Б. Л. Яшин

МАТЕМАТИКА В КОНТЕКСТЕ ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМ

Учебное пособие

Издательство Прометей

Б. Л. Яшин

МАТЕМАТИКА В КОНТЕКСТЕ ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

Москва-2012

УДК 510.21
ББК 22.12в
Я589

Рецензенты: проф. каф. философ., д-р философ. наук, В. Н. Князев;
доц. каф. естеств. дисциплин и методики их преподавания в начальной школе МПГУ, канд. физ.-мат. наук, В. В. Тимошенко.

Я589 **Яшин Б. Л. Математика в контексте философских проблем**: Учебное пособие. М.: МПГУ, 2012. – 110 с.

Учебное пособие посвящено проблемам философии и методологии математики. В нем на материале истории математики рассматриваются проблемы становления философии математики, анализируются различные подходы к пониманию математики и ее развития, соотношение в математике рационального и иррационального, а также специфика математического познания, связанная с предметом, объектами и методами этой науки и пониманием в ней истины. В пособии выделен специальный раздел, в котором раскрывается взаимосвязь математики с философией, гуманитарной наукой и искусством, значимость для любого вида творчества своеобразной «диффузии» интеллектуального и чувственного, научного (математического) и художественного знания.

Книга представляет интерес для аспирантов и магистрантов, занимающихся проблемами математики, философии и методологии науки, преподавателей и студентов, для всех кого привлекают современные философские проблемы научного познания.

ISBN 978-5-4263-0111-5

Оглавление

Введение

В общей системе наук математика стоит на особом месте. Она не «вписывается» в дихотомию привычного устоявшегося противопоставления естественнонаучного и гуманитарного знания, так как ее методы, ее принципы и ее теории в той или иной мере используются во всех областях научного познания и практической деятельности человека. Широкое проникновение математики в другие науки и в практику во многом обусловлено необходимостью использования ее методов для описания, объяснения или интерпретации результатов познавательной деятельности, а также предметов и явлений действительности, без чего было бы в значительной мере затруднено их глубокое понимание и эффективное освоение. Более того, без разработки и использования математических средств сегодня было бы невозможно не только развитие научного знания во всей его совокупности, но и освоение космоса, и создание электронно-вычислительных машин и многое другое.

С другой стороны, сама математика оказывается под воздействием гуманитарных тенденций в науке и технике, все более рельефно проявляющихся в последнее время. Математики-профессионалы и историки математики, а также методологи науки все чаще говорят, что при изучении математики и связанных с ней проблем следует считаться с тем, что она представляет собой элемент системы, называемой культурой. Что математика, представляющая собой мир высоких абстракций, в котором царствует рассудочный принцип формальной непротиворечивости, тем не менее, глубоко погружена в общекультурный контекст деятельности человека.

Уже только эти два фактора позволяют говорить о необходимости тщательного философского анализа феномена математики. И развитие математики и философии показывает, что к проблемам такого анализа обращались многие выдающиеся ученые и философы с древнейших времен и до наших дней.

Глава I. Философия математики как отрасль знания

§ 1. Философия математики: основные подходы и проблемы

Философия математики как отдельная ветвь философии, а точнее – философии науки, зарождается на рубеже XIX–XX вв.[1] Ее возникновение было связано с необходимостью разрешения разразившегося в этот период в математике глубочайшего кризиса, обусловленного обнаружением в ее основаниях парадоксов, что ставило под угрозу все «здание» математической науки. Попытки разрешения этого кризиса привели к созданию таких грандиозных философских программ как *логицизм, интуиционизм* и *формализм*. К 1960-м гг. оказалось очевидным, что цели, которые ставили разработчики этих программ, не достигнуты, да и вряд ли вообще могут быть достигнутыми. И хотя, по мнению многих ученых и философов, активность этих школ принесла огромное число важных результатов и открытий, которые углубили наше знание математики и ее отношения к логике, современное понимание математики не стало ближе к полному ее пониманию, чем у основателей названных программ[2].

В философии математики с момента ее рождения и до наших дней обнаруживаются весьма различные по своим подходам взгляды на математику и соответствующие им программы ее перестройки. Кроме уже названных выше, здесь можно выделить *логический позитивизм, модализм, платонизм, холизм, эмпиризм* и *квазиэмпирический реализм*, а также *номинализм, структурализм, натурализм* и *предикативный конструктивизм*, о которых говорят в своих работах, например, Х. Патнэм и Дж. Кетланд[3].

Кратко каждое из названных направлений современной философии математики (подробнее наиболее значимые из них будут рассмотрены ниже) можно представить следующим образом.

С точки зрения **логицизма**, математика – это ветвь всеобщей логики, это логика в чужом одеянии (Рассел, Уайтхед, Фреге, Пирс, Шредер и другие).

Формализм представляет теорию множеств и неконструктивную математику как «идеальное» расширение «реальной», то есть конечной и комбинаторной, математики (Гильберт, Бернайс, Аккерман, Генцен и другие).

Интуиционизм полагает возможным принимать математические утверждения в качестве значимых, но отказывается от реалистических посылок относительно истин, например, ее двузначности (Кронекер, Пуанкаре, Брауэр, Гейтинг, Вейль и другие).

В рамках **логического позитивизма** считается, что математические истины являются таковыми благодаря правилам языка (Рассел, ранний Витгенштейн и другие).

Модализм сводит классическую математику к совокупности утверждений о возможности или невозможности каких-либо определенных структур, заменяя ими разговоры о множествах, числах и других математических объектах.

Платонизм утверждает реальное существование математических объектов и способность человеческого ума, отличающуюся в определенной мере от

---

[1] См., например: В. А. Светлов. Философия математики. – М., 2006.

[2] См., например: A. Mostowski. Thirty years of foundational studies // Acta Filosophica Fennica, 1963.

[3] См. : В. В. Целищев. Перспективы исследований в философии математики. URL: http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/5_99/05_tselichev.htm (дата обращения: 26.02.2012).

восприятия, которая продуцирует все наилучшие интуиции о поведении этих объектов (Гедель, и другие).

Холизм рассматривает математику не как отдельную самостоятельную отрасль научного знания, а как часть всей науки и считает необходимость квантификации над математическими объектами в случае достаточно богатого языка для эмпирических наук наилучшим свидетельством для постулирования множеств (Куайн и другие).

Математический эмпиризм в крайнем его выражении стремился свести все теоретические знания к высказываниям о чувственном. Математика для представителей этого направления в философии по сути была такой же наукой, как физика, химия, астрономия и другие эмпирические науки. Поэтому они и пытались в истории развития математического знания обнаружить основания для подтверждения своей точки зрения. Наиболее отчетливо идеи эмпиризма по отношению к математике были выражены в работах Дж. Ст. Милля.

Представление, о том, что математики рассуждают не о реальных предметах, а о знаках, есть, по мнению Милля «… иллюзия, появившаяся вследствие того, что когда математик пользуется своими знаками, он вправду не думает о тех вещах, которые эти знаки обозначают. Но это происходит потому, что истины арифметики справедливы относительно всех вещей и не возбуждают в нашем сознании никаких идей о тех либо других вещах в частности»[1].

Такой взгляд на математику с сегодняшней высоты науки, естественно, кажется наивным и ограниченным. Именно поэтому в философии науки он уступил точке зрения, которую называют **умеренным эмпиризмом**, под влиянием которого совершены многие математические открытия.

«Умеренный эмпиризм, пишет, например, В. А. Бажанов, подразумевает, что опыт, основные составляющие которого предопределяются концептуальным багажом субъекта познания, играет важнейшую роль в формировании знания и часто оказывает решающее (в том числе эвристическое) влияние на развитие теоретических представлений субъекта познания»[2].

В подтверждение этих слов В. А. Бажанов приводит следующие факты из истории математики: открытия «воображаемой геометрии» (Н. Лобачевский) и «воображаемой логики» (Н. Васильев). Оба автора были сторонниками умеренного эмпиризма и оба в своих работах (первый – по геометрии, второй – по логике), во многом опирались на идеи этой философской концепции.

Н. Лобачевский, например, считал, что первичными данными, на которые мы опираемся в науке, являются данные, которые приобретаются с помощью чувственного опыта, а геометрические зависимости ничем не отличаются от зависимостей физических.

Н. Васильев, который был автором одной из первых систем многозначных логик и родоначальником идеи паранепротиворечивых логик, тоже был сторонником умеренного эмпиризма. В своих работах по логике, например, «он прямо связывал новые формальные системы с устройством воображаемых миров», в которых живущие там существа «обладают иными, в отличие от земных, “ощущательными” способностями, которые, собственно и диктуют необходимость принять новую логику»[3].

---

[1] Дж. Ст. Милль. Система логики силлогистической и индуктивной. – М.,1914. – С. 561.

[2] В. А. Бажанов. Умеренный априоризм и эмпиризм в эвристическом контексте. Исторический контекст // Математика и опыт. – М., 2003. – С. 95–106.

[3] Там же.

Квазиэмпирический реализм (или просто квазиэмпиризм) полагает, что в теоретических построениях «чистой математики» есть нечто аналогичное эмпирическому исследованию. В ней не только доказываются теоремы, но и высказываются и проверяются гипотезы (Х. Патнем), а, значит, можно сказать, что она, как и физика, развивается гипотетико-дедуктивным способом[1].

Номинализм в математике проявляется в попытке исключения из ее теорий абстрактных терминов (Генкин, Гудмен, Котарбиньский, Куайн, Лешневский, Тарский, Филд и другие). Целью программы номинализма является построение внепарадоксальной математики на основе формализованных языков, в системе которых и реализуется изъятие абстракций. При этом сами эти абстракции заменяются их языковыми моделями, что позволяет выйти в сферу внелогической проблематики, касающейся фундаментальных философских вопросов о механизмах функционирования символов математики в качестве языка и соотношении между языком и объектами мира[2].

Современный номинализм в математике нередко называют ***фикционализмом,*** по-видимому, в силу того, что его сторонники исходят из следующих базовых утверждений:

1. Все математические предложения и теории говорят об абстрактных математических объектах;
2. Такие объекты не существуют.

Следовательно, математические теории нельзя считать истинными[3].

Структурализм в математике – это, прежде всего, взгляд на эту отрасль знания через призму структуры, под которой понимается множество элементов, определяемых такими отношениями, которые дают возможность вывести все реляционные свойства элементов в случае, если даны операциональные правила, позволяющие преобразовывать доминирующие отношения (Бурбаки, и другие). В этом случае внимание акцентируется на том, что объектами математики являются абстрактные структуры, и рассматриваются собственно математические проблемы, возникающие как следствие принятого теоретико-множественного подхода. Вопросы же философского характера остаются на периферии исследований[4].

В отличие от группы Н. Бурбаки, сторонники структурализма в математике Шапиро и Резник, например, разрабатывают алгебраический подход. Они убеждены в том, что вопреки традиционной точке зрения, согласно которой алгебра – это обобщение всего неалгебраического, на самом деле все наоборот. Иными словами, все, что есть в математике можно свести к алгебраическим структурам[5].

Натурализм понимает математику как «идеализированную науку о человеческих операциях», в которой все проблемы должны решаться математиками как математиками, иначе говоря, математика никоим образом не должна быть связана с традиционными философскими исследованиями. Иными словами, натурализм «отрицает значение философии для математики и ее оснований, а, стало быть, по существу значение и само существование философии математики (Дж. Бургесс, П. Мэдди, Ф. Китчер). В самой матема-

---

[1] См., например: В. А. Бажанов. Стандартные и нестандартные подходы в философии математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Изд. С. А. Савин, 2007. – С. 10.

[2] Новейший философский словарь. Минск. 2003; URL: http://www.gumer.info/bogoslov_Buks/Philos/fil_dict/530.php (дата обращения: 6.02.2012).

[3] В. А. Канке Философия математики, физики, химии, биологии. – М., 2011. – С. 70–74.

[4] Н. Бурбаки. Архитектура математики // Очерки по истории математики. – М.,1963.

[5] См., например: Shapiro S. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology: Oxford: Oxford University Press, 1997 ; Resnik M. 1997. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press. 1997.

тике есть все средства, которые необходимы для интерпретации или реконструкции математического знания»[1].

Интенсивно развивающий это направление Ф. Китчер пишет в статье «Математический натурализм»: «Я всегда утверждал, что … проблема может быть разрешена, если мы будем понимать математику как идеализированную науку о человеческих операциях. Предмет математики в конечном итоге – способ, которым человеческое существо структурирует мир путем или операций грубых, физических, или операций мысленных». И далее он утверждает, что «математику следует понять как совокупность отчетов о деятельности идеального субъекта, которому мы приписываем особые возможности структурировать окружающий нас мир»[2].

В рамках **предикативного и социального конструктивизма** (Ч. Феферман, Т. Тимошко, Р. Херш, П. Эрнест и другие) математика представляется как эмпирическая наука, как продукт социальной деятельности, культуры, «качество» которого определяется уровнем социального конструирования и во многом зависят от характера трансформаций, происходящих в процессе общественного развития.

Вот, например, основные идеи, на которые опирается в своей философии математики П. Эрнест.

– Знание – социальный конструкт;

– Знание – компонента эмпирической организации человеком своего мира и должно соответствовать физической и социальной реальности;

– Соответствие теории объективной реальности – результат научной практики, в процессе которой создаются образцы, нормы и правила применения языка;

– Вместе с языком как теория форм и практик и возникает математика[3].

В современной философии и методологии науки математический конструктивизм иногда рассматривают как одну из первых конструктивистских концепций в эпистемологии двадцатого века. Очевидно, что в этом случае мы уже выходим за рамки собственно математического знания и сталкиваемся со множеством вопросов, имеющих далеко не очевидные ответы. Более того, даже, казалось бы, очевидные ответы «тянут» за собой нередко целый шлейф новых вопросов.

Каков *механизм конструирования* объектов сознания, и из каких *базовых* элементов (атомов) конструируются сложные объекты?

Почему идеальные конструкции ума *обладают свойством соответствовать* реальным физическим объектам?

Что общего между мысленным конструированием – идеализацией, моделированием, мысленным экспериментом – как методом в математике, физике, в науке в целом и «конструированием» в эпистемологическом конструктивизме?

Несомненно, что можно согласиться с тем, что конструирование идеализированных (мысленных) объектов в науке возможно и необходимо. Естественно, что современная математика, например, без этой операции просто невозможна.

Вместе с тем, возникает и вопрос, о каком *конструировании* идет речь? О конструировании *идеальных* (идеализированных) объектов или же о конст-

---

[1] В. А. Бажанов. Стандартные и нестандартные подходы в философии математики. – С. 10.

[2] Ф. Китчер. Математический натурализм // Методологический анализ оснований математики. – М., 1988, – С. 24.

[3] См. : В. А. Канке. Философия математики, физики, химии, биологии. – С. 79.

руировании объектов *физически реальных*, чувственно воспринимаемых или, по крайней мере, *о возможности осуществления* такого рода конструирования?

Что же означает для математики принятие позиции социального или, тем более, радикального конструктивизма?

Самое главное, по-видимому, состоит в следующем. Из утверждения социальных конструктивистов о том, что знание (в том числе и математическое) есть социальный конструкт, вытекает следствие, что «объяснить, почему в математике принимаются именно такие, а не другие утверждения и теории невозможно ни апелляцией к особой идеальной реальности, ни ссылкой на всеобщие априорные структуры, присущие трансцендентальному субъекту». Развитие математики не предопределено ни тем, ни другим, а зависит от культурных и социальных факторов[1].

Но следует ли из этого неизбежность признания правоты социальных конструктивистов относительно того, что система математического и научного знания в целом является социальным конструктом? Отнюдь.

С моей точки зрения, это достаточно обоснованно в одной из своих работ подтверждает З. А. Сокулер. Во-первых, она показывает, что «утверждение социального конструктивизма не подразумевает, будто знание есть *произвольный* (выделено автором – Б. Я.) конструкт». А во-вторых, – что социальный конструктивизм указывает на ограниченность аподиктических очевидностей (в частности, теоремы Пифагора) и априорных предрасположенностей. «Из признания, что человеческий интеллект оснащен двумя указанными Кантом априорными формами, – пишет З. А. Сокулер, – и из допущения, что данные формы являются продуктом эволюции, еще не следует ни того, что они достаточны для развития математики, ни того, что они предназначены, чтобы успешно работать вместе»[2].

И хотя это действительно так, нельзя не согласиться и с тем, что социальный конструктивизм, а тем более такая его форма как радикальный конструктивизм, весьма остро и акцентировано ставит перед эпистемологами вопросы хорошо известного спора между реалистами и антиреалистами. Сегодня уже совершенно очевидно, что этот спор имеет непосредственное отношение к фундаментальным основаниям научного знания. «В математике, например, от того или иного решения проблемы существования ее объектов, – пишет В. А. Лекторский, – в контексте платоновского реализма, формализма, или конструктивизма, зависит не только истолкование, но и принятие той или иной ее части»[3].

Поэтому каждый шаг на пути поиска ответов на эти вопросы следует приветствовать, хотя бы потому, что эти поиски рождают новые мысли, новые идеи.

Еще одним достаточно новым и неординарным подходом к математике является **контекстуализм**. Представители этого направления полагают, что математические реалии следует изучать в самой тесной связи с существующими математическими представлениями. А кроме того уделять пристальное внимание тому, как понимается и бытует математика в разных националь-

---

[1] З. А. Сокулер. Является ли теорема Пифагора социальным конструктом? // Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Второй международной научной конференции. 28–30 мая 2009 г. – М., 2009. – С. 49.

[2] Там же. – С. 50–51.

[3] См. : В. А. Лекторский. Реализм, анти-реализм, конструктивизм и конструктивный реализм в современной эпистемологии и науке . [Электронный ресурс] : Интеллектуальная Россия. URL : http://www.intelros.ru/intelros/reiting/reyting_09/material_sofiy/6141-realizm-anti-realizm-konstruktivizm-i-konstruktivnyj-realizm-v-sovremennoj-yepistemologii-i-nauke.html (дата обращения: 3. 03. 2012).

ных культурах. Иными словами, речь здесь идет об особого рода математике, которую называют «этноматематикой». Одним из лучших экспертов в области «этноматематики», по праву считается профессор колледжа Итака (Нью-Йорк) Марсия Ашер. В своей книге она показывает, что «примитивные» культуры являются иногда носителями существенно более сложных математических представлений, чем до сих пор было принято считать. Сторонники идей «этноматематики» надеются, что исследование истории математики различных самобытных культур является необходимым условием обнаружения иных, нежели европейский, цивилизационных путей развития, и осознания, и иных степеней вариативности человеческого мышления[1].

К перечисленным направлениям, существующим в современной философии математики, можно добавить еще *концепцию «физиологического» истолкования математики, «нейрофизиологический» подход и негёделевскую философию математики,* подходы, которые по своему духу близки дискурс-анализу или основаны на анализе эстетических особенностей математических процедур, позволяющих предпочитать одни доказательства другим в силу их большей изящности[2].

Концепция физиологического истолковании математики (Дж. Лакофф, Р. Нюньез, М. Джонсон, К. Девлин) представляет математику и ее объекты конструкциями человеческого мозга, «органичным продуктом развития средств человеческого познания», который физиологически (даже на уровне структур мозга) предопределен и «вытекает из опыта пересчета дискретных объектов»[3].

Нейрофизиологический подход (например, В. Н. Тростников) «исходит из некоторого рода корреляции математических структур и операций с теми нейрофизиологическими особенностями, которые отличают человеческий мозг, органы зрения и / или элементы так называемого перцептивного пространства»[4].

Негёделевская философия математики, перспектива оформления которой возникает в связи с возникновением паранепротиворечивой математики, характеризуется тем, что в ней «на передний план выходят понятия тривиализуемости и полноты. Принцип непротиворечивости здесь уступает место принципу невыводимости из посторонних посылок»[5].

Необходимо сказать и о так называемой «герменевтической альтернативе» платонизму в математике, согласно которой «математика сама должна быть понята как *формальная герменевтика*»[6].

Все существующие в современной философии математики подходы В. А. Бажанов считает возможным объединить в две группы, первая из которых представляет традиционные, *стандартные* подходы, а вторая – нетрадиционные, *нестандартные* подходы к математике. Последние характеризуются тем, что «предлагают оригинальные и существенно новые ракурсы рассмотрения, которые позволяют высветить ранее незамеченные механизмы

---

[1] Айме, Марко. Сверимся по кольчатым червям. Марсия Ашер. Этноматематика. – Из-во «Боллати Борингиери», 2007. – 235 с. [Электронный ресурс] : Русский журнал. URL: http://www.russ.ru/Kniga-nedeli/Sverimsya-po-kol-chatym-chervyam (дата обращения: 26.02.2012).

[2] В. А. Бажанов. Стандартные и нестандартные подходы в философии математики. – С. 10.

[3] Там же.

[4] Там же.

[5] Там же.

[6] См. об этом: А. Г. Черняков. Математика как формальная онтология // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Из-во С. А. Савин, 2007. – С. 88.

развития математического знания, математических методов и закономерностей этой науки»[1].

В первую группу он включает платонизм (реализм), интуиционизм, логицизм, формализм, конструктивизм, финитизм и эмпиризм, а во вторую – все остальные.

Сегодня в философии математики говорят и о так называемой *гуманистической математике*. Суть этого весьма радикального подхода выражается в стремлении отделить философию от математики на том основании, что будто бы все, что есть в математике, – это деятельность работающих математиков, и поиски философов по поводу того, что такое математика, не имеют отношения к деятельности математиков.

Так называемую «гуманистическую математику» необходимо отличать от «гуманистического поворота» в философии математики, связанного с общей тенденцией в современной философии науки, проявляющейся в обязательном учете влияния социальных факторов на развитие научного знания и на его результаты.

«Гуманистический поворот» в философии математики к практической деятельности ученых, по мнению Р. Херша, находит свое выражение в том, что (1) – математика, будучи составной частью человеческой культуры, не может быть лишь описанием фрегевских абстрактных концепций и вневременной объективной реальности. Что (2) – она не является системой абсолютно истинного, непогрешимого знания: развитие математики, так же, как и любой другой науки, связано с ошибками, заблуждениями и их преодолением. Что (3) – математическое доказательство имеет различные версии, обусловленные временем, местом и многими другими обстоятельствами, а компьютерное доказательство представляет одну из таких нетрадиционных версий строгости. Что (4) – гораздо лучшим способом решения проблем выбора «во что верить в математике?» является не традиционная аристотелевская логика, а эмпирические свидетельства, числовое экспериментирование или вероятностные доказательства. Что (5) – математические объекты представляют собой специфический вид социально-культурно-исторических объектов, аналогичных литературным персонажам или религиозным концепциям[2].

Ответом на критику гуманистической математикой классической философии математики является, по мнению В. В. Целищева, *эпистемологический поворот* в философских исследованиях математики, связанный с поиском ответов на вопросы математического познания, а не на традиционные вопросы о природе математических объектов и математической истины[3].

Сказанное выше дает основания для выделения в философии математики двух основных групп вопросов, которые характеризуют, соответственно, две области философии математики. Первая включает вопросы *онтологического,* а вторая – *эпистемологического* характера.

Кроме этого в современных исследованиях по философии математики вполне возможно выделить два подхода, отличающихся тем, что при первом обращается внимание на изучение сущности математики, ее природы как таковой независимо от того конкретного состояния, в котором она находилась на каком-либо этапе исторического развития. Такой подход нередко называют *фундаменталистским.*

---

[1] В. А. Бажанов. Там же.

[2] См.: Hersh R. The fresh wind in the philosophy of mathematics. – P. 590, 591.

[3] В. В. Целищев. Поиски новой философии. 2001. URL: http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000700 / (дата обращения: 27.02.2012).

Среди отечественных философов и ученых, которые работают преимущественно в рамках фундаменталистского подхода – А. Д. Александров, Е. А. Беляев, О. И. Кедровский, А. Н. Колмогоров, Н. А. Киселева, В. Я. Перминов, Ю. А. Петров, А. Г. Рузавин, К. Ф. Самохвалов, В. А. Успенский, Н. А. Шанин, Г. Г. Шляхин и другие.

В поле зрения отечественной фундаменталистской философии математики находятся, прежде всего, следующие проблемы:

– диалектико-материалистическое понимание сущности математики и ее взаимоотношения с объективной действительностью;

– природа математического доказательства в контексте праксеологического подхода и значимость для обоснования математики теорем Геделя, результатов Тарского, Черча, Клини и других ученых в области математики и логики; идеализация, формализация и аналогия в математике;

– понятие бесконечности как математического объекта;

– конструктивизм и интуиционизм в математике, и их взаимоотношение;

– дихотомия «чистой» и «прикладной» математики.

Среди зарубежных исследователей математики, принадлежащих направлению, названного фундаменталистским, можно назвать П. Бенацераффа, коллектив Н. Бурбаки, М. Даммита, Ж. Дьедонне, У. Куайна, Ч. Парсонса, Х. Патнэма, Р. Тома и других. Они разрабатывают в основном такие ее вопросы, как:

– природа и существование математических объектов, и их обусловленность теориями, в которых эти объекты заданы;

– истинность математического знания и сущность математического доказательства;

– поиск общности математических теорий при условии их формализации с использованием средств математической логики[1].

В рамках фундаменталистского направления в философии математики со времени выделения последней в самостоятельную дисциплину, что многие ученые и философы связывают с именем Фреге, математика рассматривается как система знаний, развитие которой ставится в зависимость от того или иного понимания ее сущности. При этом переход с одного уровня развития на другой предстает как историческая необходимость, предопределяющая стремление математики к некоторому заранее заданному идеалу. Такое положение дел в определенной мере ограничивает свободу творчества математиков, опирающихся в своей деятельности на те или иные методологические установки (трактовку математических объектов, доказательства и т. п.). Тем не менее, исследования этого направления философии математики внесли значительный вклад в разработку многих важных вопросов, как внутри собственно математики, так и в ее истории. Достаточно назвать результаты, полученные в рамках логицизма, интуиционизма и формализма.

При втором подходе математика исследуется в рамках той или иной исторической данности. В этом случае обращается внимание на выявление закономерностей, обусловливающих *развитие* математического знания. При этом математика берется в социокультурном контексте, в ее взаимодействии с другими науками, техникой и различными видами практики. Этот подход в философии математики называют *нефундаменталистским*.

К работам нефундаменталистского направления можно отнести исследования В. А. Бажанова, А. Г. Барабашева, Б. В. Бирюкова, В. А. Карпунина, И. С. Кузнецовой, А. Н. Нысанбаева, М. И. Панова, З. А. Сокулер и других. Сюда же можно отнести и работы таких зарубежных исследователей как Ф. Китчер, Т. Коетсиер, И. Лакатос,

---

[1] См.*:* А. Г. Барабашев. Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования. – М., 1991. – С. 79–80.

К. Хоусон, М. Хэллет, Р. Уайлдер и других.

По сравнению со своим «оппонентом» – фундаменталистским направлением, нефундаменталистское направление в философии математики, по мнению А. Г. Барабашева, имеет следующие специфические особенности:

– здесь в центре внимания находятся проблемы функционирования математики, а проблема обнаружения независимой от развития ее неизменной сущности отодвигается на периферию;

– математика рассматривается в ее многообразных взаимосвязях с другими науками, с культурой в целом;

– в исследованиях истории математики отдается предпочтение методу индивидуализации, а не генерализации;

– исследования, ведущиеся в рамках этого направления, ближе к современному уровню разработок, как в самой математике, так и в ее истории[1].

Наряду с поиском закономерностей в развитии математического знания, для этого направления философии математики характерны также постановка и разработка вопросов, связанных с использованием в истории математики герменевтики, выяснением границ интерпретаций исторических источников, изучением роли культурно-исторической среды в развитии математики, пониманием революции и кризиса в математике и т. д. Одним из преимуществ нефундаменталистской философии математики является то, что внутри нее «происходит своеобразный конкурс исторических закономерностей развития математики, конкурс с установленными критериями исторического отбора», который, несомненно, служит прогрессу философии математики[2].

Следует отметить, что, несмотря на формальное разграничение и существенные отличия представленных подходов, их не следует противопоставлять. В рамках философии математики они являются вполне равноправными и скорее дополняющими, чем отрицающими друг друга. Каждый из них в меру своих возможностей вносит свой вклад в решение проблем математического познания, волнующих ученых и философов. Каждый из них в результате предлагает нам свой образ математики. Синтез полученных с помощью этих разных подходов образов, дает возможность сформировать целостное представление о математике как развивающейся системе научного знания, ее месте в культуре и ее предназначении. Необходимо отметить, что перечень вопросов современной философии математики гораздо шире, чем перечисленные нами выше. Кроме того, совершенно очевидно, что развитие самой математики и такой относительно новой отрасли знания, какой является философия и методология науки, приводит к необходимости выхода за его пределы[3].

---

[1] А. Г. Барабашев. Будущее математики. – С. 87.

[2] Там же. – С. 93.

3 См., например: Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук. Под ред. В. В. Миронова. – М., 2006.

§ 2. Становление и развитие математической науки: фундаменталистский и нефундаменталистский подходы

Фундаменталистский подход вполне вписывается в контекст такого понимания развития научного познания, при котором в этом процессе выделяют «относительно стабильные (независимые от конкретных социальных условий) исторические целостности», динамика и закономерности формирования которых «в каждый данный период времени существенным и непосредственным образом детерминируют работу ученых и научно-исследовательский процесс»[1].

При этом подходе в истории развития математики различают четыре таких периода. Первый – период *зарождения математики,* начало которого теряется в глубинах человеческой истории, а завершением считают VI в. до н. э.

В этом же веке начинает свой отсчет второй период развития математической науки – период *элементарной математики,* который нередко называют периодом *постоянных величин.* Его окончанием принято считать начало XVII в. н. э.

Третий период – период *математики переменных величин* – длится с XVII в. до начала XIX в., когда, как принято считать, наступает период *современной математики*, продолжающийся и поныне[2].

Математика зарождается в силу насущной необходимости решать самые примитивные задачи обыденной жизни. Человеку надо было научиться *считать* те или иные предметы, *измерять* длину и емкость предметов, площадь земельных участков или каких-либо частей зданий и сооружений. Потребности счета приводят человека к созданию понятия «натуральное число», к выработке простейших арифметических действий с этими числами. Затем появляются дробные числа, и арифметические действия распространяются и на них.

Простейшие геометрические понятия возникают с необходимостью измерения площадей и объемов, в связи с потребностями строительства и мореплавания, в котором важную роль играла астрономия. Наибольших успехов в области начальной арифметики и геометрии добились Египет и Вавилон, где, собственно, и возникает математика.

Два известных древних папируса – папирус Райнда и московский папирус – свидетельствуют о том, что в Древнем Египте математика была основана на десятичной системе счисления, где каждой единице более высокого разряда соответствовал свой специфический знак (похожая система была принята в Древнем Риме). В задачах, которые содержат названные папирусы, речь идет о количестве хлеба и о кормлении животных, о хранении зерна и о различных сортах пива, некоторые из задач связаны с измерением, с переводом одних сыпучих мер в другие. Многие исследователи культуры Египта и историки науки отмечали, что разделение математических текстов Древнего Египта на арифметические и геометрические является искусственным. «Это деление, – пишет, например, О. Нейгебауэр, – не отвечает точке зрения самих составителей этих задач, ... с египетской точки зрения, для установления близости этих задач друг другу решающим моментом является не их математическое содержание, а их чисто практическое назначение»[3].

---

[1] См. Л. А. Микешина. Научное знание как объект исследования // Диалектический материализм и философские проблемы естественных наук. – М., 1979. – С. 10.

[2] См. например: К. А. Рыбников. История математики. В 2-х томах. – М., 1960-1963.

[3] О. Нейгебауэр. Лекции по истории античных математических наук. Т. 1. Догреческая математика. М. Л., 1937. – С. 137.

Математику Вавилона отличает более высокий, по сравнению с египетской математикой, уровень. Здесь широко используется позиционная система исчисления, которая мало чем отличается от привычной сегодня записи чисел. Эта система была значительно эффективнее, с точки зрения ее практического использования, и предоставляла возможности для преодоления сложностей в арифметических действиях с дробями. Внедрение этой системы некоторые ученые сравнивают со значением алфавита.

Важным достижением вавилонской математики считают и хорошо разработанную шестидесятиричную систему, которая навсегда оставила след в истории культуры: деление часа на 60 минут и 3 600 секунд, деление окружности на 360 градусов, каждого градуса на 60 минут и 3 600 секунд.

Вавилонские математики умеют решать уже не только простые линейные уравнения, но и линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, а также задачи, которые можно свести к биквадратным и кубическим уравнениям. Это говорит о том, что арифметика Вавилона развивается в достаточно хорошо разработанную алгебру, что находит свое выражение и в геометрии. Значительно совершенствуется техника вычислений, что было обусловлено, прежде всего, развитием астрономии[1].

Большинство ученых и философов фундаменталистского направления считают, что математика Древнего Египта, Вавилона, Древнего Китая и Древней Индии представляла собой неупорядоченное множество отдельных эмпирических сведений и результатов, если и связанных между собой, то лишь случайным образом[2].

«С начала своего возникновения, – пишет один из известных отечественных философов, занимавшихся проблемами математики, В. Н. Молодший, – в течение многих тысячелетий математика не была систематизированным знанием; она была собранием отдельных фактов, установленных эмпирически …»[3].

Именно поэтому для многих ученых и философов науки математика Египта и Вавилона не является в полной мере наукой в традиционном, рационалистическом ее понимании. Она не была еще в достаточной мере систематизированным и рационализированным знанием, для которого характерны, прежде всего, логический вывод и использование идеальных (в смысле не материальных) математических объектов. Это была пока еще *пред*математика, *пред*наука.

Иная оценка периода зарождения математики дается в одной из моделей нефундаменталистского направления (А. Г. Барабашев). В этой модели развитие математики связывается с взаимодействием двух, противоположных друг другу способов систематизации математического знания. Эти способы организации математического материала, сменяющие друг друга в процессе развития, определяют два основных типа целостности математического знания, принципиальным образом отличающихся друг от друга, которые называют *«практической математикой»* и *«теоретической математикой»*.

Поэтому в рамках этой модели египетская и вавилонская математика предстает как целостное систематизированное образование, где способ сис-

---

[1] См., например: И. В. Арнольд. Арифметика // Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 77–79.

[2] См., например: Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, и Греции. – М. 2006.

[3] В. Н. Молодший. Очерки по философским вопросам математики. – М., 1969. – С. 60–61.

тематизации был не теоретическим, а практическим, при котором и сама математика представала как «практически ориентированное знание»[1].

Свидетельством этому являются тексты древних писцов, в которых математические знания и вычисления сопутствуют хозяйственным записям и юридическим документам[2]. Несколько позже появляются собственно математические тексты, в которых были представлены результаты практического применения математических знаний в каких-либо областях хозяйственной деятельности. Вместе с тем необходимость передачи опыта, который проходил посредством обучения, предполагала в перспективе переход от передачи навыков решения частных задач к поиску общих методов, которые характерны для теоретической математики. Иными словами, процесс воспроизводства практической математики содержал в себе возможность трансформации, перехода ее в теоретическую математику.

Свое становление и развитие как систематизированное знание, по мнению сторонников фундаменталистского подхода, математика начинает в Древней Греции. Эту позицию разделяли, например, Н. Бурбаки в своих «Очерках по истории математики»[3], известный голландский математик, историк науки Д. Я. Стройк[4], и многие другие ученые и философы. «… Ясное понимание самостоятельного положения математики, как особой науки, имеющей собственный предмет и метод, – писал, например, А. Н. Колмогоров, – стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в VI–V вв. до н. э.»[5].

Такое понимание математики было связано, прежде всего, с идеей *доказательства* или *дедуктивного вывода*. Эта идея не только становится основой стремительного развития античной математической науки, но и оказывает глубокое влияние на все последующее естествознание и рациональную философию.

Разработку и внедрение этой идеи в геометрию приписывают выдающемуся греческому философу Фалесу из Милета, (около 625–547 гг. до н. э.), который, по словам Прокла, после своей поездки в Египет впервые перенес эту науку в Элладу. При этом многое Фалес открыл самостоятельно и указал своим последователям направление дальнейших исследований в математике[6].

С открытием идеи доказательства математика в Греции приобретает статус особой науки и начинает развиваться чрезвычайно быстрыми темпами. «Золотой век» Греции показывает, что математики этого времени успешно использовали логический вывод в созданной ими системе плоскостной геометрии. В этот период были сформулированы и стали предметом многочисленных исследований такие знаменитые проблемы, как трисекция угла (деление любого заданного угла на три части), удвоение куба (нахождение длины ребра куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба) и квадратура круга (нахождение квадрата, площадь которого равна площади данного круга). Эти проблемы знамениты тем, что их невозможно решить геометрически, путем построения, используя при этом лишь линейку и циркуль. Попытки решения этих проблем не были бесполезными, они привели к

---

[1] А. Г. Барабашев. Диалектика развития математического знания. – М., 1983. – С. 4–7.

[2] См., например: М. А. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М., 1967. – С. 10.

[3] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963.

[4] Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М., 1978.

[5] А. Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991. – С. 28.

[6] См.: Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I. – М. 1989. – С. 108.

открытию конических сечений, квадратриссы и некоторых других кривых третьего и четвертого порядка.

Особо следует сказать о математиках, называвшими себя в честь своего учителя Пифагора пифагорейцами. Пифагорейцы обожествили число, сделали его основой своей философии, сводя все отношения, существующие в реальном мире, к количественным отношениям. «Все есть число», – утверждали они. Пифагорейцам многого удалось достичь в математике. Это – и хорошо известная сегодняшним школьникам теорема Пифагора, в благодарность за найденное доказательство которой Пифагор, по рассказам его учеников, принес в жертву богам сто быков. И решение задач заполнения плоскости правильными многоугольниками, а пространства – правильными многогранниками. И нахождение признаков делимости чисел и сумм простейших арифметических прогрессий, среднего арифметического и среднего геометрического, отыскание совершенных чисел (чисел, которые равны сумме всех своих делителей, отличных от самого числа) и т. д.

Однако наиболее важным открытием, которое приписывают пифагорейцам, является открытие несоизмеримых отрезков. Это открытие противоречило учению пифагорейцев о том, что с помощью отношений между целыми числами, то есть рациональным числом, которые только и считались у них числами, можно выразить любую величину, поэтому, как говорит легенда, пифагорейцы долго держали это свое открытие в секрете.

Проблема несоизмеримых оказала такое сильное влияние на развитие математического знания, что впоследствии многие математики и философы стали говорить о ней как об одной из основных причин кризиса греческой математики[1]. Катализатором возникшего кризиса стала еще одна важная проблема, суть которой выразил в своих парадоксах Зенон Элейский. Он показал, что отрезок конечной длины разбивается на бесконечное число отрезков, также имеющих конечную длину (парадоксы «Дихотомия», «Стадий»). Это означало, вопреки общепринятому в то время среди математиков мнению, что сумма бесконечного числа как угодно малых величин (отрезков) не является бесконечной.

В дальнейшем усилиями, прежде всего, таких представителей Академии Платона, как Теэтет и Евдокс, кризис был преодолен. Теэтету удалось создать теорию иррациональных, а Евдокс разработал метод исчерпывания, который давал возможность строго вычислять площади и объемы, избегая ловушек бесконечно малых.

Одним из влиятельнейших математиков Древней Греции, исследования которого сказались на развитии не только всей дальнейшей математики, но и в определенной степени всего научного мышления, был Евклид. Наиболее известным его трудом, до сих пор приковывающим внимание профессиональных математиков, являются «Начала» – тринадцать книг, в которых на языке геометрии изложены теория чисел того времени, а также часть алгебры.

«Начала» Евклида в Западной Европе считают второй после Библии книгой, которая выдержала наибольшее число изданий и более всего изучалась[2]. Важнейшее значение «Начал» состоит в том, что в них в виде логически строгой системы были представлены все достижения греческой математики, включая три величайших открытия: теорию отношений, теорию иррациональных и теорию пяти геометрически правильных тел (Платоновы тела).

---

[1] Более подробно об этом кризисе см. ниже (Гл. III, § 1).

[2] См.: Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М., 1978. – С. 68.

После Евклида в Древней Греции можно, пожалуй, назвать еще лишь одного человека, который оставил глубокий след не только в математике, но и в механике, астрономии и технике. Этим человеком был Архимед. Его по праву называют пионером математической физики, так как математика в его работах была неразрывно связана с решением задач естествознания и техники. В математике хорошо известны и Архимедова спираль, и аксиома Архимеда об отрезке, который, будучи повторен достаточное число раз, превзойдет заданный больший отрезок, и основанная на этой аксиоме так называемая архимедовская упорядоченность, которая играет важную роль в современной математике. Но наибольшим вкладом Архимеда в математику справедливо считают его работы, касающиеся методов нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел. Эти исследования намного опередили свое время и были оценены лишь тогда, когда стали создаваться дифференциальное и интегральное исчисления[1].

С упадком античной культуры центром развития науки, в том числе и математики, становится Восток. Исследования математиков Китая, Индии, Средней Азии и Ближнего Востока внесли много нового и интересного в математическую теорию и практику, обогатили их весьма значимыми результатами.

К заслугам китайской математики следует отнести, прежде всего, численное решение уравнений третьей, четвертой и высших степеней. Индийские математики внедрили в математику линии синуса и косинуса, а также десятичную систему нумерации, повсеместно используемую и сегодня; создали алгебру, которая позволяла оперировать с дробями, отрицательными и даже иррациональными числами; дали общее правило решения квадратных уравнений и общие методы решения в целых числах неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными и некоторых видов квадратных уравнений (Брамагупта – VII в. и Бхаскара – XII в.).

Математики Средней Азии и Ближнего Востока не только сохранили и передали ученым Западной Европы богатейшие россыпи математических открытий античного мира и Древней Индии, но и сами внесли значительный вклад в развитие математического познания. Так, например, Хорезми (IX в.) первым в истории науки представил систематическое изложение алгебры. Известный поэт и философ Омар Хайям (конец XI – начало XII вв.) дал систематическое изложение решений уравнений первой, второй и третьей степени с помощью конических сечений, построил оригинальную теорию параллельных прямых, пытался усовершенствовать теорию отношений Евдокса. Улугбек (XV в.), величайшей заслугой которого следует считать создание им на базе самаркандской обсерватории научного центра, разработал алгебраические методы, позволившие составить довольно точные тригонометрические таблицы. Наконец, следует назвать имя и такого самаркандского математика, как Джемшид аль-Каши (XV в.). Этот ученый разработал методы извлечения корней с помощью формулы (выраженной вербально), названной впоследствии биномом Ньютона; дал вариант приближенного решения уравнения третьей степени и вычислил значение числа π до семнадцатого знака.

Для европейской математики период до XVI в., как отмечают многие исследователи, был «по преимуществу периодом усвоения наследства древнего мира и Востока»[2]. В это время в Европе создается база для стремительного

---

[1] См.: Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 662.

[2] А. Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии. – С. 42.

броска науки, в том числе, конечно, и математики, вперед. Общий рост уровня культуры обусловливает и притязания элитарного слоя населения на расширение объема знаний об окружающем мире. Начинают появляться первые учебники, которые с изобретением книгопечатания получают широкое распространение. Возникают университеты, где не только обучают, но и проводят научные исследования.

В математике отмеченные явления нашли свое выражение в появлении переводов сочинений античных и восточных ученых, в осуществлении своих собственных оригинальных научных разработок, связанных, прежде всего, с углублением разработок древних мыслителей. В алгебре начинает складываться понимание природы иррационального числа как отношения несоизмеримых величин (Т. Брадвардин и Н. Оресм – XIV в.), в ней начинают широко использоваться дробные, отрицательные и нулевые показатели степеней (Н. Оресм, Н. Шоке – конец XV в.). Математики впервые осознанно обращаются к проблемам бесконечно больших и бесконечно малых величин (Н. Кузанский – XV в.).

В XVI в. для европейской математики по существу заканчивается период усвоения и обработки достижений предшествующей математики. Она начинает резкий разгон, который обозначен уже в найденных решениях уравнений третьей (С. Ферро и Н. Тарталья) и четвертой степени (Л. Феррари), исследованиях Дж. Кардано в области уравнений третьей степени, которые приводят к необходимости признания комплексных чисел, работах Ф. Виета в области алгебры, ставшим по сути дела родоначальником буквенного исчисления.

Второй период развития математики, продолжавшийся вплоть до XVI в., так же как и первый характеризуется не вполне еще развитым понятийным аппаратом, достаточно простыми (с точки зрения сегодняшнего дня) методами решения задач, сосредоточением внимания на постоянных величинах.

В рамках фундаменталистского направления математика постоянных величин предстает как определенная целостность, связанная идеей разработки новых методов вычисления и обработки результатов, внутри которой нет деления на теоретическую и практическую математику, она вся в определенной мере считается теоретической.

Нефундаменталистская модель развития математики Барабашева показывает, что в Древней Греции и Древнем Риме, действительно, преобладает линия теоретической математики, в основе которой лежит доказательство и логический вывод. Вместе с тем в этой модели обращается внимание на то, что в Средние века на первый план вновь выходит практическая математика, направленная, в первую очередь, на удовлетворение потребностей счетно-измерительного характера. Эти потребности настойчиво заявляют о себе в мореплавании и кораблестроении, в астрономии и хозяйственной деятельности, в коммерции и налогообложении и т. д.

В рамках этой модели акцентируется внимание и на возникающей в средневековой математике тенденции алгоритмизации, что проявляется в объединении в отдельные группы практических задач определенного типа и указании предписания, задающего вычислительный процесс, ведущий к получению вполне определенного результата. Алгоритмические методы естественным образом синтезировали практические интересы и теоретические традиции. Это было связано с природой алгоритма как такой процедуры мышления, в которой «выражается структурная общность практической и мыслительной деятельности»[1]. Такое единство практического и теоретического в алгоритме содержало в себе потенциальную возможность смены практической математики математикой теоретической. Этот переход к преобладающему теоретическому способу систематизации математики происходит в Новое время. Хотя и здесь весьма заметно ощущается влияние практики на эту область научного познания.

В XVII в., в силу, прежде всего, запросов практики (требования стремительно развивающейся астрономии, естествознания в целом, а также техники) математики обращаются к исследованиям движения, процессов, преобразований геометрических форм. В центре внимания математиков оказывается изучение *переменных величин*, с которыми, по образному выражению Ф. Энгельса, «в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика,* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление»*[2]*.*

Представление о непрерывно изменяющейся функции, которая не задана ни алгебраически, ни геометрически, впервые дает, видимо, Дж. Непер в исследованиях открытых им логарифмов. Тем не менее, понятие «переменная величина» ассоциируется у математиков с именем Р. Декарта.

Широкое применение этого понятия Декартом в «Геометрии» (1637 г.), где переменная выступала в двойственной форме (как постоянно направленный отрезок переменной длины – текущая координата движущейся точки и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, соответствующих этому отрезку), позволило ему включить в алгебру всю классическую геометрию. В математике возникла новая дисциплина – аналитическая геометрия.

Наряду с исследованиями в этой новой области продолжалось изучение бесконечно малых и бесконечно больших: работы П. Ферма о максимумах, минимумах и касательных к кривым; разработка И. Кеплером и Б. Кавальери «методов неделимых»; попытки использования бесконечно малых в задачах по определению площадей (Б. Паскаль, Дж. Валлис); и другие. Все это вместе с переменной Декарта послужило основой для создания И. Ньютоном и Г. Лейбницем независимо друг от друга методов дифференцирования и интегрирования. Дифференциальное и интегральное исчисления стали началом математического анализа, с которым математика вошла в стадию высшей математики.

В дальнейшем направление исследований в области математики во многом диктуются ее внутренними потребностями. Видимо поэтому научная работа математиков становится самостоятельной профессией. Деятельность математиков XVIII в. сосредотачивается, прежде всего, на разработке математического анализа и его приложений к механике. Самые крупные ученые этого времени – Г. Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Ж. Даламбер, П. Лаплас.

В контексте фундаменталистского подхода математика Нового времени рассматривается как система более высокого структурного уровня, вобравшая в себя все достижения предыдущей математики и отличающаяся от обоих предыдущих периодов стремительными темпами развития. В этот период продолжается активное накопление новых результатов в ее различных областях, возникают новые теории и разрабатываются новые методы исследова-

---

[1] О. И. Кедровский, Л. А. Соловей. Алгоритмичность практики, мышления, творчества. – Киев, 1980. – С. 32.

[2] К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд. – Т. 20. – С. 578.

ния, граница между алгеброй и геометрией становится все более и более размытой, а в конечном итоге появляется качественно новая математика – математика переменных величин.

В представленной нефундаменталистской модели показывается, что математика Нового времени, в отличие от математики средневековья, является преимущественно теоретической математикой. В ней преобладает теоретический способ систематизации, что обусловлено, в первую очередь, введением в математику принципиально новых терминов логических отношений, раскрывающих динамику исследуемого объекта. «Старая» терминология не удовлетворяла потребностям нарождающейся новой математики. Для более адекватного отображения сложных процессов объективной реальности на теоретическом уровне был необходим новый терминологический аппарат, новые математические понятия, которые обладали бы потенцией к обобщению математических представлений, и, одновременно с этим, могли служить основанием для построения моделей этих самых процессов. Таким аппаратом и стала система логических отношений динамики, развитие которой стимулировало переход от практического способа систематизации математики к преимущественно теоретическому способу ее систематизации.

С началом девятнадцатого столетия начинает отсчет *этап современной математики.* Этот этап характеризуется все более опосредованной, все более сложной связью математики и практического естествознания. Возникающие в математике новые теории обусловлены в подавляющем своем большинстве не внешними запросами естествознания или техники, а являются ответом на весьма сильные внутренние импульсы, порожденные потребностями самой математики. Математики все больше и больше сосредотачивались на достаточно узкой области исследований, все больше заявляет о себе тенденция специализации.

Типичными примерами этой новой тенденции в развитии математического знания являются: теория функций комплексного переменного (К. Вессель, Ж. Арган, О. Коши, Н. Абель и другие), теория квадратичных форм, вычетов и сравнений второй степени и работы в области внутренней геометрии поверхностей (Ф. Гаусс), «воображаемая геометрия» (Н. Лобачевский) и другие неевклидовы геометрии (Я. Больяй, Б. Риман), теория групп (Э. Галуа и другие).

Круг изучаемых математикой объектов и отношений между ними продолжал расширяться. К этому времени он включал отношения между элементами произвольной группы и отношения между векторами, между операторами в функциональных пространствах, а также все многообразие пространств любого числа измерений. Одной из существенных особенностей развития математики этого периода было то, что вопросы расширения этого круга отношений и форм становятся предметом сознательного и активного интереса математиков, который реализуется в целенаправленной и планомерной разработке особых методов создания новых геометрических систем, новых «алгебр» с «некоммутативным» или даже «неассоциативным» умножением и т. д.[1]. Математика развивается вширь и вглубь.

В течение XIX в. возникают такие новые (кроме названных выше) дисциплины, как: теория дифференциальных уравнений с частными производными (К. Гаусс, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, П. Дирихле, М. В. Остроградский и другие) и векторный анализ (Дж. Стокс и другие), тео-

---

[1] См.: А. Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии. – С. 62.

рия пределов (О. Коши) и теория иррациональных чисел (Р. Дедекинд, Г. Кантор, К. Вейерштрасс), теория множеств (Г. Кантор) и математическая логика (Дж. Буль, П. С. Порецкий, Э. Шредер, Г. Фреге, Дж. Пеано и другие).

Математики все больше и больше сосредотачивались на достаточно узкой области исследований, все больше заявляла о себе тенденция специализации. Если Лейбница, Эйлера, Даламбера можно охарактеризовать как математиков в широком смысле, математиков-универсалов, то «о Коши мы говорим как об аналитике, о Кели – как об алгебраисте, о Штейнере – как о геометре (даже как о чистом геометре), а о Канторе – как об основоположнике теории множеств, – пишет Д. Стройк. – Наступило время специалистов по математической физике, за которыми последовали ученые в области математической статистики или математической логики. Только самая высокая степень одаренности позволяла преодолеть специализацию, и наиболее мощное воздействие на математиков девятнадцатого столетия оказали труды Гаусса, Римана, Клейна, Пуанкаре»[1].

Эту же мысль, но уже по отношению к математике XX столетия высказывают и Н. Бурбаки. «Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, кто бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставил печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение»[2].

Двадцатый век для математической науки был ознаменован несколькими важными событиями. Одним из них было выдвижение на первый план исследований в области теории функций действительного переменного, для развития которой много сделали Дж. Пеано, Э. Борель, Р. Бэр, А. Лебег, а также отечественные математики Н. Н. Лузин и С. Н. Бернштейн. Другим важным событием в математике было становление топологии, ставшей самостоятельной дисциплиной после работ А. Пуанкаре. Происходит общий подъем интереса к проблемам теории вероятности, в которой возник целый ряд новых теоретических и прикладных направлений (Р. Мизес, Э. Борель, П. Леви, В. Фелер, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров и другие). В начале века благодаря работам, прежде всего, Э. Штейница алгебра перестает быть наукой о решении алгебраических уравнений, и становится абстрактной наукой, подобной теории групп – наукой об операциях над структурами, в развитие которой достойный вклад внесла отечественная школа математики (А. Г. Курош и другие).

В это же время математики обращают самое пристальное внимание на проблемы обоснования математики, что во многом было связано с необходимостью уточнения логических средств, используемых для построения ее теорий.

В обосновании математики возникают три конкурирующих между собой направления: логицизм (Б. Рассел, А. Н. Уайтхед и другие), интуиционизм (Л. Брауэр, А. Гейтинг, Г. Вейль и другие) и формализм (Д. Гильберт, П. Бернайс, В. Аккерман и другие). Каждое из них стимулировало развитие логики и математики, что привело к значительным результатам в этих областях знания.

---

[1] Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – С.190.

[2] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963. – С. 245.

Работы Рассела и его последователей, например У. Куайна, «способствовали формированию и уточнению ряда важнейших логико-математических и методологических идей и развитию соответствующего формального математического аппарата»[1].

Интуиционизм Гейтинга[2] и Брауэра явился основой создания конструктивной математики (А. А. Марков, Н. А. Шанин и другие), оказал позитивное воздействие на продвижение в таких областях математики, как теория меры, функциональный анализ, топология, теория дифференциальных уравнений.

Формализм Гильберта стал основой для разработки проблемы теории доказательства, во многом помог развитию финитных методов[3].

В ходе развития современной математики внутри ее создавались новые понятия и теории, связь которых с основными понятиями, принципами и аксиомами становилась все более опосредованной, появлялось много разнообразных теорий, которые достаточно быстро видоизменялись, перестраивались, отдалялись друг от друга. В тридцатые годы XX в. группа молодых математиков, публиковавшая свои работы под псевдонимом Н. Бурбаки, обратила внимание на процесс дифференциации в математике, который, по их мнению зашел так далеко, что встал вопрос о единстве этой науки.

«… является ли это обширное разрастание развитием крепкого сложенного организма, который с каждым днем приобретает все больше и больше согласованности и единства между своими вновь, возникающими частями, – задавали они вопрос, – или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему все дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики; не находится ли эта последняя на пути превращения в Вавилонскую башню, в скопление автономных дисциплин, изолированных друг от друга как по своим методам, так и по своим целям и даже по языку? Одним словом, существует ли в настоящее время одна математика или несколько математик?»[4]

Отвечая на этот вопрос, Н. Бурбаки отмечали, что внутренняя эволюция математики «упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было»[5].

Этот вывод послужил для них основанием для постановки грандиозной задачи объединения математики на едином фундаменте, которым могло бы быть, по их мнению, понятие «структура». Однако, выполнить поставленную задачу полностью они не смогли. Не решена эта задача и в настоящее время.

В середине двадцатого века чрезвычайную популярность в математике приобрели так называемые «обобщенные функции» (Л. Шварц), оказавшиеся удачным аппаратом для теории дифференциальных уравнений, что привело к многочисленным результатам в этой области (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Л. Хермандер и другие). Примерно в этот же период была построена теория солитонов – «неожиданных волн» (Дж. Рассел), разработана «теория катастроф» (Р. Том, В. И. Арнольд), возникают кибернетика (информатика), а вместе с ней программирование и теория информации (Н. Винер, К. Шеннон,

---

[1] Философский энциклопедический словарь. – М., 1989. – С. 320.

[2] А. Гейтинг. Интуиционизм. – М., 1965.

[3] См. об этом подробнее: Б. Л. Яшин. Логико-гносеологические аспекты проблемы противоречия процесса познания. – М., 1992. – С. 143.

[4] Н. Бурбаки. Архитектура математики // Математика и просвещение. – М., 1960. – С. 100.

[5] Н. Бурбаки. Там же. – С. 101.

А. Н. Колмогоров и другие), самостоятельный статус получает теория игр (Дж. фон Нейман).

Математика все больше и больше проникает в естествознание и науки об обществе, что позволяет говорить о начавшемся процессе математизации. «На наших глазах, – отмечает журнал “Математический сборник”, – происходит процесс качественного изменения самой математики; открываются тесные связи между казавшимися ранее далекими ветвями математики, возникают новые математические дисциплины. Создание быстродействующей вычислительной техники в корне изменило представление об эффективности различных математических методов и принципиально расширило сферу приложения математики. Все более расширяются связи математики с другими науками. Если раньше они ограничивались в основном механикой, астрономией, физикой, то теперь математические методы все глубже проникают в химию, геологию, биологию, медицину, экономику, языкознание. Общеизвестна роль математики в создании новых направлений техники – радиоэлектроники, атомной энергетики, космонавтики. Старинное утверждение о том, что математика является царицей наук, приобрело, таким образом, гораздо более глубокое содержание»[1].

Вторая половина двадцатого века для математики была не менее плодотворной. Это был поистине «золотой период». Огромным успехом было решение «великой» проблемы Ферма о невозможности нетривиального решения уравнения $x^n + y^n = z^n$ (Э. Уайлс), проблемы четырех красок, с помощью которых возможно закрасить любую карту так, что никакие ее соседние страны не будут иметь одного цвета (В Хакен и К. Аппель), а также кеплеровской проблемы упаковки шаров (Т. Хейлс).

Немало замечательных проблем было решено и отечественными математиками. 13-ю проблему Гильберта о существовании функции многих переменных успешно решают А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд. 10-ю проблему о разрешимости диофантова уравнения решает Ю. В. Матиясевич. Окончательную точку в решении 21-й проблемы о доказательстве существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии ставит А. А. Болибрух. Одну из наиболее трудных работ XX столетия – опровержение ограниченной проблемы У. Бернсайнда о конечности конечно порожденной группы с конечно порядковыми элементами – выполнили П. С. Новиков и С. И. Адян. Сегодня у многих на слуху имя Г. Я. Перельмана, доказавшего гипотезу А. Пуанкаре о гомеоморфности односвязного замкнутого трехмерного многообразия трехмерной сфере. За работы, связанные с этим доказательством в марте 2010 г. Математический институт Клэя впервые в истории присудил Г. Я. Перельману премию «за решение одной из Проблем тысячелетия».

Современная математика по сравнению с математикой XIX в. изменила свои приоритеты. Свидетельством этих изменений в ориентации может служить список филдсовских лауреатов – ученых, добившихся выдающихся успехов в области математики. В этом списке больше всего представителей «новых» отраслей математики: топологии, алгебраической геометрии, комплексного анализа, динамическим системам и «физической математике»[2].

---

[1] Математический сборник, 1967, 74, (116). – Вып. 3. – С. 324–325

[2] См., например: В. Тихомиров. Математика во второй половине XX века // Квант. – № 2, 2001. – С. 2–7

На современном этапе своего развития математика, с точки зрения фундаменталистского подхода, с одной стороны, все больше и больше абстрагируется от реальной действительности, исследуя максимально общие для этой действительности отношения между объектами теоретико-математических структур, то есть, занимаясь сугубо внутренними, собственно математическими проблемами («чистая» математика). С другой стороны, на этом этапе явственно обнаруживается, что математика все активнее взаимодействует с техникой, естественными и гуманитарными науками, находя свои приложения в той или иной степени во всех областях и на всех уровнях познания и практической деятельности человека (прикладная математика).

Иначе говоря, в этом случае проводится достаточно резкое разграничение внутри самой математики, что дает основания «фундаменталистам» говорить о двух различных математиках, хотя и взаимодействующих друг с другом, но и находящихся в определенной оппозиции.

Нефундаменталистская модель развития Барабашева представляет современную математику как практически ориентированную науку, которая приходит на смену теоретической математике Нового времени. Этот переход осуществляется в силу все более осознаваемой потребности обеспечить непосредственную помощь в решении практических проблем, допускающих количественную обработку, а также в силу необходимости снабдить научное (теоретическое) познание аппаратом, способным более адекватно выразить закономерные связи и отношения между объектами той или иной области знания.

Кроме «внешних» по отношению к математике причин смены в этот период теоретической ориентации на практическую, существуют и внутренние причины, которые связаны с особенностями одной из важнейших процедур математического мышления – доказательства. На современном этапе развития математики доказательство, понимаемое как строгий логический (дедуктивный) вывод и конструктивное построение перестает быть унифицированным средством. К такому пониманию доказательства стали относиться с определенной осторожностью, ибо нередки ситуации, когда эта процедура настолько сложна, что повторить ее или проверить без вероятности допущения ошибки просто невозможно, а в связи с использованием в сложных доказательствах компьютерной техники такая осторожность может перерасти в недоверие.

Во многом в силу этого теоретическая систематизация исчерпывает свои ресурсы и уступает место практической синтетической систематизации. В математике усиливается тяга к практическому способу систематизации, расширяется «внешняя» сфера поиска идей, методов и задач. Вместе с тем, собственно теоретические исследования все больше связываются с проблемами оснований математики и склоняются к алгоритмизации вычислительных процедур[1].

Практическая направленность современной математики подтверждается также широким использованием математического моделирования. Математические модели дают возможность синтезировать на едином фундаменте различные ветви математического древа познания. К тому же сам «процесс построения математических моделей различных наблюдаемых явлений» позволяет говорить о прикладном (практическом) значении математики[2], об от-

---

[1] См.: А. Г. Барабашев. Диалектика развития математического знания. – С. 142.

[2] Будущее науки. – М., 1980. – С. 107–108.

вете, который дает современная математика на вызов практики, представленную, в первую очередь, естествознанием, техническими и гуманитарными, в том числе и социальными, науками.

Практическая ориентация современной математики явно просматривается и в исследованиях сложных систем с большим числом различных взаимосвязанных параметров, а также в изучении проблем различных взаимодействий – специфических разновидностей связей, не сводимых к функциональным зависимостям и представляющих особый интерес для современной науки.

Обобщая оценки, даваемые процессу становления и развития математического знания, можно выделить следующее. Фундаменталистский взгляд на историю развития математики представляет ее как кумулятивный процесс, в ходе которого на базе накопления знания и совершенствования методов происходит непрерывное расширение области познания (предмета математики) и все более глубокое проникновение в сущность изучаемых отношений и форм. Сторонники этого подхода, справедливо отмечая существующие особенности «чистой» и «прикладной» математики, иногда абсолютизируют их, резко противопоставляя одну другой.

С точки зрения рассмотренного нами нефундаменталистского подхода, еще раз подчеркнем – не противоречащего, а дополняющего своего оппонента, история математики предстает как смена двух интенциональностей, двух противоположно ориентированных, а потому и различно структурированных подсистем: практической и теоретической математики. Эти подсистемы на всем пути развития математического познания взаимодействуют между собой таким образом, что на различных этапах каждая из них выступает то в роли «ведущей», то в роли «ведомой» противоположности в сложной, но остающейся единой, системе математического знания.

Опираясь на арсенал современной философии и методологии науки можно сказать, что нефундаменталистский подход в философии математики вполне может быть отнесен к социокультурному подходу в философии научного познания. При таком подходе обращается внимание на взаимодействие науки и общества, которое понимается «как превращение внешних социокультурных, ценностных факторов во внутренние когнитивные и логико-методологические регулятивы»[1].

Глава II. Специфика математического познания

§ 1. Предмет и методы математики

До конца XVIII в. математика представлялась ученым и философам как *одна из наук, изучающая отдельные области сущего*. Математика была частью «натурфилософии» – систематического изучения природы методами, которые разработали Г. Галилей, Ф. Бэкон и Р. Декарт. Отличием математики от других наук считались лишь ее большая абстрактность и высокая строгость, достигавшаяся использованием в ней не эксперимента, а логического следования и доказательства. Однако это не освобождало математику от проверки адекватности ее результатов реальному положению вещей с помощью опреде-

---

[1] См.: Л. А. Микешина. Философия науки: Современная эпистемология. Научное знание в динамике культуры. Методология научного исследования : учеб. пособие. – М., 2005. – С. 171.

ленным образом организованной опытной проверки – интерпретации. Как следствие было признано, что любая отрасль научного знания, где результаты эксперимента представимы с помощью чисел или систем чисел, становится областью приложения математики.

В XIX в. вполне сложилось понимание математики как *науки, изучающей всевозможные зависимости между величинами*.

В XX столетии все большее предпочтение получает взгляд на математику, как на *науку* о *структурах*. Действительно, одной из наиболее важных особенностей современной математики является то, что она изучает различные системы *абстрактных объектов*, которыми могут быть числа и простейшие геометрические фигуры, интегралы и дифференциалы, функционалы и операторы, топологические пространства и т. п. Все эти объекты в современной математике считаются элементами алгебраических или топологических структур, или элементами структур порядка. Под структурой при этом понимают «множество элементов, природа которых не определена», но для которых с помощью аксиом задана некоторая совокупность отношений, собственно и определяющих структуру математической теории. Сама же эта теория получается как логическое следствие из этих аксиом при полном игнорировании всяких, не содержащихся в них предположений относительно «природы» элементов[1].

В последние годы XX в. математики особое внимание обратили на созданную Маклейном и Эйленбергом теорию алгебраических категорий, под которой понимается класс математических объектов и соответствующих им отображений (морфизмов)[2].

Теория категорий оказывается интересной тем, что всевозможные математические структуры могут рассматриваться как ее объекты. Говоря словами одного из авторов структурного подхода к математике Дьедонне, понятия «категория» и «функтор» возобновляют понятие «структура» «в более общей и удобной форме»[3]. В этом случае математику можно рассматривать как *науку о категориях.*

С точки зрения философии, переход от теоретико-множественного к категориальному подходу, по мнению С. Л. Катречко, связан «с номиналистским переходом от аристотелевской “вещной онтологии” … к “функциональной онтологии” Л. Витгенштейна, где вещам отводится роль вторичных сущностей, а приоритет отдается отношениям (“фактам”), математическим аналогом которых выступают функции»[4].

Сегодня ни у ученых, ни у философов не вызывает сомнений тот факт, что математика, как и любая другая наука, является творением разума. Вместе с тем, несомненно, и то, что математика, в отличие от многих других наук, «свободна в своем развитии от опыта в том смысле, что может вводить понятия и теории без ссылки на какие-либо реальные отношения или эмпирические аналоги»[5].

---

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963. – С. 251.

[2] См., например: И. Букур, А. Деляну. Введение в теорию категорий и функторов. – М., 1972; М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. Основы теории категорий. – М., 1974; Р. Гольдблатт. Топосы: категорный анализ логики. – М.,1983.

[3] Ж. Дьедонне. О деятельности Бурбаки / Успехи математических наук, 1973. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 209.

[4] С. Л. Катречко. Теоретико-множественная (бурбакистская) парадигма математики и ее возможные альтернативы // Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28–30 мая 2009 г. – М., 2009. – С. 21–22.

[5] Е. А. Беляев, Н. А. Киселева, В. Я. Перминов. Некоторые особенности развития математического знания. – М., 1975. – С. 8.

Иначе говоря, современная математика является не опытной, эмпирической, а в определенном смысле формальной наукой. Ее теории используются как некие абстрактные отображения, как некие схемы, как символические модели, необходимые для более глубокого понимания характера взаимосвязей описываемой с помощью этих теорий какой-либо эмпирической области знания. Иными словами математика применяется в других областях научного знания для описаний и объяснений.

Учитывая последний тезис, о математике вполне возможно говорить как о некотором общем *языке*, приспособленном, по словам Н. Бора, для выражения соотношений, которые либо невозможно, либо очень трудно выразить с помощью слов.

Лингвистический подход к математике характерен, например, для раннего Витгенштейна, который в этот период находился под впечатлением успехов логицистской программы Рассела и Уайтхеда. В его понимании математика представляет собой логический *метод* вычисления и производства подстановок в уравнениях. Подход к математике как к наиболее общему методу изучения действительности, который используется в различных отраслях естественнонаучного и социогуманитарного знания, имеет место и в современной философии науки.

В дальнейшем Витгенштейн развивает конструктивистский подход к пониманию природы математического знания, рассматривая образование математических теорий как языковую деятельность человека. Собственно же математика для него предстает набором «языковых игр», одна из главных составляющих которых – логический вывод[1].

Вполне возможно говорить о математике и как о *системе моделей*, ибо современные математические модели способны описывать различные зависимости, как между величинами, так и между структурными отношениями. Они применяются не только в естествознании, но и в современной психологии, социологии, лингвистике, теории управления, других общественных и гуманитарных науках

То, что математику и ее предмет можно охарактеризовать или даже определить по-разному, не должно вызывать никаких недоумений. К пониманию математики, как и любой другой науки, можно подойти с разных сторон: для одних главным является генезис, для других – методы, для третьих – структура, для четвертых – взаимосвязи с другими науками и т. п. Не может быть в принципе одного единственного определения чего бы то ни было. Каждое из них раскрывает те или иные стороны, те или иные грани предмета, а значит, – каждое из них способствует пониманию его сущности. Все это в полной мере относится и к математике.

Так, например, структурный и категориальный подходы, с нашей точки зрения, в определенной мере совместимы с диалектико-материалистическим пониманием математики, согласно которому «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира …»[2].

Если понятия «пространственная форма» и «количественное отношение» трактовать достаточно широко, то с некоторыми оговорками с такой трактовкой можно согласиться и сегодня, так как используемые понятия структуры и категории по сути дела выражают те же количественные отношения и

---

[1] См., например: Л. Витгенштейн. Философские работы. – Ч. II. – Кн. I. – М., 1994.

[2] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг / К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд. – Т. 20. – С. 37.

пространственные формы только на более высоком уровне абстрактности. В свою очередь та или иная математическая структура представляет собой некоторую математическую модель, в которой, так или иначе, интерпретируются отношения между ее объектами.

Математика отличается от других наук не только своим предметом, но и методами. Конечно, в математике широко используются и общенаучные методы: индукция и дедукция, аналогия и эксперимент, идеализация и формализация, гипотеза и т. д. Однако многие отрасли математического знания имеют и свои специфические методы (доказательство, математическая индукция, аксиоматический метод, метод координат и т. п.), а, кроме того, названные общенаучные методы в математике приобретают особенности, свойственные только математике[1].

Наиболее важным методом математического познания является *доказательство*, с открытием и становлением которого за математикой закрепляется понимание доказывающей науки. «Со времен греков говорить “математика”, – пишут в связи с этим Бурбаки, – значит говорить “доказательство”»[2].

Идея доказательства возникает, видимо, сначала как идея возможности объяснения достаточно большого числа отдельных наблюдений одним общим законом, с которой, по мнению некоторых историков науки, и берет свое начало собственно наука как таковая. В этом случае осознание того факта, что в любом прямоугольном треугольнике справедливо соотношение $a^2 = b^2 + c^2$ (при условии, что a – сторона, лежащая против прямого угла, а b и c – две другие стороны этого треугольника), то есть открытие «теоремы Пифагора» являет нам один из первых известных примеров подлинно научного достижения.

В дальнейшем эта идея требует некоторого подтверждения уже не эмпирического, а логического, что и приводит к поиску такого обоснования общего положения, при котором оно является необходимым (то есть логическим) следствием, вытекающим из других геометрических свойств. Так, например, вышеназванная теорема Пифагора доказывалась математиками Древнего Востока с помощью двух квадратов, один из которых вписан в другой так, что каждая его вершина принадлежит одной из сторон этого второго (большего) квадрата, а каждая из сторон, одновременно, является гипотенузой одного из полученных при этом четырех прямоугольных треугольников.

Понятно, что в этом случае площадь большего квадрата оказывается равной сумме $a^2 + 2bc$, где a^2 – площадь меньшего квадрата (со стороной a), а $2bc$ – сумма площадей четырех равных треугольников, катеты которых равны b и c.

Но так как, с другой стороны, площадь большего квадрата равна квадрату его стороны, то есть квадрату суммы катетов $(b + c)^2$ или $2bc + b^2 + c^2$, то становится очевидным, что $a^2 = b^2 + c^2$.

Главный вывод, который можно сделать из сказанного, сводится к тому, что в этом случае наглядным образом представлен механизм математического доказательства – дедуктивное рассуждение, в котором с помощью только логических аргументов из известных фактов выводятся новые свойства, как правило, логически не вытекающие непосредственно из имеющихся данных.

Такое понимание процедуры доказательства вполне соответствует общепринятой его трактовке, при которой доказательство предстает как рассуж-

---

[1] См., например: В. В. Мадер. Введение в методологию математики. – М.,1995.

[2] Н. Бурбаки. Теория множеств. – М., 1965. –С. 23.

дение, в процессе которого обосновывается истинность некоторого положения (теоремы). В математике доказательство связано, прежде всего, с дедукцией. Именно дедуктивный характер этой процедуры отличает математику от естествознания и других эмпирических наук. Доказательство оказывается необходимым для того, чтобы логически подтвердить результат, который мог быть получен с помощью интуиции или опытным путем. Оно служит для упорядочения, обоснования и систематизации нового знания, для определения места этого знания в содержании математики.

Являясь образцом доказательства для любых наук, математическое доказательство в последнее время внутри самой математики подвергается пересмотру. Некоторые математики и логики считают, что математическое доказательство не обладает абсолютной убедительностью и не гарантирует истинности доказанного утверждения[1].

Здесь, прежде всего, речь идет о *строгости* и *надежности* доказательства. Проблема строгости и надежности доказательства может быть сформулирована в виде следующего вопроса: «Является ли любое строгое доказательство надежным и всякое ли надежное доказательство есть строгое доказательство?» Для ответа на поставленный вопрос необходимо определиться с понятиями строгости и надежности.

Обычно, говоря о строгости доказательства в математике, имеют в виду его конечность, завершенность. Но кроме этого предполагают наличие и такого его свойства как *герметичность*.

«Утверждая, что приведенное выше доказательство строго, – пишет В. Я. Перминов, – мы предполагаем, прежде всего, что оно выведено из определенного конечного числа утверждений и не использует никакой информации, выходящей за пределы этих утверждений. Строгое доказательство, таким образом, это доказательство из конечного числа явных утверждений и герметичное по отношению к ним, то есть не использующее никакой информации, кроме той, которая в них содержится. Обосновать строгость математического доказательства – это значит, прежде всего, обосновать его герметичность по отношению к некоторому данному множеству посылок»[2].

Иными словами, герметичность доказательства определяется отсутствием в нем каких-либо неявных предпосылок, то есть таких предпосылок, которые не оговорены условиями, не представлены в нем явным образом.

Однако конечность и герметичность доказательства не является в полной мере основанием для того, чтобы считать его абсолютно строгим. Для такой оценки необходима еще и уверенность в том, что используемые в доказательстве логические средства также абсолютно надежны. Но и это еще не все.

Вполне возможна ситуация, когда из одной и той же системы аксиом с помощью одного и того же логического аппарата и одного и того же способа доказательства доказываются два противоположных друг другу утверждения. В этом случае говорят о противоречивости системы аксиом, что, естественно, вызывает вопрос об однозначности доказательства.

Таким образом, проблема строгости математического доказательства оказывается триединой, то есть включающей в себя проблему обоснования его герметичности, проблему надежности логического инструментария, ис-

---

[1] См., например: И. Лакатос. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. – М.,1967.

[2] В. Я. Перминов. Развитие представлений о надежности математического доказательства. – М., 2004. – С. 5–6.

пользуемого в доказательстве, а также проблему обоснования непротиворечивости системы посылок, в которой используется данное доказательство[1].

Теперь, что касается надежности математического доказательства. Надежное доказательство (нередко его называют *завершенным*) – это доказательство, которое не может быть опровергнуто с помощью контрпримеров.

«Контрпримеры – пишет по этому поводу М. Клайн, – подрывают старые доказательства, лишая их силы. Доказательства пересматриваются ...»[2]. Они могут быть отброшены как несостоятельные, а на их место приходят совершенно новые, отличные по своей основной идее доказательства. А может быть и так, что возникнут какие-то новые варианты старых доказательств.

Надежность доказательства нередко определяется и как его *достоверность*, понимаемая как соответствие доказанного утверждения фактическому положению дел в некоторой внутриматематической или физической реальности[3]. Оба варианта трактовки надежности являются взаимозаменяемыми.

Из сказанного о строгости и надежности математического доказательства совершенно очевидно, что всякое строгое доказательство является надежным, но не любое надежное математическое доказательство представляет собой строгое доказательство. Так, например, все геометрические доказательства у Евклида – надежны. Все они «не подвержены контрпримерам и подтверждаются как корректные во всех последующих более строгих изложениях геометрии, но они, очевидно, не являются строгими, поскольку часто опирались на предпосылки, не содержащиеся в оговоренных условиях»[4].

Такое положение дел не только в геометрии Евклида. История математики предоставляет нам массу примеров доказательств, веками считавшихся строгими (естественно, в понимании строгости для того времени), в которых по прошествии времени после более глубокого анализа обнаруживались неявные предпосылки.

Иными словами, такие доказательства оказывались негерметичными, то есть нестрогими.

Почему же многие негерметичные доказательства принимаются математиками за строгие, герметичные? Скорее всего, это происходит в силу того, что такие доказательства кажутся им достаточно убедительными, интуитивно ясными. Однако очевидность, интуитивная ясность не может служить логическим критерием правильности того или иного математического рассуждения.

Из сказанного вытекает вывод о том, что при анализе математического доказательства с точки зрения его строгости необходимо учитывать наличие в нем как логических, так и интуитивных составляющих.

(Проблема соотношения логики и интуиции в математике – это особый вопрос. Его мы рассмотрим несколько позднее.)

Возвращаясь к математическому доказательству, необходимо заметить, что в математике соседствуют два существенным образом отличных друг от друга доказательства. Одно из них называют *содержательным*, а второе – *формальным*.

---

[1] Там же. – С. 7.

[2] М. Клайн. Математика. Утрата определенности. – М., 1984. – С. 361.

[3] См. В. Я. Перминов. Развитие представлений о надежности математического доказательства. – С. 13.

[4] В. Я. Перминов. Природа математического познания // Философия математики и технических наук. Под общ. ред. проф. С. А. Лебедева : учебное пособие для вузов. – М., 2006. – С. 47.

Совершенно очевидно, что это связано с тем, какая аксиоматика используется в том или ином случае. В случае содержательного доказательства имеют дело с рассуждением «относительно математических объектов (чисел, фигур, функций, операций и т. п.), которое опирается на очевидные или данные в определении свойства этих объектов и протекает в рамках обычной логики научного рассуждения»[1].

Никаких особых требований при этом к доказательству не предъявляется. Главное – чтобы оно было достаточно очевидным, ясным и убедительным. Используемая в доказательном рассуждении традиционная логика с ее правилами вывода и основными логическими законами не подвергается сомнению.

В случае формального доказательства дело обстоит иначе. К такому доказательству предъявляются особые требования. Оно должно быть, во-первых, таким, чтобы в нем вполне отчетливо были представлены не только все его составляющие со всеми их логическими связями и правилами вывода, то есть каждый шаг доказательства, но и основания каждой из посылок.

В самом общем случае формальное доказательство предстает как некая последовательность формул в формализованной теории, каждая из которых может быть аксиомой или формулой, выводимой из аксиом посредством допустимых в данной теории правил вывода[2].

Важнейшая особенность такого доказательства – его независимость от природы объектов рассуждения, объектами рассуждения здесь являются только формулы, которые конструируются на основе заданных правил. Понятно, что число шагов в формальном доказательстве, с помощью которых доказывается некоторая теорема, которая является последней формулой доказательного рассуждения, оказывается конечным. Все это вместе взятое и дает возможность достаточно просто убедиться в герметичности представленного доказательства.

Проблема надежности математического доказательства особенно остро проявляет себя сегодня в связи с разработкой больших международных проектов по созданию так называемых систем искусственного интеллекта. С помощью таких систем, как полагает российский математик А. Зенкин, возможна автоматизация «всего процесса математического познания на основе автоматического доказательства теорем, формальной верификации математических моделей сложных систем, математической поддержки процессов принятия решений, прежде всего, в военной области, в космических исследованиях, в ядерной физике и т. п.»[3].

Но так как такого рода системы опираются на исчисление предикатов, то при наличии дефектов в этом исчислении вполне возможны ошибки в оценке достоверности математических моделей сложных систем. Это было показано, например, в одной из работ А. Зенкина. В ней он пишет, что «в некоторых случаях приведение формул к сколемовской предваренной форме приводит к фатальному искажению семантики их содержательных интерпретаций – математических моделей реальных объектов», и что «неучет указанных дефектов исчисления предикатов в рамках ИИ-систем верификации ма-

---

[1] В. Я. Перминов. Развитие представлений о надежности математического доказательства. – С. 15.

[2] Там же. – С. 16.

[3] А. А. Зенкин. О некоторых семантических дефектах в логике интеллектуальных систем // Девятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ – 2004), Секция 3. Правдоподобные рассуждения и неклассические логики. – Тверь, Россия, 2004. Труды конференции. – Т. 1. – С. 271.

тематических моделей сложных систем может привести к непредсказуемым и нежелательным (катастрофическим) последствиям в процессе эксплуатации соответствующих реальных объектов»[1].

По его мнению, основным источником таких искажений являются теоремы аксиоматической теории множеств, «в которых по тем или иным причинам отсутствует явная формулировка необходимых условий их доказательства. С формальной точки зрения такие теоремы неопровержимы, однако, при восстановлении необходимых условий такие теоремы становятся либо ложными, либо недоказуемыми»[2].

Ситуация, связанная с определенным недоверием к математическому доказательству, во многом обусловлена еще и тем, что не существует единственного критерия оценки доказательства, который не зависел бы ни от времени, ни от условий, ни от того что следует доказать, ни тем более – от субъективных установок и предпочтений тех, кто использует то или иное доказательство. По сути дела, «... современные сомнения в строгости математического доказательства, – пишет в связи с этим В. Я. Перминов, – есть ... сомнения в правильности традиционной методологии применения математики, в надежности ее как одного из средств исследования природы»[3].

Вместе с тем, следует сказать, что, несмотря на критическое отношение к доказательству в математике, которое существует сегодня, оно продолжает широко и эффективно использоваться не только внутри ее самой, но и в других отраслях знания.

Теперь обратимся к дедуктивному выводу. Дедуктивный вывод, лежащий в основе математического доказательства, сам может базироваться на использовании аксиоматического или конструктивного методов. Неоспоримый приоритет в математическом познании принадлежит первому из них. *Аксиоматический метод* зарождается в античной математике и получает свое рациональное выражение в «Началах» Евклида.

Одной из фундаментальных особенностей этого метода является процесс создания с помощью тщательно выстроенных чисто логических аргументов цепочки утверждений, в которой каждое последующее звено соединено с предыдущими. Из этого следует, что в любой такого рода цепочке должно быть начало – самое первое звено, истинность которого не вызывает сомнений. Таким звеном и становятся *аксиомы.*

Именно в системе Евклида «уже достаточно четко проведена идея получения всего основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем, из некоторого, относительно небольшого числа утверждений – аксиом, истинность которых представлялась наглядно очевидной»[4]. Следует заметить, что эти аксиомы были «привязаны» к реальным пространственным объектам и отношениям между ними, которые человек практически осваивал на протяжении многих веков. Такое положение дел обусловливало изначальное соответствие абстрактных понятий и аксиом математики вполне определенному содержанию, поэтому в дальнейшем этот метод стали называть *содержательным аксиоматическим методом.*

Собственно доказательство в этот период развития математики в большинстве своем строились так, что каждая ранее доказанная теорема стано-

---

[1] Там же. А. А. Зенкин.

[2] Там же.

[3] В. Я. Перминов. Развитие представлений о надежности математического доказательства. – С.4.

[4] П. С. Новиков. Аксиоматический метод // Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 45.

вилась аргументом в доказательстве той или иной новой теоремы. Иначе говоря, в этот период преобладало прямое доказательство. Хотя из истории математики известно, что сам Евклид достаточно часто пользовался и таким косвенным доказательством, как апагогическое доказательство или доказательство «от противного», прекрасным примером которого может служить доказательство того, что $\sqrt{2}$ – не рациональное число, то есть, что оно непредставимо в виде дроби ***p/q***, где ***p*** и ***q*** – целые числа.

Вплоть до XIX в. принципы содержательного аксиоматического метода, на которые опиралась античная математика, оставались по существу неизменными, а сам этот метод эффективно использовался не только в математике, но и других областях научного познания. Создание Лобачевским неевклидовой геометрии показало ограниченность содержательной аксиоматики и привело к возникновению *формальной аксиоматики* (Гильберт).

В хорошо известной работе «Основания геометрии» Гильберта все основные объекты и отношения задаются формально, они не связаны с какими-либо определенными реальными объектами, они не имеют содержательного смысла. То же самое относится и к формулируемым Гильбертом аксиомам: они представляют лишь неявные определения основных объектов и связывающих их между собой отношений. Другими словами, аксиомы здесь не являются самоочевидными истинами, как в античной математике, они не связаны с какими-либо результатами практической деятельности человека, они всего лишь формальные предложения.

По сути дела, Гильбертом была предложена новая концепция аксиоматического метода, основная идея которой сводилась к тому, что все предложения математики, в том числе и законы логики, записывались при помощи особой символики в виде формул на основе некоторых правил и без использования слов обыденного языка. При этом процесс логического вывода заменялся «манипуляциями с такого рода формулами по точно и ясно указанным правилам», в соответствии с которыми из исходных формул механически получают новые формулы, которые, в свою очередь, становятся основой для получения других новых формул[1].

Иначе говоря, любая формальная аксиоматическая система характеризуется тем, что в ней имеются: 1) понимание системы аксиом как совокупности имплицитных определений исходных терминов, которые вместе с ее исходными предложениями должны быть точно перечислены; 2) строгие правила определения всех остальных терминов, на основе которых они вводятся в систему; 3) понимание того, что предмет этой системы – любые ее интерпретации и что процесс интерпретации системы отделен от процесса ее построения; 4) четкие формулировки требований непротиворечивости, полноты, разрешимости и независимости аксиом, а также доказательства их выполнимости в определенных аксиоматических системах с помощью моделирования[2].

Дальнейшие исследования формальных аксиоматических систем показали, что идея Гильберта, связанная с надеждой построения классической математики на основе формальной аксиоматики, в принципе невыполнима. Теоремы Геделя о неполноте непротиворечивой формальной арифметики и невозможности доказательства непротиворечивости формальной системы средствами, формализуемыми в самой этой системе, убедительно показали

---

[1] См.: А. Д. Александров. Основания геометрии. – М. 1987. – С. 265.

[2] См.: В. Н. Садовский. Аксиоматический метод построения научного знания / Философские вопросы современной формальной логики. – М., 1962. – С. 222.

существенную ограниченность программы Гильберта. Тем не менее, это не снижает заслуг в его стремлении формализовать математику. Тем более это не снижает в целом достоинств формального аксиоматического метода.

В современной математике аксиоматический метод уже не является доминирующим. Его интегративная роль, о которой говорили Бурбаки, отмечая, что аксиоматический метод учит находить, извлекать и исследовать общие идеи, которые скрываются за специфическими деталями той или иной математической теории[1], постепенно снижается.

Свидетельством этому являются интегративные процессы, идущие под воздействием иных методов и понятий (понятие странного аттрактора, идеи нестандартного анализа), возникших совсем недавно теорий (теория катастроф, структурное программирование и другие). В математике набирают силу тенденции, не укладывающиеся в рамки аксиоматической парадигмы, хотя без применения аксиоматического метода современная математика все же немыслима[2].

Конструктивный или *генетический метод*, используемый в математическом доказательстве, опирается на идею конструктивного процесса, результатом которого является объект, одинаковый с объектом **А**, называемый построением объекта **А**. Простейшим примером конструктивных объектов могут служить слова в фиксированном алфавите (наборе элементарных знаков – букв), процесс построения которых представляет собой выписывание каждого из этих слов буква за буквой. Частным случаем таких слов являются натуральные числа, получаемые из алфавита {0, 1} как слова, начинающиеся с нуля и не содержащие других его вхождений, или рациональные числа, построенные как слова из алфавита {0, 1, – , /}, где "–" – знак вычитания, а "/" – знак дроби.

Конструктивный метод вместе с понятиями абстракции потенциальной осуществимости, абстракции отождествления, рекурсивной функции, нормального алгорифма, конструктивной последовательности и другие стал основой возникновения и развития такой самостоятельной ветви математической науки, как конструктивная математика[3]. Конструктивная математика имеет следующие особенности:

- она опирается на свою собственную – конструктивную – логику, которая отличается от классической математической логики тем, что в ней, как и в интуиционистской логике, отвергаются законы исключенного третьего и двойного отрицания;
- в ней считается, что выводимость формулы «$\varphi \vee \psi$» предполагает выводимость формулы «φ» или формулы «ψ», а выводимость формулы $\exists x\ \varphi(x)$ – выводимость «$\varphi(t)$» для какого-либо конкретного терма вида t.
- в ней принимается тезис Черча, согласно которому всякая вычислимая в интуитивном смысле функция считается рекурсивной.

В настоящее время успешно разрабатываются конструктивные теории функционального анализа, дифференцирования и интегрирования, метрических пространств и других разделов конструктивной математики.

---

[1] См.: Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963. – С. 248.

[2] См.: А. А. Касьян. Математический метод: проблема научного статуса. – Куйбышев, 1990. – С. 38–39.

[3] См., например: А. А. Марков, Н. М. Нагорный. Теория алгорифмов. – М., 1984; Н. А. Шанин. О конструктивном понимании математических суждений / Труды Матем. Ин-та АН СССР. – М., 1952. – Т. 52. – С. 226–311; Математический энциклопедический словарь. – С. 284–287.

Хорошо известен в математике и *метод интерпретации,* который многие математики и философы совершенно справедливо считают одним из наиболее успешных методов в решении задач совершенствования математических теорий. Достаточно назвать разработку Декартом алгебраической геометрии, которая сама стала основанием для возникновения неевклидовых и многомерных геометрий.

Важнейшие достижения этого метода связаны с возможностью более легкого доказательства некоторого утверждения (теоремы) в системе понятий, отличной от той, в которой было получено (сформулировано) это утверждение.

Интерпретация в математике – это, прежде всего, процедура сопоставления всем исходным понятиям и отношениям некоторой теории **T** каких-либо математических объектов и отношений между ними. При этом сами эти объекты являются элементами некоторой математической системы и могут рассматриваться теорией $\mathbf{T_1}$. В этом случае говорят, что эта система математических объектов представляет собой интерпретацию теории **T** в теории $\mathbf{T_1}$. Результатом процедуры интерпретации является то, что любому высказыванию теории **T** найдется соответствующее ему высказывание в теории $\mathbf{T_1}$. При истинности в данной интерпретации всех аксиом теории **T** эту интерпретацию называют *правильной*[1].

Правильные интерпретации в математике имеют большое значение при установлении непротиворечивости теории, а также в решении вопроса о независимости той или иной системы аксиом. Именно методом интерпретации была доказана, например, непротиворечивость «воображаемой геометрии» Лобачевского относительно геометрии Евклида.

Учитывая то, что современная математика может рассматриваться как формальная наука, необходимо сказать и об интерпретации формализованных теорий. В этом случае интерпретация предстает как «задание смысла выражений соответствующего формализованного языка путем построения модели»[2].

Еще одним важным методом, который широко и успешно используется в математике, является *аналогия*, благодаря которой устанавливается общность самых отдаленных ее областей, и нередко создаются ее обобщающие теории. Аналогия в математике понимается чаще всего как некоторое сходство между теми или иными объектами, как полная или частичная их изоморфность или гомоморфность, полное или частичное соответствие свойств объектов и операций над этими свойствами, иначе говоря, как определенное тождество каких-либо систем свойств математических объектов.

К основным типам математических аналогий можно отнести аналогии применения, обобщения, связи или контакта, преобразования, предельную и тривиальную аналогии[3].

Аналогия применения представляет собой по сути дела умозаключение по аналогии, позволяющее применять одни и те же математические средства к различным по своей природе, но имеющим достаточно глубокое внутреннее сходство, системам объектов. В этом случае одно и то же уравнение или некоторая их система является интерпретацией разнообразных областей по ка-

---

[1] См.: Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 242.

[2] Там же.

[3] См. об этом подробнее: Е. А. Беляев, Н. А. Киселева, В. Я. Перминов. Некоторые особенности развития математического знания. – М., 1975. – С. 28–43.

ким-то определенным характеристикам. Так, например, закон Ньютона о взаимодействии двух тел и закон Кулона о взаимодействии двух электростатических зарядах можно записать с помощью одной и той же формулы, а одна и та же система дифференциальных уравнений может использоваться в электродинамике, в гидравлике и атомной физике. В самой математике такую интерпретацию нередко называют *инвариантом.* Хорошо известны такие инварианты как алгебры Ли, фундаментальные группы, подпространства векторных пространств и т. п.

Аналогия обобщения встречается в математическом анализе и геометрии, в теории функций действительного и комплексного переменного и в теории множеств. Характерной особенностью аналогии обобщения является то, что второй сравниваемый объект конструируется в самом процессе аналогии на основе частного случая (первого сравниваемого объекта). Примерами такого рода аналогии могут служить формулировки и доказательства свойств функций многих переменных, исходя из формулировок и доказательств свойств функций одной переменной, расширение метрических пространств до равномерных пространств, переход от действительных чисел к комплексным и кватернионам и т. д.

Аналогия связи или контакта состоит в установлении связи хотя бы между двумя различными системами объектов, которая выражается в частичном изоморфизме или частичном же гомоморфизме. Такого рода аналогия существует, например, между несобственными интегралами и числовыми рядами, числовыми и функциональными телами, теорией чисел и теорией функций. Эта аналогия позволила Декарту создать фундамент новой математической отрасли – алгебраической геометрии, позднее названной линейной алгеброй.

Аналогия преобразований заключается в установлении совпадающих свойств у некоторых систем математических объектов после их преобразования. Этот тип аналогии широко используется в различных областях математики: конфорное и проективное отображения в геометрии, автоморфные и гомеоморфные преобразования в алгебре и топологии, в теории инвариантов и ковариантов и т. п.

Суть *предельной аналогии* состоит в том, что объектом сравнения выступает возникшая в результате предельного преобразования математическая система, имеющая сходные свойства с каким-либо другим объектом математики. Эта аналогия может возникнуть: между некоторым объектом и его предельным преобразованием (в теории пределов для рядов, последовательностей или функций); между двумя различными объектами после предельного преобразования каждого из них (функция и ее производная); наконец, между объектом не измененным, не преобразованным и объектом, над которым предельное преобразование совершено.

Тривиальная аналогия представляет собой применение какого-либо одного приема, метода или правила к объектам, которые имеют достаточно широкие системы одинаковых свойств. Эта аналогия применяется чаще всего к однородным, а также к симметричным объектам.

Оценивая в целом роль математической аналогии для математического познания, необходимо отметить, что она способствует получению новых результатов, а, кроме того, формирует образ математики как целостной системы знания, надежно связывая ее различные области. Роль математической аналогии не сводится лишь к решению собственно математических задач, она сама служит основой для весьма эффективного и широко используемого в различных областях познания *метода математического моделирования.*

В самом общем плане под математической моделью понимают «приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики»[1]. Математическую модель можно представить и как математическую структуру, объекты и их отношения которой можно интерпретировать различным образом. Являясь количественно-структурными по своему характеру и символически-оперативными по способу применения, современные математические модели способны описывать различные зависимости, как между величинами, так и между структурными отношениями. Они применяются не только в естествознании, но и в современной психологии, социологии, лингвистике, теории управления, других общественных и гуманитарных науках. Роль математического моделирования резко возросла на современном этапе развития общества. Это связано с активным использованием во всех областях науки и практики новых вычислительных и информационных, прежде всего компьютерных, технологий.

Кроме рассмотренных методов, находящих свое применение и в других областях научного познания, в математике используются и методы, которые имеют весьма узкие границы. К ним можно отнести, например: методы вариационного исчисления, метод Монте-Карло, метод Ньютона, метод Пикара, метод коллокации, метод интегрирующего множителя и другие

§2. Объекты математики и проблема их существования

Многие естественные науки в той или иной мере оперируют идеальными объектами, то есть объектами, созданными воображением человека, или являющимися результатом его мыслительной деятельности. Поэтому становится ясной важность постановки и решения вопроса о существовании объектов для каждой области научного познания. Для математики эта проблема обостряется в связи с высоким уровнем ее абстракций, а также тем, что эта наука теснейшим образом связана с естествознанием и техникой, а в последние годы широко используется и в гуманитарном знании.

Кроме того, необходимо учитывать еще и то, что математика использует специфический формализованный язык (точнее различные формализованные языки), поэтому для решения проблемы существования ей приходится каждый раз выбирать и соответствующие ему специфические логические средства. Выбор же логических средств вместе с их интерпретацией не является собственно математической проблемой. Это проблема носит уже методологический, философский характер.

Вопрос о природе и существовании математических объектов возникал в математике на разных этапах ее развития. Наиболее яркие его проявления достаточно хорошо известны. Прежде всего, здесь можно назвать проблему иррациональных чисел (ни одно из которых, как известно, не представимо в виде дроби, числитель и знаменатель которой – рациональные числа), возникшую в математике Древней Греции. Еще одной похожей проблемой стала проблема отрицательных чисел, так как в начальный период развития алгебры не существовало никаких известных ученым физических объектов, опираясь на которые можно было бы получить абстракцию отрицательного числа.

---

[1] Математический энциклопедический словарь. – С. 343.

Еще один, не менее известный пример – «мнимые», или «комплексные» числа. В математике с ними оперируют с конца XVI в. Причем точно так же, как с действительными. Хотя вплоть до XVIII в. не существовало не только какого-либо удовлетворительного общепринятого их определения, но даже какой-нибудь интерпретации.

Более близкими к нам по времени примерами такого рода являются проблемы, возникшие в связи с открытием объектов, получивших название «математических монстров». Открытие кривых, которые не имели касательной в любой своей точке, построение кривой, которая полностью заполняет квадрат, а в дальнейшем – конструирование сотен таких объектов, само существование которых противоречило здравому смыслу.

Суть проблем, связанных с этими объектами, состоит в том, что существование всех названных объектов-«монстров» логически следует из принятых в математике аксиом.

В силу всего вышесказанного становится ясно, что проблема существования объекта математики, так или иначе, предполагает анализ его природы, его онтологического статуса, его *отношения к реальному миру*.

В истории науки, прежде всего естествознания и тесным образом связанной с ним математики, существуют различные подходы к пониманию онтологического статуса математических объектов, наиболее интересные из которых были представлены выше в связи с рассмотрением основных подходов и проблем философии математики.

Остановимся теперь на основных и наиболее известных точках зрения на природу математических объектов более подробно.

Прежде всего, среди всего многообразия позиций по этому вопросу можно выделить *наивно-материалистическую* точку зрения. Она выражается в убеждении, что все математические объекты так или иначе взяты из реального мира и, следовательно, знание, получаемое в результате исследования этих объектов, является знанием об окружающем человека материальном мире. Такой подход в своей основе вполне оправдан, ибо он позволяет объяснить причины приложимости математики в самых различных областях науки и практики. Обоснованность такого подхода подтверждается и историей математики, которая убедительно показывает, что между математическим разумом и природой существует тесная взаимосвязь. И арифметика, и геометрия, и математический анализ, например, возникли в силу необходимости иметь дело с объектами и явлениями реального мира.

Вместе с тем, наивный материализм оказывается не способным дать ответы на многие вопросы, связанные с интерпретацией математического знания. «Главная трудность, с которой не способна справиться эта концепция, – пишет Б. С. Грязнов, – состоит в том, что для большей части понятий и утверждений науки не удается указать непосредственного референта в материальной действительности. Прежде всего, это относится к математике»[1].

По-иному представляют природу математических объектов сторонники *математического реализма,* который нередко отождествляют с *платонизмом,* хотя, с моей точки зрения, полное их отождествление не правомерно.

Общим для платонизма и реализма в математике является то, что как первый рассматривает «математические объекты: числа, фигуры, множества как существующие в особом мире, данные до их собственно математического

---

[1] Б. С. Грязнов. Логика. Рациональность. Творчество. – М., 1982. – С. 21.

анализа»[1], так и второй полагает все объекты математики абстрактными, вечными и причинно не связанными с материальными предметами и эмпирическим опытом.

Платонисты признают, например, существование актуальной бесконечности в математике, считают возможным применять к ней закон исключенного третьего и «чистые» (косвенные) доказательства существования. Для них заведомо существующий мир идеальных объектов таков, что знание о них и об их отношениях определенным образом реализуется в той или иной теории. В силу этого вполне возможно объяснить причину независимости математики от опыта и достоверного характера ее истин.

Реалисты также признают вещественную природу математических объектов. Например, они не сомневаются в том, что существуют вполне реальные множества, представляющие собой некоторую совокупность элементов, которые можно поставить в соответствие тем или иным концептуальным составляющим теории.

Современный математический платонизм связан, прежде всего, с именами Фреге и Рассела, пытавшимися определить понятие «число» с помощью системы аксиом, в которой оно понималось как вполне конкретный объект, взятый вместе с его свойствами, а именно как натуральное число. Это направление получило свое развитие в работах Бернайса и Геделя. В некоторых из этих работ Гедель, например, пытается найти объяснение тому, как возможно познание человеком независимых от него сущностей математического мира[2].

Если выделить самое главное в современном математическом платонизме, то, по-видимому, это будет триединство следующих утверждений: «1) в математических теориях присутствуют концепты математических объектов (или их структур); 2) эти объекты являются абстрактными, ибо они не обладают пространственно-временной определенностью; 3) математическая реальность специфична. Она отличается, например, от физической реальности»[3].

В свою очередь, математический реализм характеризуется, как было сказано выше, прежде всего тем, что его представители настаивают на неязыковом или нементальном характере объектов математики, а также на вещественной их природе. В силу этого становится очевидным, что полного совпадения позиций платонизма и реализма в математики нет, хотя бы потому, что вещественное не тождественно идеальному.

Привлекательность обеих довольно близких друг другу концепций вполне понятна и объяснима. Действительно, если бы реальность математических объектов была такой же, как реальность физических тел, – пишет исследовательница современного математического платонизма Мэдди, – то вполне возможно было бы мыслить некий единый мир, состоящий из физических и математических сущностей, находящихся в стройном взаимодействии. Вместе с тем, она отмечает, что такие математические сущности, будучи совершенно независимыми от нашей мысли, должны быть полностью ей трансцендентны, а потому становится совершенно неясно как они могут стать достоянием научного знания[4].

---

[1] Е. А. Беляев, В. Я. Перминов. Философские и методологические проблемы математики. – М., 1981. – С. 144.

[2] См.: K. Godel. What is Cantor's Continuum Problem // Beneceraff and Putman (eds.) Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. – P. 470–485.

[3] В. А. Канке. Философия математики, физики, химии, биологии : учебное пособие. – М., 2011. – С. 54.

[4] P. Maddy. Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990. – P. 21.

Кроме того, необходимо отметить, что ни математический реализм, ни математический платонизм не способны дать в полной мере удовлетворительного ответа на вопрос о причинах приложимости математических теорий к естествознанию и другим частным наукам.

Математическому платонизму, а вместе с ним, в определенной мере и реализму, противостоит *номинализм*, суть которого сводится к тому, что существование абстрактных объектов (универсалий) в математике отрицается, а ее объектами считаются лишь индивидуальные или эмпирические, в конечном счете, объекты. Представители современного математического номинализма предприняли попытку построить математику на основе формализованных языков, полагая возможным исключить из математики абстрактные понятия, заменив их соответствующей «языковой моделью», в которой значением переменных могут быть лишь индивидуальные, эмпирические объекты[1].

Реализация программы номиналистов оказалась трудно выполнимой. Попытки Куайна, например, реформировать язык, чтобы он не допускал возможности использования универсалий в качестве значений переменных, были в целом оценены как несостоятельные.

Еще одна точка зрения на объекты математики связана с понятием *структуры.* В этом случае, как мы уже отмечали, каждый объект рассматривается как элемент некоторой системы отношений. Структурный подход к математике активно развивается французской школой математики, его интенсивно используют и некоторые английские и американские исследователи современной математики и науки в целом[2].

Структурализм в математике, как нередко называют этот подход, так же, как и номинализм, противостоит современному математическому платонизму.

Г. Б. Гутнер, например, полагает, что понятие структуры становится основной категорией математического и естественнонаучного мышления благодаря трансцендентализму кантовского типа. Более того, он считает, что трансцендентализм дает полное обоснование структурализма: именно в рамках трансцендентального рассмотрения становится понятным каким образом формальная система (то есть структура) оказывается адекватным средством описания физической реальности и почему, в частности, математика столь эффективна при изучении природы. Иначе говоря, Гутнер утверждает, что структурализм обладает теми же преимуществами, которые некоторые философы математики находили лишь у реализма[3].

Наиболее настойчиво структурный подход в математике продвигали математики, объединившиеся в группу под псевдонимом «Н. Бурбаки» и пытавшиеся в своих работах представить математику как единую отрасль знания, представляющую собой структуру, объединенную аксиоматическим методом. Основными (порождающими) структурами при этом у них выступали алгебраические и топологические структуры, а также структуры порядка, различные композиции которых также являются структурами. С точки зрения математиков этой группы все математические структуры являются априорными конструкциями, поэтому, если они и совпадают с объективной ре-

---

[1] См.: Философский энциклопедический словарь. – М., 1989. – С. 427; Г. Г. Шляхин. Соотношение понятия и индивида в математическом знании // Методологический анализ математических теорий. – Москва, 1987.

[2] См., например: В. С. Черняк. Структуралистские концепции истории науки // Принципы историографии естествознания. – Москва, 1993. – С. 296–314.

[3] См., например: Г. Б. Гутнер. Интерпретация существования в математике / Философские исследования. – № 1, 1995. – С. 212–225; Он же. Онтология математического дискурса. – М., 2001.

альностью, то лишь по чистой случайности. «В своей аксиоматической форме, – пишут Н. Бурбаки, – математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя, по существу, и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм»[1].

Необходимо заметить, что в современной математике понятие «структура» вместе с другими, связанными с ним понятиями, занимает центральное место. Во многом это обусловлено тем, что общие теоремы основных типов структур служат чрезвычайно мощными инструментами математической «техники». Доказывая такого рода теоремы, математик, по сути дела, показывает, во-первых, что они применимы к любым конкретным объектам, отношения между которыми соответствуют тому или иному типу структур. А во-вторых, что следует из «во-первых», что к этим конкретным объектам применимы все теоремы теории данного типа структур.

Из этого с необходимостью вытекает философский и методологический вывод о том, что для современной математики, понимаемой в контексте структурализма, совершенно не важна природа математических объектов, главное для нее – сущность и характер отношений между этими объектами[2].

Есть и другая трактовка структурализма в математике. Ее приверженцы настаивают на том, что математика представляет собой совокупность только алгебраических структур или структур, которые всегда можно свести к алгебраическим[3].

В математике существует и такое понимание ее объектов, согласно которому все они признаются существующими лишь тогда, когда осуществлено их построение, а доказательства фактически проведены. Этой точки зрения придерживаются представители интуиционистской и конструктивной математики. Но, если первые считают, что главным в математической деятельности являются не язык или логика, а умственные построения на основе интеллектуальной интуиции, то вторые указывают, что умозрительный характер имеют не сами построения, а наши рассуждения о них, в особенности тогда, когда в них начинают использоваться абстракции[4].

Наконец, нельзя еще раз не напомнить и о таком взгляде на математические объекты, при котором вопрос об их существовании признается надуманным (это – представленный выше фикционализм). Объекты математики в этом случае считаются фикциями, а в лучшем случае о них говорят в модальных терминах, заявляя лишь о «*возможности* их существования».

Таким образом, из всего вышесказанного в этом параграфе, можно сделать вывод о том, что вопрос о существовании и характере объектов математики, да и, по-видимому, любых идеальных объектов теоретического знания, оказывается зависимым не только от тех или иных внутринаучных детерминант, но и от признания исследователем вполне определенных методологических принципов и мировоззренческих установок.

---

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963. – С. 259.

[2] См.: Математика // URL: http://www.krugosvet.ru/articles/27/1002768/1002768a7.htm (дата обращения: 28.02.2012); Н. Мулуд. Современный структурализм. Размышления о методе и философии точных наук. – М., 1973.

[3] См., например: S. Shapiro. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology: Oxford: Oxford University Press, 1997.

[4] См., например: А. А. Марков. Конструктивная математика // Математический энциклопедический словарь. – М., 1983. – С. 285.

Иначе говоря, изучая объекты математического знания с точки зрения самой науки, так сказать «изнутри», средствами лишь самой математики, оказывается невозможным игнорировать какую-либо философскую точку зрения на их природу.

§3. Математика и реальность: отображает ли математика реальный мир?

Понимание математики и ее взаимоотношения с объективным миром неразрывно связано с решением вопроса о том, почему математика вообще оказывается применимой к реальному миру? Для многих ученых XVI–XVIII вв. ответ на этот вопрос казался простым и ясным. Будучи убежденными в том, что человек и мир природы, в котором он живет, созданы Богом, они полагали, что гармония, совершенство и строгий порядок, существующие в мире есть не что иное, как реализация заданных математикой отношений. Поэтому-то познание математики, с их точки зрения, и открывало возможности познания мира. Декарт, например, считал, что созданные человеческим разумом математические конструкции являются вполне достаточным основанием для выведения с помощью умозрения новых истин о внешнем мире, ибо именно благодаря Богу мышление человека может соответствовать реальности, именно Бог – «даритель всех светочей истины»[1].

На этой же позиции стояли Галилей, Ньютон, Лейбниц и другие математики, умонастроение которых весьма ярко были представлены в одной из работ У. Джеймса. «Когда были открыты первые математические, логические и физические закономерности, первые законы, проистекавшие из этих открытий, ясность, красота и упрощение настолько захватили людей, что они уверовали в то, будто им удалось доподлинно расшифровать непреходящие мысли Всемогущего, – писал он. – Его разум громыхал громовыми раскатами и эхом отдавался в силлогизмах. Бог мыслил коническими сечениями, квадратами, корнями и отношениями и геометризировал, как Евклид. Бог предначертал законы Кеплера движению планет, заставил скорость падающих тел возрастать пропорционально времени, создал закон синусов, которому свет должен следовать при преломлении …

Бог измыслил архетипы всех вещей и придумал их вариации, и когда мы открываем любое из его чудесных творений, то постигаем его замысел в точном предназначении»[2].

Кроме божественной точки зрения на математику существовали и иные объяснения ее эффективности. Так, например, Дидро, полагал, что аксиомы математики приложимы к реальному миру в силу того, что математики специально подбирают их таким образом, чтобы многочисленные следствия, вытекающие из этих аксиом, были адекватны опыту. Математик при этом уподоблялся игроку: оба играют в некий созданный воображением на основе ими же сформулированных абстрактных правил ирреальный предмет, пытаясь получить сведения о его свойствах[3]. А сама математика представала как «игра ума», совпадение результатов которой с объективным миром во многом оказывалось делом случая.

---

[1] Р. Декарт. Сочинения. В 2 т. – М., 1989. – Т. 1. – С. 347.

[2] См.: М. Клайн. Математика. Утрата определенности. – М., 1984. – С. 82.

[3] См.: Д. Дидро. Мысли об объяснении природы. Соч. – Т. 1. – М.–Л., 1935.

Последователи эмпиризма, основные идеи которого были рассмотрены выше, считают, что из того, что математик, используя в своих рассуждениях те или иные символы, «не думает о тех вещах, которые эти знаки обозначают», не следует вывод о том, что утверждения математики не касаются самих вещей. Наоборот, отсутствие каких-либо идей о тех или иных конкретных вещах в сознании математика при оперировании с символами, по мнению, например, Дж. Ст. Милля, свидетельствует о справедливости математических истин относительно всех вещей.

«Утверждения математики, – с его точки зрения, – это утверждения не о символах, а о всех вещах, которые этот символ обозначает»[1].

Основанием нашей веры в то, что, например, 2 + 1 = 3, пишет Дж. Ст. Милль, является личностный опыт каждого отдельного изолированного индивида. Это равенство, является вербальным выражением эмпирического факта, который мы постоянно встречаем в своем непосредственном опыте. Действительно, в реальной жизни каждый человек сможет справиться с задачей распределения на подмножества (подгруппы) множества, состоящего из каких-либо трех вещей. Одним из вариантов такого распределения и является распределение их на две группы из двух вещей и одной отдельно взятой вещи. Эта истина постоянно подтверждается человеческой практикой. Ее результаты находят свое обобщение в алгебре, буквенные символы которой изображают числа. То же самое происходит и в геометрии, утверждает Дж. Ст. Милль: «Всякая теорема геометрии есть закон внешней природы и может быть установлена путем обобщения наблюдений и опытов»[2].

С такой позицией были не согласны неопозитивисты, многие из которых считали, что математика, которую они, по сути дела, сводили к логике, является лишь вспомогательным аппаратом, служащим для осуществления успешных языковых преобразований в науках о фактах. Б. Рассел, например, утверждал, что «...математическое знание не выводится из опыта путем индукции; основание, по которому мы верим, что 2 + 2 = 4 не в том, что мы так часто посредством наблюдения находим на опыте, что одна пара вместе с другой парой дает четверку. В этом смысле математическое знание все еще не эмпирическое. Но это и не априорное знание о мире. Это на самом деле просто словесное знание о мире. «3» обозначает «2 + 1», а «4» означает «3 + 1». Отсюда следует, что «4» означает то же, что «2 + 2». Таким образом, математическое знание перестало быть таинственным. Оно имеет такую же природу, как и «великая истина», что в ярде 3 фута»[3].

Свою гипотезу природы математики предложил А. Пуанкаре. Опираясь на открытие неевклидовых геометрий, которые показали, «что одному и тому же пространству могут соответствовать различные, но эквивалентные геометрии»[4], он пришел к выводу, что опыт «показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильная, а то, какая наиболее удобна»[5].

Другими словами, Пуанкаре считал, что математика имеет *внеопытное* происхождение и сама по себе ничего не говорит о реальном мире, а ее фундаментальные понятия, аксиомы и принципы есть лишь произвольные соглашения, конвенции между учеными, которые устанавливаются исходя из тех или иных общепринятых соображений. Являясь продуктами свободной

---

[1] Дж. Ст. Милль Система логики силлогистической и индуктивной. – М.,1914. – С. 561.

[2] Там же. – С. 583.

[3] В. Рассел. История западной философии. – М., 1959. – С. 839.

[4] Философский энциклопедический словарь. – М., 1989. – С. 272.

[5] А. Пуанкаре. О науке. – М., 1983. – С. 55.

деятельности ума, результатом «свободного выбора», конвенции становятся регулятивами научного познания.

Такой взгляд на математику, получивший название *конвенционализма,* разделяли, например, философы Мах и Авенариус, а в 30-х гг. XX в. наибольшими его приверженцами стали математики Карнап и Айдукевич.

Вместе с тем, было бы неправильно гиперболизировать роль конвенции в математике, тем более считать эту науку «произвольным творением ума». Тот же самый Пуанкаре, например, отмечал, что конвенции, хотя и представляют собой «произвольные» соглашения, произвольны условно. Все они ограничены практической деятельностью, опытом человека, на который тот опирается в своем выборе. Более того, Пуанкаре подчеркивал, что соглашения и скрытые, невербализованные определения, возведенные в научные принципы, которым «наш ум приписывает абсолютное значение» извлечены тем не менее «из экспериментальных законов»[1], что конвенции нельзя абсолютизировать, так как в этом случае от науки не осталось бы ничего.

Такое понимание конвенции вполне согласуется с современным подходом к изучению научного познания, где она предстает одной из его процедур, предполагающей введение определенных норм, правил, требований, знаковых систем и т. п. на основе явного или неявного соглашения субъектов познавательной деятельности. При этом конвенция всегда имеет объективные основания и обусловлена коммуникативной, а значит, – социально-исторической природой научного познания[2].

В современной математике и философии этой науки существует и точка зрения, наиболее отчетливо представленная Кантом, согласно которой чувственные восприятия человеком пространства и времени определенным образом организуются в соответствии с присущими его разуму *доопытными (априорными)* структурами.

Впервые термин «априорное» появляется в работах Декарта и Лейбница как противопоставление термину «апостеорное» (основанное на чувственном опыте)¸ что было связано с концепцией «врожденных идей». Более глубокие корни этого концепта обнаруживаются в платоновских рассуждениях об анамнезисе, «припоминании» души в процессе познания «идей», которые она созерцала до ее соединения с телом. У Лейбница концепт априорного связывается с особым классом истин, называемых им «истинами разума», которые подчиняются требованиям закона непротиворечия. Иными словами, априорное для Лейбница – аналитически-умопостигаемое[3].

У Канта, в отличие от Лейбница, под «априорным» понимается не какая-то содержательная идея (например, идея числа), а бессодержательная (априорная) «форма». При этом априорное является необходимой составляющей познавательного процесса, так как оно «оформляет» апостеорное, то есть придает определенную форму полученному с помощью чувственного опыта «содержанию».

Кроме того, Кант показывает неправомерность подхода, при котором противопоставления «априорное» – «апостериорное» и «аналитическое» – «синтетическое» считаются эквивалентными, то есть – ошибочность прямого ото-

---

[1] А. Пуанкаре. О науке. – М., 1983. – С. 90.

[2] См.: Л. А. Микешина, М. Ю. Опенков. Новые образы познания и реальности. – М., 1997. – С. 31; Л. А. Микешина. Философия науки: Современная эпистемология. Научное знание в динамике культуры. Методология научного исследования : учеб. пособие. – М., 2005. – С. 111–112.

[3] См., например: С. Л. Катречко. К вопросу об «априорности» математического знания: URL : http://www.philosophy.ru/library/katr/math_conf2001.html (дата обращения: 11.03. 2012)

ждествления Лейбницем априорного и аналитического. Он сосредоточил внимание на анализе категории синтетического *a priori*.

В дальнейшем в истории философии утвердилось кантовское понимание априорного как синтетического *a priori* вместе с предложенным им «набором» так называемых «априорных форм», из множества которых Кант выделяет всего лишь две: пространство, являющееся основанием геометрии, и время, лежащее в основании арифметики. Такой подход обусловлен тем, что Кант принимает как данное декартову «протяженную субстанцию» и ньютоновские «абсолютное пространство» и «абсолютное время».

По Канту, «настоящие математические положения всегда априорные, а не эмпирические суждения, потому что они обладают необходимостью, которая не может быть заимствована из опыта»[1]. В силу этого математика и способна делать всеобщие и необходимые выводы.

Этой позиции придерживался, например, Гильберт, который в одной из своих работ отмечал, что «философы – и Кант является классическим представителем этой точки зрения – утверждали, что, кроме логики и опыта, мы имеем еще *a priori* известные знания про действительность ... Я думаю, что и математические познания основываются, в конечном счете, на таком наглядном созерцании и что для построения теории числа нам даже необходимо определенное наглядное установление *a priori*»[2].

Эту точку зрения разделял и Кассирер, у которого довольно большое количество работ по философии математики. Он полагает, например, что понятие числа не связано чувственной сферой человека. Основные отношения, господствующие в числовом ряду, по его мнению, немыслимы как свойства содержания данного представления, а сам акт счета являет нам не отношения вещей в себе, а лишь способ их отражения в восприятии посредством нашего Я[3].

Такое же положение дел, считает Кассирер, и в геометрии. И непрерывность, и бесконечность геометрического пространства ни коим образом не даны человеку в его ощущении пространства, их основанием являются «идеальные дополнения, которые мы к ним привязываем»[4].

Рассуждения и выводы Кассирера основываются на неприятии им традиционного подхода, в котором объективно существующая вещь противопоставляется субъективному представление о ней, что приводит к проблеме адекватности представления вещи. В силу этого Кассирер и принимает положение о том, что объективная реальность с необходимостью должна быть трансцендентна субъекту[5].

На внеопытном, идеальном характере математики настаивает и Гуссерль, некоторые идеи которого нашли свою поддержку у математиков. Для Гуссерля вся арифметика, например, представляется не чем иным, как некоторой формальной онтологией, как совокупностью созданных человеческим разумом средств, которые необходимы для преодоления несовершенства интеллекта, все ее понятия не что иное, как символы, многие из которых бессодержательны. Таковым, по его мнению, является, например, понятие акту-

---

[1] И. Кант. Критика чистого разума. Соч. в 6 т. – М.,1964. – Т. 3. – С. 113.

[2] D. Hilbert.Naturerkennen und Logik // Naturwissenschaften. H. 47–49, 1930. –S. 961.

[3] См.: Cassirer E. Substanzbegriff und Funkcionbegriff. Berlin, 1902. – S. 41–43.

[4] E. S. Cassirer. – P. 139.

[5] Э. Кассирер. Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции. Спб., 1912. – С. 349–340.

альной бесконечности, которую может представить лишь бесконечный рассудок, сам в действительности являющийся ограниченным, конечным[1].

Сегодня совершенно очевидно, что кантовский априоризм в математике имеет существенные слабости. Одна из них проистекает из выбора Кантом из всех априорных форм лишь двух, возможных, по его мнению, в математике. Однако в настоящее время хорошо известно, что в составе математического знания выделяются не только такие структуры как арифметика (алгебра) и геометрия (топология), но и «структуры порядка», которые несводимы к двум первым.

Еще одна слабость кантовского априоризма в понимании математики связана с недостаточной ясностью первопричин априорного знания. Формы мышления, с которыми Кант отождествляет априорное, не являются, с его точки зрения, врожденными, но они и не определяются чем-либо, лежащим за пределами мышления. Иными словами, априорное у Канта не детерминировано в реально существующем мире ни логически, ни генетически, а потому и существование этого самого априорного как специфического вида знания, и любые теоретически обоснованные высказывания о нем оказываются проблематичными.

Кроме того, Кант в своих представлениях о математике, как мы уже отмечали, произвольно ограничивает сферу математического знания, сводя его к арифметике и евклидовой геометрии. Открытие неевклидовых геометрий с очевидностью показало, что математика как теоретическая дисциплина не привязана к экспликации представлений, заключенных в универсальной онтологии мышления, на которую опирался в своих рассуждениях Кант[2].

Интересную трактовку априорности математики, основанную на понятии практики, предлагает в одной из своих недавних работ В. Я. Перминов. Он полагает, что априорное в человеческом знании, а значит и в математике, может быть представлено как «система универсально нормативных представлений, проистекающая из необходимой деятельностной (практической) ориентации мышления». Анализируя подходы Канта, Гуссерля и некоторых современных философов математики, Перминов показывает, что исходные идеализации математики относятся не к содержанию, а к форме мышления и являются частью его априорной структуры.

Аргументы, которые предъявляет при этом Перминов, сводятся к следующим положениям. Во-первых, между арифметическими и логическими понятиями существует тесная взаимосвязь. Это подтверждается результатами современных психологических исследований (Ж. Пиаже и другие), которые указывают на одновременность и взаимозависимость формирования в сознании ребенка арифметических и логических структур (формирование логического понятия класса в той же мере зависит от понятия числа, как и формирование понятия числа от логического понятия класса), а также на связь развития этих структур с развитием представлений о пространстве и времени[3].

Во-вторых, в пользу априорности, по крайней мере, элементарной математики говорит самоочевидность этих истин, которая преобладает над очевидностями, относящимися к содержанию знания. Таковы, к примеру, общепринятые нормы логического умозаключения.

---

[1] См.: E. G. Husserl. Husserliana, Bd. XII. Haag, 1970. – P.191–192.

[2] См. об этом подробнее: С. Л. Катречко. К вопросу об «априорности» математического знания.

[3] См.: Ж. Пиаже. Избранные психологические труды. – М., 1969. – С. 78–80.

В-третьих, весомым доводом в пользу априорности исходных математических идеализаций, с точки зрения Перминова, может служить наличие так называемой универсальной или категориальной онтологии, включающей в свою структуру причинную и предметную онтологии, формирующихся на основе деятельности человека.

Математика при таком подходе может пониматься как формальная онтология мира, схватывающая праксеологически значимые качества его предметной структуры. Априорность же ее состоит в том, что исходные математические интуиции предшествуют всякому эмпирическому анализу: исходные математические структуры либо однозначно заданы универсальной предметной онтологией, либо определены ею в соответствии с интерсубъективной интенциональной установкой, являясь единственным адекватным определением предметной онтологии. Главное при этом состоит в том, что интуитивную основу исходных математических понятий и структур составляют не чувственные образы и не абстрактные представления науки, а универсальные представления о реальности, порожденные деятельностью[1].

Такое понимание математики, с нашей точки зрения, в определенной мере согласуется с материалистической трактовкой этой науки, в соответствии с которой математика в своем генезисе предстает как некоторая иерархия формальных систем, каждая из которых имеет различное отношение к объективной действительности, а значит и к опыту. Возникновение и развитие элементарной математики (арифметики и геометрии) обусловлено запросами практической деятельности. Решением задач практического характера детерминируется и развитие прикладной (содержательной) математики. Построенные же на базе элементарной математики теория множеств, алгебра, теория категорий, топология, и т. п. абстрактные теории не имеют очевидной (непосредственной) связи с реальным миром и практикой его освоения.

Однако трудность установления связи современных областей теоретической математики с объективным миром не может служить основанием для ее отрицания. Тем более что источником содержания человеческого мышления, в том числе и мышления математического, является именно этот внешний мир. Развитие теоретической мысли и сегодня подтверждает тот факт, что субъективная свобода математиков, их работа над задачами, далекими от приложений, неизменно оборачивается предвосхищением тех или иных запросов со стороны науки и техники. А та «предопределенность» или «предустановленная гармония», которые обнаруживаются при рассмотрении результатов применения тех или иных абстрактных математических теорий, «на самом деле есть выражение того обстоятельства, что человек, а, следовательно, и его мышление – это продукт развития самой природы, объективных закономерностей»[2].

Поэтому, возвращаясь к современному априоризму в математике, хотелось бы обратить внимание на то, что эта концепция не отвечает на некоторые весьма существенные вопросы эпистемологического характера. Так, например, современная эпистемология настаивает на том, что «в общем случае математическим понятиям не сопутствуют образы. Но можем ли мы из этого заключить, что им не сопутствуют трансцендентальные схемы? Можно ли

---

[1] См.: В. Я. Перминов. Априорность и реальная значимость исходных представлений математики. – М., 2001.

[2] Б. С. Грязнов. Логика. Рациональность. Творчество. – М., 1982. – С. 98.

мыслить чистыми математическими понятиями, не переводя их ни в какой внутренний язык мысли?»[1]

На эти вопросы современный априоризм не отвечает, и хотя совершенно ясно, что «… мысль по-прежнему остается трансцендентальной схемой, реализующейся в течении априорного времени», сегодня в понимании априоризма, видимо, необходимо идти в направлении субъекта дальше И. Канта, «от предмета математики к анализу базовых, элементарных актов мысли. Что в них можно считать априорным?»[2].

§4. Проблема истины в математике

Специфика математического познания находит свое отражение и в понимании истины в математике. В естественных науках предложение считают истинным, если его семантическое значение соответствует аналогичному значению некоторого предложения, выраженному в языке той или иной науки. Это может быть естественный или искусственный (символический) язык, с помощью которого описывают полученные эмпирические данные. При этом подразумевается, что само это описание соответствует описываемой объективной реальности. Иными словами, истина здесь понимается в традиционном, классическом смысле «как согласованность между интеллектом и вещью»[3], как «соответствие мысли предмету»[4].

Такое понимание научной истины, во-первых, связывает ее содержание с различными обстоятельствами: уровнем имеющихся базовых знаний, используемым языком, техническими средствами, применяемыми в эмпирическом исследовании и т. п. Иначе говоря, истина в этом случае предстает как бесконечный процесс смены одной относительной истины другой.

Во-вторых, понимание истины в рамках теории корреспонденции требует **практической** проверки истины: критерием истины здесь выступает практика.

Ни первое, ни второе в полной мере не приложимо к математике. Первое – в силу того, что «математика стоит особняком среди других наук: никакой ее результат не может быть зачеркнут дальнейшим развитием науки. Однажды доказанная теорема уже никогда не станет неверной, хотя впоследствии может выясниться, что она является лишь тривиальным частным случаем какой-то более общей истины. Математические знания не подлежат пересмотру, и общий их запас может лишь возрастать»[5].

Второе – потому что в математике никогда не обращаются к непосредственной эмпирической проверке теоретических выкладок. Экспериментальное доказательство какого-либо математического факта или закона не является для математиков доказательством.

«Подтверждение общего закона на конечном числе случаев (как бы это число не было велико) никоим образом не представляет собой доказательства в математическом смысле, даже если неизвестно ни одного исключения, – пишут Курант и Роббинс. – При таких обстоятельствах рассматриваемое ут-

---

[1] Е. В. Косилова. Некоторые проблемы априоризма // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Из-во Савин С. А., 2007. – С. 147.

[2] Там же. Е. В. Косилова.

[3] Антология мировой философии. В 4-х т. – Т. 1. – Ч. 2. – М., 1969. – С. 837.

[4] Р. Декарт. Сочинения. В 2-х т. – Т. 1. – М., 1989. – С. 604.

[5] М. Кац, С. Улам. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. М. : Мир, 1971. Пер. с англ.: Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects. Mark Kac and Stanislaw M. Ulam. N.-Y. Washington. London. 1968.

верждение или «закон» есть не что иное, как вполне разумная **гипотеза**, которую могут видоизменить результаты будущих экспериментов. В математике «закон» может считаться доказанным только тогда, когда он выведен как неизбежное логическое следствие из предпосылок, признанных справедливыми»[1].

Действительно, нельзя проверить на практике простой факт отсутствия общих точек у двух параллельных прямых, сколько бы мы ни брали точек на этих прямых. Нельзя построить график функции Дирихле, значение которой для рациональных чисел равно 1, а для иррациональных чисел – 0. Невозможно подтвердить эмпирически, соответствуют ли реальной действительности математические модели зарождения и эволюции космических систем, которые успешно описываются проверенными математическими моделями других теорий, например, ядерной физики.

Учитывая слабости классической концепции истины, различными философами были предложены и другие подходы к ее пониманию.

Когерентная концепция истины предполагает связность, согласованность, системность и единство знания. Под когерентностью при этом понимается взаимное соответствие содержания высказываний в некоторой системе рассуждения, представляющего многозвенную логическую конструкцию. Такой конструкцией вполне может считаться и любая математическая теория, и та или иная область математического знания. Естественно, что в этой концепции главную роль играют логические критерии истины (например, непротиворечивость и полнота конструкции). Именно в силу этого когерентная концепция истины явно или неявно используется в математике. Большой вклад в развитие этой концепции внесли Лейбниц, Спиноза, Гегель, а также такие современные ученые и философы, как Гемпель, Нейрат, Франк и другие.

«Определение истинности предложения, – считает, например, О. Нейрат, – постоянно приводит к сопоставлению предложения с системой других предложений с целью выяснения, совместимо оно с ними или не совместимо, а не сопоставления высказывания с действительностью. Понятие логической непротиворечивости должно раз и навсегда заменить отношение высказывания к чему-то данному»[2].

Эту точку зрения разделяет и Ф. Франк, утверждающий, что вполне возможно «доказать теоремы конгруэнтности чисто логическим путем, без ссылки на физическую идею “приведения к совпадению”»[3].

По его мнению, такая возможность обусловлена тем, что «такие логические структуры, как геометрия, являются истинными сами по себе, независимо от того, что происходит в мире, и независимо от значения их терминов»[4].

Теория когерентности носит нормативный характер, она полностью элиминирует субъект из процесса познания, придавая первостепенное значение собственно знанию и мыслительным процедурам, в рамках которых оно существует. Кроме того, когерентная концепция истины, по сути дела, оставляет без ответа вопрос об истинности базисных положений той или иной теории, ее аксиом.

---

[1] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика. М.–Л.,1947. – С. 45.

[2] O. Neurath. Le developpement du Cerhle de vienne et l´avenir de l´empirisme Logique. Paris, 1935. – P. 5.

[3] Ф. Франк. Философия науки. – М., 1960. – С. 154.

[4] Ф. Франк. Философия науки. – М., 1960. – С. 158

Конвенциональная теория истины, наиболее известным представителем которой является, по-видимому, Пуанкаре, исходит из того, что научные теории вместе с их концептуальным базисом являются результатом явных или неявных соглашений (конвенций) между людьми. Поэтому Пуанкаре считает, что наличие различных и даже альтернативных в каком-либо отношении теорий в той или иной области научного знания дает основания для сомнений в истинности каждой из них. При этом, выбирая ту или иную теорию, ученый руководствуется лишь тем, насколько каждая из них будет удобной для него в конкретном случае: «… одна геометрия, – пишет Пуанкаре, – не может быть более истинной, чем другая; она может быть только более удобна»[1].

Встав на эту точку зрения, мы должны признать не только условность выбора научной теории, но и условность самой теории вместе с ее законами. Все это касается и математики, которая при таком подходе превращается всего лишь в набор «инструментов», правильный выбор которых предопределяет позитивный результат.

Инструменталистский подход характерен и для *прагматической концепции* истины, берущей свое начало в философии Древнего Китая и Античной философии. Ведущая идея этой концепции – идея практической ценности истины. В этом смысле прагматическая концепция истины совпадает с марксистской теорией, где критерием истины также считается практика. Однако в прагматизме понятие практики охватывает не весь социальный опыт со всеми возможными ее видами, а конкретные виды практической деятельности с ее результатами.

Философы-прагматики (Джемс, Дьюи, Пирс и другие) считают теории и их понятийный аппарат лишь «инструментами» или «планами предстоящей деятельности», значение которых можно оценить с точки зрения их работоспособности, то есть достигнутых с их помощью результатов. Поэтому и истина здесь понимается как полезность в деле достижения желаемой цели.

С точки зрения Ч. Пирса, истина характеризует всего лишь результат познания, а не сам познавательный процесс. Она может быть определена как «согласие некоего абстрактного высказывания с идеальным пределом, к которому исследование стремится, никогда не достигая его, для того, чтобы произвести научное верование»[2]. В качестве иллюстрации этого определения он приводит пример числа π, величину которого можно выразить с любой заданной степенью точности, но всегда лишь приближенно.

Джемс называет истинными идеи, которые человек способен усвоить, признать действительными, подкрепить своей связью и верифицировать. Он полагает истиной «событие, которое производится для некоторой идеи. Последняя делается истиной, она завоевывает свою истину в результате работы, которая состоит в том, чтобы себя подтвердить, которая имеет целью и результатом признание своей действительности»[3]. В результате верификации некоторое положение считается истинным в силу того, что оно служит основанием для признания пригодности выбранного или сконструированного человеком инструментария для того, чтобы устранить неопределенность, рассогласованность мыслей.

«Истина, – пишет У. Джемс, – означает только то, что мысли (составляющие сами лишь часть нашего опыта) становятся истинами лишь постольку,

---

[1] А. Пуанкаре. Наука и гипотеза. – М., 1904. С. 60–61.

[2] Pierce Ch. Dictionary of Philosophy and Psychology. Ed. J. Baldwin. – Vol. 1, 1901. – P. 565.

[3] У. Джемс. Прагматизм. – С. 144.

поскольку они помогают приходить нам в удовлетворительное отношение к другим частям нашего опыта»[1].

Очевидно, что прагматический подход к пониманию истины акцентирует внимание на социальной значимости истины, на ее коммуникативности и интерсубъективности. В нем обнаруживается стремление учесть «интересы и возможности познающего субъекта, обращая внимание не столько на содержательные моменты знания, сколько на его методологически-инструментальную значимость и эффективность»[2].

Какой же концепции явно или неявно придерживается в своих разработках математик? Однозначного ответа на этот вопрос нет. Скорее всего, работающий математик вовсе не задается вопросом об истинности его теорий. Он уверен в том, что, если та или иная теорема (высказывание) математики является логическим следствием некоторой непротиворечивой системы аксиом, то ее (его) необходимо считать истинной. При этом молчаливо полагается, что непротиворечивая система аксиом не может содержать ложных положений, то есть каждая из аксиом является истинным высказыванием.

Таким образом, *проблема истинности* математических теорем (высказываний) переходит в плоскость *проблемы непротиворечивости аксиоматик,* которые служат исходным основанием для вывода (доказательства) этих теорем, и его правильности. Но являются ли непротиворечивость аксиом и правильность вывода достаточными условиями истинности его результата?

Что касается доказательства, то здесь все более или менее ясно.

Все доказательства предложений любой математической теории можно разделить на два вида: синтаксические и семантические. Доказательства первого вида не используют никаких интерпретаций и касаются лишь синтаксических свойств теории. Учитывая, что правильность формального синтаксического доказательства устанавливается алгоритмически, и, следовательно, не вызывает сомнений, а также то, что согласно тезису Гильберта[3], всякое неформальное доказательство имеет формальный эквивалент, можно сделать вывод о надежности любого синтаксического доказательства.

Семантические доказательства, опирающиеся на аргументы, представляющие собой содержательные высказывания, при определенных условиях также можно оценить с точки зрения их правильности. Такую возможность предоставляет теорема компактности[4], из которой следует, что для всякой теоремы **A** какой-либо теории **T** существует конечно аксиоматизируемый фрагмент **T1** этой теории, где теорема **A** доказуема. В силу того, что это утверждение верно как для формальных, так и для неформальных теорий, очевидно, что оценка правильности семантического доказательства сводима к оценке синтаксического доказательства[5].

---

[1] Там же. – С. 41.

[2] Л. А. Микешина, М. Ю. Опенков. Новые образы познания и реальность. – М., 1997. – С. 74.

[3] Тезис Гильберта: для всякого содержательного доказательства существует эквивалентный формальный аналог, построенный в рамках классической логики предикатов и являющийся восполнением интуитивного доказательства. См.: Барвайс Дж. Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. – Ч. 1. – М., 1982. Пер. с англ..: Handbook of mathematical logic. J. Barwise (Ed). North-Holland P.C. 1977. – С. 49.

[4] См., например: Дж. Барвайс. Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. – Ч. 1. – М., 1982; А. И. Мальцев . Алгебраические системы. – М. : Наука, 1970.

[5] См. об этом подробнее: Ю. И. Янов. Математика, метаматематика и истина. Репринтное издание ИПМ им. М. В. Келдыша РАН М., 2006.

Таким образом, можно утверждать, что проверка правильности математического доказательства вполне осуществима финитными средствами.

Вопрос о надежности доказательства непротиворечивости той или иной математической теории оказывается значительно сложнее.

Уже математикам Древней Греции было вполне понятно, что мышление, в том числе и математическое мышление, не должно содержать логических противоречий. Другими словами, уже тогда вполне осознавалось, что логическое выведение из одних и тех же аксиом некоторого утверждения **А** и его отрицания **не-А**, в математике невозможно.

Такое положение дел объясняется уверенностью древнегреческих математиков в том, что все математические объекты имеют свои прообразы в реально существующем мире, а каждая из принятых в математике аксиом представляет собой лишь определенную «идеализацию» некоторого закона природы.

В современной математике проблема непротиворечивости ее теорий (и всей математики в целом) рассматривается уже под другим углом зрения. Сегодня эта проблема связывается с проблемой выбора системы аксиом, которая должна стать основанием, концептуальным базисом некоторой теории. В этом выборе математик почти абсолютно свободен. И это «почти» и есть не что иное, как требование непротиворечивости выбранной системы аксиом, вопрос о выполнимости которого становится наипервейшим.

В чем же заключается сложность проблемы непротиворечивости? Попытаемся, хотя бы немного, разобраться в этом вопросе.

Прежде всего, необходимо отметить, что непротиворечивость, как и доказательство, может быть *синтаксической* или *семантической.*

В первом случае, аксиоматическая теория считается непротиворечивой, если в ней невозможно вывести некоторое предложение и его отрицание. Нередко непротиворечивость такого рода называют *формальной.*

Во втором случае, аксиоматическая теория будет считаться непротиворечивой, если существует хотя бы одна семантическая модель (интерпретация), в которой справедливы все теоремы этой теории. Эту непротиворечивость часто называют *содержательной.*

Необходимо отметить, что до Гильберта в аксиоматическом методе для доказательства непротиворечивости системы аксиом применялся лишь метод интерпретации. При этом в качестве исходной модели рассматривалась совокупность натуральных чисел, что заведомо предполагало непротиворечивость их арифметики. Но предположение и даже интуитивное убеждение не являются доказательствами. Попытка логически обосновать непротиворечивость арифметики, которая была предпринята Гильбертом, как известно, окончилась неудачей. Впоследствии Гедель показал несостоятельность любой такой попытки, доказав, что, если формальная система аксиом непротиворечива, то не существует доказательства ее непротиворечивости средствами самой этой формальной системы.

Вместе с тем, совершенно очевидно, что отсутствие доказательства непротиворечивости системы аксиом (теории) не является свидетельством того, что она противоречива. «Противоречивость должна быть доказана путем непосредственного получения противоречия из аксиом … или путем доказательства неосуществимости модели»[1].

---

[1] В. Молодший. Очерки по философским вопросам математики. – М., 1969. – С. 257.

Поэтому отсутствие доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами не лишило возможности использовать ее понятия при построении интерпретаций для доказательства непротиворечивости математических теорий.

Кроме того, определенную уверенность в непротиворечивости содержательно построенных математических теорий (в том числе и арифметики натуральных чисел) «создает распространенное (по крайней мере, среди математиков) мнение, что исходные понятия, лежащие в основе любой математической теории, имеют объективный характер и не являются только произвольным плодом свободной человеческой фантазии»[1].

О наличии такой точки зрения у философов и ученых говорится и в работах Н. Бурбаки. «Каковы бы ни были философские оттенки, в которые понятие математических объектов окрашивалось бы у того или иного математика или философа, имеется по крайней мере один пункт, в котором они единодушны: это то, что эти объекты нам даны, и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства так же, как физик не может изменить какое-либо природное явление. ... и даже сегодня не один математик, афиширующий непримиримый формализм, в глубине души охотно подписался бы под следующим признанием Эрмита: “Я полагаю, что числа и функции Анализа не являются произвольным созданием нашего ума; я думаю, что они существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, и мы их встречаем или открываем и изучаем их так же, как физики, химики и зоологи”»[2].

Вместе с тем, среди математиков и философов существует и точка зрения (о чем мы уже говорили выше), согласно которой «все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики, а часть даже неоправдываемые ею»[3].

Из сказанного вполне возможно сделать вывод о том, что непротиворечивость системы аксиом подтверждается существованием «хотя бы одной области объектов, для которых ... формулы имели бы конкретный, содержательный смысл, к которой они были бы приложимы и отображением которой служили бы»[4].

Однако было бы неверно сводить непротиворечивость к существованию, эти требования не тождественны, между ними есть некоторые расхождения.

«Обычные аксиомы требуют, чтобы существовали определенные множества или числа, – пишет в этой связи Ван Хао, – но ничего не говорят о том, что подлежит исключению. Ввиду этого, мы можем, не нарушая аксиом, присоединить к натуральным числам числа ненатуральные и, более того, расширить аксиоматику, добавляя без противоречий новые аксиомы, требующие как раз существования этих натуральных чисел. Не без основания можно согласиться с тем, что хотя эти ненатуральные числа и требуются аксиомами непротиворечивой системы, они не будут существовать. Такая точка зрения

---

[1] Ю. И. Янов. Математика, метаматематика и истина. Репринтное издание ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. – М., 2006.

[2] См.: Н. Бурбаки. Начала математики. – Ч. 1. – Кн. 1. Теория множеств. – М. : Мир, 1965. –С. 317.

[3] Н. И. Лобачевский. Конспект по преподаванию чистой математики в Казанском университете в 1825/26 учебном году // Л. Б. Модзалевский. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.–Л., 1948. – С. 204.

[4] С. А. Яновская. Идеализм и математика // Сб. статей по философии математики. – М., 1936. – С. 64.

… расстраивает планы безоговорочного отождествления непротиворечивости и существования»[1].

Попытки отождествления непротиворечивости и существования были подвергнуты критике и сторонниками конструктивного направления в математике. Как известно, основной идеей конструктивной математики является ограничение в области бесконечных множеств действия некоторых свойств и законов, характерных для конечных множеств, поэтому ее сторонники требуют, чтобы доказательство существования объектов опиралось не на допущение невозможности отрицания соответствующего этим объектам высказывания, а на непосредственное их построение. Конечно, фактическое построение объектов, соответствующих некоторой системе аксиом, прямо подтвердило бы ее непротиворечивость, но это не всегда возможно. На этом основании приверженцы конструктивного подхода в математике считают невозможным доверять аксиоматическим системам, для которых соответствующие им объекты построить нельзя, и не рекомендуют использовать их в своей работе.

Таким образом, по-видимому, ясно, что непротиворечивость той или иной математической теории является необходимым, но не достаточным условием истинности ее предложений. Для этого необходима еще их формальная доказуемость.

Иными словами, «мы можем определить понятие истинности предложений в математике как **формальную доказуемость в непротиворечивой теории**» (выделено автором – Б. Я.). Тем самым отнюдь не игнорируется семантическое понимание истинности теорем в той модели, для изучения которой предназначена данная теория, поскольку при непротиворечивой логике формальное доказательство теоремы гарантирует ее истинность в модели»[2].

Что же касается вопроса непротиворечивости математики в целом, то он и сегодня остается актуальным для математики, прежде всего, в связи с существующей в ней общей проблемой ее оснований.

---

[1] Хао Ван. Процесс и существование в математике // Математическая логика и ее применения. – М., 1965. – С. 336–337.

[2] Ю. И. Янов. Математика, метаматематика и истина. Там же.

Глава III. Проблемы обоснования математики: три кризиса в основаниях математической науки

В истории науки известны ситуации, когда ученые сталкиваются со значительными трудностями, преодоление которых невозможно в рамках уже сложившейся системы знания. Их разрешение требует непременного выхода за ее пределы, что связывается с необходимостью коренного пересмотра важнейших принципов науки и ее концептуального аппарата, ведущего к принятию ее новой парадигмы (Т. Кун). Этот период нередко называют революцией в той или иной области научного познания. В математике же, где традиционно выделяют три таких периода, обычно говорят о кризисе, связанном с проблемами, коренящимися в ее основаниях.

Причины кризисов в математике философы и математики усматривают, прежде всего, в том, что в фундаментальных разделах этой науки, играющих ведущую роль в развитии математического знания, обнаруживаются неразрешимые в рамках разработанных к этому времени теорий противоречия.

§1. Проблема несоизмеримых отрезков

Первый кризис математики связывают, как правило, с открытием пифагорейцами несоизмеримых отрезков. Суть этого открытия состоит в невозможности выразить в рациональных числах, с которыми только и имели дело пифагорейцы, диагональ квадрата со стороной равной единице. Для античной математики это открытие стало поворотным пунктом в истории, ибо нарушало имевшуюся гармонию между геометрией и арифметикой. Более того, это ставило под сомнение обоснованность построенной ими модели мира.

Итак, для пифагорейцев сущностью всех вещей было число. Число отождествлялось с вещью, а отношения в мире чисел определяли отношения вещного мира. Числа у них принимались за начало и в качестве материи и в качестве выражения состояния и свойств вещей. Такое положение дел никак не согласовывалось с бесспорным для них положением, что любые два отрезка имеют общую меру, хотя, может быть, и очень малую. Когда же пифагорейцы убедились, что доказательство существования несоизмеримых величин безупречно, они поняли, что их учение о числе как первооснове всего сущего столкнулось с серьезными трудностями, преодоление которых требовало пересмотра основ математики, ее исходных принципов.

Необходимо отметить, что значение открытия несоизмеримых отрезков состояло не столько в том, что «оно разрушило раннюю систему пифагорейцев, сколько в том, что это открытие «привело к созданию новых, очень тонких и глубоких теорий»[1].

Пифагорейцы сделали из своего открытия несоизмеримых по крайней мере три важных вывода. Во-первых, что арифметика не может быть основанием для геометрии. Во-вторых, что геометрические абстракции или категории имеют более общий характер по сравнению с числами и их отношениями. В-третьих, пифагорейцы (в силу первого и второго) сделали вывод о необходимости положить в основание математики именно геометрию.

Осознав, что совокупность геометрических величин более полна, чем множество рациональных чисел, греки создали исчисление в геометрической форме, восстановив, таким образом, нарушенную было гармонию между гео-

---

[1] История математики. – М., 1970. – Т. 1. – С. 72–73.

метрией и арифметикой. Новое исчисление получило в литературе название *геометрической алгебры.*

Правда, достаточно быстро проявились неудобства и громоздкость методов геометрической алгебры, связанные с необходимостью оперирования с неоднородными объектами (отрезками, прямоугольниками, параллелепипедами). Такое положение сохранялось вплоть до XVII в., когда Декарт окончательно отбросил требования, связанные с однородностью, стал рассматривать $\mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{xy}, \mathbf{x^3}$ как отрезки, а алгебраическое уравнение – как соотношение между числами. Кроме того, вскоре выяснилось, что средства геометрической алгебры не позволяют получить точные решения задач определенного класса (о трисекции угла, об удвоении куба и о квадратуре круга).

Еще одним новшеством стал «метод исчерпывания», созданный Евдоксом Книдским, который широко использовался математиками Древней Греции при определении площадей и объемов. Этот метод и разработанная им же общая теория пропорций, являющаяся по существу геометрическим аналогом теории положительных вещественных чисел, вместе с классификацией квадратичных иррациональностей Теэтета и Евклида, а также основами геометрической алгебры пифагорейцев на долгое время стали прочным геометрическим фундаментом античной математики.

Открытие несоизмеримых величин в известной мере подготовило переход от качественного, субстанциального понимания бесконечности к его количественной трактовке, к пониманию бесконечности как некоторой числовой характеристики вещей и процессов. Значительное влияние на формирование количественного подхода в понимании бесконечности оказало «учение Анаксагора о «семенах вещей» («гомеомериях», как называл их Аристотель), в котором впервые была выдвинута мысль о возможности разложения объекта на бесконечно большое число бесконечно малых частей»[1].

Немаловажную роль в укоренении этого подхода в мышлении сыграла позиция Аристотеля. С его точки зрения бесконечность – это «то, вне чего всегда есть что-нибудь». Она не представляет собой какую-то определенную сущность, у нее нет начала, но нет и конца. Бесконечное – это не ставшее, но *становящееся.*

Иначе говоря, бесконечность для Аристотеля может рассматриваться лишь как *потенциальная бесконечность*; *актуальной бесконечности*, как бесконечности ставшей, завершенной, с его точки зрения, не существует, ибо все, что имеет предел, завершение не может считаться бесконечным.

Актуальная бесконечность для Аристотеля – это бесконечное чувственно воспринимаемое тело, которое непознаваемо и неопределенно, в силу чего существование такой бесконечности в реальном, физическом мире невозможно. Одновременно с этим актуальная бесконечность и величина. Но величина, с его точки зрения, может быть только потенциально бесконечной, ибо величина процессуальна: не может быть бесконечного числа, хотя всегда существует число, большее данного. В равной степени не может быть и наименьшей величины, однако всегда есть величина, меньшая некоторой наперед заданной.

Напомним, что такой подход к бесконечному вполне объясним, учитывая то, что в понимании Аристотеля математика изучает «количественную определенность и непрерывность», а бесконечное он как раз и относит к категории количества.

---

[1] А. С. Кармин. Познание бесконечного. – М., 1981. – С. 16–17.

Что же, по мнению Аристотеля, служит основанием такого представления о бесконечном? Такими основаниями он считает: время (ибо оно бесконечно); возможность разделения величин; единство возникновения и уничтожения; наличие у конечного границы с чем-либо, без которой невозможно само существование конечного; но более всего таким основанием, по его мнению, следует считать само мышление, которое «не останавливается: и число кажется бесконечным, и математические величины, и то, что лежит за небом: а если лежащее за небом бесконечно, то кажется бесконечным тело и существует множество миров»[1].

Вместе с тем, Аристотель полагает, что в вопросе о бесконечности и бесконечном мышлению доверять нельзя, потому что здесь существует постоянная возможность столкнуться с противоречиями и парадоксами как принимая бесконечное существующим, так и отрицая возможность его существования. Но исследователей не должно это пугать, считает Аристотель, так как, несмотря на существующие при использовании понятия «бесконечное» трудности ни физика, ни математика без этого понятия обойтись не может.

Количественная трактовка бесконечности, введение ее в упорядоченный мир числовых отношений, смешивание понятий актуальной и потенциальной бесконечности и использование в обращении с бесконечными величинами тех же самых приемов, что и с конечными во многих случаях приводило к ошибкам, заблуждениям и противоречиям. Такое положение дел осложняло выход из кризиса, в котором оказалась античная математика в связи с обнаружением противоречия «соизмеримое – несоизмеримое».

Неоднозначность понятия «бесконечность» убедительно показал Зенон Элейский в своих апориях (наиболее известные из них «Стрела», «Дихотомия, «Ахилл и черепаха», «Стадия»), которые вызвали весьма жаркие споры среди математиков и философов. С введением Аристотелем понятий актуальной и потенциальной бесконечности и разработкой им достаточно убедительной концепции последней, острота ситуации в определенной мере была снята.

А в «Началах» Евклида, который учел и достижения пифагорейцев, и уроки решения знаменитых задач о трисекции угла, квадратуре круга и удвоении куба, и вытекающие из этих уроков требования об ограничениях на средства геометрических построений (идеальные циркуль и линейка), кризис основ древнегреческой математики (для того уровня развития науки и философии) был преодолен.

§2. Проблемы бесконечно малых величин

Второй кризис в основаниях математики был связан с разработкой дифференциального и интегрального исчислений, представлявшими в своей совокупности математический анализ, ставший важнейшим достижением математики XVII в. К концу века он получил название анализа бесконечно малых величин. Именно благодаря введению в математику переменной величины и разработке новых, инфинитезимальных, методов, основанных на понятии бесконечно малого, в физике возникает такая ветвь механики, как динамика, и математическое естествознание в целом.

Многие крупные ученые XVII в. проводили исследования, относящиеся к анализу бесконечно малых: Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Ферма, Декарт, Барроу. Можно сказать, что именно они подготовили

---

[1] Аристотель. Физика, III, 4, 203 в.

основу, на которой в конце века Ньютон и Лейбниц создали, независимо друг от друга дифференциальное и интегральное исчисление.

Исаак Ньютон приходит к идее интегрального и дифференциального исчислений при разработке математического аппарата механики, учитывающего движение. В работе «Метод флюксий и бесконечных рядов», опубликованной в 1736 г. уже после смерти Ньютона, вводятся переменные величины – флюенты (текущие), значение которых зависит от времени. Для обозначения этих переменных и скорости их изменения (производных по времени) он использует латинские буквы *u, x, y…* и $\dot{u},\dot{x},\dot{y}$, соответственно, а для обозначения бесконечно малых, которые он называет «моментами» Ньютон использует знак «*o*». При этом момент флюэнты – $\dot{y}o$ (произведение скорости на момент времени) – есть у него не что иное, как дифференциал.

Решение первой из двух основных задач теории флюксий – дифференцирования и получения дифференциального уравнения – Ньютон демонстрирует на примере соотношения $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. В результате преобразования этого уравнения он получает выражение $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$

Несколько позже Ньютон вводит понятие второй флюксии $\ddot{x}$ и флюксии более высоких порядков, а, используя понятие ряда, распространяет свою теорию на трансцендентные функции. Разработанное исчисление он успешно использует при решении задач, связанных с нахождением минимума и максимума значений функций, построением касательной и кривой, определением кривизны кривой.

Вторую основную задачу своей теории – интегрирования дифференциального уравнения и получения первообразной – Ньютон трактует геометрически как задачу квадратуры кривой: переменная площадь $z(x)$ является первообразной для данной функции $y = f(x)$[1].

Опираясь на бесконечные ряды, он находит решение отдельных дифференциальных уравнений, а затем – решение задачи определения кривой, площадь которой задается с помощью конечного уравнения. С помощью таких приемов Ньютон получил большое число квадратур.

Пытаясь обосновать свою теорию флюксий, Ньютон разрабатывает своеобразную теорию пределов, известную как «Метод первых и последних отношений», в которой он очень близко подошел к современному пониманию бесконечно малой.

Свидетельством этого является его утверждение о том, что под величинами весьма малыми, исчезающими или зарождающимися «не следует … разуметь количеств определенной величины», их надо «рассматривать как уменьшающиеся беспредельно»[2]. Следует отметить, что пользоваться теорией флюксий на практике было достаточно трудно.

Готфрид Лейбниц приходит к созданию интегрального и дифференциального исчисления другим путем. Основные идеи теории дифференциалов были представлены им в 1684 г. в небольшой журнальной статье, которая называлась «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В ней он формулирует правила

---

[1] Из этого утверждения вытекает основная теорема интегрального исчисления, известная как формула Ньютона-Лейбница. См., например: Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 231.

[2] См.: И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. – М., 1989.

дифференцирования суммы, произведения, частного, степени и условие $dy = 0$ для экстремальных значений функции и $d^2y = 0$ для точек перегиба. При построении дифференциального исчисления Лейбниц опирается на работы Паскаля и Барроу о характеристическом треугольнике, используя взятые у них термины dx, dy, ds. Первому из них он приписывает значение дифференциала аргумента, понимаемого как бесконечно малой разности. Второму – значение дифференциала функции, получаемого из известного отношения $dy = \frac{y}{S_t}dx$, где S_t – подкасательная.

В 1684 г. Лейбниц публикует статью «О глубокой геометрии», в которой вводит понятие интеграла как суммы «всех» ординат, которых бесконечно много, предлагает записывать его с помощью символа $\int ydx$, и формулирует правила интегрирования. Для трансцендентных функций использует ряды.

Предложенные Лейбницем символика и основные термины (дифференциал, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальное уравнение, функция, координаты и другие) оказались настолько удобными, что сохранились и в современной математике.

В дальнейшем в разработку дифференциального и интегрального исчислений активно включились братья Иоганн и Якоб Бернулли, а в 1696 г. из печати вышел первый учебник «Анализ бесконечно малых», автором которого был ученик одного из братьев Гийом Лопиталь.

Трудности, возникшие в этот период в развитии математического знания и определившие характер второго кризиса, были связаны с проблемами обоснования анализа бесконечно малых величин и обусловлены целым рядом причин. Попытки их разрешения предпринимались многими известными учеными XVII–XVIII вв. Однако решение этой проблемы было найдено лишь в XIX в.

Одна из причин названных трудностей заключалась в том, что в математике переменных величин продолжали использовать методы элементарной (финитной) математики. Принципы и утверждения «низшей» (по терминологии Ф. Энгельса) математики абсолютизировались и рассматривались как незыблемый фундамент каждой математической теории. Понятия и законы, установленные в одной математической теории нередко эксплицировались в другие области исследования совершенно формально, то есть без какого-либо обоснования. Если это не удавалось, то для новой теории вводились принципы, которые в наибольшей степени согласовывались с истинами элементарной математики. Без указания переменных, для которых они справедливы, и границ применения формулировались законы алгебры и математического анализа. Такое понимание законов математического анализа и алгебры к середине XVIII в. стало общепринятым, что дало основания Л. Эйлеру принять его в качестве основного принципа методологии математического анализа в целом.

Вторая причина возникшего в математике кризиса состояла в том, что в этот период при доказательствах теорем математического анализа преимуществом пользовались методы, опирающиеся на геометрию. Такое положение дел объяснялось влиянием известной традиции, берущей свое начало в Древней Греции, и механики, что, в свою очередь, было связано с идеями Ньютона, из которых он исходил при разработке учения о флюксиях.

Третья, и может быть наиболее важная, **причина** второго кризиса в математике связана с непроясненностью содержания понятий «бесконечно малая» и «предел». Неясности в понимании сущности дифференциального исчисления, различных способов введения символов его операций приводили к путанице. Дифференциалы понимались как бесконечно малые величины, которые и отличны от нуля, и, одновременно, обращаются в нуль, если их сравнивать с бесконечно малыми более низкого порядка.

Ньютон, например, считал дифференциал «уменьшающимся бесконечно количеством», то есть потенциально бесконечной величиной, и был уверен, что его «флюэнты» и «флюксии» имеют объективное основание. Лейбниц же полагал дифференциалы бесконечно малыми разностями обычных конечных величин, то есть – актуально бесконечными, и считал, что «бесконечно малое должно иметь место не в качестве чего-то действительно существующего, а только как чисто логическое основание»[1].

Однако, несмотря на такое разное понимание дифференциала, и Лейбниц, и Ньютон в практике вычисления с *бесконечными* величинами действовали по привычке как с *конечными* и применяли принцип отбрасывания бесконечно малых.

Характеризуя ситуацию, возникшую в это время в дифференциальном исчислении, Гегель писал, что дифференциалы «уже больше не суть НЕЧТО, если принимать нечто за определенное количество, не суть конечные разности; но оно также и НЕ суть НИЧТО, не суть лишенный определения нуль. Вне своего отношения они – чистые нули, но их следует брать только как моменты отношения, как определения дифференциального коэффициента»[2].

Гегель, таким образом, обратил внимание на внутреннюю противоречивость понятия «дифференциал». Разрешить это противоречие средствами математики не удавалось, поэтому и не оставалось ничего другого, кроме как представлять приращения переменной бесконечно малыми и приписывать им *самостоятельное существование,* не обращая внимания на их специфическую природу. В этом, прежде всего, и состоял «мистицизм», «таинственный характер новооткрытого исчисления»[3], на который обратил внимание Дж. Беркли в своей работе «Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику», отрицая существование бесконечно малых величин на том основании, что они чувственно не воспринимаемы[4].

Трудности обоснования математического анализа, как мы уже отметили, во многом были связаны и с пониманием предела. По аналогии с механикой и геометрией Ньютон, Даламбер и другие математики XVIII в. исследовали только непрерывные и монотонные функции и в силу этого понимали под пределом лишь последнее значение переменной или «последнее отношение» переменных. Причем, не имело значения, *достигает* ли переменная этого значения или лишь *приближается* к нему как угодно близко. Позднее Карно уточняет понятие предела, говоря о последнем значении переменной, к которому она приближается.

Такая трактовка понятия «предел» была распространена в математике вплоть до середины XIX столетия. Так, например, известный российский математик В. Буняковский считал задачей дифференциального исчисления «уловить отношения изменяющихся по известному закону величин в то самое

---

[1] Г. О. Вейль философии математики. М.–Л., 1934. – С. 11–12.
[2] Г. Гегель. Наука логики. – М., 1970. – Т. 1. – С. 306.
[3] К. Маркс. Математические рукописи. – М.,1968. – С. 151, 193.
[4] Дж. Беркли. Сочинения. – М., 1978. – С. 395.

мгновение, когда эти величины исчезают», то есть найти последнее значение отношения переменных.

«Узкая» трактовка понятия «предел» не сняла проблемы обоснования математического анализа. Разработка способов вычисления определенного интеграла показала, что различные его виды должны обосновываться независимо от понятия неопределенного интеграла. Однако, учитывая тот факт, что каждое слагаемое любой интегральной суммы является бесконечно малой величиной, следовало не только легализовать «изгоняемое» по названным выше причинам понятие бесконечно малого, но и выяснить его реальное содержание, а значит и границы его применения. Это было возможным лишь путем преодоления ставшего уже традиционным понимания функции (Эйлер)[1] и предела.

Такая возможность оказалась реализованной в работах Коши, который показал, что предел, к которому стремится последовательность значений функции, при приближении аргумента к нулю, в некоторой точке может оказаться отличным от значения функции в этой точке. Иными словами, предел – это не всегда «последнее» значение переменной, но всегда есть число, к которому переменная приближается неограниченно.

Из этого следовало, во-первых, что dx и dy нельзя ни считать с необходимостью нулями, ни отождествлять их с «мистически» актуально бесконечно малыми величинами; а во-вторых, что сама бесконечно малая есть не что иное как переменная, которая имеет своим пределом нуль, и что этот факт не связан с возникающими в анализе противоречиями.

Кроме этого Коши показал, что переменная может приближаться к своему пределу немонотонно, иногда принимая значения, равные ее пределу.

Все это вместе придало теории Коши, по словам Лузина, необходимую общность и исключительную гибкость. Достигнутые Коши результаты в области математического анализа, позволили ему дать понятию бесконечно малого реальное истолкование, достаточно строго обосновать алгоритм Лейбница-Ньютона и дифференциальное исчисление, учение о непрерывности и разрывах функций, разработать начала теории определенного интеграла.

Но главное заключалось в том, что с созданием Коши теории пределов в математику внедряется новый идеал строгого обоснования ее теорий, связанный с введением в нее следующих принципов.

Во-первых: «не считать невозможным кажущееся парадоксальным». Раскрывая суть этого принципа К. Гаусс писал, что нельзя смешивать «то, что нам кажется неестественным, с тем, что нам кажется абсолютно невозможным».

Во-вторых: «рассматривать все возможности, которые представляет предмет исследования, и в соответствии с этим строить общие теории». Этот принцип становится основополагающим в работе ведущих математиков первой половины XIX в.

---

[1] Понятие функции формировалось в течение длительного периода. Идея функции как соответствия была выдвинута сначала Н. Лобачевским (1834 г.), а затем – Дирихле (1837 г.). Во времена Эйлера большинство математиков стояли на точке зрения, согласно которой функция считалась аналитическим выражением, которое является бесконечно дифференцируемым и разлагается в степенной ряд. Позднее Эйлер изменил свою точку зрения, допуская, что существуют «смешанные» функции, задаваемые на разных участках различными аналитическими выражениями, и функции, задаваемые графически.

В-третьих: «прежде чем задаваться вопросом о зависимости, существование которой остается неизвестным, следует поставить вопрос, возможна ли в действительности такая зависимость» (Н. Абель).

Разработанные на основе этих принципов способы обоснования математики, а также созданные и внедренные в математическую практику новые методы способствовали перестройке математического анализа, алгебры, теории чисел и, в определенной мере геометрии, в соответствии с требованиями новой методологии. Это позволило преодолеть трудности второго кризиса и создать благоприятные условия для дальнейшего развития математической науки.

§3. Проблемы актуальной бесконечности в математике XIX–XX вв.

В семидесятых годах XIX столетия немецким математиком Г. Кантором была создана единая теория множеств, которая стала началом новой эпохи в математике, и которая, одновременно, положила начало ее **третьему кризису**.

Несомненной заслугой Кантора было введение понятий «мощность множества», «счетное множество» и «несчетное множество», определение понятия «бесконечное множество» как множества, в котором его часть равномощна самому этому множеству. Однако главной идеей, на которой была основана теория множеств, была идея актуальной бесконечности, под которой он понимал «в себе постоянное, константное, лежащее по ту сторону всех величин количество»[1]. Используя это не бесспорное понятие, Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел, подобную обычной арифметике, что позволяло, по сути дела, говорить об арифметизации математики.

Теория множеств Кантора неоднозначно была встречена математиками. Одни из них приняли ее восторженно и сразу же стали ее использовать для обоснования различных областей математики (Пеано, Фреге, Кутюра и другие). Другие отнеслись к ней настороженно и даже негативно (Пуанкаре, Брауэр, Кронекер и другие). Наиболее уязвимым звеном для критиков учения Кантора о множествах и оказалась идея актуальной бесконечности, которая в то время не принималась многими выдающимися математиками.

Самым серьезным противником концепции Кантора был Л. Кронекер, который полностью отрицал понятие актуальной бесконечности. Кронекер полагал действительно существующими, реальными лишь натуральные числа, считая иррациональные числа (к которым он относил и введенные Кантором трансфинитные числа) лишь удобными символами для описания унифицированным способом их некоторых свойств. Поэтому натуральные числа являются для него единственным объектом «чистой» математики. И поскольку все теоремы математического анализа можно истолковать как описания законов, действующих в области натуральных чисел, то только постольку они и являются правомерными.

Возражая своим оппонентам, Кантор писал, что все «так называемые доказательства» против возможности актуально бесконечных чисел ошибочны, потому, что они заранее приписывают или, скорее, навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем как бесконечные числа (если только возможно их мыслить) противоположны по отношению к конечным числам, они представляют совершенно новый числовой вид, «свой-

---

[1] G. Cantor. Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1932. – S. 374.

ства которого вполне зависят от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола или наших предрассудков»[1].

В конце концов Кантор добился полного признания своей теории, которая стала быстро развиваться, став в короткое время основной математической дисциплиной и получив применение в различных разделах математики, и прежде всего в теории функций действительного переменного и топологии. Вот тут-то в теории множеств и были обнаружены парадоксы, которые поставили под сомнение учение Кантора, и, что более важно, серьезно потрясли основания математики, положив начало ее кризису, который не преодолен до сих пор.

По мнению Френкеля и Бар-Хиллела первый парадокс в теории множеств обнаружил сам Кантор еще в 1895 г., а через два года этот парадокс открыл Бурали-Форти, который и сделал его достоянием математического сообщества. Суть этого парадокса можно изложить следующим образом.

«В теории трансфинитных порядковых чисел показано, что: (1) каждое вполне упорядоченное множество имеет (единственное) порядковое число; (2) каждый отрезок множества порядковых чисел (то есть любое подмножество этого множества, упорядоченное естественным образом, которое вместе с каждым порядковым числом содержит все предшествующие ему) имеет порядковое число, большее, чем все порядковые числа этого отрезка; (3) множество B всех порядковых чисел, расположенных в естественном порядке, вполне упорядочено. Тогда в силу утверждений (3) и (1) B имеет некоторое определенное порядковое число β, а так как β содержится в B, то в силу утверждения (2) $\beta < \beta$, что является противоречием»[2].

Кроме названных парадоксов в теории множеств были открыты и другие, хорошо известные сегодня парадоксы, названные именами первооткрывателей: парадоксы Ришара (о счетности и несчетности бесконечных множеств), Берри (о существовании наименьшего натурального числа, которое нельзя назвать посредством числа слогов, меньшего некоторого конечного числа), Греллинга (о гетерологичном и автологичном), Сколема (о пересчете несчетного множества).

Наибольшую известность приобрел парадокс, открытый в 1902 г. Б. Расселом, построившим следующее рассуждение. «Как известно, большинство множеств не являются элементами самого себя (например, множество улиц Москвы само не является улицей). Вместе с тем интуитивно кажется очевидным, что существуют множества, являющиеся элементами самих себя (например множество всех понятий). Иначе говоря, все множества можно разделить на две разновидности: множества, не являющиеся элементами самих себя (так называемые собственные множества); множества, являющиеся элементами самих себя (так называемые несобственные). Пусть M – множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя. К какой из указанных двух разновидностей относится само множество M ? Если множество M не является элементом самого себя, то по определению оно входит в число множеств, являющихся элементами множества M. Следовательно, M является элементом самого себя. Если же допустить, что множество M является элементом самого себя, то по определению оно не входит в число множеств, являющихся элементами M. Следовательно, M не является элементом самого се-

---

[1] См.: Георг Кантор. Труды по теории множеств. Ответств. редакторы А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. – М., 1985. – С. 263.

[2] Х. Карри. Основания математической логики. – М., 1969. – С. 22–23.

бя. Таким образом, при любом из двух противоположных допущений относительно множества *M* возникает противоречие»[1].

Не менее показателен в этом смысле и парадокс Берри в такой, например, интерпретации. Выражение «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше чем тридцать три слога», определяет некоторое натуральное число *n*. «Согласно своему определению, число *n* таково, что его нельзя назвать посредством меньше чем тридцать три слога. Вместе с тем, очевидно, что приведенное выше выражение определяет число *n* с помощью меньше, чем тридцать три слога»[2].

Все эти парадоксы оказали глубокое воздействие на развитие математики в целом и, в частности, на развитие математической логики, став весьма сильным аргументом в оправдании попыток изменить классический подход к пониманию математической науки и ее методологии. По словам Гильберта, обнаруженные парадоксы «оказали на математический мир прямо-таки катастрофическое действие». Перед этими парадоксами не устояли Дедекинд и Фреге, которые были вынуждены отказаться от своей точки зрения на математику. Фреге, например, в послесловии к своим «Основаниям арифметики» писал, что в связи с парадоксами теории множеств его утешает лишь то, что это «общее несчастье», ибо речь идет не столько о принятом им способе обоснования арифметики, сколько о проблеме «обоснования арифметики вообще»[3].

Ситуация, возникшая в математике, весьма образно была интерпретирована академиком А. Александровым, который писал: «Теоретико-множественная установка оказалась подорванной, и вместе с нею оказалось подорванным все стройное здание математики. В верхних его этажах шло энергичное строительство: кирпичи теорем, соединяемые цементом логики, укладывались в рамки уже определившихся разделов и воздвигались каркасы новых теорий, но в теоретико-множественном фундаменте обнаружились расширяющиеся трещины парадоксов и под ними зыбучие пески и топи логических трудностей»[4].

Третий кризис в основаниях математики, проявившийся в начале XX в. с возникновением парадоксов в теории множеств, привел к многочисленным попыткам их разрешения различными нетрадиционными средствами, что привело к ускоренному развитию математической логики и появлению таких направлений в обосновании математики, как *логицизм, интуиционизм* и *формализм*.

Первое направление, связанное с именами Лейбница, Фреге, Пирса, Шредера, Рассела и Уайтхеда, характеризовалось стремлением построить основания математики так, чтобы ее теории можно было свести к некоторой логической системе. Рассел, например, полагал, что к началу XX в. математика и логика слились в единую науку: «Логика стала математичнее, а математика – логичнее». А Шредер на Первом математическом конгрессе отмечал, что, с его точки зрения, математика является лишь «ветвью всеобщей логики».

Для преодоления противоречий теории множеств Рассел и Уайтхед в своей знаменитой «*Principia mathematica*» построили «теорию типов», где счита-

---

[1] Логический словарь ДЕФОРТ. – М.,1994. – С.199.

[2] Логический словарь ДЕФОРТ. – М.,1994. – С. 176.

[3] G. Frege. Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 2. Jena, 1902. –S. 253.

[4] А. Д. Александров. Математика и диалектика // Сибир. матем. журнал. – Новосибирск, 1970. – Т. XI. – № 2. – С. 247.

лось правомерным рассматривать лишь такие множества, все элементы которых принадлежат одному типу[1].

«Следование этому правилу, – пишут Ивс и Ньюсом, – исключает возможность импредикативных определений и тем самым позволяет избежать противоречий»[2].

Теория типов Рассела и Уайтхеда создала определенные конструктивные возможности для оперирования с бесконечными множествами, а логицизм в целом способствовал преодолению консервативного отношения к классической логике.

Второе направление оформилось в работах Кронекера, Пуанкаре, Брауэра, Гейтинга и Вейля. Интуиционисты не принимали абстракции актуальной бесконечности и «экзистенциальное» истолкование существования математических объектов, а, кроме того, элиминировали возможность применения к бесконечным множествам закона исключенного третьего. Эти ограничения позволяли изъять из рассмотрения такие противоречивые понятия, как «множество всех множеств»[3].

Наиболее четко и последовательно идеи интуиционизма изложены в работах Брауэра, который исходил из существования «изначальной интуиции», на основе которой «человеческий разум “строит” натуральные числа и континуум». Брауэр утверждал, что полагать существующими можно лишь те «математические объекты, которые человеческий разум строит указанным способом» за конечное число шагов. В силу этого требования такие понятия, как множество всех натуральных чисел, должны рассматриваться не как законченные конструкции, а как находящиеся «в процессе роста». Аналогично и бесконечная последовательность должна быть заменена «последовательностью выборов, которые могут быть совершенно свободными и непредсказуемыми или ограниченными некоторым законом»[4]. Выполнение этих требований приводит к отрицанию закона исключенного третьего в построениях, включающих в себя бесконечные множества.

Вводимые интуиционистами ограничения по оценке ведущих математиков того времени имеют «своим результатом разрушение большей части современной математики, а некоторые остающиеся положения изменяются так, что становятся почти неузнаваемыми»[5]. Вот почему многие математики выражали озабоченность и тревогу в связи разработкой интуиционистской математики. «Вейль и Брауэр, – писал, например Гильберт, – стремятся спасти математику, выбрасывая за борт все, что причиняет беспокойство… Они крошат и рубят науку. Если бы мы приняли такую реформу, которую они предлагают, то подверглись бы риску потерять большую часть наших самых ценных сокровищ»[6].

И действительно, в случае принятия этой программы математика лишилась бы следующих своих завоеваний: общего понятия иррационального числа, понятий функции и трансфинитного числа, теоремы о существовании наименьшего числа в бесконечном множестве целых чисел, а также принципа исключенного третьего.

---

[1] B. Russel, A. N. Whitehtad. Principia mathematica, Cambridge, England, 1910–1913; 2nd td., 1925–1927. – P. 161–167.

[2] Г. Ивс, К. В. Ньюсом. О математической логике и философии математики. – М., 1968. – С. 34.

[3] М. И. Панов. Методологические проблемы интуиционистской математики. – М., 1984. – С. 4.

[4] См.: Х. Карри. Указ. соч. – С. 29.

[5] Там же.

[6] См., например: Рид Констанс. Гильберт. – М., 1977;[Электронный ресурс]: URL: http://ega-math.narod.ru/Reid/p4.htm ((дата обращения: 26.02.2012).

Вместе с тем, нельзя не отметить, что критическая направленность интуиционистов по отношению к классической математике «заставила своих противников, то есть подавляющее большинство математиков, уточнить свои позиции и яснее осознать причины … их веры в математику»[1]. Такая позиция «существенно углубила постановку и исследование проблем обоснования математики и логики; именно интуиционистам наука во многом обязана тем взлетом исследований фундамента математического знания, который характерен для нашего столетия»[2].

Дальнейшие исследования в области интуиционистской и конструктивной математики (Клини, Крипке, Марков, Шанин, Колмогоров и другие) показали, во-первых, что лежащие в основании классической математики понятия, сфера законной применимости которых ничем не ограничивается, «представляют далеко зашедшую идеализацию». А во-вторых, что понятия, входящие в концептуальный базис интуиционистской или конструктивной математики, «более строго обоснованы, по крайней мере, в том смысле, что в математике, требующей конструктивного построения своих объектов, принципиально не могут возникать парадоксы»[3].

Конструктивный подход к обоснованию математики с философской точки зрения интересен еще и тем, что он рассматривает процесс математического познания как особый вид деятельности, в которой используется определенная техника оперирования со знаковыми комплексами, и которую, вполне возможно, достаточно точно описать, используя введенное конструктивистами понятие «алгорифм».

Третье направление в обосновании математики – формализм – обязано своим возникновением и развитием Гильберту и его последователям Бернайсу, Аккерману, Генцену и другие.

Гильберт был активным сторонником канторовской теории множеств. Математикам хорошо известно его высказывание «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор»[4]. Поэтому он был весьма озабочен проблемой устранения обнаруженных в теории множеств парадоксов. Его основная идея решения этой проблемы состояла в том, чтобы доказать непротиворечивость математики точным математическим способом. Для этого требовалось уточнить понятие доказательства и создать теорию доказательства (метаматематику), что Гильберт пытался сделать с помощью формализации теории. При этом в своей метаматематике он допускал лишь финитные методы, которые не содержат сомнительных элементов канторовской теории множеств, в частности абстракции актуальной бесконечности[5].

Иными словами, программа спасения классической математики от парадоксов, предложенная Гильбертом, состояла из трех, последовательно решаемых задач. Во-первых, построить математику «в виде формальной аксиоматической теории»; во-вторых, «доказать ее непротиворечивость, то есть установить, что в этой формальной аксиоматической теории нельзя доказать противоречие»; наконец, в-третьих, сами доказательства сделать «предметом

---

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. – М., 1963. – С. 53.

[2] Б. В. Бирюков, Г. Вейль и методологические проблемы науки. – В кн. Вейль Г. Симметрия. – М., 1968. – С. 176.

[3] М. И. Панов. Указ. соч. – С.48.

[4] Д. Гильберт. Основания геометрии. М.–Л., 1948. – С. 350.

[5] См.: Г. И. Рузавин. Гильбертовская программа и формалистическая философия математики // Методологический анализ оснований математики. – М., 1988. – С. 108–168.

специальной математической дисциплины, названной Д. Гильбертом *метаматематикой*, или *теорией доказательств*»[1].

Программа Гильберта, однако, столкнулась с серьезным препятствием в виде теорем Геделя, показавших, что «вопрос о непротиворечивости достаточно богатой формальной системы не может быть решен средствами, которые формализуются в той же системе»[2].

Как мы уже отмечали, каждое из трех направлений в обосновании математики внесло значительный вклад в исследование парадоксов, в создание новых математических методов, в развитие математической науки в целом. Но наиболее важным, пожалуй, является то, что в процессе разработки идей логицизма, формализма и интуиционизма по сути дела произошел «переворот в математическом мышлении»[3].

При этом была убедительно показана возможность существования наряду с классической математикой других математик, математик, построенных на ином концептуальном базисе, ни одна из которых не претендовала «на право представлять единственно верную математику»[4].

Вместе с тем, приходится говорить и о том, что главная задача – освободиться от теоретико-множественных парадоксов – не была решена. Несмотря на обширную литературу, посвященную этой проблеме, нет какого-либо общепризнанного ее решения и сегодня. Проблема «логического и философского обоснования теории множеств и даже возможность такого обоснования, отмечают, например, В. А. Смирнов и П. В. Таванец, – остаются открытыми»[5] и по-прежнему важными.

Необходимо сказать еще об одной программе, целью которой было преодоление кризиса в основаниях теории множеств и разрешение их парадоксов, и которой сегодня «придерживаются не только большинство практически работающих математиков, но и специалистов в области ее оснований»[6]. Это – программа аксиоматизации.

Впервые аксиоматическое построение теории множеств выполнил Цермело (1908 г.). Впоследствии его аксиоматика была усовершенствована Френкелем, Сколемом, Нейманом, Бернайсом и другими математиками.

Основная идея Цермело состояла в том, чтобы, с одной стороны, ограничить область применения своей аксиоматики только такими множествами, рассмотрение которых не приводит к парадоксам, а с другой, – сделать ее такой, чтобы она сохраняла все ценное в теории множеств. Эта ограничительная идея получила всеобщее признание и впоследствии использовалась в новых аксиоматических теориях.

Вместе с тем, в системе Цермело имеется одна аксиома, вокруг которой происходят большие споры. Это – аксиома произвольного выбора. В ней говорится, что если дано множество M, состоящее из множеств N (не пустых и без общих элементов), то из каждого множества N можно выбрать по одному элементу так, что их совокупность образует новое множество P.

Опираясь на эту аксиому Цермело доказал, что всякое множество можно представить в виде вполне упорядоченного множества, что обеспечивало

---

[1] С. Клини. Математическая логика. – М.,1973. –С. 232, 233.

[2] П. С. Новиков. Элементы математической логики. – М., 1973. – С. 34.

[3] М. И. Панов Указ. соч. – С. 39.

[4] А. Гейтинг. Тридцать лет спустя. – В кн.: Математическая логика и ее применения. – М., 1960. С.225.

[5] Философия и логика. – М., 1974. – С. 11.

[6] Материалистическая диалектика как методология. – Алма-Ата, 1981. – С. 62.

возможность построения арифметики кардинальных трансфинитных чисел почти во всей их общности.

С помощью аксиомы выбора были строго обоснованы такие, например, удивительные утверждения, каким, несомненно, является достаточно хорошо известный математикам парадокс Банаха-Тарского (1920 г.), суть которого в том, что любой шар можно разбить на конечное число частей, из которых надлежащими перемещениями их в пространстве можно составить два точно таких же шара.

Однако, наряду с положительными оценками использования аксиомы выбора, в сообществе математиков были и те, кто высказывал к ней определенное недоверие. Объяснить скептическое отношение некоторых ведущих математиков к этой аксиоме можно, скорее всего, тем, что она носит экзистенциальный характер: как видно из ее формулировки, она лишь постулирует возможность выбора, не указывая способ его осуществления. Вместе с тем, исследования этой аксиомы показали, что ни она сама (Гедель), ни ее отрицание (Коэн) не противоречат системе аксиом Цермело, то есть что она не зависит от аксиом теории множеств. В силу сказанного следует, видимо, признать, что нет существенных оснований для того, чтобы каким-либо образом ограничить использование этой аксиомы в математических доказательствах. В конечном итоге – это выбор самого математика.

С аксиомой выбора тесно связана и другая важная аксиома, которую называют континуум-гипотезой. Гипотеза о том, что мощность континуума непосредственно следует за мощностью счетного множества, была сформулирована Кантором. Но ни он сам, ни другие математики не смогли ее ни опровергнуть, ни доказать.

Оценивая в целом программу аксиоматизации, следует сказать, что она действительно позволила элиминировать парадоксы из теории множеств и тем самым укрепить основания математики. Вместе с тем, существенным ее недостатком является отсутствие доказательства непротиворечивости систем аксиом этой теории, что, впрочем, не мешает использовать их в самых различных отраслях математической науки.

В семидесятые годы XX столетия появилась идея использовать для обоснования математики новый фундамент, в качестве которого предлагалась возникшая из алгебраической топологии теория категорий[1].

Преимуществом категориального подхода в обосновании математики были его общность, конструктивный подход к математической деятельности в анализе морфизмов, а также возможность иметь дело не столько с самими математическими объектами, сколько заниматься изучением их структурных характеристик[2].

Видимо, пока еще рано говорить о смене теоретико-множественного обоснования теоретико-алгебраическим. Однако принципиальная допустимость такой альтернативной точки зрения уже не вызывает сомнения. Тем более, что в настоящее время становится все более ясным, что теория категорий объединяет логику и математику, что, в свою очередь, дает возможность увидеть абрис единой теории формальных наук.

---

[1] См., например: М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. Основы теории категорий. – М., 1974.

[2] См.: С. Л. Катречко Теоретико-множественная (бурбакистская) парадигма математики и ее возможные альтернативы // Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28–30 мая 2009 г. – М.. 2009. – С. 21–22.; Б. Л. Яшин. Логико-гносеологические аспекты проблемы противоречия процесса познания. – М., 1992. – С. 69–72.

§4. Конечное и бесконечное в математике

Все три кризиса, имевшие место в математике, будучи неравнозначными по своей силе и глубине, имеют (о чем свидетельствуют три предыдущих параграфа), по крайней мере, одну общую причину – ее величество Бесконечность. Именно бесконечность, введенная с открытием пифагорейцами несоизмеримых отрезков в мир числовых отношений, вызвала первый кризис. Именно бесконечность (а точнее – понятие бесконечно малой) привела к существенным трудностям при разработке математического анализа Лейбницем и Ньютоном. Именно бесконечность, возведенная на трон в период наибольшего успеха теории множеств Кантора и наслаждавшаяся временем своего триумфа, привела к положению, «аналогичному тому, что случилось при развитии исчисления бесконечно малых», – писал Гильберт, – к положению, когда выявились противоречия, сначала единичные, а затем все более резкие и все более серьезные: так называемые парадоксы теории множеств»[1].

Эти парадоксы были прямым вызовом созданной Кантором теории, они затрагивали серьезные вопросы философских оснований математики, что требовало не менее серьезных *философских* же обоснований трансфинитных конструкций. И Кантор «со свойственной ему прямотой и напористостью, – отмечал В. Катасонов, – ответил на этот вызов и открыл новую “эру” дискуссий по основаниям математики, которые продолжались потом весь XX в.»[2].

Проблема конечного и бесконечного и сегодня – вот уже более двух тысяч лет – остается в центре внимания ученых и философов. Казалось бы, в чем проблема? Все достаточно просто: конечное – это, что имеет границу, предел. Бесконечное – не имеет никакой границы и никакого предела. В таком понимании, конечное и бесконечное всегда связаны с какими-то количественными характеристиками, а, следовательно, – с числами и величинами, то есть представляют собой математические абстракции. Однако на самом деле все не так просто.

Указывая на существующие проблемы, связанные с пониманием бесконечности, которые, что вполне естественно, находили свое отражение в философии и научном познании, Д. Гильберт писал: «С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность»[3].

Категории «конечное» и «бесконечное» с незапамятных времен используются не только в математике и других науках, но и в философии. Но одинаково ли понимание этих категорий и их соотношения в различных областях знания? Ответ на этот вопрос отрицательный. Если в математике и естественных науках (благодаря использованию в них математического аппарата) понятия конечного и бесконечного трактуются примерно одинаково, хотя даже в математике существуют разные типы бесконечного, то философское понимание этих категорий существенным образом отличается от научного их понимания.

---

[1] Д. Гильберт. Основания геометрии. – С. 348–349.

[2] В. Н. Катасонов. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М., 1999. – С. 1.

[3] Д. Гильберт. Основания геометрии. – М., 1948. – С. 348–349.

Главное отличие математического и философского понимания конечного и бесконечного, состоит в следующем. В первом случае, конечное и бесконечное представляются свойствами абстрактных, идеальных объектов вне их связи с объективной действительностью, а лишь в их отношениях между собой или другими объектами математики. Во втором случае, конечное и бесконечное берутся как фундаментальные, сущностные характеристики реального мира, они рассматриваются в их отношении к материальному и духовному бытию.

Можно сказать, что философский подход к этим категориям служит предпосылкой (явной или неявной), обусловливающей как способы их рациональной обработки, так и понимания сути проблемы конечного и бесконечного в той или иной науке. Поэтому математикам при возникновении каких-либо трудностей в обращении с бесконечным нередко приходится (вольно или невольно) обращаться к философскому осмыслению как самой этой категории, так и ее взаимоотношения с конечным.

Каждый объект познаваемой действительности, выделяемый из нее человеком, выступает в его сознании как отдельный предмет мышления, как достаточно определенный, имеющий границы, *конечный* объект. Эта его конечность фиксируется в сознании человека с различной «степенью точности», что соответствует различным уровням абстрагирования и, соответственно, глубины проникновения в сущность понимания конечного.

Для того чтобы выделить конечный объект, вполне достаточно ограничить его в каком-либо отношении, установить какие-то его границы (пространственные, временные, качественные или количественные). *«Конечность* в том вообще и состоит, – писал Гегель, – что нечто имеет границу, то есть в том, что *здесь* положено *его небытие,* что здесь это нечто прекращается»[1], благодаря чему оно соотносится с чем-то другим.

С таким пониманием конечного в определенной мере корреспондируется, например, определение понятия «граница множества» в математике. Граница множества X – это совокупность всех таких точек топологического пространства, «в котором расположено X, в любой окрестности которой есть точки как принадлежащие X, так и не принадлежащие ему»[2].

Совершенно ясно, что граница здесь выступает как единство бытия и небытия конечного объекта, как нечто вполне определенное в некотором отношении. В силу чего может случиться так, что один и тот же объект в одном отношении будет считаться конечным, имеющим границу, а в другом – бесконечным или не имеющим границы (множество точек некоторого отрезка, эллиптическое пространство Римана и т. п.). В этом проявляется условность, подвижность границы, связанная с выбором субъектом «угла зрения» на объект, того или иного отношения, того или иного контекста его изучения.

Условность границы проявляется и в том, что в объективной действительности не существует жестких разграничительных линий, отделяющих бытие предмета от его небытия. Образно говоря, это не линия без ширины, обладающая лишь протяженностью, а «коридор», ширина которого неопределенна.

Иными словами, граница в реальной действительности всегда «размыта». Это наше мышление делает ее жесткой и достаточно определенной. Именно в силу недостаточной «жесткости», неопределенности некоторых понятий в

---

[1] Г. Гегель. Работы разных лет. В 2-х т. – Т. 2. – М., 1971. – С. 24.

[2] Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 161.

языке возникают, например, хорошо известные парадоксы «Куча» и «Лысый». Можно сказать, что граница – это наперед заданная субъектом «величина», заранее выбранное им условие. С таким положением вещей необходимо считаться, так как неоправданный переход от некоторого интервала к более узкому его промежутку, от окрестности граничной точки к самой этой точке может привести к представлениям лишенным объективного смысла[1].

Понимание конечного имеет и другой аспект. Этот аспект связан с тем, что конечное может рассматриваться как нечто преходящее, что имеет свое завершение, свой конец. Такое понимание конечного предполагает его переход в «свое другое», иное конечное, инобытие. Другими словами, завершение бытия некоторого определенного конечного есть его переход в небытие, заключающийся в таком его изменении, которое связано с превращением этого конечного в другое. В этом суть диалектического понимания конечного.

Понятие конечного тесно связано с бесконечным. Хотя эта взаимосвязь на самых ранних этапах развития философии и математики не осознавалась. Конечное и бесконечное полагались совершенно разными, вполне самостоятельными сущностями, что привело к их противопоставлению. Это нашло свое выражение и в возникновении идеи о различных способах познания конечного и бесконечного: если для познания конечного вполне достаточно чувственного опыта, то для познания бесконечного нужен выход за его пределы, в область рационального или даже иррационального.

Попытки связать конечное и бесконечное, преодолеть их противоположность появились в Древней Греции, что стало сильнейшим стимулом развития философской и научной мысли. «Великим достижением греков, – писал Вейль, – было преобразование полярной противоположности конечного и бесконечного в мощное и плодотворное орудие познания действительности… Указанная полярность и стремление к ее преодолению стали для греков движущим мотивом познания»[2].

Это стремление выразилось в пифагорейской школе в отказе от рассмотрения конечного и бесконечного как различных сущностей, различных форм бытия, в переходе к пониманию бесконечного как особого количества, особого рода числовой характеристики. Тем самым бесконечность была введена в мир чисел. Однако, понимание бесконечного как некоторого количества таило в себе серьезные трудности, которые дали о себе знать при попытках применить к бесконечно большим и бесконечно малым отношений «больше», «меньше», «равно» или «неравно». На эти трудности обратил внимание в своих апориях Зенон, который, в частности, показал, что существующая в математике и философии того времени точка зрения, согласно которой сумма бесконечно малых величин может быть сколь угодно большой, если число составляющих эту сумму величин бесконечно велико, неверна.

По сути дела, апории свидетельствовали о том, что многие логические несообразности и неверные или противоречивые выводы при оперировании с бесконечными величинами связаны с наделением бесконечного свойствами конечного, а также перенесением методов, успешно применявшихся в области конечных величин и ограниченных множеств, на бесконечно большие и бесконечно малые величины и бесконечные множества.

Апории Зенона вскрыли и более глубокую проблему, коренящуюся в самом понятии «бесконечность», в его неоднозначности, двойственности, в про-

---

[1] См.: А. С. Кармин. Познание бесконечного. – М., 1981. – С. 43.

[2] Г. Вейль. О философии математики. – М.–Л.,1948. – С. 341.

тиворечии двух разных по своей сущности бесконечностей – потенциальной и актуальной.

О наличии под одной «личиной» бесконечности на самом деле двух, отличающихся друг от друга ее разновидностей, впервые сказал, по-видимому, Аристотель. Полагая, что бесконечности «вообще» в природе нет и не может быть, так как невозможно ни признать, ни отрицать ее существования в действительности, Аристотель утверждал, что в принципе можно говорить о двух видах бесконечности, но то что может быть справедливо по отношению к одному ее виду, не может быть таковым по отношению к другому. Отличие этих разновидностей бесконечности друг от друга состоит в том, что одна из них, которую он называл *актуальной бесконечностью,* отождествляется им с бесконечным чувственно воспринимаемым телом и величиной; вторая же, называемая им *потенциальной бесконечностью*, понимается им как незавершенный, вечно продолжающийся процесс. Первую разновидность Аристотель отрицал, признавая лишь вторую. С его точки зрения, не может быть бесконечно большого числа, но всегда можно найти число, которое превосходит ранее заданное. Точно так же не может быть и наименьшей величины, так как всегда можно найти величину (в силу возможности ее непрерывного деления), которая будет превосходить по своей малости заданную. Таким образом, бесконечное, по Аристотелю, «имеется там, где, беря известное количество, всегда можно взять что-нибудь за ним»[1]. Тем самым Аристотель разделял количественный подход к пониманию бесконечности.

Роль абстракции потенциальной бесконечности особенно ярко проявилась при разработке дифференциального и интегрального исчислений, в которых, как известно, широко использовалась идея бесконечно малых величин. Эти величины рассматривались как актуально малые количества, но при вычислениях считались равными нулю. Такая их трактовка приводила к значительным трудностям в обосновании математического анализа, о которых мы говорили в связи с рассмотрением второго кризиса в математике.

На ограниченность количественного подхода в понимании бесконечного в современной ему математике обратил внимание уже Гегель, который писал, что если «бесконечно большое или бесконечно малое есть нечто такое, что уже больше не может быть увеличено или уменьшено, то оно на самом деле уже *не определенное количество* как таковое»[2].

По его мнению, бесконечность одновременно количественно определенна и неопределенна: «… бесконечно большое должно быть чем-то *большим*, то есть определенным количеством и бесконечным, то есть не должно быть определенным количеством»[3]. Указывая на это обстоятельство, Гегель предлагал рассматривать бесконечное количество как «некоторую качественную определенность».

Противоречие количественной трактовки бесконечного, вскрытое Гегелем, обнаружило новые слабые стороны в основаниях математики в связи с открытием парадоксов теории множеств (третий кризис математики). Как известно, Кантор в своей теории множеств опирался на абстракцию актуальной бесконечности, имея в виду определенную качественную завершенность бесконечного множества.

---

[1] Аристотель. Физика. Кн. III. – Гл. 6. – М., 1936. – С. 53.

[2] Г. Гегель. Наука логики. – М., 1970. – Т. 1. – С. 324.

[3] Г. Гегель. Наука логики. – М., 1970. – Т. 1. – С. 306.

«… для возможности утверждения, что некоторое множество актуально бесконечно, – писал он, – существенно важны лишь определенность всех элементов этого множества и то, что количество их больше любого конечного числа, а вовсе не требуется, чтобы множество было ограниченно в какой-нибудь форме некоторым последним принадлежащим к нему членом. Какое-нибудь множество совершенно ограничено уже тем, что все, принадлежащее к нему, определено в себе и вполне отлично от всего, не принадлежащего к нему»[1].

Такое понимание бесконечности и стало причиной возникновения парадоксов в теории множеств, что, естественно, вызвало волну критики. Наиболее радикальные ее представители в лице интуиционистов предлагали исключить из арсенала средств математики абстракцию актуальной бесконечности и использовать лишь ее антипод – потенциальную бесконечность.

«Представление о бесконечном множестве как о какой-то совокупности, составленной с помощью бесконечно большого числа отдельных произвольных актов выбора и затем обозреваемый нашим сознанием как некое целое, писал Вейль, – лишено смысла»[2].

Однако в решении вопроса о том, какую бесконечность оставить в математике, а какую – элиминировать, возобладала здравая позиция: оба понятия используются в современной математике с учетом специфики задач, стоящих перед исследователем.

Положение дел в современной математике свидетельствует о том, что нет необходимости в жесткой отграниченности, резком противопоставлении указанных абстракций. Обе они характеризуют одну и ту же реальную бесконечность: одна акцентирует внимание на количественной определенности, на бытии, вторая – на изменчивости, на становлении. История математики показывает, что одностороннее преувеличение одной из этих форм бесконечности приводит к значительным трудностям, что задача исследователя состоит не в том, чтобы противопоставлять эти понятия друг другу, а скорее, в том, чтобы рассматривать их в связи и единстве, как понятия, дополняющие друг друга[3].

Необходимо отметить и еще одно обстоятельство, имеющее отношение к использованию математиками понятия «бесконечность». Речь идет о том, что когда математика применяется для практических исследований реального мира, приходится отказываться от таких «сильных» абстракций как «потенциальная бесконечность» и «актуальная бесконечность» и использовать понятие «практической бесконечности», полагая бесконечной достаточно большую или достаточно малую величину. Иными словами в приложениях математики эти величины рассматриваются не как переменные, а как постоянные.

Такое представление получило обоснование в прикладном нестандартном анализе, где идея бесконечно малой как некоторой постоянной величины опирается на принципы и математический аппарат, в основе которых лежит допущение, дающее возможность рассматривать бесконечно малые как особого рода числа. Иначе говоря, бесконечно малые вводятся в более общую теорию как некоторые идеальные элементы, благодаря чему эта теория приобретает завершенность и общность[4].

---

[1] Г. К. Кантор. К учению о трансфинитном // Новые идеи в математике. – СПб., 1914. Сб. 6 т. – С. 291.

[2] Г. Вейль. Математическое мышление. – М. 1989. – С. 108.

[3] См. об этом, например: Г. И. Рузавин. Философские проблемы оснований математики. – М.,1983.

[4] См.: Г. И. Рузавин. Математизация научного знания. – М., 1984. – С. 32–34.

Глава IV. Рациональное и иррациональное в математике

В современной философии научного познания, да и в теории познания в целом, остаются не выясненными до конца проблемы соотношения рационального и иррационального. До сих пор существуют различные оценки роли, которую играют иррациональные факторы в научном и, в частности, математическом познании.

При этом сегодня не существует и вполне однозначного понимания научной рациональности. В отечественной философии науки, например, в настоящее время выделяют три типа научной рациональности. Это – классическая рациональность (соответствующая классической науке в двух ее состояниях – додисциплинарном и дисциплинарно организованном); неклассическая рациональность (соответствующая неклассической науке) и постнеклассическая рациональность[1].

Рациональность, понимаемая в самом общем смысле как требование обращаться в процессе познания не к чувствам и эмоциям, а к рассудку и разуму, с моей точки зрения, означает приоритет гносеологических и логико-методологических средств и способов обоснования знания. Первостепенное значение в этом случае имеют непротиворечивость, доказательность (обоснованность), согласованность и системность знания.

В современной философии, как впрочем, и в эпистемологии, нет также однозначного ответа на вопрос о том, что представляет собой иррациональное как таковое. Чаще всего иррациональное понимается как нерациональное, то есть неупорядоченное, произвольное, спонтанное, необъяснимое с позиции рационального познания.

Вместе с тем достаточно хорошо известно, что в познании рациональное существует в тесной взаимосвязи с иррациональным. Это две противоположности, каждая из которых обусловливает другую, и каждая выполняет вполне определенные функции в познавательной деятельности. Учитывая важность и многоаспектность понимания иррационального, мы рассмотрим две его разновидности: *интуицию* и *неявное знание*.

§1. Интуиция и логика в математическом творчестве

Проблема интуиции в познании имеет давнюю историю. Понимание этого феномена и его взаимоотношения с рациональным, прежде всего рассудочным мышлением в философии и науке различно.

Для Плотина интуиция – божественный дар вневременного познания чего-либо одним лишь взглядом.

У Платона интуиция – «особое внутреннее зрение», «высшая способность ума», связанная с внезапным усмотрением скрывающихся за вещами идей.

Декарт подразумевает под интуицией «не зыбкое свидетельство чувств и не обманчивое суждение неправильно слагающего воображения, а понимание (*conceptum*) ясного и внимательного ума, настолько легкое и отчетливое, что не остается совершенно никакого сомнения относительно того, что мы разумеем»[2]. Это «понимание ума» для него даже более достоверно, чем сама дедукция.

---

[1] См. об этом подробнее: В. С. Степин Структура и динамика научного познания // В. С. Степин, В. Г. Горохов, М. А. Розов. Философия науки и техники. – М., 1996.

[2] Р. Декарт. Соч. в 2-х т. – Т. 1. – М., 1989. – С. 84.

Фейербах рассматривает интуицию как нечто несомненное и ясное, сосредоточенное в чувственности.

Бергсон полагает, что в интуиции происходит непосредственное слияние субъекта и объекта, а Полани считает ее спонтанным интегрирующим процессом, в ходе которого происходит непосредственное внезапное усмотрение целостности кажущегося разрозненным множества объектов.

С точки зрения синергетики, интуицию можно представить как неосознаваемый процесс самоорганизации, самодостраивания визуальных и понятийных образов, представлений и идей[1].

И хотя в современной философии и науке нет единого понимания сущности этого психического феномена, большинство его исследователей сходятся в том, что характерными чертами интуиции являются *неосознанность* пути, который приводит к найденному результату, *внезапность и неожиданность* решения, его *новизна* и *неординарность,* а также *непосредственная очевидность*[2].

Из сказанного, вполне ясно, что интуиция может трактоваться как способность воспринимать знания непосредственным образом с помощью органов чувств. В этом случае ее называют *чувственной интуицией.* Вместе с тем, она может пониматься и как способность ума, связанная с непосредственным постижением истины без опоры на доказательство или на чувственные впечатления. Такую интуицию называют *интеллектуальной*[3]. И та, и другая интуиции представлены в истории науки, в том числе и в истории математики.

В теоретическом знании со времен античной философии сформировалась традиция противопоставления интуиции и логики. Вполне естественно, что она нашла свое выражение и в математике. Может быть, наиболее ярко эта оппозиция была представлена в работах Канта, который считал чистую интуицию пространства и времени (чистые формы чувственного созерцания) не только основанием для математических аксиом, но и гарантом правильности каждого математического доказательства. По Канту, на интуиции пространства базируется геометрия, на интуиции времени – арифметика. Именно поэтому, с его точки зрения, в математике «все выводы гарантированы от ошибок тем, что каждый из них показан наглядно»[4].

Исходя из того, что все теоремы геометрии доказываются с помощью построений, и что сами построения осуществляются в интуитивно представляемом пространстве, Кант сделал вывод, что «всякое необходимое для доказательства построение непременно опирается на интуицию, на наглядное представление»[5].

Похожую идею о сущности и роли интуиции в математике высказывает и Гёдель. Он полагает, что вся математика опирается на особый род интуиции, понимаемой им как способность непосредственным образом обнаруживать свойства математических сущностей и формулировать их в виде аксиом. Эта интуиция, с точки зрения Гёделя, родственная чувственному восприятию в эмпирических науках, рождает числа, геометрические фигуры или

---

[1] См., например: Е. Н. Князева, С. П. Курдюмов. Интуиция как самодостраивание // Вопросы философии. – 1994. – № 2.

[2] См., например: А. С. Кармин. Интуиция // Диалектика познания. – Л., 1988.

[3] Н. О. Лосский. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. – М., 1995.

[4] И. Кант. Сочинения в 6-ти т. – Т. 3. – М., 1964. – С. 317.

[5] В. Ф. Асмус. Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.) – М., 1965. – С. 211–212.

множества. Она же служит специфическим критерием истинности достаточно общих положений математики, которые сами не являются интуитивно ясными, но должны быть приняты (так же как и всякая хорошо обоснованная физическая теория) хотя бы в силу того, что они служат эффективным средством решения каких-либо математических проблем[1].

Вполне возможно, что идея Канта о том, что наглядное представление, то есть интуиция, есть не что иное, как конструирование понятия (или в воображении – в чистом созерцании, или на бумаге – в эмпирическом созерцании)[2], послужила Брауэру основанием для разработки интуиционистской математики. С точки зрения Брауэра, математика является самодостаточной, автономной областью мыслительной деятельности, в которой на основе чистой интуиции времени исследователь конструирует те или иные математические объекты.

Интуиция времени порождает основную интуицию математики – первоинтуицию, интуицию «чистого двуединства» или интуицию целого числа. После того, как создан ряд конечных натуральных чисел, основная интуиция математики порождает интуицию линейного континуума, то есть непрерывность ряда действительных чисел. В конечном итоге интуиция целого числа, являясь исходным, первичным понятием в математике Брауэра, «определяет свойства арифметики и геометрии как синтетических суждений априори»[3].

В своих работах, связанных с математикой и логикой, Брауэр последовательно отстаивал приоритет интуиции над логикой, активно выступал против идей логицизма и формализма, в которых математику пытались представить сугубо рациональной наукой, освободить ее от интуиции и интуитивного знания.

Проблема соотношения логического и внелогического в математической науке ярко высветилась и в полемике между Пуанкаре и Кутюра по поводу расселовского определения математики, сводящего последнюю по сути дела к логике[4]. Утвердительно отвечая на вопрос о существовании в математике элементов внелогического, Пуанкаре активно отстаивал точку зрения о том, что получить новые результаты в математике, опираясь только на логические средства, невозможно, что новое необходимо связано с интуицией, на которую математики опираются даже при доказательстве уже выведенных истин. Он утверждал, что математическое творчество неразрывно связано с интуицией, понимаемой им в кантовском смысле как чувственное созерцание.

В одной из работ Пуанкаре есть эпизод, связанный с открытием им фуксовых (автоморфных) функций. В течение двух недель, он ежедневно проводил по одному-два часа за столом, перебирал большое число комбинаций и не приходил ни к какому результату. «Однажды вечером, – писал Пуанкаре позднее, – я выпил, вопреки своему обыкновению, чашку черного кофе; я не смог заснуть; идеи возникали во множестве; мне казалось, что я чувствую, как они сталкиваются между собой, пока, наконец, две из них, как бы сцепившись друг с другом, не образовали устойчивого соединения. Наутро я установил существование класса функций Фукса, а именно тех, которые полу-

---

[1] K. Godel. What is Cantor's Continuum Problem // Beneceraff and Putman (eds.) Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. – P. 477.

[2] См.: И. Кант. Указ. соч. – С. 600.

[3] М. И. Панов. Методологические проблемы интуиционистской математики. – М., 1984. – С. 128–129.

[4] См.: Новые идеи в математике. Пг., 1915. – Вып. 10.

чаются из гипергеометрического ряда; мне оставалось лишь сформулировать результаты, что отняло у меня лишь несколько часов»[1].

Описывая далее свои размышления над развитием теории этих функций, Пуанкаре показывает, что каждый новый их шаг сопровождался неким толчком, или озарением, а затем уже – кропотливой работой по вербализации, языковому и логическому оформлению результатов.

Опираясь на исследования своего собственного творчества, Пуанкаре показал, что для интуиции характерны неосознаваемая деятельность ума и внезапно являющийся исследователю результат этой деятельности, что эффективность бессознательной мыслительной деятельности и даже сама ее возможность во многом зависит от предшествующего и следующего за ней этапов сознательной работы.

На эти же особенности математического творчества обращал внимание в одной из своих работ и Адамар, который выделил этапы «подготовки» (осознанного исследования проблемы), «инкубации» (неосознаваемой деятельности мышления), «озарения» (внезапного осознания найденного решения), и, наконец, «проверки и теоретического оформления» найденного результата[2].

Подход к творчеству как к внезапному озарению, как к неизвестно откуда появившейся генеральной идее, как к усмотрению нового характерен и для современных психологов, занимающихся проблемами творческой деятельности. Многие из них связывают творчество с ситуациями, когда при решении каких-либо проблем логические способы оказываются безрезультатными.

Такого рода ситуации возникают либо в силу того, что в процессе решения мышление исследователя сталкивается с непреодолимым препятствием, либо потому, что полученный результат не удовлетворяет исходным требованиям, либо по причине возникновения новой задачи, которая не может быть решена существующими средствами, либо из-за возникновения перспективы более эффективного, более удачного решения[3].

Во всех перечисленных случаях необходим выход за границы известного, за пределы тривиального, стандартного, стереотипного. С этим переходом в за-предельное и связана интуиция, в том числе и математическая.

Подчеркивая роль интуиции и воображения в разработке математических теорий, известный математик Ф. Клейн в одной из своих лекций, обращенной к школьным учителям, говорил, что было бы неверно представлять математику наукой, в которой ученые занимаются лишь дедуктивным выведением следствий из заданных определенным образом не противоречащих друг другу посылок. В действительности, «исследователь работает в математике, как и во всякой другой науке, совершенно иначе: он существенно пользуется своей фантазией и продвигается вперед индуктивно, опираясь на эвристические вспомогательные средства»[4].

Итак, значение интуиции в математическом творчестве очевидно. Ни одно математическое открытие без нее было бы невозможно. В принципе поиск решения той или иной задачи, не связанной лишь с тождественными преобразованиями, с необходимостью опирается на интуицию. Конечно, этот вывод касается не только математики. Известный американский социолог

---

[1] См.: А. Пуанкаре. Наука и метод // Анри Пуанкаре. О науке. – М., 1983. – С. 404–405.

[2] См.: Ж. Адамар. Исследование психологии изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970.

[3] См., например: Э. Де Боно. Рождение новой идеи. – М., 1976; А. Н. Лук. Психология творчества. – М., 1978; Д. Пойя. Математическое открытие. – М., 1970; Интуиция и научное творчество. – М., 1981 и другие.

[4] Ф. Клейн. Вопросы элементарной и высшей математики. – Одесса. 1912. – С. 339.

Р. Коллинз в одной из своих работ пишет о том, что «идея полной и строгой формализации, операционализации и измерения всего и вся в научной теории – химера. В каких – то пунктах теории всегда обнаруживаются неформальные понятия и интуитивные скачки мысли»[1].

Видимо поэтому самое строгое, безупречное, с точки зрения логики, доказательство может быть не принято математиком, если он интуитивно не понимает его результата. Интуиция «подсказывает» математику правильное решение, которое он затем обосновывает на языке математической теории, переводя возникающее на этапе «инкубации» неявное, невербализованное знание, в знание вербализованное, выраженное с помощью символов и терминов математики.

Однако значение интуиции не следует и преувеличивать. Она, действительно, играет важную и необходимую роль в математике и любой другой области научного познания, но не менее важной и необходимой в науке является логика. По образному сравнению Пуанкаре интуиция – это орудие изобретательства, а логика – орудие доказательства. Каждая из них дополняет друг друга, поддерживая и помогая в труднейшем процессе познания истины.

Необходимо иметь в виду и тот факт, что интуиция может быть источником ошибок и заблуждений. Она всегда личностна, субъективна, и, следовательно, ее результаты никогда не могут считаться окончательными и безупречными для всех и каждого. Они всегда нуждаются в критической оценке и строгом логическом обосновании. Это тем более касается математики.

Примером интуитивного заблуждения одновременно многих людей может служить убеждение математиков XIX в. в том, что всякая непрерывная функция имеет производную. Это заблуждение было связано с тем, что интуитивное представление о непрерывной функции, связано с ее геометрическим представлением как функции, графиком которой является непрерывная кривая линия. Но любая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Отсюда следует вывод о том, что любая непрерывная функция имеет производную. Вывод, как оказалось, далеко не безупречный.

Это убедительно показал Больцано, обнаруживший непрерывную функцию, которая не имела производной ни в одной своей точке, и Вейерштрасс, который доказал существование непрерывной функции, с теми же свойствами.

И все же интуицию, как средство познания в математике, и в науке в целом, нельзя сбрасывать со счетов только потому, что в некоторых случаях она приводит к ошибкам и заблуждениям. Вместе с логикой она представляет собой двуединый инструмент, сила и надежность которого подтверждается многовековой практикой.

Роль интуиции в научном творчестве проявляется еще и в том, что она во многом определяет характер мышления ученого, его подход к решению тех или иных проблем. Адамар, например, считал, что по способу использования умственных образов или других конкретных представлений ученые сильно отличаются друг от друга. «Совершенно естественно говорить об уме более интуитивном, – пишет он, – когда зона комбинирования идей находится глубоко, и об уме логическом, если эта зона расположена достаточно поверхностно»[2].

---

[1] R. Collins. Sociology: prescience or antiscience? // American Sociological Review. February 1989. – Vol. 54. – P. 124–139. Перевод в: Теория общества. Фундаментальные проблемы / под ред. А. Ф. Филиппова. – М.,1999.

[2] Ж. Адамар. Указ. соч. – С. 107–108.

Пуанкаре делит математиков на геометров (интуитивистов) и логиков (аналитиков), относя к первым Ли и Римана, ко вторым – Эрмита и Вейерштрасса.

Для такого деления есть вполне достаточные основания. Математик, обладающий интуитивным мышлением, работая продолжительное время над решением какой-либо проблемы, способен быстро делать выбор наиболее эффективного подхода к ее решению или неожиданно, внезапно получать само решение прежде, чем оно будет обосновано. Он воспринимает проблему целостным образом и не осознает того, каким образом получено ее решение. Естественно, что решение при этом обязательно нуждается в проверке доказательными рассуждениями. Работы математиков-геометров часто сопровождают рисунки, а если это вообще невозможно, то математики, принадлежащие к этой группе, пытаются вербально описать возникающие перед их «взором» образы. Общие идеи доказательства какой-либо новой теоремы они высказывают до того, как сформулирована сама эта теорема, а при доказательстве нередко опускают «мелкие» детали.

Математик-аналитик, напротив, вполне осознает ход своих рассуждений и может отчетливо выразить каждый их шаг вербально. Иллюстрации в виде чертежей или рисунков он использует крайне редко. Поиск решения проблемы математиком-аналитиком целенаправлен, достаточно строго спланирован и последователен. Как правило, они не пропускают без доказательства ни одной мелочи. Что же касается общей идеи доказательства, то она для математиков-алгебраистов не является главным вопросом, ее суть для них может остаться и не проясненной.

Аналитики, по мнению Пуанкаре, – мастера силлогизмов. Они очень редко ошибаются. Однако, по его мнению, среди математиков-аналитиков очень редко встречаются настоящие творцы[1].

Конечно, деление математиков на геометров и логиков достаточно условно. Оно не означает, что математик-аналитик может заниматься проблемами сугубо алгебраическими, а математик-интуитивист – лишь проблемами геометрическими. Отмеченные учеными особенности того или иного типа мышления, свидетельствуют лишь о преобладании у человека тех или иных способностей, что ни в коей мере не ограничивает возможностей его творчества. Другими словами представителям того или другого типа мышления может быть вполне по силам задача из любой области математического знания, но решать они ее будут по-разному. Каждый из них будет неосознанно выбирать те «инструменты», те средства и методы ее решения, которые ему представляются более удобными.

Вот как иллюстрирует эту ситуацию Пуанкаре:

«Мере, пишет он, – хочет доказать, что двучленное уравнение всегда имеет корень, или, говоря просто, что всегда можно разделить угол на части. Если есть истина, которую мы могли бы узнать непосредственной интуицией, то она здесь.

Кто станет сомневаться, что угол всегда можно разделить на какое угодно количество равных частей, и чтобы доказать это, ему нужно несколько страниц.

Напротив, посмотрите на Клейна: он изучает один из самых абстрактных вопросов теории функций; требуется узнать, всегда ли существует на данной поверхности Римана функция, допускающая данные сингулярности. Что де-

---

[1] См.: А. Пуанкаре. Ценность науки. О науке. – М. 1990.

лает знаменитый немецкий геометр? Он заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам, и соединяет две точки ее с двумя полюсами элемента. Ток, говорит он, непременно пройдет, и распределение этого тока по поверхности определит функцию, особыми свойствами которой будут именно те, которые предусмотрены условием.

Без сомнения, Клейн знает, что он дал здесь лишь наглядный очерк; и все-таки он не задумался опубликовать его; вероятно, он надеялся найти здесь если не строгое доказательство, то, по крайней мере, как бы нравственную уверенность. Логик с ужасом отбросил бы подобную концепцию или – вернее – ему и не нужно было бы ее отбрасывать, потому что она никогда не могла бы возникнуть в его уме»[1].

Еще раз следует подчеркнуть, что в действительности интуитивное и аналитическое мышление не существуют изолированно, они взаимосвязаны и дополняют друг друга. Математиков-интуитивистов и математиков-аналитиков в «чистом виде» не существует. Тот или иной тип мышления является лишь преобладающим. В мыслительной деятельности логиков обнаруживаются и внелогические, интуитивные компоненты, без которых, как утверждает Полани, нельзя воспользоваться аксиомой математической индукции, которая опирается на скрытую аналогию.

Чтобы «усмотреть» эту аналогию и необходим выход за пределы рационального. И, наоборот, в творческой работе «геометров» – математиков-интуитивистов – невозможно обойтись без рассуждений, требующих логичности. Логика и интуиция – это две стороны одной «медали» – творчества.

§2. Неявное знание в математике

Еще одной формой иррационального является так называемое «неявное знание». В последнее время философы, занимающиеся проблемами познания в целом и научного познания, в частности, немало внимания уделяют роли этого феномена в познавательной деятельности. Неявное знание отличается тем, что к нему неприложимы традиционные характеристики знания – рефлексивность, логическая обоснованность, возможность однозначной истинностной оценки. Существование неявного знания в сфере психического связано с социальным характером человеческого бытия, с тем, что человек, в том числе рассматриваемый как субъект познания, с необходимостью вступает в те или иные отношения с другими людьми, что он помимо своей воли оказывается включенным в культурно- исторический контекст.

Это знание человек приобретает путем собственного жизненно-практического опыта, поэтому, в отличие от явного знания, знание неявное несет «отпечаток» личности, оно «нагружено» пристрастиями и убеждениями субъекта и не допускает полной экспликации[2].

Неявное знание – это некоторая нерефлексивная и никоим образом не выраженная в языке форма субъективного знания, служащая важной предпосылкой и условием его общения с самим собой, условием познания и понимания.

---

[1] См.: А. Пуанкаре. Ценность науки. Математические науки // А. Пуанкаре. О науке. – С. 205–218.

[2] См. Философский энциклопедический словарь. – М., 1989. – С. 200, 490.

В математике проблема неявного знания во многом связана с проблемами обоснования, так как в процессе строго формального дедуктивного доказательства математик нередко неосознанно опирается на положения явным образом не сформулированные, не выраженные в языке. Иногда в качестве основания для доказательства тех или иных утверждений используется ссылка на внутреннюю убежденность в истинности некоторого положения, которое является результатом неосознанного умозаключения. Математик может быть и рад бы представить его явным образом, но не может «развернуть» это мгновенно промелькнувшее в его голове в «свернутом» виде умозаключение. Иногда это неявная ссылка на знание, которое хорошо известно и признано в математическом сообществе.

Неосознанное знание чего-то иного, скрытого за явно выраженным знанием, подразумевание какого-либо условия, опора на невербализованные предпосылки в рассуждениях – все это достаточно широко представлено в математических теориях.

Так, например, Евклид в своих «Началах» опирается на не выраженный явным образом постулат о параллельных прямых. Доказательство «от противного», эффективно использующееся во всех отраслях математического знания, лишь подразумевает использование законов исключенного третьего и непротиворечия.

Современная аксиоматическая теория множеств, в частности, операциональная теория множеств Ч. Фефермана (OST-теория), хотя и не использует понятие актуальной бесконечности явным образом, тем не менее, неявно включает некоторую форму ее существования[1].

Неявным образом включают в себя актуальную бесконечность и аксиомы Цермело-Френкеля, так как без принятия этого понятия невозможно доказать теорему Кантора о несчетности континуума.

В некоторых работах А. Зенкина показано, что «*традиционное* доказательство этой Теоремы со времен Кантора и до наших дней никогда не содержало *в явном виде*, по крайней мере, двух *необходимых* условий. Первое условие связано с *актуальностью* всех бесконечных множеств, фигурирующих в канторовском доказательстве» а второе – так называемый постулат Кантора-Ходжеса[2], «вообще имеет *телеологический* характер, то есть, согласно Кронекеру, не имеет к математике никакого отношения»[3].

Более того, А. Зенкин показывает, что явная формулировка и (алгоритмическое) использование указанных необходимых условий приводит к тому, что Теорема Кантора либо становится ложной, либо недоказуемой.

Наибольшие возможности для проникновения неявного знания в математику, скорее всего, предоставляет аналогия, благодаря которой устанавливается общность самых отдаленных областей математического знания и нередко создаются обобщающие математические теории. Вместе с ее результатами в теорию вводятся интуитивные, невербализованные, не всегда осозна-

---

[1] См.: А. А. Зенкин. О некоторых семантических дефектах в логике интеллектуальных систем // Девятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ – 2004). Секция 3. Правдоподобные рассуждения и неклассические логики. – Тверь, Россия, 2004. Труды конференции. – Т. 1. – С. 271–280.

[2] Суть этого постулата состоит в том, что для индексации счетного списка элементов континуума необходимо использовать все элементы счетного множества N = {1,2,3, …} и категорически запрещается использовать не все натуральные числа, например, элементы счетного множества {2,4,6, …}, так как в последнем случае доказательство Кантора теряет силу.

[3] См. А. А. Зенкин. Там же.

ваемые элементы, обусловленные интеллектуальными, мировоззренческими и т. п. особенностями эмпирического (индивидуального или коллективного) субъекта. Такого рода вторжение математиков (и не только математиков, а любых ученых вообще), работающих в одной области знания, в связанную с ней другую область может быть неожиданно продуктивным как для обеих областей знания, так и для самих этих ученых.

В одной из своих работ известный французский математик Ж. Дьедоне, являвшийся одним из основателей группы Н. Бурбаки, показывает, что неявное взаимодействие в математическом творчестве Римана теории аналитических многообразий и теории чисел привело его к созданию новой теории, названной впоследствии бирациональной алгебраической геометрией кривых. И что использование Риманом мероморфных функций в приложении к анализу римановой поверхности позволило ему перейти «к понятию из чистой алгебры – полю рациональных функций кривой, которое является попросту конечным расширением поля рациональных дробей над комплексными числами»[1].

В обоих случаях Дьедоне подразумевает особый тип математической интуиции, который он называет «переносом интуиции» и считает основным и одним из наиболее важных источников математического развития. Хотя следует отметить, что этот «перенос», с нашей точки зрения, происходит именно на основе неявного (интуитивного) использования аналогии.

Другой известный ученый, наш российский математик В. И. Арнольд, отмечает эффективность взаимодействия таких различных отраслей научного знания, как физика и математика. «Топология, – говорит он, – полезна в квантовой теории, а методы квантовой теории поля приводят иногда к трудным топологическим результатам»[2].

Неявное знание оказывается включенным в математику и благодаря существующему в ней доопытному, априорному знанию, которое является содержанием таких неформализуемых понятий, как «количество», «множество», «дискретность», «непрерывность» и т. п., а также знанию, основанному на универсальных представлениях о реальности, порожденных деятельностью человека. Важно отметить, что в этом случае неявное знание не является в строгом смысле личностным, оно, в силу его всеобщности, одновременно, и интерсубъективно.

Неявное знание может определять и характер операционной деятельности математика, что великолепно было продемонстрировано Л. Витгенштейном и С. Крипке при исследовании ими проблемы следования правилу, которые показали невозможность следовать правилу в случае его существования в качестве формального предписания[3].

Вместе с тем, такое положение дел вовсе не означает, что правило вообще невыполнимо. Это правило «работает», но лишь при условии его освоения как *коммуникативного навыка.* Вполне понятно, что такого рода навыки не формулируются и не формализуются. Они передаются в сообществе и принимаются «каждым математиком в ходе обучения и дальнейшей профессио-

---

[1] .Ж. Дьедоне. Абстракция и математическая интуиция // Математики о математике. – М, 1982.

[2] В. И. Арнольд. Антинаучная революция и математика // Вестник Российской Академии Наук. – Т. 69. – № 6, 1999. – С. 553–558; http://www.mmonline.ru/.

[3] См.: Л. Витгенштейн. Философские исследования // Л. Витгенштейн. Философские работы. – М., 1994; С. А. Крипке. Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. – Томск, 2005.

нальной деятельности. Передача математических знаний человеку, не владеющему соответствующими привычками, невозможна»[1].

Оценивая в целом роль неявного знания, по-видимому, следует согласиться с В. А. Лекторским в том, что в науке в целом оно представляет собой средство достижения знания явного. Что же касается математики, где серьезное внимание уделяется проблеме обоснования знания и где огромную роль рефлексия над существующими системами знания, то здесь практически «каждая процедура рефлективного анализа предполагает некую нерефлектируемую в данном контексте рамку неявного “обосновывающего” знания»[2].

Иными словами, неявное знание в определенной мере служит началом дальнейших математических разработок. Оно же во многом обусловливает характер предпосылок, лежащих в основе создаваемого метода, дающего возможность вывести те или иные теоретические утверждения, которыми затем наполняются учебники[3]. Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что неявное знание играет в математическом познании не менее важную роль, чем интуиция.

Будучи в большинстве своем феноменами личностными, в той или иной мере обусловленными социокультурной средой, в которой личность бытийствует, и представляющими в познании иррациональное, интуиция и неявное знание требуют серьезного и глубокого изучения. Этому требованию вполне отвечает складывающийся в отечественной философии науки подход в понимании рационального и иррационального и их взаимоотношения. В контексте этого подхода рациональность предстает как понятие, отражающее границы конструктивной человеческой деятельности, лежащие в самом человеке и в создаваемом им мире. Иррациональное же, лишаясь своей отрицательной оценки, «понимается как интуитивные, схватываемые фантазией, чувством неосознаваемые грани самого разума, … как новое, еще неотрефлектированное, допонятийное, не принявшее логически определенные формы знание»[4].

Глава V. Математика в контексте культуры

§1. Математика в искусстве, литературе и архитектуре

В современной математике, а тем более философии математики, все больше укореняется точка зрения, согласно которой математика считается элементом системы культуры[5]. Математика не только приобретает под воздействием культуры многие свои свойства, превращаясь сегодня, по образному выражению Арнольда, в математику «с человеческим лицом», но и сама оказывает существенное влияние на развитие этой системы (Уайлдер).

История культуры дает всевозможные образцы воздействия на нее тех или иных идей математики и, наоборот, влияния различных областей культуры на математику[6]. Совершенно очевидной является взаимообусловленность

---

[1] См.: Г. Б. Гутнер. Неявное знание и новизна в математике. // Эпистемология&Философия науки. – Т. XV. – № 1, 2008.

[2] В. А. Лекторский. Субъект, объект, познание. – М., 1980. – С. 258.

[3] См. об этом, например: М. Полани. Личностное знание. – М., 1985.

[4] Л. А. Микешина, М. Ю. Опенков. Там же. – С. 18.

[5] См., например: Стили в математике. Социокультурная философия математики. – СПб., 1999.

[6] См., например: С. Н. Бычков, Е. А. Зайцев. Математика в мировой культуре. – М., 2006; В. П. Казарян, Т. П. Лолаев. Математика и культура. – М., 2004.

развития математики, естествознания и техники. Весьма велико влияние геометрии в архитектуре и градостроительстве. Хорошо известно, какую значительную роль сыграли математические идеи перспективы, пропорции, в частности, «золотого сечения», и другие в живописи, графике, скульптуре и музыке.

Так, например, в декоративном искусстве с древних времен и по настоящее время широко используется идея симметрии. Она является основным приемом построения бордюров и орнаментов, встречающихся в настенной росписи зданий, галерей или лестничных переходов, в чугунном литье оград парков и решеток мостов и набережных, в гипсовых барельефах или в произведениях керамики. Если для бордюров характерной особенностью является переносная симметрия вдоль линии переноса, то для орнаментов, искусство которых, по словам Вейля, содержит в неявном виде наиболее древнюю часть известной нам высшей математики[1], характерным является сочетание всех видов симметрии.

Уже в неолите, пишет Д. Стройк, «орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию и подобие фигур. В этих фигурах могут проявляться и числовые соотношения, как в некоторых доисторических орнаментах, изображающих треугольные числа; в других орнаментах мы обнаруживаем «священные» числа. … Прекрасные орнаменты мы видим на дипилоновых вазах минойского и раннегреческого периода, позже – в византийской и арабской мозаике, в персидских и китайских коврах»[2].

Все семнадцать видов орнаментов, которые возможны на плоскости, использовались уже в искусстве Древнего Египта. Однако только в XIX в., все они были найдены, изучены и описаны русским ученым Федоровым в работе «Симметрия на плоскости» (1891). Идея симметрии позволила Федорову, опиравшемуся в своих поисках на геометрию, и Шенфлису, который использовал алгебраический аппарат теории групп, независимо друг от друга установить, что всех возможных кристаллических форм в природе не может быть более 230 (группы Федорова). Работы этих авторов послужили началом особой науки о кристаллах – кристаллографии.

Понятие симметрии играет важную роль в исследованиях физических свойств пространственно-временного континуума (проблемы однородности и изотропности и связанные с этими свойствами законы сохранения), в решении проблем образования атомных спектров и в классификации элементарных частиц. Это понятие и его антипод – асимметрия – имеют большое значение для химии и биологии, психологии и нейрофизиологии, для всего естествознания в целом.

Замечательным примером взаимосвязи математики (геометрии) и изобразительного искусства является творчество голландского «математического графика» Маурица Эсхера. Его гравюры («Восемь голов», «День и ночь», «Рептилии», «Рисующие руки», «Лента Мебиуса», «Метаморфозы», «Узлы» и другие) и мозаики (например, «Всадники») – представляют собой удивительный сплав художественного (образного) и рационального творчества, неординарную попытку проникновения в суть сугубо математических проблем средствами изобразительного искусства.

---

[1] См.: Г Вейль. Симметрия. – М. 1968.

[2] Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М. 1978. – С. 26.

«В работах этого художника можно увидеть не только построения, отвечающие различным системам симметрии, «характеризующим, скажем, логарифмическую спираль Я. Бернулли или так называемую спираль Корню, играющую столь значительную роль в волновой оптике», – писал российский математик И. М. Яглом в отзыве на книгу Б. Эрнста «Волшебное зеркало М. К. Эсхера», – но и реализацию в художественных образах таких глубоких математических идей, как учение об узлах и «бесконечно удаленных точках» плоскости[1].

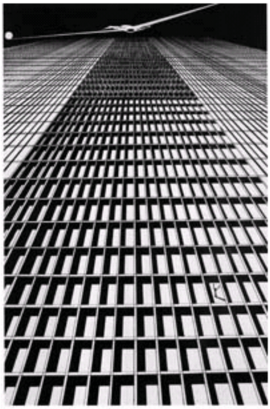
Гравюра М. Эсхера «Восемь голов»

---

[1] См.: К. Левитин. Геометрическая рапсодия. – М. 1984. – С. 157.

Еще одним примером взаимосвязи изобразительного искусства и математики являются графические работы известного геометра А. Т. Фоменко, которые, по мнению некоторых искусствоведов, сделали бы честь любой выставке современного искусства, и которым он в некоторых из своих книг находит чисто математическую интерпретацию, понятную лишь специалистам[1].

А. Т. Фоменко. Математика: Спектральная последовательность.



В алгебраической топологии при вычислении групп гомологий и когомологий пространств часто используется метод спектральных последовательностей. Для этого пространство стараются представить в виде расслоения, после чего алгебраическим путем вычисляется бесконечная последовательность таблиц. Таблицы связаны между собой дифференциальными операциями. На рисунке условно изображена структура таких таблиц. Они бесконечны и разбиты на ячейки (клетки), в каждой из которых помещается некоторая группа. Геометрическая информация о пространстве расслоения перерабатывается в набор алгебраических фактов, характеризующих эти таблицы. Если расслоение является прямым произведением, то достаточно вычислить лишь первую таблицу. Остальные с ней совпадают. Если же расслоение нетривиально, то последующие таблицы получаются из предыдущих более сложным образом.

Симметрия, пропорциональность, гармония, ритм, равенство и повторы частей не являются прерогативой лишь декоративного или изобразительного искусства, они являют собой и структурную упорядоченность многообразных музыкальных форм. Хорошо известно, что в основе музыки лежит строгая математическая организация звуков. Упорядочив звуки в октавах точно и ясно по законам математики, гармонизировав их, человек смог навести в мире звуков порядок, который стал радовать его слух и разум и который явился математической основой красоты музыки. «Только после построения гаммы – пропорциональной шкалы в мире звуков – стало возможным выработать музыкальный язык и передавать на этом языке музыкальные мысли – мелодии»[2].

---

[1] А. Т. Фоменко. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. – М., 1998; Он же. Математика и миф сквозь призму геометрии. – М., 2001.

[2] А. В. Волошинов. Архитектура – математика – музыка // Философские науки. – № 7, 1991. – С. 173.

Любая гамма в пределах октавы являет собой пример упорядоченной звуковой последовательности, представляющую собой геометрическую прогрессию с тем или иным ее знаменателем (так, равномерно-темперированная гамма – геометрическая прогрессия, знаменатель которой q = 1,06). А наиболее благозвучными музыкальными интервалами (консонансами) с древних времен считаются октава, с отношением 2:1, малая терция – 6:5, большая терция – 5:4, квинта – 3:2, кварта 4:3, малая и большая сексты с отношениями, соответственно, 8:5 и 5:3.

Совершенно неслучайно, поэтому Пифагор не соглашался с оценкой музыки, в основе которой лежат чувства. Достоинства музыки, по его мнению, должны восприниматься умом. Судить о музыке, считал он, следует не по слуху, а «на основании математической гармонии»[1].

Позиция Пифагора становится более понятной, если рассмотреть математические составляющие мелодии, гармонии и метра, тесно связанного с ритмом.

«Музыка особенно наглядно показывает связь ритма объекта с его изменениями: ритмическая фигура музыкальной фразы задает «пространство» интонационных событий»[2]. А ритм, вместе с метром способствует осуществлению мысленного счета внутри- и межтактовых музыкальных акцентов. Иначе говоря, ритм и метр, вместе с их восприятием в музыке, имеют математическую природу.

Такую же природу имеет и восприятие музыкальной гармонии. В этом может убедиться каждый музыкант, так как число и сила гармонических биений могут быть заранее вычислены для любого случая.

Связь математики и музыки отчетливо просматривается и в мелодии, в которой высотные и темпоральные отношения ее звуков «образуют математические ряды»[3] (о чем мы уже говорили выше).

Достаточно отчетливо представлена математика и в поэзии, где ритм и размер, оказывают существенное влияние на восприятие поэтического произведения. Одно дело – гекзаметр, другое – ямб, да еще и четырех- или пятистопный, третье – хорей … Здесь все имеет значение. Но, прежде всего, количественные закономерности, которые имеются в поэтических произведениях и которые могут быть восприняты в отрыве от содержания.

Необходимо отметить, что филология и математика соприкасались давно. «Древнейшее стиховедение почти сводилось к математике – разумеется, крайне простой, – пишет, например филолог В. Е. Холшевников. – Античные стиховеды устанавливали количественные отношения (долгий слог равен двум кратким), находили простейшие единицы измерения – стопы, затем единицы высшего порядка – стихи, строфы. Это элементарно, но все же это – математика. Да иначе и быть не может по самой природе стихотворной речи – речи ритмической, в которой с большей или меньшей степенью регулярности повторяются и строятся в ряды чем-то подобные элементы. В разное время и в разных языках эти элементы могут быть различными (например, сочетания слогов долгих и кратких или же ударных и безударных), но суть дела от этого не меняется. Поэтому средневековые стиховеды так свободно черпали понятия и термины у античных, а Тредиаковский и Ломоносов – у

---

[1] См.: Античная музыкальная эстетика. – М., 1960. – С. 288.

[2] А. В. Чухно. Математика и ритмы действительности // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции. 15–16 июня 2007. – М., Из-во Савин С. А., 2007. – С. 228.

[3] См.: А. В. Чухно Там же. – С. 231.

античных, французских и немецких. Поэтому и мы, определяя основные категории стихотворной речи (размер, строфу и т. д.), не можем обойтись без счета, то есть простейшей математики»[1].

Ярким примером языкового творчества, в котором осязаемо проявляет себя математика, являются произведения футуриста–«будетлянинина» В. Хлебникова. Будучи знаком с математикой не понаслышке (В. Хлебников изучал ее в Казанском университете), он обнаружил «великую» значимость числа в естествознании и «придал ему в своих литературных поисках всеобщий характер»[2]. В. Хлебников «вжился в мир математических абстракций и заставил их жить нематематической жизнью»[3].

В «Госпоже Ленин», по его словам, «он хотел найти «бесконечно малые» художественного слова», а в «Детях Выдры» у него «скрыта разнообразная работа над величинами – игра количеств за сумраком качеств»[4].

В «Скуфье скифа» В. Хлебников пытается «внутреннее» человека «вывернуть» во внешнее, используя метафору числа. «Я знал, пишет он, – что –1 нисколько не менее вещественно, чем 1; так, где есть 1, 2, 3, 4, там есть и –1, и –2, и –3, и –4, и корень квадратный из –2, и корень квадратный из –3. Где есть один человек и другой естественный ряд людей, там, конечно, есть и корень квадратный из –человека, и корень квадратный из –2 людей и корень квадратный из –3 людей, и корень квадратный из n людей = корень квадратный из –n людей. Я, сейчас окруженный призраками, был 1 = корень квадратный из –человека. Пора научить людей извлекать вторичные корни из себя и отрицательных людей»[5].

А процесс осмысления геометрии Лобачевского, которая произвела на В. Хлебникова такое сильное впечатление, что, по его мнению, «… Лобачевского кривые украсят города», он представляет следующим образом:

«Мир с непоперечными кривыми»
Во дни «давно» и весел
Сел в первые ряды кресел
Думы моей,
Чей занавес уже поднят»[6].

«Поверить гармонию алгеброй», изучая статистические закономерности в поэтических произведениях, пытались также такие знаменитые русские символисты начала XX в., как А. Белый, В. Брюсов, С. Бобров, В. Чудовский и другие[7].

А. Белый, например, на основе исследований метра и ритма формулировал правила и старался следовать им в своих поэтических опытах. Не обладая профессиональными знаниями в математике, А. Белый допускал в этой работе математические ошибки, которые позже были исправлены русским математиком Б. В. Томашевским, более известным по его работам в области фи-

---

[1] В. Е. Холшевников. Стиховедение и математика // Содружество наук и тайны творчества. – М. ,1968. – С. 384.

[2] В. П. Кузьменко. Синхронное открытие физической сущности мнимости Велемиром Хлебниковым, Андреем Белым и Павлом Флоренским // Материалы VIII международных Хлебниковских чтений «Творчество Велимира Хлебникова в контексте мировой культуры XX века». В 2-х ч. – Астрахань, 2003, 18–20 сентября. – Ч. 1. – С. 180–188.

[3] Там же.

[4] В. Хлебников. Свояси // Велимир Хлебников. Творения. – М., 1986. – С. 36.

[5] В. Хлебников. Скуфья скифа // Велимир Хлебников. Там же. – С. 539–540.

[6] В. Хлебников. Перед закатом в Кисловодск // Велимир Хлебников. – С. 158.

[7] См., например: Б. М. Эйхенбаум Теория «формального метода»:URL : www.opojaz.ru/method/method00.html (дата обращения: 1.03. 2012).

лологии, в которых он одним из первых применил аппарат теории вероятностей[1].

Математический аппарат для изучения закономерностей в поэзии был разработан русским математиком А. Н. Колмогоровым. Кроме теории вероятностей он включал в себя математическую статистику и теорию информации. В различные годы А. Колмогоровым было опубликовано около десятка работ, связанных с исследованием метрики, ритмики, дольников и т. п.[2]

Многие его работы, посвященные исследованию ритмики и метрики произведений русских и советских поэтов (В. А. Жуковского, А. С. Пушкина, А. А. Блока, А. А. Ахматовой, В. В. Маяковского, М. И. Цветаевой, Б. Л. Пастернака, Э. Г. Багрицкого), признаются сегодня классическими.

Метрика и ритмика, а вместе с ними и математические закономерности проявляют себя и в многообразных архитектурных формах. Для классической архитектуры такой закономерностью является геометрическая прогрессия со знаменателем равным коэффициенту «золотого сечения» ($q = 0{,}618$). Для современной архитектуры такая закономерность часто ассоциируется с модулором известного французского архитектора Ле Корбюзье. Его «модулор» – это ряд «золотого сечения», он «представляет собой гармонические ряды чисел, которые связаны в единую систему и предназначены для использования в архитектуре и дизайне – для гармонизации всей среды, в которой обитает человек»[3].

«Модулор это – гамма. Музыкант располагает гаммой и создает музыку по своим способностям – банальную или прекрасную» – говорил сам архитектор. Ему вторил и А. Эйнштейн, называя модулор гаммой пропорций, «которая делает плохое трудным, а хорошее – легким».

Корбюзье мечтал о перестройке с помощью модулора всей архитектурной и предметной среды. Идеи модулора были воплощены в таких его знаменитых творениях, как «Лучезарный дом» (Марсель) и Роншанская капелла.

Единственное, что объединяет эти два таких разных памятника зодчества (первый – воплощение здравого смысла, ясного, прямолинейного и рационального; второй – нечто иррациональное, пластическое, скульптурное, сказочное) – это модулор – архитектурная гамма пропорций, общая для обоих произведений.

Многие архитекторы вплоть до XVIII в. черпали идеи гармонии в пифагореизме и в аналогии архитектуры и музыки, полагая, что главной аксиомой архитектуры следует считать положение о том, что красота здания есть производное от симметрии и математических законов.

Вместе с тем, история свидетельствует и об обратном процессе: влиянии архитектуры на математику и другие науки. Так, например, известно, что существуют *барочная* математика[4] и *барочная* физика, занимающиеся про-

---

[1] См., например: Б. В. Томашевский. Пятистопный ямб Пушкина // Очерки по поэтике Пушкина. Берлин, 1923.

[2] См., например: А. Колмогоров. К изучению ритмики В. В. Маяковского // Вопросы языкознания. – № 4 (1963);
А. Кондратов, А. Колмогоров. Ритмика поэм Маяковского // Вопросы языкознания. – № 3 (1962);
А. Н. Колмогоров, А. В. Прохоров. О дольнике современной русской поэзии // Вопросы языкознания. – № 6;
А. Н. Колмогоров. К основам русской классической метрики // Содружество наук и тайны творчества. – М. ,1968; и другие.

[3] См., например: Понятие о гармонии. Математические закономерности композиции: URL: http://www.i2r.ru/static/469/out_17570.shtml(дата обращения: 1. 03. 2012).

[4] Объектом барочной математики, исследованию которой посвятил одну из своих работ Ж. Делез, является, по его мнению, «вариация», имеющая тенденцию выделять понятие функции и сама становящаяся в силу этого

блемами кривизны. Именно барочная универсальная методология, которую использовали Ньютон и Лейбниц в своих исследованиях бесконечно малых, лежала в основе их разработок дифференциального и интегрального исчисления[1].

§2. Математика и философия

Взаимовлияние математики и духовной культуры, понимаемой в узком смысле, может быть, наиболее ярко проявилось во взаимосвязи математического и философского способов освоения действительности. История развития науки и культуры в целом свидетельствует о том, что философия и математика, как определенные системы знаний возникают примерно в одно время. С этого момента у них обнаруживается множество точек соприкосновения: высокий уровень обобщений, единое и многое, конечное и бесконечное, количество и качество, проблема существования и проблема истины, противоречие и непротиворечивость, и многое, многое другое.

Кроме того, обе системы теоретического знания характеризуются тем, что в них никоим образом не используется практический эксперимент, опыт. Математики и философы в своих рассуждениях опираются, прежде всего, на «умозрение», они работают не с реальными (материальными), а с абстрактными, идеальными или идеализированными объектами. Эта особенность проявляет себя в обеих отраслях знания настолько очевидно, что невозможно не увидеть этого сходства.

Взаимосвязь математики и философии видна уже в милетской школе философии. Она проявляется, во-первых, в том, что в математике переходят к доказательствам, в которых нуждалась и философия; а во-вторых, в том, что первые милетские философы в математике «выходят на путь *абстрактных обобщающих построений*»[2], которые превращают математику во всеобщее знание.

Влияние античной математики на философию явным образом проявляет себя в пифагорейской школе, философы которой обнаружили в математике выражение глубинной сущности мира, нечто связанное с истинной и неизменной природой вещей. Основной тезис пифагореизма состоит в том, что «все есть число», именно «число владеет … вещами»[3]. Видимо, поэтому К. Маркс назвал Пифагора «статистиком мироздания»[4].

Как подражание числам в пифагорейской школе стали рассматриваться не только чувственно воспринимаемые вещи, но и их свойства, и отношения. По аналогии со свойствами того или иного числа или числового соотношения, их стали трактовать как проявление числовой гармонии. Можно сказать, что пифагореизм стал первой философской теорией математики.

Связь математики и философии прослеживается и в атомистическом учении Левкиппа и Демокрита, в котором, в противовес пифагорейцам, геометрические фигуры считались не умозрительными сущностями, а материальными телами, состоящими из атомов. Физическое здесь понималось как

функциональной. См. подробнее: Ж. Делез. Складка. Лейбниц и барокко / Общая редакция и послесл. В. А. Подороги. Пер. с франц. Б. М. Скуратова. – М., 1997.

[1] З. Гидион. Пространство, время, архитектура. – М., 1975.

[2] Н. В. Мотрошилова. Рождение и развитие философских идей. – М., 1991. – С. 88.

[3] А. Н. Чанышев. Курс лекций по древней философии. – М. 1981. – С. 143.

[4] К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч., 2-е изд. – Т. 1. – С. 32.

логически предшествующее математическому, умозрительному, абстрактному, а математические закономерности выступали как вторичные по отношению к атомам. Атомы же считались и материальной причиной вещей, причиной их существования, и первыми сущностями, невидимыми простым глазом, а «зримые» лишь умом. В определенной мере можно сказать, что атомизм предвосхитил идеи математического естествознания.

Созданная Демокритом концепция математики, называемая *концепцией математического атомизма*, дала ему возможность решить проблему правомерности теоретических построений математики, не обращаясь к чувственным образам, как это было у Протагора.

Вместе с тем, следует иметь в виду, что математический атомизм появился не как особый взгляд на природу математики в целом, а скорее как частная эвристическая идея в одной из ее ветвей – геометрии. Эта идея предвосхитила, как известно, разработанный позднее метод неделимых и принцип Кавальери. С другой стороны, очень важно отметить, что атомисты были убеждены в том, что объективную реальность вполне возможно выразить с помощью языка математики, потому что происходящее в мире подчиняется ее законам.

В дальнейшем близость философии и математики обнаруживается у Платона и Аристотеля.

У Платона математика и философия, так же как и у пифагорейцев, связываются между собой, прежде всего, посредством числа. В диалоге «Государство» Платон утверждает, что сущность вещи, скрывающаяся за ее кажимостью, есть математическое. К истине у Платона ведут именно арифметика и счет, то есть наука о числе. «Эта наука, – отмечает Платон, – подходит для того, чтобы установить закон и убедить всех, кто собирается занять высокие должности в государстве, обратиться к искусству счета» и придти «с помощью самого мышления к созерцанию природы чисел» для облегчения «самой душе ее обращение от становления к истинному бытию»[1].

Платон пошел дальше пифагорейцев в исследованиях реального физического мира, построенного, с его точки зрения, на основе математических идей. Этот идеальный мир и был для него истинной реальностью, к познанию которой он стремился с помощью математики. Математика для Платона была не только посредником между чувственным миром и миром идей, она была точным аналогом, идеальной копией реальности, изучение которой вполне заменяет наблюдения внешнего мира. Наблюдение становится излишним в силу того, что математические истины душа человека, по Платону, получает, «припоминая» то, что она приобрела, когда пребывала в том самом мире идей, который представляется ему совершенным, истинным миром – подлинной реальностью.

Необходимо, видимо, отметить и еще один факт, характеризующий философию Платона и его понимание роли в ней математики. Платоновское «переселение» идей в некий «занебесный», недоступный чувственному опыту, а значит и искажению, мир неизменного, вечного, совершенного (для математики – это обособление абстрактных сущностей, «очищенных» от влияния опыта понятий), а затем обратное проецирование их на внешний мир, представляет собой весьма привлекательное занятие и для современных математиков (и философов)[2].

---

[1] Платон. Собр. соч.в 4-х т. – Т. 3. – М., 1994. – С. 308.

[2] См.: Н. В. Мотрошилова. Там же. – С. 230–232.

Мысль о том, что с помощью математики вполне возможно изучение физической реальности, получая о нем истинное знание, проводит в своей философии и Аристотель. Он солидарен с Платоном в том, что в основе мироздания лежит некая математическая идея, некий математический план построения внешнего мира. Однако в противовес Платону он считает, что «математические предметы вопреки утверждениям некоторых нельзя отделять от чувственно воспринимаемых вещей и … они не начала этих вещей»[1].

Еще одной проблемой, сближающей философию и математику, которой занимался Аристотель, была проблема бесконечного. С точки зрения Аристотеля бесконечность – это «то, вне чего всегда есть что-нибудь». Она не представляет собой какую-то определенную сущность, у нее нет начала, но нет и конца. Бесконечное – это не ставшее, но *становящееся*. Иначе говоря, бесконечность для Аристотеля может рассматриваться лишь как потенциальная бесконечность; актуальной бесконечности, как бесконечности ставшей, завершенной, с его точки зрения, не существует, ибо все, что имеет предел, завершение не может считаться бесконечным.

В процессе дальнейшего социального развития взаимодействие между философией и математикой не ослабевает. В Средние века это взаимодействие наиболее ярко проявляется в споре номиналистов, реалистов и концептуалистов об универсалиях, суть которого в различном понимании онтологического статуса общих понятий, использование которых характерно как для математики, так и для философии. Представители каждой из этих групп поразному решали вопрос о реальном существовании такого рода понятий. Реалисты полагали вполне возможным существование универсалий в реальной действительности независимо от сознания. Номиналисты отстаивали объективную реальность лишь единичной вещи, полагая, что универсалия существует не в действительности, а лишь в мышлении человека, представляя собой обобщение в понятии сходных в каких-либо признаках предметов. Концептуалисты, соглашаясь с номиналистами в том, что универсалии не могут иметь самостоятельного реального бытия, в отличие от них, считали основой существования общих понятий сходные признаки единичных предметов. Объединение этих сходных признаков в мышлении и представляло концепт, выражаемый словом.

Спор об универсалиях продолжается до сих пор. Сегодня он, во многом, обусловлен проблемами языка, где на первый план нередко выдвигаются аспекты, связанные с социальной «нагруженностью» языковых выражений[2].

В математике этот спор связан, прежде всего, с проблемами существования ее объектов, то или иное решение которых предполагает различное понимание и предмета математики. О чем уже было сказано выше.

Взаимодействие математики и философии в Средние века не ограничивается лишь проблемой универсалий. В связи с рассуждениями о природе Бога оно находит свое выражение в исследованиях сущности движения, проблем континуума и бесконечности. Хорошо известны противоположные точки зрения Оригена и Августина по вопросу существования актуальной бесконечности.

Первый, опираясь на труды Аристотеля, не признавал существования актуальной бесконечности. Второй в своем «Граде Божьем» выступал против

---

[1] Аристотель. Соч. – Т. 1. – М., 1976. – С. 367.

[2] См. об этом, например: И. С. Нарский. Проблема универсалий и дискуссия на XVI Всемирном философском конгрессе / Философия и мировоззренческие проблемы современной науки. – М., 1981. – С. 269–298.

тех, кто говорит, «будто бесконечные предметы превышают знание Божье» и считал вполне возможным принять «ставшую» бесконечность как последовательность натурального ряда чисел. Впоследствии на стороне Оригена выступил и Фома Аквинский, который полагал справедливым отрицание Аристотелем актуальной бесконечности и считал, что из неделимых невозможно составить никакого континуума.

XVI и особенно XVII в. знаменуются появлением и развитием в математике и философии таких идей, влияние которых научная и философская мысль будет ощущать вплоть до сегодняшнего времени. Прежде всего, это относится к идеям Декарта, философия которого тесно переплетена с математикой и естествознанием.

Важнейшим выводом Декарта, который стал фундаментальным принципом всей последующей философии, является положение о том, что познание есть не что иное, как *конструирование* с помощью математического метода из простейших элементов, выделяемых разумом, своеобразного сложнейшего механизма – «машины мира». Этот принцип по сути дела «воплощает кардинальный сдвиг, происшедший в философии нового времени в понимании материальных тел, движения, времени, пространства, в осмыслении природы в целом, в построении философской и вместе с тем естественнонаучной картины мира и, следовательно, в философском обосновании естествознания и математики»[1].

Тесное взаимодействие аналитизма философского метода Декарта и аналитизма математики послужило базой для создания им аналитической геометрии, алгебраизации геометрии и введения буквенной символики, иными словами, оно стало началом реализации единой по методу *mathesis universalis* в самой математике[2]. В силу этого, становится понятным, почему философию Декарта иногда называют «математической философией»[3].

Вслед за Декартом новые математические идеи в философию приносит И. Ньютон. Его «Математические принципы натуральной философии» на долгие годы становятся не только образцом научной теории, но, прежде всего, фундаментальной основой механистической картины мира и механистического мировоззрения.

В своей натурфилософии Ньютон исходил из идеи объективного существования механического движения, в котором он усматривал тесную связь с геометрией. «Геометрия, – писал он, – основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения»[4]. Такое понимание математики нашло свое выражение во многих работах Ньютона. В частности, – в созданной им теории флюксий, которая стала предшественницей математического анализа.

Не менее сильное влияние на развитие философии и математики оказал Г. Лейбниц. Так же как и Декарт, Лейбниц поставил своей задачей разработать универсальный метод, с помощью которого можно было бы овладеть наукой, техникой изобретения и проникнуть в сущность единства мироздания. Его идея «общей науки» во многом опиралась на такие принципы математики, как непротиворечивость, доказательность и совершенство.

---

[1] История философии: Запад – Россия – Восток. Книга вторая: Философия XV–XIX вв. – М., 1996. – С. 124.

[2] См., например: В. Н. Катасонов. Метафизическая математика XVII в. – М., 1993. – С. 8–25.

[3] См., например: М. Клайн. Математика. Поиск истины. – М.,1988. – С. 109.

[4] Цит. по кн.: Собр. трудов акад. А. Н. Крылова. – М.–Л., 1936. – Т. VII. – С. 1–2.

Поиски Лейбницем «универсальной характеристики» и «универсального языка», в котором бы нивелировались семантические и синтаксические недостатки естественного языка и который стал бы «своего рода алгеброй человеческого мышления, позволяющей получать из уже известных истин новые истины путем точных вычислений»[1], привели к созданию символической (математической) логики.

Идеи Лейбница об «универсальном исчислении» нашли свое продолжение в работах Дж. Буля, О. Де Моргана, Э. Шредера, Ч. Пирса, Г. Фреге и других математиков и логиков. Они во многом перекликаются с философской программой логических позитивистов (Р. Карнап, Б. Рассел и другие), ставивших перед собой задачу анализа языковых выражений философии, науки и обыденного общения.

XVIII в. ознаменовался созданием системы «критической» философии И. Канта, направленной на то, чтобы снять с метафизики «догматическое одеяние и подвергнуть необоснованные воззрения скептическому рассмотрению»[2]. Философские идеи Канта в области гносеологии во многом опирались на его понимание математики и, в свою очередь, оказывали влияние на ее развитие.

Математика определялась Кантом как система синтетических суждений, которая выражает структуру априорных форм чувственности. Эта система выводов и доказательств должна быть интуитивно ясной, ибо все математические рассуждения непременно следуют за чистым созерцанием на основании всегда очевидного синтеза. Рационалистический взгляд Канта на математику сыграл значительную роль в дискуссиях о природе «воображаемой» геометрии Лобачевского и других неевклидовых геометрий, да и всей математики в целом.

XIX в. завершился для математиков знаменательным событием – в 1897 г. в Цюрихе состоялся первый международный математический конгресс, выступления и доклады на котором характеризовали уровень и перспективы развития математики. С точки зрения взаимосвязи математики и философии нам кажется интересным фрагмент выступления французского математика Пикара (правда, на заключительном банкете) который сказал следующее: «И мы имеем своих математиков-философов, и под конец века, как и в прежние эпохи, мы видим, что математика вовсю флиртует с философией. … Это – на благо дела, но при условии, что философия была весьма терпимой и не подавляла изобретательного духа»[3].

В XX в. взаимодействие математики и философии не прекращается, а, наоборот, усиливается. Подтверждением этого стал первый философский конгресс, состоявшийся в 1900 г. в Париже, на котором значительное внимание было уделено методологическим проблемам математической науки.

Анализ современного этапа развития познания убедительно показывает, что философия активно использует математический аппарат для выявления и исследования закономерностей в тех или иных областях действительности, для анализа языковых явлений, построения моделей диалектики и других философских систем и т. п. Кроме того, философы в определенных случаях вполне осознанно используют какие-либо достижения математического познания для философского анализа, а возникающие внутри математики труд-

---

[1] Логический словарь ДЕФОРТ. – М., 1994. – С. 99–100.

[2] И. Кант. Сочинения в 6-ти т. – Т. 2. – М.,1963. - С. 364.

[3] Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – С. 273.

ности и проблемы – для осмысления общих проблем научного познания. Математика, в свою очередь, обращается к философии, когда для решения каких-либо внутренних проблем ей не достает своих собственных средств, когда возникает необходимость выйти за пределы математической науки (например, проблемы генезиса и обоснования математики, существования математических объектов, границ применения математического знания и возможностей методов и т. д.). А нередко, решая сугубо математические задачи, математики неосознанно опираются на те или иные философские, мировоззренческие установки и принципы, неявно используют методы, разработанные философией.

Конечно, совершенно ясно, что подходы к решению той или иной проблемы в философии и математике отличаются друг от друга. Тем не менее, взаимовлияние математики и философии и сегодня в отдельных случаях весьма сильно и продуктивно, если не для обеих, то, по крайней мере, для какой-то одной из них.

§3. Гуманитарный потенциал математики

Одной из особенностей современного этапа развития науки является ее гуманитаризация, которая стала ответом на возникшую в XX в. потребность в «очеловечивании» этой сферы духовного производства. В математике по вполне понятным причинам эта потребность вначале рассматривается как своеобразное покушение на «святая святых» математики – объективность и определенность, как «еретическое» отклонение от принятых в ней канонов. Известно, что «А. Гротендик, обнаружив, что страсть к математике уводит от реальности, отдаляя от загадок человеческой души, выходит из группы Бурбаки, Р. Пенроуз, установив *невычислимость сознания*, говорит о необходимости новой физики», а Р. Хирш настаивает на включении математики в гуманитарную культуру»[1].

Сегодня потребность «очеловечивания» математики не вызывает яростного отторжения. В самой математике уже достаточно давно вместе с идеалами определенности и полноты сосуществует идеал целостности, являющийся в определенной мере оппонентом двух первых. В математике возникли такие теории, как нестандартный анализ, теория нечетких множеств, различные варианты многозначных и паранепротиворечивых логик. Математики все чаще обсуждают проблему ее приобщения к *мягким наукам*, в котором «за Геркулесовыми столбами жестких канонов» им видится «заманчивая перспектива»[2]. На повестку дня ставится вопрос «Возможна ли гуманитаризация математики?»[3] И это уже никого из математиков не пугает.

Одним из вариантов «приобщения математики к мягким наукам», к которым чаще всего относят гуманитарные науки, по мнению некоторых исследователей, является разработка идей асимптотической математики. В ней есть все, что необходимо; «мягкость, гибкость, открытость. И контролируемая оценка точности»[4].

---

[1] Р. Г. Баранцев. Философский аспект асимптотической математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 13.

[2] Р. Г. Баранцев. Философский аспект асимптотической математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 14.

[3] См.: М. И. Панов. Возможна ли гуманитаризация математики // Диалектика фундаментального и прикладного. – М., 1989. – С. 74–84; А. С. Строгалов, С. Г. Шеховцов. Математика как гуманитарная наука. – МГУ, 2002.

[4] Р. Г. Баранцев. Там же.

Классическая математика при этом не отбрасывается вовсе, она остается эталоном строгости, точности, непротиворечивости, определенности и полноты. Вместе с тем, сегодня совершенно очевидно, что предельные математические абстракции классической математики, требующие однозначности, уводят человека из мира реального в искусственные миры, все более и более отдаляя его от природы, общества и самого человека.

Для того чтобы математика была ближе к реальной жизни, которая характеризуется с позиции синергетики динамичностью, нелинейностью, недетерминированностью, чтобы она вписывалась в общий процесс гуманитаризации науки, по мнению некоторых исследователей, необходим переход к новой парадигме, фундаментом которой и могла бы стать асимптотическая математика[1].

Есть еще один, не менее, а, может быть, даже более важный аспект гуманитаризации математики. Он связан с влиянием на нее гуманитарного знания, в котором используются математические методы. Так, например, взаимодействие лингвистики и математики привело в результате к возникновению математической лингвистики. Но если математическая лингвистика занимается частотным анализом знаковых систем (статистическая лингвистика), построением моделей текстов обыденного языка (структурная лингвистика) и другими проблемами формализации лингвистики, оставаясь *гуманитарной* наукой, то «теория бесконтекстных (контекстно-свободных) языков»[2], которая пытается строить различные грамматики формальных языков, является *чисто математической* дисциплиной. Однако эта математическая дисциплина разрабатывает сугубо лингвистические проблемы. Это и есть следствие взаимодействия лингвистики и математики, следствие гуманитаризации математики. Данный пример, является лишь одним из многочисленного ряда такого рода ситуаций, в которых находит свое выражения своеобразная «диффузия», взаимопроникновение гуманитарного и математического знания.

Рассматривая математику в социокультурном контексте, под углом зрения так называемой антропологической парадигмы, нельзя не отметить, что она, как и любая другая система знаний, а шире – любая область духовного производства вообще, представляет собой *продукт деятельности* человека. Именно поэтому современная философия науки обращает особое внимание на субъекта, производящего и воспроизводящего этот продукт – на математика и сообщество математиков[3].

Любой математик работает в рамках вполне определенной культуры. Он сам постоянно находится в рамках той или иной культуры. Погруженный в нее, впитавший в себя ее дух, он, так или иначе, осознанно или неосознанно, продуцирует этот дух в своем творчестве. Вместе с тем, и сам математик, как и любой другой ученый, оказывает значительное влияние на формирование стиля мышления эпохи, на культуру в целом. Мы уже отмечали тот факт, что многие выдающиеся мыслители прошлого были не только математиками, но и философами, а некоторые из них кроме математики внесли заметный вклад в

---

[1] См.: И. В. Андрианов, Р. Г. Баранцев, Л. И. Маневич. Асимптотическая математика и синергетика. – М., 2004.

[2] См.,например: С. Гинзбург. Математическая теория контекстно-свободных языков. – М., 1970.

[3] См. об этом, например: В. А. Шапошников. Три парадигмы в философии математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 91–93.

естествознание, гуманитарные науки и искусство. Эта ситуация характерна и для сегодняшнего времени[1].

Математик, создатель «воображаемой логики» Н. А. Васильев был известным поэтом. Выдающийся мыслитель XX в. П. А. Флоренский был не только религиозным философом и математиком, но и специалистом в области электротехники и истории искусства. Л. Брауэр – математик и логик – серьезно занимался проблемами музыки, литературы и истории искусства. Н. Винер – математик, творец кибернетики – известен не только как автор двух автобиографических книг, но и романа «Искуситель». Один из создателей «*Principia mathematica*» А. Н. Уайтхед всерьез рассуждает о математике и Добре[2]. Разработчик конструктивной математики А. А. Марков хорошо известен и как писатель, математик И. Р. Шафаревич – как исследователь музыкального творчества Д. Шостаковича. А признанные лидеры Московской математической школы Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин являют нам пример того союза философии и математики, который, по мнению А. Ф. Лосева, «так част в интуитивных глубинах у настоящих философов и математиков и который так редок у тех, кому суждено повторять и распространять философские и математические идеи, но не создавать их впервые»[3].

Список, несомненно, может быть продолжен, но и без этого достаточно ясно, что гуманитарная составляющая в деятельности математика имеет весьма существенное значение и для самой математики, и для культуры в целом.

В истории человечества есть масса примеров и противоположного характера, когда гуманитарии, в определенном смысле, становились математиками. Осознание необходимости применения математического аппарата в своей отрасли или даже специальных исследований в области математики было вызвано различными побудительными причинами, не будем останавливаться на их характере.

Более важным является сам факт осознания необходимости обращения к математике в нематематической деятельности и успешное проникновение в глубины математического творчества.

Выше было показано (гл. V, §1) как «сливаются» художник и математик в работах М. Эсхера, А. Т. Фоменко и Ле Корбюзье, литератор и математик – в творчестве русских писателей-символистов, языковед и математик – в исследованиях по структурной лингвистике.

К приведенным примерам можно добавить и другие.

К таковым относятся:

– одна из работ российского этнографа В. Г. Богораза (Тана), в которой он исследует мифы, сказки и легенды архаических племен[4]. В ней он высказывает мнение о том, что в представлениях этих племен о пространстве и

---

[1] См. об этом подробнее: М. И. Панов. Гуманитаризация математики – тенденция развития науки XX в.: (Можно ли считать математику сплавом культуры, философии, религии?) // Общественные науки в СССР. Реферативный журнал. Серия 3. Философия. – № 6, 1991. – С. 21–30. Он же. Возможна ли гуманитаризация математики // Диалектика фундаментального и прикладного. – М., 1989. – С. 74–84.

[2] А. Н. Уайтхед Математика и добро // А. Н. Уайтхед. Избранные работы по философии. – М., 1990.

[3] А. Ф. Лосев. Диалектические основы математики / А. Ф. Лосев. Хаос и структура. – М., 1997. – С. 426.

[4] В. Г. Богораз. Эйнштейн и религия. Пг. 1923.

структуре мира в целом «приложима, скорее неевклидова, чем евклидова геометрия»[1];

– работы современного теоретика музыки Ф. Куба, который, опираясь на идею счета, предложил «математизированное определение ритма и размера: «Ритм есть математическая квинтэссенция услышанной мелодии во временном разрезе. Размер – это членение времени в мышлении …»[2];

– классическая теория гармонии, где «показывается образование звукорядов различных типов, только исходя из определенных математических закономерностей, примером чему может быть образование музыкальных строев Пифагором, Дидимом, И. С. Бахом»[3];

– творчество родоначальников «математической» музыки (А. Шенберг, А. Берг, А. Веберн и другие), которые при создании своих произведений опирались на вполне «определенные принципы построения двенадцатитоновой серии звуков по законам комбинаторики»[4].

Конечно же, здесь невозможно оставить без внимания философско-математические и логические исследования А. Ф. Лосева, который более всего известен как автор восьмитомной «Истории античной эстетики». В своих работах «Диалектические основы математики», «Математика и диалектика», «О методе бесконечно-малых в логике» и «Некоторые элементарные размышления к вопросу о логических основах исчисления бесконечно-малых»[5], опубликованных, к сожалению, лишь после смерти автора, А. Ф. Лосев являет нам великолепнейшие образцы философского проникновения в математический материал.

Очевидно, что в истории культуры ряд такого рода примеров не является ограниченным. Очевидно также, что все эти примеры не являются случайностью. Все они свидетельствуют о том, что математика, будучи феноменом культуры, необходимым образом связана с другими ее составляющими: естественными и социогуманитарными науками, философией, религией и мифологией, литературой и изобразительным искусством, музыкой и архитектурой… Что она не отделена от них непреодолимой пропастью. Что она взаимодействует с этими составляющими культуры, привнося в каждую из них математическое, и приобретая от каждой из них что-то свое.

Сегодня роль человека, личности, а не абстрактного познающего субъекта, во всех областях деятельности неизмеримо возрастает. На первый план выходят этические, нравственные проблемы, проблемы соотношения свободы творчества и ответственности ученого за все, что он делает. В связи с этим существенно обостряется и проблема гуманитаризации науки, в том числе и математики.

Вместе с тем, в последние годы усиливается и роль самой математики как средства гуманизации и социализации образования. Математика как предмет изучения в средней и высшей школе все больше рассматривается не столько как естественнонаучная, сколько как гуманитарная (общекультурная)

---

[1] О. М. Седых. «Близко ли, далеко ли …»: о геометрическом смысле маршрутов сказки и литературных хождений // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Из-во Савин С. А., 2007. – С. 220.

[2] К. С. Шаров. Музыка, математика, логика: от противостояния к единству? // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Из-во Савин С. А., 2007. – С. 231.

[3] К. С. Шаров. Там же.

[4] Там же.

[5] См.: А. Ф. Лосев. Хаос и структура. – М., 1997.

дисциплина[1]. Во многом это объясняется тем, что реальный результат математического образования при определенной его направленности проявляется в повышении продуктивности мышления и качества аргументации, развитии умственных способностей и предметной речи.

И для того, чтобы математическая наука не превратилась для математика в спорт или квазирелигию[2], а стала для него гуманитарной, «очеловеченной» дисциплиной, в подготовке математиков, особенно – математиков-педагогов, по мнению многих ученых и философов, необходимо внедрение обязательной гуманитарной составляющей, в которой нашлось бы место и для изучения персонифицированной истории математики. Такой истории, в которой субъект математического познания – математик – представал бы как личность, обладающая не только разумом, но и страстями. Как человек, принадлежащий, а значит и подчиненный, вполне определенной культуре, связанный ее путами, и стремящийся разорвать их, прорваться к новому, проникнуть в иную для него культуру понять ее и овладеть ею.

Заключение

На современном этапе общественного развития, когда, по мнению многих ученых и философов, человечество одной ногой уже стоит в «обществе знания», в котором не информация, а именно знание становится важнейшей ценностью, с очевидностью проявляется и роль таких его отраслей как наука и философия. Важнейшее место в системе теоретического знания, в его практических приложениях занимает математика. Именно математика, благодаря «универсальности» своих абстрактных объектов и «точных» количественных методов, вооружает науку и практику весьма эффективным инструментом, позволяющим решать весьма разнохарактерные проблемы, возникающие в процессе продвижения общества вперед. Математизация и, прежде всего, использование языка математики, математического моделирования и компьютерных технологий, позволяет сегодня говорить о «размывании» демаркационных линий между естественнонаучным, гуманитарным и социальным знанием[3]. Ибо для математики поистине не существует границ ее применения. Пифагорейская идея познания мира с помощью чисел вновь становится актуальной.

Однако математика как наука далеко не совершенна. В ее живом «организме» до сих пор существует много нерешенных проблем как собственно математического, так и философского и методологического характера. Философы и методологи науки, занимающиеся изучением математического знания, и сами математики высказывают иногда полярные точки зрения по поводу понимания предмета математики и ее отношения к объективной действительности, единства ее различных областей. Нет сегодня единой позиции в отношении доверия к математическому доказательству, в оценке надежности и «универсальности» других методов этой науки. Некоторые из этих проблем представлены в этой книге.

---

[1] А. С. Строгалов, С. Г. Шеховцов. Математика как гуманитарная наука. – М., 2002.

[2] См.: Закономерности и современные тенденции развития математики. Материалы Всесоюзного симпозиума. – Обнинск. 1987.

[3] См., например: Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. – М., 1986.

Основной задачей книги было показать, что математика – весьма сложная, открытая развивающаяся система теоретического знания, в которой в той или иной степени отражается процесс развития человеческой мысли, богатство духовной культуры. Что философия математики может быть наилучшим способом раскрывает неординарность математики и как системы научного знания, и как особого феномена культуры. Что нет и не может быть «единственно верного» взгляда на научное знание в принципе.

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии изобретения в области математики. – М., 1970.
2. *Айме, Марко.* Сверимся по кольчатым червям. Марсия Ашер. Этноматематика. – Издательство «Боллати Борингиери», 2007. [Электронный ресурс] : Русский журнал. URL: http://www.russ.ru/Kniga-nedeli/Sverimsya-po-kol-chatym-chervyam (дата обращения: 26.02.2012).
3. *Александров А. Д.* Математика и диалектика // Сибир. матем. журнал. – Новосибирск, 1970. – Т. XI. – № 2.
4. *Александров А. Д.* Основания геометрии. – М., 1987.
5. *Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И.* Асимптотическая математика и синергетика. – М., 2004.
6. Античная музыкальная эстетика. – М., 1960.
7. Антология мировой философии. В 4-х т. – Т. 1. –Ч. 2. – М., 1969.
8. Антология философии математики / отв. ред. и сост. А. Г. Барабашев и М. И. Панов. – М., 2002.
9. *Арепьев Е. И.* Аналитическая философия математики. – Курск, 2003.
10. *Аристотель.* Соч. – Т. 1. – М., 1976.
11. *Аристотель.* Физика. Кн. III. – Гл. 6. – М., 1936.
12. *Аркадьев. М. А.* Временные структуры новоевропейской музыки. – М., 1992.
13. *Арнольд И. В.* Арифметика // Математический энциклопедический словарь. – М., 1988. – С. 77–79.
14. *Арнольд В. И.* Антинаучная революция и математика// Вестник Российской Академии Наук. – Т. 69. – № 6, 1999. – С. 553–558.
15. *Арнольд В. И.* Что такое математика? – М., 2004
16. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М., 2000.
17. *Асмус В. Ф.* Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – началоXX в.) – М., 1965.
18. *Бажанов В. А.* Стандартные и нестандартные подходы в философии математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15 – 16 июня 2007. – М., 2007. – С. 9–11.
19. *Бажанов В. А.* Умеренный априоризм и эмпиризм в эвристическом контексте. Исторический контекст // Математика и опыт. – М., 2003. – С. 95–106.
20. *Барабашев А. Г.* Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования. – М., 1991.
21. *Барабашев А. Г.* Диалектика развития математического знания. – М., 1983.
22. *Барабашев А. Г.* Треугольник Фреге и существование математических объектов // Историко-математические исследования. Вторая серия. – Вып. 2(37). – М., 1997.

23. *Баранцев Р. Г.* Философский аспект асимптотической математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., 2007.
24. *Барвайс Дж.* Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. – Ч. 1. – М., 1982.
25. *Беляев Е. А., Перминов В. Я.* Философские и методологические проблемы математики. – М., 1981.
26. *Беляев Е. А., Киселева Н. А., Перминов В. Я.* Некоторые особенности развития математического знания. – М., 1975.
27. *Березкина Э. И.* Математика древнего Китая. – М., 1980.
28. *Беркли Дж.* Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику // Беркли. Сочинения. – М., 1978.
29. Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. – М., 1997.
30. *Бирюков Б. В.* Г. Вейль и методологические проблемы науки // *Вейль Г.* Симметрия. – М., 1968.
31. *Богораз В. Г.* Эйнштейн и религия. – Пг., 1923.
32. *Боно Э.* (Де) Рождение новой идеи. – М., 1976.
33. Будущее науки. – М., 1980.
34. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – М., 1972.
35. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Очерки по истории математики. – М., 1963.
36. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М., 1963.
37. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М., 1965.
38. *Бычков С. Н., Зайцев Е. А.* Математика в мировой культуре. – М., 2006.
39. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, и Греции. – М., 2006.
40. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М., 1989.
41. *Вейль Г.* О философии математики. – М.–Л., 1934.
42. *Вейль Г.* Симметрия. – М., 1968.
43. *Витгенштейн Л.* Философские работы. – Ч.I I. – Кн. I. – М., 1994.
44. *Волошинов А. В.* Архитектура – математика – музыка // Философские науки. – № 7, 1991.
45. *Выгодский М. А.* Арифметика и алгебра в древнем мире. – М., 1967.
46. *Гегель Г.* Наука логики. – Т. 1. – М., 1970.
47. *Гегель Г.* Работы разных лет. В 2-х т. – Т. 2. – М., 1971.
48. *Гейтинг А.* Интуиционизм. – М., 1965.
49. *Гейтинг А.* Тридцать лет спустя // Математическая логика и ее применения. – М., 1960.
50. *Гидион З.* Пространство, время, архитектура. – М., 1975.
51. *Гильберт Д.* Основания геометрии. – М., 1948.
52. *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. – М., 1970.
53. *Гольдблатт Р.* Топосы: категорный анализ логики. – М.,1983.
54. *Грязнов Б. С.* Логика. Рациональность. Творчество. М., 1982.
55. *Гутнер Г. Б.* Интерпретация существования в математике / Философские исследования. – № 1, 1995. – С. 212–225.
56. *Гутнер Г. Б.* Неявное знание и новизна в математике. // Эпистемология&Философия науки. – Т. XV. – № 1, 2008.
57. *Гутнер Г. Б.* Онтология математического дискурса. – М., 2001.

58. *Декарт Р.* Сочинения. В 2 т. – Т. 1. – М., 1989.
59. *Делез Ж.* Складка. Лейбниц и барокко / Общая редакция и послесл. В. А. Подороги. Пер. с франц. Б. М. Скуратова. – М., 1997.
60. *Джемс У.* Прагматизм: новое название для некоторых старых методов мышления: Популярные лекции по философии. – М., 2011.
61. *Дидро Д.* Мысли об объяснении природы / Соч. – Т. 1. – М.–Л., 1935.
62. *Дьедонне Ж.* Абстракция и математическая интуиция // Математики о математике. – М., 1982.
63. *Дьедонне Ж.* О деятельности Бурбаки / Успехи математических наук, 1973. – Т. 28. – Вып. 3.
64. *Жуков Н. И.* Философские основания математики. – Минск, 1990.
65. Закономерности и современные тенденции развития математики. Материалы Всесоюзного симпозиума. Обнинск, 1987.
66. Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты. – М., 1987.
67. *Зенкин А. А.* О некоторых семантических дефектах в логике интеллектуальных систем // Девятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ – 2004), Секция 3. Правдоподобные рассуждения и неклассические логики. – Тверь, Россия, 2004. Труды конференции. – Т. 1. – С. 271–280.
68. *Ивс Г., Ньюсом К. В.* О математической логике и философии математики. – М., 1968.
69. Интуиция и научное творчество. – М., 1981.
70. История математики. В 3-х т. – Т. 1. – М., 1970.
71. История философии: Запад – Россия – Восток. Книга вторая: Философия XV–XIX вв. – М., 1996.
72. *Казарян В. П., Лолаев Т. П.* Математика и культура. – М., 2004.
73. Канке В. А. Философия математики, физики, химии, биологии: учебное пособие. – М., 2011.
74. *Кант И.* Письмо к Моисею Мендельсону / Соч. в 6-ти т. – Т. 2. – М.,1963. – С. 362–366.
75. *Кант И.* Критика чистого разума / Соч. в 6 т. – М.,1964. – Т. 3.
76. *Кантор Г. К.* К учению о трансфинитном // Новые идеи в математике. – СПб., 1914, сб. 6 т.
77. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М., 1985.
78. *Кармин А. С.* Интуиция // Диалектика познания. – Л., 1988.
79. *Кармин А. С.* Познание бесконечного. – М., 1981.
80. *Карри Х.* Основания математической логики. – М., 1969.
81. *Кассирер Э.* Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции. – СПб.,1912.
82. *Касьян А. А.* Математический метод: проблема научного статуса. – Куйбышев, 1990.
83. *Катасонов В. Н.* Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М., 1999.
84. *Катасонов В. Н.* Метафизическая математика XVII в. – М., 1993.
85. *Катречко С. Л.* К вопросу об «априорности» математического знания: URL : http://www.philosophy.ru/library/katr/math_conf2001.html (дата обращения: 11.03. 2012)
86. *Катречко С. Л.* Теоретико-множественная (бурбакистская) парадигма математики и ее возможные альтернативы // Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28–30 мая 2009 г. – М.,

2009. – С. 21–22.
87. *Кац М., Улам С.* Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. – М., 1971.
88. *Кедровский О. И. Соловей Л. А.* Алгоритмичность практики, мышления, творчества. – Киев, 1980.
89. *Китчер Ф***.** Математический натурализм // Методологический анализ оснований математики. – М., 1988.
90. *Клайн М.* Математика. Поиск истины. – М., 1988.
91. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. – М., 1984.
92. *Клейн Ф.* Вопросы элементарной и высшей математики. – Одесса, 1912.
93. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973.
94. *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Интуиция как самодостраивание // Вопросы философии. – 1994. – № 2.
95. *Колмогоров А. К.* изучению ритмики В. В. Маяковского // Вопросы языкознания. – № 4 (1963).
96. *Колмогоров А. Н.* К основам русской классической метрики // Содружество наук и тайны творчества. – М.,1968.
97. *Колмогоров А. Н.* Математика в ее историческом развитии. – М.,1991.
98. *Колмогоров А. Н., Прохоров А. В.* О дольнике современной русской поэзии // Вопросы языкознания. – № 3, № 6 (1962).
99. *Кондратов А., Колмогоров А.* Ритмика поэм Маяковского // Вопросы языкознания. – № 3, № 6 (1962).
100. *Косилова Е. В.* Некоторые проблемы априоризма // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 147.
101. *Крипке С. А.* Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. – Томск, 2005.
102. *Крылов А. Н.* Собрание трудов. – Т. VII. – М.–Л., 1936.
103. *Кузьменко В. П.* Синхронное открытие физической сущности мнимости Велемиром Хлебниковым, Андреем Белым и Павлом Флоренским // Материалы VIII международных Хлебниковских чтений «Творчество Велимира Хлебникова в контексте мировой культуры XX века» в 2-х частях. – Астрахань, 2003, 18–20 сентября. – Ч. 1. – С. 180–188.
104. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. М.–Л., 1947.
105. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. – М.,1967.
106. *Лебедев С. А.* Философия науки. Словарь основных терминов. – М., 2004
107. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия. – М., 1984.
108. *Лекторский В. А.* Субъект, объект, познание. – М., 1980.
109. *Лекторский В. А.* Реализм, антиреализм, конструктивизм и конструктивный реализм в современной эпистемологии и науке. [Электронный ресурс] : Интеллектуальная Россия..
URL : http://www.intelros.ru/intelros/reiting/reyting_09/material_sofiy/6141-realizm-anti-realizm-konstruktivizm-i-konstruktivnyj-realizm-v-sovremennoj-yepistemologii-i-nauke.html (дата обращения: 3. 03. 2012).
110. *Лобачевский Н. И.* Конспект по преподаванию чистой математики в Казанском университете в 1825/26 учебном году // Л. Б. Модзалевский. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. – М.-Л., 1948.
111. Логический словарь ДЕФОРТ. – М., 1994.
112. *Лосев А.Ф.* Диалектические основы математики// А. Ф. Лосев. Хаос и структура. – М., 1997.

113. *Лосский Н. О.* Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. – М., 1995.
114. *Лук А. Н.* Психология творчества. – М., 1978.
115. *Мадер В. В.* Введение в методологию математики. – М., 1995.
116. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М., 1970.
117. *Марков А. А.* Конструктивная математика // Математический энциклопедический словарь. – М., 1983.
118. *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. – М., 1984.
119. *Маркс К.* Дебаты о свободе печати / К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд. – Т. 1.
120. *Маркс К.* Математические рукописи. – М., 1968.
121. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. – Т. 20.
122. Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. – М., 1986.
123. Математика // Электронная энциклопедия «Кругосвет»: URL : http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/MATEMATIKA.html (дата обращения 6.03.2012).
124. Математика и опыт. – М., 2003.
125. Математический сборник, 1967, 74, (116). – Вып. 3.
126. Математический энциклопедический словарь. М., 1988.
127. Материалистическая диалектика как методология. – Алма-Ата, 1981.
128. Методологический анализ оснований математики. – М., 1988.
129. *Микешина Л. А.* Научное знание как объект исследования// Диалектический материализм и философские проблемы естественных наук. – М., 1979.
130. *Микешина Л. А.* Философия науки: Современная эпистемология. Научное знание в динамике культуры. Методология научного исследования : учеб. пособие. – М., 2005.
131. *Микешина Л. А., Опенков М. Ю.* Новые образы познания и реальности. – М., 1997.
132. *Милль Дж. Ст.* Система логики силлогистической и индуктивной. – М., 1914.
133. *Молодший В. Н.* Очерки по философским вопросам математики. – М., 1969.
134. *Мотрошилова Н. В.* Рождение и развитие философских идей. – М., 1991.
135. *Мулуд Н.* Современный структурализм. Размышления о методе и философии точных наук. – М., 1973.
136. *Нарский И. С.* Проблема универсалий и дискуссия на XVI Всемирном философском конгрессе / Философия и мировоззренческие проблемы современной науки. – М., 1981. – С. 269–298.
137. *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук. Т.1. Догреческая математика. М.–Л., 1937.
138. Новейший философский словарь. Минск. 2003;
URL: http://www.gumer.info/bogoslov_Buks/Philos/fil_dict/530.php (дата обращения: 26.02.2012)
139. *Новиков П. С.* Аксиоматический метод // Математический энциклопедический словарь. – М., 1988.
140. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. – М., 1973.
141. Новые идеи в математике. – Пг., 1915. – Вып. 10.
142. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М., 1989.

143. *Панов М. И.* Возможна ли гуманитаризация математики// Диалектика фундаментального и прикладного. – М., 1989.
144. *Панов М. И.* Гуманитаризация математики – тенденция развития науки XX в.: (Можно ли считать математику сплавом культуры, философии, религии?) // Общественные науки в СССР. Реферативный журнал. – Серия 3. Философия. – № 6, 1991.
145. *Панов М. И.* Методологические проблемы интуиционистской математики. – М., 1984.
146. *Перминов В. Я.* Философия и основания математики. – М., 2002.
147. *Перминов В. Я.* Априорность и реальная значимость исходных представлений математики. – М., 2001.
148. *Перминов В. Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. – М., 2004.
149. *Перминов В. Я.* Природа математического познания // Философия математики и технических наук. Под общ. ред. проф. С. А. Лебедева : учебное пособие для вузов. – М., 2006.
150. *Петров Ю. П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. – СПб., 2005.
151. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. – М. 1969.
152. *Платон.* Собр. соч. в 4-х т. – Т. 3. – М., 1994.
153. *Пойя Д.* Математическое открытие. – М., 1970.
154. *Полани М.* Личностное знание. На пути к посткритической философии. – М., 1985.
155. Понятие о гармонии. Математические закономерности композиции:
URL: Библиотека Интернет Индустрии
I2R.ru:http://www.i2r.ru/static/469/out_17570.shtml (дата обращения: 6.03.2012).
156. *Пуанкаре А.* Будущее математики // А. Пуанкаре. О науке. – М., 1983.
157. *Пуанкаре А.* Наука и метод // А. Пуанкаре. О науке. – М., 1983.
158. *А. Пуанкаре.* О науке. – М., 1983.
159. *Рассел Б.* История западной философии. – М., 1959.
160. *Рид Констанс.* Гильберт. – М., 1977;
[Электронный ресурс]: URL: http://ega-math.narod.ru/Reid/p4.htm ((дата обращения: 26.02.2012).
161. *Рузавин Г. И.* Математизация научного знания. – М., 1984.
162. *Рузавин Г. И.* Философские проблемы оснований математики. – М.,1983.
163. *Рузавин Г. И.* Гильбертовская программа и формалистическая философия математики // Методологический анализ оснований математики. – М., 1988. – С. 108–168.
164. *Рыбников К. А.* История математики. В 2-х т. – М., 1960–1963.
165. *Садовский В. Н.* Аксиоматический метод построения научного знания/Философские вопросы современной формальной логики. – М., 1962.
166. *Светлов В. А.* Философия математики. – М., 2006.
167. *Седых О. М.* «Близко ли, далеко ли…»: о геометрическом смысле маршрутов сказки и литературных хождений // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – С. 220.
168. Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук / под ред. В. В. Миронова. – М., 2006.
169. *Сокулер З. А.* Проблемы обоснования знания. – М., 1988.

170. *Сокулер З. А.* Является ли теорема Пифагора социальным конструктом? // Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Второй международной научной конференции; 28–30 мая 2009 г. – М., 2009. – С. 49–52.
171. Стили в математике. Социокультурная философия математики. – СПб., 1999.
172. *Степин В. С.* Структура и динамика научного познания // В. С. Степин, В. Г. Горохов, М. А. Розов. Философия науки и техники. – М., 1996.
173. *Строгалов А. С., Шеховцов С. Г.* Математика как гуманитарная наука. – М., 2002.
174. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. – М., 1978.
175. *Тихомиров В.* Математика во второй половине XX века // Квант. – № 2, 2001.
176. *Томашевский Б. В.* Пятистопный ямб Пушкина // Очерки по поэтике Пушкина. – Берлин, 1923.
177. *Уайтхед А. Н.* Математика и добро // А. Н. Уайтхед. Избранные работы по философии. – М., 1990.
178. Философия и логика. – М., 1974.
179. Философия и методология науки / под ред. В. И. Купцова. – М., 1994.
180. Философия математики и технических наук / под ред. С. А. Лебедева. – М., 2006.
181. Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007 г. – М., 2007.
182. Философия математики: актуальные проблемы. Тезисы Второй международной научной конференции 28–30 мая 2009 г. – М., 2009.
183. Философия науки. Методология и история конкретных наук. – М., 2007.
184. Философский энциклопедический словарь. – М., 1989.
185. *Фоменко А. Т.* Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. – М., 1998.
186. *Фоменко А. Т.* Математика и миф сквозь призму геометрии. – М., 2001.
187. Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I. – М., 1989.
188. *Франк Ф.* Философия науки. – М., 1960.
189. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М., 1966.
190. *Хао Ван.* Процесс и существование в математике // Математическая логика и ее применения. – М., 1965.
191. *Хлебников, Велимир.* Творения. М., 1986.
192. *Холшевников В. Е.* Стиховедение и математика // Содружество наук и тайны творчества. – М., 1968.
193. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий. – М., 1974.
194. *Целищев В. В.* Философия математики. – Ч. 1. / отв. ред. А. В. Бессонов. – Новосибирск, 2002.
195. *Целищев В. В.* Перспективы исследований в философии математики. URL: http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/5_99/05_tselichev.htm (дата обращения: 26.02.2012).
196. *Целищев В. В.* Поиски новой философии. 2001. URL:http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000700/(дата обращения 6.03.2012).
197. *Чанышев А. Н.* Курс лекций по древней философии. – М., 1981.
198. *Черняк В. С.* Структуралистские концепции истории науки // Принципы историографии естествознания. – М., 1993. – С. 296–314.

199. *Черняк В. С.* Формализм Гильберта и кантова концепция математики // Методологические проблемы современной науки. – М., 1970.
200. *Черняков А. Г.* Математика как формальная онтология // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15–16 июня 2007. – М., Из-во Савин С. А., 2007. – С. 88.
201. Число. Сб. статей. – М., 2009.
202. *Чухно А. В.* Математика и ритмы действительности // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции. 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 228.
203. *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений / Труды Матем. Ин-та АН СССР. – М., 1952. – Т. 52.
204. *Шапошников В. А.* Три парадигмы в философии математики// Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции. 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 91–93.
205. *Шаров К. С.* Музыка, математика, логика: от противостояния к единству? // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции. 15–16 июня 2007. – М., 2007. – С. 231.
206. *Шафаревич И. О.* О некоторых тенденциях развития математики: Лекция по случаю официального вручения Хеймановской премии Геттингенской академии наук // Москва. – М., 1990. – № 12.
207. *Шляхин Г. Г.* Соотношение понятия и индивида в математическом знании//Методологический анализ математических теорий. – М., 1987.
208. *Эйхенбаум Б. М.* Теория «формального метода»: URL : www.opojaz.ru/method/method00.html (дата обращения 6.03.2012).
209. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг // К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. 2-е изд. – Т. 20.
210. *Янов Ю. И.* Математика, метаматематика и истина. Репринтное издание ИПМ им. М. В. Келдыша РАН М., 2006.
211. *Яновская С. А.* Идеализм и математика // Сборник статей по философии математики. – М., 1936.
212. *Яшин Б. Л.* Логико-гносеологические аспекты проблемы противоречия процесса познания. – М., 1992.
213. *Яшин Б. Л.* Математическое знание и его история в контексте философских проблем // Философия науки. Методология и история конкретных наук : учебное пособие. – М., 2006.
214. *Яшин Б. Л.* Эпистемологический конструктивизм и математика // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук : сб. науч. тр. / гл. ред. Е. И. Арепьев. – Курск, 2011. – Вып. 4. – С. 84–91.
215. *Frege G.* Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 2. Jena, 1902.
216. *Godel K.* What is Cantor's Continuum Problem // Beneceraff and Putman (eds.) Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. – P. 470–485.
217. *Hersh R.* The fresh wind in the philosophy of mathematics // Amer. Math. Monthly. – 1995. – Aug.-Sept. – P. 590–591.
218. *Hilbert D.* Naturerkennen und Logik // Naturwissenschaften. H. 47–49, 1930.
219. *Husserl E. G.* Husserliana, Bd. XII. Haag, 1970.
220. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1932.
221. *Cassirer E.* Substanzbegriff und Funkcionbegriff. Berlin, 1902.
222. *Maddy P.* Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990.

223. *Mostowski A.* Thirty years of foundational studies // Acta Filosophica Fennica, 1963.
224. *Neurath O.* Le developpement du Cerhle de vienne et l´avenir de l´empirisme Logique. Paris, 1935.
225. *Pierce Ch.* Dictionary of Philosophy and Psychology. Ed. J. Baldwin. – Vol. 1, 1901.
226. *Putnam H.* Philosophy of mathematics – why nothing works? // *Putnam H.* Words and life. – Harvard UP. – P. 499–512;
227. *Resnik M.* 1997. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press.1997.
228. *Russel B., Whitehtad A.N.* Principia mathematica, Cambridge, England, 1910–1913; 2nd td., 1925–1927.
229. *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology: Oxford: Oxford University Press, 1997.

Б. Л. Яшин

МАТЕМАТИКА
В КОНТЕКСТЕ ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМ

Учебное пособие

Издательство «Прометей»
115035, Москва, ул. Садовническая, д.72, стр.1,
Тел./факс: 8 (495) 799-54-29
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 23.07.2012 г.
Формат 60х90/16. Объем 6,875 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 233.

ISBN 978-5-4263-0111-5
9 785426 301115