясно, что предел последнего слагаемого при $x\to+\infty$ равен нулю, поэтому $L=1$.

7. $L=\lim\limits_{x\to 0+}\operatorname{tg}x\cdot\ln(\sin x)$. (**Ответ**: $L=0$).

8. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. (**Ответ**: $L=\dfrac{2}{3}$).

9. $L=\lim\limits_{x\to 0+}x^x$.

Решение: Имеем $f(x)=x^x$ и $D_f=\mathbb{R}_+^*$. Значит, точка $x=0$ является правосторонней предельной точкой области определения данной функции. Очевидно, что речь идёт о неопределённости вида $\left(0^0\right)$. В силу непрерывности показательной функции, имеет место равенство $\lim\limits_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}$. Обозначим $l=\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$ и вычислим этот предел. Здесь имеем неопределённость вида $(0\cdot\infty)$. Сведём её к неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: $l=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}}$.

Так как выполнены все условия теоремы 2 и $\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'}=-\frac{x^{-1}}{x^{-2}}=-x\xrightarrow[x\to 0]{}0$,

то согласно правилу Лопиталя имеем: $l=0$, а, значит, $L=e^0=1$.

10. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$. (**Ответ**: $L=3$).

11. $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\sec x}$. (**Ответ**: $L=1$).

12. $L=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(a>0)}}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}$. (**Ответ**: $L=1-\ln a$).

13. $L=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(a>0,a\neq 1)}}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$. (**Ответ**: $L=\frac{1-\ln a}{\ln a}$).

14. $L=\lim\limits_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{x^e-e^e}$. (**Ответ**: $L=0$).

15. $L=\lim\limits_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{e^x-e^e}$. (**Ответ**: $L=0$).

16. $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{1-\sin x}\right)$. (**Ответ**: $L=\infty$).

17. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. (**Ответ**: $L=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$).

Упражнения.

Вычислить пределы:

1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$. (**Ответ**: $L=2$).

2. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$. (**Ответ**: $L=1$).

3. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$. (**Ответ**: $L=-\frac{1}{3}$).

4. $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}$. (**Ответ**: $L=\frac{1}{3}$).

5. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. (**Ответ**: $L=1$).

6. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$. (**Ответ**: $L=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$).

7. $L=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0{,}01x}$. (**Ответ**: $L=0$).

8. $L=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. (**Ответ**: $L=e^{-1}$).

9. $L=\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. (**Ответ**: $L=1$).

10. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. (**Ответ**: $L=\dfrac{1}{2}$).

11. $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. (**Ответ**: $L=\dfrac{1}{2}$).

12. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$. (**Ответ**: $L=0$).

13. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (**Ответ**: $L=e^{\frac{1}{6}}$).

14. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (**Ответ**: $L=e^{-\frac{1}{6}}$).

15. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (**Ответ**: $L=e^{\frac{1}{3}}$).

16. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (**Ответ**: $L=e^{-\frac{1}{3}}$).

Тема 31. Исследование функции на монотонность. Экстремум

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Если для всех $x\in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$, то x_0 называют *точкой максимума (минимума)* функции $f(x)$, а $f(x_0)$ называют *максимумом (минимумом)* этой функции.

Если при этом для всех $x\in \overset{\bullet}{U}(x_0)$ выполняется строгое неравенство $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$, то x_0 называют *точкой строгого максимума* *(строгого минимума)* функции $f(x)$.

Точки максимума и минимума функции называют *точками экстремума* этой функции.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если* x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и функция дифференцируема в данной точке, то* $f'(x_0)=0$.

Точка, в которой функция дифференцируема и имеет нулевую производную, называется *стационарной точкой* этой функции.

Теорема 2 (критерий монотонности функции на промежутке). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на невырожденном промежутке* $\langle a;b\rangle$ $\left(a,b\in\overline{\mathbb{R}},a<b\right)$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Функция* $f(x)$ *возрастает (убывает) на промежутке* $\langle a;b\rangle$ *тогда и только тогда, когда всюду на* $(a;b)$ *имеет место неравенство* $f'(x)\ge 0$ $\left(f'(x)\le 0\right)$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *дифференцируема в проколотой окрестности* $\overset{\bullet}{U}(x_0)$ *и её производная* $f'(x)$ *сохраняет знак в полуокрестностях* $U^-(x_0)$ *и* $U^+(x_0)$. *Тогда:*

1) *если при переходе через точку* x_0 *производная* $f'(x)$ *меняет знак, то* x_0 *- точка строгого экстремума, причём если в* $U^-(x_0)$ $f'(x)>0$, *а в* $U^+(x_0)$ $f'(x)<0$ *(т.е.* $f'(x)$ *меняет знак с «+» на «-»), то* x_0 *- точка строгого максимума, а если в* $U^-(x_0)$ $f'(x)<0$, *а в* $U^+(x_0)$ $f'(x)>0$ *(т.е.* $f'(x)$ *меняет знак с «-» на «+»), то* x_0 *- точка строгого минимума;*

2) *если при переходе через точку* x_0 *производная* $f'(x)$ *не меняет знак, то функция* $f(x)$ *строго монотонна в окрестности* $U(x_0)$, *причём если в* $\overset{\bullet}{U}(x_0)$ $f'(x)>0$, *то* $f(x)$ *строго возрастает в* $U(x_0)$, *а если в* $\overset{\bullet}{U}(x_0)$ $f'(x)<0$, *то* $f(x)$ *строго убывает в* $U(x_0)$.

Теорема 4 (достаточные условия строгого экстремума в терминах второй производной). *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *своей стационарной точки* x_0, *дважды дифференцируема в самой точке* x_0 *и* $f''(x_0)\ne 0$. *Тогда если* $f''(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка строгого максимума, а если* $f''(x_0)>0$, *то* x_0 *– точка строгого минимума.*

Задачи.

1. Исследовать на монотонность и экстремум функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=3x^5-4x^3-3x+2$.

Решение: Очевидно, имеем $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$. $f'(x)=15x^4-12x^2-3$. Решив уравнение $f'(x)=0$, т.е. биквадратное уравнение $15x^4-12x^2-3=0$, найдём стационарные точки функции $f(x)$. Имеем $x^2=-\frac{1}{5};1$, откуда получаем $x=\pm1-$стационарные точки функции $f(x)$ и, следовательно, $f'(x)=3\left(5x^2+1\right)(x-1)(x+1)$. Поэтому знак производной $f'(x)$ функции $f(x)$ совпадает со знаком произведения $(x-1)(x+1)$. С учётом того, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ и теорем 2 и 3 построим таблицу исследования:

D_f	$-\infty$ $\quad -1 \quad 1 \quad +\infty$
знак $f'(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
монотонность и экстремум $f(x)$	$-\infty \nearrow \underset{\max}{6} \searrow \overset{\min}{-2} \nearrow +\infty$

Таким образом, получили, что: **1)** функция $f(x)$ строго возрастает на полуинтервалах $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$ и строго убывает на отрезке $[-1;1]$; **2)** $x=1-$точка строгого минимума, а $x=-1-$точка строгого максимума функции $f(x)$, при этом $f_{\min}(1)=-2$, $f_{\max}(-1)=6$ [1)].

б) $f(x)=\frac{x^2}{10}-\ln x$. (**Ответ:** $f(x)$ строго убывает на полуинтервале $\left(0;\sqrt{5}\right]$ и строго возрастает на полуинтервале $\left[\sqrt{5};+\infty\right)$; $f_{\min}\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{5}$).

в) $f(x)=x^2\ln x$. (**Ответ:** $f(x)$ строго убывает на полуинтервале $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ и строго возрастает на полуинтервале $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; $f_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$).

г) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$. (**Ответ:** функция $f(x)$ строго возрастает на полуинтервалах $(-\infty;1]$, $[3;+\infty)$ и строго убывает на отрезке $[1;3]$; $f_{\min}(3)=-26$, $f_{\max}(1)=2$).

---

1) Запись $f_{\min}(a)=b$ $\left(f_{\max}(a)=b\right)$ означает, что точка a является точкой минимума (максимума) функции $f(x)$ и этот минимум (максимум) равен b.

д) $f(x)=\dfrac{(x+1)^4}{e^x}$. (**Ответ:** функция $f(x)$ строго убывает на полуинтервалах $(-\infty;-1]$, $[3;+\infty)$ и строго возрастает на отрезке $[-1;3]$; $f_{\min}(-1)=0$, $f_{\max}(3)=\dfrac{256}{e^3}$).

е) $f(x)=\sqrt[3]{x(1-x)^2}$. (**Ответ:** функция $f(x)$ строго возрастает на полуинтервалах $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$, $[1;+\infty)$ и строго убывает на отрезке $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$; $f_{\min}(1)=0$, $f_{\max}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$).

2. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ является строго возрастающей на любом промежутке, не содержащем точку $x_0=0$, но не является вместе с тем возрастающей функцией.

3. Найти точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$. (**Ответ:** $f_{\min}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)=$ $=5$, $f_{\max}(\pi k)=10$ $(k\in\mathbb{Z})$).

4. Доказать неравенства:

а) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$ $(x>0)$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$. Имеем $D_f=\mathbb{R}$, функция $f(x)$ дифференцируема и $f(0)=0$. Исследуем её монотонность на $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=x-\sin x$; так как $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $x>\sin x$, то на $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x)>0$, следовательно, функция $f(x)$ строго возрастает на $\mathbb{R}_+^*$. Таким образом, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)>f(0)=0$, т.е. $f(x)>0$, из чего и следует доказываемое неравенство.

б) $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$ $(x>1)$. **в)** $\dfrac{\ln x}{2}>\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x>1)$.

г) $x-\dfrac{x^3}{3}\le \operatorname{arctg} x\le x-\dfrac{x^3}{6}$ $(0\le x\le 1)$, причём равенства имеют место тогда и только тогда, когда $x=0$.

Упражнения.

1. Исследовать монотонность следующих функций:

а) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. (**Ответ:** функция $f(x)$ строго убывает на полуинтервалах $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$ и строго возрастает на отрезке $[-1;1]$).

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geq 0)$. (**Ответ:** $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[0;100]$ и строго убывает на полуинтервале $[100;+\infty)$).

в) $f(x)=x^2-\ln x^2$. (**Ответ:** функция $f(x)$ строго убывает на полуинтервалах $(-\infty;-1]$, $(0;1]$ и строго возрастает на полуинтервалах $[-1;0)$, $[1;+\infty)$).

2. Доказать неравенства:

а) $e^x>1+x$ $(x\neq 0)$. **б)** $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$.

в) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ $(x>0)$. **г)** $\operatorname{tg} x>x+\dfrac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Найти экстремумы следующих функций:

а) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$. (**Ответ:** $f_{\min}\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\approx -0{,}76$, $f_{\min}\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\approx -0{,}05$, $f_{\max}(1)=0$).

б) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. (**Ответ:** $f_{\min}(-1)=-1$, $f_{\max}(1)=1$).

в) $f(x)=xe^{-x}$. (**Ответ:** $f_{\max}(1)=\dfrac{1}{e}$).

Тема 32. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Определение 1. Функция $f(x)$, определённая на невырожденном промежутке I, называется *выпуклой (вогнутой)* на данном промежутке, если всякая дуга её графика лежит под (над) стягивающей эту дугу хордой (не считая концов дуги).

Отметим, что функция $f(x)$ является выпуклой на невырожденном промежутке I тогда и только тогда, когда функция $-f(x)$ вогнута на этом промежутке.

График выпуклой (вогнутой) функции также будем называть выпуклым вогнутым. Таким образом, выпуклость и вогнутость функции определяют направление изгиба её графика.

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости/вогнутости). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на невырожденном промежутке* $\langle a;b\rangle$ $(a,b\in\mathbb{R}, a<b)$ *и дважды дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Если*

всюду на $(a;b)$ *имеет место неравенство* $f''(x)>0$ $\left(f''(x)<0\right)$, *то функция* $f(x)$ *выпукла (вогнута) на этом промежутке.*

Отметим, что если дифференцируемая функция выпукла (вогнута) на интервале, то её график лежит выше (ниже) своей касательной (кроме точки касания), проведённой в любой его точке.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется *точкой перегиба* этой функции, если при переходе через x_0 функция $f(x)$ меняет выпуклость на вогнутость или наоборот. При этом точка $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то иногда говорят, что график этой функции меняет направление изгиба при переходе через точку $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$.

Теорема 2 (необходимое условие точки перегиба). *Если функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в своей точке перегиба* x_0, *то* $f''(x_0)=0$.

Теорема 3 (достаточное условие точки перегиба). *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *этой точки и вторая производная* $f''(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0, *то* x_0 *является точкой перегиба этой функции.*

Теорема 4 (достаточное условие точки перегиба в терминах третьей производной). *Если функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, $f''(x_0)=0$ *и в этой точке существует третья производная, отличная от нуля, т.е.* $f'''(x_0)\neq 0$, *то* x_0 *является точкой перегиба функции* $f(x)$.

Отметим, что если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то касательная к графику в точке $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ пересекает его, т.е. в некоторых левой и правой полуокрестностях точки x_0 график функции $f(x)$ расположен выше и соответственно, ниже касательной или наоборот.

<u>Задачи.</u>

1. Показать, что функция $f(x)=(x+1)^4+e^{-x}$ выпукла, а функция $g(x)=\ln\left(1-x^2\right)$ вогнута.

Решение: Исследуем на выпуклость/вогнутость сначала функцию

$f(x)$. Имеем $f(x)=(x+1)^4+e^{-x}$, $D_f=\mathbb{R}$ и функция $f(x)-$ бесконечно дифференцируема. Для того, чтобы доказать, что функция выпукла на промежутке, достаточно показать, что вторая производная этой функции строго положительна на данном промежутке. Найдём первую, а затем вторую производную функции $f(x)$: $f'(x)=4(x+1)^3-e^{-x}$, $f''(x)=$ $=12(x+1)^2+e^{-x}>0$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 1 функция $f(x)-$ выпукла в $\mathbb{R}$, т.е. на всей своей области определения.

Тем же способом исследуем функцию $g(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. Имеем $D_g=(-1;1)$ и функция $g(x)-$ бесконечно дифференцируема. Вычислим $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$, $g''(x)=-2\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}<0$ для любого $x\in(-1;1)$, откуда в силу теоремы 1 следует, что функция $g(x)-$ вогнута на интервале $(-1;1)$, т.е. на всей своей области определения.

2. Исследовать следующие функции на выпуклость/вогнутость и найти их точки перегиба:

а) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла на каждом полуинтервале $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$ и $[1;+\infty)$, вогнута на отрезке $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$; $x=\dfrac{1}{3}$ и $x=1-$ точки перегиба функции $f(x)$).

б) $f(x)=x^4-x^3-18x^2+24x-12$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла на каждом полуинтервале $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$ и $[2;+\infty)$, вогнута на отрезке $\left[-\dfrac{3}{2};2\right]$; $x=-\dfrac{3}{2}$ и $x=2-$точки перегиба функции $f(x)$).

в) $f(x)=x+x\sqrt[3]{x^2}$. (**Ответ**: функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty;0]$ вогнута, а на промежутке $[0;+\infty)$ выпукла; $x=0-$точка перегиба функции $f(x)$).

3. Найти все значения параметра a, при которых кривая $y=x^4+ax^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$ выпукла. (**Ответ**: $a\in[-2;2]$).

4. Показать, что график функции $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет ровно 3 точки перегиба, лежащие на одной прямой.

5. На одном чертеже (М: 1 = 1 см) в окрестности соответствующей точки изобразить эскиз графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, если при $x=3$: $f(3)=1$, $f'(3)=0$, $f''(3)=0$, $f'''(3)=0$, $f^{(4)}(3)=1$; при $x=-1$: $g(-1)=2$, $g'(-1)=1$, $g''(-1)=0$, $g'''(-1)=3$.

Упражнения.

1. Исследовать следующие функции на выпуклость/вогнутость и найти их точки перегиба:

а) $f(x)=3x^2-x^3$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла на промежутке $(-\infty;1]$ и вогнута на промежутке $[1;+\infty)$; $x=1-$ точка перегиба функции $f(x)$).

б) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла в $\mathbb{R}$).

в) $f(x)=x+\sin x$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла на каждом отрезке $[\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ и вогнута на каждом отрезке $[2\pi k;\pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$; $x=\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})-$ точки перегиба функции $f(x)$).

г) $f(x)=e^{-x^2}$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла на каждом промежутке $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, вогнута на промежутке $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-$ точки перегиба функции $f(x)$).

д) $f(x)=x^x$. (**Ответ**: функция $f(x)$ выпукла).

2. Показать, что на промежутке $(0;+\infty)$ функции $f_1(x)=x^\alpha$ $(\alpha>1)$, $f_2(x)=e^x$ и $f_3(x)=x\ln x$ выпуклы, а функции $f_4(x)=x^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ и $f_5(x)=\ln x$ вогнуты.

Тема 33. Полное исследование функции и построение её графика

Схема полного исследования функции:

1. Найти область определения, исследовать непрерывность и дифференцируемость функции.
2. Исследовать чётность/нечётность и периодичность функции.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции.
4. Исследовать на монотонность и экстремум функции.
5. Исследовать функцию на выпуклость/вогнутость и найти её точки перегиба.
6. Найти асимптоты и исследовать поведение функции в граничных точках её области определения.
7. Построить график функции.

Задачи.

1. Провести полное исследование рациональной функции

$f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Написать уравнение касательной к графику в его точках перегиба. Построить касательные, затем график функции (М:1 = 1см). Исходя из графика функции $f(x)$, на том же чертеже изобразить график функции $f'(x)$.

Решение: 1. Область определения функции $f(x)$ очевидна: $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Функция непрерывна и бесконечно дифференцируема.

2. По виду D_f сразу констатируем: функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной (нет симметрии D_f относительно точки $x=0$); функция $f(x)$ не является периодической (из $\mathbb{R}$ удалена лишь одна точка $x=-1$, а у периодической функции таких точек должно быть бесконечно много).

3. Определим промежутки знакопостоянства функции $f(x)$: $(x+1)^2\geq 0$ для любого $x\in D_f$, а значит, знак $f(x)$ совпадает со знаком x^3 и, следовательно, – со знаком x. В итоге мы получили, что $f(x)>0$ всюду на интервале $(0;+\infty)$ и $f(x)<0$ на $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$. Нули функции: $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

4. Найдём точки экстремума и определим промежутки возрастания и убывания функции. Вычислим производную данной функции:

$$f'(x)=\frac{\left(x^3\right)'\cdot(x+1)^2-x^3\cdot\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot(x+1)^2-x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}.$$

Откуда $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$. Ясно, что знак $f'(x)$ на D_f совпадает со знаком произведения $(x+3)(x+1)$, т.е. $f'(x)>0$ на интервалах $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(-3;-1)$. Составим таблицу исследования, используя достаточный признак монотонности, необходимое и достаточное условие экстремума.

D_f	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	$-1\notin D_f$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не сущ.	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\dfrac{27}{4}$	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Таким образом, делаем вывод: функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $[-3;-1]$ и строго возрастает на промежутках $(-\infty;-3]$, $(-1;+\infty)$. Точка

$x=-3$ является точкой максимума и $f_{\max}(-3)=-\dfrac{27}{4}$ – максимум функции.

5. Определим точки перегиба и установим характер изгиба графика функции. Для этого найдём вторую производную функции $f(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}\right)'=\frac{\left(x^3+3x^2\right)'(x+1)^3-\left(x^3+3x^2\right)\left((x+1)^3\right)'}{\left((x+1)^3\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3x^2+6x\right)(x+1)^3-\left(x^3+3x^2\right)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=3x\frac{(x+2)(x+1)-x(x+3)}{(x+1)^4}=\frac{6x}{(x+1)^4}.$$

Отсюда следует, что $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$ и знак $f''(x)$ на D_f совпадает со знаком x, т.е. $f''(x)<0$ на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$ и $f''(x)>0$ на интервале $(0;+\infty)$. На основе полученных данных и достаточного условия выпуклости функции и точки перегиба составим таблицу.

D_f	$(-\infty;-1)$	$-1\notin D_f$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	не сущ.	–	0	+
$f(x)$	вогнута	не сущ.	вогнута	перегиб	выпукла

Итак, функция $f(x)$ вогнута на промежутках $(-\infty;-1)$, $(-1;0]$ и выпукла на промежутке $[0;+\infty)$. Точка $x=0$ является точкой перегиба функции $f(x)$ и $(0;0)$ – точка перегиба графика этой функции.

6. Определим, существуют ли асимптоты у графика функции $f(x)$ и в случае положительного ответа, найдём их.

а) Вертикальные асимптоты: т.к. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=\infty$, то прямая $x=-1$ – единственная вертикальная асимптота графика функции $f(x)$.

б) Горизонтальные асимптоты: т.к. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}=\infty$ (не является конечным), то горизонтальных асимптот график функции $f(x)$ не имеет.

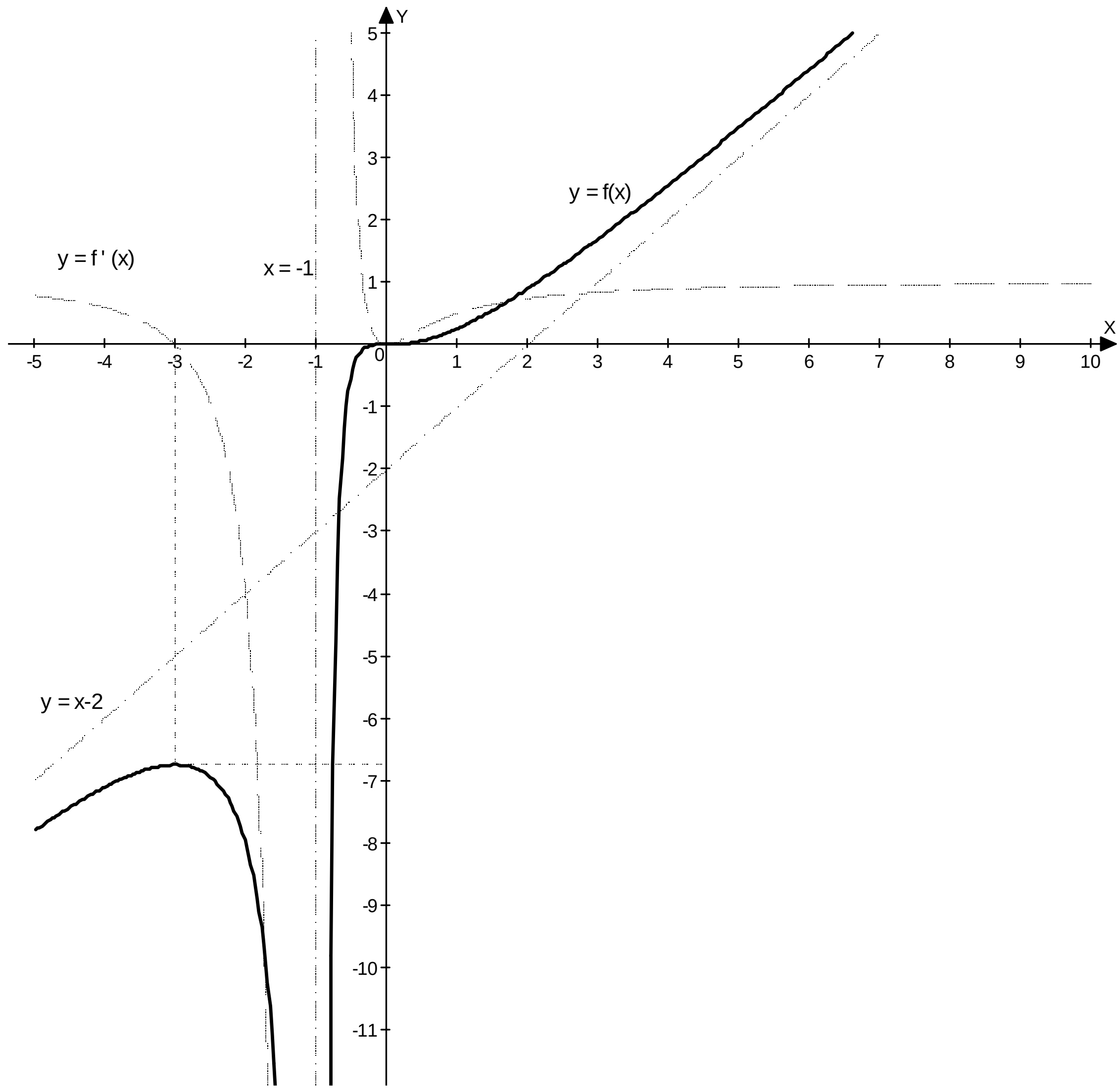
в) Наклонные асимптоты $y=kx+b$ $\left(k\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}\right)$: т.к. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=$

$$=1=k \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=$$

$=-2=b$, то найдены коэффициент k и свободный член b линейной функции $y = kx + b$, таким, образом, прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой при $x \to \pm\infty$.

Запишем уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т.е. $y = f(0) + f'(0) \cdot x$. Так как $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, то прямая $y = 0$ – касательная к графику функции $f(x)$ в точке его перегиба.

7. На основе проведённого исследования построим график функции $f(x)$.



Функция $f'(x)$ определена там же где и функция $f(x)$. Там, где функция $f(x)$ вогнута, функция $f'(x)$ убывает, а где $f(x)$ выпукла – там функция $f'(x)$ возрастает. Стационарные точки функции $f(x)$ – нули функции $f'(x)$, точка перегиба функции $f(x)$ является точкой экстремума функции $f'(x)$, а именно точкой минимума. Единственная вертикальная асимптота графика функции $f'(x)$ та же, что у графика функции $f(x)$, а т.к. степени числителя и знаменателя функции $f'(x)$ равны, то график функции $f'(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ (отношение старших коэффициентов) при $x\to\pm\infty$.

На рисунке график функции $f(x)$ изображён сплошной линией, а график функции $f'(x)$ – широким пунктиром.

2. Провести полное исследование иррациональной функции $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$. Написать уравнение касательной к графику в точках пересечения с осями координат. Построить касательные, затем график функции (М: 1 = 3см). Исходя из графика функции f, на том же самом чертеже изобразить график функции f'.

3. Провести полное исследование трансцендентной функции $f(x)=\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$. Записать уравнения касательных к графику в точках перегиба и точках его пересечения с осью абсцисс. Построить касательные, затем график функции (М: 1 = 3см). Исходя из графика функции f, на том же самом чертеже изобразить график функции f'.

4. Провести полное исследование трансцендентной функции $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. Записать уравнения касательных к графику в точках перегиба и точках его пересечения с осью абсцисс. Построить касательные, затем график функции. Исходя из графика функции f, на том же самом чертеже изобразить график функции f'.

Упражнения.

Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

1. $f(x)=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; **2.** $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$; **3.** $f(x)=\dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^2}$; **4.** $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;

5. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$; **6.** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$; **7.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; **8.** $f(x)=\left(1+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$;

9. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **10.** $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Тема 34. Наименьшее и наибольшее значения функции

Известно что, если функция $f(x)$ непрерывна на невырожденном отрезке, то она достигает на нём своих граней, т.е. имеет на нём наименьшее и наибольшее значения.

Если эта функция ещё и дифференцируема на указанном отрезке, за исключением, быть может, конечной совокупности его точек (такие точки будем называть точками недифференцируемости функции), то свои наименьшее и наибольшее значения функция имеет 1) либо в своих стационарных точках, 2) либо в точках недифференцируемости, лежащих в интервале, 3) либо на концах отрезка.

Стационарные точки и точки недифференцируемости функции называют критическими точками этой функции. Таким образом, свои наименьшее и наибольшее значения функция $f(x)$ принимает либо в своих критических точках, лежащих на отрезке, либо в его концах.

Если функция непрерывна на промежутке, являющемся интервалом либо полуинтервалом, то, вообще говоря, она может не иметь наименьшего и (или) наибольшего значений на этом промежутке. В этом случае для исследования существования наименьшего и наибольшего значений надо также учитывать поведение функции при подходе к тем концам промежутка, которые ему не принадлежат, т.е. надо вычислять соответствующие односторонние пределы функции в этих концах промежутка (см. задачу 2б).

Задачи.

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функций $f(x)$ на отрезке Δ:

а) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1, \qquad \Delta=[-2;4]$;

Решение: Область определения функции очевидна: $D_f=\mathbb{R}\supset\Delta$ и функция $f(x)$ непрерывна и, следовательно, имеет наименьшее и наибольшее значения на отрезке Δ. Вычислим производную функции $f(x)$ и найдём стационарные точки данной функции:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right),\ f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right..$$

Подсчитаем значения функции $f(x)$ в найденных стационарных точках и на концах отрезка Δ: $f(-1)=8$, $f(2)=-19$ $f(-2)=-3$, $f(4)=33$. Поэтому

$$\min_{x\in\Delta}f(x)=\min\{f(-1),f(2),f(-2),f(4)\}=f(2)=-19,$$
$$\max_{x\in\Delta}f(x)=\max\{f(-1),f(2),f(-2),f(4)\}=f(4)=33.$$

б) $f(x)=\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln x, \qquad \Delta=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

(**Ответ:** $\min\limits_{x\in\Delta}f(x)=f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{4}\ln 3$, $\max\limits_{x\in\Delta}f(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{4}\ln 3$).

2. Выяснить, существуют ли наименьшее и наибольшее значения функций на указанных промежутках. В случае положительного ответа найти их. Существуют ли грани? Если да, то указать их.

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \qquad I_1=(0;4]$; (**Ответ:** существуют $\inf\limits_{x\in I_1}f(x)$, $\min\limits_{x\in I_1}f(x)$ и

$\inf\limits_{x\in I_1} f(x)=\min\limits_{x\in I_1} f(x)=f(4)=\dfrac{1}{4}$; не существует $\sup\limits_{x\in I_1} f(x)$ и не существует $\max\limits_{x\in I_1} f(x)$).

б) $g(x)=x+\ln x$, $I_2=\left[\dfrac{1}{2};1\right)$; (**Ответ:** существуют $\inf\limits_{x\in I_2} g(x)$, $\min\limits_{x\in I_2} g(x)$ и $\inf\limits_{x\in I_2} g(x)=\min\limits_{x\in I_2} g(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln 2$; существует $\sup\limits_{I_2} g(x)=1$, но не существует $\max\limits_{x\in I_2} g(x)$).

в) $h(x)=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$, $I_3=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. (**Ответ:** существуют $\sup\limits_{x\in I_3} h(x)$, $\max\limits_{x\in I_3} h(x)$ и $\sup\limits_{x\in I_3} h(x)=\max\limits_{x\in I_3} h(x)=h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, не существуют $\inf\limits_{x\in I_3} h(x)$ и $\min\limits_{x\in I_3} h(x)$).

3. Доказать, что существуют грани функций на указанных промежутках и найти их.

а) $f(x)\dfrac{x}{e^{\frac{x}{100}}}$, $I_1=\mathbb{R}_+$; **б)** $g(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $I_2=\mathbb{R}_+^*$.

4. Найти наибольший член последовательности $\{x_n\}=\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+10^3}\right\}$. Существует ли наименьший член этой последовательности?

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+10^3}$ $\left(D_f=\mathbb{R}_+\right)$, сужение которой на множество $\mathbb{N}$ есть заданная последовательность. Функция $f(x)$ дифференцируема в $\mathbb{R}_+^*$. Найдём производную этой функции:

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x+10^3\right)^{-1}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\left(x+10^3\right)^{-1}+x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(x+10^3\right)^{-1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x+10^3\right)^{-1}-x^{\frac{1}{2}}\left(x+10^3\right)^{-2}=\frac{10^3-x}{2\sqrt{x}\left(x+10^3\right)^2}\ \left(D_{f'}=\mathbb{R}_+^*\right).$$

Имеем $f'(x)=0\Leftrightarrow x=10^3$. А т.к. знак $f'(x)$ на D_f противоположен знаку $x-10^3$, т.е. $f'(x)>0$ на $\left(0;10^3\right)$ и $f'(x)<0$ на $\left(10^3;+\infty\right)$, то на промежутке $\left(0;10^3\right]$ функция $f(x)$ строго возрастает, а на промежутке

$\left[10^3;+\infty\right)$ функция $f(x)$. строго убывает. Следовательно, заданная последовательность $\{x_n\}$ строго возрастает для всех $n=\overline{1,10^3}$ и строго убывает для всех номеров $n \geq 10^3$. Таким образом, член с номером $n=10^3=1000$ является наибольшим членом заданной последовательности, $x_{1000} =$ $=\dfrac{\sqrt{10}}{200}=\dfrac{1}{20\sqrt{10}}$.

Так как $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$ и $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+10^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ убывая, то наименьшего члена заданная последовательность не имеет.

5. Доказать при $x \in [-2;2]$ неравенство $\left|3x - x^3\right| \leq 2$.

6. При n измерениях некоторой величины x получили её приближённые значения x_1, x_2, ..., x_n. Определить значение величины x, при котором сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x)^2$ квадратов погрешностей была бы наименьшей.

Упражнения.

1. Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций на указанных отрезках:

а) $f(x)=x^2-4x+6$ $\quad\Delta=[-3;10]$. **(Ответ:** $\min\limits_{\Delta} f(x)=2$, $\max\limits_{\Delta} f(x)=66$).

б) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ $\quad\Delta=[-10;10]$. **(Ответ:** $\min\limits_{\Delta} f(x)=0$, $\max\limits_{\Delta} f(x)=132$).

в) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $\quad\Delta=[0{,}01;100]$. **(Ответ:** $\min\limits_{\Delta} f(x)=2$, $\max\limits_{\Delta} f(x)=100{,}01$).

2. Найти грани функции $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на $\mathbb{R}_+^*$. **(Ответ:** $\inf\limits_{\mathbb{R}_+^*} f(x)=0$, $\sup\limits_{\mathbb{R}_+^*} f(x)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\approx 1{,}2$).

3. Найти наибольший член последовательности:

а) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$. **(Ответ:** $\max\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}=a_{14}=\dfrac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1{,}77\cdot 10^7$).

б) $\{a_n\}=\left\{\sqrt[n]{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}$. **(Ответ:** $\max\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}=a_3=\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$).

Тема 35. Формула Тейлора

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном промежутке I. Если она дифференцируема на этом промежутке и её производная $f'(x)$ непрерывна на I, то функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* на промежутке I. При этом говорят, что $f(x)$ есть функция класса $C^1(I)$.

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном отрезке Δ с концами x_0 и x, непрерывна в точке x, n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $(n+1)$ раз дифференцируема на интервале с концами x_0 и x. Тогда на отрезке Δ функция $f(x)$ представима в виде*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (1)$$

где α – некоторая точка, лежащая между x_0 и x.

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши). *Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном отрезке Δ с концами x_0 и x, n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и x и $(n+1)$ раз дифференцируема на интервале с концами x_0 и x. Тогда на отрезке Δ функция $f(x)$ представима в виде*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n!}(x-x_0)(x-\alpha)^n, \quad (2)$$

где α – некоторая точка, лежащая между x_0 и x.

Формула (1) называется *формулой Тейлора с остаточным членом* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (последнее слагаемое правой части равенства) *в форме Лагранжа*, а формула (2) – *формулой Тейлора с остаточным членом* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n!}(x-x_0)(x-\alpha)^n$ *в форме Коши.*

Замечание 1. Если $x_0=0$, то точку α, очевидно, можно записать в виде θx, где $\theta\in(0;1)$. В этом случае формула (1) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

а формула (2) – вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},$$

и эти формулы называются соответственно *формулами Маклорена с ос-*

таточными членами в формах Лагранжа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ *и Коши* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$.

Замечание 2. Если в формулах Тейлора (1) и (2) обозначить $x-x_0=\Delta x$, и, следовательно, $x=x_0+\Delta x$ и $\alpha=x_0+\theta\Delta x$ $(\theta\in(0;1))$, то они принимают соответственно вид

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(1-\theta)^n\Delta x^{n+1},$$

где $R_n(\Delta x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$ есть остаточный член в форме Лагранжа,

а $R_n(\Delta x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(1-\theta)^n\Delta x^{n+1}$ – остаточный член в форме Коши.

В частности, при $x_0=0$, а значит, при $\Delta x=x$ получим записанные выше формулы Маклорена с остаточными членами в формах Лагранжа и Коши.

Отметим, что остаточный член формулы Тейлора есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$ или (Δx^n), при $x\to x_0$ $(\Delta x\to 0)$, и соответственно остаточный член формулы Маклорена – бесконечно малая более высокого порядка, чем x^n, при $x\to 0$.

Формулы Маклорена для основных элементарных функций:

1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;
2. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n+1})$;
3. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$;
4. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)$;
5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

Задачи.

1. Используя формулы для основных элементарных функций, разложить в ряд Маклорена функцию $y=\operatorname{ch}x$.

Решение: По определению $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$. Запишем разложения по формуле Маклорена функций e^x и e^{-x}:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right);$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\cdot\left(2+x^2+\frac{2x^4}{4!}+\ldots+\frac{2x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)\right)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right).$$

2. Найти три первых члена формулы Тейлора функции $f(x)=\sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$. (**Ответ:** $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$).

3. Написать разложения по целым положительным степеням переменной x до члена с x^5 включительно функции $f(x)=e^{2x-x^2}$.

Решение: Введём обозначения: $y=2x-x^2$. Учитывая, что необходимо написать разложение до члена с x^5, функция e^y примет вид: $e^y=1+y+\dfrac{y^2}{2!}+\dfrac{y^3}{3!}+\dfrac{y^4}{4!}+\dfrac{y^5}{5!}+o\left(y^5\right)$. Поэтому, возвращаясь к переменной x,

$$e^{2x-x^2}=1+2x-x^2+\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^5}{5!}+o\left(\left(2x-x^2\right)^5\right).$$

Упростим полученное разложение:

$$e^{2x-x^2}=1+2x-x^2+2x^2-2x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{4x^3}{3}-2x^4+x^5+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{3}+\frac{4x^5}{15}+o\left(x^5\right)$$

или, окончательно, $e^{2x-x^2}=1+2x+x^2-\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5x^4}{6}-\dfrac{x^5}{15}+o\left(x^5\right)$.

4. Используя разложения элементарных функций, найти предел $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение: Имеем $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, $D_f=\mathbb{R}^*$ и заданный предел есть неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$. Запишем разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена до члена со степенью 3 аргумента x: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)$. Используем полученное разложение для вычисления заданного предела:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}.$$

5. Используя разложения элементарных функций, найдите предел $L = \lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$. (**Ответ**: $L = \frac{1}{3}$).

Упражнения.

1. Написать разложения по целым положительным степеням переменной x до члена с x^3 включительно функции $f(x) = \sin(\sin x)$. (**Ответ**: $x - \frac{x^3}{3}$).

2. Функцию $y = a\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$ в окрестности точки $x = 0$ приближённо заменить параболой 2-ого порядка. (**Ответ**: $a + \frac{x^2}{2a}$).

3. Используя формулы для основных элементарных функций, разложите в ряд Маклорена функцию $y = \mathrm{sh}x$. (**Ответ**: $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x)$).

4. Используя разложения элементарных функций, найдите предел $L = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. (**Ответ**: $L = -\frac{1}{4}$).

Тема 36. Геометрические и физические приложения производной

<u>Задачи.</u>

1. Из квадратного куска жести (со стороной a см) вырезать 4 одинаковых угловых квадрата так, чтобы, свернув части стандартным образом, получить коробку без крышки наибольшего объёма. Из прямоугольного куска жести (со сторонами a и b см, $a \neq b$) вырезать 4 одинаковых угловых квадрата так, чтобы, свернув части стандартным образом, получить коробку без крышки наибольшего объёма. (**Ответ**: из квадратного куска жести надо вырезать угловые квадраты со стороной $\frac{a}{6}$ см; из прямоугольного куска жести надо вырезать угловые квадраты со стороной

$\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ см).

2. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 м^3, чтобы на внутреннюю облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение: Пусть x м – длина стороны дна бассейна, h м – глубина бассейна. Так как бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда и дно имеет форму квадрата, то из условия можно сделать вывод, что $V = x^2 h = 32$, т.е. $h = \dfrac{32}{x^2}$. Запишем формулу для вычисления площади поверхности данного бассейна: $S = x^2 + 4hx$. Для строго положительных значений аргумента (ведь длина стороны дна бассейна строго положительна) рассмотрим функцию: $f(x) = x^2 + 4hx = x^2 + 4\cdot\dfrac{32}{x^2}\cdot x = x^2 + \dfrac{128}{x}$. Найдём стационарные точки этой функции: $y'(x) = \left(x^2 + \dfrac{128}{x}\right)' = 2x - \dfrac{128}{x^2}$, откуда

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 128 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 64 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Так как $f'(x) < 0$ на $(0; 4)$ и $f'(x) > 0$ на $(4; +\infty)$, то $x = 4$ является точкой минимума функции $f(x)$ и $f_{\min}(4) = 48$. Так как $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, то $f(4) = 48$ – наименьшее значение функции $f(x)$ на интервале $(0; +\infty)$ $h = \dfrac{32}{4^2} = 2$. Таким образом, мы получили, что на внутреннюю облицовку стен и дна бассейна пойдёт наименьшее количество материала (наименьшая площадь облицовки – 48 м^2), если длина стороны дна равна 4 м, а глубина бассейна – $h = \dfrac{32}{4^2} = 2$ м.

3. В данный шар радиуса R вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность. (**Ответ**: радиус основания цилиндра $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$, высота $\sqrt{2}R$).

4. Чтобы огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора (меньшего полукруга), имеется кусок проволоки длиной 20 м. Каким следует выбрать радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (**Ответ**: 5 м).

5. Завод расположен на расстоянии 12 км от железной дороги, на которой на расстоянии 20 км от завода расположен город. Как провести шоссе от завода до железной дороги (построить там перезагрузочную станцию), чтобы стоимость перевозки изделий от завода до города была наименьшей, если стоимость перевозки по шоссе в 2 раза больше стоимости по железной дороге? (**Ответ**: перезагрузочная станция (конец шоссе) должна быть расположена на расстоянии $\left(16-4\sqrt{3}\right)$ км от города, т.е. шоссе должно быть проложено под углом 60° к железной дороге).

6. Сопротивление деревянной прямоугольной балки на изгиб пропорционально произведению ширины сечения на квадрат её высоты. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы сопротивление её на изгиб было наибольшим. (**Ответ**: ширина балки $\frac{\sqrt{3}}{3}d$, толщина $\frac{\sqrt{6}}{3}d$).

7. Открытый желоб в сечении имеет форму равнобедренной трапеции, меньшее основание и боковые стороны которой равны a см. Чему равен угол наклона стенок желоба к вертикали, если пропускная способность желоба наибольшая. (**Ответ**: $\frac{\pi}{6}$).

Упражнения.

1. При каком основании логарифма существует хотя бы одно положительное число, равное своему логарифму? (**Ответ**: основание a логарифма должно принадлежать множеству $\left(0;1\right)\cup\left(1;e^{1/e}\right]$).

2. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший. (**Ответ**: квадрат со стороной $\sqrt{S}$).

3. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма его катета и гипотенузы фиксирована. (**Ответ**: острые углы треугольника 30° и 60°).

4. Найти наибольший объём V цилиндра, вписанного в шар радиуса R. (**Ответ**: $V=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$).

5. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости? (**Ответ**: центральный угол вырезаемого сектора равен $2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$).

6. К реке шириной a метров построен под прямым углом канал шириной b метров. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал? (**Ответ**: $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$).

Тема 37. Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 1. Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на числовом множестве E, являющемся интервалом или объединением интервалов. Если на E существует дифференцируемая функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$, то эта функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* или просто *первообразной* (для) функции $f(x)$ на множестве E.

Если функция $f(x)$ имеет на множестве E первообразную $F(x)$, то $f(x)$ имеет на этом множестве бесконечно много первообразных, а в случае, если E – интервал, то любая первообразная функции $f(x)$ представима в виде: $F(x)+C \ (C\in\mathbb{R})$.

Итак, все первообразные функции $f(x)$, определённой на интервале, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале и имеет на нём первообразную $F(x)$. Совокупность всех первообразных данной функции называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x)+C \ (\forall C\in\mathbb{R})$.

Из определений 1 и 2 вытекает, что если функция $f(x)$ имеет на интервале первообразную, то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ и, следовательно, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$. А если $f(x)$ дифференцируема на интервале, то её производная $f'(x)$, очевидно, имеет на этом интервале первообразную и

$$\int f'(x)dx = f(x)+C \text{ или } \int (df)(x) = f(x)+C. \tag{1}$$

Неопределённый интеграл обладает свойством *линейности*, т.е. если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на интервале, то любая их линейная комбинация $af(x)+bg(x) \ (a,b\in\mathbb{R})$ также имеет первообразную на данном интервале, при этом, если $a^2+b^2\neq 0$, то имеет место равенство $\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$.

В частности, если функция $f(x)$ имеет на интервале первообразную, то $\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(x)d(ax) \ \left(a\in\mathbb{R}^*\right)$ (*внесение постоянного множителя под знак дифференциала*) (т.к. $d(ax)=adx$) и $\int f(x)dx = \int f(x)d(x+b)$ $(b\in\mathbb{R})$ (*внесение постоянного слагаемого под знак дифференциала*) (т.к. $d(x+b)=dx$).

Табличные интегралы:

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \left(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right)$;

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad \left(a \in \mathbb{R}_{+}^{*} \setminus \{1\}\right) \quad \left(\int e^{x}dx = e^{x} + C\right)$;

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

8. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$

$\left(\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \quad \left(a \in \mathbb{R}^{*}\right)\right)$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

$\left(\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C \quad \left(a \in \mathbb{R}_{+}^{*}\right)\right)$;

10. $\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad \left(\int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad \left(a \in \mathbb{R}^{*}\right)\right)$

(«высокий логарифм»);

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2}}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^{2}}\right) + C \quad \left(\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}} = \ln\left(x + \sqrt{a^{2}+x^{2}}\right) + C \quad \left(a \in \mathbb{R}_{+}^{*}\right)\right)$

(«длинный логарифм»);

12. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$;

13. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$;

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2} x} = \operatorname{th} x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2} x} = -\operatorname{cth} x + C$.

<u>Задачи.</u>

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $I=\int (x+1)^3(2x-1)dx$.

Решение: $I=\int (x+1)^3(2x-1)dx=\int \left(2x^4+5x^3+3x^2-x-1\right)dx$. В силу линейности неопределённого интеграла $I=2\int x^4dx+5\int x^3dx+3\int x^2dx-$ $-\int xdx-\int dx$. Имеем 5 табличных интегралов от степенных функций. Вычисляя их, получаем: $I=\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$.

б) $I=\int e^x\left(2^x+3^x\right)dx$. (**Ответ**: $I=e^x\left(\frac{2^x}{1+\ln 2}+\frac{3^x}{1+\ln 3}\right)+C$).

в) $I=\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$. (**Ответ**: $I=\sin x-\cos x+C$).

г) $I=\int \left(\sqrt[3]{4}-\sqrt{x}\right)^2dx$. (**Ответ**: $I=2\sqrt[3]{2}x-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$).

д) $I=\int \frac{3^x+5^{2x}}{7^{\frac{x}{2}}}dx$. (**Ответ**: $I=7^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3^x}{\ln\frac{3\sqrt{7}}{7}}+\frac{5^{2x}}{\ln\frac{25\sqrt{7}}{7}}\right)+C$).

2. Используя метод внесения постоянных под знак дифференциала, вычислить интегралы:

а) $I=\int \sin(5x-2)dx$.

Решение: Внося под знак дифференциала постоянный множитель 5, затем постоянное слагаемое -2 и воспользовавшись формулой (1), сразу получим: $I=\frac{1}{5}\int \sin(5x-2)d(5x-2)=\frac{1}{5}\int d\left(\sin(5x-2)\right)=-\frac{1}{5}\cos(5x-2)+C$.

б) $I=\int \frac{dx}{\cos^2 6(x-1)}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{6}\operatorname{tg}(6x-6)+C$).

в) $I=\int \frac{dx}{x^2+3}$. (**Ответ**: $I=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$).

г) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4+5x^2}}$. (**Ответ**: $I=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x+\sqrt{1+\frac{5}{4}x^2}\right)+C$).

д) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}$. (**Ответ**: $I=\frac{\sqrt{5}}{5}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}x+C$).

3. Используя формулу (1), вычислить интегралы:

а) $I=\int\frac{2xdx}{x^4+8}$.

Решение: Так как $d\left(x^2\right)=2xdx$, то $I=\int\frac{2xdx}{x^4+8}=\int\frac{d\left(x^2\right)}{x^4+8}=\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\frac{x^4}{8}+1}=$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\left(\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{2\sqrt{2}}{8}\int\frac{d\left(\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int d\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right),$$ и по формуле (1)

окончательно получим $I=\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2\sqrt{2}}+C$.

б) $I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$. (**Ответ**: $I=-\sqrt{1+2\cos x}+C$).

в) $I=\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$. (**Ответ**: $I=e^{\operatorname{tg}x}+C$).

г) $I=\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$. (**Ответ**: $I=\sin(\ln x)+C$).

д) $I=\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$. (**Ответ**: $I=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x\right)+C$).

4. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sin x}$ двумя способами и объяснить «несовпадение» ответов. (**Ответ**: $I=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\left(=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C\right)$).

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $I=\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$. (**Ответ**: $I=x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$).

2. $I=\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$).

3. $I=\int(2x-3)^{10}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$).

4. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$. (**Ответ**: $I=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$).

5. $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. (**Ответ**: $I=-\sqrt{1-x^2}+C$).

6. $I=\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{4}\left(1+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+C$).

7. $I=\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$).

8. $I=\int\sin^5 x\cos x dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{6}\sin^6 x+C$).

Тема 38. Вычисление неопределённых интегралов заменой переменной и по частям

Теорема 1 (интегрирование заменой переменной). *Пусть функция* $\varphi(t)$ *строго монотонна и дифференцируема на интервале* I *, а её множеством значений* $\varphi(I)$ *служит интервал* J *, на котором определена функция* $f(x)$. *Если сложная функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *имеет первообразную на интервале* I *, то функция* $f(x)$ *имеет первообразную на интервале* J *, при этом имеет место формула*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}, \tag{1}$$

называемая формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Замечание. Если в правой части формулы (1) подынтегральную функцию $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ обозначить через $g(t)$, а функцию $\varphi^{-1}(x)$ – через $h(x)$, то формулы (1) принимает вид $\int f(x)dx=\int g(t)dt\Big|_{t=h(x)}$, или после замены t на y

$$\int f(x)dx=\int g(y)dy\Big|_{y=h(x)} \tag{1'}$$

Формулу (1') будем называть *подстановкой в неопределённом интеграле.*

Подчеркнём, что при использовании формулы (1'), подстановка $h(x)=y$ в неопределённом интеграле $\int f(x)dx$ должна сводить его к более простому для вычисления неопределённому интегралу $\int g(y)dy$.

Теорема 2 (интегрирование по частям). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы на интервале* I *, а функция* $v(x)u'(x)$ *имеет первообразную на данном интервале. Тогда функция* $u(x)v'(x)$ *также имеет первообразную на интервале* I *, при этом*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, кратко, $\int udv = uv - \int vdu$.

Рекомендации:

I. Если подынтегральная функция содержит конечное множество радикалов от x, то замена переменной $x = t^n$, где n – наименьшее общее кратное степеней данных радикалов, упрощает подынтегральную функцию, уничтожая эти радикалы.

II. Если подынтегральная функция содержит:

1. $\sqrt{x^2 - a^2}$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$, то замены переменной $x = \dfrac{a}{\sin t}$ $(\sin t \neq 0)$, или $x = \dfrac{a}{\cos t}$ $(\cos t \neq 0)$, или $x = a\operatorname{ch} t$ устраняют этот радикал;

2. $\sqrt{a^2 - x^2}$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$, то замены переменной $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$ устраняют этот радикал;

3. $\sqrt{x^2 + a^2}$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$, то замены переменной $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\operatorname{ctg} t$, $x = a\operatorname{sh} t$ или $x = a\operatorname{ch} t$ устраняют этот радикал.

III. Если подынтегральная функция представляет собой произведение:

1. многочлена и логарифмической, или одной из обратных тригонометрических или гиперболических функций, то в качестве функции u в формуле интегрирования по частям $\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$ следует выбрать трансцендентную функцию;

2. многочлена и экспоненты, или синуса, или косинуса, то в качестве функции u в формуле интегрирования по частям следует выбрать многочлен (в этом случае интегрирование по частям понизит степень многочлена на 1);

3. экспоненты и синуса или косинуса, то в качестве функции u в формуле интегрирования по частям можно выбрать любую из этих функций (двукратное применение формулы интегрирования по частям в этом случае приводит к линейному уравнению относительно вычисляемого интеграла).

Задачи.

1. Используя подходящую подстановку, вычислить интегралы:

a) $I = \int \dfrac{dx}{2 + \sqrt{x}}$.

Решение: Ясно, что $x \in \mathbb{R}_+$. Осуществим подстановку $y = \sqrt{x}$, откуда $x = y^2$, $dx = 2ydy$. Тогда

$$I=\int\frac{2ydy}{2+y}=2\int\frac{y+2-2}{y+2}dy=2\left(\int dy-2\int\frac{d(y+2)}{y+2}\right)=2\left[y-2\ln|y+2|\right]_{y=\sqrt{x}}=$$
$$=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+C.$$

б) $I=\int\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$. (Указание: воспользуйтесь подстановкой $y=\sqrt[6]{x}$).

(**Ответ**: $I=x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$).

в) $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. (Указание: воспользуйтесь подстановкой $y=\frac{1}{x}$). (**Ответ**: $I=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$).

2. Используя тригонометрическую или гиперболическую замену переменной, вычислить интегралы:

а) $I=\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение: Ясно, что $x\in[-2;2]$. Осуществим замену переменной $x=2\sin t$, откуда $\sqrt{4-x^2}=2\cos t$, $dx=2\cos tdt$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Итак,

$$I=4\int\cos^2 tdt=2\int(1+\cos 2t)dt=2\int dt+\int\cos 2td(2t)=\left[2t+\sin 2t\right]_{t=\arcsin\frac{x}{2}}=$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$$

б) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (длинный логарифм). (**Ответ**: $I=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$).

в) $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C$).

3. Используя метод интегрирования по частям, вычислить интегралы:

а) $I=\int x\ln xdx$.

Решение: Ясно, что $x\in\mathbb{R}_+^*$. Так как подынтегральная функция есть произведение одночлена (x) на трансцендентную функцию $(\ln x)$, то используя метод интегрирования по частям, в качестве функции $u(x)$ следует взять трансцендентную функцию, т.е. $\ln x$. Итак, $\left.\begin{matrix}u=\ln x\\ dv=xdx\end{matrix}\right|\Rightarrow du=\frac{dx}{x}, v=\frac{x^2}{2}$.

Поэтому формула интегрирования по частям даёт:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2=\frac{x^2}{4}\left(2\ln x-1\right)+C.$$

б) $I=\int x\sin x dx$. (**Ответ**: $I=\sin x-x\cos x+C$).

в) $I=\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$. (**Ответ**: $I=2e^{\frac{x}{2}}\left(x^2-4x+8\right)+C$).

г) $I=\int e^{2x}\cos 3x dx$. (**Ответ**: $I=\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right)+C$).

д) $I=\int\cos(\ln x)dx$. (**Ответ**: $I=\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C$).

е) $I=\int\frac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{4}\left(2x-\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x\right)+C$).

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $I=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+3}}$. (**Ответ**: $I=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+3}\right)+C$).

2. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$. (**Ответ**: $I=\arcsin\frac{\ln x}{2}+C$).

3. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. (**Ответ**: $I=-\arcsin\frac{1}{x}+C$).

4. $I=\int\frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. (**Ответ**: $I=\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$).

5. $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$. (**Ответ**: $I=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C$).

6. $I=\int\ln x dx$. (**Ответ**: $I=x\left(\ln x-1\right)+C$).

7. $I=\int x^2 e^{-2x}dx$. (**Ответ**: $I=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C$).

8. $I=\int\operatorname{arctg} x dx$. (**Ответ**: $I=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$).

9. $I=\int\arcsin x dx$. (**Ответ**: $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$).

10. $I=\int e^{2x}\sin^2 x\, dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{8}e^{2x}\left(2-\sin 2x-\cos 2x\right)+C$).

Тема 39. Интегрирование рациональных функций

Интегрирование простейших дробей:

$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C \quad \left(a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*\right)$ (интеграл от простейшей дроби I рода);

$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + C \quad \left(a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$ (интеграл от простейшей дроби II рода);

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-pM}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \text{ [1]}$$

$\left(p, q, M, N \in \mathbb{R},\ M^2+N^2 \neq 0,\ p^2-4q<0\right)$ (интеграл от простейшей дроби III рода).

Интеграл от простейшей дроби IV рода $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n} dx$ $\left(p, q, M, N \in \mathbb{R},\ M^2+N^2 \neq 0,\ p^2-4q<0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$ вычисляется сведением теми же приёмами, что и при интегрировании простейшей дроби III рода, к частному случаю такого интеграла, а именно к интегралу $I_n = \int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}$, где $u = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Для вычисления последнего интеграла имеет место рекуррентная формула

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right), \text{ т.е.}$$

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}} \right).$$

Применение этой формулы $(n-1)$ раз приведёт к табличному интегралу $I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$.

Чтобы проинтегрировать неправильную рациональную функцию, необходимо сначала представить эту функцию в виде суммы «целой» части

[1] Разумеется, не надо запоминать эту довольно громоздкую формулу. Следует лишь помнить, как её получить, а именно нужно:

1. выделить в числителе дроби производную её знаменателя;
2. выделить в знаменателе дроби полный квадрат.

(многочлена) и «дробной» части (правильной рациональной функции). Многочлен интегрируется легко (сумма интегралов от степенных функций). Что касается правильной рациональной функции, не являющейся простейшей дробью, то такая функция всегда однозначно представима в виде суммы конечной совокупности простейших дробей (стандартный приём такого представления – метод неопределённых коэффициентов). Таким образом, интегрирование рациональной функции всегда можно свести к интегрированию многочлена и простейших дробей.

Задачи.

Используя метод разложения на целую часть и простейшие дроби, вычислить интегралы:

1. $I=\int\frac{xdx}{x^2+2x-3}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{4}\ln\left|(x-1)(x+3)^3\right|+C$).

2. $I=\int\frac{x^2dx}{x^2+x+1}$. (**Ответ**: $I=x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$).

3. $I=\int\frac{2x^4-x^3-14x^2+18x+1}{x^2+x-6}dx$.

Решение: Имеем $f(x)=\frac{2x^4-x^3-14x^2+18x+1}{x^2+x-6}$ и $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$. Воспользовавшись, например, метод неопределённых коэффициентов, разложим подынтегральную функцию на целую часть и простейшие дроби: $f(x)=2x^2-3x+1+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+3}$. Используя теперь линейность неопределённого интеграла, получаем сумму трёх «табличных» интегралов и двух интегралов от простейших дробей I рода:

$$I=2\int x^2dx-3\int xdx+\int dx+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\ln|x-2|-2\ln|x+3|=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\ln\frac{|x-2|}{(x+3)^2}+C.$$

4. $I=\int\frac{dx}{1-x^2}$ («высокий логарифм»). (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$).

5. $I=\int\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$).

6. $I=\int\frac{1-4x}{x^3-1}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\ln|x-1|+C$).

7. $I=\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$. (**Ответ**: $I=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$).

8. $I=\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+C$).

9. $I=\int\frac{2x-3}{\left(x^2-x+2\right)^2}dx$. (**Ответ**: $I=-\frac{4x+5}{7\left(x^2-x+2\right)}-\frac{8}{7\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$).

10. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$. (**Ответ**: $I=\frac{3x^3+5x}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C$).

11. $I=\int\frac{x^5+1}{x^3+x^2+x}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$).

12. $I=\int\frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$.

Решение: Имеем $f(x)=\frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{x+4}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$ и $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. По виду знаменателя заключаем, что функция $f(x)$ представима в виде суммы трёх простейших дробей I, II и III родов: $\frac{A}{x-1}$, $\frac{B}{(x-1)^2}$ и $\frac{Mx+N}{x^2+1}$, т.е.

$$\frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}, \tag{*}$$

где A,B,M,N – коэффициенты, которые необходимо определить.

Помимо известного метода неопределённых коэффициентов, существуют и другие способы для нахождения коэффициентов простейших дробей.

Найдём, например, коэффициент B так называемым «методом вычёркивания»: $B=\left.\frac{x+4}{x^2+1}\right|_{x=1}=\frac{5}{2}$. Теперь умножая обе части равенства (*) на x и устремляя x к ∞ (ищем предел); получим: $A+M=0$. Далее применим так называемый «метод пробной точки»: подставим в равенство (*) $x=0$, а затем $x=-1$ и получим, что $4=\frac{5}{2}-A+N$ или $N-A=\frac{3}{2}$ и соответственно, что $\frac{3}{8}=\frac{5}{8}-\frac{A}{2}-\frac{M-N}{2}$ или $A+M-N=\frac{1}{2}$. Из трёх этих уравнений составим линейную систему с тремя неизвестными A, M и N, решением которой является: $A=-2,\ M=2,\ N=-\frac{1}{2}$. С учётом равенства (*), тогда будем иметь: $f(x)=\dfrac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2}+\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$. Используя затем свойство линейности неопределённого интеграла, представим интеграл I в виде линейной комбинации четырёх интегралов и вычислим каждый из них:

$$I=\frac{5}{2}\int(x-1)^{-2}d(x-1)-2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{5}{2(x-1)}+\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $I=\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$. (**Ответ**: $I=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$).

2. $I=\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{\left|(x+1)(x+3)^3\right|}+C$).

3. $I=\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$. (**Ответ**: $I=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$).

4. $I=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$. (**Ответ**: $I=\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+$ $+C$).

5. $I=\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$. (**Ответ**: $I=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$).

6. $I=\int\frac{1-4x}{(x^2+x+1)^3}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{2x+3}{2(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$ $+C$).

Тема 40. Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

1. Для интегралов вида $\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $\left(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}, a,b,c,d\in\mathbb{R},\right.$ $\left.ad-bc\neq 0\right)$, где $R-$рациональная функция, подстановка $y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ рационализует подынтегральную функцию (т.е. приводит к рациональной функции от y).

2. Если имеем интеграл от биномиального дифференциала, т.е. интеграл вида $\int x^{\alpha}\left(a+bx^{\beta}\right)^{\gamma}dx$ $\left(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}^{*},\ a,b\in\mathbb{R}^{*}\right)$, то для рационализации подынтегральной функции:

1) в случае $\gamma\in\mathbb{N}$ возводим $\left(a+bx^{\beta}\right)$ в степень γ, используя бином Ньютона;

2) в случае $\gamma\in\mathbb{Z}_{-}$ осуществляем подстановку $y=\sqrt[n]{x}$, где n – наименьший общий знаменатель дробей α и β;

3) в случае $\gamma\notin\mathbb{Z}^{*}$, а $\dfrac{\alpha+1}{\beta}\in\mathbb{Z}$ осуществляем подстановку $y=\sqrt[m]{a+bx^{\beta}}$, где m $\left(m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right)$ – знаменатель γ;

4) в случае $\gamma\notin\mathbb{Z}^{*}$, $\dfrac{\alpha+1}{\beta}\notin\mathbb{Z}$, а $\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta}+\gamma\right)\in\mathbb{Z}$ осуществляем подстановку $y=\sqrt[m]{\dfrac{a+bx^{\beta}}{x^{\beta}}}$, где m $\left(m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right)$ – знаменатель γ.

3. Если имеем интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^{2}+bx+c}\right)dx$ $\left(a\in\mathbb{R}^{*};b,c\in\mathbb{R}\right)$, где R – рациональная функция, то для рационализации подынтегральной функции осуществляем одну из подстановок Эйлера:

1) в случае $a>0$ полагаем $y=\sqrt{ax^{2}+bx+c}+\sqrt{a}x$ или $y=\sqrt{ax^{2}+bx+c}-\sqrt{a}x$;

2) в случае $c>0$ полагаем $y=\dfrac{\sqrt{ax^{2}+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$ или $y=\dfrac{\sqrt{ax^{2}+bx+c}+\sqrt{c}}{x}$;

3) в случае, когда квадратный трёхчлен $ax^{2}+bx+c$ имеет два различных нуля x_1 и x_2 (т.е. $D>0$), полагаем $y=\dfrac{\sqrt{ax^{2}+bx+c}}{x-x_1}$ или $y=\dfrac{\sqrt{ax^{2}+bx+c}}{x-x_2}$.

Заметим, что интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^{2}+bx+c}\right)dx$ $\left(a\in\mathbb{R}^{*};b,c\in\mathbb{R}\right)$ всегда можно свести и к интегралу от рациональной функции от тригонометрических или гиперболических функций синус и косинус. Для этого, выделяя под знаком радикала полный квадрат и производя линейную подстановку $y = x + \frac{b}{2a}$, приходят к интегралу одного из следующих трёх типов: $\int R\left(y, \sqrt{d^2 - y^2}\right)dy$, $\int R\left(y, \sqrt{d^2 + y^2}\right)dy$, $\int R\left(y, \sqrt{y^2 - d^2}\right)dy$ $\left(d \in \mathbb{R}_+^*\right)$. А после надлежащей тригонометрической или гиперболической замены переменной (см. тему 11) такие интегралы, как известно, приводятся к интегралам от рациональной функции от тригонометрических или гиперболических функций синус и косинус.

Задачи.

Используя надлежащие подстановки, вычислить интегралы:

1. $I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

Решение: Имеем $f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ и $D_f = (-1; +\infty)$. Осуществим подстановку: $y = \sqrt{x+1}$, тогда $x = y^2 - 1$, $x + 2 = y^2 + 1$, $dx = 2ydy$. Подставляя найденные выражения в интеграл, получим: $I = \int \frac{2ydy}{\left(y^2+1\right)y} =$

$$= 2\int \frac{dy}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg} y\Big|_{y=\sqrt{x+1}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + C.$$

2. $I = \int \frac{\left(3\sqrt{x} - 2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$. (**Ответ**: $I = 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{72}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{27}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$).

3. $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}dx$. (**Ответ**: $I = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3\sqrt[3]{x} + 2\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| - \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1\right) +$
$+ 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}} + C$).

4. $I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение: Имеем $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$ и $D_f = \mathbb{R}_+^*$. Перепишем интеграл в виде $I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$. Ясно, что это интеграл от биномиального дифференциала, где $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{3}$. Так как $\gamma \notin \mathbb{Z}$, а $\frac{\alpha+1}{\beta} = 2 \in \mathbb{Z}$, то осуществляем подстановку $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. Тогда $1+x^{\frac{1}{4}}=y^3$, т.е. $x^{\frac{1}{4}}=y^3-1$, а значит, $x=\left(y^3-1\right)^4$, и поэтому $dx=4\left(y^3-1\right)^3\cdot 3y^2dy$ и $x^{-\frac{1}{2}}=\left(y^3-1\right)^{-2}$. Запишем под знаком интеграла найденные выражения и вычислим сам интеграл:

$$I=\int\left(y^3-1\right)^{-2}\cdot y\cdot 12y^2\left(y^3-1\right)^3dy=12\int\left(y^6-y^3\right)dy=12\left[\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right]_{y=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

5. $I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$. (**Ответ**: $I=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C$).

6. $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение: Имеем подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Так как у квадратного трёхчлена, стоящего под корнем и старший коэффициент и свободный член строго положительны, а дискриминант – отрицателен, то можно применить 1-ю или 2-ю, но не 3-ю подстановки Эйлера. Применим 1-ю: $y=\sqrt{x^2+x+1}+x$, тогда $x=\frac{y^2-1}{2y+1}$. Отсюда получаем $dx=2\frac{y^2+y+1}{(2y+1)^2}dy$. Подставляя найденные выражения под знак интеграла и представляя затем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, получим:

$$I=2\int\frac{y^2+y+1}{y(2y+1)^2}dy=2\left(\int\frac{A_1}{y}dy+\int\frac{A_2}{(2y+1)^2}dy+\int\frac{A_3}{2y+1}dy\right),$$

где коэффициенты A_1, A_2, A_3 нужно найти. Первые два из них находим «методом вычёркивания»: $A_1=\left.\frac{y^2+y+1}{(2y+1)^2}\right|_{y=0}=1$, $A_2=\left.\frac{y^2+y+1}{y}\right|_{y=-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$. А третий – умножая равенство $\frac{y^2+y+1}{y(2y+1)^2}=\frac{1}{y}-\frac{2}{3(2y+1)^2}+\frac{A_3}{2y+1}$ на y и устремляя затем y к ∞ (переходим к пределу при $y \to \infty$). В результате получим $\frac{1}{4} = 1 + \frac{A_3}{2}$, откуда $A_3 = -\frac{3}{2}$. Итак,

$$I = 2\left(\int \frac{dy}{y} - \frac{3}{4}\int (2y+1)^{-2} d(2y+1) - \frac{3}{4}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1}\right) =$$

$$= \left[2\ln|y| - \frac{3}{2(2y+1)} - \frac{3}{2}\ln|2y+1|\right]_{y=\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^2 + \frac{3}{4\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)} - \frac{3}{2}\ln\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right) + C.$$

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. (**Ответ**: $I = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$).

2. $I = \int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 \sqrt{x}}$. (**Ответ**: $I = \frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C$).

3. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. (**Ответ**: $I = \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right) + C$).

4. $I = \int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2}$. (**Ответ**: $I = \frac{2\left(3+4\left(x-\sqrt{x(1+x)}\right)\right)}{5\left(1+x-\sqrt{x(1+x)}-\left(x-\sqrt{x(1+x)}\right)^2\right)} +$

$+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1-2\left(x-\sqrt{x(1+x)}\right)}{\sqrt{5}-1+2\left(x-\sqrt{x(1+x)}\right)}\right| + C$).

5. $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$. (**Ответ**: $I = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$).

6. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. (**Ответ**: $I = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + C$).

7. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{1+x^6}}$. (**Ответ**: $I = \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt[6]{1+x^6}+1} + \frac{1}{12}\ln\frac{\sqrt[3]{1+x^6}+\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt[3]{1+x^6}-\sqrt[6]{1+x^6}+1} +$

$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{1+x^6}-1}{\sqrt{3}\sqrt[6]{1+x^6}} + C$).

Тема 41. Интегрирование тригонометрических выражений

1. Если имеем $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R-$ рациональная функция, то для рационализации подынтегральной функции всегда можно осуществить *универсальную тригонометрическую подстановку* $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\left(|x| < \pi\right)$ (напомним, что $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, а $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$).

В отдельных случаях возможны и другие подстановки:

1) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (т.е. функция $R-$ «нечётная» относительно $\sin x$), то можно применить подстановку $y = \cos x$;

2) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (т.е. функция $R-$ «нечётная» относительно $\cos x$), то можно применить подстановку $y = \sin x$;

3) если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (т.е. функция $R-$ «чётная» относительно совокупности $\sin x$ и $\cos x$), то можно применить подстановку $y = \operatorname{tg} x$ $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$.

В частности, если имеем интеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$, то

1) в случае нечётного числа m возможна подстановка $y = \cos x$;

2) в случае нечётного числа n возможна подстановка $y = \sin x$;

3) в случае, когда m и n оба чётны, возможна подстановка $y = \operatorname{tg} x$ или можно понижать степени m и n по формулам $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

2. Если имеем интегралы $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, то можно использовать известные формулы, переводящие произведение тригонометрических функций в их сумму: $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$, $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$, $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$.

<u>Задачи.</u>

Вычислить интегралы:

1. $I=\int \frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)}dx$.

Решение: Имеем $f\left(x\right)=\frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)}$ и $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi k,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Осуществим универсальную тригонометрическую подстановку $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, откуда $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$, а $\cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$, $x=2\operatorname{arctg}y$, $dx=\frac{2dy}{1+y^2}$. Подставим полученное в подынтегральное выражение:

$$I=\int\frac{1+\frac{2y}{1+y^2}}{\frac{2y}{1+y^2}\left(1+\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}\frac{2dy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(y+1\right)^2}{y}dy=\frac{1}{2}\left(\int ydy+2\int dy+\int\frac{dy}{y}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{4}y^2+y+\frac{1}{2}\ln\left|y\right|\right]_{y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2. $I=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$. (**Ответ**: $I=\sec x+C$).

3. $I=\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\sin x+C$).

4. $I=\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}+C$).

5. $I=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x-\cos x}$.

Решение: Имеем $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}$ и $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Так как подынтегральная функция является «чётной» относительно совокупности $\sin x$ и $\cos x$, то можно применить подстановку $y=\operatorname{tg}x$ $\left(\left|x\right|<\frac{\pi}{2}\right)$. В этом случае $dx=\frac{dy}{1+y^2}$. Получаем

$$I=\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x-1}=\int\frac{dy}{\left(y^2+1\right)\left(y-1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\left(y+1\right)dy}{y^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y-1\right|-\frac{1}{4}\left(\int\frac{2ydy}{y^2+1}+2\int\frac{dy}{y^2+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|y-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left(y^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{|y-1|}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y\right]_{y=\operatorname{tg}x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sec x}\right|-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\left(\ln|\sin x-\cos x|-x\right)+C.$$

6. $I=\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$).

7. $I=\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{3}\sin^3 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$).

8. $I=\int\cos 2x\cdot\sin 4x\,dx$.

Решение: Применив формулу произведения тригонометрических функций, получаем:

$$I=\frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 6x)dx=\frac{1}{4}\int\sin 2x\,d(2x)+\frac{1}{12}\int\sin 6x\,d(6x)=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x=-\frac{1}{12}(3\cos 2x+\cos 6x)+C.$$

9. $I=\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$).

Упражнения.

Вычислить интегралы:

1. $I=\int\cos^5 x\,dx$. (**Ответ**: $I=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$).

2. $I=\int\sin^6 x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$).

3. $I=\int\operatorname{tg}^5 x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$).

4. $I=\int\sin 5x\cos x\,dx$. (**Ответ**: $I=-\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 6x}{12}+C$).

5. $I=\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$).

6. $I=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$).

7. $I=\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$).

Семестровое задание по технике интегрирования

1. $I=\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

2. $I=\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx$.

3. $I=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

4. $I=\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$.

5. $I=\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

6. $I=\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

7. $I=\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

8. $I=\int\frac{dx}{2+3x^2}$.

9. $I=\int\frac{dx}{2-3x^2}$.

10. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

11. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

12. $I=\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

13. $I=\int\frac{dx}{1-\cos x}$.

14. $I=\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

15. $I=\int\frac{x^3}{x^8-2}dx$.

16. $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

17. $I=\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

18. $I=\int xe^{-x^2}dx$.

19. $I=\int\frac{e^x dx}{2+e^x}$.

20. $I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

21. $I=\int \operatorname{ctg}x\,dx$.

22. $I=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

23. $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

24. $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

25. $I=\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

26. $I=\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

27. $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$.

28. $I=\int x^3e^{-x^2}dx$.

29. $I=\int x\cos x dx$.

30. $I=\int x^2\sin 2x dx$.

31. $I=\int x\operatorname{sh}x\,dx$.

32. $I=\int x^2\arccos x dx$.

33. $I=\int\left(e^x-\cos x\right)^2dx$.

34. $I=\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

35. $I=\int\frac{x}{x^3-3x+2}dx$.

36. $I=\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

37. $I=\int\frac{dx}{x^3+1}$.

38. $I=\int\frac{x}{x^3-1}dx$.

39. $I=\int\frac{dx}{x^4-1}$.

40. $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$.

41. $I=\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

42. $I=\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

43. $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

44. $I=\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

45. $I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

46. $I=\int\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$.

47. $I=\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

48. $I=\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.

49. $I=\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

50. $I=\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

Тема 42. Интегральная сумма Римана. Суммы Дарбу. Определённый интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном отрезке $\Delta=[a;b]$, $\tau=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ – некоторое разбиение из множества T_Δ всевозможных разбиений этого отрезка и $d_\tau=\max\left\{(x_k-x_{k-1}),\ k=\overline{1,n}\right\}$ – диаметр данного разбиения. Зафиксируем на каждом отрезке $\Delta_k=[x_{k-1};x_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ разбиения τ по одной произвольно выбранной точке $\xi_k\in\Delta_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и набор этих точек $\alpha_\tau=\left\{\xi_k,\ k=\overline{1,n}\right\}$ назовём выборкой, подчинённой разбиению τ, а совокупность $\{\tau,\alpha_\tau\}$ разбиения τ с некоторой выборкой α_τ, ему подчинённой, – отмеченным разбиением отрезка Δ и обозначим его так: $\dot{\tau}$.

Определение 1. *Интегральной суммой Римана* функции $f(x)$ на отрезке Δ по его отмеченному разбиению $\dot{\tau}$ называется действительное число $\sigma_{\dot{\tau}}(f)$, определяемое по формуле $\sigma_{\dot{\tau}}(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$.

Определение 2. Если существует конечный предел I интегральных сумм Римана $\sigma_{\dot{\tau}}(f)$ при диаметре разбиения d_τ, стремящемся к нулю, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $\Delta=[a;b]$, а сам предел I – *определённым интегралом* (от) функции $f(x)$ на этом отрезке и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом, $I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_{\dot\tau}(f)$, что означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \tau \in T_\Delta \ \ \forall \alpha_\tau \ \left(d_\tau < \delta \ \Rightarrow \left| \sigma_{\dot\tau}(f) - I \right| < \varepsilon \right)$$

или, короче:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \dot\tau \ \left(d_\tau < \delta \ \Rightarrow \left| \sigma_{\dot\tau}(f) - I \right| < \varepsilon \right).$$

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на невырожденном отрезке $\Delta = [a;b]$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ – некоторое разбиение этого отрезка и $\Delta_k = [x_{k-1};x_k]$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – отрезки данного разбиения. Обозначим $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$.

Определение 3. *Нижней (верхней) суммой Дарбу* функции $f(x)$ на отрезке Δ по его разбиению τ называется действительное число $s_\tau(f)$ $\left(S_\tau(f)\right)$, определяемое по формуле $s_\tau(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ $\left(S_\tau(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \right)$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Интегрируемая на отрезке функция ограничена на этом отрезке*.

Теорема 2 (критерий интегрируемости). *Функция $f(x)$, определённая на невырожденном отрезке Δ, интегрируема на этом отрезке тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке и существует нулевой предел $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \left(S_\tau(f) - s_\tau(f)\right)$, т.е. $f(x)$ ограничена на Δ и*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \tau \ \left(d_\tau < \delta \ \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon \right).$$

Определённый интеграл обладает следующими важными свойствами.

- *Линейность*: $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) \right) dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \int\limits_a^b f_k(x) dx$ $\left(\lambda_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n} \right)$,

где все функции $f_k(x)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ интегрируемы на отрезке $\Delta = [a;b]$.

- *Аддитивность*: $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)dx$, где все отрезки $[a_k;b_k]$

$\left(k = \overline{1,n}\right)$ смежные (т.е. $b_k = a_{k+1}$ $\left(k = \overline{1,(n-1)}\right)$, $a_1 = a$, $b_n = b$), их объединение даёт отрезок $[a;b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на каждом отрезке

$[a_k;b_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

- *Интегрирование неравенства*: $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и всюду на нём связаны неравенством $f(x)\le g(x)$.

- *Интегрируемость модуля*: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, где функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

Основными классами интегрируемых функций являются непрерывные функции, монотонные функции и ограниченные с конечным множеством точек разрыва (кусочно-непрерывные функции).

Задачи.

1. Используя определение интеграла как предела интегральных сумм Римана, вычислить:

а) $I=\int\limits_{-1}^{2} x^2dx$.

Решение: Функция $f(x)=x^2$ непрерывна на отрезке $\Delta=[-1;2]$, и, следовательно, интегрируема на нём. Поэтому для вычисления данного интеграла можно взять любую последовательность разбиений этого отрезка с условием, что $d_\tau\to 0$ и любой набор точек. Делим отрезок Δ на $n\,(n\in\mathbb{N})$ равных частей. Так как длина отрезка Δ равна 3, то длина $|\Delta_k|$ отрезка $\Delta_k=[x_{k-1};x_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ равна $\frac{3}{n}$, значит, точки x_k $\left(k=\overline{0,n}\right)$ деления отрезка Δ имеют вид $x_k=-1+\frac{3}{n}k$. Итак, имеем разбиения $\tau_n=\left\{-1<-1+\frac{3}{n}<-1+\frac{6}{n}\ldots<-1+\frac{3}{n}(n-1)=2-\frac{3}{n}<2\right\}$. В качестве точек $\xi_k\in\Delta_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ выборки $\alpha_\tau=\left\{\xi_k,\ k=\overline{1,n}\right\}$, подчинённой этому разбиению, возьмём правые концы этих отрезков, т.е. $\xi_k=x_k=-1+\frac{3}{n}k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Вычислим интегральную сумму Римана функции $f(x)$ на отрезке Δ по его отмеченному разбиению $\dot{\tau}_n=\{\tau_n,\alpha_\tau\}$:

$$\sigma_{\dot{\tau}}(f)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\cdot|\Delta_k|=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k-n}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}=\frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(3k-n)^2=$$

$$=\frac{3}{n^3}\left(9\sum_{k=1}^{n}k^2-6n\sum_{k=1}^{n}k+n^2\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+3=$$
$$=\frac{9}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}-9\frac{n+1}{n}+3.$$

Перейдём к пределу интегральных сумм Римана $\sigma_{\dot{\tau}}(f)$ при диаметре разбиения d_τ, стремящемся к нулю, а значит, при $n\to+\infty$. Итак,

$$I=\lim_{d_{\dot{\tau}_n}\to 0}\sigma_{\dot{\tau}_n}(f)=\lim_{n\to+\infty}\left(3-9\frac{n+1}{n}+\frac{9}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)=3-9+9=3.$$

б) $I=\int\limits_0^1 e^x dx$. (**Ответ**: $I=e-1$).

2. Вычислить суммы Дарбу функции $f(x)=2x-1$ на отрезке $\Delta=[0;2]$ при следующих разбиениях этого отрезка:

а) пополам; (**Ответ**: $s_\tau(f)=0;\ S_\tau(f)=4$);

б) на три равные части; (**Ответ**: $s_\tau(f)=\frac{2}{3};\ S_\tau(f)=\frac{10}{3}$);

в) с точками деления $0;0,1;1;1,7;2$; (**Ответ**: $s_\tau(f)=1,2;\ S_\tau(f)=3,4$);

г) с точками деления 0 и членами геометрической прогрессии с $a_1=\frac{1}{8}$ и $q=2$; (**Ответ**: $s_\tau(f)=\frac{21}{32};\ S_\tau(f)=\frac{107}{32}$);

д) на n равных частей. (**Ответ**: $s_\tau(f)=2-\frac{4}{n};\ S_\tau(f)=2+\frac{4}{n}$).

Чему равен интеграл $I=\int\limits_0^2(2x-1)dx$? (**Ответ**: $I=2$).

3. Доказать, что функция Дирихле не интегрируема на любом невырожденном отрезке.

Упражнения.

1. Найти интегральную сумму Римана для функции $f(x)=1+x$ на отрезке $\Delta=[-1;4]$, разбивая его на n $(n\in\mathbb{N})$ равных отрезков и выбирая значения аргумента $\xi_i\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ в серединах этих отрезков. (**Ответ**: $\sigma_{\dot{\tau}}(f)=\frac{25}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$).

2. Найти нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для данных функций $f(x)$ на указанных отрезках, деля их на n $(n\in\mathbb{N})$ равных частей:

а) $f(x)=x^3$, $\Delta=[-2;3]$. (**Ответ**: $s_\tau(f)=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; $S_\tau(f)=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$).

б) $f(x)=\sqrt{x}$, $\Delta=[0;1]$. (**Ответ**: $s_\tau(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$; $S_\tau(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$).

в) $f(x)=2^x$, $\Delta=[0;10]$. (**Ответ**: $s_\tau(f)=\frac{10230}{n\left(\sqrt[n]{2^{10}}-1\right)}$; $S_\tau(f)=\frac{10230\cdot\sqrt[n]{2^{10}}}{n\left(\sqrt[n]{2^{10}}-1\right)}$).

3. Вычислить определённый интеграл $I=\int_a^b\frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$, используя определение. (**Ответ**: $I=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$).

Тема 43. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном промежутке I, интегрируема на любом отрезке, входящем в этот промежуток, a – фиксированная точка промежутка I. Функция $F(x)$, определённая на промежутке I и ставящая в соответствие любой точке $x\in I$ действительное число, равное определённому интегралу функции $f(x)$ на отрезке Δ_x с концами a и x, называется *интегралом с переменным верхним пределом* и обозначается $\int_a^x f(t)dt$, т.е. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ [1]).

Теорема 1 (непрерывность интеграла с переменным верхним пределом). *Пусть функция $f(x)$ определена на невырожденном промежутке I, интегрируема на любом отрезке, входящем в этот промежуток, a – фиксированная точка промежутка I. Тогда интеграл с переменным верхним пределом $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ является функцией, непрерывной на промежутке I.*

Теорема 2 (дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на невырожденном промежутке I, a – фиксированная точка этого промежутка. Тогда интеграл с*

---

[1]) Напомним, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $b=a$ равен нулю, а при $b<a$ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

переменным верхним пределом $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ *является функцией, дифференцируемой на промежутке* I.

Таким образом, всякая функция, непрерывная на невырожденном промежутке, имеет на нём первообразную.

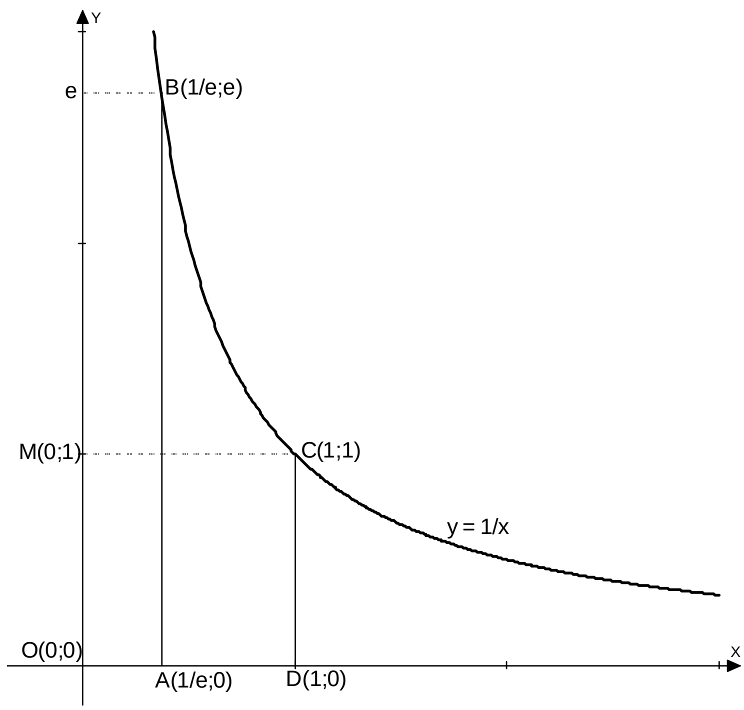
Теорема 3. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $\Delta=[a;b]$, *то имеет место формула Ньютона-Лейбница* $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, *где* $F(x)$ – *какая-либо первообразная функции* $f(x)$ *на отрезке* Δ.

Задачи.

1. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы и дать геометрическую интерпретацию полученных результатов:

а) $I_1=\int\limits_{1/e}^{1}\frac{dx}{x}$.

Решение: Имеем $f(x)=\frac{1}{x}$ и $D_f=\mathbb{R}^*\supset\left[\frac{1}{e};1\right]=\Delta$. Функция $f(x)$, будучи рациональной, непрерывна на Δ и поэтому имеет там первообразные $F(x)=\ln x+C$. Для вычисления данного определённого интеграла воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. Итак, $I_1=\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}=\ln 1-\ln\frac{1}{e}=$ $=0-(-1)=1$.



Так как $f(x)>0$ на отрезке Δ, то значение вычисленного интеграла есть площадь криволинейной трапеции $ABCD$, порождённой функцией $f(x)$ на отрезке Δ, равновеликой единичному квадрату $OMCD$.

б) $I_2=\int\limits_0^7 \sqrt[3]{x+1}\,dx$. (**Ответ**: $I_2=\frac{45}{4}$).

в) $I_3=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$. (**Ответ**: $I_3=\frac{\pi}{6}$).

2. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$? Ответ обосновать.

3. Вычислить определённые интегралы:

а) $I=\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$. (**Ответ**: $I=1$).

б) $I=\int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$. (**Ответ**: $I=200\sqrt{2}$).

в) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2x^5-x^4+2x^3+5x^2+4}{x^4-1}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}-1}{3}+\ln\frac{2\left(7-4\sqrt{3}\right)}{3}$).

4. Вычислить интеграл с переменным верхним пределом $I=\int\limits_{-1}^{x}|t|\,dt$ $\left(x\in(-1;2)\right)$. Убедиться, что полученная функция дифференцируема. (**Ответ**: $I=\left.\frac{t|t|}{2}\right|_{-1}^{x}=\frac{x|x|+1}{2}$).

Упражнения.

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить определённые интегралы. Дать геометрическую интерпретацию полученных результатов.

а) $I_1=\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx$. (**Ответ**: $I_1=11,25$).

б) $I_2=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx$. (**Ответ**: $I_2=2$).

2. Дан определённый интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$. Почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приведёт к неверному результату?

3. Вычислить определённые интегралы:

а) $I=\int_{0}^{1}x\left(2-x^{2}\right)^{12}dx$. (**Ответ**: $I=315\frac{1}{26}$).

б) $I=\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^{2}+x+1}$. (**Ответ**: $I=\frac{\ln 3}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

Тема 44. Вычисление определённых интегралов по частям и заменой переменной

Теорема 1 (интегрирование по частям). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a;b]$. *Тогда имеет место формула*

$$\int_{a}^{b}u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v(x)u'(x)dx,$$

или, кратко, $\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}vdu$.

Отметим, что рекомендации по выбору функции $u(x)$ здесь те же, что и при интегрировании по частям неопределённых интегралов (см. тему 11).

Теорема 2 (интегрирование заменой переменной). *Пусть функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на невырожденном отрезке* $[\alpha;\beta]$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* I, *включающем* $\varphi([\alpha;\beta])$ *и* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. *Тогда имеет место формула*

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (1)$$

называемая формулой замены переменной в определённом интеграле.

Замечание. Если в правой части формулы (1) подынтегральную функцию $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ обозначить через $g(t)$, то формулы (1) принимает следующий вид $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$, или после замены t на y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(y)dy \qquad (1')$$

где $y=\varphi^{-1}(x)=h(x)$, $\alpha=h(a)$, $\beta=h(b)$. Формулу (1') будем называть *подстановкой в определённом интеграле*.

Отметим, что как и в случае неопределённого интеграла, при использовании формулы (1'), подстановка $h(x)=y$ в определённом интеграле $\int_a^b f(x)dx$ должна сводить его к более простому для вычисления определённому интегралу $\int_\alpha^\beta g(y)dy$ $\left(h(a)=\alpha, h(b)=\beta\right)$.

Задачи.

1. Интегрированием по частям вычислить:

а) $I=\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

Решение: Так как подынтегральная функция $f(x)=x\sin x$ есть произведение одночлена (x) на тригонометрическую функцию $(\sin x)$, то при использовании метода интегрирования по частям, в качестве функции $u(x)$ следует взять тригонометрическую функцию, т.е. $\sin x$. Итак, $\left.\begin{matrix} u=x \\ dv=\sin x dx\end{matrix}\right| \Rightarrow du=dx,\ v=-\cos x$. Поэтому формула интегрирования по частям даёт: $I=-x\cos x\big|_0^\pi+\int_0^\pi \cos x dx=\pi+\sin x\big|_0^\pi=\pi$.

б) $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x\,dx$. (**Ответ**: $I=-\operatorname{sh}\pi$).

в) $I=\int_0^1 x^2e^{3x}dx$. (**Ответ**: $I=\dfrac{5e^3-2}{27}$).

2. Вычислить, используя подходящую замену переменной:

а) $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$. (**Ответ**: $I=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$).

б) $I=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Решение: Имеем $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ и $D_f=(-1;0)\cup(0;1)\supset\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Осуществим тригонометрическую замену переменной $x=\sin t$. Меняем пределы интегрирования: когда $x=\dfrac{1}{2}$, то $\sin t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, а когда $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow t=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. Можно взять соответственно $t=\dfrac{\pi}{6}$ и $t=\dfrac{\pi}{3}$, т.к. если t однократно пробегает, возрастая, отрезок $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$, то $x=\sin t$ однократно пробегает, возрастая, отрезок интегрирования $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Далее имеем: $dx=\cos t\,dt$ и $\sqrt{1-x^2}=\cos t\ (>0)$. Таким образом,

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t\,dt}{\sin t\cos t}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t}=-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{7+4\sqrt{3}}{3}.$$

3. Применяя метод подстановки, вычислить:

а) $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

Решение: Осуществим подстановку $y=\sqrt{e^x-1}$, тогда $e^x=y^2+1$, $x=\ln\left(y^2+1\right)$, и, следовательно, $dx=\dfrac{2y}{y^2+1}dy$. Меняем пределы интегрирования: когда $x=0$, $y=0$, а когда $x=\ln 5$, $y=2$. Итак,

$$I=\int\limits_0^2\frac{\left(y^2+1\right)y}{y^2+4}\cdot\frac{2y}{y^2+1}dy=2\int\limits_0^2\frac{y^2+4-4}{y^2+4}dy=2\left(\int\limits_0^2 dy-4\int\limits_0^2\frac{dy}{y^2+4}\right)=2\left[y-4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right]_0^2=$$

$$=2(2-2\operatorname{arctg}1)=4-\pi.$$

б) $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. (**Ответ**: $I=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}{3+\sqrt{5}}$).

в) $I=\int\limits_1^4 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$. (**Ответ**: $I=2\left(1-2\ln\frac{3}{4}\right)$).

4. Применяя различные методы, вычислить:

а) $I=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. (**Ответ**: $I=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$).

б) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$. (**Ответ**: $I=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$).

в) $I=\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{\pi}{2}-1$).

г) $I=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$).

Упражнения.

1. Интегрированием по частям вычислить интегралы:

а) $I=\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$).

б) $I=\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$. (**Ответ**: $I=4\pi$).

в) $I=\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$. (**Ответ**: $I=1$).

г) $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. (**Ответ**: $I=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2. Применяя подходящую подстановку, вычислить $I=\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$. (**Ответ**: $I=\frac{1}{6}$).

3. Вычислить интегралы:

а) $I=\int\limits_1^e (x\ln x)^2dx$. (**Ответ**: $I=\frac{5e^3-2}{27}$).

б) $I=\int\limits_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}\,dx$. (**Ответ**: $I=-66\frac{6}{7}$).

в) $I=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. (**Ответ**: $I=-\frac{\pi}{3}$).

Тема 45. Вычисление площадей плоских фигур

Определение 1. *Внутренней* (*внешней*) *площадью* плоской фигуры Φ – ограниченного множества точек координатной плоскости – называется верхняя (нижняя) грань множества площадей всевозможных объемлемых $M_\Phi\subset\Phi$ (объемлющих $M^\Phi\supset\Phi$) многоугольников по отношению к данной фигуре, т.е.

$$\underline{\text{пл}}\,\Phi=\sup\left\{\text{пл}\,M_\Phi,M_\Phi\subset\Phi\right\}\ \left(\overline{\text{пл}}\,\Phi=\inf\left\{\text{пл}\,M^\Phi,M^\Phi\supset\Phi\right\}\right).$$

Определение 2. Плоская фигура Φ называется *квадрируемой*, если её внутренняя $\underline{\text{пл}}\,\Phi$ и внешняя $\overline{\text{пл}}\,\Phi$ площади совпадают, при этом их общее значение называется *площадью* данной фигуры, т.е.

$$\text{пл}\,\Phi=\left(\underline{\text{пл}}\,\Phi=\overline{\text{пл}}\,\Phi\right).$$

Теорема 1 (площадь криволинейной трапеции). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на невырожденном отрезке* $[a;b]$ *и всюду там имеет место неравенство* $g(x)\le f(x)$. *Тогда плоская фигура*

$$\Phi=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a;b],\ g(x)\le y\le f(x)\right\},$$

называемая криволинейной трапецией (порождённой функциями $f(x)$ *и* $g(x)$ *на отрезке* $[a;b]$*), квадрируема и её площадь вычисляется по формуле* $\text{пл}\,\Phi=\int\limits_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$.

В частности, если $g(x)\equiv0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь плоской фигуры $\Phi=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a;b],\ 0\le y\le f(x)\right\}$, называемой *подграфиком* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле: $\text{пл}\,\Phi=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема 2 (площадь подграфика параметрически заданной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *задана параметрически:* $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ $\left(t\in[\alpha;\beta]\right)$, *где функция* $\varphi(t)$ *непрерывна и строго монотонна на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *а функция* $\psi(t)$ *непрерывна и неотрицательна на этом отрезке.*

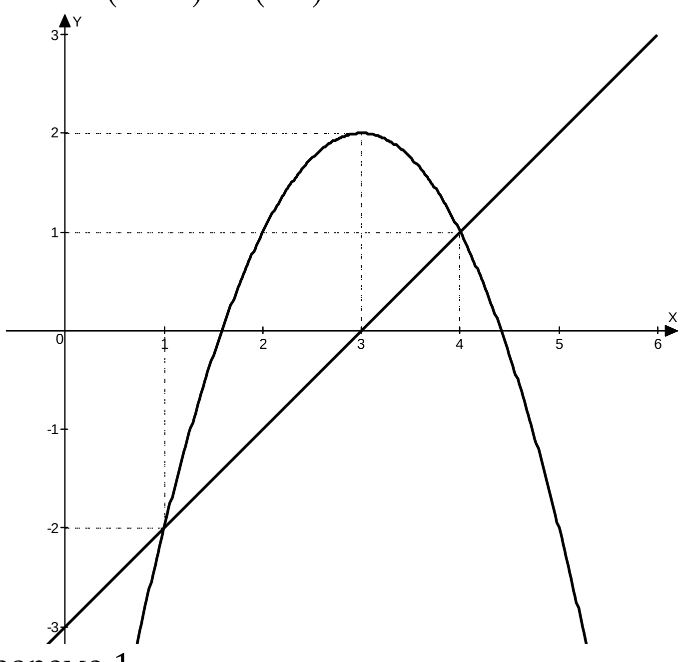
Тогда подграфик Φ *функции* $f(x)$ *квадрируем и его площадь вычисляется по формуле* $\text{пл}\Phi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\left|\varphi'(t)\right|dt$.

Теорема 3 (площадь криволинейного сектора). *Если функция* $r=f(\theta)$ *($\theta-$полярный угол, а $r-$радиус-вектор; θ и $r-$ полярные координаты) непрерывна на отрезке* $[\alpha;\beta]$ $([\alpha;\beta]\subset[0;2\pi])$, *то плоская фигура* $\Phi=\left\{(\theta;r)\in\mathbb{R}^2:\ \theta\in[\alpha;\beta],\ 0\le r\le f(\theta)\right\}$, *называемая криволинейным сектором (порождённым функцией* $f(\theta)$ *на отрезке* $[\alpha;\beta]$*), квадрируема и её площадь вычисляется по формуле* $\text{пл}\Phi=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}f^2(\theta)d\theta$.

<u>Задачи.</u>

1. Найти площадь параболического сегмента Φ, ограниченного параболой $y=-x^2+6x-7$ и прямой $y=x-3$. (М.: 1 = 1см).

Решение: Парабола $y=-x^2+6x-7$ пересекает ось Ox в точках $\left(3\pm\sqrt{2};0\right)$ и имеет вершиной точку $(3;2)$. Точки пересечения данных параболы и прямой есть $(1;-2)$ и $(4;1)$.



Согласно теореме 1,

$$\text{пл}\Phi=\int\limits_1^4\left(-x^2+6x-7-(x-3)\right)dx=\int\limits_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=$$

$$=-\frac{1}{3}(64-1)+\frac{5}{2}(16-1)-4(4-1)=4{,}5.$$

2. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной двумя ветвями кривой $(y-x)^2 = x^3$ и прямой $x=1$. (М.: 1 = 2см). (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = 0{,}8$).

3. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной осью абсцисс, эллипсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и касательной к нему, проведённой в точке $M_0\left(\frac{3}{2};\sqrt{3}\right)$. (М.: 1 = 1см). (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = 3\sqrt{3}-\pi$).

4. Найти площадь одной *подарки* (т.е. фигуры Φ, ограниченной осью абсцисс и одной аркой) циклоиды $\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}$. $\left(R\in\mathbb{R}_+^*,\ -\infty<t<+\infty\right)$ (М.: R = 1см).

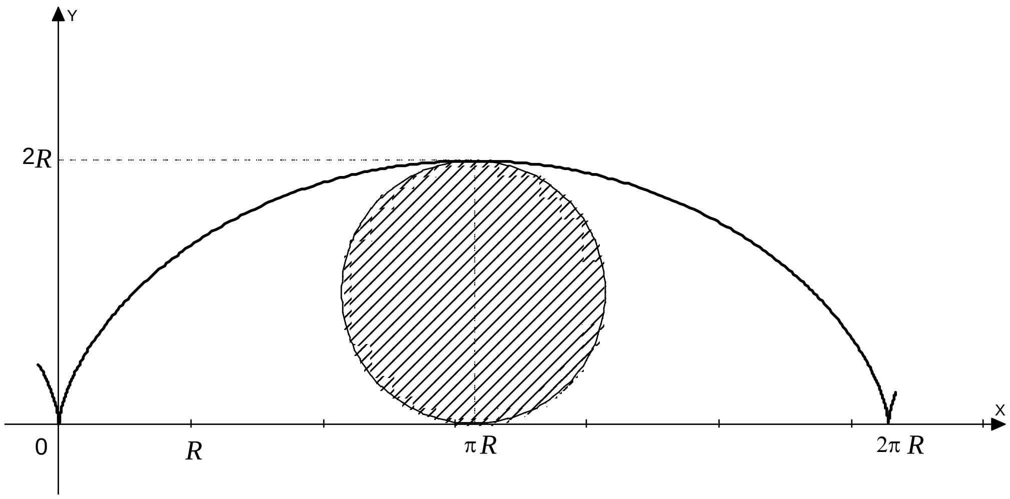
Решение: Циклоида задана параметрически. Рассмотрим арку циклоиды, соответствующей отрезку изменения параметра $t\in[0;2\pi]$ (см. рисунок).

Имеем $\varphi(t)=R(t-\sin t)$, $\psi(t)=R(1-\cos t)$ $\left(t\in[0;2\pi]\right)$. Вычисляя $\varphi'(t)=R(1-\cos t)$, подставляем в формулу для нахождения площади подграфика параметрически заданной функции:

$$\text{пл}\,\Phi = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)R(1-\cos t)dt = R^2\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 t-2\cos t\right)dt.$$

Понижая степень второго слагаемого в подынтегральном выражении по формуле $\cos^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, окончательно получаем

$$\text{пл}\,\Phi = R^2\left[t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t-2\sin t\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}R^2\cdot 2\pi = 3\pi R^2.$$



(Заметим, что площадь одной подарки циклоиды в три раза больше площади круга K радиуса R, «вписанного» в эту подарку. На рисунке круг K заштрихован.)

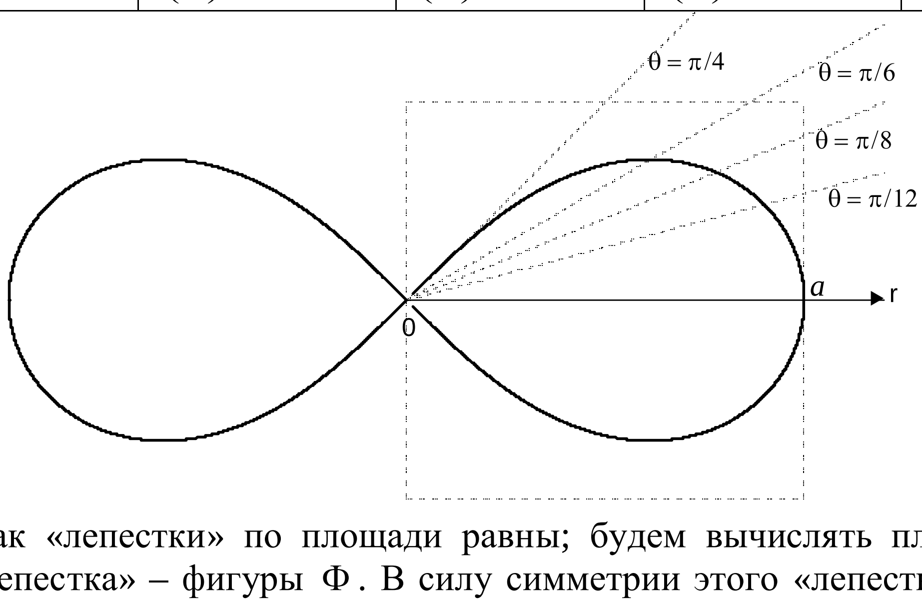
5. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r = a\theta$ $(a > 0)$. (М.: a = 0,5см). (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = \dfrac{4}{3}\pi^3 a^2$).

6. Найти площадь одного «лепестка» лемнискаты («двухлепестковой розы») $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a > 0)$. (М.: a = 5см).

Решение: Лемниската задана уравнением в полярных координатах. Так как $\cos 2\theta \geq 0$, то $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ и, следовательно, имеем два симметричных относительно полярного центра «лепестка», причём правому «лепестку» соответствуют значения полярного угла $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$, а левому – $\theta \in \left[\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$. Кроме того, каждый «лепесток» симметричен относительно лучей $\theta = 0$ и соответственно $\theta = \pi$ (функция $\cos 2\theta$ – чётная). Построим «верхнюю» половину правого «лепестка», а затем с помощью двух симметрий получим всю лемнискату.

Составим следующую таблицу:

θ	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$
r	a	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} a \approx 0.9a$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} a \approx 0{,}8a$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a \approx 0{,}7a$	0



Так как «лепестки» по площади равны; будем вычислять площадь правого «лепестка» – фигуры Φ. В силу симметрии этого «лепестка» относительно полярной оси находим площадь верхней его половины $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$ и удваиваем её. Воспользуемся формулой для нахождения площади криволинейного сектора:

$$\text{пл}\,\Phi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d(2\theta) = \frac{a^2}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

(Заметим, что вычисленная площадь одного «лепестка» лемнискаты в два раза меньше площади квадрата со стороной a, в который «вписан» данный «лепесток». На рисунке контур этого квадрата изображён пунктиром.)

Упражнения.

1. Найти площади плоских фигур Φ, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

а) $y = x^2, \quad x + y = 2$. (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = 4{,}5$).

б) $y = 2x - x^2, \quad x + y = 0$. (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = 4{,}5$).

в) $y = |\lg x|,\ y = -1,\ x = 0{,}1,\ x = 10$. (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = 10 - 0{,}1\cdot\lg e \approx 16{,}28$).

2. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$? (**Ответ**: $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$).

3. Найти площади плоских фигур Φ, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

а) $r = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$ (кардиоида). (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = \frac{3\pi a^2}{2}$).

б) $r = a\sin 3\theta \quad (a > 0)$ (трилистник). (**Ответ**: $\text{пл}\,\Phi = \frac{\pi a^2}{4}$).

Тема 46. Вычисление длин плоских кривых

Пусть непрерывная плоская кривая Γ задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($t \in \Delta$, где $\Delta = [\alpha;\beta]$ – некоторый невырожденный отрезок) и $\tau = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ – какое-либо разбиение Δ. Соединяя последовательно точки $M_k(\varphi(t_k);\psi(t_k))$ $(k = \overline{0,n})$ отрезками, получаем *ломаную*, вписанную в кривую Γ, соответствующую данному разбиению.

Определение. Непрерывная плоская кривая Γ называется *спрямляемой*, если существует (конечная) верхняя грань множества длин всевозможных ломаных, вписанных в эту кривую. При этом значение этой верхней грани называется *длиной* данной кривой и обозначается $\text{дл}\,\Gamma$.

Теорема 1 (длина гладкой кривой). *Пусть плоская кривая* Γ *задана параметрически:* $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ $(t \in [\alpha;\beta])$, *где функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[\alpha;\beta]$. *Тогда кривая* Γ, *называемая гладкой, спрямляема и её длина вычисляется по формуле*

$$\text{дл}\,\Gamma = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

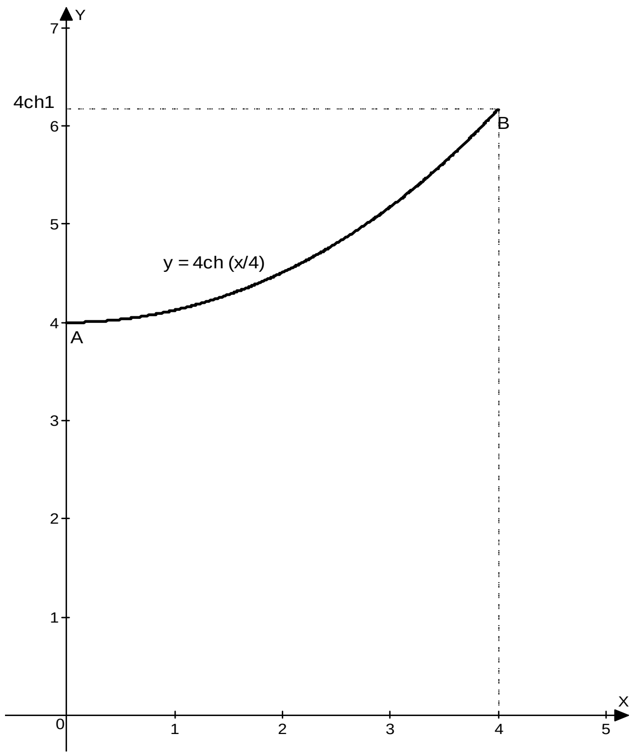
Теорема 2 (длина графика непрерывно дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на невырожденном отрезке* $[a;b]$. *Тогда её график* G_f *является спрямляемой кривой, длина которой вычисляется по формуле* $\text{дл}\,G_f = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$.

Теорема 3 (длина гладкой кривой, заданной в полярных координатах). *Пусть кривая* Γ *задана уравнением в полярных координатах* $r = f(\theta)$ *(*θ *– полярный угол, а* r *– радиус-вектор;* θ *и* r *– полярные координаты), где функция* $f(\theta)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha;\beta]$ $\left([\alpha;\beta] \subset [0;2\pi]\right)$. *Тогда кривая* Γ *спрямляема и её длина вычисляется по формуле* $\text{дл}\,\Gamma = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta$.

Задачи.

1. Найти длину дуги «цепной линии» $y = 4\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}$, заключённой между точками A и B соответственно с абсциссами $x = 0$ и $x = 4$. (М.: 1 = 1см).

Решение: Имеем $f(x) = 4\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}$.



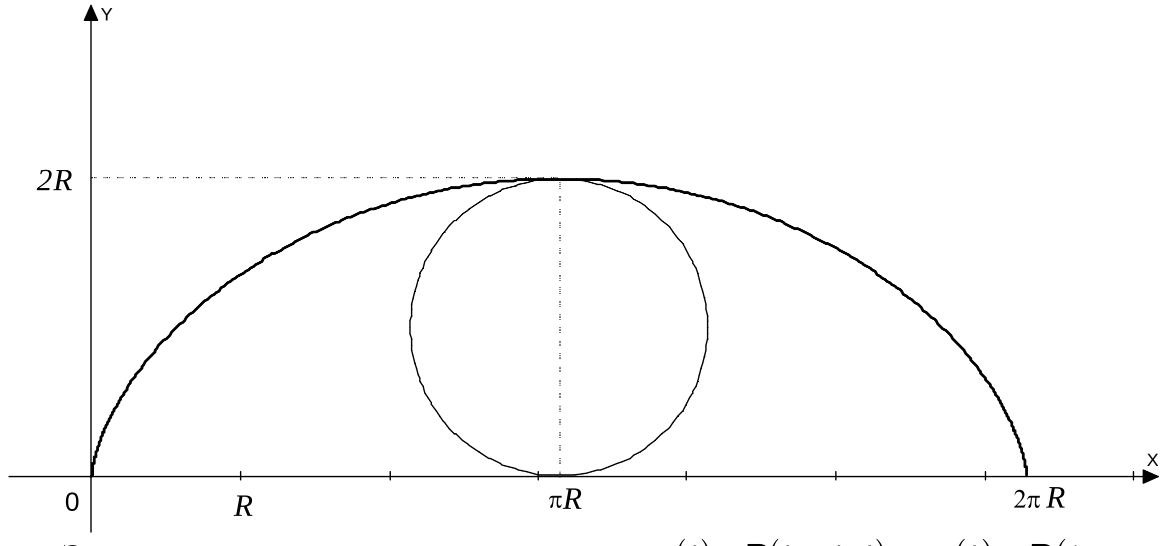
Функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)=\operatorname{sh}\dfrac{x}{4}$. Поэтому кривая $\Gamma=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0;4], y=4\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}\right\}$ (см. рисунок) спрямляема и её длина

$$\text{дл}\,\Gamma=\int\limits_0^4\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{4}}\,dx=\int\limits_0^4\operatorname{ch}\frac{x}{4}\,dx=4\left[\operatorname{sh}\frac{x}{4}\right]_0^4=4\operatorname{sh}1=\frac{2\left(e^2-1\right)}{e}\approx 4,7.$$

2. Определить периметр p криволинейного треугольника, образованного дугой окружности $x^2+y^2=2$ и ветвями кривой $y=\sqrt{|x|}$. (М.: 1 = 2см). (**Ответ**: $p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$).

3. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases}x=R(t-\sin t)\\ y=R(1-\cos t)\end{cases}$. $\left(R\in\mathbb{R}_+^*,\ -\infty<t<+\infty\right)$ (М.: R = 1 см).

Решение: Рассмотрим арку циклоиды Γ, соответствующей изменению параметра $t\in[0;2\pi]$.



Эта арка задана параметрически: $\varphi(t)=R(t-\sin t)$, $\psi(t)=R(1-\cos t)$, $\left(t\in[0;2\pi]\right)$. Находим: $\varphi'(t)=R(1-\cos t)$, $\psi'(t)=R\sin t$ и вычисляем $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=2R^2(1-\cos t)$. Воспользуемся формулой для нахождения длины гладкой кривой, заданной параметрически, и учтём, что арка Γ симметрична относительно прямой $x=\pi R$ (интегрирование будем производить по отрезку $[0;\pi]$, удваивая результат).

Итак, имеем:

$$\text{дл}\,\Gamma=2\int\limits_0^\pi\sqrt{2R^2(1-\cos t)}\,dt=2R\sqrt{2}\int\limits_0^\pi\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=8R\int\limits_0^\pi\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=$$

$$= -8R\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = -8R\cdot(0-1) = 8R.$$

(Заметим, что вычисленная длина в 4 раза больше диаметра окружности L, «породившей» циклоиду. На рисунке окружности L «вписана» в арку Γ.).

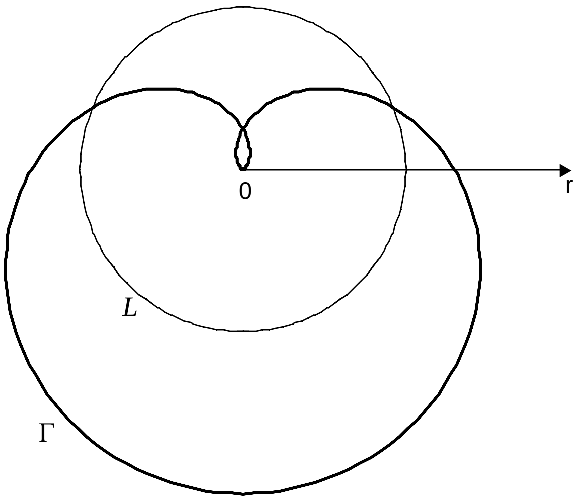
4. Найти длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (М.: a = 3 см). (**Ответ**: дл$\Gamma = 6a$).

5. Найти длину замкнутой кривой Γ, уравнение в полярных координатах которой $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ $(a>0)$. (М.: a = 4 см).

Решение: Так как $r \ge 0$, то и $\sin\frac{\theta}{3} \ge 0$, поэтому $\frac{\theta}{3} \in [0;\pi]$ или $\theta \in [0;3\pi]$ (для других значений θ кривая Γ «повторяет» саму себя).

Составим следующую таблицу для построения кривой Γ:

$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\boldsymbol{r}$	0	$\frac{a}{8}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a \approx \frac{5}{8}a$	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a \approx \frac{5}{8}a$	$\frac{a}{8}$	0



По формуле для нахождения длины гладкой кривой, заданной в полярных координатах, и в силу симметрии Γ относительно прямой, содержащей лучи $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$, (интегрирование будем производить по отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ и удвоим результат) имеем:

$$\text{дл}\,\Gamma = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3} + a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta = 2a\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\frac{\theta}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{3} + \cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta =$$

$$= 2a \cdot \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1-\cos\frac{2\theta}{3}}{2} d\theta = a \cdot \left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi a.$$

(Заметим, что вычисленная длина в полтора раза больше длины окружности L с радиусом $\frac{a}{2}$. На рисунке окружность L изображена.)

Упражнения.

Найти длины дуг следующих кривых:

1. $y = x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \le x \le 4)$. (**Ответ**: $\text{дл}\Gamma = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$).

2. $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le x_0)$. (**Ответ**: $\text{дл}\Gamma = 2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)} + p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$).

3. $y = e^x$ $(0 \le x \le x_0)$. (**Ответ**: $\text{дл}\Gamma = x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$).

4. $r = a\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ (1-й виток спирали Архимеда). (**Ответ**: $\text{дл}\Gamma = \pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

5. $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0)$ (кардиоида). (**Ответ**: $\text{дл}\Gamma = 8a$).

Тема 47. Вычисление объёмов и площадей поверхностей тел вращения

Определение 1. *Внутренним* (*внешним*) *объёмом* пространственного тела P – ограниченного множества точек координатного пространства $\mathbb{R}^3$ – называется верхняя (нижняя) грань множества объёмов всевозможных объемлемых $M_P \subset P$ (объемлющих $M^P \supset P$) многогранников по отношению к данному телу, т.е.

$$\underline{\text{об}}P = \sup\left\{\text{об}M_P, M_P \subset P\right\} \quad \left(\overline{\text{об}}P = \inf\left\{\text{об}M^P, M^P \supset P\right\}\right).$$

Определение 2. Пространственное тело P называется *кубируемым*, если его внутренний $\underline{\text{об}}P$ и внешний $\overline{\text{об}}P$ объёмы совпадают, при этом их общее значение называется *объёмом* данного тела, т.е. $\text{об}P = \left(\underline{\text{об}}P = \overline{\text{об}}P\right)$.

Теорема 1 (объём тела с известным поперечным сечением). *Пусть кубируемое тело* P *лежит между плоскостями* $x = a$ *и* $x = b$ $(a, b \in \mathbb{R}; a < b)$ *и каждое сечение тела* P *плоскостью* $x = const$ $(x \in [a;b])$, *перпендикулярной оси абсцисс, есть квадрируемая* *фигура* Φ_x, *площадь которой* $\text{пл}\Phi_x$ *является непрерывной функцией от* x*:* $S(x)$ $\left(x \in [a;b]\right)$. *Тогда объём тела* P *вычисляется по формуле* $\text{об}P = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Теорема 2 (объём тела вращения). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и неотрицательна на невырожденном отрезке* $[a;b]$. *Тогда тело* P, *получаемое вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции* $\Phi = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;b],\ 0 \le y \le f(x)\right\}$, *кубируемо и его объём вычисляется по формуле* $\text{об}P = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x)$ *задана параметрически:* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\left(t \in [\alpha;\beta]\right)$, *где функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема и строго монотонна на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *а функция* $\psi(t)$ *непрерывна и неотрицательна на этом отрезке. Тогда тело* P, *полученное вращением вокруг оси абсцисс подграфика функции* $f(x)$, *кубируемо и его объём вычисляется по формуле* $\text{об}P = \pi\int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\cdot\left|\varphi'(t)\right|dt$.

Теорема 4. *Пусть кривая* Γ *задана уравнением в полярных координатах* $r = f(\theta)$ *(*$\theta -$ *полярный угол, а* $r -$ *радиус-вектор;* θ *и* $r -$ *полярные координаты), где функция* $f(\theta)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha;\beta]$ $\left([\alpha;\beta] \subset [0;\pi]\right)$. *Тогда тело* P, *полученное вращением вокруг полярной оси криволинейного сектора* $\Phi = \left\{(\theta;r) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha;\beta],\ 0 \le r \le f(\theta)\right\}$, *кубируемо и его объём вычисляется по формуле* $\text{об}P = \dfrac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta f^3(\theta)\sin\theta d\theta$.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на невырожденном отрезке $[a;b]$. Поверхность, получаемая при вращении вокруг оси абсцисс графика G_f данной функции, называется *поверхностью вращения*, порождённой G_f на $[a;b]$ и обозначается S.

Определение 4. Поверхность вращения S, порождённую графиком G_f функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, будем называть *квадрируемой*, если существует верхняя грань множества площадей поверхностей, получаемых вращением вокруг оси абсцисс всевозможных ломаных, вписанных в G_f. При этом сама верхняя грань называется *площадью* поверхности S и обозначается плS.

Теорема 5 (площадь поверхности вращения). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема и неотрицательна на невырожденном отрезке* $[a;b]$. *Тогда поверхность вращения* S, *порождённая графиком* G_f *функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$, *квадрируема и её площадь вычисляется по формуле* пл$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x)$ *задана параметрически:* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in[\alpha;\beta])$, *где функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема и строго монотонна на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *а функция* $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируема и неотрицательна на этом отрезке. Тогда поверхность вращения* S, *порождённая графиком* G_f *функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$, *квадрируема и её площадь вычисляется по формуле*

пл$S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$.

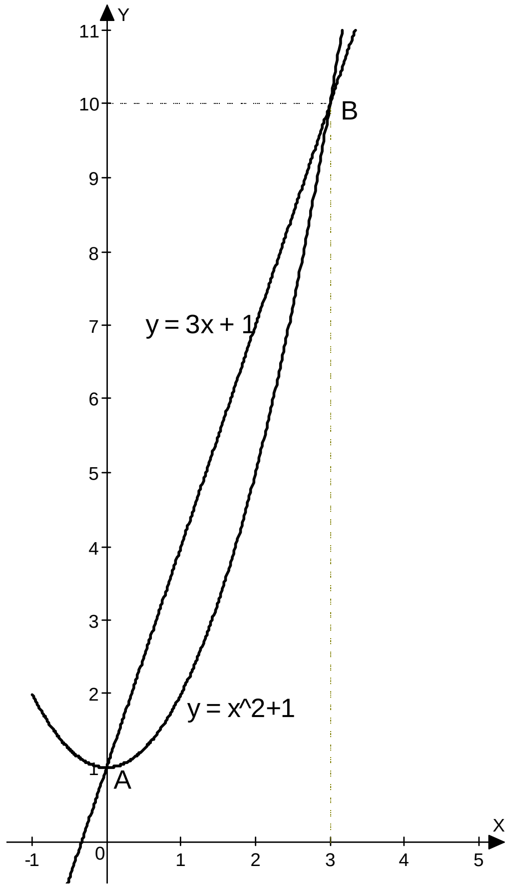
Теорема 7. *Пусть кривая* Γ *задана уравнением в полярных координатах* $r=f(\theta)$ (θ *– полярный угол, а* r *– радиус-вектор;* θ *и* r *– полярные координаты), где функция* $f(\theta)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha;\beta]$ $([\alpha;\beta]\subset[0;\pi])$. *Тогда поверхность* S, *получаемая вращением вокруг полярной оси кривой* Γ, *квадрируема и её площадь вычисляется по формуле* пл$S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta f(\theta)\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\sin\theta d\theta$.

Задачи.

1. Найти объём тела P, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h, а поперечное сечение тела есть сегмент параболы с хордой, равной высоте этого сегмента. (М.: a = 2 см, h = 4 см). (**Ответ**: об$P=\frac{2}{9}a^2h$).

2. Найти объём тела P, полученного вращением относительно оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3x+1$. (М.: 1 = 0,5 см).

Решение: Парабола $y=x^2+1$ и прямая $y=3x+1$ пересекаются в точках $A(0;1)$ и $B(3;10)$. Тело P есть разность двух тел, получаемых вращением относительно оси Ox подграфиков функций $f(x)=3x+1$ и $g(x)=x^2+1$ на отрезке $[0;3]$.



Согласно теореме 1, $\text{об}P=\pi\int\limits_0^3(3x+1)^2dx-\pi\int\limits_0^3\left(x^2+1\right)^2dx=$

$$=\pi\int\limits_0^3\left(6x+7x^2-x^4\right)dx=\pi\left[3x^2+\frac{7}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right]_0^3=\pi\left(27+63-\frac{243}{5}\right)=41{,}4\pi\ .$$

3. Найти объём тела P, полученного вращением относительно оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\sqrt{(x-1)^3}$, прямой $x=2$ и осью абсцисс. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ**: $\text{об}P=\frac{\pi}{4}$).

4. Найти объём тора P с внутренним и внешним радиусами r и R. (**Ответ**: $\text{об}P=2\pi^2Rr^2$).

5. Найти площадь поверхности S, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$. (М.: 1 = 4 см). (**Ответ**: $\text{пл}S=\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$).

6. Найти объём тела P и площадь поверхности S, получаемых вращением вокруг оси Ox одной подарки и соответственно одной арки циклоиды $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ $(R > 0,\ t \in [0; 2\pi])$.

Решение: Имеем: $\varphi(t) = R(t - \sin t)$, $\psi(t) = R(1 - \cos t)$, $(t \in [0; 2\pi])$, $\varphi'(t) = R(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = R\sin t$, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 2R^2(1 - \cos t)$.

По формуле для вычисления объёма тела, полученного вращением подграфика функции, заданной параметрически, и, учитывая симметрию этого подграфика относительно прямой $x = \pi R$ (интегрировать будем по отрезку $[0; \pi]$, удваивая результат), получаем:

$$\text{об}P = 2\pi\int_0^\pi R^2(1-\cos t)^2 \cdot R(1-\cos t)dt = 2\pi R^3\int_0^\pi\left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= 2\pi R^3\left[t - 3\sin t\right]_0^\pi + 3\pi R^3\int_0^\pi(1 + \cos 2t)dt - 2\pi R^3\int_0^\pi\left(1 - \sin^2 t\right)d(\sin t) =$$

$$= 2\pi^2 R^3 + 3\pi R^3 \cdot \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi - 2\pi R^3 \cdot \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi = 5\pi^2 R^3.$$

По формуле для вычисления площади поверхности, полученной вращением графика функции, заданной параметрически, и, учитывая симметрию этого графика относительно прямой $x = \pi R$ (интегрировать будем по отрезку $[0; \pi]$, удваивая результат), имеем:

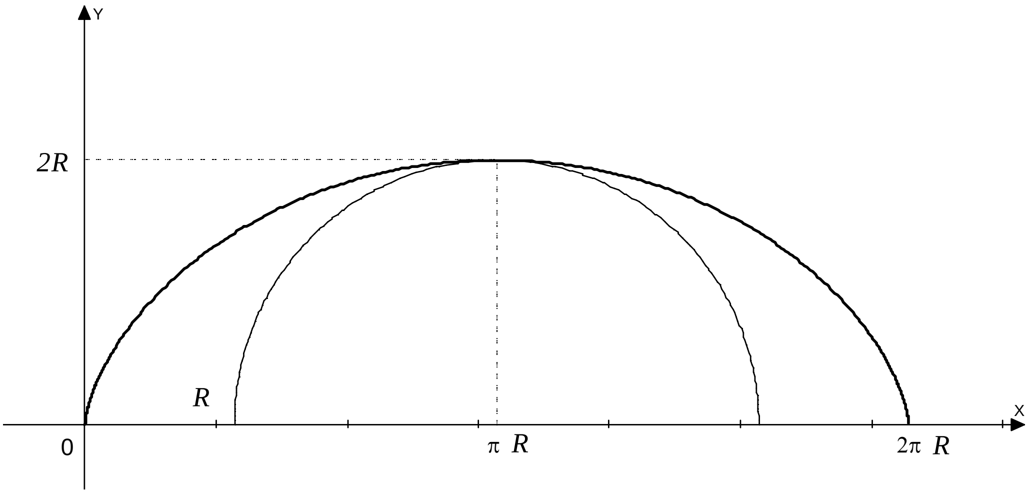
$$\text{пл}S = 4\pi\int_0^\pi R(1-\cos t)\cdot\sqrt{2R^2(1-\cos t)}dt = 4\sqrt{2}\pi R^2 \cdot \int_0^\pi(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= 4\sqrt{2}\pi R^2 \cdot \int_0^\pi\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt = 32\pi R^2 \cdot \int_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -32\pi R^2 \cdot \int_0^\pi\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = 32\pi R^2 \cdot \left[\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3} - \cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= 32\pi R^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{64}{3}\pi R^2.$$

(Заметим, что вычисленная площадь в $\frac{4}{3}$ раза больше площади сферы T радиуса $2R$, вписанной в поверхность S. На рисунке изображена полуокружность, вращение которой вокруг оси Ox «порождает» сферу T.)



7. Найти объём тела P, полученного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной замкнутой кривой $r = a\sin^3\dfrac{\theta}{2}$ $(a > 0)$. (М.: a = 3 см).

(**Ответ**: об$P = \dfrac{8}{33}\pi a^3$).

8. Вычислить объём тела P и площадь поверхности S, полученных вращением вокруг прямой, содержащей полярную ось, фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0)$, и соответственно самой кардиоиды (М.: a = 2 см).

Решение: Кардиоида полностью определяется изменением полярного угла θ от 0 до 2π. Ясно, что кардиоида симметрична относительно прямой, содержащей полярную ось, поэтому можно построить «верхнюю» половину $(\theta \in [0;\pi])$ кардиоиды и симметрично отобразить её относительно этой прямой. Составим следующую таблицу:

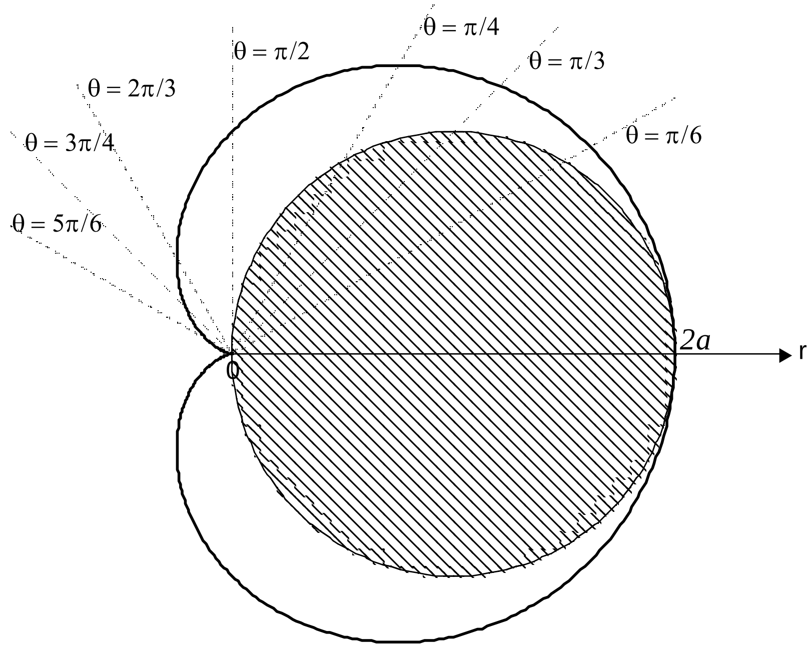
θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π
r	$2a$	$\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a \approx 1{,}9a$	$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a \approx 1{,}7a$	$1{,}5a$	a	$0{,}5a$	$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a \approx 0{,}3a$	$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a \approx 0{,}1a$	0

Так как $f(\theta) = a(1+\cos\theta)$, то по формуле для вычисления объёма тела, полученного вращением криволинейного сектора, заданного в полярных координатах (вращаем криволинейный сектор, ограниченный полярной осью и «верхней» половиной кардиоиды), имеем:

$$\text{об}P = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta = -\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 d(1+\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\left[\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

(Заметим, что вычисленный объём в два раза больше объёма шара B радиуса a, «вписанного» в тело P. На рисунке заштрихован круг, вращение которого вокруг полярной оси, порождает шар B.)



Так как $f'(\theta) = -a\sin\theta$ и, следовательно, $f^2(\theta) + f'^2(\theta) = 2a^2(1+\cos\theta)$, то по формуле для вычисления площади поверхности, полученной вращением кривой, заданной в полярных координатах (вращаем «верхнюю» половину кардиоиды), имеем:

$$\text{пл}S = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta d\theta = -2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}} d(1+\cos\theta) =$$

$$= -2\sqrt{2}\pi a^2 \left[\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

(Заметим, что вычисленная площадь в 1,6 раза больше площади сферы T радиуса a, «вписанной» в поверхность S. На рисунке окружность заштрихованного круга, вращаясь вокруг полярной оси, порождает сферу T.)

Упражнения.

1. Найти объём тела P, ограниченного трёхосным эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\left(a,b,c \in \mathbb{R}_+^*\right)$. (**Ответ**: об$P = \frac{4}{3}\pi abc$).

2. Найти объёмы тел, полученных при вращении фигур, ограниченных кривыми:

а) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ **1)** вокруг оси Ox; **2)** вокруг оси Oy. (**Ответ**: **1)** об$P = \frac{16\pi}{15}$; **2)** об$P = \frac{8\pi}{3}$).

б) $y=\sin x$, $y=0$ $(0\le x\le\pi)$ **1)** вокруг оси Ox; **2)** вокруг оси Oy. (**Ответ**: **1)** об$P=\dfrac{\pi^2}{2}$; **2)** об$P=2\pi^2$).

3. Найти площади поверхностей S, образованных вращением следующих кривых:

а) $y=a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$ $\left(|x|\le b;\ a,b\in\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ вокруг оси Ox.

(**Ответ**: пл$S=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\dfrac{8b^2}{\pi}\ln\dfrac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$).

б) $y=\operatorname{tg}x$ $\left(0<x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$ вокруг оси Ox.

(**Ответ**: пл$S=\pi\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right)$).

в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b\le a)$ **1)** вокруг оси Ox; **2)** вокруг оси Oy. (**Ответ**: **1)** пл$S=2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; **2)** пл$S=2\pi a^2+\dfrac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left(\dfrac{a}{b}\left(1+\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right)$).

Тема 48. Физические приложения определённого интеграла

1. Нахождение координаты движущейся точки по её скорости.

Нахождение закона движения точки по координатной прямой (т.е. зависимости координаты точки от времени $x=x(t)$) по известной скорости $v(t)$ производится интегрированием по формуле $x(t)=\int v(t)dt$. Если при этом известно, что $x(t_0)=x_0$, то $x(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t}v(\tau)d\tau$. Например, если $v(t)=v_0+at$, то $x(t)=x_0+\int\limits_{0}^{t}(v_0+a\tau)d\tau=x_0+v_0t+\dfrac{at^2}{2}$.

2. Работа силы.

Работа силы $F(x)$ при движении точки от $x=a$ до $x=b$ вычисляется по формуле $A=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$. Например, работа по растяжению пружины жёсткости k от $x=0$ до $x=x_0$ равна работе силы $F(x)=kx$:

$A = \int\limits_0^{x_0} kx\,dx = \dfrac{kx_0^2}{2}$. Одновременно мы нашли потенциальную энергию растянутой пружины.

3. Масса стержня.

Масса стержня, расположенного на оси Ox, вычисляется по формуле $m = \int\limits_a^b \lambda(x)dx$, где $\lambda(x)-$ линейная плотность стержня, a и $b-$ координаты его концов.

4. Сила давления жидкости на стенку.

Сила давления жидкости на стенку сосуда равна $F = \int pds = \int \rho ghds$, где $\rho-$плотность жидкости, $ds-$ площадь участка стенки, $h-$ глубина этого участка, $p = \rho gh-$ давление на глубине h. Например, если стенка сосуда – прямоугольник с горизонтальной и находящейся на поверхности жидкости стороной a и вертикальной стороной h_0, то, разбивая этот прямоугольник на узкие горизонтальные полоски ширины dh и длины a, получим $F = \int\limits_0^{h_0} \rho gh \cdot adh = \rho ga \int\limits_0^{h_0} hdh = \rho ga \dfrac{h_0^2}{2}$.

5. Сила притяжения.

Закон всемирного тяготения определяет силу гравитационного притяжения двух тел $F = G\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$, где $G-$ гравитационная постоянная, m_1, m_2- массы тел, $x-$ расстояние между ними. Например, тонкий стержень длины l и массы M притягивает материальную точку массы m, находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов, с силой $F = \int\limits_a^{a+l} G\dfrac{mdM}{x^2}$, где $dM = \dfrac{M}{l}dx$. Получаем $F = \dfrac{GmM}{l}\int\limits_a^{a+l}\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{GmM}{a(a+l)}$.

6. Вычисление моментов сил.

Если сила F, приложенная к телу, перпендикулярна оси вращения и плечу d этой силы, то момент M этой силы равен Fd.

Если осью вращения площадки является ось Ox и к площадке приложена распределённая сила, перпендикулярная площадке, то момент этой силы вычисляется по формуле $M_x = \int ydF$. Например, если квадратная площадка со стороной a, примыкающая к оси вращения Ox, находится под давлением p (так что сила давления на площадку равна $F = pS = pa^2$), то момент сил относительно оси Ox мы найдём, разрезав площадку на полоски, параллельные оси Ox. Тогда $M=\int ydF=\int ypdS=\int\limits_0^a yp\cdot ady=\frac{pa^3}{2}$.

7. Нахождение центра масс.

Центром масс пластинки (центром тяжести) называется такая точка, что если в ней сосредоточить массу всей пластинки, то моменты сил относительно всех осей останутся прежними. Пусть y_0 – ордината центра масс, тогда $M_x=mgy_0$, где m – масса пластинки. Аналогично $M_y=mgx_0$. То же верно и для линии (т.е. проволоки в форме данной линии). Найдём, например, центр тяжести полукруга: $0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$; считается известным, что $M_x=\frac{4}{3\pi}mgR$ (задача 6), поэтому $\frac{4}{3\pi}mgR=mgy_0$, откуда $y_0=\frac{4}{3\pi}R\approx 0{,}42R$.

8. Вычисление моментов инерции тел.

Момент инерции J тела играет такую же роль при изучении вращательного движения тела, какую играет масса при изучении поступательного движения. Например, кинетическая энергия вращающегося тела равна $\frac{J\omega^2}{2}$, ω – угловая скорость вращения тела (сравните с $\frac{mv^2}{2}$). Момент инерции J тела при вращении вокруг оси l вычисляется по формуле $J_l=\int h^2dm$, где h – расстояние от элемента тела массы dm до оси l. Например, момент инерции диска радиуса R относительно оси этого диска найдём, разбивая диск на колечки ширины dh. Пусть σ – плоская плотность диска, тогда $J=\int h^2dm=\int h^2\cdot\sigma dS=\sigma\int\limits_0^R h^2\cdot 2\pi hdh=\frac{\pi\sigma R^4}{2}$. Так как $S=\pi R^2$, то $m=\sigma\pi R^2$, откуда $J=\frac{mR^2}{2}$.

Задачи.

1. Найти закон движения $x(t)$ точки по координатной прямой, если известна зависимость скорости точки от времени: $v(t)=t^2$ и координата точки в начальный момент времени $t_0=2$: $x(2)=3$. Найти положение точки в момент времени $t=3$ и изобразить точку на координатной прямой в начальный момент времени $t_0=2$ и в момент времени $t=3$.

Решение: Используем формулу, выражающую координату через скорость: $x(t)=3+\int\limits_2^t\tau^2d\tau=3+\frac{t^3}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\left(t^3+1\right)$. Поэтому $x(3)=\frac{28}{3}$. (Чертёж выполните самостоятельно).

2. Найти работу, которую нужно произвести против сил тяжести, чтобы поднять тело массы m с поверхности Земли на высоту h, если 1) h – мало по сравнению с радиусом R Земного шара; 2) без этого условия.

Решение: Пусть y – высота над уровнем Земли.

1) Сила притяжения $F = mg$, отсюда $A = \int_0^h mg \cdot dy = mgh$;

2) Сила притяжения $F = G\dfrac{Mm}{(R+y)^2}$, отсюда $A = \int_0^h G\dfrac{Mm}{(R+y)^2} \cdot dy =$

$$= GMm\int_0^h \frac{d(R+y)}{(R+y)^2} = -\frac{GMm}{R+y}\Bigg|_0^h = GMm\left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right) = \frac{GMmh}{(R+h)R}.$$

Произведение GM можно выразить через радиус R Земного шара и ускорение свободного падения g: если тело массы m лежит на поверхности Земли, то сила притяжения $G\dfrac{Mm}{R^2}$ равна, как известно, mg. Отсюда $GM = R^2 g$. Правую часть последнего равенства подставим в выражение, найденное для работы, получаем: $A = \dfrac{mgRh}{R+h}$.

3. Найти массу стержня, если линейная плотность стержня $\lambda(x) = x$ и известны координаты начала и конца стержня: $a = 0$, $b = 3$. **(Ответ:** $m = 4{,}5$).

4. Найти силу давления жидкости на стенку, имеющую форму полукруга радиуса R с диаметром, находящимся на поверхности. **(Ответ:** $F = \dfrac{2}{3}\rho g R^3$).

5. Определить, с какой силой диск радиуса R и массы M притягивает материальную точку массы m, находящуюся на оси диска на расстоянии d от центра диска. **(Ответ:** $F = \dfrac{2GMm}{R^2}\left(1 - \dfrac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$).

6. Найти момент сил тяжести, действующих на горизонтальную пластинку, имеющую форму полукруга радиуса R, диаметр которой лежит на оси Ox. Масса пластинки m. **(Ответ:** $M_x = \dfrac{4}{3\pi} mgR$).

7. Найти центр масс однородной пластинки $\Phi = \{(x;y):\ x^2 \le y \le 1\}$. **(Ответ:** $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}6$).

8. Найти момент инерции проволоки, имеющей форму дуги полуокружности радиуса R, относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги, если линейная плотность проволоки равна 1. **(Ответ:** $J=\frac{\pi R^3}{2}$).

Упражнения.

1. Найти закон движения $x(t)$ ракеты, если известна зависимость её скорости от времени: $v(t)=-v_0\ln\left(1-\frac{\mu}{m_0}t\right)$ и координата в начальный момент времени: $x(0)=0$ (m_0 – начальная масса ракеты, μ – массовый расход топлива). **(Ответ:** $x(t)=v_0\frac{m_0}{\mu}\left(\tau+(1-\tau)\ln(1-\tau)\right)$, где $\tau=\frac{\mu t}{m_0}$).

2. Найти закон движения $y(t)$ снаряда после выстрела вверх, если известна зависимость его скорости от времени: $v(t)=\frac{1}{a}\left((av_0+g)e^{-at}-g\right)$, а $y(0)=0$. (Эта задача описывает полёт снаряда с учётом сопротивления воздуха, a – параметр, характеризующий сопротивление воздуха). **(Ответ:** $y(t)=\frac{av_0+g}{a^2}\left(1-e^{-at}\right)-\frac{g}{a}t$).

3. Найти массу стержня, если линейная плотность стержня $\lambda(x)=x(4-x)$ и известны координаты начала и конца стержня: $a=0$, $b=4$. **(Ответ:** $m=\frac{32}{3}$).

4. Определить силу давления воды на стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a=10$ м, верхнее – $b=6$ м и высота $h=5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c=20$ м. **(Ответ:** $F=6942$ Н).

5. Найти момент сил тяжести для горизонтальной пластинки относительно оси Ox, если пластинка имеет форму треугольника с основанием, лежащим на оси Ox, и высотой h. Масса пластинки m. **(Ответ:** $M_x=\frac{1}{3}mgh$).

6. Найти центр масс однородной пластинки, границей которой является кривая $r=1+\cos\theta$ (кардиоида). **(Ответ:** $\theta_0=0$, $r_0=\frac{5}{6}$).

7. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы m относительно его диаметра. **(Ответ:** $J=0{,}4mR^2$).

Тема 49. Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале

$[a;b)$ $(-\infty<a<b\le+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a;t]\subset[a;b)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a;b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сам несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a;b]$ $(-\infty\le a<b<+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[t;b]\subset(a;b]$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to a+}\int\limits_t^b f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ по полуинтервалу $(a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а сам несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a;b)$ $(-\infty\le a<b\le+\infty)$. Если для некоторой точки $c\in(a;b)$ оба несобственных интеграла $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ сходятся, то их сумма называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ по интервалу $(a;b)$; он обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ и говорят, что он *сходится*: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+$ $+\int\limits_c^b f(x)dx$. Если хотя бы один из несобственных интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ расходится, то и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Нетрудно показать, что выбор точки $c\in(a;b)$ в определении 3 не влияет на сходимость либо расходимость, а также на значение в случае сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема. *Пусть промежуток* $\langle a;b\rangle$ *ограничен* $(a,b\in\mathbb{R};a<b)$ *и функция* $f(x)$ *определена и ограничена на нём. Если функция* $f(x)$ *интегрируема на любом отрезке* $\Delta\subset\langle a;b\rangle$, *то несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится. При этом его значение совпадает с определённым интегралом по отрезку* $[a;b]$ *функции, получаемой из* $f(x)$ *при любом её доопределении на концах промежутка* $\langle a;b\rangle$, *в которых она не определена.*

Основные свойства несобственных интегралов (свойства формулируются для несобственного интеграла по полуинтервалу $[a;b)$ $(-\infty<a<b\le+\infty)$; для других видов несобственных интегралов формулировки аналогичны).

1. *Аддитивность.* Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то для любого $c\in(a;b)$ сходится и несобственный интеграл $\int\limits_c^b f(x)dx$, при этом имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$. (Отметим, что интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ – определённый).

2. *Линейность.* Если сходятся несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$, то при любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$, при этом имеет место формула $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=$ $=\alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)dx$.

3. *Интегрирование неравенств.* Если сходятся несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$, причём всюду на $[a;b)$ $f(x)\le g(x)$, то имеет место неравенство: $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

4. *Интегрирование по частям*. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на полуинтервале $[a;b)$, несобственный интеграл $\int_a^b v(x)u'(x)dx$ сходится и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-} u(x)v(x)$, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, при этом имеет место формула $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$, где $u(x)v(x)\Big|_a^b =$ $= \lim\limits_{x\to b-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

5. *Замена переменной*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;b)$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на полуинтервале $[\alpha;\beta)$ $(-\infty<\alpha<\beta\le+\infty)$ таком, что $\varphi(\alpha)=a$ и $\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(t)=b$. Тогда если сходится один из несобственных интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, то сходится и другой, при этом имеет место их равенство, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

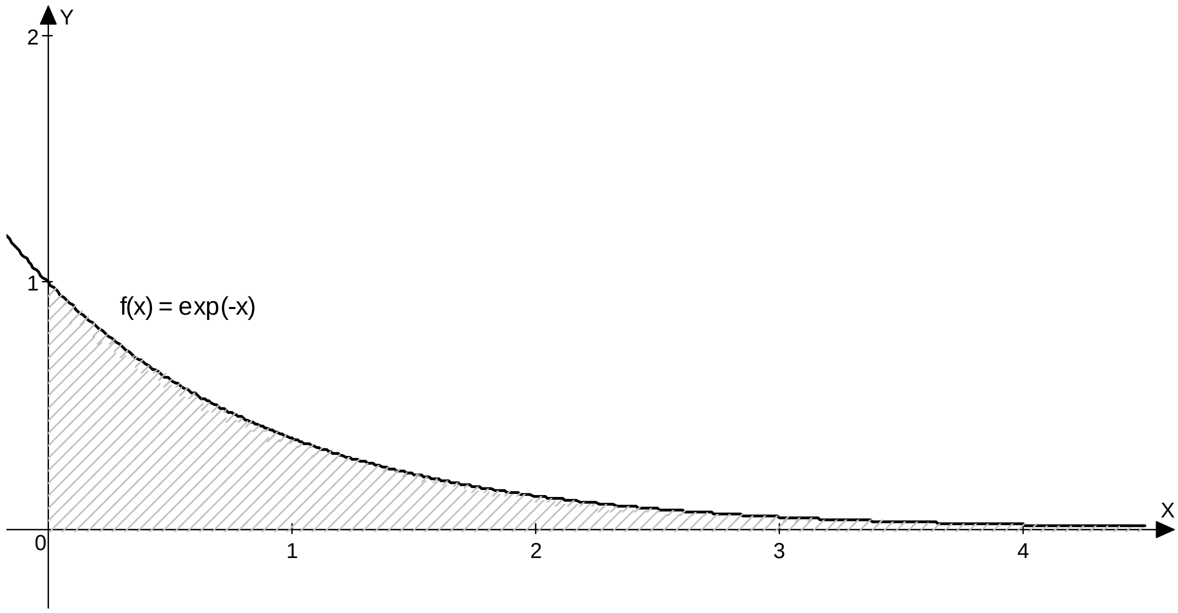
6. *Аналог формулы Ньютона-Лейбница*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;b)$ и $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$ на этом полуинтервале. Тогда имеет место формула: $\int_a^b f(x)dx =$ $= F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b-} F(x) - F(a)$.

<u>Задачи.</u>

1. Исследовать сходимость и выяснить геометрический смысл:

а) $I=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$.

Решение: Имеем $f(x)=e^{-x}$, $D_f=\mathbb{R}\supset[0;+\infty)$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[0;t]$ при любом положительном t. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{t} e^{-x}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right)=-\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}+1=1$, то несобственный интеграл I сходится, а его значение (равное 1) геометрически выражает площадь неограниченной «криволинейной трапеции» – подграфика функции $f(x)=e^{-x}$ на промежутке $[0;+\infty)$. На рисунке эта «криволинейная трапеция» заштрихована.



б) $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}$. (**Ответ**: интеграл I расходится к $+\infty$).

в) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. (**Ответ**: интеграл I сходится и $I=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$).

2. Используя определение и свойства, исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $I=\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x dx$. (**Ответ**: интеграл I расходится).

б) $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$. (**Ответ**: интеграл I сходится и $I=0{,}25$).

в) $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. (**Ответ**: интеграл I сходится и $I=\frac{102}{7}$).

3. Вычислить несобственные интегралы:

а) $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. (**Ответ**: $I=\frac{\pi}{2}$).

б) $I=\int\limits_{-2}^{0}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$. (**Ответ**: $I=-\frac{16}{3}$).

в) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$. (**Ответ**: $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$).

Упражнения.

Вычислить несобственные интегралы:

1. $I=\int\limits_{0}^{1}\ln x\,dx$. (**Ответ**: $I=-1$).

2. $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. (**Ответ**: $I=\pi$).

3. $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (**Ответ**: $I=\pi$).

4. $I=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$. (**Ответ**: $I=\frac{2}{3}\ln 2$).

5. $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$. (**Ответ**: $I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$).

6. $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$. (**Ответ**: $I=0$).

Тема 50. Исследование сходимости несобственных интегралов

Сформулированные ниже теоремы относятся к несобственным интегралам по полуинтервалу $[a;b)$ $(-\infty<a<b\le+\infty)$; для других видов несобственных интегралов формулировки аналогичны.

Теорема 1 (критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена, неотрицательна* *на полуинтервале* $[a;b)$ *и интегрируема по любому отрезку* $[a;t]\subset[a;b)$. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда функция* $\varphi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx$ *ограничена сверху на данном полуинтервале.*

Теорема 2 (признак сравнения в непредельной форме). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на полуинтервале* $[a;b)$ *и всюду там имеет место неравенство* $0\le f(x)\le g(x)$. *Если они интегрируемы по любому отрезку* $[a;t]\subset[a;b)$, *то:*

1. *сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *влечёт сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *причём* $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$;

2. *расходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *влечёт расходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Теорема 3 (признак сравнения в предельной форме). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на полуинтервале* $[a;b)$, *всюду там* $f(x)\ge 0,\ g(x)>0$ *и интегрируемы по любому отрезку* $[a;t]\subset[a;b)$. *Если существует конечный ненулевой предел* $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *то несобственные интегралы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Определение. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а несобственный интеграл

$\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *условно сходящимся.*

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на полуинтервале* $[a;b)$ *и интегрируема по любому отрезку* $[a;t]\subset[a;b)$. *Если сходится несобственный интеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$, *то сходится и несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *(т.е. абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится).*

Известно, что несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ абсолютно сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$, несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ абсолютно сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\ge 1$.

Задачи.

1. Не вычисляя значение, исследовать сходимость:

а) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+x+1}$.

Решение: Имеем $f(x)=\frac{x^2}{x^3+x+1}$, $D_f=\mathbb{R}\supset[0;+\infty)$ и $f(x)\ge 0$ всюду на промежутке интегрирования $[0;+\infty)$. Пусть $g(x)=\frac{1}{x+1}$ – функция сравнения ($g(x)>0$ всюду на промежутке интегрирования $[0;+\infty)$). Так как обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[0;t]$ $\left(t\in\mathbb{R}_+^*\right)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(x+1)}{x^3+x+1}=1$, а несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x+1}\overset{y=x+1}{=}\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y}$ расходится (т.к. при $\alpha=1$ несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha}$ расходится), то по теореме 3 и несобственный интеграл I расходится.

б) $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}$. (**Ответ**: интеграл I сходится).

в) $I=\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$. (**Ответ**: интеграл I сходится).

г) $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. (**Ответ**: интеграл I расходится).

д) $I=\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$. (**Ответ**: интеграл I расходится).

е) $I=\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\sin x}$. (**Ответ**: интеграл I сходится).

2. Исследовать абсолютную и условную сходимость несобственных интегралов:

а) $I=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$. (**Ответ**: интеграл I абсолютно сходится).

б) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}dx$. (**Ответ**: интеграл I условно сходится).

в) $I=\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2+\sqrt{x^3}+x^2\cos\frac{1}{x}}dx$. (**Ответ**: интеграл I условно сходится).

Упражнения.

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$. (**Ответ**: интеграл I сходится).

б) $I=\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. (**Ответ**: интеграл I сходится).

в) $I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$. (**Ответ**: интеграл I расходится).

2. Исследовать интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ на абсолютную и условную сходимость. (**Ответ**: интеграл I сходится, но не является абсолютно сходящимся, таким образом, он сходится условно).

Тема 51. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Сравнение положительных рядов

Пусть $\{a_n\}$ – произвольная числовая последовательность. Составим последовательность $\{S_n\}$ такую, что $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Определение 1. Пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$ называется *числовым рядом*. Элементы последовательности $\{a_n\}$ называются *членами ряда*. Элементы последовательности $\{S_n\}$ называются *частичными суммами* этого ряда. Обозначение: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (кратко $\sum a_n$).

Определение 2. Ряд $\sum a_n$ называют *сходящимся*, если существует конечный предел $S = \lim S_n$ последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ данного ряда, а значение этого предела называют суммой ряда $\sum a_n$ и пишут $S = \sum a_n$.

Если предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд $\sum a_n$ называют *расходящимся*.

Теорема 1. *Если два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ также сходится, при этом $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.*

Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд $\sum a_n$ сходится, то последовательность $\{a_n\}$ его членов бесконечно мала.*

Определение 3. k*-ым остаточным рядом* (или k*-ым остатком*) ряда $\sum a_n$ называется ряд, получающийся из ряда $\sum a_n$ отбрасыванием первых k его членов и перенумерацией оставшихся в порядке их следования, т.е. $a_1' = a_{k+1}$, $a_2' = a_{k+2}$, ... $a_n' = a_{k+n}$, ... Таким образом, $\sum a_n' = \sum a_{k+n}$.

Теорема 3. *Каждый остаточный ряд сходится или расходится одновременно с исходным рядом, и в случае сходимости $S = S_k + R_k$, S – сумма ряда, S_k – сумма k – ой частичной суммы R_k – сумма k – ого остаточного ряда.*

Определение 4. *Положительным рядом* называется числовой ряд, все члены которого положительны.

Теорема 4 (критерий сходимости положительных рядов). *Положительный ряд* $\sum a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность* $\{S_n\}$ *его частичных сумм ограничена сверху.*

Теорема 5 (признак сравнения положительных рядов). *Пусть даны два положительных ряда* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *такие, что* $a_n \le b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. *Тогда*

1) *если ряд* $\sum b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится;*

2) *если ряд* $\sum a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum b_n$ *расходится.*

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Пусть* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *– положительные ряды. Если существует конечный ненулевой предел* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l\in\mathbb{R}^*$, *то оба ряда* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

<u>Задачи.</u>

1. По определению двумя способами исследовать сходимость ряда $\sum\dfrac{4}{4n^2-1}$.

Решение: <u>Первый способ</u>. Имеем $\sum\dfrac{4}{4n^2-1}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{35}+\ldots$ Частичные суммы $S_1=\dfrac{4}{3}$, $S_2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{8}{5}$, $S_3=\dfrac{12}{7}$, поэтому предполагаем, что $S_n=\dfrac{4n}{2n+1}$. Исходя из этого предположения, докажем, что $S_{n+1}=\dfrac{4n+4}{2n+3}$:

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\frac{4n}{2n+1}+\frac{4}{4(n+1)^2-1}=4\cdot\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{4(n+1)}{2n+3}.$$

Таким образом, наше предположение верно и $S_n=\dfrac{4n}{2n+1}$.

Выясним, существует ли конечный предел частичных сумм: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n}{2n+1}=2$. Так как существует конечный предел частичных сумм, то по определению ряд сходится и сумма ряда равна 2, т.е. $S=2$.

<u>Второй способ</u>. Разложим $a_n=\dfrac{4}{4n^2-1}$ на простые множители:

$$a_n=\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1};\quad \text{так как } A=\left.\frac{4}{2n+1}\right|_{n=1/2}=2,$$

$B=\left.\dfrac{4}{2n-1}\right|_{n=-1/2}=-2$, то $a_n=\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{2}{2n+1}$. Тогда $S_n=a_1+a_2+..a_n=$ $=\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right)+...+\left(\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{2}{2n+1}\right)=\dfrac{4n}{2n+1}$. Вычисляя предел $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ частичных сумм, делаем вывод, что ряд сходится, и находим сумму ряда: $S=2$.

2. По определению исследовать сходимость ряда $\sum\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$. (**Ответ:** ряд сходится).

3. По определению исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$. (**Ответ:** ряд сходится).

4. Исследовать сходимость следующих рядов

а) $\sum\dfrac{n}{3n-2}$. (**Ответ:** ряд расходится).

б) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. (**Ответ:** ряд расходится).

5. Доказать, что

а) гармонический ряд $\sum\dfrac{1}{n}$ расходится;

б) ряд обратных квадратов $\sum\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

6. Используя теорему сравнения, исследовать сходимость рядов

а) $\sum\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. (**Ответ:** ряд сходится).

б) $\sum\dfrac{1}{\ln(n+1)}$. (**Ответ:** ряд расходится).

в) $\sum\dfrac{n^2-1}{n^3+2}$. (**Ответ:** ряд расходится).

г) $\sum\dfrac{n+1}{\sqrt{3n^2-2}}$. (**Ответ:** ряд расходится).

7. Доказать, что

а) произведение расходящегося ряда на ненулевое число есть ряд расходящийся;

б) сумма расходящегося и сходящегося рядов есть ряд расходящийся;

в) сумма двух расходящихся рядов может быть как расходящимся, так и сходящимся рядом

Упражнения.

1. Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

а) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$. (**Ответ:** $S=\frac{2}{3}$). **б)** $\sum\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$. (**Ответ:** $S=\frac{3}{2}$).

в) $\sum \frac{2n-1}{2^n}$. (**Ответ:** $S=3$). **г)** $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. (**Ответ:** $S=1$).

д) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. (**Ответ:** $S=\frac{1}{3}$).

2. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum(-1)^{n-1}$. (**Ответ:** Ряд расходится).

б) $\sum \sqrt[n]{0,001}$. (**Ответ:** Ряд расходится).

в) $\sum \frac{1}{n!}$. (**Ответ:** Ряд сходится).

г) $\sum \frac{1}{2n-1}$. (**Ответ:** Ряд расходится).

д) $\sum \frac{1}{1000n+1}$. (**Ответ:** Ряд расходится).

е) $\sum \frac{n}{2n-1}$. (**Ответ:** Ряд расходится).

ж) $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$. (**Ответ:** Ряд сходится).

3. Доказать, что если положительный ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; привести примеры.

4. Доказать, что если ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum |a_n b_n|$, $\sum (a_n+b_n)^2$, $\sum \frac{|a_n|}{n}$.

5. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

Тема 52. Признаки Даламбера и Коши

Теорема 1 (признак Даламбера в непредельной форме). *Пусть* $\sum a_n$ *положительный ряд. 1) Если существует число* $q\in(0;1)$ *такое, что для всех* $n\in\mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится; 2) если для всех* $n\in\mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть* $\sum a_n$ –

положительный ряд и существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. *1) Если* $l<1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится; 2) если* $l>1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится, причём* $a_n\to+\infty$.

Теорема 2 (признак Коши в непредельной форме). *Пусть* $\sum a_n$ *положительный ряд. 1) Если существует число* $q\in(0;1)$ *такое, что для всех* $n\in\mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n}<q$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится; 2) если для всех* $n\in\mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n}\ge1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Следствие (признак Коши в предельной форме). *Пусть* $\sum a_n$ *положительный ряд и существует* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. *1) Если* $l<1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится; 2) если* $l>1$, *то ряд* $\sum a_n$ *расходится, причём* $a_n\to+\infty$.

Задачи.

1. Используя признак Даламбера или Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum\frac{(n!)^2}{(2n-1)!!}$.

Решение: Имеем $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2(2n-1)!!}{(2n+1)!!(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{2n+1}\to+\infty$, т.е. $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

б) $\sum\frac{2^n n!}{n^n}$. (**Ответ:** ряд сходится).

в) $\sum\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. (**Ответ:** ряд сходится).

г) $\sum n\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{n^2}$. (**Ответ:** ряд расходится).

2. Исследовать сходимость ряда $\sum\frac{n^2+1}{n^3}$. (**Ответ:** ряд расходится).

3. Показать, что при исследовании сходимости ряда $\sum a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2^2\cdot3}+\frac{1}{2^2\cdot3^2}+\ldots$ предельный признак Даламбера не применим, а непредельный признак даёт результат.

4. Показать, что при исследовании сходимости ряда $\sum a_n = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \ldots$ предельный и непредельный признаки Даламбера не применимы, а предельный признак Коши даёт результат.

5. Используя необходимое условие сходимости числового ряда, доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10^n}{n!} = 0$.

Упражнения.

Используя признак сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость следующих рядов:

1. $\sum \frac{1000^n}{n!}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

2. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

3. $\sum \frac{n!}{n^n}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

4. $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

5. $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$. (**Ответ**: Ряд расходится).

6. $\sum \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

7. $\frac{1000}{1} + \frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3} + \frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots$ (**Ответ**: Ряд сходится).

8. $\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \ldots$ (**Ответ**: Ряд сходится).

9. $\sum \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. (**Ответ**: Ряд расходится).

10. $\sum \frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

11. $\sum \frac{n^5}{2^n + 3^n}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

12. $\sum\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$. (**Ответ**: Ряд сходится).

Тема 53. Интегральный признак сходимости. Критерий Коши

Теорема 1 (интегральный признак сходимости положительного ряда). *Пусть функция* $f(x)$ *неотрицательна и убывает на промежутке* $[1;+\infty)$. *Положительный ряд* $\sum a_n$, $a_n = f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$, *сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Для ряда, удовлетворяющего условию интегрального признака сходимости, имеет место следующая оценка суммы его $n-$го остаточного ряда: $\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема 2 (критерий Коши сходимости числового ряда). *Числовой ряд* $\sum a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall m\in\mathbb{N}\ \left(n\ge n_\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|a_{n+1}+\ldots+a_{n+m}\right|<\varepsilon\right).$$

<u>Задачи.</u>

1. Используя интегральный признак, исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. $[2;+\infty)\subset D_f=(0;1)\cup(1;+\infty)$. На $[2;+\infty)$ функции x и $\ln x$ строго возрастают и положительные, следовательно, функция $x\ln x$ положительная и строго возрастает, и поэтому $\dfrac{1}{x\ln x}=f(x)$ строго убывает. $f(n)=\dfrac{1}{n\ln n}=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Исследуем несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\Big[\ln(\ln x)\Big]_2^b=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\big(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\big)=+\infty,$$

т.е. интеграл расходится и, следовательно, ряд расходится.

б) $\sum\dfrac{\exp\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$. (**Ответ:** ряд сходится).

в) $\sum\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)^2$. (**Ответ:** ряд сходится).

2. Воспользовавшись критерием Коши, доказать сходимость ряда обратных квадратов $\sum\dfrac{1}{n^2}$.

3. Воспользовавшись критерием Коши, доказать расходимость гармонического ряда $\sum\dfrac{1}{n}$.

4. По критерию Коши показать, что ряд, полученный из гармонического изменением знака каждого третьего члена, расходится.

5. По критерию Коши показать, что если в гармоническом ряде за тремя положительными членами, следующие 2 изменят знак, то ряд расходится.

Упражнения.

1. Доказать, что если положительный ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum a_n^2$ также сходится.

2. Доказать, что если ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum\left|a_nb_n\right|$, $\sum\left(a_n+b_n\right)^2$, $\sum\dfrac{\left|a_n\right|}{n}$.

3. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость ряда $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$. (**Ответ:** ряд сходится при $p>1$).

Тема 54. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница

Определение 1. *Знакопеременным* рядом называется числовой ряд, содержащий бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Определение 2. *Знакочередующимся* рядом называется знакопеременный ряд, каждые два соседних членов которого имеют противоположные знаки.

Теорема (признак Лейбница). *Если* ***1)****. Ряд* $\sum a_n$ *знакочередующийся,* ***2)****.* $\left|a_n\right|\ge\left|a_{n+1}\right|$ $(n=1,2,...)$, *т.е. последовательность* $\{\left|a_n\right|\}$ *убывает и* ***3)****.* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

Для ряда, удовлетворяющего условию теоремы Лейбница, имеет место следующая оценка суммы его $n-$го остаточного ряда: $\left|R_n\right|\le\left|a_{n+1}\right|$ $(n\in\mathbb{N}_0)$.

Задачи.

1. Сколько первых членов следующих рядов достаточно взять, чтобы получить приближённое значение его суммы с точностью до 10^{-2}?

а) $\sum \frac{1}{n^2}$.

Решение: Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится, и к нему применим интегральный признак. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда для ряда $\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)dx$, где R_n – n-ый остаток (то есть сумма n-го остаточного ряда). Условия задачи будут выполнены, если $R_n \le 10^{-2}$. Имеем: $R_n < \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\substack{b \to +\infty \\ (b \ge n)}} \int\limits_{n}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_n^b = \frac{1}{n}$.

Если $\frac{1}{n} \le 10^{-2}$, то $R_n < 10^{-2}$. Так как $\frac{1}{n} \le 10^{-2} \Leftrightarrow n \ge 100$, то достаточно взять 100 членов.

б) $\sum \frac{1}{n!}$.

2. Доказать сходимость знакопеременного ряда и найти его сумму $\sum (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

4. Показать, что для следующих знакопеременных рядов не выполняется одно из условий теоремы Лейбница, и они расходятся.

а) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$;

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \ldots$;

в) $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \ldots = \sum (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}$.

5. Исследовать сходимость знакопеременных рядов.

а) $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$. (**Ответ:** ряд сходится).

б) $\sum \cos(\frac{\pi}{4} + \pi n) \sin\frac{1}{n}$. (**Ответ:** ряд сходится).

в) $\sum \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt{n+1}}$. (**Ответ:** ряд сходится).

6. Сколько первых членов ряда $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ достаточно взять, чтобы получить приближенное значение его суммы с точностью до 10^{-2}?

Упражнения.

1. Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. (**Ответ:** ряд расходится).

б) $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$. (**Ответ:** ряд расходится).

2. Сколько первых членов ряда $\sum\frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)5^n}$ достаточно взять, чтобы получить приближенное значение его суммы с точностью до 10^{-2}?

Тема 55. Абсолютная и условная сходимости

Определение 1. Числовой ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum|a_n|$.

Теорема 1. Всякий абсолютно сходящийся ряд $\sum a_n$ сходится, причём имеет место неравенство $|S|\le S'$, где S – сумма ряда $\sum a_n$, а S' – сумма ряда $\sum|a_n|$.

Теорема 2. Ряд, получающийся при произвольной перестановке членов абсолютно сходящегося ряда, абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Определение 2. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся числовой ряд называется *условно сходящимся*.

Теорема Римана. Из всякого условно сходящегося ряда надлежащей перестановкой его членов можно получить как ряд, сходящийся к любой наперёд заданной сумме, так и расходящийся ряд.

Задачи.

1. Исследовать ряд $\sum\frac{(-1)^n}{2n-1}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение: Так как ряд знакопеременный, $|a_n|=\frac{1}{2n-1}$ убывает и стремится к нулю, то ряд $\sum\frac{(-1)^n}{2n-1}$ сходится по теореме Лейбница. Но ряд $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{2n-1}$ расходится по теореме сравнения $\left(\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)$, поэтому исходный ряд сходится условно.

2. $\sum\frac{\cos n\alpha}{2^n}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

3. $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

4. $\sum\frac{(-1)^{n+1}\sin^2 n\alpha}{n!}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

5. $\sum\frac{(-1)^n \ln n}{n}$. (**Ответ:** ряд сходится условно).

6. $\sum\frac{(-1)^n n!}{n^n}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

7. $\sum(-1)^{n-1}e^{-1/n}$. (**Ответ:** ряд расходится).

8. $\sum\frac{(-1)^n (n-1)^{n^2}}{n^{n^2+1}}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

9. Полагая, что сумма ряда Лейбница $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ равна $S=\ln 2$, найти сумму ряда, полученного из ряда Лейбница перестановкой членов, начиная с третьего так, чтобы за каждым положительным членом следовало два отрицательных, но при этом не нарушалось взаимное расположение членов одного знака, то есть ряда $\sum a_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

Упражнения.

1. Зная, что $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, найти сумму S ряда $\sum a_n = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$, полученного из данного перестановкой его членов. (**Ответ:** $S=\frac{3}{2}\ln 2$).

2. Члены сходящегося ряда $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. (**Ответ:** при $p>1$ ряд сходится абсолютно; при $p\le 1$ ряд сходится условно).

б) $\sum \frac{(-1)^n}{a+n}$. (**Ответ:** При $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$ ряд сходится условно, при $a \in \mathbb{Z}_-^*$ ряд расходится).

в) $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. (**Ответ:** ряд сходится условно).

г) $\sum (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$. (**Ответ:** ряд сходится абсолютно).

д) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$. (**Ответ:** ряд расходится).

е) $\sum \sin n^2$. (**Ответ:** ряд расходится).

Тема 56. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость функциональной последовательности

Определение 1. Пусть дана последовательность функций $\{S_n(x)\}$, заданная на непустом числовом множестве X. Говорят, что эта функциональная последовательность сходится (расходится) в точке $x_0 \in X$, если сходится (расходится) числовая последовательность $\{S_n(x_0)\}$. При этом точка x_0 называется точкой сходимости (расходимости) функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$. Совокупность всех точек сходимости функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ называется областью сходимости этой функциональной последовательности и обозначается $D_{\text{сх.}}$.

Определение 2. Пусть функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится на непустом числовом множестве X. Функция $S(x)$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in X$ предел получаемой числовой последовательности, называется предельной функцией данной функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$. При этом пишут $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x), \quad x \in X$. Формально это означает:

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \in \mathbb{N} \ \left(n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon\right).$$

Определение 3. Если в качестве последовательности членов ряда взята произвольная функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, определённая на непустом числовом множестве X, то говорят, что на этом множестве задан *функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ (или, кратко, $\sum f_n(x)$), для которого последовательностью частичных сумм служит функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ такая, что $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$, определённая также на множестве X.

Определение 4. Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ называется *сходящимся (расходящимся)* на непустом числовом множестве X, если таковой является последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм.

Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на непустом числовом множестве X, если на этом множестве сходится функциональный ряд $\sum |f_n(x)|$.

Определение 5. *Областью сходимости* $D_{\text{сх.}}$ функционального ряда $\sum f_n(x)$ называется область сходимости последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$. Предельная функция $S(x)$ последовательности $\{S_n(x)\}$ называется суммой данного функционального ряда, при этом говорят, что функциональный ряд $\sum f_n(x)$ сходится к своей сумме $S(x)$ поточечно на $D_{\text{сх.}}$.

Областью абсолютной сходимости $D_{\text{абс.сх.}}$ функционального ряда $\sum |f_n(x)|$.

Очевидно, что область абсолютной сходимости функционального ряда содержится в области сходимости этого ряда, т.е. $D_{\text{абс.сх.}}\subset D_{\text{сх.}}$.

Определение 6. Функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве $X\subset D_{\text{сх.}}$ к функции $S(x)$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall x\in X\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \left(n\ge n_0\ \Rightarrow\ \left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon\right).$$

Теорема (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). *Функциональная последовательность* $\{S_n(x)\}$ *равномерно сходится на множестве* $X\subset D_{\text{сх.}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall x\in X\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \left(n\ge n_0\Rightarrow\left|S_{n+m}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon\right).$$

<u>Задачи.</u>

1. Найти области сходимости и абсолютной сходимости следующих функциональных рядов:

а) $\displaystyle\sum\frac{1}{n(x+2)^n}$.

Решение: Имеем ряд, составленный из функций $f_n(x)=\dfrac{1}{n(x+2)^n}$,

$D_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. При $x = 0$ имеем сходящийся числовой ряд $\sum \frac{1}{n2^n}$, при $x = -\frac{3}{2}$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum \frac{2^n}{n}$. Для любого $x \in D_{f_n}$ к ряду из модулей применим признак Даламбера в предельной форме:

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{n|x+2|^n}{(n+1)|x+2|^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{|x+2|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|x+2|}.$$

Итак, если $\frac{1}{|x+2|} < 1 \Leftrightarrow |x+2| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 < -1 \\ x+2 > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 3 \end{array}\right.$, то ряд $\sum |f_n(x)|$ сходится, поэтому и $\sum f_n(x)$ сходится абсолютно.

Если же $\frac{1}{|x+2|} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| < 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$, то ряд $\sum |f_n(x)|$ расходится, причём $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, а значит, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$, т.е. $f_n(x) \not\to 0$, следовательно, ряд $\sum f_n(x)$ расходится по невыполнению необходимого условия.

Если $x = -1$, то получаем $\sum f_n(-1) = \sum \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который, как знаем, расходится.

Если $x = -3$, то имеем ряд $\sum f_n(-3) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ – сходящийся условно.

Итак, выяснили: $D_{\text{сх.}} = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$, $D_{\text{абс.сх.}} = (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

б) $\sum n\sqrt[3]{\sin^n x}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}} = D_{\text{абс.сх.}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$).

в) $\sum \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}} = D_{\text{абс.сх.}} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$).

г) $\sum \frac{1}{x^2 + n^2}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}} = D_{\text{абс.сх.}} = \mathbb{R}$).

д) $\sum \frac{1}{n+1+\sin x}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}} = D_{\text{абс.сх.}} = \varnothing$).

2. Исследовать равномерную сходимость следующих функциональных последовательностей на указанных промежутках:

а) $\left\{\frac{1}{x+n}\right\}$ $I = \mathbb{R}_+$. (**Ответ:** сходится равномерно).

б) $\{x^n - x^{2n}\}$ $I = [0;1]$. (**Ответ:** сходится равномерно).

в) $\left\{nx^n(1-x)\right\}$ $\quad I_1=[0;1], I_2=[0;a]\,(0<a<1)$. (**Ответ:** на I_1 сходится неравномерно, на I_2 сходится равномерно).

г) $\left\{\dfrac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}\right\}$ $\quad I_1=\mathbb{R}; I_2=[0;1]$. (**Ответ:** на I_1 сходится неравномерно, на I_2 сходится равномерно).

Упражнения.

1. Найти области сходимости и абсолютной сходимости следующих функциональных рядов:

а) $\sum\dfrac{n}{x^n}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$).

б) $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=\mathbb{R}_+$; $D_{\text{абс.сх.}}=\mathbb{R}_+^*$).

в) $\sum\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$).

г) $\sum\dfrac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $D_{\text{абс.сх.}}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$).

д) $\sum\dfrac{n\cdot3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=\left(-\dfrac{\sqrt{17}-3}{6};\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{17}+3}{6}\right)$).

е) $\sum\dfrac{2^n\sin^n x}{n^2}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\pi k;\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)$).

ж) $\sum\dfrac{x^n}{1-x^n}$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$).

з) $\sum\left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$. (**Ответ:** $D_{\text{сх.}}=D_{\text{абс.сх.}}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$).

2. Исследовать равномерную сходимость следующих функциональных последовательностей на указанных промежутках:

а) $\left\{x^n\right\}$ $\quad I_1=\left[0;\dfrac{1}{2}\right]; I_2=[0;1]$. (**Ответ:** на I_1 сходится равномерно; на I_2 сходится неравномерно).

б) $\left\{x^n-x^{n+1}\right\}$ $\quad I=[0;1]$. (**Ответ:** сходится равномерно).

в) $\left\{\dfrac{nx}{1+n+x}\right\}$ $\quad I=[0;1]$. (**Ответ:** сходится равномерно).

г) $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^n}\right\}$ $\quad I_1=[0;1-\varepsilon]; I_2=[1-\varepsilon;1+\varepsilon]; I_3=[1+\varepsilon;+\infty)\quad(\varepsilon>0)$. (**Ответ:**

на I_1 сходится равномерно; на I_2 сходится неравномерно; на I_3 сходится равномерно).

д) $\left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right\}$ $I_1=[0;1]; I_2=(0;+\infty)$. (**Ответ:** на I_1 сходится неравномерно; на I_2 сходится равномерно).

е) $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$ $I=\mathbb{R}$. (**Ответ:** сходится равномерно).

ж) $\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$ $I=\mathbb{R}$. (**Ответ:** сходится неравномерно).

Тема 57. Равномерная сходимость функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов непрерывных функций

Определение. Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся на непустом числовом множестве* $X\subset D_{\text{сх.}}$ к своей сумме $S(x)$, если на этом множестве равномерно сходится к предельной функции $S(x)$ последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм.

Теорема 1 (критерий равномерной сходимости функционального ряда). *Функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ *равномерно сходится на непустом числовом множестве* $X\subset D_{\text{сх.}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall x\in X\ \ \forall m\in\mathbb{N}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \left(n\ge n_0\ \Rightarrow\left|f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+m}(x)\right|<\varepsilon\right).$$

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ *определён на непустом числовом множестве* $X\subset D_{\text{сх.}}$ *и существует сходящийся числовой ряд* $\sum a_n$ *такой, что для любой точки* $x\in X$ выполняется $|f_n(x)|\le a_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. *Тогда функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X*, и притом абсолютно в каждой точке этого множества.*

<u>Задачи</u>.

1. Исследовать характер сходимости функционального ряда $\sum(1-x)x^n$.

Решение: Найдём область сходимости ряда. Применим к ряду $\sum|f_n(x)|=\sum|1-x||x|^n$ признак Даламбера: $\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\dfrac{|1-x||x|^{n+1}}{|1-x||x|^n}=|x|$, $x\ne0$, $x\ne1$. Если $|x|<1$, то ряд сходится абсолютно; если $|x|>1$, ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда); если $x=1$, то имеем ряд $\sum 0$, который сходится абсолютно, если $x=-1$, то получаем ряд $\sum 2(-1)^n$, он расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда). Таким образом, $D_{\text{сх.}} = D_{\text{абс.сх.}} = (-1;\,1]$.

Найдём сумму ряда: так как $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, то $S_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \ldots + (x^n - x^{n+1}) = x - x^{n+1}$. Из этого получаем $S(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(x - x^{n+1}) = x, & x \in (-1,1) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} S(x) = 0, & x = 1 \end{cases}$. Итак, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n \underset{(-1,1]}{\overset{\text{абс.}}{\to}} \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

Исследуем ряд на равномерную сходимость: $\varphi_n(x) = |S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} |x|^{n+1}, & |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Следовательно, существует

$\sup\limits_{(-1,1]} \varphi_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n \underset{(-1,1]}{\overset{\text{абс}}{\not\rightrightarrows}} x$.

2. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum \dfrac{\sin nx}{n^2}$ на $\mathbb{R}$. (**Ответ:** ряд сходится равномерно и абсолютно).

3. Исследовать характер сходимости функционального ряда $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$ на $\mathbb{R}$. (**Ответ:** ряд сходится равномерно и условно).

4. Используя признак Вейерштрасса доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum \dfrac{nx}{n^5 x^2 + 1}$ на $\mathbb{R}$. (**Ответ:** ряд сходится равномерно и абсолютно).

5. Найти область определения функции $f(x) = \sum \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^n$ и исследовать её непрерывность. (**Ответ**: $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1;1)$).

6. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = \sum \dfrac{x^n}{n}$ и найти производную, если она существует.

7. Можно ли к функциональному ряду $\sum \dfrac{\cos nx}{2^{n-1}}$ применить теорему о почленном интегрировании. Проинтегрировать, если это возможно, на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти предел функции $f(x)=\sum\frac{1}{2^n n^x}$, при $x\to 0+$.

Упражнения.

1. Исследовать характер сходимости ряда $\sum\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ на отрезке $\Delta=[-1;1]$. (**Ответ:** ряд сходится равномерно).

2. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов на указанных промежутках.

а) $\sum\frac{1}{x^2+n^2}$ на $\mathbb{R}$. **б)** $\sum\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ на промежутке $(-2;+\infty)$.

в) $\sum\frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}_+$.

3. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\frac{(-1)^n}{x+n}$ на $\mathbb{R}_+^*$. (**Ответ:** ряд сходится равномерно).

4. Найти область определения функции $f(x)=\sum\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ и исследовать её непрерывность. (**Ответ:** функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и непрерывна на $\mathbb{R}^*$).

5. Вычислить пределы:

а) $L=\lim\limits_{x\to 1-}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$. (**Ответ:** $L=\frac{1}{2}\ln 2$).

б) $L=\lim\limits_{x\to 1-}\sum\left(x^n-x^{n+1}\right)$. (**Ответ:** $L=1$).

в) $L=\lim\limits_{x\to\infty}\sum\frac{x^2}{1+n^2x^2}$. (**Ответ:** $L=\frac{\pi^2}{6}$).

6. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$? (**Ответ:** можно).

7. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ на отрезке $[0;1]$? (**Ответ:** можно).

Тема 58. Степенные ряды. Промежуток сходимости

Определение. Степенным называется функциональный ряд, общим членом которого служит степенная функция $a_n(x-a)^n$, где $a,a_n\in\mathbb{R}$, т.е.

ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ [1] (короче, $\sum a_n (x-a)^n$). Число a называется центром степенного ряда, а числа a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ – его коэффициентами.

Теорема 1 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum a_n (x-a)^n$ *1) сходится в точке* $x_1 \neq a$, *то он абсолютно сходится в любой точке* x *такой, что* $|x-a| < |x_1 - a|$, *2) расходится в точке* x_2, *то он расходится в каждой точке* x *такой, что* $|x-a| > |x_2 - a|$.

Следствие. *Областью сходимости степенного ряда* $\sum a_n (x-a)^n$ *является промежуток* I *с центром в точке* a, *причём, если он невырожденный, то внутри него сходимость абсолютная.*

Расстояние от центра степенного ряда до любого конца его промежутка сходимости (в случае, если этот промежуток ограничен) называется *радиусом сходимости* этого степенного ряда. Если промежутком сходимости степенного ряда является вся числовая прямая, то радиусом сходимости считают $+\infty$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* a_n *степенного ряда* $\sum a_n (x-a)^n$ *финально (т.е. для всех достаточно больших номеров* n *) отличны от нуля и существует предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. *Тогда этот предел равен радиусу сходимости данного степенного ряда, т.е.* $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Теорема 3. *Пусть для коэффициентов степенного ряда* $\sum a_n (x-a)^n$ *существует предел* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Тогда для радиуса сходимости этого степенного ряда имеет место формула* $r = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \in \mathbb{R}_+^* \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$.

Итак, областью сходимости степенного ряда служит либо вся числовая прямая, либо ограниченный промежуток $\langle a-r; a+r \rangle$, который может включать один или оба свои конца. Если $r = 0$, он вырождается в одноточечное множество $\{a\}$.

---

[1] В степенных рядах, как правило, индекс суммирования начинается с 0, т.е. суммирование производится по множеству $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

<u>Задачи.</u>

1. а) Что можно утверждать о сходимости степенного ряда на каком-либо конце его промежутка сходимости, если известно, что он абсолютно сходится на другом конце этого промежутка?

б) Что можно утверждать о сходимости степенного ряда на каком-либо конце его промежутка сходимости, если известно, что он расходится на другом конце этого промежутка? Тот же вопрос, если он условно сходится на каком-либо конце.

в) Если коэффициенты степенного ряда знакопостоянны, то с какого конца его промежутка сходимости следует начинать исследование поведения данного ряда?

г) Чему равен радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n (x-a)^n$, если в точке x_0 он условно сходится?

д) Что можно утверждать о поведении ряда на каком-либо конце промежутка сходимости, если на другом конце этого промежутка ряд расходится по невыполнению необходимого условия сходимости?

2. Найти промежуток сходимости следующих степенных рядов (если a_n не определён, то считаем $a_n = 0$).

а) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Решение: Центр промежутка сходимости $a = 0$. Коэффициенты $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$. Имеем $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 4$. Следовательно, радиус сходимости $r = 4$. Поэтому промежуток сходимости $I = \langle -4; 4 \rangle$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка сходимости.

При $x = 4$ имеем положительный ряд $\sum b_n = \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$. Исследуем его на сходимость: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n)!((n+1)!)^2 4^{n+1}}{(n!)^2 (2n+2)! 4^n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, значит, признак Даламбера в предельной форме не применим. Но $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$, поэтому по признаку Даламбера в непредельной форме ряд $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$ расходится.

При $x = -4$ имеем знакочередующийся ряд $\sum c_n = \sum (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$.

Так как $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}>1\ (\forall n\in\mathbb{N})$, то $|c_{n+1}|>|c_n|$, т.е. $|c_n| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, а значит, ряд $\sum(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ расходится по невыполнению необходимого условия сходимости.

Итак, окончательно получаем $I=(-4;4)$.

б) $\sum\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$. (**Ответ**: $I=\left[-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$).

в) $\sum\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. (**Ответ**: $I=\left(-\dfrac{1}{e};\dfrac{1}{e}\right)$).

г) $\sum\dfrac{n^2}{(n+1)^2 2^n}x^{3n}$. (**Ответ**: $I=\left(-\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{2}\right)$).

д) $\sum(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^{2n-1}}{(2n+1)^2}$. (**Ответ**: $I=[0;2]_{\text{абс.}}$ [2])).

е) $\sum\dfrac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n}x^n$. (**Ответ**: $I=\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$).

ж) $\sum\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$. (**Ответ**: $I=[-1;1]_{\text{абс.}}$).

3. Показать, что сумма ряда $y(x)=\sum\limits_{0}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{iv}=y$.

Упражнения.

Найти промежутки I сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$. **б)** $\sum(-1)^n\dfrac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$. **в)** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$.

г) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$. **д)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha^{n^2}x^n \quad (0<\alpha<1)$. **е)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{\alpha^{n^2}}x^n \quad (\alpha>1)$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$. (**Ответ:** при $p>2$ $I=[-1;3]_{\text{абс.}}$; при $0<p\le2$ в точке $x=-1$ ряд сходится условно; при $p\le2$ в точке $x=3$ ряд

[2] Такая запись означает абсолютную сходимость на концах отрезка.

расходится). **з)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$. (**Ответ:** $I = [-1;1)$). **и)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.
(**Ответ:** $I = (-1;1]$).

Тема 59. Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора.

Определение. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}$. Степенной ряд $\sum a_n (x-a)^n$, коэффициенты которого определяются по формуле $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, т.е. ряд вида $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ *с центром в точке* a. Ряд Тейлора с центром в точке $a = 0$, т.е. ряд $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, называется *рядом Маклорена функции* $f(x)$.

Теорема (критерий разложимости функции в степенной ряд). *Пусть функция* $f(x)$ *бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *– её ряд Тейлора, имеющий промежуток сходимости* I*, включающий указанную окрестность. Для того, чтобы этот ряд Тейлора имел своей суммой функцию* $f(x)$ *на промежутке* I *необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора данной функции в точке* a *стремился к нулю при* $n \to +\infty$ *для всех* $x \in I$.

Следствие (достаточное условие разложимости функции в степенной ряд). *Пусть функция* $f(x)$ *бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности* $U(a)$ *точки* $a \in \mathbb{R}$. *Если* $f(x)$ *и все её производные в совокупности ограничены в этой окрестности, то там функция* $f(x)$ *представима своим рядом Тейлора с центром в точке* a*, т.е. для любого* $x \in U(a)$ *имеет место равенство* $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Табличные разложения:

1. $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}; \quad I = \mathbb{R}$
2. $\cos x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad I = \mathbb{R}$

3. $\sin x=\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $I=\mathbb{R}$

4. $\ln(1+x)=\sum\limits_1(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$; $I=(-1;1]$

5. $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_1\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0)$; $I=\langle-1;1\rangle$

в частности, $\dfrac{1}{1-x}=\sum x^n$; $I=(-1;1)$

6. $\operatorname{ch}x=\sum\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; $I=\mathbb{R}$

7. $\operatorname{sh}x=\sum\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $I=\mathbb{R}$

8. $\arcsin x=x+\sum\limits_1\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$; $I=[-1;1]$

9. $\operatorname{arctg}x=\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $I=[-1;1]$

Разложение простейшей дроби $\dfrac{1}{x-a}$ в степенной ряд в окрестности точки $b\neq a$: $\dfrac{1}{x-a}=\sum\dfrac{-1}{(a-b)^{n+1}}(x-b)^n$; $I=(b-|a-b|;b+|a-b|)$.

Задачи.

1. Разложить функцию $f(x)=2^{x+1}$ в ряд Тейлора в окрестности $a=1$ непосредственно и с применением табличных разложений:

Решение: 1 способ (непосредственное разложение): Имеем $f(x)=2^{x+1}$, $D_f=D_{f^{(n)}}=\mathbb{R}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $x_0\in\mathbb{R}$. $f'(x)=2^{x+1}\ln 2$, $f''(x)=2^{x+1}\ln^2 2$, по индукции имеем $f^{(n)}(x)=2^{x+1}\ln^n 2$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$. Так как $f^{(n)}(1)=4\ln^n 2$, то $a_n=\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=4\dfrac{\ln^n 2}{n!}$.

Таким образом, функция $f(x)=2^{x+1}$ порождает степенной ряд $\sum a_n(x-1)^n=\sum 4\dfrac{\ln^n 2}{n!}(x-1)^n$ [1].

---

[1] Этот факт кратко будем записывать так: $2^{x+1}\sim\sum 4\dfrac{\ln^n 2}{n!}(x-1)^n$.

Определим промежуток сходимости полученного степенного ряда: $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{4\ln^n 2(n+1)!}{n!4\ln^{n+1}2}=\frac{n+1}{\ln 2}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$, следовательно, $R=+\infty$, т.е. $I=\mathbb{R}$.

Покажем, что суммой ряда Тейлора является функция $f(x)$. Для любого $\delta>0$ на интервале $I_\delta=(1-\delta;1+\delta)$ оценим остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

$$r(x)=\frac{f^{(n+1)}(1\pm\theta\delta)}{(n+1)!}(\pm\delta)^{n+1}_{\theta\in(0;1)}=\frac{2^{2\pm\theta\delta}\ln^{n+1}2}{(n+1)!}(\pm\delta)^{n+1}=4\cdot(-1)^{n+1}\frac{2^{\pm\theta\delta}\ln^{n+1}2}{(n+1)!}\delta^{n+1}.$$

Так как функция $2^{\pm x}$ монотонна, то $2^{\pm\theta\delta}$ лежит между $2^{\pm 0\cdot\delta}=1$ и $2^{\pm 1\delta}=2^{\pm\delta}$. Пусть $M=\max\{1,2^{\pm\delta}\}$, тогда $2^{\pm\theta\delta}<M$. Поэтому $|r(x)|<4M\ln^{n+1}2\frac{(\delta^{n+1})}{(n+1)!}\to 0$.

Итак, $2^{x+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}4\frac{\ln^n 2}{n!}(x-1)^n$ на $I_\delta=(1-\delta;\,1+\delta)$ $(\forall\delta>0)$ и, следовательно, всюду на $\mathbb{R}$.

<u>2 способ</u> (использую табличные разложения). Тождественно преобразуем $f(x)$, чтобы аргумент входил в выражение в виде разности $x-a$ и используем табличное разложение 1:

$$f(x)=2^{x+1}=4\cdot 2^{x-1}=4e^{(x-1)\ln 2}\overset{(1)}{=}4\sum\frac{(x-1)^n\ln^n 2}{n!}=\sum 4\frac{\ln^n 2}{n!}(x-1)^n.$$

Так как в табличном разложении 1 $|x|<+\infty$, то $|x-1|\ln 2<+\infty$, а значит, $|x-1|<+\infty$, т.е. $x\in\mathbb{R}$ и $I=\mathbb{R}$. Итак, $2^{x+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}4\frac{\ln^n 2}{n!}(x-1)^n$, $I=\mathbb{R}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-\pi)$. (**Ответ**: $\sin^2 x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$, $I=\mathbb{R}$).

3. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x-a}$ $(a\neq b)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-b)$. (**Ответ**: $\frac{1}{x-a}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{(a-b)^{n+1}}(x-b)^n$, $I=(b-|a-b|,b+|a-b|)$).

4. Разложить функцию $f(x)=\frac{x^4+x^3-4x^2-3x-4}{x^2+x-2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a=-1$.

(**Ответ**: $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{13}{4}(x+1)+\frac{27}{8}(x+1)^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(2(-1)^n+\frac{3}{2^{n+1}}\right)(x+1)^n,\ I=(-2;0)$).

5. Разложить функцию $f(x)=-\frac{-2x^2+5x+9}{3x^3+11x^2+8x-4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a=3$. (**Ответ**: $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{5^{n+2}}-\frac{3^n}{2^{3n+2}}\right),\ I=(2;4)$).

6. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в ряд Маклорена. Найти сумму числового ряда $\sum_0 \frac{(-1)^n}{2n+1}$. (**Ответ**: $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; I=[-1;1]_{\text{усл.}}$ [2]), $\sum_0 (-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$).

7. Разложить функцию $f(x)=\arcsin x$ в ряд Маклорена. (**Ответ**: $f(x)=\int_0^x dt+\sum_1\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\ I=[-1;1]$).

Упражнения.

Разложить следующие функции в ряд Маклорена:

1. $f(x)=e^{-x^2}$. (**Ответ:** $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$; $I=\mathbb{R}$).

2. $f(x)=\cos^2 x$. (**Ответ:** $\cos^2 x=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; $I=\mathbb{R}$).

3. $f(x)=\sin^3 x$. (**Ответ:** $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(3^{2n-2}-1\right)}{(2n-1)!}x^{2n-1}$; $I=\mathbb{R}$).

4. $f(x)=\frac{x^{10}}{1-x}$. (**Ответ:** $\frac{x^{10}}{1-x}=\sum_{n=10}^{+\infty}x^n$; $I=(-1;1)$).

5. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$. (**Ответ:** $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$; $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$).

6. $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$. (**Ответ:** $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n$; $I=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$).

7. $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$. (**Ответ:** $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n$; $I=(-1;1)$).

---

[2] Такая запись означает, что на обоих концах отрезка сходимость ряда условная.

8. $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$. (**Ответ:** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(n+\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n$; $I=(-1;1)$).

9. $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$; $a_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$).

10. $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Чему равно $f^{(1000)}(0)$? (**Ответ:** $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$;

где $c_n=\begin{cases}1, & n=4k\\ -1, & n=2k+1\\ 0, & n=2k+2, n=2k+3\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$; $f^{(1000)}(0)=1000!$).

Тема 60. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов. Некоторые приложения степенных рядов

Теорема 1 (интегрирование степенных рядов). *Если степенной ряд* $\sum a_n(x-a)^n$ *имеет невырожденный промежуток сходимости* I, *то данный ряд почленно интегрируем на любом отрезке, содержащемся в этом промежутке сходимости. При этом в результате почленного интегрирования данного ряда по отрезку с концами* a *и* x $(x\in I)$ *получается степенной ряд* $\sum\dfrac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *с тем же радиусом сходимости, что и исходный степенной ряд.*

Теорема 2 (дифференцирование степенных рядов). *Если степенной ряд* $\sum a_n(x-a)^n$ *имеет невырожденный промежуток сходимости* I, *то данный ряд почленно дифференцируем внутри этого промежутка. При этом ряд* $\sum\limits_{1} na_n(x-a)^{n-1}$ *из производных членов данного ряда является степенным рядом с тем же радиусом сходимости, что и у исходного степенного ряда.*

Задачи.

1. Найти сумму степенного ряда $\sum\limits_{1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ путём почленного его дифференцирования.

Решение: Определим промежуток I сходимости данного ряда: $a=0$,

$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{N})$. Умножим исходный ряд на x:

$$\sum_1 \frac{x^{2n}}{2n-1}. \qquad (1)$$

Ясно, что промежуток I_1 сходимости ряда (1) совпадает с I. В ряде (1) совершим подстановку $x^2 = y$, получим ряд

$$\sum_1 \frac{y^n}{2n-1}. \qquad (2)$$

Здесь $b = 0$, $b_n = \frac{1}{2n-1} > 0$. Найдём промежуток I_2 сходимости ряда (2): $\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \frac{2n+1}{2n-1} \to 1$, следовательно, радиус R_2 сходимости ряда (2) равен 1, а значит, $I_2 = \langle -1,1 \rangle$. $y \in I_2^\circ = (-1;1)$ означает, что $|y| < 1$, т.е. $\left|x^2\right| < 1$, откуда следует, что $|x| < 1$. В итоге получаем, что $I_1^\circ = I^\circ = \langle -1;1 \rangle$.

Исследуем поведение ряда на концах промежутка: при $x = 1$ имеем ряд $\sum_1 \frac{1}{2n-1}$, который расходится по теореме сравнения $\left(\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)$, а при $x = -1$ получаем ряд $-\sum_1 \frac{1}{2n-1}$, и он также расходится. Итак, $I = (-1;1)$.

Пусть $f(x) = \sum_1 \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(\forall x \in I)$. Тогда $f'(x) = \sum_1 \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_1 x^{2n-2} = \sum_0 x^{2n}$ – это геометрический ряд, он сходится. Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Имеем

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \left(\frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Итак, $\sum_1 \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left(\forall x \in (-1;1)\right)$.

2. Найти сумму S степенного ряда $\sum_1 nx^n$ путём почленного его интегрирования. Чему равна сумма числового ряда $\sum_1 \frac{n}{2^n}$? (**Ответ**:

$S=\dfrac{x}{(x-1)^2}\quad \left(\forall x\in(-1;1)\right),\ \sum\limits_1 \dfrac{n}{2^n}=2$).

3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\int\limits_0^x \dfrac{arctg\ t}{t}dt$, заданную как интеграл с переменным верхним пределом. (**Ответ**: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\quad \left(\forall x\in[-1;1]_{\text{абс.}}\right)$).

4. Найти предел $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$, используя степенные ряды. (**Ответ**: $L=2$).

5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\text{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$. (**Ответ**: $L=\dfrac{1}{4}$).

6. Вычислить $\sqrt{27}$ с точностью до 10^{-3}. (**Ответ**: $\sqrt{27}\approx 5{,}196$).

7. Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью до 10^{-4}. (**Ответ**: $\ln 1{,}2\approx 0{,}1823$).

8. Вычислить $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$ с точностью до 10^{-3} (неопределённый интеграл $\int \cos x^2 dx$ не берётся в квадратурах). (**Ответ**: $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx\approx 0{,}905$).

Упражнения.

1. Разложить в степенной ряд функцию $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. (**Ответ:** $x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$; $I=[-1;1]$).

2. Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

а) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots$ (**Ответ:** $S(x)=\text{arctg}x$; $I=[-1;1]$).

б) $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots$ (**Ответ:** $S(x)=\text{ch}x$; $I=\mathbb{R}$).

3. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда $x-4x^2+9x^3-16x^4\ldots$ (**Ответ:** $S(x)=\dfrac{x(1-x)}{(1+x)^3}$; $I=(-1;1)$).

4. Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

а) $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-5}. (**Ответ:** $0{,}30902$).

б) $\cos 1^\circ$ с точностью до 10^{-6}. (**Ответ:** $0{,}999848$).

5. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до $0{,}001$ интеграл $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$. (**Ответ:** $1{,}605$).

6. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$. (**Ответ:** $\frac{a}{b}$). **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. (**Ответ:** 0).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$. (**Ответ:** $\frac{1}{3}$).

Тема 61. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье

Определение 1. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$. Действительные числа a_n,b_n $(n\in\mathbb{N}_0)$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Члены тригонометрического ряда определяются функциональной последовательностью $\{\cos nx,\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, которая называется *тригонометрической системой*.

Теорема 1. *Пусть тригонометрический ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *равномерно сходится на отрезке* $[-\pi;\pi]$ *к своей сумме – функции* $f(x)$. *Тогда для коэффициентов этого ряда имеют место формулы* $(b_0=0)$:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ \ (n\in\mathbb{N}). \qquad (1)$$

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна[1)] на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тригонометрический ряд $a_0+\sum\limits_1(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, коэффициенты которого определяются формулами (1), называется *тригономет-*

[1)] Функция, определённая на невырожденном отрезке, называется кусочно-непрерывной на нём, если существует разбиение данного отрезка такое, что заданная функция непрерывна на каждом отрезке этого разбиения.

рическим рядом Фурье (кратко, *рядом Фурье*) функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Определение 3. Функция $f(x)$, определённая на невырожденном отрезке, называется *кусочно-гладкой* на нём, если существует разбиение данного отрезка такое, что внутри каждого отрезка этого разбиения функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а в точках деления этого разбиения функция $f(x)$ имеет односторонние производные.

Теорема 2. *Если $f(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $[-\pi;\pi]$, то её ряд Фурье на этом отрезке сходится в каждой точке $x_0 \in (-\pi;\pi)$ к среднему арифметическому односторонних пределов функции $f(x)$ в этой точке, т.е. к числу $\dfrac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$, а на концах отрезка – в точках $\pm\pi$ – к числу $\dfrac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$. В частности, если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (-\pi;\pi)$, то в ней ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к значению этой функции в данной точке, т.е. к $f(x_0)$.*

Определение 4. Если функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-l;l]$ $(l>0)$, то её рядом Фурье называется функциональный ряд вида $a_0 + \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{\pi n}{l}x + b_n \sin\dfrac{\pi n}{l}x\right)$, коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx\,,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Замечание. Для функции, являющейся кусочно-гладкой на отрезке $[-l;l]$ $(l>0)$, имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Если функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi;\pi]$, то имеет место *неравенство Бесселя*: $2a_0^2 + \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. В случае равенства в этом соотношении, последнее называется *равенством Парсеваля*.

Если функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-l;l]$ $(l>0)$, то правые части неравенства Бесселя и равенства Парсеваля имеют вид $\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx$.

<u>Задачи.</u>

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $\Delta=[-\pi,\pi]$ функцию $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$. На одном чертеже изобразить графики функций $f(x), S_1(x), S_2(x)$, где $S_{1,2}(x)$ – соответственно частичные суммы ряда Фурье $f(x)$). Написать неравенство Бесселя и равенство Парсеваля и найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решение: Имеем функцию $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$; $D_f=\mathbb{R}$, $f(x)$ – нечётная, 2π-периодическая и непрерывная функция на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. В силу её нечётности, $a_n=0\quad(\forall n\in\mathbb{N}_0)$. Далее для любого $n\in\mathbb{N}$ имеем:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx dx=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{-2}{\pi n}(\cos\pi n-1)=-\frac{2}{\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(2n-1)}, n=2k-1\\ 0, \qquad n=2k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Таким образом, $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\ldots$.

Так как $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$, то там $S(x)=f(x)$. Проверяем точки $x=0$ и $x=\pm\pi$: $S(0)=\frac{f(0-)+f(0+)}{2}=0=f(0)$, $S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}=f(\pm\pi)$. Следовательно, $\operatorname{sgn}(\sin x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x\quad(\forall x\in[-\pi;\pi])$. Так как $f(x)$ – 2π-периодическая, то это равенство имеет место для любого $x\in\mathbb{R}$.

Далее имеем: $S_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin x$, $S_2(x)=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x$ (графики этих функций и функции $f(x)$ начертить самостоятельно).

При $x=\frac{\pi}{2}$ из полученного разложения имеем равенство $1=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}(-1)^{n+1}$, откуда следует, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$.

Запишем неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\ \left(=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\right),$$

поэтому $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\le\frac{\pi^2}{8}$, а так как $f(x)$ кусочно-непрерывна, то имеет место равенство Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\ (=2)$, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|\cos x|$ на промежутке длиной в период этой функции. Найти суммы числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$. На одном чертеже изобразить графики функций $f(x),S_0(x),S_1(x)$, где $S_0(x)$, $S_1(x)$ – две первые частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$. (**Ответ**: $|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx\ \ (\forall x\in\mathbb{R})$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$).

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\{x\}$ (дробная часть x) на промежутке длиной в период этой функции. На одном чертеже изобразить графики функций $f(x),S(x),S_0(x),S_1(x)$, двух первых частичных сумм ряда Фурье $f(x)$. Написать неравенство Бесселя и равенство Парсеваля и найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. (**Ответ**: $\{x\}=\frac{1}{2}-\sum\limits_{1}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}$ $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$).

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-x,-\pi\le x\le 0;\\ \frac{x^2}{\pi},0<x\le\pi\end{cases}$ на отрезке $\Delta=[-\pi;\pi]$. На одном чертеже изобразить графики функций $f(x),S(x)$.

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. (**Ответ**: $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{8}$, $f(x)=\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{2\pi k^2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\frac{\sin(2k-1)x}{\pi(2k-1)^3}\right)$).

5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, -2<x\le 0;\\ \frac{x}{2}, 0<x<2\end{cases}$ на интервале $(-2;2)$. (**Ответ**: $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin\pi kx}{k}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}x}{\pi(2k-1)^2}-\frac{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}x}{2k-1}\right)$).

Упражнения.

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sgn}x$ $(-\pi<x<\pi)$. Начертить график этой функции и графики нескольких частичных сумм ряда Фурье этой функции. Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. (**Ответ:** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$).

2. Разложить в ряд Фурье на указанных интервалах следующие функции:

а) $f(x)=x$ на интервале $(-\pi;\pi)$. (**Ответ:** $2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$).

б) $f(x)=|x|$ на интервале $(-\pi;\pi)$. (**Ответ:** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$).

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=|\cos x|$. (**Ответ:** $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$).

Тема 62. Неполные ряды Фурье. Разложение по косинусам и синусам

Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ является чётной, то её коэффициенты Фурье $b_n=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ и, следовательно, её ряд Фурье имеет вид $a_0+\sum_{1} a_n\cos nx$. В этом случае говорят о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (*неполный ряд Фурье*).

Аналогично, если кусочно-гладкая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$

является нечётной, то её коэффициенты Фурье $a_n = 0$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}_0\right)$ и, следовательно, её ряд Фурье имеет вид $\sum_{1} b_n \sin nx$. В этом случае говорят о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам (*неполный ряд Фурье*).

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $\langle -\pi;\, 0\rangle$ или $\langle 0;\, \pi\rangle$, то, доопределив её на симметричном относительно нуля промежутке чётным (нечётным) образом, получаем чётную (нечётную) функцию, определённую на отрезке $[-\pi;\, \pi]$. Полученную функцию можно разложить на этом отрезке в неполный ряд Фурье по косинусам (по синусам). При этом на исходном промежутке (за исключением, быть может, его концов) это будет разложением в неполный ряд Фурье заданной функции $f(x)$.

Задачи.

1. Разложить на промежутке $\langle -\pi; 0\rangle$. Функцию $f(x) = \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$ **1)** по косинусам; **2)** по синусам. На одном чертеже изобразить графики $f(x)$, $S_{\cos}(x), S_{\sin}(x)$ суммы соответственных рядов Фурье.

***Решение* 1):** функцию $f(x) = \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$ разложим в ряд Фурье по косинусам на промежутке $\Delta = \langle -\pi; 0\rangle$. Имеем $f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2}, x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right] \\ x + \frac{\pi}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right] \end{cases}$. Продолжим на промежутке $\Delta_+ = \langle 0; \pi\rangle$ функцию чётным образом. Функция $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in [-\pi; 0] \\ f(-x), x \in (0; \pi] \end{cases}$ – чётная, $D_{\tilde{f}} = [-\pi; \pi]$. В силу её чётности, $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx dx \overset{\text{четн}}{=} \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx \overset{\text{аддит}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{0}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos nx dx - \int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos nx dx\right).$$

Предварительно вычислим неопределённые интегралы:

$$\int\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x + C,$$

$$\int\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\,dx=\left[\text{по частям}\right]=\frac{1}{n}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin nx-\frac{1}{n}\int\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{n}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx+C\,.$$

Поэтому, $a_0=\frac{1}{\pi}\left(\left[x^2+\pi x\right]_{-\pi/2}^{0}-\left[x^2+\pi x\right]_{-\pi}^{-\pi/2}\right)=\frac{\pi}{2}$ и для любого $n\in\mathbb{N}$

$$a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left(\left[n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin nx+\cos nx\right]_{-\pi/2}^{0}-\left[n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin nx+\cos nx\right]_{-\pi}^{-\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(1+(-1)^n-2\cos\frac{\pi n}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^k\right), & n=2k\\ 0, & n=2k-1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & n=4m\\ \frac{2}{\pi(2m-1)^2}, & n=4m-2\\ 0, & n=4m-1;4m-3\end{cases}\quad(m\in\mathbb{N}).$$ Окончательно, имеем

$$a_n=\begin{cases}\frac{2}{\pi(2m-1)^2}, & n=4m-2\\ 0, & n\neq 4m-2\end{cases}\qquad(m\in\mathbb{N})$$

Итак, $\tilde{f}(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2m-1)^2}\cos(4m-2)x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos 2x+\frac{2}{9\pi}\cos 6x+\ldots$

Далее, т.к. функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на $(-\pi;\pi)$ и $\tilde{f}(-\pi)=\tilde{f}(\pi)$, то $S_{\cos}(x)=\tilde{f}(x)\quad\forall x\in[-\pi;\pi]$, поэтому $\forall x\in[-\pi;0]$ имеем

$$\left|x+\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(4n-2)x\,.$$

(**Ответ**: **2)** $\forall x\in(-\pi;0)$

$$\left|x+\frac{\pi}{2}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\left(2-\pi(4n-3)\right)}{\pi(4n-3)^2}\sin(4n-3)x-\frac{2\left(2+\pi(4n-1)\right)}{\pi(4n-1)^2}\sin(4n-1)x\right)).$$

2. Разложить на промежутке $\langle 0;\pi\rangle$ функцию $f(x)=(x-1)^2$ в ряд Фурье **1)** общего вида; **2)** по синусам; **3)** по косинусам. На одном чертеже изобразить графики $f(x)$, $S(x)$, $S_{\cos}(x)$, $S_{\sin}(x)$ - суммы соответственных рядов Фурье.

(**Ответ**: **1)** $\forall x \in (0;\pi)$ $(x-1)^2 = \frac{\pi^2 - 3\pi + 3}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx + \frac{2-\pi}{n}\sin 2nx\right)$;

2) $\forall x \in [0;\pi]$ $(x-1)^2 = \frac{(\pi^2 - 3\pi + 3)}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4(2-\pi)}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{1}{n^2}\cos 2nx\right)$;

3) $\forall x \in (0,\pi)$ $(x-1)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2(\pi^2 - 2\pi + 2)(2k-1) - 8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)x + \frac{(2-\pi)}{2k^2}\sin 2kx\right)$.

Упражнения.

1. Разложить на промежутке $\langle 0;\pi\rangle$ функцию $f(x) = \sin x$ в ряд Фурье по косинусам.

2. Разложить на промежутке $\langle 0;\pi\rangle$ функцию $f(x) = \cos x$ в ряд Фурье по синусам.

Тема 63. Точечные множества на плоскости и в пространстве. Функции нескольких переменных

Определение 1. $n-$ мерным $(n \in \mathbb{N})$ евклидовым векторным пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных $n-$ок (кортежей длины n) действительных чисел $(x_1;x_2;...;x_n)$ $\left(x_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1,n}\right)$ с введёнными в нём операциями *покоординатного сложения*

$$x' + x'' = (x_1';x_2';...;x_n') + (x_1'';x_2'';...;x_n'') = (x_1' + x_1'';x_2' + x_2'';...;x_n' + x_n'')\ (x',x'' \in \mathbb{R}^n)$$

и *умножения на число* (скаляр)

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1;x_2;...;x_n) = (\alpha \cdot x_1;\alpha \cdot x_2;...;\alpha \cdot x_n)\ \left(x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}\right),$$

а также *расстоянием* между его элементами (точками)

$$\rho(x',x'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k' - x_k'')^2}\quad (x',x'' \in \mathbb{R}^n).$$

При $n = 2$ пространство $\mathbb{R}^2$ будем называть *евклидовой плоскостью*, а при $n = 3$ пространство $\mathbb{R}^3$ – *трёхмерным евклидовым пространством*.

Координатной плоскостью (*координатным пространством*) будем называть евклидову плоскость (трёхмерное евклидово пространство), с фиксированной декартовой системой координат.

Определение 2. $\varepsilon-$*окрестностью* $\left(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\right)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется совокупность всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, отстоящих от точки x_0 на расстоянии, меньшем ε, и обозначается $U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $U_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \rho(x,x_0) < \varepsilon\right\}$.

Окрестностью $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть всякое множество из $\mathbb{R}^n$, содержащее какую-либо ε – окрестность этой точки.

Определение 3. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, целиком лежащая в E, т.е. $U(x_0) \subset E$. Совокупность всех внутренних точек множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренностью* этого множества и обозначается E°.

Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *точкой прикосновения* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 содержит точку из E. Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замыканием* этого множества и обозначается $\overline{E}$.

Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 содержит точку из E, отличную от x_0. Совокупность всех предельных точек множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *производным* этого множества и обозначается E'.

Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 содержит как точку, принадлежащую E, так и точку, не принадлежащую этому множеству. Совокупность всех граничных точек множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *границей* этого множества и обозначается $\mathrm{Fr}E$.

Определение 4. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым* (*замкнутым*), если $E \subset E^\circ$ $\left(\overline{E} \subset E\right)$, т.е. все точки этого множества являются его внутренними точками (все точки прикосновения этого множества ему принадлежат).

Определение 5. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным,* если оно целиком содержится в некоторой ε –окрестности точки $0 = (0;0;...;0)$, т.е. $E \subset U_\varepsilon(0)$.

Определение 6. *Действительной функцией* n $\left(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$ *действительных переменных* называется всякое отображение $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, т.е. такое однозначное соответствие, которое каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ некоторого множества E из $\mathbb{R}^n$ сопоставляет единственное действительное число $f(x)$. При этом множество E называется *областью определения* функции $f(x)$ и обозначается D_f, а k-ая $\left(k = \overline{1,n}\right)$ координата текущей точки $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in D_f$ называется k*-ым аргумен-*

том или k *-ой переменной* функции $f(x)$.

Часто функцию двух переменных обозначают $f(x,y)$, а функцию трёх переменных – $f(x,y,z)$.

Определение 7. *Графиком функции* $f(x,y)$ называется множество G_f точек пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое следующим образом:

$$G_f=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3:\ (x;y)\in D_f,\ z=f(x,y)\right\}.$$

Определение 8. *Поверхностью (линией) уровня* функции $f(x,y,z)$ $\big(f(x,y)\big)$, соответствующей действительному числу a, называется совокупность всех точек из D_f, в которых функция принимает значение, равное этому числу.

<u>Задачи.</u>

1. Описать геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют **а)** системе неравенств $E_1:\begin{cases}x^2+y^2-8x+4y-5\le 0\\ x-2y-3\le 0\end{cases}$; **б)** совокупности неравенств $E_2:\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-8x+4y-5\le 0\\ x-2y-3>0\end{array}\right.$. Изобразить эти множества. Определить внутренность, замыкание, границу и производное множество множеств E_1,E_2. Являются ли эти множества открытыми, замкнутыми, ограниченными?

***Решение*:** **а)** $E_1=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\begin{array}{c}x^2+y^2-8x+4y-5\le 0,\\ x-2y-3\le 0\end{array}\right\}$ Рассмотрим первое неравенство: $x^2+y^2-8x+4y-5\le 0$. Выделим полный квадрат: $\left(x^2-8x+16\right)+\left(y^2+4y+4\right)-25\le 0$, или $(x-4)^2+(y+2)^2\le 5^2$. Следовательно, это неравенство задаёт замкнутый круг с центром в точке $A(4;-2)$ и радиусом $R=5$. Второе неравенство $x-2y-3\le 0$ задаёт замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой $x-2y-3=0$ и лежащую выше неё. Найдём точки пересечения (если они есть) окружности и прямой: $\begin{cases}x^2+y^2-8x+4y-5=0\\ x-2y-3=0\end{cases}$, $\begin{cases}(2y+3)^2+y^2-8(2y+3)+4y-5=0\\ x=2y+3\end{cases}$, $\begin{cases}5y^2=20\\ x=2y+3\end{cases}$,

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=7\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$. Имеем точки $B_1(-1;-2)$ и $B_2(7;2)$.

Итак, E_1 – замкнутый круговой сегмент. E_1° – открытый круговой сегмент: $E_1^\circ:\begin{cases} x^2+y^2-8x+4y-5<0 \\ x-2y-3<0 \end{cases}$, $E_1'=E_1$, $\bar{E}_1=E_1\cup E_1'=E_1$, $\mathrm{Fr}E_1$ – дуга окружности и стягивающая её хорда.

2. Описать геометрическое место E точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $36x^2+9y^2+4z^2-18y+8z-23\le 0$. Изобразить это множество E. (**Ответ:** E – замкнутый эллипсоид с центром в точке $A(0;1;-1)$ и полуосями $a=1;b=2;c=3$).

3. Задать замкнутый круг на плоскости с центром в точке $C(2;3)$ радиуса $R=4$ системой неравенств $\begin{cases} a\le x\le b \\ \alpha(x)\le y\le\beta(x) \end{cases}$, а затем системой $\begin{cases} c\le y\le d \\ \gamma(y)\le x\le\delta(y) \end{cases}$. Сделать чертеж. (**Ответ**: $K:\begin{cases} -2\le x\le 6 \\ 3-\sqrt{12+4x-x^2}\le y\le 3+\sqrt{12+4x-x^2} \end{cases}$; $K:\begin{cases} -1\le y\le 7; \\ 2-\sqrt{7+6y-y^2}\le x\le 2+\sqrt{7+6y-y^2} \end{cases}$).

4. Множество E точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} 2y>x^2 \\ x^2+y^2\le 8 \end{cases}$, задать системой неравенств вида $\begin{cases} a\le x\le b; \\ \alpha(x)\le y\le\beta(x) \end{cases}$. Сделать чертёж. (**Ответ**: $E=\begin{cases} -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{b}{2}; \\ \dfrac{x^2}{2}<y\le\sqrt{8-x^2} \end{cases}$).

5. Найти и изобразить область определения функции нескольких переменных.

а) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2x-y}$. (**Ответ**: $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{y=2x\}$ – плоскость без прямой).

б) $f(x,y)=\sqrt{xy+2x-y-2}$. (**Ответ**: $\begin{cases} x\ne -1 \\ y=-2 \end{cases}$ – прямая без точки).

в) $f(x,y,z)=\ln x+\ln\dfrac{y}{z}$, $g(x,y,z)=\ln\dfrac{xy}{z}$. Совпадают ли функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$? (**Ответ**: $D_f=\begin{Bmatrix} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{Bmatrix}\cup\begin{Bmatrix} x>0 \\ y<0 \\ z<0 \end{Bmatrix}$ – пара открытых координатных октантов (I и VIII), $D_g=\begin{Bmatrix}x>0\\y>0\\z>0\end{Bmatrix}\cup\begin{Bmatrix}x<0\\y<0\\z>0\end{Bmatrix}\cup\begin{Bmatrix}x>0\\y<0\\z<0\end{Bmatrix}\cup\begin{Bmatrix}x<0\\y>0\\z<0\end{Bmatrix}$ – четвёрка открытых координатных октантов (I, III, VI и VIII), $f(x,y,z)\neq g(x,y,z)$).

г) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$. (**Ответ**: $D_f=\begin{cases}(x-1/2)^2+y^2\geq(1/2)^2\\(x-1)^2+y^2<1^2\end{cases}$).

д) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$. D_f задать системой неравенств $\begin{cases}a\leq x\leq b\\\alpha(x)\leq y\leq\beta(x)\end{cases}$. (**Ответ**: $D_f=\begin{Bmatrix}0<y\leq 2\\-y^2\leq x\leq y^2\end{Bmatrix}$ – криволинейный треугольник без вершины. $D_f=\begin{Bmatrix}-4\leq x\leq 0\\\sqrt{-x}\leq y\leq 2\end{Bmatrix}\cup\begin{Bmatrix}0<x\leq 4\\\sqrt{x}\leq y\leq 2\end{Bmatrix}$).

6. Построить линии и поверхности уровня. Сделать чертеж.

а) $f(x,y)=x+y$. (**Ответ**: $x+y=a\quad(\forall a\in\mathbb{R})$).

б) $f(x,y)=|x|+y$. (**Ответ**: $\left[\begin{array}{l}x\geq 0: y+x=a\\x<0: y-x=a\end{array}\right.\quad(\forall a\in\mathbb{R})$).

в) $f(x,y,z)=x+y+z$. (**Ответ**: $x+y+z=a\quad(\forall a\in\mathbb{R})$).

Упражнения.

1. Определить и изобразить области определения следующих функций:

а) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$. (**Ответ:** $|x|\leq 1$; $|y|\geq 1$).

б) $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$. (**Ответ:** кольцо $1\leq x^2+y^2\leq 4$).

в) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$. (**Ответ:** семейство концентрических колец $2\pi k\leq x^2+y^2\leq\pi(2k+1)$ $(k\in\mathbb{N}_0)$).

г) $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (**Ответ:** внешность конуса $x^2+y^2-z^2=0$, включая границу без вершины).

2. Построить линии уровня следующих функций:

а) $f(x,y)=(x+y)^2$. (**Ответ:** параллельные прямые).

б) $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$. (**Ответ:** пучок прямых с вершиной в начале координат, без самой вершины).

в) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$. (**Ответ:** семейство подобных эллипсов).

г) $f(x,y)=\sqrt{xy}$. (**Ответ:** совокупность равносторонних гипербол, асимптотически приближающихся к осям координат и расположенных в I и III квадрантах).

д) $f(x,y)=|x|+|y|-|x+y|$. (**Ответ:** I и III квадранты при $f(x,y)=0$; семейство двухзвенных ломаных, звенья которых параллельны осям координат, а вершины расположены на прямой $x+y=0$ при $f(x,y)>0$).

е) $f(x,y)=x^y \quad (x>0)$. (**Ответ:** кривые $y=\dfrac{C}{\ln x}$).

3. Найти поверхности уровня следующих функций:

а) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. (**Ответ:** семейство концентрических сфер с центром в начале координат).

б) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$. (**Ответ:** семейство двуполостных гиперболоидов при $f(x,y,z)<0$; семейство однополостных гиперболоидов при $f(x,y,z)>0$; конус при $f(x,y,z)=0$).

Тема 64. Предел функции нескольких переменных

Определение 1. Говорят, что $b\left(\in\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}\right)$ является *пределом функции* $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *в точке* $a\in\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$, если $a-$ предельная точка D_f и $\forall U(b)\,\exists U(a)$: $\forall x\in D_f\left(x\in\overset{\bullet}{U}(a)\Rightarrow f(x)\in U(b)\right)$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ или $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}b$, а если $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$, то и $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \ldots\\ x_n\to a_n}}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b$.

Так как возможностей для b существует 4 (быть числом, $+\infty$, $-\infty$, ∞), а возможностей для a – 2 (быть точкой из $\mathbb{R}^n$ и ∞), то определение 1 можно расписать на языке неравенств (на языке «$\varepsilon-\delta$») в 8-ми вариантах.

Для функции нескольких переменных сохраняются известные свойства предела функции одной переменной: единственность предела, свойства, связанные с арифметическими операциями над функциями, о предельной переходе в неравенстве, о пределе промежуточной функции, о пределе сложной функции и др.

Определение 2. *Пределом функции* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *в точке* a *по множеству* $E \subset D_f$ называется предел в точке a сужения данной функции на множество E.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$.

Определение 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\bullet}{U}(x_0;y_0)$ точки $(x_0;y_0)$ и для любого $x \in U(x_0) \subset \overset{\bullet}{U}(x_0,y_0)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x)$, а функция $g(x)$ имеет предел в точке x_0. Тогда этот предел называется *повторным пределом функции* $f(x,y)$ *в точке* $(x_0;y_0)$ *по* y *и* x и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

Аналогично определяется повторный предел $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ по x и y, т.е. $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0} h(y)$, где $h(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Основным способом вычисления пределов функции $f(x,y)$ двух переменных в точке $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ является метод перехода к полярным координатам по формулам $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) =$ $= \lim\limits_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$, если последний предел существует и не зависит от θ.

Задачи.

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}} (2x - 3y + 1) = 9$.

Решение: Имеем $f(x,y) = 2x - 3y + 1$, $(x_0;y_0) = (1;-2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$, следовательно, $(1;-2) \in D_f{}'$. Необходимо показать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(x;y) \in \mathbb{R}^2\ 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta \Rightarrow \left|(2x - 3y + 1) - 9\right| < \varepsilon.$$

Оценим левую часть итогового неравенства:

$$\left|(2x - 3y + 1) - 9\right| = \left|2x - 3y - 8\right| = \left|2(x-1) - 3(y+2)\right| \le 2|x-1| + 3|y+2|,$$

а так как $|x-1| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta$ и $|y+2| \le \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta$, значит, $\left|(2x - 3y + 1) - 9\right| < 5\delta \le \varepsilon$, откуда $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{5}$ (например, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$).

2. Вычислить пределы, если они существуют:

а) $L_1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$. (**Ответ**: $L_1=0$).

б) $L_2=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{x^3-y^3-3\left(x^2+y^2-x+y\right)-2}{x^2+y^2-2(x-y-1)}$. (**Ответ**: $L_2=0$).

в) $L_3=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}$. (**Ответ**: $L_3=\dfrac{4}{3}$).

3. Показать, что не существует предела функции $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $(0;0)$.

4. Показать, что функция $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ имеет в точке $(0;0)$ равные пределы по любым прямым, но не имеет предела в этой точке.

5. Найти в точке $(0;0)$ оба повторных предела функции $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Имеет ли эта функция предел в точке $(0;0)$? (**Ответ**: $L_{xy}=L_{yx}=0$, функция $f(x,y)$ не имеет предела в точке $(0;0)$).

6. Показать, что функция $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ имеет в точке $(0;0)$ предел и найти его. Доказать, что $f(x,y)$ в точке $(0;0)$ не имеет обоих повторных пределов. (**Ответ**: $L=0$).

7. Найти предел $\lim\limits_{(x;y)\to\infty}\dfrac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$. (**Ответ**: $L=2$).

Упражнения.

1. Показать, что для функции $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$, в то время как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ не существует.

2. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$? (**Ответ:** не существует).

3. Найти $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to b}\lim\limits_{y\to a}f(x,y)$, если

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; $a=\infty$; $b=\infty$. (**Ответ:** $0;1$).

б) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$; $a=\infty$; $b=0+$. (**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$;1).

в) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; $a=\infty$; $b=\infty$. (**Ответ:** $0;1$).

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$. (**Ответ:** 0).

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$ $(a\in\mathbb{R})$. (**Ответ:** a).

Тема 65. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 1. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *непрерывной в точке* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in D_f$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и он равен значению данной функции в точке a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ \forall x\in D_f\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)^2}<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(a)<\varepsilon\right|\right).$$

Если $a-$ изолированная точка D_f, то функция $f(x)$ считается непрерывной в этой точке.

Как в одномерном случае имеют место известные свойства непрерывных функций, связанные с арифметическими операциями, взятием композиции, предельным переходом.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $E\subset D_f$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если $D_f\neq\varnothing$ и $f(x)$ непрерывна на D_f.

Определение 3. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *непрерывной в точке* $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\overset{\circ}{D}_f$ *по переменной* x_k $(k=\overline{1,n})$, если частичная функция $\varphi(x_k)=f(a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$ непрерывна в точке a_k. В этом контексте функция непрерывная в точке a *называется непрерывной по совокупности переменных*.

Ясно, что если функция непрерывна в точке по совокупности переменных, то эта функция непрерывна в данной точке по каждой переменной, но не наоборот.

Определение 4. Точка $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ называется точкой разрыва функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если $a\in D_f$ и $f(x)$ не является непрерывной в точке a.

Определение 5. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E\subset D_f$, если

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0:\;\forall x',x''\in E\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k'-x_k''\right)^2}<\delta\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')<\varepsilon\right|\right),$$

где $x'=\left(x_1';x_2';\ldots;x_n'\right)$, $x''=\left(x_1'';x_2'';\ldots;x_n''\right)$.

Очевидно, что равномерная непрерывность функции на множестве влечёт поточечную (т.е. в каждой точке) непрерывность этой функции на данном множестве, но не наоборот.

<u>Задачи.</u>

1. Вычислить пределы (или показать, что их не существует) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ в точках $A(2;-1), B(0;0), C(\infty;\infty)$.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}$, функция $f(x,y)-$непрерывна как рациональная. Следовательно,

1) $L_1=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=f(2;-1)=-\dfrac{4}{5}$;

2) $L_2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Перейдём к полярным координатам $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$. В результате чего получаем: $L_2=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim\limits_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0$ (как произведение бесконечно малой r на ограниченную $\cos^2\theta\sin\theta$).

3) $L_3=\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ не существует, так как при подходе к точке $C(\infty;\infty)$ по различным кривым получаем неравные значения предела, например: по прямой $y=x$ имеем $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty\\ y=x}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2}=\infty$, а по параболе $y=x^2$ получаем $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty\\ y=x^2}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^2+x^4}=1$.

2. Исследовать непрерывность функции $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & y\neq x\\ 4, & y=x\end{cases}$.

(**Ответ:** функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках своей области определения $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{y=x+1\}$ кроме точек множества $\{y=x\}\setminus\{(2;2)\}$).

3. Исследовать непрерывность функции $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$. (**Ответ:** функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках своей области определения $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{y=-x\}$).

4. Доказать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ непрерывна в точке $(0;0)$ по каждой переменной, но не является непрерывной там по совокупности переменных.

5. Исследовать непрерывность по каждой переменной и по совокупности переменных функции $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$ в точках $O(0;0)$ и $A(1;0)$. (**Ответ:** в точке $O(0;0)$ функция $f(x,y)$ непрерывна по каждой переменной и по совокупности переменных; в точке $A(1;0)$ функция $f(x,y)$ не является непрерывной по переменной y, а значит, и по совокупности переменных).

6. Доказать по определению, что функция $f(x,y)=x+2y+3$ равномерно непрерывна всюду в $\mathbb{R}^2$.

7. Исследовать равномерную непрерывность функции $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ на множестве $E=\{0<x^2+y^2\leq 1\}$ (проколотый в центре, замкнутый единичный круг).

Упражнения.

1. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x;y)\neq(0;0)\\ 1, & (x;y)=(0;0)\end{cases}$. (**Ответ:** $(0;0)$).

б) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}, & x+y\neq 0\\ -1, & x+y=0\end{cases}$. (**Ответ:** все точки прямой $x+y=0$).

2. Исследовать равномерную непрерывность в $\mathbb{R}^2$ следующих функций:

а) $f(x,y)=2x-3y+5$. (**Ответ:** равномерно непрерывна).

б) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. (**Ответ:** равномерно непрерывна).

Тема 66. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Определение 1. Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ $\left(a\in\overset{\circ}{D}_f\right)$. *Частной производной этой функции в данной точке по переменной* x_k называется производная частичной функции $\varphi(x_k)=f(a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},x_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$ (функции одной переменной x_k) в точке a_k.

Обозначение: $f'_{x_k}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Таким образом, $f'_{x_k}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)\overset{def}{=}\varphi'(a_k)=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{\varphi(x_k+\Delta x_k)-\varphi(a_k)}{\Delta x_k}=$

$$=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},x_k+\Delta x_k,a_{k+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\Delta x_k}.$$

Определение 2. *Частной производной* функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *по переменной* x_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ называется функция $f'_{x_k}(x)=f'_{x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, областью определения которой являются все внутренние точки D_f, в которых существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k}$, а значения в каждой такой точке равно этому пределу.

Из определения 1 и 2 следует, что при вычислении частных производных имеют место «табличные» производные одномерного анализа, а также остаются без изменения известные правила дифференцирования (дифференцирование линейной комбинации, произведения, частного).

Определение 3. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *дифференцируемой в точке* $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\overset{\circ}{D}_f$, если полное приращение $\Delta f(x)$ этой функции в данной точке представимо в виде

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} A_k \Delta x_k + o(\rho)$$, где $A_k \in \mathbb{R}\left(k = \overline{1,n}\right)$, $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}$, $o(\rho)$ – бесконечно малое более высокого порядка, чем ρ, при $\rho \to 0$ $\left(\dfrac{o(\rho)}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0\right)$.

Как и в одномерном случае, дифференцируемость функции в точке влечёт непрерывность данной функции в этой точке, но не наоборот.

Теорема 1 (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, то в этой точке существуют все частные производные данной функции, причём $f'_{x_k}(a) = A_k \left(k = \overline{1,n}\right)$, где $A_k \left(k = \overline{1,n}\right)$ – числа, фигурирующие в определении дифференцируемости функции в точке (определение 3).*

Теорема 1 необратима.

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и они непрерывны в этой точке, то данная функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.*

Определение 4. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$. *Дифференциалом (полным дифференциалом) $(df)(a)$ этой функции в данной точке* называется главная линейная часть приращения Δf функции $f(x)$ в точке a.

Таким образом, $(df)(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a) \cdot \Delta x_k$ – линейная однородная функция переменных $\Delta x_k \left(k = \overline{1,n}\right)$. Так как $\Delta x_k = dx_k \left(k = \overline{1,n}\right)$, то

$$(df)(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a) dx_k .$$

Отметим, что как и в одномерном случае в многомерном случае дифференциал функции обладает свойством инвариантности относительно замены переменных.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(t, \tau)$ дифференцируема в точке $(t_0; \tau_0)$, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, где $x_0 = \varphi(t_0; \tau_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки $(t_0; \tau_0)$ определена сложная функция $F(t, \tau) = f(\varphi(t, \tau))$; она дифференцируема в точке $(t_0; \tau_0)$ и её частные производные в этой точке вычисляются по формулам:

$$F'_t(t_0; \tau_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'_t(t_0; \tau_0), \qquad F'_\tau(t_0; \tau_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'_\tau(t_0; \tau_0).$$

Теорема 3'. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, где $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $F(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$; она дифференцируема в точке t_0 и её производная в этой точке вычисляется по формуле:

$$F'(t_0)=f'_x(x_0;y_0)\cdot\varphi'(t_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot\psi'(t_0).$$

Теорема 3''. Пусть функции $\varphi(t,\tau)$ и $\psi(t,\tau)$ дифференцируемы в точке $(t_0;\tau_0)$, а функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, где $x_0=\varphi(t_0;\tau_0)$, $y_0=\psi(t_0;\tau_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки $(t_0;\tau_0)$ определена сложная функция $F(t,\tau)=f(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau))$; она дифференцируема в точке $(t_0;\tau_0)$ и её частные производные в этой точке вычисляются по формулам:

$$F'_t(t_0;\tau_0)=f'_x(x_0;y_0)\cdot\varphi'_t(t_0;\tau_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot\psi'_t(t_0;\tau_0),$$
$$F'_\tau(t_0;\tau_0)=f'_x(x_0;y_0)\cdot\varphi'_\tau(t_0;\tau_0)+f'_y(x_0;y_0)\cdot\psi'_\tau(t_0;\tau_0).$$

Задачи.

1. Найти частные производные функции $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Исследовать дифференцируемость. Записать полные приращение и дифференциал в точке $A(\sqrt{3};1)$.

Решение: $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{y=0\}$. Вычислим частные производные:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};\quad f'_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на D_f, поэтому функция $f(x,y)$ – дифференцируема на D_f. $f'_x(A)=\dfrac{1}{4}$, $f'_y(A)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, поэтому

$$\Delta f(A)=\frac{1}{4}\Delta x-\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta y+\rho\cdot o(\rho),\qquad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0,\qquad o(\rho)\to 0;$$

$$df(A)=\frac{1}{4}\Delta x-\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta y=\frac{1}{4}dx-\frac{\sqrt{3}}{4}dy=\frac{dx-\sqrt{3}dy}{4}.$$

2. Найти частные производные, исследовать дифференцируемость и записать дифференциал функций:

а) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (**Ответ**: $f'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$f'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; функция $f(x,y,z)$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$; $df = \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$).

б) $g(x,y)=x^y$. (**Ответ**: $g'_x = yx^{y-1}$, $g'_y = x^y \ln x$; функция $g(x,y)$ дифференцируема на $D_g = \{x>0\}$; $dg = x^{y-1}(ydx + x\ln x dy)$).

3. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \qquad x^2+y^2=0 \end{cases}$ имеет в точке $O(0;0)$ обе частные производные, равные между собой, но не является дифференцируемой в этой точке.

4. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \qquad x^2+y^2=0 \end{cases}$ имеет частные производные в любой окрестности точки $O(0;0)$ (т.е. всюду в $\mathbb{R}^2$), дифференцируема в точке O, но обе частные производные в этой точке не являются непрерывными.

5. Исследовать дифференцируемость функции $f(x,y)=\sin\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$. Найти частные производные, потом дифференциал. Затем тоже, но в обратном порядке (сначала дифференциал, потом частные производные).

6. Не используя явного задания сложной функции $F(t)$ или $F(x,y)$, найти

1) $\dfrac{dF}{dt}$ и dF, если **а)** $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ и $x=e^t$, $y=\ln t$. **б)** $f(x,y,z)=\arcsin\dfrac{x-y}{z}$ и $x=2t$, $y=\dfrac{t^2}{4}$, $z=\dfrac{t^3}{3}$.

2) $\dfrac{\partial F}{dx}$, $\dfrac{\partial F}{dy}$ и dF, если **а)** $f(u,v)=u^2v-uv^2$ и $u=x\cos y$, $v=x\sin y$. **б)** $f(u,v)=e^{uv}\ln(u+v)$ и $u=2x+y^2$, $v=x-y^3$.

Упражнения.

1. Найти $f'_x(0;0)$ и $f'_y(0;0)$, если $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0;0)$? (**Ответ:** $f'_x(0;0)=0$, $f'_y(0;0)=0$, функция не дифференцируема в точке $O(0;0)$).

2. Является ли дифференцируемой в точке $O(0;0)$ функция $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$? (**Ответ:** функция не дифференцируема в точке $O(0;0)$).

3. Исследовать дифференцируемость в точке $O(0;0)$ функции $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x;y)\neq(0;0) \\ 0, & (x;y)=(0;0) \end{cases}$ в точке $O(0;0)$. (**Ответ:** функция дифференцируема в точке $O(0;0)$).

4. Найти частные производные следующих функций:

а) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$).

б) $f(x,y)=x\sin(x+y)$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $f'_y(x,y)=x\cos(x+y)$).

в) $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=-\dfrac{2x\sin x^2}{y}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{\cos x^2}{y^2}$).

г) $f(x,y)=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=\dfrac{2x}{y}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\dfrac{x^2}{y}$).

д) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=\dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y)=-\dfrac{x\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}$).

е) $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$. (**Ответ:** $f'_x(x,y,z)=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $f'_y(x,y,z)=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $f'_z(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$).

ж) $f(x,y,z)=x^{y^z}$. (**Ответ:** $f'_x(x,y,z)=\dfrac{y^z}{x}x^{y^z}$, $f'_y(x,y,z)=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $f'_z(x,y,z)=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$).

Тема 67. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Производная по направлению. Градиент

Определение 1. Частная производная (1-ого порядка), если она существует, от частной производной порядка $k-1\,(k\in\mathbb{N})$ функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *частной производной* $k-$*ого порядка этой функции*.

Частная производная, получаемая дифференцированием функции по одной и той же переменной, называется *кратной*, по разным переменным –

смешанной.

Частные производные, например, второго порядка функции $f(x,y)$ обозначаются так: $f''_{x^2}(x,y)=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)$, $f''_{y^2}(x,y)=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x,y)$. Первые две – кратные, а две другие – смешанные. Таким образом, кратная производная по x 2-ого порядка функции $f(x,y)$ согласно определению 1 есть: $f''_{x^2}(x,y)\overset{def}{=}(f'_x)'_x(x,y)$ или $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y)\overset{def}{=}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(x,y)$.

Достаточное условие независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования:

Теорема 1 (случай смешанных производных 2-ого порядка функции двух переменных). *Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$ и имеет там обе частные производные 1-ого порядка, а также обе смешанные частные производные 2-ого порядка. Если обе смешанные частные производные $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0;y_0)$, то они равны в этой точке, т.е. $f''_{xy}(x_0;y_0)=f''_{yx}(x_0;y_0)$. При этом говорят, что смешанные частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ не зависят от порядка дифференцирования.*

Теорема 2 (общий случай). *Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ и имеет там все частные производные до $(k-1)$-ого $(k\in\mathbb{N})$ порядка включительно, а также смешанные частные производные $k-$ого порядка. Если смешанные частные производные $k-$ого порядка по одному и тому же набору переменных непрерывны в точке a, то они в этой точке не зависят от порядка дифференцирования.*

Определение 2. Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$. Её *вторым дифференциалом в этой точке (дифференциалом второго порядка)* называется дифференциал функции df в указанной точке

$$\left(d^2 f\right)(a)\overset{def}{=}\left(d(df)\right)(a),$$

при этом приращения аргументов во внутреннем и внешнем дифференциалах правой части этой формулы считаются равными.

В частности, для функции $f(x,y)$ второй дифференциал в точке $(x_0;y_0)$ вычисляется по формуле

$$\left(d^2 f\right)(x_0;y_0) = f''_{x^2}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + f''_{y^2}(x_0;y_0)dy^2.$$

Аналогично $\left(d^3 f\right)(a) \stackrel{def}{=} \left(d\left(d^2 f\right)\right)(a)$ и для функции $f(x,y)$ имеет место формула

$$\left(d^3 f\right)(x_0;y_0) = f'''_{x^3}(x_0;y_0)dx^3 + 3f'''_{x^2y}(x_0;y_0)dx^2dy + 3f'''_{xy^2}(x_0;y_0)dxdy^2 + f'''_{y^3}(x_0;y_0)dy^3.$$

Вообще, $\left(d^k f\right)(a) \stackrel{def}{=} \left(d\left(d^{k-1} f\right)\right)(a)$ $\left(k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right)$ и для функции $f(x,y)$

$$\left(d^k f\right)(x_0;y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k (f)(x_0;y_0),$$

а для функции $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$\left(d^k f\right)(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k (f)(a).$$

Дифференциал функции порядка выше первого, вообще говоря, не обладает свойством *инвариантности формы* относительно замены переменных.

Определение 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ и $\vec{l}$ – ненулевой вектор с направляющими косинусами $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{f(x_0 + \rho\cos\alpha; y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0;y_0)}{\rho}$, то он называется *производной функции* $f(x,y)$ *в точке* $(x_0;y_0)$ *по направлению вектора* $\vec{l}$ и обозначается $f'_{\vec{l}}(x_0;y_0)$ или $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right)(x_0;y_0)$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $(x_0;y_0)$. *Тогда в этой точке данная функция имеет производную по любому направлению (по направлению любого вектора* $\vec{l}$ $\left(\vec{l} \neq \vec{0}\right)$*)*, при этом имеет место формула

$$f'_{\vec{l}}(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0;y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Отметим, что теорема 3 необратима, т.е. из существования производных функции в точке по всем направлениям, вообще говоря, не следует дифференцируемость функции в этой точке.

Определение 4. Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$. *Градиентом этой функции в данной точке* называется вектор $\vec{l}(a;b)$, координаты которого a и b равны частным производным функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ соответственно по x и по y, т.е. $a=f'_x(x_0;y_0)$, $b=f'_y(x_0;y_0)$.

Обозначение: $(\operatorname{grad} f)(x_0;y_0)$.

Таким образом, $(\operatorname{grad} f)(x_0;y_0)\overset{def}{=}\vec{l}\left(f'_x(x_0;y_0);f'_y(x_0;y_0)\right)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $(x_0;y_0)$ *и* $(\operatorname{grad} f)(x_0;y_0)\neq\vec{0}$. *Производная этой функции в данной точке по направлению градиента имеет наибольшее значение, по сравнению с другими направлениями, равное длине вектора градиента, т.е.* $f'_{\text{grad}}(x_0;y_0)=\left|(\operatorname{grad} f)(x_0;y_0)\right|$.

__**Задачи.**__

1. Найти частные производные и дифференциалы до указанного порядка включительно следующих функций:

а) $f(x,y)=x^y$ до 3-го порядка;

б) $g(x,y,z)=z^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ до 2-го порядка.

2. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ имеет в точке $O(0;0)$ обе смешанные частные производные 2-ого порядка, но они не равны.

3. Найти дифференциалы первых двух порядков без предварительного вычисления частных производных функции $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$. Записать частные производные до 2-ого порядка включительно.

***Решение*:** $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}$; $df=d(\ln u)=\dfrac{1}{u}du=\dfrac{1}{x^2+y^2}d\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}$.

Отсюда получаем $f'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

Далее, $d^2f=d(df)=d\left(\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}\right)=$

$$=\frac{d\left(2xdx+2ydy\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(2xdx+2ydy\right)d\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(2dxdx+2dydy\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(2xdx+2ydy\right)\left(2xdx+2ydy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+y^2\right)\left(dx^2+dy^2\right)-\left(4x^2dx^2+8xydxdy+4y^2dy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(y^2-x^2\right)dx^2+2\left(x^2-y^2\right)dy^2-8xydxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Отсюда $f''_{x^2}=\dfrac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{y^2}=\dfrac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{xy}=f''_{yx}=\dfrac{-4xydxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

4. Найти производную функции $f\left(x,y\right)=x^2y-2y^2+1$ в точке $M\left(3;4\right)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат. Возрастает или убывает функция в этом направлении? (**Ответ**: $f'_{\vec{l}}\left(M\right)=-8,8$; функция $f\left(x,y\right)$ убывает в точке M в направлении вектора $\vec{l}$).

5. Найти производную функции $f\left(x,y\right)=\arcsin xy$ в точке $A\left(\dfrac{1}{5};3\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=\left(\overrightarrow{1;-2}\right)$. Определить градиент этой функции в данной точке. (**Ответ**: $f'_{\vec{l}}\left(A\right)=\dfrac{13\sqrt{5}}{20}$; $\left(\operatorname{grad} f\right)\left(A\right)=\left(\overrightarrow{\dfrac{15}{4};\dfrac{1}{4}}\right)$).

6. Определить точки, в которых модуль градиента функции $f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ равен 12. (**Ответ**: окружность с центром в точке $\left(0;0\right)$ радиуса 2).

Упражнения.

1. Существует ли $f''_{xy}\left(0;0\right)$, если $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$? (**Ответ:** $f''_{xy}\left(0;0\right)$ не существует).

2. Найти дифференциалы до 2-го порядка включительно следующих функций:

а) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. (**Ответ:** $df=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2f=\dfrac{(ydx-xdy)^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$).

б) $f(x,y)=e^{xy}$ (**Ответ:** $df=e^{xy}(ydx+xdy)$, $d^2f=e^{xy}\left(y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2\right)$).

3. Найти полные дифференциалы указанного порядка следующих функций:

а) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ 10-го порядка. (**Ответ:** $d^{10}f=-\dfrac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$).

б) $f(x,y)=\cos x\cdot\operatorname{ch}y$ 6-го порядка.

(**Ответ:** $d^6f=-\left(dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4-dy^6\right)\cdot\cos x\cdot\operatorname{ch}y-$

$$-2dxdy\left(3dx^4-10dx^2dy^2+3dy^4\right)\cdot\sin x\cdot\operatorname{sh}y).$$

4. Найти производную функции $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: **а)** наибольшее значение; **б)** наименьшее значение; **в)** равна нулю? (**Ответ:** $f'_{\vec{l}}=\cos\alpha+\sin\alpha$; **а)** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$; **б)** $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$; **в)** $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ и $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$).

5. Найти производную функции $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(x_0;y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку. (**Ответ:** $f'_{\vec{l}}(x_0;y_0)=\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$).

Тема 68. Формула Тейлора для функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ и обладает там непрерывными частными производными до n-ого $(n\in\mathbb{N})$ порядка включительно. Тогда для любой точки $(x;y)$ существует число $\theta\in(0;1)$ такое, что*

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(d^kf\right)(x_0;y_0)}{k!}+\frac{\left(d^nf\right)(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)}{n!},\qquad(*)$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$ и $\Delta f=f(x;y)-f(x_0;y_0)$ – полное приращение функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$.

Формула (*) называется *формулой Тейлора порядка* n *функции* $f(x,y)$ в *точке* $(x_0;y_0)$, последнее слагаемое её правой части – её *остаточным членом*.

Формула Тейлора (*) в терминах частных производных имеет вид:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k (f)(x_0;y_0) +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n (f)(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y).$$

Если $(x_0;y_0)=(0;0)$, то формула Тейлора называется *формулой Маклорена функции* $f(x,y)$.

Определение 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ и непрерывна в этой точке. Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$, называется *касательной плоскостью к графику* G_f *функции* $f(x,y)$ *в точке* M_0, если расстояние от точки $M\in G_f\setminus\{M_0\}$ до этой плоскости есть бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние между точками M_0 и M при $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Теорема 2. *Если функция* $f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $(x_0;y_0)$, *то её график* G_f *имеет в точке* $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ *касательную плоскость, уравнение которой имеет вид:*

$$z = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0).$$

Определение 2. Если график функции $f(x,y)$ имеет касательную плоскость в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))\in G_f$, то прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью к графику* G_f *данной функции в точке* M_0.

В частности, если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и обе её частные производные в этой точке отличны от нуля, то уравнение нормали к графику G_f данной функции в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-f(x_0;y_0)}{-1}.$$

Косинусы углов α, β, γ, образованных нормалью соответственно с координатными плоскостями yOz, xOz, xOy, называются *направляющими косинусами нормали*. Имеют место следующие формулы:

$$\cos\alpha=\frac{f'_x(x_0;y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0;y_0)+f'^2_y(x_0;y_0)+1}},\qquad \cos\beta=\frac{f'_y(x_0;y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0;y_0)+f'^2_y(x_0;y_0)+1}},$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{f'^2_x(x_0;y_0)+f'^2_y(x_0;y_0)+1}}.$$

Задачи.

1. Записать формулу Тейлора для функции $f(x,y)=x^y$ в точке $M(1;1)$, ограничившись членами до 3-го порядка включительно. Используя полученную формулу, найти приближённое значение $(1{,}1)^{1{,}02}$.

Решение: $f(x,y)=x^y$ – показательно-степенная функция; её область определения $D_f=\{x>0\}$ – правая открытая полуплоскость; $M(1;1)\in D_f$. Так как у функции $f(x,y)$ существуют непрерывные частные производные любого порядка, то она бесконечно дифференцируема, и потому в окрестности точки M разлагается по формуле Тейлора до любого порядка. При $n=3$ имеем: $x^y=f(1;1)+\frac{(df)(1;1)}{1!}+\frac{(d^2f)(1;1)}{2!}+\frac{(d^3f)(1;1)}{3!}+R_4$, где R_4 – остаточный член формулы Тейлора. Имеем $f(1;1)=1$. Найдём значения всех частных производных функции $f(x;y)$ в точке M до третьего порядка включительно: $f'_x=yx^{y-1}$, $f'_y=x^y\ln x$, $f''_{x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{y^2}=x^y\ln^2x$, $f''_{xy}=f''_{yx}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $f'''_{x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3}$, $f'''_{y^3}=x^y\ln^3x$, $f'''_{x^2y}=f'''_{xyx}=f'''_{yx^2}=x^{y-2}(2y-1+y(y-1)\ln x)$, $f'''_{xy^2}=f'''_{yxy}=f'''_{y^2x}=x^{y-1}\left(y\ln^2x+2\ln x\right)$.

Поэтому $f'_x(1;1)=1$, $f'_y(1;1)=0$, $f''_{x^2}(1;1)=0$, $f''_{y^2}(1;1)=0$, $f''_{xy}(1;1)=1$, $f'''_{x^3}(1;1)=0$, $f'''_{y^3}(1;1)=0$, $f'''_{x^2y}(1;1)=1$, $f'''_{xy^2}(1;1)=0$.

Значит, $(df)(1;1)=dx$, $(d^2f)(1;1)=2dxdy$, $(d^3f)(1;1)=3dx^2dy$. Следовательно, $x^y=1+dx+dxdy+\frac{1}{2}dx^2dy+R_4$, или $(1+\Delta x)^{1+\Delta y}=1+\Delta x+\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\Delta x^2\Delta y+R_4$.

С помощью полученного равенства можно найти приближённое значение $(1{,}1)^{1{,}02}$ как значение функции $f(x,y)$ в точке M с приращениями $\Delta x=0{,}1$ и $\Delta y=0{,}02$. Так как приращения аргументов достаточно малы, то $(1{,}1)^{1{,}02}\approx1+0{,}1+0{,}002+0{,}0001=1{,}1021$ (для сравнения – значение, вычисляемое на калькуляторе: $1{,}1020988$).

2. Записать формулу Тейлора для функции $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ в окрестности точки $M(0;1)$, ограничившись членами до 2-го порядка включительно. Найти приближённое значение $\sqrt[9]{e}$. (**Ответ**: $e^{\frac{x}{y}}=1+dx+\frac{1}{2}dx^2-dxdy+R_3$, $\sqrt[9]{e}\approx 1{,}115$).

3. Разложить функцию $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ по формуле Маклорена, ограничившись членами до 3-го порядка включительно. Используя полученную формулу, найти приближённое значение $\sqrt{0{,}95}$. (**Ответ**: $\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2\right)+R_4$, $\sqrt{0{,}95}\approx 0{,}975$).

4. Написать уравнение касательной плоскости (P) к графику функции $f(x,y)=x^2+y^2$ в точке $M_0\left(\in\mathbb{R}^3\right)$ с абсциссой $x_0=1$ и ординатой $y_0=1$. Сделать чертёж (М: 1 = 1,5см). (**Ответ**: (P): $2x+2y-z=2$).

5. Написать уравнение касательной плоскости (P) и нормали (n) к поверхности, являющейся графиком функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, в точке $M_0\left(\in\mathbb{R}^3\right)$ с абсциссой $x_0=1$ и ординатой $y_0=2$. Сделать чертёж (М: 1 = = 1,5см). (**Ответ**: (P): $x+2y-z\sqrt{5}=0$, (n): $x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{\sqrt{5}-z}{\sqrt{5}}$).

6. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к графику функции $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$ в точке $M_0\left(\in\mathbb{R}^3\right)$ с абсциссой $x_0=\frac{4}{3}$ и ординатой $y_0=2$. Сделать чертёж (М: 1 = 1,5см). (**Ответ**: (P): $3x+2y+3z=9$, (n): $\frac{3x-4}{3}=\frac{3(y-2)}{2}=\frac{3z-1}{3}$).

7. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности гиперболического параболоида $z=x^2-y^2$ в точке $M(2;1;3)$. Определить направляющие косинусы нормали. (**Ответ**: (P): $4x-2y-z=3$, (n): $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$, $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{21}}$).

Упражнения.

1. Функцию $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M(1;-2)$.

(**Ответ:** $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$).

2. Найти приращение, получаемое функцией $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$

при переходе от значений $x=1$, $y=-1$ к значениям $x=1+h$, $y=-1+k$. (**Ответ:** $\Delta f(1;-1)=h-3k+\left(-h^2-2hk+k^2\right)+\left(h^2k+hk^2\right)$).

3. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям:

а) $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M_0(3;4;12)$. (**Ответ:** $3x+4y+12z=169$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$).

б) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$. (**Ответ:** $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$).

4. К поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ провести касательные плоскости (написать их уравнения), параллельные плоскости $x+4y+6z=0$. (**Ответ:** $x+4y+6z=\pm 21$).

5. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ $(a>0)$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объёма.

Тема 69. Экстремум функции нескольких переменных

Определение 1. Точка $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если $a\in D_f$ и существует такая окрестность $U(a)$ точки a, что для всех $x\in\dot{U}(a)\cap D_f$, выполняется неравенство $f(x)\le f(a)$ $\left(f(x)\ge f(a)\right)$. Если итоговое неравенство строгое, т.е. $f(x)<f(a)$ $\left(f(x)>f(a)\right)$, то точка a называется *точкой строгого максимума* (*строгого минимума*) функции $f(x)$.

Точки максимума и минимума (строгого максимума и строгого минимума) функции называются её *точками экстремума* (*строгого экстремума*).

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$. *Если* a *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и в этой точке существуют все частные производные 1-ого порядка, то вес они в этой точке равны нулю, т.е.* $f'_{x_k}(a)=0$ $\left(\forall k\in\overline{1,n}\right)$.

Следствие. Если $(x_0;y_0)$ – точка экстремума функции $f(x,y)$ и функция дифференцируема в этой точке, то касательная плоскость к графику функции в точке $\left(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\right)$ параллельна плоскости xOy.

Подчеркнём, что из существования и равенства всех частных производных 1-ого порядка функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в точке $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$, вообще говоря, не следует, что эта точка является точкой экстремума данной функции.

Определение 2. Точка $a=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in\mathbb{R}^n$, в которой существуют и равны нулю все частные производные 1-ого порядка функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, называется *стационарной точкой* этой функции.

Теорема 2 (достаточные условия строгого экстремума функции двух переменных). *Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные до 2-ого порядка включительно в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$, эта точка является стационарной точкой функции $f(x,y)$ и определитель $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0;y_0) & f''_{xy}(x_0;y_0) \\ f''_{yx}(x_0;y_0) & f''_{y^2}(x_0;y_0)\end{vmatrix}\neq 0$. Тогда:*

1) если $\Delta>0$, то точка $(x_0;y_0)$ является точкой строгого экстремума функции $f(x,y)$, причём строгого максимума (строгого минимума), если $f''_{x^2}(x_0;y_0)<0$ $\left(f''_{x^2}(x_0;y_0)>0\right)$;

2) если $\Delta<0$, то $(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума функции $f(x,y)$.

Отметим, что если при выполнении условий теоремы 2 определитель $\Delta=0$, точка $(x_0;y_0)$ может быть, а может и не быть точкой экстремума функции $f(x,y)$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума функции трёх переменных). *Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и имеет непрерывные частные производные до 2-ого порядка включительно в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0;z_0)$, эта точка является стационарной точкой функции $f(x,y,z)$ и угловые миноры $\Delta_1=f''_{x^2}(x_0;y_0;z_0)$,*

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0;y_0;z_0) & f''_{xy}(x_0;y_0;z_0) \\ f''_{yx}(x_0;y_0;z_0) & f''_{y^2}(x_0;y_0;z_0)\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0;y_0;z_0) & f''_{xy}(x_0;y_0;z_0) & f''_{xz}(x_0;y_0;z_0) \\ f''_{yx}(x_0;y_0;z_0) & f''_{y^2}(x_0;y_0;z_0) & f''_{yz}(x_0;y_0;z_0) \\ f''_{zx}(x_0;y_0;z_0) & f''_{zy}(x_0;y_0;z_0) & f''_{z^2}(x_0;y_0;z_0)\end{vmatrix}$$

матрицы 3-го порядка $\begin{pmatrix} f''_{x^2}(x_0;y_0;z_0) & f''_{xy}(x_0;y_0;z_0) & f''_{xz}(x_0;y_0;z_0) \\ f''_{yx}(x_0;y_0;z_0) & f''_{y^2}(x_0;y_0;z_0) & f''_{yz}(x_0;y_0;z_0) \\ f''_{zx}(x_0;y_0;z_0) & f''_{zy}(x_0;y_0;z_0) & f''_{z^2}(x_0;y_0;z_0)\end{pmatrix}$ не равны нулю $(\Delta_1\cdot\Delta_2\cdot\Delta_3\neq 0)$. Тогда:

1) если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, *то точка* $(x_0;y_0;z_0)$ *– точка строгого минимума функции* $f(x,y,z)$*;*

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, *то точка* $(x_0;y_0;z_0)$ *– точка строгого максимума функции* $f(x,y,z)$*;*

3) в остальных случаях точка $(x_0;y_0;z_0)$ *не является точкой экстремума функции* $f(x,y,z)$.

Определение 3. Пусть функция $g(x,y)$ определена на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$. Если множество $E = \{(x;y) \in G : g(x,y) = 0\} \neq \varnothing$, то уравнение $g(x,y) = 0$ называется *уравнением связи* переменных x и y.

Определение 4. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ определены на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$. Точка $(x_0;y_0)$, принадлежащая непустому множеству $E = \{(x;y) \in G : g(x,y) = 0\}$, называется *точкой условного экстремума* функции $f(x,y)$ относительно уравнения связи $g(x,y) = 0$, если она является точкой экстремума сужения этой функции на множество E.

Если в обозначениях определения 4 из уравнения связи $g(x,y) = 0$ можно явно выразить одну переменную, например, $y = \varphi(x)$, то задача сводится к исследованию на экстремум сложной функции $f(x,\varphi(x))$ одной переменной. Этот способ называется *методом исключения переменной*.

Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ дифференцируемы на множестве G, можно использовать другой способ исследования функции на условный экстремум, называемый методом Лагранжа. Он заключается в следующем: составляется функция Лагранжа $F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ и если система уравнений $\begin{cases} F'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ имеет решение $(x_0;y_0;\lambda_0)$, то точка $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ является стационарной точкой функции $F(x,y)$ при $\lambda = \lambda_0$ и может быть точкой условного экстремума функции $f(x,y)$. Проверка, является ли эта точка точкой условного экстремума функции $f(x,y)$, осуществляется путём выяснения знака дифференциала 2-ого порядка функции $F(x,y)$ при $\lambda = \lambda_0$. Если $(d^2F)(x,y) < 0\ (> 0)$, то точка $(x_0;y_0)$ является точкой условного максимума (условного минимума) функции $f(x,y)$.

<u>Задачи.</u>

1. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}^2$; функция $f(x,y)$ дифференцируема как многочлен. 1) Находим стационарные точки: $f'_x=2x+y-3$, $f'_y=x+2y-6$; $\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=6\end{cases}$, получаем $x=0$, $y=3$. Получили одну стационарную точку $M_0(0;3)$. 2) Проверяем достаточные условия экстремума: $f''_{x^2}=2$, $f''_{xy}=f''_{yx}=1$, $f''_{y^2}=2$, поэтому $f''_{x^2}(M_0)=2$, $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)=1$, $f''_{y^2}(M_0)=2$, значит, $\Delta=\begin{vmatrix}f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0)\\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=3>0$, а, следовательно, M_0 – точка экстремума. Так как $f''_{x^2}(M_0)=2>0$, то M_0 – точка минимума. $f_{\min}(x,y)=f(0;3)=-9$.

2. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $f(x,y)=x^3-8y^3-6xy+5$. (**Ответ:** $f_{\max}(x,y)=f\left(-1;\frac{1}{2}\right)=6$).

б) $g(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$. (**Ответ:** $g_{\min}(x,y,z)=g\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{13}{27}$).

3. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=3x^2y-x^3-y^4$. (**Ответ:** $f_{\max}(x,y)=f(6;3)=27$).

4. Исследовать на экстремум иррациональную функцию $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f(0;0)=0$).

5. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в открытом квадрате $K=\{0<x;y<2\pi\}$ (М: π = 3см). (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f\left(\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)=-3$, $f_{\max}(x,y)=f\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $f_{\max}(x,y)=f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$).

6. Исследовать на условный экстремум функцию $f(x,y)=x^2+2xy-3y^2+y$ на прямой, проходящей через единичные точки осей координат. Имеет ли эта функция экстремум? (**Ответ:** условный экстремум функции $f(x,y)$: $f_{\max}(x,y)=f\left(\frac{7}{8};\frac{1}{8}\right)=\frac{17}{16}$; функция $f(x,y)$ не имеет экстремумов).

Упражнения.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f(0;1)=0$).

2. $f(x,y)=x^2-(y-1)^2$. (**Ответ:** точек экстремума нет).

3. $f(x,y)=(x-y+1)^2$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f(x,x+1)=0$).

4. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f(1;0)=-1$).

5. $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$. (**Ответ:** $f_{\max}(x,y)=f(2;3)=108$; $f_{\min}(x,y)=f(0,y)=0$, где $y\in(0;6)$; $f_{\max}(x,y)=f(0,y)=0$, где $y\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$).

6. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f(1;1)=-1$).

7. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$. (**Ответ:** $f_{\max}(x,y)=f(0;0)=1$).

8. $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$. (**Ответ:** точек экстремума нет).

9. $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$. (**Ответ:** $f_{\min}(x,y)=f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$; $f_{\max}(x,y)=f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=\frac{1}{2e}$).

Тема 70. Наименьшее и наибольшее значения функции двух переменных

Известно что, функция $f(x,y)$, непрерывная на компакте из координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, достигает на нём своих граней, т.е. имеет на нём наименьшее и наибольшее значения.

Если эта функция ещё и дифференцируема на указанном компакте, за исключением, быть может, конечной совокупности его точек (такие точки будем называть точками недифференцируемости функции), то свои наименьшее и наибольшее значения функция имеет 1) либо в своих стационарных точках, лежащих внутри компакта, 2) либо в точках недифференцируемости, лежащих внутри компакта, 3) либо на границе этого компакта.

Задачи.

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)=x^2+2xy-3y^2+y$ в замкнутом треугольнике Δ с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$ и $B(0;1)$ (М: 1 = 8см).

Решение: Имеем $D_f=\mathbb{R}^2$; $\Delta\subset\mathbb{R}^2$; функция $f(x,y)$ непрерывна на компакте Δ, следовательно, на нём достигаются нижняя и верхняя грани функции $f(x,y)$. Находим стационарные точки, лежащие внутри Δ: функция $f(x,y)$ дифференцируема; $f'_x=2x+2y$, $f'_y=2x-6y+1$; $\begin{cases}x+y=0\\2x-6y=-1\end{cases}$, получаем $M_0\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$. Но $M_0\notin\Delta^\circ$, следовательно, своих нижней и верхней граней функция $f(x,y)$ достигает на границе Δ. Проведём исследование функции $f(x,y)$ на границе Δ, которая является объединением трёх отрезков $[OA]$, $[OB]$ и $[AB]$.

Отрезок $[OA]\subset Ox$, поэтому уравнение связи: $y=0$. Исследуем функцию $\varphi(x)=f(x,0)=x^2$ на отрезке $[0;1]$. В силу возрастания функции $\varphi(x)$ на этом отрезке имеем: $\inf\limits_{[0;1]}\varphi(x)=\varphi(0)=0$, $\sup\limits_{[0;1]}\varphi(x)=\varphi(1)=1$, следовательно, $\inf\limits_{[OA]} f(x,y)=f(O)=0$, $\sup\limits_{[OA]} f(x,y)=f(A)=1$.

Отрезок $[OB]\subset Oy$, поэтому уравнение связи: $x=0$. Исследуем функцию $\psi(y)=f(0,y)=-3y^2+y$ на отрезке $[0;1]$. $\psi'(y)=-6y+1$, $-6y+1=0$, $y=\dfrac{1}{6}\in(0;1)$. Так как $\psi(0)=0$, $\psi(1)=-2$, $\psi\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{12}$, то $\inf\limits_{[0;1]}\psi(y)=\psi(1)=-2$, $\sup\limits_{[0;1]}\psi(y)=\psi\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{12}$, значит, $\inf\limits_{[OB]} f(x,y)=f(B)=-2$, $\sup\limits_{[OB]} f(x,y)=f\left(0;\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{12}$.

Отрезок $[AB]$ принадлежит прямой $x+y=1$, поэтому уравнение связи: $y=1-x$. Исследуем функцию $g(x)=f(x,1-x)=-4x^2+7x-2$ на отрезке $[0;1]$. $g'(x)=-8x+7$, $-8x+7=0$, $y=\dfrac{7}{8}\in(0;1)$. Так как $g(0)=\psi(1)=-2$, $g(1)=\varphi(1)=1$, $g\left(\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{17}{16}$, то $\inf\limits_{[0;1]} g(x)=g(0)=-2$, $\sup\limits_{[0;1]} g(x)=g\left(\dfrac{7}{8}\right)=\dfrac{17}{16}$, значит, $\inf\limits_{[AB]} f(x,y)=f(B)=-2$, $\sup\limits_{[AB]} f(x,y)=f\left(\dfrac{7}{8};\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{17}{16}$.

Итак, $\inf\limits_{\Delta} f(x,y)=\min\{0;-2;-2\}=-2$, $\sup\limits_{\Delta} f(x,y)=\max\left\{1;\dfrac{1}{12};\dfrac{17}{16}\right\}=\dfrac{17}{16}$, поэтому $\min\limits_{\Delta} f(x,y)=f(0;1)=-2$, $\max\limits_{\Delta} f(x,y)=f\left(\dfrac{7}{8};\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{17}{16}$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в замкнутом квадрате $\overline{K}=\{0<x;y<2\pi\}$ (М.: 1 = 1 см).

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)=x^2-y^2+2$ в замкнутом единичном круге $C=\{x^2+y^2\le 1\}$ (М.: 1 =

= 2 см). (**Ответ:** $\min\limits_C f(x,y) = f(0;\pm1) = 1$; $\max\limits_C f(x,y) = f(\pm1;0) = 3$).

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области $D = \{x^2 \le y \le 4\}$ (М.: 1 = = 1 см). (**Ответ:** $\min\limits_D f(x,y) = f(0;0) = 0$; $\max\limits_D f(x,y) = f(\pm2;4) = 32$).

5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y$ **1)** в замкнутом круге $K = \{x^2 + y^2 \le 100\}$; **2)** в замкнутом круговом кольце $Q = \{16 \le x^2 + y^2 \le 100\}$ (М.: 1 = 0,5 см). (**Ответ:** $\min\limits_K f(x,y) = \min\limits_Q f(x,y) = f(3;-4) = -25$; $\max\limits_K f(x,y) = \max\limits_Q f(x,y) = f(-6;8) = 200$).

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ в замкнутом круге $\overline{K} = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 4\}$ (М.: 1 = 2 см).

7. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника будет наименьшей (М.: $a =$ 6 см, b = 4,5 см).

Упражнения.

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x - 2y - 3$ в замкнутом треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$ и $B(0;1)$. (**Ответ:** $\min f(x,y) = -5$; $\max f(x,y) = -2$).

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в замкнутом круге $K = \{x^2 + y^2 \le 25\}$. (**Ответ:** $\min f(x,y) = -75$; $\max f(x,y) = 125$).

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ в замкнутом прямоугольнике $P = \{|x| + |y| \le 1\}$. (**Ответ:** $\min f(x,y) = 0$; $\max f(x,y) = 1$).

4. Данное положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных им величин была наименьшей. (**Ответ:** $\dfrac{n}{\sqrt[n]{a}}$).

5. Данное положительное число a разложить на n слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей. (**Ответ:** слагаемые равные).

6. При каких размерах открытая прямоугольная ванна вместимости V имеет наименьшую поверхность? (**Ответ:** $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$).

Тема 71. Неявные функции

Определение 1. Пусть функция $F(x,y)$ определена на множестве

$E \subset \mathbb{R}^2$, ортогональная проекция которого на ось абсцисс есть $E_x\left(\subset \mathbb{R}_x\right)$. Если существует функция $f(x)$ (одной переменной) такая, что $D_f \subset E_x$ и $F\left(x, f(x)\right)=0 \ \left(\forall x \in D_f\right)$, то функция $f(x)$ называется *неявной функцией, заданной уравнением* $F(x,y)=0$. При этом говорят, данное уравнение задаёт неявную функцию $f(x)$.

Теорема 1 (достаточное условие существования и единственности неявной функции одной переменной). *Пусть функция* $F(x,y)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* $(x_0;y_0)$, $F(x_0;y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. *Тогда уравнение* $F(x,y)=0$ *задаёт в некоторой окрестности точки* x_0 *единственную неявную функцию* $f(x)$ *такую, что* $f(x_0)=y_0$, *функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема в этой окрестности и там имеет* $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Отметим, что формулы из теорем 1 и 2 можно получить, дифференцируя по x уравнение $F(x,y)=0$.

Определение 2. Пусть функция $F(x,y,z)$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^3$, ортогональная проекция которого на плоскость xOy есть E_{xy}. Если существует функция $f(x,y)$ (двух переменных) такая, что $D_f \subset E_{xy}$ и $F\left(x,y,f(x,y)\right)=0 \ \left(\forall (x;y)\in D_f\right)$, то функция $f(x,y)$ называется *неявной функцией, заданной уравнением* $F(x,y,z)=0$. При этом говорят, данное уравнение задаёт неявную функцию $f(x,y)$.

Теорема 2 (достаточное условие существования и единственности неявной функции двух переменных). *Пусть функция* $F(x,y,z)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* $(x_0;y_0;z_0)$, *причём* $F(x_0;y_0;z_0)=0$ *и* $F'_z(x_0;y_0;z_0)\neq 0$. *Тогда уравнение* $F(x,y,z)=0$ *задаёт в некоторой окрестности точки* $(x_0;y_0)$ *единственную неявную функцию* $f(x,y)$ *такую, что* $f(x_0;y_0)=z_0$, *функция* $f(x,y)$ имеет *непрерывные частные производные 1-ого порядка в этой окрестности и там они вычисляются по формулам:* $f'_x(x,y)=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$ *и* $f'_y(x,y)=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$.

<u>Задачи.</u>

1. **а)** Сколько функций $f(x)$ определяется уравнением $y^2-x^2=0$ на всей оси абсцисс? **б)** Сколько из них непрерывных? **в)** Сколько дифференцируемых? (**Ответ: а)** бесконечно много; **б)** четыре: $f(x)=\pm x;\pm|x|$; **в)** две: $f(x)=\pm x$).

2. Показать, что уравнение $x^2+xy+y=3$ задаёт неявную функцию в окрестности точки $x=1$. Найти $f'(1)$.

Решение: Имеем $F(x,y)=x^2+xy+y-3$, $D_F=\mathbb{R}^2$ и $F(x,y)$ дифференцируема, причём $F(1,y)=2y-2=0$ при $y=1$. Так как $F'_x(1;1)=2x+y\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=3$ и $F'_y(1;1)=x+1\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\neq 0$, то в некоторой окрестности точки $x=1$ существует единственная неявная функция $f(x)$ такая, что $f(1)=1$, она дифференцируема в указанной окрестности и $f'(1)=\dfrac{F'_x(1;1)}{F'_y(1;1)}=\dfrac{3}{2}$.

3. Найти $f'(x)$ и $(df)(x)$, если неявная функция $f(x)$ задана уравнением $y=2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

4. Доказать, что уравнение $x=2y+\sin y$ определяет неявную функцию $f(x)$ на всей оси абсцисс. Вычислить $f'(0)$, $f'(2\pi)$. Изобразить график функции $f(x)$.

5. Найти частные производные неявной функции $f(x,y)$, заданной уравнением $x^2y-y^2z+zx=0$. (**Ответ:** $f'_x(x,y)=\dfrac{2xy+z}{y^2-x}$, $f'_y(x,y)=\dfrac{x^2-2yz}{y^2-x}$).

Упражнения.

1. **а)** Сколько функций $f(x)$ определяется уравнением $y^2=1$? **б)** Сколько из них непрерывных? **в)** Сколько дифференцируемых? (**Ответ: а)** бесконечно много; **б)**, **в)** две: $f(x)=\pm 1$).

2. В окрестности каких точек плоскости уравнение $y^2=x^3$ задаёт неявную функцию? (**Ответ:** в окрестностях всех точек, кроме точки $(0;0)$).

3. Найти $f'(x)$ и $(df)(x)$ в точке $x=1$ функции $f(x)$, неявно заданной уравнением $x^2+y=2xy$. (**Ответ:** $f'(1)=0$, $(df)(1)=0$).

4. При каких значениях параметра a уравнение $x=ay+\cos y$ определяет неявную функцию в какой-либо окрестности точки $x=\dfrac{a\pi}{2}$? (**Ответ:** при любых a).

5. Найти частные производные неявной функции $f(x,y)$, заданной уравнением $z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y = 0$. **(Ответ:** $f'_x(x,y) = -\dfrac{z^2 - 2xy + 2}{y^2 + 2xz}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{x^2 - 2yz + 1}{y^2 + 2xz}$).

Тема 72. Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному

Пусть функция $f(x,y)$ определена на квадрируемом компакте $\Phi \subset \mathbb{R}^2$, $\dot{\tau}$ – отмеченное разбиение компакта Φ с ячейками Φ_k, $k = \overline{1,n}$, выборкой $\alpha_\tau = \left\{N_k(x_k;y_k) \in \Phi_k, k = \overline{1,n}\right\}$ и диаметром $d_\tau > 0$. Назовём *интегральной суммой функции* $f(x,y)$ на компакте Φ по его отмеченному разбиению $\dot{\tau}$ число, определяемое формулой $\sigma_{\dot{\tau}}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k;y_k) \cdot \text{пл}\,\Phi_k$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_{\dot{\tau}}(f)$, то он называется *двойным интегралом от функции* $f(x,y)$ *по компакту* Φ и обозначается $\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy$, а функция $f(x,y)$ называется *интегрируемой* по этому компакту.

Если функция $f(x,y)$ ограничена на квадрируемом компакте Φ, то *верхней (нижней) суммой Дарбу* называется число $S_\tau(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \text{пл}\,\Phi_k$ $\left(s_\tau(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \text{пл}\,\Phi_k\right)$, где $M_k = \sup\limits_{\Phi_k} f(x,y)$ $\left(m_k = \inf\limits_{\Phi_k} f(x,y)\right)$.

Теорема 1. *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна на компакте*

$$\Phi = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \alpha_1(x) \le y \le \alpha_2(x)\right\},$$

где функции $\alpha_1(x)$ *и* $\alpha_2(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a;b]$, *то*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)dy. \quad (1)$$

Теорема 2. *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна на компакте*

$$\Phi = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \beta_1(y) \le x \le \beta_2(y)\right\},$$

где функции $\beta_1(y)$ *и* $\beta_2(y)$ *непрерывны на отрезке* $[c;d]$, *то*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)dx\,. \tag{2}$$

Выражения в правых частях формул (1) и (2) называются *повторными интегралами* с внешним интегрированием по x и y соответственно.

Задачи.

1. Найти нижнюю и верхнюю суммы Дарбу функции $f(x,y) = xy$ на квадрируемом компакте Φ, являющимся замкнутым квадратом с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$ и $C(1;1)$:

а) по его примитивному разбиению $\tau_0 = \{\Phi\}$; (**Ответ:** $s_{\tau_0}(f) = 0, S_{\tau_0}(f) = 1$).

б) по его разбиению $\tau_1 = \{\Phi_k, k = \overline{1,4}\}$, получаемому проведением отрезков, соединяющих середины противоположных сторон квадрата. (**Ответ:** $s_{\tau_1}(f) = \dfrac{1}{16}, S_{\tau_1}(f) = \dfrac{9}{16}$).

2. Используя определение двойного интеграла, разбивая компакт Φ из задачи 1 на n^2 $(n \in \mathbb{N})$ равных квадратных ячеек и выбирая в каждой из них в качестве отмеченной точки правую верхнюю вершину, вычислить интеграл $I = \iint\limits_{\Phi} xydxdy$ (М.: 1 = 6 см). (**Ответ:** $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$).

3. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на компакте $\Phi -$ «правом» замкнутом полукруге с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R = 2$. Записать двойной интеграл $I = \iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy$ в виде повторных с разным порядком интегрирования (М.: 1 = 2 см).

(**Ответ:** $I = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$).

4. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на компакте Φ, ограниченном осью абсцисс, биссектрисой 1-го координатного угла и параболой с вершиной в точке $A(1;1)$ и проходящей через начало координат. Записать двойной интеграл $I = \iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy$ в виде повторных с разным порядком интегрирования (М.: 1 = 2 см).

(**Ответ:** $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2x-x^2} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$).

5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I=\int\limits_{-6}^{2} dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$ (М.: 1 = 1 см).

(**Ответ:** $I=\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$).

6. Вычислить, сведя к повторному, двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi} xydxdy$, где $\Phi-$ компакт из задачи 1. (**Ответ:** $I=\frac{1}{4}$).

7. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}\left(x+y^2\right)dxdy$, где компакт Φ ограничен параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$ (М.: 1= 4 см).

Решение: Ясно, что компакт интегрирования Φ представляет собой криволинейную трапецию (параболический сегмент), порождённую функциями $\alpha_1(x)=x^2$ и $\alpha_2(x)=x$ на отрезке $[0;1]$, т.е. $\Phi=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, x^2\le y\le x\right\}$. Подынтегральная функция $f(x,y)=x+y^2$, очевидно, непрерывна всюду в $\mathbb{R}^2$ и в том числе на Φ. Поэтому, согласно теореме 1, имеем: $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}\left(x+y^2\right)dy=$

$$=\int\limits_0^1\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{x}dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{x^3}{3}-x^3-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{5}{42}.$$

8. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}\sqrt{x+y}dxdy$, где $\Phi-$замкнутый треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ и $B(0;1)$ (М.: 1= 4 см). (**Ответ:** $I=\frac{2}{5}$).

Упражнения.

1. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на компакте Φ. Записать двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy$ в виде повторных с разным порядком интегрирования, если

а) $\Phi-$ замкнутая трапеция с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $C(1;2)$ и $B(0;1)$. (**Ответ:** $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x+1} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^1 f(x,y)dx$).

б) $\Phi=\{x^2+y^2\le 1\}-$ замкнутый круг.

(**Ответ:** $I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$).

в) $\Phi=\{x^2+y^2\le y\}-$ замкнутый круг.

(**Ответ:** $I=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$).

г) $\Phi-$ параболический сегмент, ограниченный параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$. (**Ответ:** $I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$).

д) $\Phi=\{1\le x^2+y^2\le 4\}-$ замкнутое круговое кольцо.

(**Ответ:** $I=\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+$

$$+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+$$

$$+\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$).

2. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

а) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$. (**Ответ:** $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$).

б) $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy$. (**Ответ:** $I=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$).

в) $I=\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$. (**Ответ:** $I=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$).

3. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}xy^2dxdy$, если компакт Φ ограничен параболой $y^2=2px$ и прямой $x=\dfrac{p}{2}$ $(p>0)$. (**Ответ:** $I=\dfrac{p^5}{21}$).

4. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_{\Phi}\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если $\Phi-$параллелограмм со сторонами $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ и $y=3a$ $(a>0)$. (**Ответ:** $I=14a^4$).

Тема 73. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам

Теорема. Пусть отображение $A:\begin{cases}u=\varphi(x,y)\\ v=\psi(x,y)\end{cases}$ регулярно в области $D\subset\mathbb{R}^2_{xy}$ и $\Phi-$ квадрируемый компакт, лежащий в этой области. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на Φ, то функция $F(u,v)=f\left(\tilde{\varphi}(u,v),\tilde{\psi}(u,v)\right)\cdot\left|J_{A^{-1}}\right|$ будет интегрируемой на квадрируемом компакте $\Phi^*=A(\Phi)\subset\mathbb{R}^2_{uv}$, при этом имеет место формула

$$\iint\limits_{\Phi}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Phi^*}F(u,v)dudv=\iint\limits_{\Phi^*}f\left(\tilde{\varphi}(u,v),\tilde{\psi}(u,v)\right)\cdot\left|J_{A^{-1}}\right|dudv. \qquad (1)$$

Здесь $A^{-1}:\begin{cases}x=\tilde{\varphi}(u,v)\\ y=\tilde{\psi}(u,v)\end{cases}-$ обратное отображение к A и $J_{A^{-1}}=\begin{vmatrix}\tilde{\varphi}'_u & \tilde{\varphi}'_v\\ \tilde{\psi}'_u & \tilde{\psi}'_v\end{vmatrix}-$ его якобиан.

Формула (1) называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

В частности, при переходе к *полярным координатам* $A^{-1}:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ имеем (модуль якобиана отображения $\left|J_{A^{-1}}\right|=r$)

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Phi^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,d\theta dr.$$

При переходе к *обобщённым полярным координатам* $A^{-1}:\begin{cases} x = a+\alpha r\cos\theta \\ y = b+\beta r\sin\theta \end{cases}$ $(a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ (модуль якобиана этого отображения $|J_{A^{-1}}| = |\alpha\beta| r$) имеем $\iint\limits_{\Phi} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Phi^*} f(a+\alpha r\cos\theta, b+\beta r\sin\theta)\cdot r|\alpha\beta| d\theta dr$.

Задачи.

1. Произведя надлежащую замену переменных, вычислить следующие двойные интегралы

а) $I = \iint\limits_{\Phi}\left(x^2-y^2\right)^2(x+y)dxdy$, где $\Phi = \{1\le x+y\le 3, |x-y|\le 1\}$. (М.: 1 = 1 см).

Решение: Компактом интегрирования является замкнутый параллелограмм, ограниченный четырьмя прямыми $x+y=1, x+y=3, x-y=\pm 1$. Подынтегральная функция может быть записана в виде $f(x,y) = (x-y)^2(x+y)^3$. Поэтому в интеграле I целесообразно сделать следующую замену переменных $A:\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$. При этом образом компакта Φ будет замкнутый квадрат $\Phi^* = \{1\le u\le 3, -1\le v\le 1\}$. Якобиан отображения A равен $J_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, следовательно, $J_{A^{-1}} = \frac{1}{J_A} = -\frac{1}{2}$ и потому $|J_{A^{-1}}| = \frac{1}{2}$ ($A^{-1}:\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ – отображение, обратное к A). Так как $f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = u^3v^2$, то по формуле (1) имеем:

$$I = \int_1^3 du\int_{-1}^1 \frac{1}{2}u^3v^2dv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\cdot\int_{-1}^1 v^2dv = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\Big|_1^3\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^1 = 10\cdot\frac{2}{3} = \frac{20}{3}.$$

б) $I_1 = \iint\limits_{\Phi}\frac{dxdy}{x^2y}$ и $I_2 = \iint\limits_{\Phi}\frac{dxdy}{y}$, где $\Phi = \left\{x\le y\le 2x, \frac{2-x}{2}\le y\le 2(2-x)\right\}$.

(М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $I_1 = \frac{3}{2}$, $I_2 = 2\ln\frac{5}{4}$).

в) $I = \iint\limits_{\Phi}\left(\frac{y}{x}\right)^3 dxdy$, где $\Phi = \{1\le xy\le 2, x\le y^2\le 2x\}$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:**

$I_1 = \frac{\ln 2}{2}$).

г) $I = \iint\limits_{\Phi} \left(x^3y + xy^3\right) dxdy$, где $\Phi = \left\{x; y > 0,\ 4x^2 - 3y^2 \le 4,\ 4y^2 - 3x^2 \le 4\right\}$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $I = 3$).

2. Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dy$ с помощью перехода к полярным координатам. (**Ответ:** $I = \frac{\pi}{4}\left(2\ln 2 - 1\right)$).

3. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_{\Phi} \frac{dxdy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, где $\Phi = \left\{4x \le x^2 + y^2 \le 8x, x \le y \le 2x\right\}$. (М.: 1 = 1 см). (**Ответ:** $I = \frac{3}{128}$).

4. Переходя к обобщённым полярным координатам, вычислить следующие двойные интегралы по указанным компактам:

а) $I = \iint\limits_{\Phi} \left(x^2 - y^2\right) dxdy$, где $\Phi = \left\{x^2 + y^2 - 2x \le 0\right\}$ (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $I = \pi$).

б) $I = \iint\limits_{\Phi} y dxdy$, где $\Phi = \left\{x^2 + 6y + y^2 \le 0,\ x \ge 0\right\}$ (М.: 1 = 0,5 см). (**Ответ:** $I = -\frac{27\pi}{2}$).

Упражнения.

1. Найти среднее значение $\underset{\Phi}{\text{ср}} f$ функции $f(x; y) = \sin^2 x \sin^2 y$ на замкнутом квадрате $\Phi = \{0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$ $\left(\underset{\Phi}{\text{ср}} f = \frac{1}{\text{пл}\,\Phi} \iint\limits_{\Phi} f(x, y) dxdy\right)$ (**Ответ:** $\underset{\Phi}{\text{ср}} f = \frac{1}{4}$).

2. Вычислить следующие двойные интегралы по указанным компактам:

а) $I = \iint\limits_{\Phi} |xy| dxdy$, где $\Phi = \left\{x^2 + y^2 \le a^2\right\} (a > 0)$. (**Ответ:** $I = \frac{a^4}{2}$).

б) $I = \iint\limits_{\Phi} \left(|x| + |y|\right) dxdy$, где $\Phi = \left\{|x| + |y| \le 1\right\}$. (**Ответ:** $I = \frac{4}{3}$).

в) $I=\iint\limits_{\Phi}(x+y)dxdy$, где компакт Φ ограничен параболой $y^2=2x$ и прямыми $x+y=4$, $x+y=12$. (**Ответ:** $I=543\frac{11}{15}$).

г) $I=\iint\limits_{\Phi}xydxdy$, где компакт Φ ограничен гиперболой $xy=1$ и прямой $x+y=\frac{5}{2}$. (**Ответ:** $I=1\frac{37}{128}-\ln 2$).

3. Переходя к полярным координатам, вычислить следующие двойные интегралы

а) $I=\iint\limits_{\Phi}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $\Phi=\left\{x^2+y^2\le a^2\right\}$. (**Ответ:** $I=\frac{2\pi a^3}{3}$).

б) $I=\iint\limits_{\Phi}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где $\Phi=\left\{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$. (**Ответ:** $I=-6\pi^2$).

Тема 74. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла

Теорема 1. *Пусть* $\Phi-$ *плоская фигура, границей которой служит объединение конечной совокупности кусочно-гладких кривых. Тогда фигура* Φ, *её внутренность* Φ° *и её замыкание* $\overline{\Phi}$ *квадрируемы, при этом* $\text{пл}\,\Phi=\text{пл}\,\Phi^\circ=\text{пл}\,\overline{\Phi}$.

Теорема 2. *Если* $\Phi-$ *плоская фигура, границей которой служит объединение конечной совокупности кусочно-гладких кривых, то её площадь вычисляется по формуле* $\text{пл}\,\Phi=\iint\limits_{\overline{\Phi}}dxdy$.

Задачи.

1. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной параболой $y^2=2ax$ $(a>0)$ и прямой $x=a$ (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $\text{пл}\,\Phi=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^2$).

2. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(a,b\in\mathbb{R}_+^*\right)$ (М.: a = 3 см, b = 2 см).

Решение: По теореме 2 площадь фигуры Φ находим по формуле $\text{пл}\,\Phi=\iint\limits_{\overline{\Phi}}dxdy$, где $\overline{\Phi}=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}-$ квадрируемый компакт. Переходя к обобщённым полярным координатам $A^{-1}:\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$ и учитывая, что

$\left|J_{A^{-1}}\right| = abr$ и $\overline{\Phi^*} = \left\{\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}\right\}$ – прямоугольник, имеем

$$\text{пл}\,\Phi = \iint\limits_{\overline{\Phi^*}} dx\,dy = ab\int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^1 r dr = 2\pi ab\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi ab.$$

3. Найти площадь параболического сегмента (криволинейной трапеции) $\Phi = \left\{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 \le \frac{x}{a}-\frac{y}{b}; y \ge 0\right\}$ $\left(a, b \in \mathbb{R}_+^*\right)$ (М.: a = 4 см, b = 2 см). (**Ответ:** $\text{пл}\Phi = \frac{ab}{12}$).

4. Найти площадь фигуры Φ, лежащей в 1-ом квадранте и ограниченной гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$ и параболами $y^2 = x$, $y^2 = 2x$. (М.: 1 = 4 см, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25$, $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}5$). (**Ответ:** $\text{пл}\,\Phi = \frac{2}{3}\ln 2$).

5. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной петлёй декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $\text{пл}\,\Phi = \frac{3}{2}a^2$).

Упражнения.

1. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а) $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$. (**Ответ:** πa^2).

б) $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$ $(a > 0)$. (**Ответ:** $\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2$).

2. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры, не содержащую начало координат и ограниченной кривыми $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$, $x^2 + y^2 = 1$. (**Ответ:** $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$).

3. Произведя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$ $(x, y > 0)$. (**Ответ:** $\frac{\ln 2}{2}$).

Тема 75. Вычисление объёмов пространственных тел с помощью двойного интеграла

Теорема 1. *Пусть P – пространственное тело, границей которого служит объединение конечной совокупности кусочно-гладких поверхностей. Тогда тело P, его внутренность P° и его замыкание $\overline{P}$ кубируемы и* $\text{об}P = \text{об}P^\circ = \text{об}\overline{P}$.

Теорема 2. Пусть на квадрируемом компакте $\Phi\left(\subset \mathbb{R}^2_{xy}\right)$ заданы две непрерывные функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, причём всюду на Φ имеет место неравенство $f(x,y)\le g(x,y)$. Тогда тело $P=\left\{\begin{matrix}(x;y)\in\Phi\\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\end{matrix}\right\}$, называемое криволинейным цилиндрическим телом, кубируемо и его объём вычисляется по формуле $\text{об}P=\iint\limits_{\Phi}(g-f)(x,y)dxdy$.

Задачи.

1. Найти объём тела P, ограниченного плоскостями $3x+2y+6z=6$, $3x-2y=0$, $z=0$ и параболическим цилиндром $2y=3x^2$ (М.: 1 = 3 см).

Решение: Имеем $P=\left\{\begin{matrix}(x;y)\in\Phi\\ 0\le z\le 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\end{matrix}\right\}$, где $\Phi=\left\{\dfrac{3}{2}x^2\le y\le\dfrac{3}{2}x\right\}$. По теореме 2: $\text{об}P=\iint\limits_{\Phi}\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac{3}{2}x^2}^{\frac{3}{2}x}\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)dy=\int\limits_0^1\left[y-\dfrac{xy}{2}-\dfrac{y^2}{6}\right]_{\frac{3}{2}x^2}^{\frac{3}{2}x}dx=$

$$=3\int\limits_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{7x^2}{8}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}\right)dx=3\left[\frac{x^2}{4}-\frac{7x^3}{24}+\frac{x^4}{16}+40\right]_0^1=\frac{11}{80}.$$

2. Найти объём общей части P двух равных круговых цилиндров радиуса R, оси которых перпендикулярны. (М.: R = 3 см). (**Ответ:** $\text{об}P=\dfrac{16}{3}R^3$).

3. Найти объём тела P, лежащего в I октанте и ограниченного плоскостями $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ и параболоидом вращения $z=1-x^2-y^2$ (М.: 1 = 3 см). (**Ответ:** $\text{об}P=\dfrac{\pi}{48}$).

4. Найти объём тела P, ограниченного плоскостями $z=-3$, $z=x$, $y=5$, $x=0$ и параболическим цилиндром $y=x^2+1$ (М.: 1 = 1,5 см). (**Ответ:** $\text{об}P=20$).

5. Вычислить объём тела P, ограниченного круговым цилиндром $x^2+y^2=4y$ и плоскостями $z=y$, $z=2y$. (М.: 1 = 1 см). (**Ответ:** $\text{об}P=8\pi$).

Упражнения.

1. Изобразить тело, объём которого равен интегралу $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy$.

2. Найти объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

а) $x+y+z=a, x^2+y^2=R^2, x=0, y=0, z=0\left(a\ge R\sqrt{2}\right)$. (**Ответ:** $\dfrac{\pi R^2a}{4}-\dfrac{2}{3}R^3$).

б) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$. (**Ответ:** $\frac{88}{105}$).

в) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0$. (**Ответ:** $\frac{45}{32}\pi$).

г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\ (z>0)\ (a;b;c>0)$. (**Ответ:** $\frac{\pi abc}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$).

Тема 76. Вычисление площадей поверхностей с помощью двойного интеграла

Теорема. *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывно дифференцируема на квадрируемом компакте* Φ. *Тогда её график* G_f (*поверхность* S) *квадрируем и его площадь вычисляется по формуле*

$$\text{пл}S=\iint\limits_{\Phi}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}dxdy.$$

Задачи.

1. Найти площадь S части единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключённой внутри прямого кругового цилиндра $x^2+y^2=y$ (М.: 1 = 3 см). (**Ответ:** $\text{пл}S=2(\pi-2)$).

2. Вычислить площадь S части параболоида вращения $y=2-x^2-z^2$, содержащей его вершину и отсекаемую плоскостью $y=0$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $\text{пл}S=\frac{13}{2}\pi$).

3. Вычислить площадь S части прямого кругового конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключённой внутри прямого кругового цилиндра $x^2+y^2=2x$ (М.: 1 = 2 см).

Решение: В силу симметрии поверхности S относительно плоскости Oxz имеем $\text{пл}S=2\iint\limits_{\Phi}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}dxdy$, где $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, а

$\Phi=\begin{cases}x^2+y^2\le 2x\\ y\ge 0\end{cases}$ – полукруг. Далее, $f_x'(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y'(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

и потому $1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)=2$.

Поэтому $\text{пл}S=2\sqrt{2}\iint\limits_{\Phi}dxdy=2\sqrt{2}\,\text{пл}\,\Phi=\pi\sqrt{2}$.

4. Найти площадь поверхности общей части двух прямых круговых цилиндров радиуса R, оси которых перпендикулярны. (М.: R = 3 см). (**Ответ:** $\text{пл}S=16R^2$).

5. Вычислить площадь части поверхности параболического цилиндра

$2z = x^2$, высеченную плоскостями $y = x$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** пл$S = \frac{7}{3}$).

Упражнения.

1. Вычислить площадь S части поверхности $az = xy$, заключённой внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$. (**Ответ:** $S = \frac{2}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2} - 1\right)$).

2. Найти площадь S части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. (**Ответ:** $S = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$).

3. Найти площадь S части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$ (задача Вивиани). (**Ответ:** $S = 8a^2$).

4. Вычислить площадь S части поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ $\left(x, y \in \mathbb{R}_+^*\right)$. (**Ответ:** $S = 2a^2$).

Тема 77. Тройной интеграл

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена на кубируемом компакте $P \subset \mathbb{R}^3$, $\dot{\tau}$ – какое-либо его отмеченное разбиение с ячейками P_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$, выборкой $\alpha_\tau = \left\{N_k(x_k; y_k; z_k) \in P_k,\ k = \overline{1,n}\right\}$ и диаметром $d_\tau > 0$. Назовём *интегральной суммой функции* $f(x,y,z)$ *на компакте* P *по его отмеченному разбиению* $\dot{\tau}$ число, определяемое по формуле

$$\sigma_{\dot{\tau}}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k) \cdot \text{об}P_k .$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_{\dot{\tau}}(f)$, то он называется *тройным интегралом от функции* $f(x,y,z)$ *по компакту* P и обозначается $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

В частности, если $f(x,y,z) \equiv 1$ на кубируемом компакте P, то существует тройной интеграл $\iiint\limits_P dx\,dy\,dz$ и он равен обP, т.е. об$P = \iiint\limits_P dx\,dy\,dz$.

Теорема 1. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кубируемом компакте, то она интегрируема на нём.

Теорема 2 (*переход к повторному интегрированию*). Пусть P – кубируемый компакт $P = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x;y) \in \Phi,\ \alpha_1(x,y) \le z \le \alpha_2(x,y)\right\}$ пространства $Oxyz$, где Φ – квадрируемый компакт плоскости Oxy (Φ – ортогональная проекция P на плоскость Oxy) и на нём определены и непрерывны функции $\alpha_1(x,y)$ и $\alpha_2(x,y)$, причём всюду на Φ $\alpha_1(x,y) \le \alpha_2(x,y)$. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема на кубируемом компакте P и для любой фиксированной точки $(x;y)$ из Φ она, как функция одной переменной z интегрируема на отрезке $\left[\alpha_1(x;y);\alpha_2(x;y)\right]$, то функция $g(x,y) = \int\limits_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ будет интегрируемой на квадрируемом компакте Φ и при этом имеет место формула

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_\Phi g(x,y)dxdy = \iint\limits_\Phi dxdy \int\limits_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Следствие. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кубируемом компакте $P = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \alpha_1(x) \le y \le \beta_2(x), \beta_1(x,y) \le z \le \beta_2(x,y)\right\}$, где функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, а функции двух переменных $\beta_1(x,y)$, $\beta_2(x,y)$ – на квадрируемом компакте $\Phi = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \alpha_1(x) \le y \le \alpha_2(x)\right\}$, то

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} dy \int\limits_{\beta_1(x,y)}^{\beta_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Аналогичные формулы имеют место и в случае иного расположения компакта P в пространстве $Oxyz$, например, если $P = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b, \alpha_1(z) \le x \le \alpha_2(z), \beta_1(x,z) \le y \le \beta_2(x,z)\right\}$, то

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dz \int\limits_{\alpha_1(z)}^{\alpha_2(z)} dx \int\limits_{\beta_1(x,z)}^{\beta_2(x,z)} f(x,y,z)dy ;$$

если $P = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : a \le y \le b, \alpha_1(y) \le z \le \alpha_2(y), \beta_1(y,z) \le x \le \beta_2(y,z)\right\}$, то

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} dz \int\limits_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

и т.п.

При переходе в тройном интеграле к *цилиндрическим координатам* по формулам $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$ $\left(r \in \mathbb{R}_+,\ \theta \in [0;2\pi], h \in \mathbb{R}\right)$ имеет место равенство

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{P^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, h)\cdot r\,d\theta dr dh,$$

где P^* – образ компакта P при этом отображении.

При переходе в тройном интеграле к *сферическим координатам* по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\omega \\ y = \rho\sin\theta\sin\omega \\ z = \rho\cos\omega \end{cases}$ $\left(\theta\in[0;2\pi],\ \omega\in[0;\pi],\ \rho\in\mathbb{R}_+\right)$ имеет место равенство

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{P^*} f(\rho\cos\theta\sin\omega, \rho\sin\theta\sin\omega, \rho\cos\omega)\cdot\rho^2\sin\omega d\theta d\omega d\rho,$$

где P^* – образ компакта P при этом отображении.

Задачи.

1. Пусть дан тройной интеграл $I = \iiint\limits_P zdxdydz$, где P – кубируемый компакт, лежащий в 1-ом октанте, включающий начало координат, ограниченный единичной сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=\frac{1}{2}$, $y=x$, $y=\frac{3}{2}x$, $z=0$. (М.: 1 = 4 см).

а) Записать интеграл I в виде повторного, включающего двойной интеграл, с внутренним интегрированием по z. (**Ответ:** $I = \iint\limits_\Phi dxdy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$, где $\Phi = \left\{0\le x\le\frac{1}{2}, x\le y\le\frac{3x}{2}\right\}$).

б) Записать интеграл I в виде повторного трёхкратного интеграла с внешним интегрированием по x и внутренним интегрированием по z. (**Ответ:** $I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_x^{\frac{3}{2}x} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$).

в) Вычислить интеграл I. (**Ответ:** $I = \frac{65}{3072}$).

2. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_P xy^2zdxdydz$, если кубируемый компакт P ограничен параболическим цилиндром $x+3y^2=0$ и плоскостями $x=-3$, $2x+3z=0$, $z=0$ (М.: 1 = 2 см).

Решение: Заметим, что $P=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3:\ (x;y)\in\Phi,\ 0\le z\le -\frac{2}{3}x\right\}$, где $\Phi=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ -1\le y\le 1,\ -3\le x\le -3y^2\right\}$, поэтому

$$\iiint\limits_P xy^2z\,dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}dy\int_{-3}^{-3y^2}dx\int_0^{-\frac{2}{3}x}xy^2z\,dz=\int_{-1}^{1}y^2dy\int_{-3}^{-3y^2}x\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{-\frac{2}{3}x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}y^2dy\int_{-3}^{-3y^2}\frac{4}{9}x^3dx=\frac{2}{9}\int_{-1}^{1}y^2\left(\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^{-3y^2}\right)dy=\frac{1}{18}\int_{-1}^{1}81y^2\left(y^8-1\right)dy=$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\left(y^{10}-y^2\right)dy=\frac{9}{2}2\int_0^1\left(y^{10}-y^2\right)dy=9\left.\left(\frac{y^{11}}{11}-\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^1=9\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{24}{11}.$$

3. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_P\left((x+y)^2-z\right)dxdydz$, если кубируемый компакт P ограничен конусом $(z-2)^2=4\left(x^2+y^2\right)$ и плоскостью $z=0$. (М.: 1 = 3 см).

Решение: Имеем $P=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in\Phi,\ 0\le z\le 2-2\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, где $\Phi=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\right\}$.

Перейдём к цилиндрическим координатам: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=h\end{cases}$

$\left(r\in\mathbb{R}_+,\theta\in[0;2\pi],h\in\mathbb{R}\right)$. При этом $2-2\sqrt{x^2+y^2}=2-2r$, так что компакт P перейдёт в компакт $P^*=\left\{(\theta;r;h):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le h\le 2-2r\right\}$, представляющий собой треугольную призму. Поскольку $(x+y)^2-z=r^2(1+\sin 2\varphi)-h$, получаем

$$\iiint\limits_P\left((x+y)^2-z\right)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{P^*}\left(r^2(1+\sin 2\theta)-h\right)r\,d\theta\,dr\,dh=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{2-2r}\left(r^3(1+\sin 2\varphi)-rh\right)dh=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left.\left(r^3(1+\sin 2\theta)h-r\frac{h^2}{2}\right)\right|_0^{2-2r}dr=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\left(r^3-r^4\right)\sin 2\theta-r^4+2r^2-r\right)dr=$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\left(\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right)\sin 2\theta - \frac{r^5}{5}+2\frac{r^3}{3}-\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\right)d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}\sin 2\theta - \frac{1}{30}\right)d\theta = \left(-\frac{1}{10}\frac{\cos 2\theta}{2}-\frac{\theta}{15}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{15}.$$

4. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_P x^2 dxdydz$, если кубируемый компакт P ограничен сферой $x^2+y^2+z^2=2z$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $I=\frac{4}{15}\pi$).

5. С помощью тройного интеграла найти объём тела P, ограниченного параболическими цилиндрами $y=3x^2$, $y^2=9z$ и плоскостями $y=3$, $z=0$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** об$P=\frac{12}{7}$).

6. Найти объём тела P, ограниченного трёхосным эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a;b;c>0)$. (М.: c = 1,5 см, b = 2 см, a = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см). (**Ответ:** об$P=\frac{4}{3}\pi abc$).

Упражнения.

1. Вычислить следующие тройные интегралы:

а) $I = \iiint\limits_P xy^2z^3 dxdydz$, где P – кубируемый компакт, ограниченный поверхностью $z=xy$ и плоскостями $y=x$, $x=1$, $z=0$. (**Ответ:** $I=\frac{1}{364}$).

б) $I = \iiint\limits_P \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где P – кубируемый компакт, ограниченный плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$. (**Ответ:** $I=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$).

в) $I = \iiint\limits_P xyzdxdydz$, где P – кубируемый компакт, лежащий в 1-ом октанте, ограниченный единичной сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$. (**Ответ:** $I=\frac{1}{48}$).

2. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл $I = \iiint\limits_P \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где P – кубируемый компакт, ограниченный поверхностью $x^2+y^2=2z$ и плоскостью $z=2$. (**Ответ:** $I=\dfrac{16\pi}{3}$).

3. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл $I=\iiint\limits_P \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где $P-$ кубируемый компакт, ограниченный поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$. (**Ответ:** $I=\dfrac{\pi}{10}$).

4. Найти объём тела P, ограниченного следующими поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$. (**Ответ:** об$P=\dfrac{3}{35}$).

б) $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. (**Ответ:** об$P=\dfrac{7}{24}$).

в) $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$. (**Ответ:** об$P=\dfrac{\pi a^3}{6}$).

г) $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$. (**Ответ:** об$P=\dfrac{32}{3}\pi$).

д) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\ge 0)$ $(0<a<b)$. (**Ответ:** об$P=\dfrac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)$).

Тема 78. Криволинейный интеграл. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая $\gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(a\le t\le b)$, на которой определена пара функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, $\dot{\tau}=(\tau,\alpha_\tau)-$ отмеченное разбиение отрезка $[a;b]$ $\left(\tau=\{a=t_0<t_1<...<t_n=b\}\right)$, $\alpha_\tau=\left\{N_k(x_k;y_k),k=\overline{1,n}\right\}-$ выборка точек кривой γ, подчиненная разбиению τ, d_τ – диаметр этого разбиения и $\Delta x_k=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})$, $\Delta y_k=\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{d_\tau\to 0}\sigma_{\dot{\tau}}(P,Q)$, где $\sigma_{\dot{\tau}}(P,Q)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(P(x_k;y_k)\Delta x_k+Q(x_k;y_k)\Delta y_k\right)$, то этот предел называется *криволинейным интегралом* (*2-го рода*) от пары функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$ по (вдоль) кривой γ и обозначается $\int\limits_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Важными свойствами криволинейного интеграла являются аддитивность, ориентированность, а также, в случае контура (замкнутой кривой), – независимость от начала пути интегрирования.

Теорема 1 (достаточные условия существования криволинейного интеграла). *Если кривая* $\gamma:\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(a\le t\le b)$ *гладкая, т.е. её компоненты параметризации* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *– непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a;b]$, *а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны на кривой* γ, *то имеет место формула*

$$\int\limits_{\gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)dt.$$

Следствие (криволинейный интеграл по графику непрерывно дифференцируемой функции). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a;b]$, *а функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны на графике* G_f *функции* $f(x)$. *Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{G_f}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\Big(P\big(x,f(x)\big)+Q\big(x,f(x)\big)f'(x)\Big)dx.$$

Теорема 2. *Пусть в односвязной области* D *определены и непрерывны функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *вместе со своими частными производными* $P'_y(x,y)$ *и* $Q'_x(x,y)$ *и* γ *– произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в этой области. Криволинейный интеграл* $\int\limits_{\gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *не зависит от формы кривой* γ *тогда и только тогда, когда всюду в* D *имеет место равенство* $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$.

В частности, если в теореме 2 кривая γ является контуром, то криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ равен нулю.

<u>Задачи.</u>

1. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}\cos\left(x+\sqrt{y}\right)dx+e^{y}dy$, где $\gamma-$ дуга параболы от точки $O(0;0)$ до точки $M(1;1)$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ**: $I=e-1+\dfrac{\sin 2}{2}$).

2. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}y^2dx+x^2dy$, где $\gamma-$ «верхний» $(y \ge 0)$ полуэллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, пробегаемый справа налево. (М.: 1 = 1 см). (**Ответ**: $I=-16$).

3. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где $\gamma-$ окружность с центром в точке $M(1;1)$ радиуса 2, пробегаемая в положительном направлении. (М.: 1 = 1,5 см). (**Ответ**: $I=8\pi$).

4. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}\left(3x^2+y\right)dx+\left(x-2y^2\right)dy$, где $\gamma-$ треугольник с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$. (М.: 1 = 3 см). (**Ответ**: $I=0$).

5. Показать, что криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}(x+y)dx+(x-y)dy$ не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его по кривой γ с началом в точке $A(0;1)$ и концом в точке $B(2;3)$. (**Ответ**: $I=4$).

6. Показать, что в полуплоскости $D=\{y<x\}$ криволинейный интеграл $I=\int\limits_{\gamma}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ не зависит от формы пути интегрирования и вычислить его по кривой γ с началом в точке $A(0;-1)$ и концом в точке $B(1;0)$.

Решение: Имеем $P(x,y)=-\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{(x-y)^2}-$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области $D=\{y<x\}$, которой принадлежат точки $A(0;-1)$, $B(1;0)$ и $P_y'=Q_x'=-\frac{x+y}{(x-y)^3}$ всюду в D. Следовательно, по теореме 2 криволинейный интеграл I не зависит от формы пути интегрирования, если кривая интегрирования γ не пересекает прямую $y=x$, т.е. расположена в полуплоскости $y<x$.

Выберем в качестве пути интегрирования двухзвенную ломаную ACB, где точка C имеет координаты $(1;-1)$, т.е. $\gamma=[AC]\cup[CB]$. Тогда

$$I=\int\limits_{[AC]}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}+\int\limits_{[BC]}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\limits_{-1}^0\frac{dy}{(1-y)^2}=-\frac{1}{x+1}\bigg|_0^1-\frac{1}{y-1}\bigg|_{-1}^0=1.$$

Упражнения.

1. Вычислить следующие криволинейные интегралы, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

а) $\int\limits_{\gamma}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, где $\gamma-$ парабола $y=x^2$ $\left(x\in[-1;1]\right)$. (**Ответ:** $-\dfrac{14}{15}$).

б) $\int\limits_{\gamma}\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где $\gamma-$ кривая $y=1-|1-x|$ $\left(x\in[0;2]\right)$. (**Ответ:** $\dfrac{4}{3}$).

в) $\int\limits_{\gamma}(2a-y)dx+xdy$, где $\gamma-$ арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$. (**Ответ:** $-2\pi a^2$).

г) $\int\limits_{\gamma}\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, где $\gamma-$ окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки. (**Ответ:** -2π).

2. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma}(x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где $\gamma-$ треугольник с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$, пробегаемый в положительном направлении. (**Ответ:** $-46\dfrac{2}{3}$).

3. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-\left(x^2-y^2\right)}\left(\cos 2xydx+\sin 2xydy\right)$. (**Ответ:** 0).

Тема 79. Формула Грина. Вычисление площадей плоских фигур с помощью криволинейного интеграла

Определение 1. Пусть в области D определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Дифференциальная форма $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ называется *точной* в этой области, в D существует дифференцируемая функция $f(x,y)$, полный дифференциал df которой равен этой дифференциальной форме, т.е. $f'_x(x,y)=P(x,y)$ и $f'_y(x,y)=Q(x,y)$.

Теорема 1 (критерий точности дифференциальной формы). *Пусть в односвязной области D определены и непрерывны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $P'_y(x,y)$ и $Q'_x(x,y)$. Для того, чтобы дифференциальная форма $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ была* *точной в области* D*, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось равенство* $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$.

Определение 2. Пусть в области D определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и дифференциальная форма $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ точная в этой области. Всякая функция $F(x,y)$, дифференцируемая в D и такая, что $dF=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, называется *первообразной* этой дифференциальной формы в области D.

Теорема 2. *Пусть в односвязной области* D *определены и непрерывны функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *вместе со своими частными производными* $P'_y(x,y)$ *и* $Q'_x(x,y)$*, причём всюду в области* D *выполняется равенство* $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$*. Тогда совокупность всех первообразных дифференциальной формы* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *определяется по любой из следующих формул:*

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C\,,$$

$$F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C\,,$$

$$F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C\,,$$

где $(x_0;y_0)$ – любая фиксированная точка области D, $C\in\mathbb{R}$.

Теорема 3 (аналог формулы Ньютона-Лейбница). *Пусть в односвязной области* D *определены и непрерывны функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *вместе со своими частными производными* $P'_y(x,y)$ *и* $Q'_x(x,y)$*, причём всюду в этой области выполняется равенство* $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$*. Тогда для криволинейного интеграла* $\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *по любой кусочно-гладкой кривой* γ*, лежащей в* D*, с началом в точке* $(x_1;y_1)$ *и концом в точке* $(x_2;y_2)$ *имеет место формула*

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C=F(x,y)\Big|_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)}=F(x_2;y_2)-F(x_1;y_1).$$

Элементарной плоской фигурой будем называть квадрируемый компакт на координатной плоскости такой, что всякая горизонтальная и вертикальная прямые если его пересекают, то по отрезку.

Фигуру будем называть *простой*, если она представима в виде объединения конечной совокупности попарно неперекрывающихся элементарных фигур.

Теорема 4. Пусть $\Phi -$ простая фигура, граница которой $\operatorname{Fr}\Phi$ состоит из конечного множества простых непрерывных контуров, ориентированных положительно. Если на Φ определены и непрерывны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $P_y'(x,y)$ и $Q_x'(x,y)$, то имеет место формула Грина:

$$\int\limits_{\operatorname{Fr}\Phi} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{\Phi} \left(Q_x'(x,y) - P_y'(x,y)\right)dxdy .$$

Теорема 5. Если $\Phi -$ простая фигура, граница которой $\operatorname{Fr}\Phi$ состоит из конечного множества простых кусочно-гладких контуров, ориентированных положительно, то фигура Φ квадрируема и её площадь вычисляется по формулам: $\text{пл}\,\Phi = -\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} ydx - xdy = \int\limits_{\gamma} xdy = -\int\limits_{\gamma} ydx$.

<u>**Задачи.**</u>

1. Показать, что дифференциальная форма $\frac{y^2 - 2x + 3y - 2}{x+1}dx + (2y+3)\ln(x+1)dy$ точная, найти её первообразные и вычислить криволинейный интеграл I от этой формы по кривой от точки $A(1;-1)$ до точки $B(3;1)$. (**Ответ:** $F(x,y) = y(y+3)\ln(x+1) - 2x + C$, $I = 2(5\ln 2 - 2)$).

2. Показать, что дифференциальная форма $\frac{\ln(xy+x+y+1)+xy-x+y}{x+1}dx + \frac{\ln(xy+x+y+1)+xy+x}{y+1}dy$ точная, найти её первообразные и вычислить криволинейный интеграл I от этой формы по кривой от точки $A(2;1)$ до точки $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

3. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_{\gamma} xy^2dy - x^2ydx$, где $\gamma -$ окружность с центром в начале координат радиуса R. (М.: 1 = 2 см).

Решение: Для функций $P(x,y) = -x^2y$, $Q(x,y) = xy^2$ и кривой γ теоремы 4, причём $P_y' = -x^2$, $Q_x' = y^2$. Следовательно, по формуле Грина $I = \iint\limits_{\Phi} \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$, где $\Phi = \left\{x^2 + y^2 \le R^2\right\}$ – замкнутый круг, ограниченный окружностью γ. Для вычисления полученного двойного интеграла перейдём к полярным координатам: $A^{-1}: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, где $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Тогда $\left|J_{A^{-1}}\right| = r$ и $I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R r^2 r\,dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R \right) d\theta = \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2} R^4$.

4. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} \left(e^x \sin y - y\right) dx + \left(e^x \cos y - 1\right) dy$, где γ – «верхняя» полуокружность $x^2 + y^2 = x$, пробегаемая справа налево. (**Ответ:** $I = \frac{\pi}{8}$).

5. Найти площадь фигуры, содержащей начало координат и ограниченной параболами $y = x^2$, $x = y^2$ и гиперболой $8xy = 1$. (М.: 1 = 4 см). (**Ответ:** $\text{пл}\,\Phi = \frac{1 + 3\ln 2}{24}$).

6. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$. (М.: 1 = 2 см). (**Ответ:** $\text{пл}\,\Phi = \frac{3}{8}\pi a^2$).

Упражнения.

1. Вычислить следующие криволинейные интегралы, предварительно показывая их независимость от формы пути интегрирования:

а) $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x - y)(dx - dy)$. (**Ответ:** -2).

б) $\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих ось Oy. (**Ответ:** $-\frac{3}{2}$).

в) $\int\limits_{(1;0)}^{(6;8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль путей, не охватывающих начало координат. (**Ответ:** 9).

г) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy$. (**Ответ:** 62).

2. Найти первообразную функции $f(x;y)$, если

а) $df(x;y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$. (**Ответ:** $f(x;y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$).

б) $df(x;y)=e^x\left(e^y(x-y+2)+y\right)dx+e^x\left(e^y(x-y)+1\right)dy$.

(**Ответ:** $f(x;y)=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$).

3. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а) параболой $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$ и осью Ox. (**Ответ:** $\dfrac{a^2}{6}$).

б) лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$. (**Ответ:** a^2).

Тема 80. Физические приложения кратных и криволинейных интегралов

Масса пластины D с плотностью $\rho(x,y)$, расположенной в плоскости Oxy, вычисляется по формуле $M=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy$.

Координаты центра масс пластины D с плотностью $\rho(x,y)$, расположенной в плоскости Oxy, вычисляются по формулам

$$x_0=\frac{\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy},\quad y_0=\frac{\iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}.$$

Моменты инерции пластины D с плотностью $\rho(x,y)$, расположенной в плоскости Oxy, вычисляются по формулам:

а) *относительно координатных осей*

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy;$$

б) *относительно начала координат*

$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Масса тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$, расположенного в пространстве $Oxyz$, вычисляется по формуле $M=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Координаты центра масс тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$, расположенного в пространстве $Oxyz$, вычисляются по формулам

$$x_0=\frac{\iiint\limits_V x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\quad y_0=\frac{\iiint\limits_V y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$z_0=\frac{\iiint\limits_V z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Моменты инерции тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$, расположенного в пространстве $Oxyz$, вычисляются по формулам:

а) *относительно осей координат*

$$I_x=\iiint\limits_V\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad I_y=\iiint\limits_V\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

б) *относительно координатных плоскостей*

$$I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\quad I_{zx}=\iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xy}=\iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

в) *относительно начала координат*

$$I_0=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Работа силового поля $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки единичной массы из точки A в точку B вдоль кривой AB вычисляется по формуле $\int\limits_{AB}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

<u>Задачи</u>.

1. Найти массу квадратной пластины со стороной 6 см, если плотность материала прямо пропорциональна квадрату расстояния до центра пластины и в углах равна 1 г/см^2.

Решение: Пусть центр пластины совпадает с началом координат, а ее стороны параллельны осям координат. Тогда плотность материала пластины в точке $P(x,y)$ будет равна $\rho(x,y)=k|OP|^2=k\left(x^2+y^2\right)$, где k – коэффициент пропорциональности, который найдём из условия, что плотность материала пластины в точке с координатами $(3;3)$ равна 1:

$\rho(3,3)=k\left(3^2+3^2\right)=1$, откуда $k=\dfrac{1}{18}$. Таким образом, имеем $\rho(x,y)=\dfrac{1}{18}\left(x^2+y^2\right)$. Тогда масса пластины равна $\iint\limits_{D}\dfrac{1}{18}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\dfrac{4}{18}\iint\limits_{D'}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$, где D' – часть пластины, расположенная в первой координатной четверти.

Далее, $\dfrac{4}{18}\iint\limits_{D'}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\dfrac{2}{9}\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^3\left(x^2+y^2\right)dx=\dfrac{2}{9}\int\limits_0^3\left(\dfrac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^3 dy=$

$=\dfrac{2}{9}\int\limits_0^3\left(9+3y^2\right)dy=\dfrac{2}{9}\left(9y+3\dfrac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=12(\text{г})$.

2. Найти координаты центра масс наименьшего эллиптического сегмента с равномерной плотностью, ограниченного эллипсом $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ и прямой $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$ (**Ответ:** $\left(\dfrac{10}{3(\pi-2)};\dfrac{2}{\pi-2}\right)$).

3. Найти момент инерции однородного круга радиуса R с плотностью $\rho=1$ относительно точки, лежащей на его границе (**Ответ:** $\dfrac{3}{2}\pi R^4$).

4. Найти массу шара радиуса 3, плотность которого прямо пропорциональна расстоянию до центра шара и на расстоянии 1 от центра равна 1 (**Ответ:** 81π).

5. Найти координаты центра тяжести прямой призмы, ограниченной плоскостями $x=0$, $z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$, сделанной из однородного материала (**Ответ:** $\left(1;\,2;\,\dfrac{1}{2}\right)$).

6. Найти момент инерции относительно плоскости Oxy полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ с плотностью $\rho=kz$ $(k>0)$ (**Ответ:** $\dfrac{2}{3}\pi ka^4$).

7. В каждой точке плоского силового поля сила имеет направление, противоположное положительному направлению оси ординат и равна по величине квадрату абсциссы этой точки. Найти работу силового поля при перемещении материальной точки единичной массы вдоль параболы $y=1-x^2$ от точки $(0;1)$ до точки $(1;0)$ (**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$).

Упражнения.

1. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата. (**Ответ:** $\frac{\rho_0 a^2}{3}\left(2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$).

2. Найти координаты центра масс однородных пластинок, ограниченной кривыми: **а)** $y=x^2$, $x+y=2$; **б)** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, $x=0$, $y=0$. (**Ответ: а)** $\left(-\frac{1}{2};\frac{8}{5}\right)$; **б)** $\left(\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right)$).

3. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy площадей ($\rho=1$), ограниченных кривыми: **а)** $\frac{x}{2}+y=1$, $\frac{x}{3}+y=1$, $y=0$; **б)** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $x=0$, $y=0$. (**Ответ: а)** $I_x=\frac{1}{12}$, $I_y=\frac{19}{12}$**; б)** $I_x=I_y=16-5\pi$).

4. Найти координаты центра масс однородных тел, ограниченных поверхностями: **а)** $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$; **б)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. (**Ответ: а)** $\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5};\frac{7}{30}\right)$; **б)** $\left(\frac{9}{8};\frac{3}{4};\frac{1}{6}\right)$).

5. Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела, ограниченного поверхностями $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. (**Ответ:** $I_{xy}=\frac{1}{10}$, $I_{yz}=\frac{9}{10}$, $I_{zx}=\frac{2}{5}$).

6. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $y\ge 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0,0)$? (**Ответ:** проекции силы на оси координат: $F_x=0$, $F_y=\frac{2GmM}{\pi a^2}$, где G – гравитационная постоянная).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Физматлит, 1985.
2. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматлит, 2000.
3. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смолянский М.Л., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа, ч.1,2. – М.: Просвещение, 1971.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, кн.1,2. – М.: Дрофа, 2001.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1997.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, т.1-3. – М.: Физматлит, 2003.
9. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. – М.: Наука, 1970.
10. Мордкович А.Г., Мухин А.Е. Сборник задач по введению в анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной. – М.: Просвещение, 1985.
11. Практические занятия по математическому анализу (коллектив авторов), ч.1-3. – М.: Прометей, 1985-1988.
12. Брайчев Г.Г., Колягин С.Ю., Топунов М.В. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. – М.: изд-во МПГУ, 2002.
13. Колягин С.Ю., Быкова О.Н. Практические занятия по математическому анализу. Ч. I. – М.: изд-во МПГУ, 2009.
14. Быкова О.Н., Колягин С.Ю., Кукушкин Б.Н. Практические занятия по математическому анализу. Ч. II. – М.: изд-во МПГУ, 2011.

О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования
МПГУ
117571 Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446
Тел.: (499) 730-38-61
E-mail: izdat.innov@mpgu.edu

Издательство «Прометей»
129164 Москва, ул. Кибальчича, д. 6, стр. 2

Выполнено при техническом содействии
ИП Заика А.А.

Подписано в печать 19.09.2011 г.
Формат 60x90/16. Объём 17,1875 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 166.