Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»

А. С. ШАПКИН, В. А. ШАПКИН

ЗАДАЧИ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие

7-е издание

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области математических
методов в экономике в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 061800
«Математические методы в экономике»
и другим экономическим специальностям

Москва, 2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.11
Ш23

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра высшей математики Московского государственного открытого университета (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор **В. Д. Кулиев**);
Б. А. Лагоша — доктор экономических наук, профессор.

Шапкин А. С.

Ш23 Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: Учебное пособие / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. — 7-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2010. — 432 с.

ISBN 978-5-394-00885-6

Материал охватывает вопросы программы курса высшей математики: общий курс, теория вероятностей и математическая статистика, математическое программирование.

Пособие является руководством к решению задач по основам высшей математики и содержит задачи для контрольных работ.

Перед каждым параграфом дан необходимый справочный материал. Все задачи приводятся с подробными решениями. В конце разделов даны решения типовых задач контрольных работ. Отдельные задачи иллюстрированы соответствующими рисунками.

Для студентов инженерно-экономических специальностей вузов.

ISBN 978-5-394-00885-6

ВВЕДЕНИЕ

Преподавание математических дисциплин для инженерно-экономических специальностей вузов имеет цель: ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерно-экономических задач; привить умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести инженерно-экономическую задачу на математический язык.

Все это имеет очень важное значение для последующей практической работы инженера-экономиста и необходимо также для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

Учебными планами инженерно-экономических специальностей вузов предусмотрены математические дисциплины:

1. Высшая математика.
2. Теория вероятностей и математическая статистика.
3. Математическое программирование.

Объем и содержание этих дисциплин определяются в соответствии с требованиями Государственных общеобразовательных стандартов на основе примерной программы дисциплины «Математика», утвержденной в 2000 г. Главным управлением образовательных программ и стандартов высшего и среднего профессионального образования Министерства образования Российской Федерации.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения. Оно содержит общие методические рекомендации по изучению математических дисциплин, а также программу, методические указания и контрольные задания по математике.

В учебных планах некоторых из инженерно-экономических специальностей все математические дисциплины объединены под общим названием «Математика» с последующим указанием названий конкретных дисциплин: а) общий курс, б) теория вероятностей и математическая статистика и т.п. В этом случае название дисциплины «Математика (общий курс)» следует считать равносильным названию «Высшая математика», и при изучении этой дисциплины может быть использовано настоящее пособие.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ СТУДЕНТАМИ-ЗАОЧНИКАМИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам институты организуют чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь института будет достаточно эффективной.

Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов (или отдельных частей курса высшей математики) является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1. Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые по их простоте опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, форму-

лировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

2. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

3. Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, порешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных форм, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

4. Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультаций.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

5. Контрольные работы

1. В процессе изучения математических курсов студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых — оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной).

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену и зачету.

4. Не рекомендуется присылать в институт одновременно несколько контрольных заданий, это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работы.

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю

прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

6. Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается каждым институтом для своих студентов в соответствии с распределением по семестрам материала и сообщается студентам дополнительно.

6. Лекции и практические занятия

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель — обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие факты, указать главные практические приложения, факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно разобраны отдельные вопросы курса (например, методы приближенных вычислений и др.); могут быть также рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Для студентов, имеющих возможность заниматься в группах на учебно-консультационных пунктах, лекции и практические занятия проводятся в течение всего учебного года. Эти лекции и практические занятия носят более систематический характер, однако и они призваны оказать только помощь студенту в его самостоятельной работе.

7. Зачет и экзамен

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; задачи в простейших случаях должны решаться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

Раздел I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА, ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Прямоугольные и полярные координаты на плоскости; основные задачи. Преобразования координат.

2. Уравнение линии на плоскости. Параметрические уравнения линии; уравнения в полярных координатах. Примеры.

3. Уравнения прямой, основные задачи.

4. Канонические уравнения кривых второго порядка; их основные свойства.

Определители и системы линейных уравнений

5. Определители второго и третьего порядков. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.

Векторная алгебра

6. Векторы на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на скаляр. Проекции вектора на ось. Система декартовых прямоугольных координат в пространстве. Проекции вектора на оси координат. Направляющие косинусы вектора. Длина и координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами.

7. Скалярное произведение двух векторов и его свойства; векторное произведение; смешанное произведение трех векторов.

Аналитическая геометрия в пространстве

8. Прямоугольные координаты; основные задачи.

9. Уравнение поверхности. Цилиндрические поверхности. Уравнения пространственных линий.

10. Уравнение плоскости и уравнения прямой в пространстве; основные задачи.

11. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Элементы линейной алгебры

12. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

13. Определители n-го порядка и их свойства. Решение систем по формулам Крамера.

14. Матрицы. Сложение матриц; умножение матрицы на число; произведение матриц. Единичная матрица. Обратная матрица.

15. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы.

16. Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис векторного пространства.

17. Линейное преобразование. Матрица линейного преобразования.

18. Теорема Кронеккера — Капелли и ее приложение к исследованию и решению системы линейных уравнений.

19. Квадратичные формы; положительно определенные квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Применение матриц к упрощению уравнений кривых второго порядка на плоскости.

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Функции, предел, непрерывность

20. Переменные и постоянные величины. Функции; область определения; способы задания. График функции и его построение; преобразование графиков. Основные элементарные функции.

21. Предел; основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие. Формулировка теоремы существования предела для монотонной последовательности и монотонной функции.

22. Пределы $\frac{\sin x}{x}$ и $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$. Число e; натуральные логарифмы.

23. Сравнение бесконечно малых; эквивалентные бесконечно малые.

24. Непрерывность функции в точке и на интервале; действия над непрерывными функциями. Формулировка основных свойств функций, непрерывных на замкнутом интервале. Точки разрыва функции.

Производная и дифференциал. Исследование функций

25. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной; ее геометрический и механический смысл; уравнение касательной к графику функции.

26. Основные правила нахождения производных.

27. Дифференциал функции; его геометрический смысл. Линеаризация функции. Дифференциал сложной функции.

28. Производные высших порядков.

29. Функции, заданные параметрически; их дифференцирование.

30. Теоремы Ролля и Лагранжа.

31. Правило Лопиталя.

32. Формула Тейлора.

33. Возрастание и убывание функций; необходимые и достаточные условия.

34. Экстремум функции. Необходимое условие, достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом интервале.

35. Выпуклость и вогнутость графика функции; точки перегиба.

36. Асимптоты графиков функций: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Функции нескольких переменных

37. Функции двух и трех переменных как функции точки. Геометрическое изображение функции двух переменных с помощью поверхностей и линий уровня.

38. Предел функций точки. Непрерывность в точке и в области. Частные производные от функции нескольких переменных; геометрический смысл частных производных функций двух переменных.

39. Производная по направлению и градиент функции; основные свойства градиента.

40. Полный дифференциал функции нескольких переменных; достаточные условия его существования. Понятие о частных производных высших порядков.

41. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.

42. Условный экстремум; необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

Раздел III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Неопределенный интеграл

43. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов.

44. Непосредственное интегрирование. Интегрирование заменой переменного. Интегрирование по частям. Простейшие типы интегралов. Использование таблиц неопределенных интегралов.

Определенный интеграл

45. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл от непрерывной функции как предел интегральной суммы; формулировка теоремы о его существовании. Основные свойства определенного интеграла; теорема о среднем. Среднее значение функции.

46. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона — Лейбница. Связь между определенным и неопределенным интегралами.

47. Методы вычисления определенного интеграла; интегрирование заменой переменного и интегрирование по частям.

48. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.

Приложения определенного интеграла

49. Вычисление площадей в декартовых координатах. Определение и вычисление объема тела по площадям параллельных сечений; объем тела вращения.

50. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой.

Двойные интегралы

51. Задачи геометрического и физического характера, приводящие к понятию двойного интеграла. Двойной интеграл; формулировка теоремы о его существовании.

52. Выражение двойного интеграла в декартовых и полярных координатах через повторный интеграл.

53. Применение двойных интегралов к геометрическим и физическим задачам. Вычисление интеграла Пуассона $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Раздел IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общие понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка

54. Задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши; частное и общее решения.

55. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные и линейные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка

56. Интегрирование некоторых уравнений второго порядка путем понижения порядка уравнения.

57. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Структура общего решения.

58. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения неоднородного линейного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

Раздел V. РЯДЫ

Числовые ряды

59. Числовые ряды. Сходимость и расходимость. Необходимые условия сходимости; основные свойства.

60. Достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами. Признак Даламбера. Оценка остатка ряда.

61. Признак Лейбница о сходимости знакопеременных рядов; оценка остатка ряда.

62. Абсолютная и неабсолютная сходимости рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Степенные ряды

63. Функциональный ряд; область его сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал сходимости; радиус сходимости.

64. Разложение функции в степенной ряд. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора (Маклорена) функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^m$.

65. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

В учебном пособии будут также приведены некоторые специальные разделы «Высшей математики».

Раздел VI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

66. Случайные события. События и вероятность. Алгебра событий. Классическое и статистическое определение вероятности. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.

67. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Простейший поток событий. Числовые характеристики. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин. Показательное распределение. Нормальное распределение. Закон больших чисел.

68. Математическая теория выборки. Сплошное и выборочное наблюдения. Статистические оценки. Требования, предъявляемые к статистическим оценкам. Методы построения статистических оценок. Оценка доли признака. Точечные оценки для средней и дисперсии генеральной совокупности. Интервальные оценки средней и дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности.

69. Статистическая проверка гипотез. Критерий проверки. Критическая область. Общая схема проверки гипотезы. Проверка гипотез относительно средней. Сравнение дисперсий двух совокупностей. Сравнение двух зависимых выборок. Критерий согласия.

70. Элементы теории корреляции. Основные понятия. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным и по сгруппированным данным. Коэффициент корреляции и его свойства.

Раздел VII. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

71. Математические методы в экономике. Экономические примеры. Общая задача линейного программирования (с ограничениями в форме уравнений и неравенств). Понятие плана, оптимального плана.

72. Основная задача линейного программирования (с ограничениями в форме уравнений) и ее геометрическая интерпретация. Выпуклость множества планов. Понятие опорного плана (базисного решения). Экстремальная точка в множестве планов.

73. Достаточные условия существования оптимального опорного плана (теорема существования).

Базисный план. Метод последовательного улучшения базисного плана (симплекс-метод). Некоторые варианты симплекс-метода

74. Двойственные задачи. Соотношения между значениями целевых функций двойственных задач (основное неравенство двойственности). Теоремы двойственности и критерии оптимальности планов двойственных задач.

Экономическая интерпретация двойственных задач. Критерий Канторовича оптимальности плана задачи использования ресурсов.

75. Простейшие линейные задачи экономики: основная задача текущего производственного планирования; задача о комплексном выпуске продукции; задача о распределении программы и специальный метод ее решений (метод разрешающих множителей).

76. Транспортная задача в матричной и сетевой постановке. Метод потенциалов.

77. Понятие о распределительной задаче.

78. Целочисленное линейное программирование.

79. Элементы теории матричных игр.

80. Понятие о графах и сетевом планировании.

81. Понятие о выпуклом программировании.

82. Вычислительные методы квадратичного программирования.

83. Простейшие задачи динамического программирования.

Раздел 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Линейная алгебра

Рассмотрим решение системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Постановка задачи: дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Требуется найти совокупность n значений $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ таких, которые бы отождествляли одновременно все уравнения системы. Такая совокупность значений называется решением системы.

Рассмотрим решение системы (1.1) тремя способами: матричным способом, по формулам Крамера и методом исключения неизвестных — методом Гаусса.

1.1.1. Матричный способ

Определение. Матрицей вида $m \cdot n$ называется таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), образующие матрицу, называются ее элементами.

Обознаются матрицы буквами A, B, C, … или (a_{ij}), (b_{kl}), (c_{pq}), … .

Матрицы вида $n \cdot n$ (число строк равно числу столбцов) называются квадратными n-го порядка. В частности, квадратная матрица n-го порядка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной и обозначается буквой E. Для нее $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $a_{ij} = 1$, если $i = j$.

Матрицы вида:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

называются матрицами-строками, а матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

— матрицами-столбцами.

Определение. Произведением матрицы (1.2) на число λ называется матрица $(\lambda\, a_{ij})$.

Чтобы умножить матрицу на число λ, надо умножить каждый ее элемент на это число.

Наиболее важным является следующее определение.

Определение. Произведением матрицы A (1.2) на матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}, \dots, a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}, \dots, a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1}, \dots, a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 4 & 2(-2)+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 1 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -12 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Определение. Если в матрице A переставить местами строки и столбцы: 1-й столбец заменить 1-й строкой, 2-й столбец — 2-й строкой и т.д., то полученная в результате матрица называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается $A^{\mathrm{т}}$.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение. Определителем квадратной матрицы (a_{ij}) n-го порядка, который обозначается $|a_{ij}|$, $\det A$ или Δ называется число, вычисляемое по формуле

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.3}$$

или

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}\,, \tag{1.4}$$

где M_{ij} — определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Таким образом, вычисление определителя матрицы n-го порядка сводится к вычислению определителей матриц $(n - 1)$-го порядка, которые, в свою очередь, выражаются через определители матриц $(n - 2)$-го порядка и т.д., до определителей матриц 2-го порядка, которые вычисляются по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, для матриц 3-го порядка формула (1.3) при $i = 1$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

по которой и вычисляют определители матриц 3-го порядка. Можно конечно пользоваться и другими формулами, получающимися из (1.3) при $i = 2, 3$ или (1.4), но окончательный ответ будет один и тот же.

Определение. Определитель матрицы (1.5), обозначаемый M_{ij} называется дополнительным минором элемента a_{ij} (стоящего в пересечении вычеркиваемой строки и столбца), а число $(-1)^{i+j}M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \tag{1.6}$$

Формула (1.3) называется формулой разложения определителя по i-ой строке, а формула (1.4) — разложением по j-ому столбцу. Учитывая (1.6), формулы (1.3, 1.4) для краткости записывают в виде

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

или

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Пример 1.1. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(2+4) + 1\cdot(3-2) + 1\cdot(-6-2) = 12 + 1 - 8 = 5.$$

Рассмотрим понятие обратной матрицы.

Определение. Пусть дана матрица A n-го порядка. Если ее произведение на некоторую матрицу B n-го порядка равно единичной матрице E, т.е. $A \cdot B = E$ или $B \cdot A = E$, то матрицу B называют обратной к матрице A и обозначают A^{-1}.

Можно доказать, что если $A \cdot A^{-1} = E$, то $A^{-1} \cdot A = E$, т.е. взаимно обратные матрицы перестановочны.

Теорема 1. Каждая квадратная матрица A, определитель которой $\Delta \neq 0$, имеет единственную обратную матрицу $A^{-1} = B$, элементы которой b_{ij} находятся по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}.$$

Из теоремы вытекает **правило:** чтобы найти обратную матрицу к матрице (1.2), где $m = n$, надо сделать следующие преобразования:

1. Вычислить определитель Δ матрицы A ($\Delta \neq 0$).
2. Каждый элемент матрицы A заменить его алгебраическим дополнением, т.е. составить матрицу (A_{ij}).
3. Транспонировать матрицу (A_{ij}), т.е. записать матрицу (A_{ji}).
4. Матрицу (A_{ji}) умножить на $\dfrac{1}{\Delta}$.

В результате получим матрицу A^{-1}.

Пример 1.2. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель данной матрицы (вычислен в предыдущем примере и равен 5). Т.к. $\Delta = 5 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Составляем матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Умножая на $\frac{1}{5}$, получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Проверка.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12+1-8 & -2-1+3 & -8+1+7 \\ 18-2-16 & -3+2+6 & -12-2+14 \\ 6+2-8 & -1-2+3 & -4+2+7 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к системе (1.1).

Матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, т.е. матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей системы, а матрица-столбец, составленная из величин $b_1, b_2, \dots, b_n$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

называется столбцом свободных членов.

Составим еще матрицу-столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1.1) в матричной форме примет вид

$$A \cdot X = B. \tag{1.8}$$

Если $\det A \neq 0$, то умножая (1.8) на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{1.9}$$

На этой формуле основан матричный способ решения систем линейных уравнений.

Пример 1.3. Решить матричным способом систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2. \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (1.9), надо найти матрицу, обратную к матрице A. В примере показано, что матрица A^{-1} имеет вид (1.7). Подставляя в (1.9), имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12+2-4}{5} \\ \frac{-2-2-1}{5} \\ \frac{-16-6+7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = -3$.

1.1.2. Формулы Крамера

Составим главный определитель системы (1.1), т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных в данной системе.

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и n вспомогательных определителей

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta(x_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots,$$

$$\Delta(x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Эти определители составляются путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (1.1) находится по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta(x_1)}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta(x_2)}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta(x_n)}{\Delta}.$$

Пример 1.4. Решить систему.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 13 - 1 \cdot (-23) - 2 \cdot 2 = 39 + 23 - 4 = 58 \neq 0.$$

$$\Delta(x_1)=\begin{vmatrix}6 & 1 & -2\\ -4 & -3 & 2\\ -2 & -2 & -3\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot 13-1\cdot 16-2\cdot 2=78-16-4=58.$$

$$\Delta(x_2)=\begin{vmatrix}3 & 6 & -2\\ 5 & -4 & 2\\ 4 & -2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 16-6\cdot(-23)-2\cdot 6=48+138-12=174.$$

$$\Delta(x_3)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 6\\ 5 & -3 & -4\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & -2\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}5 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-2)-1\cdot 6+6\cdot 2=-6-6+12=0.$$

$$x_1=\frac{\Delta(x_1)}{\Delta}=\frac{58}{58}=1;\ x_2=\frac{\Delta(x_2)}{\Delta}=\frac{174}{58}=3;\ \ x_3=\frac{\Delta(x_3)}{\Delta}=\frac{0}{58}=0.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$.

1.1.3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса)

Основная его идея состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, где одно из уравнений системы содержит все неизвестные, второе — на одно неизвестное меньше, и т.д., последнее уравнение — лишь одно из неизвестных. Покажем это на примере.

Пример 1.5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+13x_3=0,\\ 3x_1+14x_2+12x_3=18,\\ 5x_1+25x_2+16x_3=39.\end{cases}$$

Решение. Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное — x_1; первым ведущим элементом будет $a_{11} = 2$. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму уравнению ведущее, умноженное на — $\frac{3}{2}$, а к третьему — ведущее, умноженное на — $\frac{5}{2}$. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 = 39. \end{cases}$$

Первый шаг закончен. Второе и третье уравнения образуют первую подсистему. За второе ведущее уравнение примем второе уравнение системы, а за второе ведущее неизвестное — x_2; вторым ведущим элементом будет $\frac{7}{2}$. Исключим x_2 из третьего уравнения. Получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 = 18, \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Второй шаг закончен. Вторая подсистема состоит из одного третьего уравнения. Прямой ход метода Гаусса закончен. Обратным ходом получаем:

$$x_3 = -1,$$

$$x_2 = \frac{2}{7}\left(18 + \frac{15}{2}x_3\right) = \frac{2}{7}\left[18 + \frac{15}{2}(-1)\right] = 3,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(7x_2 + 13x_3) = -\frac{1}{2}[7 \cdot 3 + 13(-1)] = -4.$$

Итак, решение данной системы будет: $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Пример 1.6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему по методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ -\dfrac{15}{2}x_2 + 3x_3 = -19, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ 0 = -26. \end{cases}$$

Уравнение 0 = –26 не имеет смысла, следовательно, данная система несовместна.

Замечание. Несовместность данной системы можно усмотреть уже после первого шага: в полученной системе левые части второго и третьего уравнений отличаются только знаком, тогда как правые части одинаковы по знаку и различны по модулю.

Пример 1.7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 27. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем систему по методу Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \\ -\dfrac{15}{2}x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

После второго шага из трех уравнений осталось два, так как третье уравнение приняло вид 0 = 0 и удалено из системы. В данном случае ранг системы $r = 2$, а число неизвестных $n = 3$, т.е. $r < n$. Из трех уравнений исходной системы только два независимых ($m = 3$, $r < m$). В первой подсистеме два уравнения, вторая подсистема отсутствует. Прямой ход метода Гаусса закончен. Исключая теперь с помощью второго уравнения x_2 из первого уравнения, приведем систему к виду

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = \dfrac{38}{3}, \\ \dfrac{15}{2}x_2 - 3x_3 = -7, \end{cases}$$

откуда легко находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{3} + x_3, \\ x_2 = -\dfrac{14}{15} + \dfrac{2}{5}x_3. \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3 — свободное. Придавая неизвестному x_3 произвольные числовые значения, можно получить множество частных решений:

$$x_1 = \frac{19}{3}, \quad x_2 = -\frac{14}{15}, \quad x_3 = 0;$$

$$x_1 = \frac{22}{3}, \quad x_2 = -\frac{8}{15}, \quad x_3 = 1 \text{ и т.д.}$$

1.1.4. Теорема Кронекера — Капелли

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений, содержащую m уравнений и n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.10}$$

Составим матрицу системы A и расширенную матрицу $\overline{A}$, полученную присоединением к A столбца из свободных членов b_i (i = 1, 2, …, m).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Матрице A соответствует система из m векторов

$$\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., \ a_{im}) \ (i = 1, 2, ..., \ m \text{ или } i = \overline{1, m}). \qquad (1.12)$$

Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_m$ линейно зависимы, или, что тоже самое, образуют линейно зависимую систему, если один из них линейно выражается через другие.

Пример 1.8. Система $\overline{a}_1$ = (1,2), $\overline{a}_2$ = (–2,1), $\overline{a}_3$ = (0,5) линейно зависима, так как $\overline{a}_3 = 2\overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

Из системы векторов (1.12) выделим подсистему

$$\overline{a}_{i_1}, \ \overline{a}_{i_2}, ..., \ \overline{a}_{i_k}, \qquad (1.13)$$

где i_1, i_2, …, i_k — какие-то k чисел из набора $\overline{1, m}$.

Будем говорить, что подсистема (1.13) является максимальной линейно независимой подсистемой или базисом системы (1.12), если векторы (1.13) линейно независимы, а любой другой вектор системы является их линейной комбинацией.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом базисе системы.

Пример 1.9. В системе

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (0, \ -1, \ \ 2,1), \\ \overline{a}_2 &= (3, \ \ \ 1, -1,0), \\ \overline{a}_3 &= (-6, -2, \ \ 2,0), \end{aligned}$$

векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ образуют базис, так как их коэффициенты непропорциональны. Вектор $\overline{a}_3$ = 0 · $\overline{a}_1$ – $2\overline{a}_2$ является линейной комбинацией $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$. Отметим также, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_3$ образуют базис.

Так как система векторов (1.12) образована из матрицы A, то можно говорить о ранге матрицы A, который совпадает с рангом системы (1.12).

Для определения ранга системы существуют различные методы. Мы будем определять ранг матрицы A как максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля.

Пример 1.10. Определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выделяем 1-ю, 2-ю строки, а также 2-й и 3-й столбцы, получаем минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Вообще, в матрице A имеется $3 \cdot 6 = 18$ миноров 2-го порядка.

Миноры 3-го порядка (их три) равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг исходной матрицы равен двум.

Правило вычисления ранга матрицы:

при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков;

если уже найден минор k-го порядка, определитель которого отличен от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор k-го порядка, если все они равны нулю, то ранг матрицы r равен k.

Пример 1.11. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минор 2-го порядка $d_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Минор 3-го порядка, окаймляющий его

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Оба минора 4-го порядка, окаймляющие минор d_3, равны 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы A $r = 3$.

Возвращаемся к системе (1.10). Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается теоремой Кронекера— Капелли: система линейных уравнений (1.10) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен рангу матрицы A.

Пример 1.12. Решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Составляем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad d_3^1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad d_3^2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. ранг матрицы A равен 2.

Для расширенной матрицы

$$d_3^3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

а это означает, что ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен 3.

По теореме Кронекера — Капелли следует, что система несовместна.

Пример 1.13. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Составляем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минор $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, а все остальные миноры 3-го порядка его окаймляющие, как для матрицы A так и для $\overline{A}$, равны нулю. Так как ранг матрицы системы A и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ совпадают и равны двум, то система совместна. Так как мы взяли минор 2-го порядка, состоящий из коэффициентов при x_1 и x_2 в 1-м и 3-м уравнениях, то эти неизвестные оставляем в левой части, а неизвестные x_3, x_4 и x_5 считаем свободными (как бы известными) и переносим их в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ x_1 + 5x_2 = 9x_3 + 8x_4 - x_5. \end{cases}$$

Решая эту систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2, найдем общее решение системы в виде:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Подстановка этих значений в уравнения системы вместо x_1 и x_2 дает тождества.

Давая свободным переменным x_3, x_4 и x_5 произвольные числовые значения, мы получим множество решений исходной системы. Так решениями нашей системы будут, например, векторы $\bar{a}_1 = (2, 5, 3, 0, 0)$, $\bar{a}_2 = (3, 5, 2, 1, -2)$, $\bar{a}_3 = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$ и т.д.

1.2. Элементы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ (рис. 1).

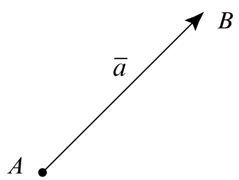


Рис. 1

Вектор обозначается указанием его начала (т. A) и его конца (т. B), записывается $\overline{AB}$ или одной буквой, например $\bar{a}$.

Векторы называются равными, если они имеют одинаковые длины (модули), лежат на параллельных прямых или на одной прямой и направлены в одну сторону.

Если известны координаты точек A (x_1, y_1, z_1) и B (x_2, y_2, z_2), то координаты вектора $\overline{AB} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ определяются по формулам

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \tag{1.14}$$

Координаты вектора являются его проекциями на координатные оси, поэтому вектор $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ может быть представлен в виде:

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \tag{1.15}$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением осей OX, OY, OZ соответственно.

Модуль вектора обозначается $|\bar{a}|$ и определяется по формуле

$$\bar{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.16}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы их разложениями по ортам (единичным векторам) (1.14), то их сумма и разность определяются по формулам

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\cdot \bar{i} + (a_y \pm b_y)\cdot \bar{j} + (a_z \pm b_z)\cdot \bar{k} =$$
$$= \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ \ a_z + b_z\}. \tag{1.17}$$

Напомним, что сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Разность $\bar{a} - \bar{b}$ этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем этот вектор направлен из конца $\bar{b}$ (вычитаемого) в конец $\bar{a}$ (уменьшаемого) (рис. 2).

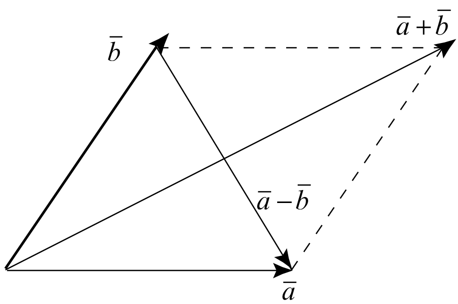


Рис. 2

Определение. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

Условием коллинеарности двух векторов $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ является пропорциональность их координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{1.18}$$

Произведением вектора $\bar{a}$ на скалярный множитель m является вектор, координаты которого определяются следующим образом:

$$m\bar{a} = ma_x \cdot \bar{i} + ma_y \cdot \bar{j} + ma_z \cdot \bar{k} = \{ma_x;\ ma_y;\ ma_z\}.$$

Векторы $\bar{a}$ и $m\bar{a}$ параллельны (коллинеарны) и направлены в одну сторону, если $m > 0$, и в противоположные стороны, если $m < 0$.

Вектор $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ называют единичным вектором вектора $\bar{a}$. Если вектор $\bar{a}$ составляет угол α с осью OX, угол β с осью OY и угол γ с осью OZ (рис. 3), то его единичный вектор $\bar{a}_0 = \{\cos\alpha;$ $\cos\beta;$ $\cos\gamma\}$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — называют направляющими косинусами вектора.

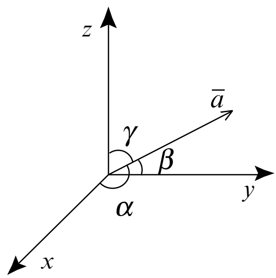


Рис. 3

Пусть вектор $\bar{a}$ составляет угол φ с осью u. Тогда проекция вектора на эту ось определяется формулой

$$пр_{\bar{u}}\,\bar{a} = \left|\,\bar{a}\,\right| \cdot \cos\varphi\,.$$

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно выразить также формулой

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot пр_{\bar{a}}\,\bar{b} \qquad \text{или} \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot пр_{\bar{b}}\,\bar{a}\,. \tag{1.19}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ — коммутативный закон;

2) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$ — дистрибутивный закон;

3) $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0=|\bar{a}|^2$, отсюда $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$;

4) если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b}=0$ и обратно;

5) если векторы заданы координатами: $\bar{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

С помощью скалярного произведения можно определить угол между векторами:

$$\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (1.20)$$

Условие перпендикулярности двух векторов (свойство 4):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0, \quad \text{или} \quad a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Определение. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$ (рис. 4), определяемый следующими условиями:

1) модуль вектора $\bar{c}$ равен произведению модулей векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, умноженному на синус угла между ними:

$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a};\bar{b}});$$

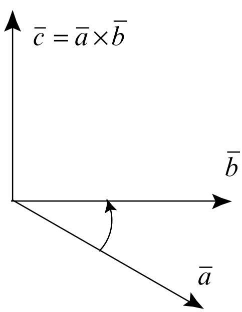


Рис. 4

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, то есть ориентированы по отношению друг к другу как орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Векторное произведение обозначают:

$$\bar{a}\times\bar{b} \quad \text{или} \quad [\bar{a}, \bar{b}].$$

Свойства векторного произведения:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

2. $[\bar{a}, (\bar{b}+\bar{c})] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

3. $[(m \cdot \bar{a}), \bar{b}] = [\bar{a}, (m \cdot \bar{b})] = m \cdot [\bar{a}, \bar{b}]$, где m — скалярный множитель.

4. Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$, в частности $[\bar{a}, \bar{a}] = 0$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \ \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \ \text{то} \quad [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Согласно определению, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю их векторного произведения:

$$S_{пар.} = |[\bar{a}, \bar{b}]|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|, \qquad (1.21)$$

где S_{Δ} — площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пример 1.14. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \{3;\ 1;\ 2\}$ и $\bar{b} = \{2;\ -1;\ 0\}$ (рис. 5).

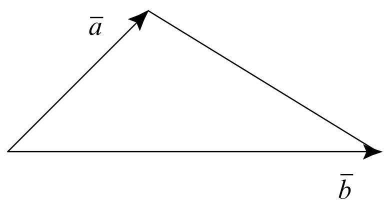


Рис. 5

Найдем $[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k} = \{2; 4; -5\}$.

$$|[\bar{a},\bar{b}]| = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ (кв. ед.)}.$$

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется произведение вида:

$$[\bar{a},\ \bar{b}]\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot[\bar{b},\bar{c}] = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 6).

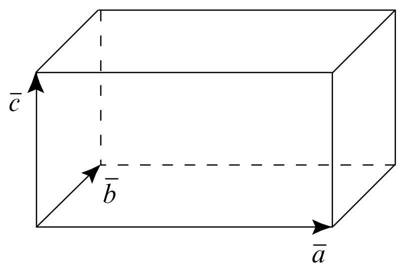


Рис. 6

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right|. \tag{1.22}$$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение не меняется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}$$

2. От перестановки любых двух векторов смешанное произведение меняет знак

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=-\overline{a}\cdot\overline{c}\cdot\overline{b}=-\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

3. Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны (то есть все три вектора лежат в одной и той же плоскости), то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0.$$

Пример 1.15. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}=\{1;2;3\}$, $\overline{b}=\{3;-1;2\}$, $\overline{c}=\{1;2;-1\}$.

Найдем смешанное произведение векторов:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot(-5)+3\cdot7=28;$$

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\ \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\ \right|=\frac{1}{6}\cdot28=\frac{14}{3}\ \text{(куб. ед.)}.$$

1.3. Аналитическая геометрия

1.3.1. Аналитическая геометрия на плоскости

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат x и y

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.24}$$

где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат.

Верно и обратное утверждение: в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени вида (1.24).

Уравнение (1.24) называется общим уравнением прямой.

Частные случаи уравнения (1.24) приведены в следующей таблице.

	Значения коэффициентов	Уравнение прямой	Положение прямой
1	$C = 0$	$Ax + By = 0$	Прямая проходит через начало координат.
2	$A = 0$	$y = b$, где $b = -\dfrac{C}{B}$	Прямая параллельна оси Ox.
3	$B = 0$	$x = a$, где $a = -\dfrac{C}{A}$	Прямая параллельна оси Oy.
4	$A = C = 0$	$y = 0$	Прямая совпадает с осью Ox.
5	$B = C = 0$	$x = 0$	Прямая совпадает с осью Oy.

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть в положительном направлении ось абсцисс до ее совпадения с данной прямой. Направление любой прямой характеризуется ее угловым коэффициентом k, который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси Ox, т.е.

$$k = \operatorname{tg} \varphi .$$

Исключение составляет только лишь прямая, перпендикулярная оси Ox, которая не имеет углового коэффициента.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна b (начальная ордината), записывается в виде:

$$y = kx + b. \tag{1.25}$$

Угловой коэффициент k прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, находится как коэффициент при x в выражении y через x:

$$k = -\frac{A}{B}.$$

Угловой коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$, вычисляется по формуле

$$k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}. \tag{1.26}$$

Уравнением прямой в отрезках называется уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{1.27}$$

где a и b — соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy, т.е. длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях, взятые с определенными знаками.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_A;\, y_A)$ и имеющей угловой коэффициент k, записывается в виде:

$$y — y_A = k\,(x - x_A). \tag{1.28}$$

Пучком прямых называется совокупность прямых плоскости, проходящих через одну и ту же точку A — центр пучка. Уравнение (1.28) можно рассматривать как уравнение пучка прямых, поскольку любая прямая пучка может быть получены из уравнения (1) при соответствующем значении углового коэффициента k. Исключение составляет лишь одна прямая пучка, которая параллельна оси Oy — ее уравнение $x = x_A$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}. \tag{1.29}$$

Если точки A и B определяют прямую, параллельную оси Ox ($y_A = y_B$) или оси Oy ($x_A = x_B$), то уравнение такой прямой записывается соответственно в виде:

$$y = y_A \quad \text{или} \quad x = x_A. \tag{1.30}$$

Условия пересечения, параллельности или совпадения двух прямых, заданными своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

приведены в следующей таблице.

Взаимное расположение прямых	Условие
Пересечение	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$
Параллельность	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$
Совпадение	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

(1.31)

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то условие параллельности этих прямых состоит в равенстве их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, состоит в выполнении соотношения

$$k_1k_2 + 1 = 0$$

или

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \tag{1.32}$$

т.е. угловые коэффициенты этих прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Под углом между двумя прямыми понимается один из двух смежных углов, образованных при их пересечении. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|, \tag{1.33}$$

причем знак «плюс» соответствует острому углу φ, а знак «минус» — тупому.

Уравнение *окружности* с центром в точке $S(a; b)$ и радиусом r имеем вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{1.34}$$

Это каноническое уравнение окружности (рис. 7).

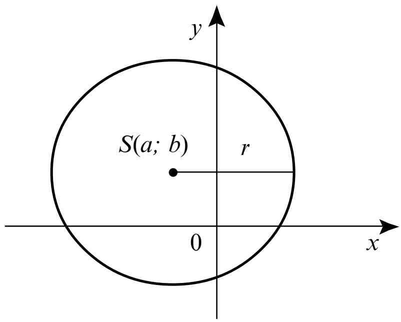


***Рис.** 7*

Уравнение второй степени относительно текущих координат x и y является уравнением окружности тогда и только тогда, когда в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Таким образом, это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0. \tag{1.35}$$

В этом случае говорят, что окружность задана общим уравнением.

Для определения координат центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, надо с помощью тождественных преобразований уравнение (1.35) привести к виду (1.34).

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная ($2a$), большая, чем расстояние между фокусами ($2c$).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр к оси абсцисс в середине отрезка F_1F_2 (рис. 8). Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.36}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

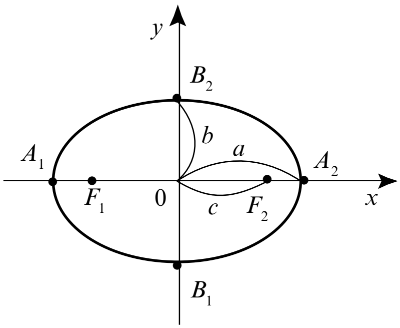


Рис. 8

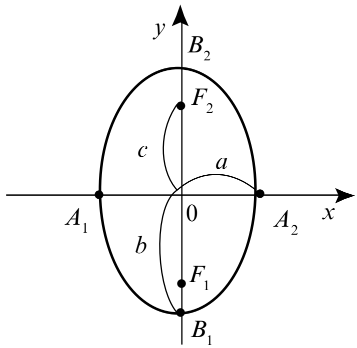


Рис. 9

Точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются вершинами эллипса. Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются осями эллипса, причем A_1A_2 — большой осью, а B_1B_2 — малой осью, так как $a > b$. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т.е.

$$e = \frac{c}{a}. \tag{1.37}$$

Очевидно, что $e < 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1.36), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy (рис. 9), то тогда $b > a$ и уже большой осью будет отрезок $B_1B_2 = 2b$, а малой осью — отрезок $A_1A_2 = 2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e = \frac{c}{b}, \tag{1.38}$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами ($2c$).

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось Oy — перпендикуляр в середине отрезка F_1F_2 (рис. 10). Тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.39}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

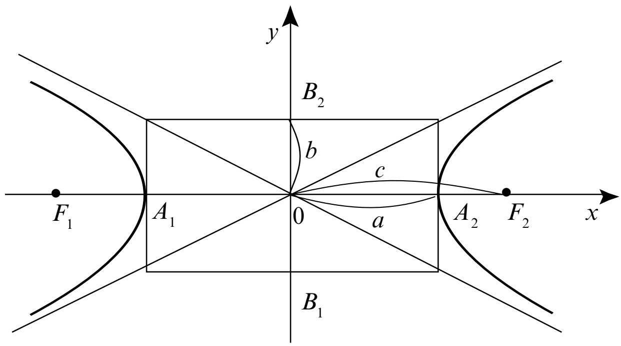


Рис. 10

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2, называемых вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 — мнимой осью гиперболы.

Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e = \frac{c}{a}. \tag{1.40}$$

Очевидно, что $e > 1$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x$$

и (1.41)

$$y = -\frac{b}{a}x$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси Ox и имеет длину $2a$, а действительная ось длиной $2b$ направлена по оси Oy, то уравнение гиперболы (рис. 11) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.42}$$

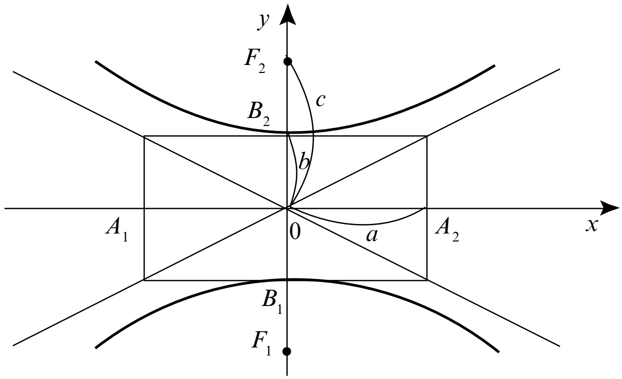


Рис. 11

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле

$$e = \frac{c}{b}.$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1.39).

Гиперболы (1.39) и (1.42) называются сопряженными.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительные и мнимые оси равны, т.е. $a = b$. Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{1.43}$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2.$$

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется параметром параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется осью, а точка пересечения параболы с ее осью — вершиной параболы.

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую — прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посредине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$$y^2 = 2px \text{ (рис. 12);} \tag{1.44}$$
$$y^2 = -2px \text{ (рис. 13);} \tag{1.45}$$
$$x^2 = 2py \text{ (рис. 14);} \tag{1.46}$$
$$x^2 = -2py \text{ (рис. 15).} \tag{1.47}$$

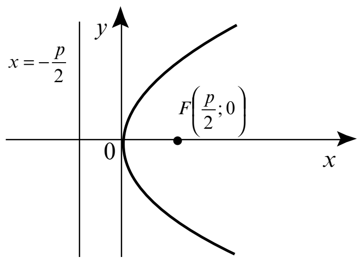


Рис. 12

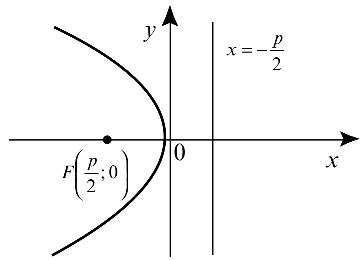


Рис. 13

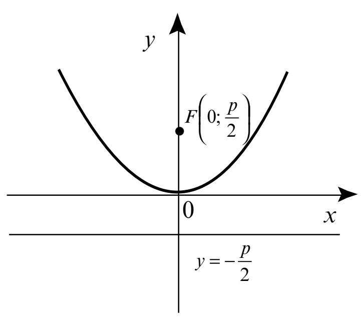


Рис. 14

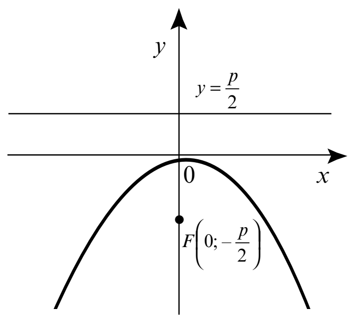


Рис. 15

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \tag{1.48}$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.

Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \qquad (m \neq 0) \tag{1.49}$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.

Уравнения (1.48) и (1.49) приводятся к простейшему виду (1.44 — 1.47) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

Пример 1.16. Даны вершины A (2; 1), B (6; 3), C (4; 5) треугольника. Найти: 1) длину стороны AB; 2) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 3) уравнение высоты, проведенной через вершину C; 4) уравнение медианы, проведенной через вершину C; 5) точку пересечения высот треугольника; 6) длину высоты, опущенной из вершины C; 7) систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника. Сделать чертеж.

Решение.

Делаем чертеж (рис. 16).

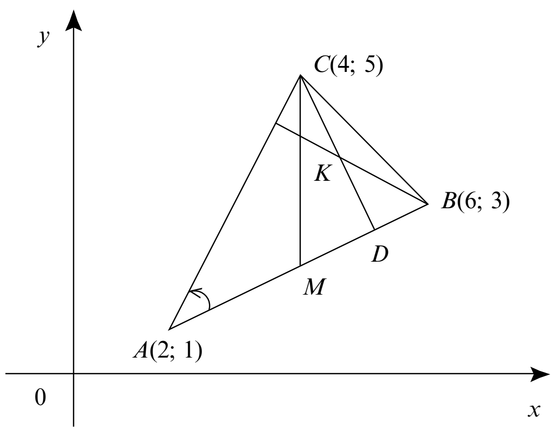


Рис. 16

1. Длину стороны AB находим как расстояние между двумя точками A и B.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

2. Для определения внутреннего угла A найдем уравнение прямой AC:

$$\frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{x - x_A}{x_C - x_A}; \quad \frac{y-1}{5-1} = \frac{x-2}{4-2}; \quad \frac{y-1}{4} = \frac{x-2}{2},$$

отсюда $2x - y - 3 = 0$ или $y = 2x - 3$ и угловой коэффициент прямой AC равен: $k_{AC} = 2$; далее находим уравнение прямой AB:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}; \quad \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{6-2}; \quad \frac{y-1}{2} = \frac{x-2}{4},$$

отсюда

$$x - 2y = 0 \text{ или } y = \frac{1}{2}x \text{ и } k_{AB} = \frac{1}{2}.$$

Находим угол A

$$\mathrm{tg}A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

отсюда

$$\angle A = 36°52'11'' = 0{,}64 \text{ радиан}.$$

3. Уравнение высоты, проведенной через вершину C, ищем в виде $y - y_C = k_{CD}(x - x_C)$ и так как $CD \perp$ прямой AB, то

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{0{,}5} = -2.$$

Тогда

$$y - 5 = -2(x - 4), \quad \text{или} \quad 2x + y - 13 = 0, \quad \text{или} \quad y = -2x + 13.$$

4. Для определения уравнения медианы CM находим координаты точки M, которая делит прямую AB пополам

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Уравнение прямой CM ищем в виде:

$$\frac{y - y_C}{y_M - y_C} = \frac{x - x_C}{x_M - x_C}; \ \frac{y-5}{2-5} = \frac{x-4}{4-4}; \ \frac{y-5}{-3} = \frac{x-4}{0},$$

а это означает, что уравнение медианы имеет вид $x = 4$, т.е. прямая $CM \perp Ox$.

5. Точку пересечения высот треугольника найдем как точку K пересечения высот CD и BK.

Находим уравнение высоты BK:

$$y - y_B = k_{BK}(x - x_B), \quad \text{или} \quad y - y_B = -\frac{1}{k_{AC}}(x - x_B),$$

$$\text{или } \ y - 3 = -\frac{1}{2}(x-6), \quad \text{или} \quad x + 2y - 12 = 0.$$

Решаем систему уравнений, описывающих прямые CD и BK:

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 13 = 0, \\ x + 2y - 12 = 0. \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} - \\ \cdot 2 \end{array}\right. \\ \hline \quad -3y + 11 = 0. \end{array}$$

Тогда $y = \dfrac{11}{3}$ и $x = 12 - 2y = 12 - 2 \cdot \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3}$, т.е. координаты точки K будут:

$$K\left(\frac{14}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

6. Для нахождения длины высоты CD запишем нормальное уравнение прямой AB:

$$\frac{x - 2y}{\pm\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{x-2y}{\pm\sqrt{5}} = 0.$$

Тогда

$$|CD| = \left|\frac{x_C - 2y_C}{\pm\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{4 - 2\cdot 5}{\pm\sqrt{5}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

7. Находим систему линейных неравенств, определяющих внутреннюю область треугольника.

Найдем уравнение прямой BC:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}, \quad \text{или} \quad \frac{y-3}{5-3} = \frac{x-6}{4-6}, \quad \text{или} \quad x + y - 9 = 0.$$

Итак: $x - 2y = 0$ — уравнение AB;
$2x - y - 3 = 0$ — уравнение AC;
$x + y - 9 = 0$ — уравнение BC.

Берем любую точку, лежащую внутри треугольника, например, (4; 3) и подставляем ее координаты в левую часть уравнений прямых:

$$4 - 2\cdot 3 = -2 < 0;\ 2\cdot 4 - 3 - 3 = 2 > 0;\ 4 + 3 - 9 = -2 < 0,$$

следовательно, система неравенств имеет вид:

$$\begin{cases} x - 2y < 0, \\ 2x - y - 3 > 0, \\ x + y - 9 < 0. \end{cases}$$

Пример 1.17. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку A (2; –4) и отстоящей от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид:

$$y - y_A = k(x - x_A),$$

или

$$y + 4 = k(x - 2),$$

или

$$kx - y - (4 + 2k) = 0. \qquad (*)$$

Для определения углового коэффициента k этой прямой воспользуемся тем, что она отстоит от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам. Найдем это расстояние непосредственно. Уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $kx - y - (2 + 4k) = 0$, имеет вид $y = -\frac{1}{k}x$, или $x + ky = 0$. Решив совместно уравнения этих двух прямых

$$\begin{cases} kx - y - (2 + 4k) = 0, \\ x + ky = 0, \end{cases}$$

получим координаты точки C их пересечения:

$$x_C = \frac{2k(k+2)}{1+k^2};\ y_C = -\frac{2(k+2)}{1+k^2}.$$

Отсюда находим расстояние от начала координат до прямой l:

$$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{2}{1+k^2}\sqrt{k^2(k+2)^2 + (k+2)^2} =$$
$$= \frac{2(k+2)}{1+k^2}\sqrt{k^2+1} = \frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}}.$$

С другой стороны, по условию $OC = 2$. Таким образом, получаем уравнение для нахождения углового коэффициента k искомой прямой l:

$$\frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \text{ или } k + 2 = \sqrt{k^2+1},$$

откуда $k = -\frac{3}{4}$. Таким образом, подставляя найденное значение $k = -\frac{3}{4}$ в уравнение (*), получаем уравнение прямой:

$$-\frac{3}{4}x - y - \left(4 - 2\cdot\frac{3}{4}\right) = 0$$

или окончательно,

$$3x + 4y + 10 = 0.$$

В заключение отметим, что отыскивая уравнение прямой l в виде $y - y_A = k(x - x_A)$, мы предполагали тем самым, что эта прямая не параллельна оси ординат. Но очевидно, что прямая $x = 2$ (параллельная оси Oy) также удовлетворяет условию задачи, так как она проходит через точку A (2; –4) и отстоит от начала координат на расстоянии, равном 2 единицам (рис. 17).

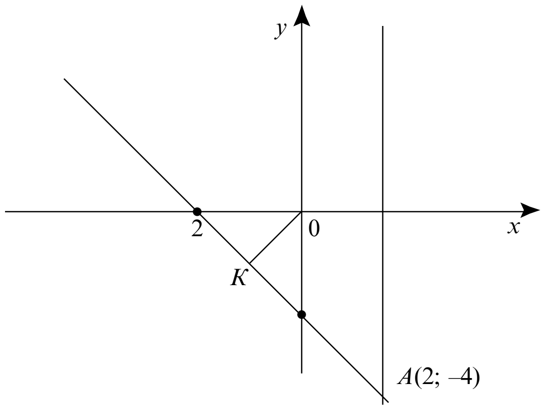


Рис. 17

Пример 1.18. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x + 4y - 1 = 0$ (l) и отстоящих от нее на расстоянии равном 1.

Решение. Уравнение каждой из прямых будем искать в виде $y = kx + b$. Так как искомая прямая параллельна прямой l, то ее угловой коэффициент $k = -\frac{3}{4}$ и, следовательно, ее уравнение принимает вид:

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

или

$$3x + 4y - 4b = 0. \qquad (*)$$

Для отыскания параметра b воспользуемся тем, что расстояние от любой точки прямой l, например, от точки A (3; –2) до прямой (*) согласно условию равно 1. Но это расстояние может быть вычислено и непосредственно. Запишем для этого уравнение прямой h, проведенной из точки A перпендикулярно прямой l:

$$y+2=\frac{4}{3}(x-3) \text{ или } 4x-3y-18=0.$$

Решив, далее, совместно уравнения прямых h и l

$$\begin{cases} 4x-3y-18=0, \\ 3x+4y-4b=0, \end{cases}$$

найдем координаты точки B их пересечения:

$$x_B=\frac{72+12b}{25}, \quad y_B=\frac{16b-54}{25}.$$

Тогда искомое расстояние равно длине отрезка AB:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{72+12b}{25}-3\right)^2+\left(\frac{16b-54}{25}+2\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(12b-3)^2+(16b-4)^2}}{25}.$$

Приравнивая это выражение единице, получим уравнение относительно b:

$$\frac{\sqrt{(12b-3)^2+(16b-4)^2}}{25}=1$$

или

$$(12b-3)^2+(16b-4)^2=25^2$$

и окончательно

$$2b^2-b-3=0.$$

Решения этого уравнения таковы: $b_1=\frac{3}{2}$, $b_2=-1$. Подставляя полученные значения b в уравнение (*), запишем уравнения искомых прямых:

$$3x + 4y - 6 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 4 = 0.$$

Пример 1.19. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F\,(8;\,0)$ вдвое больше, чем от прямой $x - 2 = 0$. Сделать чертеж.

Пусть $M(x;\,y)$ — текущая точка линии. По условию задачи $MF = 2MN$.

Тогда

$$\sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = 2\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2};$$
$$\sqrt{(x-8)^2 + (y-0)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-y)^2}.$$

Возводя в квадрат и раскрывая скобки, получим

$$\text{или } 3x^2 - y^2 = 48, \text{ или } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$$

Это есть каноническое уравнение гиперболы (рис. 18).

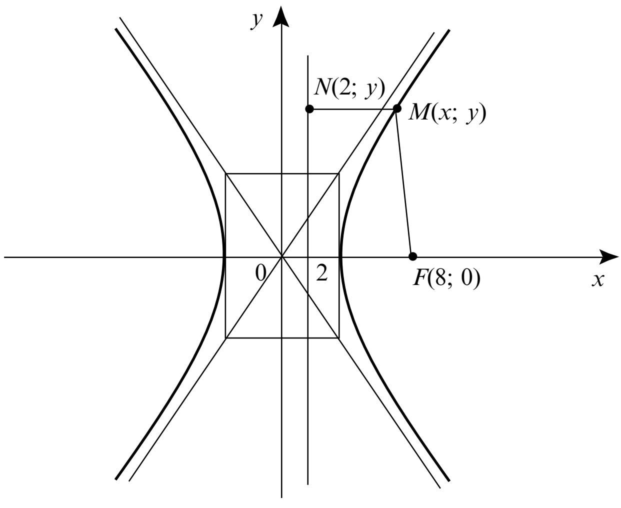


Рис. 18

Пример 1.20. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $F\,(0;\,-4)$ и от прямой $y + 2 = 0$.

Сделать чертеж.

Если $M(x;\,y)$ есть текущая точка линии, то по условию задачи $MF = MN$ или

$$\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2}.$$

Подставляя координаты точек $\sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2}$ и возводя в квадрат, после преобразований получаем:

$$x^2 = -4y - 12 \quad \text{или} \quad x^2 = -4(y + 3).$$

Получили уравнение параболы (рис. 19).

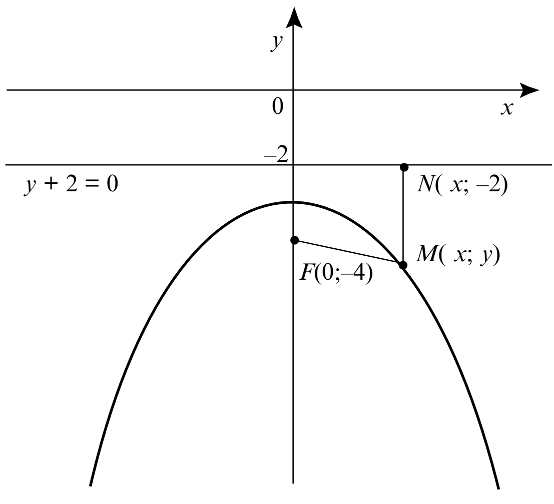


Рис. 19

1.3.2. Аналитическая геометрия в пространстве

Плоскость.

1. Всякая плоскость в координатном пространстве $OXYZ$ имеет векторное уравнение следующего вида: $\bar{r} \cdot \bar{n} = p$. Здесь $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор текущей точки плоскости $M(x, y, z)$; $\bar{n} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$ — единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α, β, γ — углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат OX, OY, OZ, и p — длина этого перпендикуляра.

При переходе к координатам это уравнение принимает вид $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ (нормальное уравнение плоскости).

2. Уравнение всякой плоскости может быть записано также в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ (общее уравнение). Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, перпендикулярного к плоскости. Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду все члены уравнения надо умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{|\overline{N}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3. Частные случаи расположения плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$; плоскость параллельна оси OX;

$B = 0$; плоскость параллельна оси OY;

$C = 0$; плоскость параллельна оси OZ;

$D = 0$; плоскость проходит через начало координат;

$A = B = 0$; плоскость перпендикулярна оси OZ (параллельна плоскости XOY);

$A = C = 0$; плоскость перпендикулярна оси OY (параллельна плоскости XOZ);

$B = C = 0$; плоскость перпендикулярна оси OX (параллельна плоскости YOZ);

$A = D = 0$; плоскость проходит через ось OX;

$B = D = 0$; плоскость проходит через ось OY;

$C = D = 0$; плоскость проходит через ось OZ;

$A = B = D = 0$; плоскость совпадает с плоскостью XOY ($z = 0$);

$A = C = D = 0$; плоскость совпадает с плоскостью XOZ ($y = 0$);

$B = C = D = 0$; плоскость совпадает с плоскостью YOZ ($x = 0$).

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, можно уравнение плоскости привести к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $\left(\text{здесь } a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}\right)$. Это уравнение плоскости называется уравнением в отрезках: в нем a — абсцисса точки пересечения плоскости с осью OX, b и c — соответственно ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями OY и OZ.

4. Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки M_0 и начала координат относительно данной плоскости: этот знак положителен, если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и отрицателен, если они расположены по одну сторону от плоскости.

6. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\overline{k}$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. При произвольных A, B и C последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую к связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Его часто поэтому называют уравнением связки плоскостей.

7. Уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ при произвольном λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую, по которой пересекаются плоскости, определяемые уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \text{(I)}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \text{(II), т.е.}$$

некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (в силу чего такое уравнение часто называют уравнением пучка плоскостей). Если плоскости, определяемые уравнениями I и II, параллельны, то пучок плоскостей превращается в совокупность плоскостей, параллельных этим плоскостям.

8. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(\bar{r}_1)$, $M_2(\bar{r}_2)$, $M_3(\bar{r}_3)$ $(\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\overline{k};\quad \bar{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\overline{k};$ $\bar{r}_3 = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\overline{k})$, проще всего найти из условия компланарности векторов $\bar{r} - \bar{r}_1$, $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\bar{r}_3 - \bar{r}_1$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\overline{k}$ — радиус-вектор текущей точки искомой плоскости M:

$$(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y - z + 2 = 0$ и через точку $M(3, 2, 1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка плоскостей

$$x + y + 5z - 1 + \lambda(2x + 3y - z + 2) = 0.$$

Значение λ определяем из условия, что координаты точки M должны удовлетворять этому уравнению:

$$3 + 2 + 5 - 1 + \lambda(6 + 6 - 1 + 2) = 9 + 13\lambda = 0,$$

$$\lambda = -\frac{9}{13}.$$

Получаем искомое уравнение в виде:

$$x + y + 5z - 1 - \frac{9}{13}(2x + 3y - z + 2) = 0$$

или, умножая на 13 и приводя подобные члены, в виде:

$$5x + 14y - 74z + 31 = 0.$$

Пример 1.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 3y + 5z - 4 = 0$ и $x - y - 2z + 7 = 0$ и параллельной оси oy.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка $x + 3y + 5z - 4 + \lambda(x - y - 2z + 7) = 0$, преобразуем уравнение к виду $(1 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z + (7\lambda - 4) = 0$.

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен равняться нулю, т.е. $3 - \lambda = 0$, $\lambda = 3$. Подставив значение λ в уравнение пучка, получаем

$$4x - z + 17 = 0.$$

Пример 1.23. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;\ -1;\ 4)$ и $N(3;\ 2;\ -1)$ перпендикулярно к плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через первую из данных точек:

$$A(x - 2) + B(y + 1) + C(z - 4) = 0.$$

Условие прохождения этой плоскости через вторую точку и условие перпендикулярности определяются равенствами:

$$A + 3B - 5C = 0,$$
$$A + B + C = 0.$$

Исключая коэффициенты A, B и C из системы уравнений

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-4)=0, \\ A+3B-5C=0, \\ A+B+C=0, \end{cases}$$

получаем искомое уравнение в виде:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$4x - 3y - z - 7 = 0.$$

Пример 1.24. Из точки $P(2; 3; -5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Решение. Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, будут следующие точки $M_1(2; 3; 0)$, $M_2(2; 0; -5)$, $M_3(0; 3; -5)$. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3, для чего воспользуемся уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

находим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$15x + 10y - 6z - 60 = 0.$$

Пример 1.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ 5)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{N} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\overline{k}$.

Решение. Достаточно воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данному вектору:

$$4(x - 2) + 3(y - 3) + 2(z - 5) = 0, \quad \text{т.е.} \quad 4x + 3y + 2z - 27 = 0.$$

Прямая.

1. Прямая может быть задана уравнениями 2-х плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

пересекающихся по этой прямой.

2. Исключив поочередно x и y из предыдущих уравнений, получим уравнения $x = az + c$, $y = bz + d$. Здесь прямая определена двумя плоскостями, проектирующими ее на плоскости xoz и yoz.

3. Если даны две точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$, то уравнения прямой, проходящей через них, будут иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. Так называемые канонические уравнения $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ определяют прямую, проходящую через точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельную вектору $\overline{S} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\overline{k}$. В частности, эти уравнения могут быть записаны в виде:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β и γ — углы, образованные прямой с осями координат.

Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

5. От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases}.$$

6. Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}};$$

условие параллельности двух прямых:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

7. Необходимое и достаточное условие расположения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (условие компланарности двух прямых):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если величины l_1, m_1, n_1 непропорциональны величинам l_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

8. Угол пересечения прямой $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

9. Для определения точки пересечения прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=$ $=\frac{z-z_0}{n}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x = lt + x_0$, $y = mt + y_0$, $z = nt + z_0$:

а) если $Al + Bm + Cn \neq 0$, то прямая пересекает плоскость в одной точке;

б) если $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости;

в) если $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

Пример 1.26. Привести к каноническому виду уравнения прямой $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $5x + 4y - z - 7 = 0$.

Решение. Исключив вначале y, а затем z, получим:

$$13x + 11z - 11 = 0 \quad \text{и} \quad 17x + 11y - 22 = 0.$$

Если разрешим каждое из уравнений относительно x, то будем иметь:

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13},$$

отсюда

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Второй способ: найдем вектор $\overline{S} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен к нормальным векторам заданных плоскостей $\overline{N}_1 = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{N}_2 = 5\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$, то за него можно принять векторное произведение векторов $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$.

$$\overline{S} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\overline{i} + 17\overline{j} + 13\overline{k}.$$

Таким образом, $l = -11$; $m = 17$; $n = 13$.

За точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью yoz. Так как при этом $x_1 = 0$, то координаты y_1 и z_1 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x = 0$:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y_1 = 2$; $z_1 = 1$.

Итак, искомая прямая определяется уравнениями:

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Мы получили прежний ответ.

Пример 1.27. Построить прямую

$$2x + 3y + 3z - 9 = 0,$$
$$4x + 2y + z - 8 = 0.$$

Решение. Искомую прямую можно построить как линию пересечения плоскостей. Для этого напишем уравнения плоскостей, которыми определена прямая, в отрезках на осях:

$$\frac{x}{4{,}5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1,$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1.$$

Построив данные плоскости, мы получим искомую прямую как линию пересечения этих плоскостей (рис. 20).

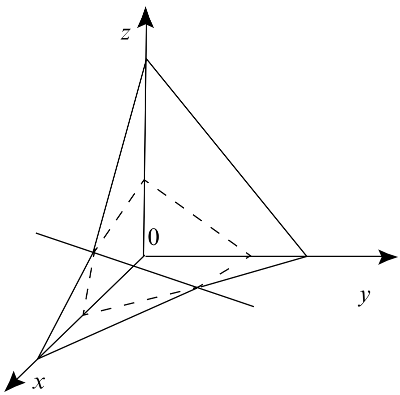


Рис. 20

Пример 1.28. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой: $2x + 3y + z = 0$. (Для этой плоскости можно принять $A = l$; $B = m$; $C = n$; $D = 0$; использовано условие перпендикулярности прямой и плоскости, см. п. 8 введения к настоящему разделу).

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$x = 2t + 2,$$
$$y = 3t + 1,$$
$$z = t + 3.$$

Для определения t имеем уравнение:

$$2(2t + 2) + 3(3t + 1) + t + 3 = 0.$$

Следовательно, $t=-\frac{5}{7}$. Координатами точки пересечения будут: $x=\frac{4}{7}$, $y=-\frac{8}{7}$, $z=\frac{16}{7}$, т.е. $M\left(\frac{4}{7};-\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Остается составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку M (см. п. 3 введения к настоящему разделу):

$$\frac{x}{\frac{4}{7}}=\frac{y}{-\frac{8}{7}}=\frac{z}{\frac{16}{7}} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}.$$

Пример 1.29. В уравнениях прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{n}$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

Решение. Для нахождения параметра n используем условие пересечения 2-х прямых:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix}=0$$

или

$$2n + 10 + 3 - 15n = 0, \quad 13n = 13, \quad n = 1.$$

Следовательно, уравнения пересекающихся прямых таковы:

искомой:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1},$$

заданной:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}.$$

Для вычисления координат точки пересечения этих прямых выразим из первого уравнения x и y через z: $x = 2z$, $y = -3z$. Подставляя их значения в равенство $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2}$, имеем $\frac{2z+1}{3} = \frac{-3z+5}{2}$, отсюда $z = 1$. Зная z, находим x и y: $x = 2z = 2$, $y = -3z = -3$.

Следовательно $M(2; -3; 1)$.

Пример 1.30. Прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1}.$$

Составить общие уравнения этой прямой.

Решение. Канонические уравнения прямой можно записать в виде системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5}, \\ \frac{x-2}{3} = \frac{z-3}{-1}, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} 5x - 3y - 13 = 0, \\ x + 3z - 11 = 0. \end{cases}$$

Получили общие уравнения прямой, которая теперь задана пересечением 2-х плоскостей, одна из которых $5x - 3y - 13 = 0$ параллельна оси Oz, а другая $x + 3z - 11 = 0$ параллельна оси Oy.

Пример 1.31. Найти координаты точки M, делящей попалам отрезок прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1},$$

заключенный между плоскостями xoz и xoy.

Решение. Найдем точку A пересечения прямой с плоскостью xoz, полагая в уравнениях прямой $y = 0$. Тогда получим:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1}{5} = \frac{z-3}{-1}, \text{ или } \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{1}{5}, \\ \frac{z-3}{-1} = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

отсюда $x = 2{,}6$; $z = 2{,}8$. Тогда $A(2{,}6; 0; 2{,}8)$.

Аналогично, полагая в уравнениях прямой $z = 0$, найдем координаты точки B пересечения прямой с плоскостью xoy:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = 3 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = 3, \\ \dfrac{y+1}{5} = 3, \end{cases}$$

отсюда $x = 11$, $y = 14$, или $B(11;\ 14;\ 0)$.

Определяем координаты точки M, делящей отрезок AB пополам:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2{,}6 + 11}{2} = 6{,}8;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 14}{2} = 7;$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2{,}8 + 0}{2} = 1{,}4.$$

Следовательно, координаты искомой точки M будут: $M(6{,}8;\ 7;\ 1{,}4)$.

Пример 1.32. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0, \end{cases}$$

параллельной прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Решение. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через первую из данных прямых:

$$\alpha(3x + 2y + 5z + 6) + \beta(x + 4y + 3z + 4) = 0,$$

которое делим на $\alpha \neq 0$, и пусть $\beta/\alpha = \lambda$:

$$3x + 2y + 5z + 6 + \lambda(x + 4y + 3z + 4) = 0, \text{ или}$$
$$(3 + \lambda)x + (2 + 4\lambda)y + (5 + 3\lambda)z + (6 + 4\lambda) = 0.$$

В этом пучке нужно выбрать плоскость, параллельную 2-й данной прямой. Из условия параллельности плоскости и прямой, имеем:

$$3(3 + \lambda) + 2(2 + 4\lambda) - 3(5 + 3\lambda) = 0.$$

Отсюда $\lambda = 1$.

Подставляя $\lambda = 1$ в уравнение пучка плоскостей, получим:

$$(3 + 1) \cdot x + (2 + 4 \cdot 1)y + (5 + 3 \cdot 1)z + (6 + 4 \cdot 1) = 0.$$

Тогда искомое уравнение плоскости будет:

$$4x + 6y + 8z + 10 = 0 \text{ или}$$
$$2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

Пример 1.33. Дана прямая

$$\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0, \\ x - 4y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Найти ее проекцию на плоскость

$$5x + 2y + 2z - 7 = 0.$$

Решение. Нужно найти плоскость, которая проходит через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости; тогда искомая проекция определится как пересечение этой плоскости с данной.

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$(3x - 2y - z + 4) + \lambda(x - 4y - 3z - 2) = 0 \text{ или}$$
$$(3 + \lambda)x - (2 + 4\lambda)y - (1 + 3\lambda)z + (4 - 2\lambda) = 0.$$

Эта плоскость должна быть перпендикулярной к данной плоскости, что можно записать как:

$$5(3 + \lambda) - 2(2 + 4\lambda) - 2(1 + 3\lambda) = 0,$$

отсюда $\lambda = 1$.

Тогда уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости, будет:

$$(3 + 1)x - (2 + 4 \cdot 1)y - (1 + 3 \cdot 1)z + (4 - 2 \cdot 1) = 0 \text{ или}$$

$$2x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

Проекция данной прямой на данную плоскость определяется как прямая пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 1 = 0, \\ 5x + 2y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

Запишем эту прямую в каноническом виде. Найдем на прямой какую-либо точку. Для этого положим, например $x_0 = 1$, и система запишется в виде:

$$\begin{cases} 3y_0 + 2z_0 = 3, \\ \;\, y_0 + \;\, z_0 = 1. \end{cases}$$

Отсюда, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$, т.е. точка $M(1;\ 1;\ 0)$ принадлежит искомой прямой.

Направляющий вектор прямой $\overline{S} = (l;\ m;\ n)$ найдем из того условия, что он перпендикулярен нормальным векторам $\overline{N_1} = (2; -3; -2)$ и $\overline{N_2} = (5;\ 2;\ 2)$ плоскостей, определяющих искомую прямую.

В качестве $\overline{S}$ берем векторное произведение векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, т.е.

$$\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 14\bar{j} + 19\bar{k} = (-2; -14; 19).$$

Тогда искомое уравнение в каноническом виде будет:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-14} = \frac{z}{19}.$$

Раздел 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Функции, предел, непрерывность

Одним из основных понятий математического анализа является понятие предела функции.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < | x - a | < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

При вычислении пределов функций используют следующие свойства пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$, где c – const,

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

3. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ существуют, то

а) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$,

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \neq 0$,

г) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$.

Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a),$$

то есть предел функции находят непосредственный подстановкой предельного значения аргумента.

Пример 2.1. $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 4x + 1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0.$

Однако часто прежде, чем перейти к пределу, приходится проводить тождественные преобразования данного выражения.

Пример 2.2. Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}.$

Здесь предел знаменателя равен нулю:

$$\lim_{x \to 3}(x - 3) = \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 3 = 3 - 3 = 0.$$

Следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Но вблизи от точки $x_0 = 3$ имеем $x - 3 \neq 0$ (при $x \neq 3$), и поэтому дробь можно сократить на $x - 3$, т.е.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3.$$

Последнее равенство имеет место при всех значениях $x \neq 3$. Значит и

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3).$$

Но теперь можно применить теорему о пределе суммы, т.е. окончательно получаем

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 3 = 3 + 3 = 6.$$

Соображения о возможности тождественных преобразований под знаком предела применимы не только в том случае, когда аргумент стремится к конечному пределу x_0, но и при $x \to \infty$.

Пример 2.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$.

В этом случае ни числитель, ни знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают.

Но если предварительно преобразовать аналитическое выражение под знаком предела, разделив числитель и знаменатель на x^3, то получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{2+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

Пример 2.4. Найти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}$ при: а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$.

а) Подставляем в предел $x=x_0=-1$.

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}=\frac{2(-1)^2-3(-1)+1}{3(-1)^2-(-1)-2}=\frac{6}{2}=3.$$

б) Как и в задаче 2.2 здесь предел знаменателя равен 0 при $x\to1$, но в числителе и знаменателе можно выделить множитель $(x-x_0)=(x-1)$ и тогда имеем:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(3x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2\cdot1-1}{3\cdot1+2}=\frac{1}{5}.$$

в) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}$.

Если вместо x подставить ∞, то имеем отношение двух бесконечно больших величин $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Тогда и числитель и знаменатель делим на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2-0+0}{3-0-0}=\frac{2}{3}.$$

Пример 2.5. Найти $\lim\limits_{x\to 5}=\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Здесь также имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Для разрешения неопределенности умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2.6. а) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Преобразуем заданное выражение:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}.$$

Обозначим $u = 3x$, заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}3x=3\cdot 0=0,$ т.е. при $x \to 0$ также и $u \to 0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

Аналогично, положив $v = 5x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\lim_{v\to 0}\frac{v}{\sin v}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}.$$

в) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{x}$.

Обозначим $u = \operatorname{arctg} 2x$, тогда, очевидно $\operatorname{tg} u = 2x$ и при $x \to 0$ имеем $u \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{2u}{tgu}=\lim_{u\to 0}\left(2\cdot\frac{u}{\sin u}\cdot\cos u\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}\cdot\lim_{u\to 0}\cos u=2\cdot 1\cdot\cos 0=2.$$

Пример 2.7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}$.

Преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{3n+2}{3n-1}=\frac{(3n-1)+3}{3n-1}=1+\frac{3}{3n-1}.$$

Обозначим теперь $x=\dfrac{3}{3n-1}$, откуда $n=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}$ и $2n+1=\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3}$, причем, при $n \to \infty$ имеем $x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}+\frac{5}{3}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2\cdot(1+x)^{\frac{5}{3}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2\cdot\left[\lim_{x\to 0}(1+x)\right]^{\frac{5}{3}}=[e]^2\cdot[1+0]^{\frac{5}{3}}=e^2.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Точка $x = x_0$, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется точкой разрыва, если в ней нарушается условие непрерывности.

Необходимым и достаточным условием непрерывности функции в точке является выполнение равенств:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x_0) = f(x_0),$$

где $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ — односторонние пределы функции в точке x_0 соответственно слева и справа.

Если эти равенства не выполняются или не существует хотя бы один из односторонних пределов, то точка $x = x_0$ — точка разрыва функции, причем:

1) если существуют односторонние пределы, но

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0) \quad \text{или} \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода;

2) если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует, то точка $x = x_0$ называется точкой разрыва 2-го рода.

Свойства непрерывных функций

1. Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен 0.

3. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $f(u)$ непрерывна в точке $u = u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

4. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Пример 2.8. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

При $x \neq 2$ функции, стоящие в числителе и знаменателе, непрерывны, и знаменатель не обращается в 0. Поэтому при $x \neq 2$ функция $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$ непрерывна. Исследуем точку $x = 2$. Найдем $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}}=0$, то $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=-1$. Далее, так как $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$, то преобразуем дробь $\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\dfrac{1-2^{\frac{1}{2-x}}}{1+2^{\frac{1}{2-x}}}$; $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1-2^{\frac{1}{2-x}}}{1+2^{\frac{1}{2-x}}}=1$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1\neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$ и, значит, в точке $x=2$ функция терпит разрыв 1-го рода. Скачок функции $f(2 + 0) - f(2 - 0) = 1 - (-1) = 2$.

Пример 2.9. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$.

Очевидно, функция непрерывна при $x \neq 2$ и $x \neq 5$. Найдем пределы в указанных точках:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)(x-5)}=+\infty;\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)(x-5)}=-\infty.$$

Следовательно, $x = 2$ — точка разрыва 2-го рода.

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{(x-2)(x-5)}=-\infty;\quad \lim_{x\to 5+0}\frac{1}{(x-2)(x-5)}=+\infty.$$

Следовательно, $x = 5$ — точка разрыва 2-го рода.

Пример 2.10. Найти точки разрыва функци

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Поскольку $\cos x$, x^2+1, x непрерывны всюду и, в частности на указанных интервалах, то функция $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1, +\infty)$. Точками разрыва могут являться только точки $x = 0$ и $x = 1$. Исследуем эти точки на непрерывность: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\cos x=\cos 0=1$; $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$; $f(0) = \cos 0 = 1$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$, следовательно, $x = 0$ — точка непрерывности функции $f(x)$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=2;\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} x=1,$$

то есть $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, следовательно, $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода. График функции

$$y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$$

имеет вид (рис. 21).

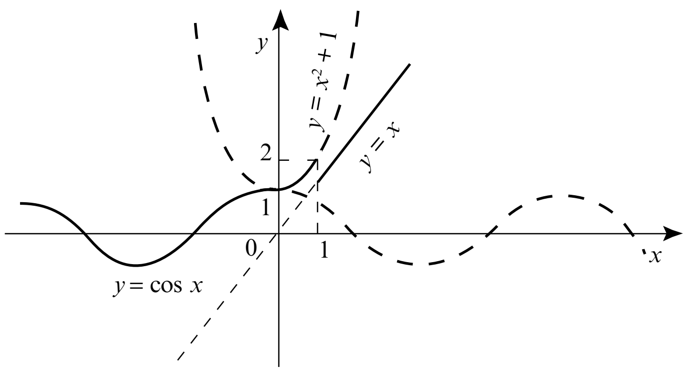


Рис. 21

2.2. Производная и дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Если x получит некоторое положительное или отрицательное приращение Δx и примет значение $x_0 + \Delta x$, то и функция y получит некоторое приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $\dfrac{dy}{dx}$.

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, то есть $y = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 22). Физически производная есть скорость изменения функции в точке x_0.

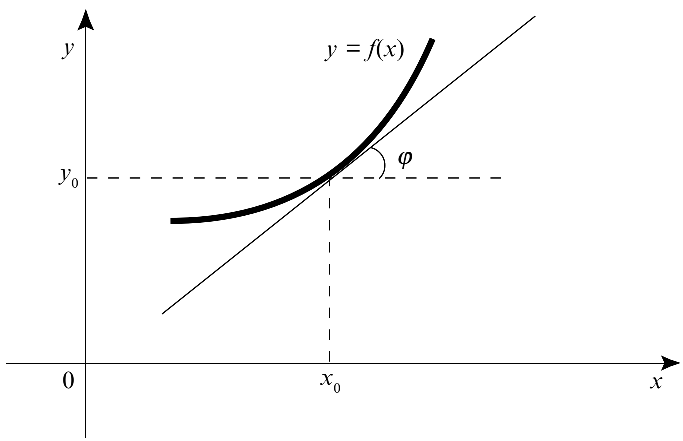


Рис. 22

Основные правила дифференцирования

Пусть C постоянная, $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые в точке x функции.

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm u'$;
4. $(cu)' = cu'$;
5. $(uv)' = u'v + uv'$;
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$;
7. Если $y = f(u)$, где $u = u(x)$, (то есть $y = f(u(x))$ — сложная функция от x) и функции $f(u)$ и $u(x)$ дифференцируемы, то производная сложной функции $y = f(u(x))$ вычисляется по формуле

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

8. Если функция аргумента x задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \text{ то } \quad y'_x = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента, то есть, если $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то дифференциал функции $dy = f'(x)dx$.

Дифференциал независимого аргумента равен приращению аргумента, то есть $dx = \Delta x$. Следовательно, $dy = f'(x) \cdot dx$.

Если Δx мало, то $\Delta y \approx dy$, и, следовательно, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$ (формула приближенного вычисления с помощью дифференциала).

Пример 2.11. Найти производные данных функций:

а) $y = \dfrac{3 + 6x}{\sqrt{3 - 4x + x^2}}$;

б) $y = \sin^2(x\cos x^3)$;

в) $y = \sqrt[3]{x\ln x}$;

г) $y = x^{-\operatorname{tg}x}$;

д) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решения:

а) применим теорему о производной частного:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{(3+6x)'\cdot\sqrt{3-4x+x^2} - (3+6x)(\sqrt{3-4x+x^2})'}{(\sqrt{3-4x+x^2})^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3-4x+x^2} - (3+6x)((3-4x+x^2)^{\frac{1}{2}})'}{3-4x+x^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3-4x+x^2} - (3+6x)\cdot\dfrac{1}{2}(3-4x+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3-4x+x^2)'}{3-4x+x^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{3-4x+x^2} - \dfrac{(3+6x)}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3-4x+x^2}}\cdot(-4+2x)}{3-4x+x^2} =$$

$$= \frac{24-15x}{(3-4x+x^2)\sqrt{3-4x+x^2}};$$

б) применим теоремы о производной произведения и производной сложной функции:

$$y' = 2\sin(x\cos x^3)\cdot(\sin(x\cos x^3))' =$$

$$= 2\sin(x\cos x^3)\cdot\cos(x\cos x^3)\cdot(x\cos x^3)' =$$

$$= \sin 2(x\cos x^3)\cdot(x'\cos x^3 + x(\cos x^3)') =$$

$$= \sin 2(x\cos x^3)(\cos x^3 - x\sin x^3(x^3)') =$$

$$= \sin 2(x\cos x^3)(\cos x^3 - x\sin x^3\cdot 3x^2);$$

в) $$y' = \left((x\ln x)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}(x\ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x\ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x'\ln x + x(\ln x)') = \frac{1}{3}(x\ln x)^{-\frac{2}{3}}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x});$$

г) прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \ln x^{-\mathrm{tg}x}; \quad \ln y = -\mathrm{tg}\, x \cdot \ln x,$$

учитывая, что y является функцией от x, найдем производные обеих частей равенства: $(\ln y)' = (-\mathrm{tg}\, x \cdot \ln x)'$.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x - \mathrm{tg}\, x \cdot \frac{1}{x};$$

$$y' = -y\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \right) = -x^{-\mathrm{tg}x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \right);$$

д) функция задана неявно. Для того, чтобы найти y', продифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией от $x(y = y(x))$, а затем разрешим уравнение относительно y':

$$(x^3 + y^3 - 3yx)' = 0'; \quad 3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0;$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2;$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Пример 2.12. Найти производную функций:

а) $y = (3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^4$;

$$y' = [(3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^4]' = 4(3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^{4-1} \cdot (3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)' =$$

$$= 4(3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^3[(3x^5)' - (2x^{\frac{2}{3}})' + (6)'] =$$

$$= 4(3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^3[3(x^5)' - 2(x^{\frac{2}{3}})' + 0] =$$

$$= 4(3x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + 6)^3 \cdot \left(15x^4 - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right);$$

б) $y=\left(\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+2)^4}}\right)^6.$

$$y'=\left[\left(\frac{1}{2}x^6-(x^2+2)^{-\frac{4}{3}}\right)^6\right]'=6\left(\frac{1}{2}x^6-(x^2+2)^{-\frac{4}{3}}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}x^6-(x^2+2)^{-\frac{4}{3}}\right)'=$$

$$=6\left(\frac{1}{2}x^6-(x^2+2)^{-\frac{4}{3}}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}6x^5-\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(x^2+2)^{-\frac{7}{3}}\cdot(x^2+2)'\right)=$$

$$=6\left(\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+2)^4}}\right)^5\cdot\left(3x^5+\frac{8x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^7}}\right).$$

Пример 2.13. Найти производную функций:

а) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1-x^4}{1+x^4}}.$

Используя свойства логарифмов, упростим

$$y=\ln\left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln\frac{1-x^4}{1+x^4}=\frac{1}{3}\left(\ln(1-x^4)-\ln(1+x^4)\right).$$

Находим производную

$$y'=\left[\frac{1}{3}\left(\ln(1-x^4)-\ln(1+x^4)\right)\right]'=\frac{1}{3}\left[\left(\ln(1-x^4)\right)'-\left(\ln(1+x^4)\right)'\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{(1-x^4)'}{1-x^4}-\frac{(1+x^4)}{1+x^4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{-4x^3}{1-x^4}-\frac{4x^3}{1+x^4}=-\frac{8x^3}{3(1-x^8)}\right);$$

б) $y=\ln\sqrt[9]{\left(\frac{1-6x}{2+x^3}\right)^2}\cdot$ Преобразуем функцию

$$y=\ln\left(\frac{1-6x}{2+x^3}\right)^{\frac{2}{9}}=\frac{2}{9}\ln\frac{1-6x}{2+x^3}=\frac{2}{9}\left(\ln(1-6x)-\ln(2+x^3)\right).$$

Дифференцируем

$$y' = \left[\frac{2}{9}\left(\ln(1-6x) - \ln(2+x^3)\right)\right]' = \frac{2}{9}[(\ln(1-6x))' - (\ln(2+x^3))'] =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{(1-6x)'}{1-6x} - \frac{(2+x^3)'}{2+x^3}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{-6}{1-6x} - \frac{3x^2}{2+x^3}\right) = \frac{-2(4+x^2-4x^3)}{3(1-6x)(2+x^3)}.$$

Пример 2.14. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{1-2x}$. Дифференцируем

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^2}\cdot\left((1-2x)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-2x)' = \frac{-2}{3(1+\sqrt[3]{(1-2x)^2})\cdot\sqrt[3]{(1-2x)^2}};$$

б) $y = \arcsin 2x - \sqrt{1-4x^2}$. Дифференцируем

$$y' = \left(\arcsin 2x - \sqrt{1-4x^2}\right)' = \left(\arcsin 2x\right)' - \left((1-4x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{1}{2}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-4x^2)' =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} = \frac{2(1+2x)}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Механический смысл производной

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $S = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени:

$$v = s'(t_0).$$

Пример 2.15. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = x^3 + 4x^2$, проведенная в точке $M_0\,(1; 5)$. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой в данной точке.

Для определения углового коэффициента касательной находим производную от заданной функции:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x.$$

Далее определяем численное значение производной в точке M_0 (1; 5), для этого подставляем в выражение производной $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 + 8(1) = 11.$$

Значение производной при $x = 1$ и дает искомый угловой коэффициент $k = 11$, т.е. tg $\alpha = 11$, откуда $\alpha = \text{arc tg } (11) \approx 84°50'$.

Для составления уравнения касательной используем формулу $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - 5 = 11(x - 1) \quad \text{или} \quad 11x - y - 6 = 0.$$

Для составления уравнения нормали пользуемся формулой $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$:

$$y - 5 = -\frac{1}{11}(x - 1) \quad \text{или} \quad x + 11y - 56 = 0.$$

Пример 2.16. Определить, под каким углом кривая $y = \dfrac{x-1}{1+x^2}$ пересекает ось абсцисс.

Находим точку пересечения кривой $y = \dfrac{x-1}{1+x^2}$ с осью OX, уравнение которой $y = 0$, т.е. решаем систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{1+x^2}, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1+x^2} = 0,$$

откуда получаем $x = 1$.

Под углом данной кривой с осью OX понимается угол, который касательная к этой кривой в точке $x = 1$ образует с осью абсцисс. Найдем угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x = 1$:

$$\text{tg}\alpha = y'\Big|_{x=1} = \left(\frac{x-1}{1+x^2}\right)'\Bigg|_{x=1} = \left[\frac{1+x^2-2x(x-1)}{(1+x^2)^2}\right]_{x=1} =$$

$$= \left[\frac{1-x^2+2x}{(1+x^2)^2}\right]_{x=1} = \frac{1-1+2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\alpha = \text{arc tg}\frac{1}{2} \approx 26^\circ 34'.$$

Пример 2.17. Под каким углом пересекаются параболы $y = -4 + 6x - x^2$ и $y = (x - 2)^2$?

Решая совместно уравнения парабол, находим абсциссы их точек пересечения:

$$\begin{cases} y = (x-2)^2, \\ y = -4+6x-x^2, \end{cases} \quad \begin{aligned} &(x-2)^2 = -4+6x-x^2; \\ &x^2-5x+4=0; \\ &x_1 = 1, \quad x_2 = 4. \end{aligned}$$

Определяем, что точки пересечения парабол, соответствующие найденным абсциссам — это точки $A(1; 1)$ и $B(4; 4)$ (рис. 23).

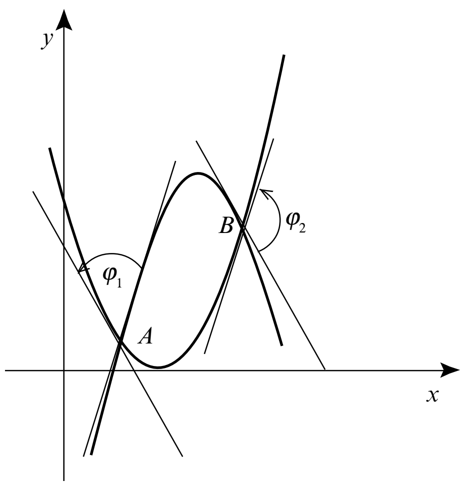


Рис. 23

Находим угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A:

$$k_1 = (-4+6x-x^2)'\big|_{x=1} = 6-2x\big|_{x=1} = 4,$$

$$k_2 = [(x-2)^2]'\big|_{x=1} = 2(x-2)\big|_{x=1} = -2.$$

Вычисляем тангенс угла между касательными:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-2-4}{1-2\cdot 4} = \frac{6}{7},$$

откуда

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{6}{7}.$$

Также определяем угол между кривыми в точке B:

$$k_1 = 6-2x\big|_{x=4} = -2,$$

$$k_2 = 2(x-2)\big|_{x=4} = 4,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{4+2}{1-4\cdot 2} = -\frac{6}{7},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{6}{7}\right).$$

Пример 2.18. В какой точке параболы $y = \sqrt{18x}$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса?

Найдем производную от заданной функции:

$$y' = \left(\sqrt{18x}\right)' = \frac{18}{2\sqrt{18x}} = \frac{3}{\sqrt{2x}}.$$

Так как производная характеризует скорость возрастания ординаты (функции) по сравнению с возрастанием аргумента, то из условия задачи имеем:

$$\frac{3}{\sqrt{2x}} = 2,$$

отсюда $x = \dfrac{9}{8}$ — абсцисса искомой точки.

А ордината находится из уравнения $y = \sqrt{18x}\Big|_{x=\frac{9}{8}} = \dfrac{9}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{9}{8}$, $y = \dfrac{9}{2}$.

Производные высших порядков

Определение. Производной второго порядка (или второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $y'' = (y')'$.

Обозначается вторая производная так:

$$y'' \quad \text{или} \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \text{или} \quad f''(x).$$

Если $s = f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то $\frac{d^2 s}{dt^2}$ есть ускорение этого движения. Аналогично, производная третьего порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка $y''' = (y'')'$.

Вообще, производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n - 1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Для n-ой производной употребляются обозначения:

$$y^{(n)} \quad \text{или} \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \text{или} \quad f^{(n)}(x).$$

Производные высших порядков (вторая, третья и т.д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Пример 2.19. $y = (\text{arc tg } x)$. Найти y''.

Находим первую производную:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Вторая производная, по определению, равна производной от первой производной, следовательно:

$$y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left[(1+x^2)^{-1}\right] = \left[-(1+x^2)^{-2}\right](1+x^2)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Пример 2.20. Найти $y'''(3)$, если $f(x) = (2x - 3)^5$.

Находим последовательно первую, вторую и третью производные:

$$f'(x) = [(2x-3)^5]' = 5(2x-3)^4 \cdot 2 = 10(2x-3)^4,$$
$$f''(x) = 10 \cdot 4(2x-3)^3 \cdot 2 = 80(2x-3)^3,$$
$$f'''(x) = 80 \cdot 3 \cdot (2x-3)^2 \cdot 2 = 480(2x-3)^2.$$

Подставляя в третью производную значение $x = 3$, получим:

$$f'''(3) = 480(2 \cdot 3 - 3)^2 = 4320.$$

Пример 2.21. Найти y'''' от функции $y = \sin 2x$.

Находим последовательно первую, вторую, третью и четвертую производные:

$$y' = 2\cos 2x,$$
$$y'' = -4\sin 2x,$$
$$y''' = -8\cos 2x,$$
$$y'''' = 16\sin 2x.$$

Пример 2.22. Показать, что функция $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y'' - 4y' + 29y = 0.$$

Найдем первую и вторую производные от функции $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$:

$$y' = 2e^{2x} \cdot \sin 5x + 5e^{2x} \cdot \cos 5x,$$
$$y'' = 2(2e^{2x} \cdot \sin 5x + 5e^{2x} \cdot \cos 5x) + 5(2e^{2x} \cdot \cos 5x - 5e^{2x} \cdot \sin 5x) =$$
$$= 20e^{2x} \cdot \cos 5x - 21e^{2x} \cdot \sin 5x.$$

Подставим найденные выражения для y' и y'' в данное уравнение и получим тождество:

$$20e^{2x} \cdot \cos 5x - 21e^{2x} \cdot \sin 5x - 4(2e^{2x} \cdot \sin 5x + 5e^{2x} \cdot \cos 5x) +$$
$$+ 29 \cdot e^{2x} \cdot \sin 5x = 0, \; 0 = 0.$$

Дифференцирование неявных функций

Определение. Если зависимость y от x задается посредством соотношения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — выражение, содержащее x и y, то y называется неявной функцией от x. Для определения производной от неявно заданной функции нужно обе части уравнения $F(x, y) = 0$ продифференцировать по x, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного равенства выразить y'.

Для определения y'' нужно аналогично уравнение $F(x, y) = 0$ дважды продифференцировать по x и исключить y'.

Пример 2.23. $x^4 - 6x^2y^3 + 15y^2 - 100 = 0$. Найти y'.

Дифференцируем заданное соотношение, рассматривая при этом y как функцию от x

$$4x^3 - 6(2xy^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y') + 15 \cdot 2y \cdot y' = 0.$$

(здесь, при дифференцировании слагаемого $6x^2y^3$ использовано правило дифференцирования произведения).

Решаем полученное уравнение относительно y':

$$4x^3 - 12xy^3 - 18x^2y^2y' + 30yy' = 0,$$

$$y'(15y - 9x^2y^2) = 6xy^3 - 2x^3,$$

$$y' = \frac{6xy^3 - 2x^3}{15y - 9x^2y^2}.$$

Пример 2.24. $\operatorname{arc\,tg}(x + y) = x$. Найти y''.

Дифференцируем обе части заданного соотношения и определяем затем y':

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y') = 1,$$

откуда

$$y' = (x+y)^2.$$

Находим далее y'':

$$y'' = 2(x + y)(1 + y').$$

В правую часть последнего равенства подставляем вместо y' ее значение, найденное ранее:

$$y'' = 2(x + y)[1 + (x + y)^2].$$

Пример 2.25. Найти $y'(0)$ в точке $A(1; 0)$, если $e^y + xy = e$.

Дифференцируем заданное соотношение и определяем y':

$$e^y y' + y + xy' = 0,$$

$$y' = \frac{-y}{e^y + x}.$$

В последнее соотношение подставляем координаты точки A $x = 0$, $y = 1$:

$$y'(0) = -\frac{1}{e+0} = -e^{-1}.$$

2.3. Исследование функций

Функция называется возрастающей (убывающей) в некотором интервале, если в этом интервале каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными. Если функция не является монотонной, то область ее определения можно разбить на конечное число интервалов монотонности (которые иногда чередуются с интервалами постоянства функции).

Монотонность функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее первой производной $f'(x)$, а именно, если в некотором интервале $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция возрастает (убывает) в этом интервале. Следовательно, отыскание интервалов монотонности функции $y = f(x)$ сводится к нахождению интервалов знакопостоянства ее первой производной $f'(x)$.

Отсюда получаем правило нахождения интервалов монотонности функции:

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в интервалах, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$; интервалы, в которых $f'(x) > 0$, являются интервалами возрастания функции, а интервалы, в которых $f'(x) < 0$, — интервалами убывания функции. При этом, если на двух соседних интервалах, граничная точка которых является нулем производной $f'(x)$, знак $f'(x)$ одинаков, то они составляют единый интервал монотонности.

Пример 2.26. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5.$

Решение. Область определения данной функции — вся числовая ось. Дифференцируя, находим

$$y' = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x - 1).$$

Точек разрыва производная y' не имеет. Нулями производной y' будут корни уравнения $x^2(x - 1) = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Область определения функции — ось Ox — разбивается полученными точками на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$, в каждом их которых y' сохраняет определенный знак. Подставляя в выражение для y' значения $x = -5$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$ из этих интервалов, получим соответственно знаки «–», «–», «+». Следовательно, в интервале $(-\infty; 1)$ функция убывает, а в интервале $(1; +\infty)$ — возрастает.

Точка $x = x_0$ называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x $(x \neq x_0)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)].$$

Точки максимума и минимума функции называются точками ее экстремума, а значение функции в точке максимума (минимума) — максимумом (минимумом) или экстремумом функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная $f'(x)$ меняет знак, а именно, если при переходе через критическую точку $x = x_0$ в положительном направлении знак $f'(x)$ меняется с «+» на «–» (с «–» на «+»), то точка $x = x_0$ есть точка максимума (минимума).

Отсюда получаем правило отыскания экстремумов функции $y = f(x)$:

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить методом проб знак $f'(x)$ в интервалах, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$.

3. Из этих точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых производная $f'(x)$ имеет разные знаки — это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка $x = x_0$ является точкой максимума, если при движения по оси Ox в положительном направлении она отделяет интервал, в котором производная $f'(x) > 0$, от интервала, в котором $f'(x_0) < 0$, и точкой минимума — в противном случае.

В заключение заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной $f''(x_0)$: точка $x = x_0$, в которой $f'(x_0) = 0$, а $f''(x)$ существует и отлична от нуля, является экстремальной, а именно, точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Пример 2.27. Найти экстремумы функции $y = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Вычислим производную:

$$y' = 3x^2 \sqrt[3]{(x-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x-1}}(9x - 9 + 2x) = \frac{x^2(11x-9)}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Производная f' обращается в нуль при $x = 0$ и $x = \frac{9}{11}$ и не существует при $x = 1$. Полученные точки разбивают числовую ось на четыре интервала, в каждом из которых f' сохраняет определенный знак: $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{9}{11}\right)$, $\left(\frac{9}{11}, 1\right)$, $(1, +\infty)$. Найдем знак производной y' в полученных интервалах:

в	интервале	$(-\infty, 0)$	имеем	$f'(-1) > 0$;
»	»	$\left(0, \frac{9}{11}\right)$	»	$y'\left(\frac{1}{3}\right) > 0$;
»	»	$\left(\frac{9}{11}, 1\right)$	»	$y'\left(\frac{10}{11}\right) < 0$;
»	»	$(1, +\infty)$	»	$y'(5) > 0$.

Экстремальными являются точки $x_1 = \frac{9}{11}$ — точка максимума и $x_2 = 1$ — точка минимума. Экстремумы функции получим, вычислив ее значения в экстремальных точках: $y\left(\frac{9}{11}\right) = \frac{729}{1331}\sqrt[3]{\frac{4}{121}} \approx 0{,}176$ — максимум и $y(1) = 0$ — минимум функции.

Кривая называется выпуклой (вогнутой) в некотором интервале, если она расположена ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого интервала. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно, если в некотором интервале $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$], то кривая выпукла (вогнута) в этом интервале.

Таким образом, отыскание интервалов выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ сводится к нахождению интервалов знакопостоянства ее второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая ее точка, которая отделяет участок выпуклости от участки вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ могут служить только точки, абсциссы которых являются критическими точками II рода, т.е. точки, находящиеся внутри области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ являются лишь только те из указанных точек, при переходе через которые вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Отсюда получаем правило отыскания интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

1. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

2. Определить методом проб знак $f''(x)$ в интервалах, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения $f(x)$; интервалы, в которых $f''(x) < 0$, являются интервалами выпуклости, а интервалы, в которых $f''(x) > 0$, — интервалами вогнутости графика функции $y = f(x)$. При этом если на двух соседних интервалах, граничная точка которых является нулем второй производной $f''(x)$, знак $f''(x)$ одинаков, то они составляют единый интервал выпуклости или вогнутости.

3. Из полученных в п. 1 точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых вторая производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки — это и есть абсциссы точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример 2.28. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 60x - 5$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Дифференцируя ее дважды, получим

$$f'(x) = 15x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 60,$$

$$f''(x) = 60x^3 + 60x^2 - 120x = 60x(x-1)(x+2).$$

Вторая производная существует на всей числовой оси и обращается в нуль при $x = -2$, $x = 0$ и $x = 1$. Этими точками область определения разбивается на четыре интервала $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет знак. Определяя знак второй производной в произвольно взятой точке каждого из интервалов, получим знак ее в соответствующем интервале:

в	интервале	$(-\infty, -2)$	имеем	$f''(-3) < 0,$
»	»	$(-2, 0)$	»	$f''(-1) > 0,$
»	»	$(0, 1)$	»	$f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$
»	»	$(1, \infty)$	»	$f''(2) > 0.$

Таким образом, в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, 1)$ кривая выпукла, а в интервалах $(-2, 0)$ и $(1, \infty)$ — вогнута.

Граничные точки $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ этих интервалов являются абсциссами точек перегиба. Вычислим значения функции $y = f(x)$ в этих точках:

$$f(-2) = 19, \quad f(0) = -5, \quad f(1) = 43.$$

Итак, данная функция имеет три точки перегиба: $(-2; 19)$, $(0; -5)$, $(1; 43)$.

Ассимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.

I. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ есть асимптота кривой $y = f(x)$. Например, кривая $y = \dfrac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $x = a$.

II. Если в правой части уравнения кривой $y = f(x)$ можно выделить линейную часть $y = f(x) = kx + b + \alpha(x)$ так, что оставшаяся часть $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, то прямая $y = kx + b$ есть асимптота кривой.

Примеры:

1) кривая $y = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ имеет асимптоту $y = x + 1$ (и асимптоту $x = 0$);

2) кривая $y = \dfrac{a}{x-a} = 0 + \dfrac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $y = 0$.

III. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty \text{ или} -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty \text{ или} -\infty} [f(x) - kx] = b$, то прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$, надо вычислить значения этой функции на концах отрезка и во всех ее критических точках, принадлежащих этому отрезку (такими точками в данном случае являются точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует). Наибольшее и наименьшее из полученных значений являются соответственно наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке.

В случае, если исследуемая функция претерпевает разрыв в некоторых точках отрезка $[a, b]$ или же задана на бесконечном интервале, то необходимо дополнительно рассмотреть ее поведение в окрестности точек разрыва и при $x \to \pm\infty$.

Пример 2.29. Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[1, 3]$;

2) $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение.

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [1, 3]. Находим

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

В данном случае критическими являются только точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю, т.е. $x = 0$ и $x = 2$. Отрезку [1, 3] принадлежит лишь одна из этих критических точек, а именно $x = 2$. Вычислим значения функции $f(x)$ в точке $x = 2$ и на концах отрезка $x = 1$ и $x = 3$:

$$f(2) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f(3) = 4.$$

Таким образом, наибольшее значение функции равно 4 и достигается на правой границе отрезка в точке $x = 3$; наименьшее значение функции равно нулю и достигается ею во внутренней точке $x = 2$.

2. Функция $\varphi(x)$ претерпевает разрыв в точке $x = 0$, принадлежащей отрезку [–2, 2]. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$$\lim_{x \to +0} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} \varphi(x) = -\infty.$$

Следовательно, вблизи точки $x = 0$ функция $\varphi(x)$ достигает сколь угодно больших по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значений, и, следовательно, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения.

Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, установить точки разрыва и интервалы непрерывности функции.

2. Исследовать функцию на четность, нечетность.

3. Найти, если это возможно, точки пересечения с осями координат. Вычислить предельные значения функции на границах области определения. Найти асимптоты кривой, если они существуют. После этого можно построить примерный вид графика, удовлетворяющего проведенному исследованию.

4. Уточнить характер графика с использованием первой производной, т.е. исследовать функцию на экстремум, установить интервалы монотонности функции.

5. Уточнить характер графика по второй производной, т.е. исследовать функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

Пример 2.30. Построить график функции $y = x^5 - x^3 - 2x$.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty; \infty)$.

2. Функция нечетная, т.к. $y(-x) = -y(x)$, т.е.

$$y(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 - 2(-x) = -(x^5 - x^3 - 2x) = -y(x),$$

следовательно, график функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно провести исследование для $x \geq 0$.

3. Найдем точки пересечения кривой с осями координат

$$x^5 - x^3 - 2x = 0,$$

$$x(x^4 - x^2 - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, \; x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4.$$

Определим значения функции на границах области существования, т.е. при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(x^5 - x^3 - 2x) = \lim_{x\to\infty} x^5\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right) = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(x^5 - x^3 - 2x) = \lim_{x\to-\infty} x^5\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right) = -\infty.$$

Вертикальных асимптот нет, т.к. функция не имеет точек разрыва. Определим наклонные асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5 - x^3 - 2x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right) = \infty.$$

Следовательно, наклонной асимптоты кривая не имеет.

4. Далее проводим исследование по первой производной

$$y' = 5x^4 - 3x^2 - 2.$$

Найдем критические точки 1-го рода

$$5x^4 - 3x^2 - 2 = 0,$$

$$5(x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{2}{5}\right) = 0,$$

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$ — критические точки 1-го рода.

Чтобы выяснить, являются ли эти точки экстремальными, используем второе достаточное условие экстремума. Для этого определим знак второй производной в найденных критических точках:

$$y'' = 20x^3 - 6x = 2x(10x^2 - 3).$$

Подставив значение $x = 1$ в y'' (берем только один корень, т.к. проводим исследование для $x \geq 0$ в силу нечетности функции), получим $y''(1) = 14 > 0$; значит, в точке $x = 1$ функция достигает минимума (при $x = -1$ — максимума). Вычислим экстремальные значения функции:

$$y_{\min} = 1^5 - 1^3 - 2 \cdot 1 = -2; \quad y_{\max} = (-1)^5 - (-1)^3 - 2(-1) = 2.$$

Составим таблицу изменения знаков первой производной.

x	$(-\infty; -1)$	$x = -1$	$(-1; 1)$	$x = 1$	$(1; \infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	↗	$y_{\max} = 2$	↘	$y_{\min} = -2$	↗

5. Найдем критические точки 2-го рода, приравняв к нулю правую часть y'':

$$2x(10x^2 - 3) = 0;$$

$$x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{0{,}3} \approx \pm 0{,}55;$$

$x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{0,3}$, $x_3 = \sqrt{0,3}$ являются критическими точками 2-го рода, которые делят всю числовую ось на интервалы: $(-\infty; -\sqrt{0,3})$, $(-\sqrt{0,3}; 0)$, $(0; \sqrt{0,3})$, $(\sqrt{0,3}; \infty)$. Выясним знак второй производной в указанных интервалах. На интервале $(-\infty; -\sqrt{0,3})$ возьмем, например, точку $x = -1$; $y''(-1) = -14 < 0$, значит, кривая в этом интервале выпукла.

На интервале (–0,3; 0) рассмотрим точку $x = -\frac{1}{2}$:

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0,$$

значит, кривая на этом интервале вогнута, вторая производная при переходе через $x_2 = -\sqrt{0,3}$ меняет знак с – на +, следовательно, значение $x = -\sqrt{0,3}$ является абсциссой точки перегиба. Аналогично определяем, что на интервале $(0; \sqrt{0,3})$ кривая выпукла, а на интервале $(\sqrt{0,3}; \infty)$ — вогнута; значения $x = 0$ и $x = \sqrt{0,3}$ являются абсциссами точек перегиба кривой.

Составим таблицу изменения знаков $y''(x)$.

x	$(-\infty; -\sqrt{0,3})$	$x = -\sqrt{0,3}$	$(-\sqrt{0,3}; 0)$	$x = 0$	$(0; \sqrt{0,3})$	$x = \sqrt{0,3}$	$(\sqrt{0,3}; \infty)$
$y''(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$y(x)$	$\cap$	т.п. $y \approx 1,2$	$\cup$	т.п. $y = 0$	$\cap$	т.п. $y \approx -1,2$	$\cup$

Определим значения функции в точках перегиба:

$$y(0) = 0; \quad y(-\sqrt{0,3}) \approx 1,22; \quad y(\sqrt{0,3}) \approx -1,22.$$

Чтобы точнее нарисовать кривую графика, можно найти углы наклона касательных, проведенных к кривой в точках перегиба. Так, при $x = 0$, $y'(0) = -2$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = -2$, где α — угол наклона касательной к кривой в точке $x = 0$, а при $x = \sqrt{0,3}$,

$y'(\sqrt{0{,}3}) \approx -2{,}45$. Окончательный график функции $y = x^5 - x^3 - 2x$ изображен на рис. 24.

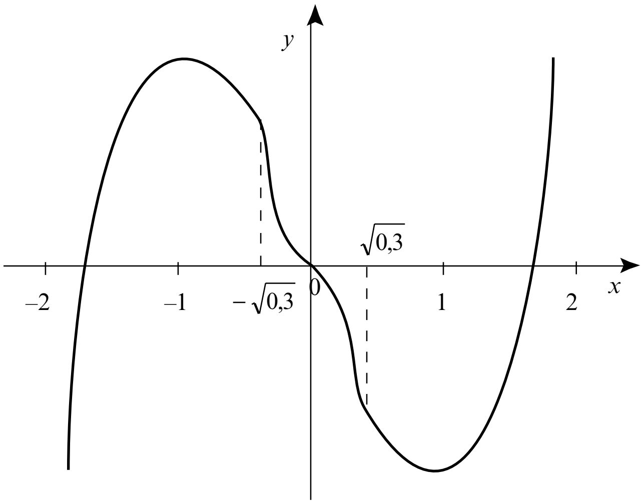


Рис. 24

Пример 2.31. Провести полное исследование и построить график функции $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

1. Функция определена всюду на интервале $(-\infty;\ \infty)$.
2. Функция общего вида.
3. Найдем точки пересечения с осями координат:

$$\sqrt[3]{x^2} - x = 0;$$

$$\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x}) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1;$$

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Определим значения функции на границах области существования:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2} - x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = \infty(-1) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3} - x) = \infty + \infty = \infty.$$

Вертикальных асимптот нет, так как функция не имеет точек разрыва. Определим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right)}{x} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^2} - x + x) = \infty.$$

Так как $b \to \infty$ при $x \to \infty$, то наклонных асимптот кривая не имеет.

На рис. 25 изображена простейшая кривая, удовлетворяющая проведенному исследованию.

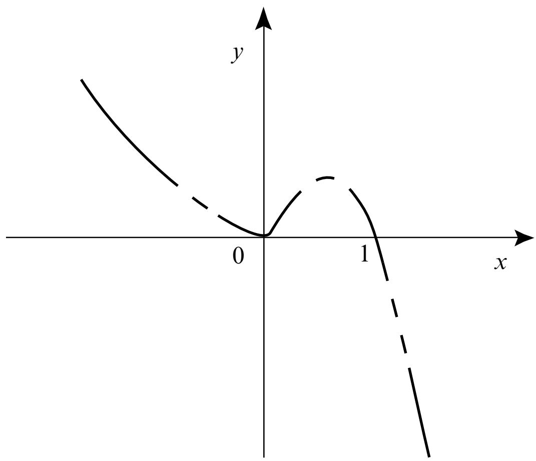


Рис. 25

4. Далее продолжим исследование по первой производной

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$y' = \infty \quad \text{при} \quad x_1 = 0;$$

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = \frac{8}{27};$$

$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{8}{27}$ — критические точки.

Чтобы выяснить, являются ли они точками экстремумов, используем первое достаточное условие экстремума

$$y'(-1) = -\frac{5}{3} < 0, \quad y'(0{,}1) = \frac{2 - 3\sqrt[3]{0{,}1}}{3\sqrt[3]{0{,}1}} \approx 0{,}4 > 0.$$

При прохождении через точку $x_1 = 0$, y' меняет знак с « –» на «+»; значит, точка $x = 0$ является точкой минимума функции, причем функция имеет в этой точке так называемый острый эстремум:

$$\min = y(0) = 0.$$

При прохождении через точку $x_2 = \frac{8}{27}$ мы аналогично можем проверить, что первая производная меняет знак с «+» на «–». Значит, точка $x_2 = \frac{8}{27}$ является точкой максимума:

$$\max = y\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}.$$

Составим таблицу изменения знаков первой производной.

x	$(-\infty;\, 0)$	$x_1 = 0$	$\left(0;\, \frac{8}{27}\right)$	$x = \frac{8}{27}$	$\left(\frac{8}{27};\, \infty\right)$
$y'(x)$	–	∞	+	0	–
$y(x)$	↘	$\min = 0$	↗	$\max = \frac{2}{27}$	↘

5. Найдем вторую производную.

$$y'' = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} < 0 \text{ всегда.}$$

Вторая производная всегда отрицательна, значит, точек перегиба нет, кривая всегда выпукла. Окончательный график функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x$ изображен на рис. 26.

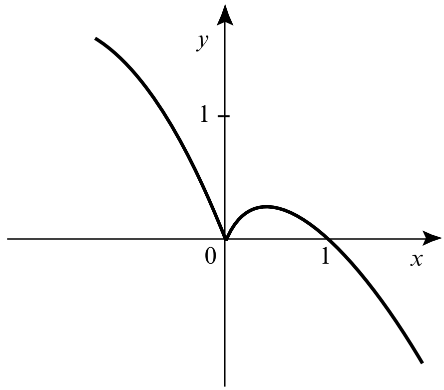


Рис. 26

Пример 2.32. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Областью определения функции являются интервалы $(0;\,1)\cup(1;\,\infty)$.

Функция $y=\dfrac{x}{\ln x}$ является функцией общего вида. При $0<x<1$ $y<0$, при $1<x<\infty$ $y>0$.

Вычислим предельные значения функции на границах области существования:

$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0;$$

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{+0}=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\infty.$$

В последнем случае применено правило Лопиталя.

Из найденных пределов ясно, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

Определим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x \cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [y - kx] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Наклонных асимптот функция не имеет, горизонтальных асимптот не имеет также. Примерный ход графика изображен на рис. 27.

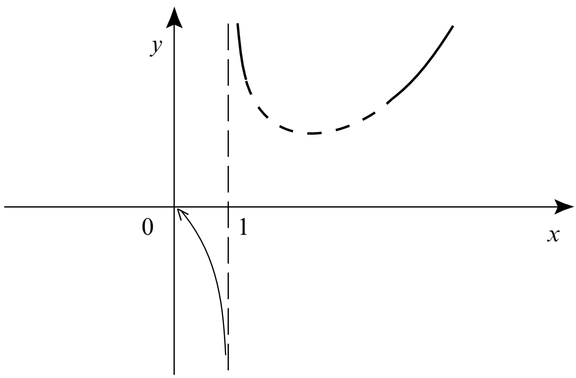


Рис. 27

Ищем экстремум функции. Ее производная:

$$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

$y' = 0$ при $x = e$ — критическая точка.

$y' = \infty$ при $x = 1$ — граничная точка, она не может быть экстремальной.

Итак, имеем одну критическую точку $x = e$.

$$y'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Чтобы проверить, является ли точка $x = e$ экстремальной, найдем знак y'' в точке $x = e$

$$y''(e) = \frac{2 - \ln e}{e \ln^3 e} = \frac{1}{e} > 0.$$

Значит, точка $x = e$ является точкой минимума функции. Здесь мы использовали второе достаточное условие экстремума.

Определим точки перегиба функции:

$y'' = 0$ при $x = e^2$ — критическая точка 2-го рода;

$y'' = \infty$ при $x = 1$, но эта точка не является критической точкой 2-го рода, так как она является граничной точкой.

При прохождении через $x = e^2$ y'' меняет знак с + на –, так как $y''(e) = \frac{1}{e} > 0$, а $y''(e^3) = -\frac{1}{e^3} < 0$; значит, значение $x = e^2$ является абсциссой точки перегиба, $y(e^2) = \frac{e^2}{2}$.

Составим таблицу изменения знаков первой и второй производных.

x	$(0; 1)$	$x = 1$	$(1; e)$	$x = e$	$(e; e^2)$	$x = e^2$	$(e^2; \infty)$
$y''(x)$	–	н.с.	+	+	+	0	–
$y'(x)$	–	н.с.	–	0	+		+
$y(x)$	↘ $\cap$	н.с.	↘ $\cup$	min = e	↗ $\cup$	т.п. $y = e^2/2$	↗ $\cap$

Окончательный график функции $y = \frac{x}{\ln x}$ изображен на рис. 28.

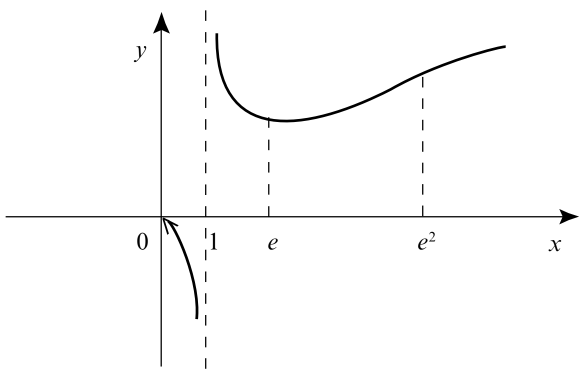


Рис. 28

Пример 2.33. Исследовать и построить график функции

$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Функция существует всюду, кроме $x=-1$, т.е. ее областью определения являются интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;\infty)$.

Найдем точки пересечения кривой с осями координат:

$$\frac{x^3}{2(x+1)^2}=0,\quad \text{при}\quad x=0.$$

Определим значения функции на границах области существования:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2\cdot 0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2\cdot 0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=+\infty.$$

Очевидно, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой функции. Определим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot 2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2x^2+4x+2}=-1.$$

Итак, прямая $y=\frac{1}{2}x-1$ является наклонной асимптотой кривой, причем точки кривой $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ будут неограниченно приближаться к прямой $y=\frac{1}{2}x-1$ как при $x\to-\infty$, так и при $x\to\infty$.

На рис. 29 построена простейшая кривая, удовлетворяющая проведенному исследованию.

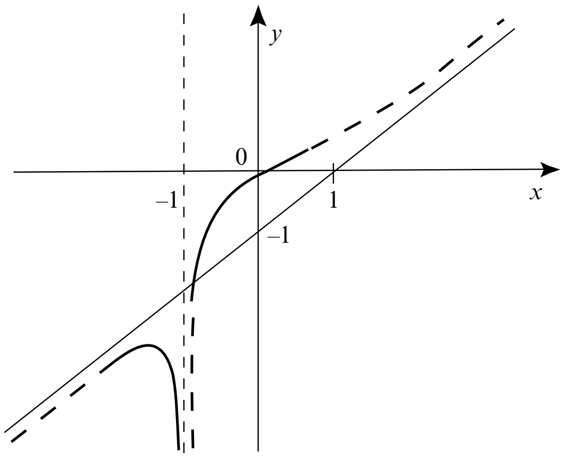


Рис. 29

Находим производные:

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4} = \frac{1}{2}\,\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = -3$ и $x_1 = 0$ — критические точки 1-го рода.
$y' = \infty$ при $x = -1$ — граничная точка.

Проводя обычное исследование, находим, что при $x = -3$ функция достигает максимума $y(-3) = -\frac{27}{8}$, а в точке $x = 0$ экстремума нет, так как первая производная при прохождении через $x = 0$ знак не меняет.

$$y'' = \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ — критическая точка 2-го рода.
$y'' = \infty$ при $x = -1$ — граничная точка.

Составим таблицу изменения знаков первой и второй производных.

x	$(-\infty; -3)$	$x = -3$	$(-3; -1)$	$x = -1$	$(-1; 0)$	$x = 0$	$(0; \infty)$
$y''(x)$	–	–	–	н.с.	–	0	+
$y'(x)$	+	0	–	н.с.	+	0	+
$y(x)$	$\nearrow\ \cap$	$\max = -\frac{27}{8}$	$\searrow\ \cap$	н.с.	$\nearrow\ \cap$	т.п. $y = 0$	$\searrow\ \cup$

Находим, что $x = 0$ является абсциссой точки перегиба функции, причем $y(0) = 0$.

График является выпуклым на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ и вогнутым на интервале $(0; \infty)$.

Окончательный график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ изображен на рис. 30.

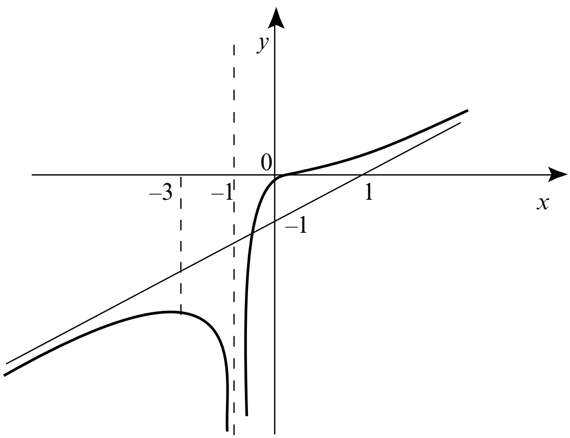


Рис. 30

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛАМ 1 И 2

Тема «Функции нескольких переменных» будет рассмотрена после определенного интеграла.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Действия с матрицами

1.1.1. Выполнить действия

а) $3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 15 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 8 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Сначала умножаем матрицу на число, а затем вычитаем из одной матрицы другую

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12-20 & 9-(-12) \\ 6-8 & 15-16 \\ 3-4 & -6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 21 \\ -2 & -1 \\ -1 & -14 \end{pmatrix};$$

б) нужно перемножить две матрицы: $C = AB$. Это возможно в случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Элемент C_{ik} матрицы C имеет вид:

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

т.е. элемент матрицы C, стоящей в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+0\cdot 0+1\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 3 \\ -2\cdot(-3)+3\cdot 0+2\cdot 0 & -2\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot(-1) & -2\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 3 \\ 4\cdot(-3)+(-1)\cdot 0+5\cdot 0 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 2+5\cdot(-1) & 4\cdot 0+(-1)\cdot 1+5\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.2. Вычисление определителей

1.2.1. Убедимся, что определитель Δ равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

а) по определению (одной из схем):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right. =$$

$\ominus$ $\oplus$

$$= 6 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + 2(-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-4) \cdot (-2) - 4 \cdot (-2) \cdot 3 =$$
$$= 36 - 16 + 8 - 4 - 48 + 24 = 68 - 68 = 0.$$

Справа от определителя приписываются два первых столбца, берутся со знаком «+» три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и двух диагоналях ей параллельной и со знаком минус три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и двух диагоналях ей параллельной;

б) разложением по строке.

Определитель Δ равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки на их алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента определителя a_{ij}, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \ \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь M_{ij} — минор элемента a_{ij}, т.е. определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся после вычеркивания из определителя n-го порядка i-й строки и j-го столбца.

Вычисляем определитель Δ разложением по элементам первой строки

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(2\cdot 3 - (-4)\cdot(-2)) + 4(-1)((-2)\cdot 3 - (-4)\cdot 1) + 2((-2)\cdot(-2) - 2\cdot 1) =$$

$$= 6\cdot(-2) - 4\cdot(-2) + 2\cdot 2 = 0.$$

1.3. Обратная матрица

1.3.1. Найти обратную матрицу к матрице A и проверить выполнение равенства $A \cdot A^{-1} = E$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Так как определитель Δ матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - (-2)\cdot 4 = 20 \neq 0,$$

то матрица A является невырожденной и для нее существует обратная матрица A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения для определителя Δ:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = 6;\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot a_{21} = 2;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot a_{12} = -4;$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot a_{11} = 2.$$

Составляем матрицу из этих алгебраических дополнений и транспонируя ее, получаем присоединенную матрицу (A^*):

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} & -\frac{4}{20} \\ \frac{2}{20} & \frac{2}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Проверяем правильность нахождения обратной матрицы:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 & 2 \cdot (-0{,}2) + 4 \cdot 0{,}1 \\ -2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}1 & -2 \cdot (-0{,}2) + 6 \cdot 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то обратная матрица найдена правильно;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Определяем

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \; A^* = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \; A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \frac{A^*}{1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Проверяем

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.4. Системы линейных уравнений

1.4.1. Записать систему в матричном виде $A\bar{x} = \bar{b}$:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 15 \\ -2x + 6y = 15 \end{cases}$$

и решить ее средствами матричного исчисления.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Решение этой системы через обратную матрицу A^{-1} имеет вид $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$.

В пункте 1.3.1: а) была найдена обратная матрица A^{-1}, тогда

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 15 + (-0{,}2) \cdot 15 \\ 0{,}1 \cdot 15 + 0{,}1 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда: $x = 1{,}5$; $y = 3$.

Можно сделать проверку, т.е. подставить найденные значения x и y в исходную систему уравнений.

1.4.2. Решить систему методом исключения переменных (методом Гаусса):

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 11, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 11, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$$

Выберем в качестве первого ведущего уравнения — первое уравнение системы и оно в дальнейшем остается без изменения, а в качестве первого ведущего неизвестного — x_1.

Исключаем неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений системы с помощью первого уравнения. Для этого из 1-го уравнения вычитаем второе, получим $x_2 + 2x_3 = 0$, затем 1-ое уравнение умножаем на 3, а 3-е уравнение — на 2 и вычитаем из одного другое, получим $2x_2 + x_3 = 3$.

Выписываем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Неизвестная x_1 исключена. Первый шаг закончен. Теперь второе уравнение берется за ведущее и оно в дальнейшем не изменяется, а за ведущую неизвестную принимается x_2. Исключаем из 3-го уравнения x_2, для этого 2-ое уравнение умножаем на 2 и вычитаем из него 3-е уравнение системы, получаем $3x_3 = -3$.

Получим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Обратным ходом получаем:

$$x_3 = -1,$$
$$x_2 = -2 \cdot x_3 = -2 \cdot (-1) = 2,$$
$$2x_1 = 11 - 2x_2 - x_3 = 11 - 2 \cdot 2 - (-1) = 8, \quad x_1 = 4.$$

Итак, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

1.4.3. Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 43, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -13, \\ 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 30. \end{cases}$$

1. С помощью теоремы Кронекера—Капелли установить совместность системы.

Выписываем матрицу системы A и расширенную матрицу $\overline{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & -3 \\ 5 & 12 & 7 & 4 & -8 \end{pmatrix}; \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 2 & -5 & 43 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & -3 & -13 \\ 5 & 12 & 7 & 4 & -8 & 30 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор 2-го порядка

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11 \neq 0.$$

Далее выпишем четыре минора 3-го порядка

$$d_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad d_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$d_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 12 & -8 \end{vmatrix} = 0; \quad d_3^4 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 43 \\ 3 & 5 & -13 \\ 5 & 12 & 30 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как миноры d_3^1, d_3^2 и d_3^3 равны нулю, то ранг системы равен двум, а так как минор $d_3^4 = 0$, то и ранг расширенной матрицы равен двум. Равенство рангов расширенной матрицы и матрицы системы на основании теоремы Кронекера—Капелли говорит о том, что система алгебраических уравнений совместна, т.е. имеет решение.

2. Найти общее решение системы в виде

$$x_1 = f(x_3, x_4, x_5),$$
$$x_2 = \varphi(x_3, x_4, x_5).$$

Так как число неизвестных пять, а ранг матрицы равен двум, то разность между ними, равная трем ($n - r = 5 - 2 = 3$), говорит о том, что три неизвестных будут свободными, пусть это будут x_3, x_4, x_5.

Берем первые два уравнения системы и записываем их относительно x_1 и x_2 (коэффициенты при этих неизвестных составляют минор 2-го порядка отличный от нуля), а неизвестные x_3, x_4, x_5 переносим в правую часть:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 43 - 5x_3 - 2x_4 + 5x_5, \\ 3x_1 + 5x_2 = -13 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2. Умножая первое уравнение на 5, а второе на 7 и вычитая одно из другого, найдем x_1 и подставляя его в 1-ое уравнение, после преобразований получим выражение для x_2:

$$x_1 = -\frac{306}{11} + x_3 - \frac{4}{11}x_4 - \frac{4}{11}x_5,$$
$$x_2 = \frac{155}{11} - x_3 - \frac{2}{11}x_4 + \frac{9}{11}x_5.$$

Это и будет общее решение исходной системы линейных уравнений.

3. Найти частное решение системы $\bar{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, положив $x_3 = 5$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$ и проверить систему.

Находим x_1 и x_2:

$$x_1 = -\frac{306}{11} + 5 - \frac{4}{11} \cdot 2 - \frac{4}{11} \cdot 3 = -\frac{271}{11},$$
$$x_2 = \frac{155}{11} - 5 - \frac{2}{11} \cdot 2 + \frac{9}{11} \cdot 3 = \frac{123}{11}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$\bar{a} = \left(-\frac{271}{11}; \frac{123}{11}; \ 5; \ 2; \ 3 \right).$$

Подставляем в исходную систему значения: $x_1 = -\frac{271}{11}$, $x_2 = \frac{123}{11}$, $x_3 = 5$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$:

$$2 \cdot \left(-\frac{271}{11} \right) + 7 \cdot \frac{123}{11} + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 43; \ 43 = 43;$$
$$3 \cdot \left(-\frac{271}{11} \right) + 5 \cdot \frac{123}{11} + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -13; \ -13 = -13;$$
$$5 \cdot \left(-\frac{271}{11} \right) + 12 \cdot \frac{123}{11} + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = 30; \ 30 = 30.$$

Выполнение тождества для всех уравнений системы говорит о том, что вектор $\bar{a} = \left(-\frac{271}{11}; \frac{123}{11}; \ 5; \ 2; \ 3 \right)$ является частным решением исходной системы уравнений.

1.5. Собственные числа и собственные векторы

1.5.1. Найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-\lambda & 2\\ 7 & -\lambda\end{pmatrix}$$

или

$$|A-\lambda E|=0,\ \begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 7 & -\lambda\end{vmatrix}=0,$$

отсюда $(5-\lambda)\cdot(-\lambda)-2\cdot 7=0$, или $\lambda^2-5\lambda-14=0$. Корни этого уравнения $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=7$ и являются собственными числами.

Для отыскания собственных векторов используем систему уравнений

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y=0\\ 7x-\lambda y=0.\end{cases}$$

Полагая $\lambda=\lambda_1=-2$, получаем систему уравнений для первого собственного вектора $\bar{u}(u_1,\ u_2)$:

$$\begin{cases}7u_1+2u_2=0\\ 7u_1+2u_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $7u_1=-2u_2$ и $u_1=-\frac{2}{7}u_2$.

Следовательно, первым собственным вектором, определяющим первое собственное направление, является

$$\bar{u}(u_1;\ u_2)=\left(-\frac{2}{7}u_2;\ u_2\right)=u_2\left(-\frac{2}{7};1\right)=\frac{1}{7}u_2(-2;\ 7).$$

Меняя u_2, будем получать различные векторы, лежащие на одной прямой (коллинеарные). Все они — собственные.

Полагая $\lambda=\lambda_2=7$, получаем систему уравнений для отыскания координат второго собственного вектора $\bar{v}(v_1;\ v_2)$:

$$\begin{cases}-2v_1+2v_2=0\\ \ \ 7v_1-7v_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $v_1=v_2$ — общее решение (v_2 — свободная, v_1 — базисная переменная).

Второй собственный вектор $\bar{v}(v_1;\ v_2)=(v_2;\ v_2)=v_2(1;1)$ определяет второе собственное направление.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Прямая линия на плоскости

2.1.1. На прямую l: $3x + 2y - 12 = 0$, которая способна отражать лучи, падает луч, заданный уравнением l_1: $3x + 4y - 18 = 0$. Составить уравнение отраженного луча.

Решение. Так как угол падения луча равен углу отражения луча, то $\angle\varphi_1 = \angle\varphi_2$, т.е. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$ (рис. 31).

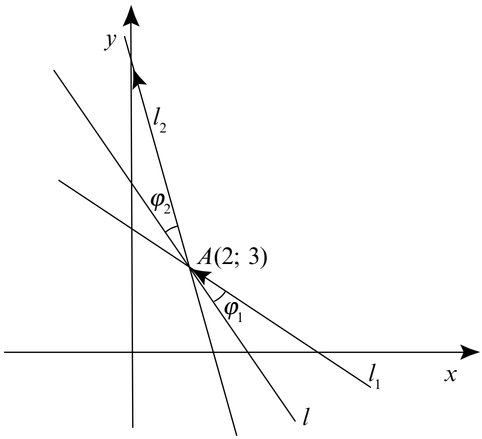


Рис. 31

Уравнение отраженного луча — прямой l_2 — ищем в виде:

$$y - y_A = k_2(x - x_A).$$

Для нахождения координат точки A решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0. \end{cases}$$

Вычитая, найдем: $-2y + 6 = 0$, $y = 3$ и $3x = 12 - 2y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$, $x = 2$, т.е. $x_A = 2$ и $y_A = 3$.

Найдем угловые коэффициенты прямых l и l_1:

$$l: 2y = -3x + 12, \quad y = -\frac{3}{2}x + 6, \quad K = -\frac{3}{2};$$

$$l_1: 4y = -3x + 18, \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}, \quad K_1 = -\frac{3}{4}.$$

Запишем тангенс угла между прямыми l и l_1:

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{K_1 - K}{1 + K_1 K_2} = \frac{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{6}{17}.$$

Для нахождения углового коэффициента прямой l_2 запишем тангенс угла между прямыми l и l_2 и учтем, что tg φ_1 = tg φ_2:

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{K - K_2}{1 + K K_2} \quad \text{или} \quad \frac{-\frac{3}{2} - K_2}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right) K_2} = \frac{6}{17},$$

далее

$$17\left(-\frac{3}{2} - K_2\right) = 6\left(1 - \frac{3}{2} K_2\right).$$

Отсюда $K_2 = -\frac{63}{16}$. Тогда искомое уравнение отраженного луча имеет вид:

$$y - 3 = -\frac{63}{16}(x - 2) \quad \text{или} \quad 63x + 16y - 174 = 0.$$

2.1.2. Дан треугольник ABC с вершинами $A(5; 6)$, $B(4; –5)$, $C(–4; 5)$ (рис. 32).

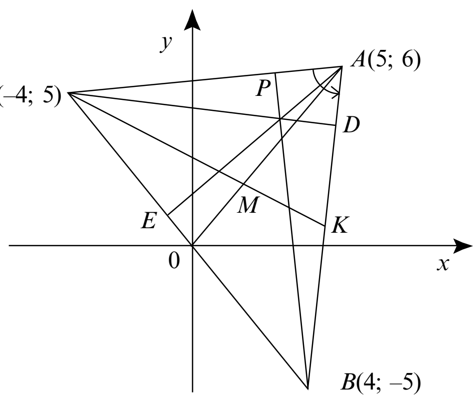


Рис. 32

Найдем уравнения всех сторон треугольника и их угловые коэффициенты.

Уравнение прямой AB:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A};\ \frac{y-6}{-5-6}=\frac{x-5}{4-5};\ \frac{y-6}{-11}=\frac{x-5}{-1},$$

отсюда $11\cdot x-y-49=0$ или $y=11x-49$ и угловой коэффициент прямой AB равен: $K_{AB}=11$.

Уравнение прямой AC:

$$\frac{y-y_A}{y_C-y_A}=\frac{x-x_A}{x_C-x_A};\ \frac{y-6}{5-6}=\frac{x-5}{-4-5};\ \frac{y-6}{-1}=\frac{x-5}{-9},$$

отсюда

$$x-9y+49=0 \text{ или } y=\frac{1}{9}x+\frac{49}{9} \text{ и } K_{AC}=\frac{1}{9}.$$

Уравнение прямой BC:

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{x-x_B}{x_C-x_B};\ \frac{y+5}{5+5}=\frac{x-4}{-4-4};\ \frac{y+5}{10}=\frac{x-5}{-8},$$

отсюда

$$5x+4y=0 \text{ или } y=-\frac{5}{4}x \text{ и } K_{BC}=-\frac{5}{4};$$

а) вычислим величину внутреннего угла A треугольника:

$$\mathrm{tg}A=\frac{K_{AB}-K_{AC}}{1+K_{AB}\cdot K_{AC}}=\frac{11-\frac{1}{9}}{1+11\cdot\frac{1}{9}}=\frac{98}{20}=4{,}9,$$

отсюда $\angle A=78°27'55''=1{,}37$ (с точностью до 0,01) радиан;

б) найдем точку M пересечения медиан.

Определяем координаты точек K и O, делящих стороны AB и BC попалам:

$$x_k=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2};\qquad y_k=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6-5}{2}=\frac{1}{2};$$
$$x_0=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{4-4}{2}=0;\qquad y_0=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-5+5}{2}=0.$$

Уравнение медианы CK:

$$\frac{y-y_C}{y_K-y_C}=\frac{x-x_C}{x_K-x_C};\quad \frac{y-5}{\frac{1}{2}-5}=\frac{x+4}{\frac{9}{2}+4},$$

отсюда

$$9x + 17y - 49 = 0.$$

Уравнение медианы AO:

$$\frac{y-y_0}{y_A-y_0}=\frac{x-x_0}{x_A-x_0};\ \frac{y-0}{6-0}=\frac{x-0}{5-0},$$

отсюда

$$6x - 5y = 0.$$

Решая систему уравнений, описывающих медианы CK и AO, найдем координаты точки M:

$$\begin{cases}9x+17y-49=0\\ 6x-5y\qquad\ \ =0\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 5\\ \cdot 17\end{matrix}\right. +$$

$$\overline{\quad 147x-245=0 \quad}$$

$x=\dfrac{245}{147}$ и $y=\dfrac{6}{5}x=2,$ т.е. $M\left(\dfrac{245}{147};2\right);$

в) находим точку P пересечения высот CD и AE.

Уравнение высоты CD ищем в виде: $y - y_C = K_{CD}(x - x_C)$ и так как прямая $CD \perp$ прямой AB, то

$$K_{CD}=-\frac{1}{K_{AB}}=-\frac{1}{11}.$$

Тогда

$$y-5=-\frac{1}{11}(x+4)\quad\text{или}\quad x + 11y - 51 = 0.$$

Уравнение высоты AE берем в виде: $y - y_A = K_{AE}(x - x_A)$ и так как прямая $AE \perp$ прямой BC, то

$$K_{AE}=-\frac{1}{K_{BC}}=-\frac{1}{-\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}.$$

Тогда

$$y-6=\frac{4}{5}(x-5)\quad\text{или}\quad 4x - 5y + 10 = 0.$$

Решая систему уравнений:

$$\frac{\begin{cases} x+11y-51=0 \\ 4x-5y+10=0 \end{cases}\left|\begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 11 \end{matrix}\right.+}{49x-145=0}.$$

Отсюда $x=\dfrac{145}{49}$ и $5y=4x+10=4\dfrac{145}{49}+10=\dfrac{1070}{49}$ или $y=\dfrac{214}{49}$,

т.е. $P\left(\dfrac{145}{49};\dfrac{214}{49}\right)$;

г) определяем длину высоты треугольника AE, опущенной из вершины A на сторону BC, для чего запишем нормальное уравнение прямой BC:

$$\frac{5x+4y}{\pm\sqrt{5^2+4^2}}=0 \text{ или } \frac{5x+4y}{\pm\sqrt{41}}=0.$$

Тогда длина высоты AE равна:

$$|AE|=\left|\frac{5\cdot x_A+4\cdot y_A}{\pm\sqrt{41}}\right|=\left|\frac{5\cdot 5+4\cdot 6}{\pm\sqrt{41}}\right|=\frac{49}{\sqrt{41}}=\frac{49\sqrt{41}}{41};$$

д) площадь треугольника найдем по формуле:

$$S=\pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\big((-25-24)+(20-20)+(-24-25)\big)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}(-49+0-49)=49 \text{ (кв. ед.)};$$

е) находим систему линейных неравенств, определяющих внутреннюю область треугольника ABC вместе с границами.

Имеем: $11x-y-49=0$ — уравнение AB,
$5x+4y=0$ — уравнение BC,
$x-9y+49=0$ — уравнение AC.

Берем любую точку, лежащую внутри треугольника ABC, например, точку (1; 1) и подставляем ее координаты в левую часть уравнений сторон: $11 \cdot 1 - 1 - 49 = -39 < 0$; $5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9 > 0$; $1 - 9 \cdot 1 + 49 = 41 > 0$, следовательно, система неравенств имеет вид:

$$\begin{cases} 11x - y - 49 \le 0, \\ 5x + 4y \ge 0, \\ x - 9y + 49 \ge 0. \end{cases}$$

2.2. Кривые второго порядка на плоскости

2.2.1. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $F(2;4)$ к расстоянию до прямой $l: x = -4$ равно 2. Привести уравнение линии к каноническому виду и определить вид этой кривой.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — текущая точка линии. Из точки M опускаем перпендикуляр на прямую $x = -4$, который пересекается с ней в точке $N(-4; y)$. По условию задачи: $\frac{|MF|}{|MN|} = 2$, или $|MF| = 2|MN|$.

Тогда

$$\sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2} = 2\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

или

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2}.$$

Возводя в квадрат, раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$3x^2 + 36x + 60 - (y-4)^2 = 0.$$

Коэффициент при x^2 делаем равным единице, для чего все уравнение делим на 3:

$$x^2 + 12x + 20 - \frac{1}{3}(y-4)^2 = 0.$$

Многочлен, зависящий от x, записываем как полный квадрат:

$x^2 + 12x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 36 - 36 = (x + 6)^2 - 36.$

Тогда уравнение примет вид:

$$(x+6)^2 - 36 + 20 - \frac{1}{3}(y-4)^2 = 0,$$

далее

$$(x+6)^2 - \frac{1}{3}(y-4)^2 = 16,$$

или, деля на 16, имеем:

$$\frac{(x+6)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{48} = 1$$

Вводя новую систему координат:

$$\begin{cases} X = x+6 \\ Y = y-4, \end{cases}$$

приведем уравнение линии к каноническому виду:

$$\frac{X^2}{4^2} - \frac{Y^2}{(4\sqrt{3})^2} = 1.$$

Это есть каноническое уравнение гиперболы.

Замечание. Если $\frac{m}{n} = 1,$ то придем к каноническому уравнению параболы $Y^2 = 2pX$, а если $\frac{m}{n} < 1,$ то получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

2.3. Плоскость и прямая в пространстве

2.3.1. Пирамида $SABC$ задана вершинами: S (2; 4; 6), A (3; –4; –2), B (–4; 3; –4), C (–4; –2; –6):

а) уравнение плоскости ABC ищем в виде:

$$E(x - x_A) + F(y - y_A) + G(z - z_A) = 0,$$

где вектор $\bar{n} = \{E, F, G\}$ — нормальный вектор к плоскости ABC. Его мы найдем из векторного произведения $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$. Прежде всего находим координаты векторов

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} =$$
$$= \{-4 - 3;\ 3 - (-4);\ -4 - (-2)\} = \{-7, 7, -2\}$$

и

$$\overline{AC} = \{-4 - 3;\ -2 + 4;\ -6 + 2\} = \{-7;\ 2;\ -4\}.$$

Тогда

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -7 & 7 & -2 \\ -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -24 \cdot \bar{i} - 14\bar{j} + 35 \cdot \bar{k}.$$

Следовательно, $\bar{n} = \{-24; -14; 35\}$. Подставляем в уравнение плоскости

$$-24(x - 3) + (-14)(y + 4) + 35(z + 2) = 0$$

или

$$24x + 14y - 35z - 86 = 0;$$

б) угол в радианах между ребром SC и гранью ABC найдем как угол между вектором $\overline{CS} = \{2 + 4;\ 4 + 2;\ 6 + 6\} = \{6;\ 6;\ 12\}$ и плоскостью ABC по формуле

$$\sin\Theta = \frac{\left|\overline{CS} \cdot \bar{n}\right|}{|\bar{n}| \cdot \left|\overline{CS}\right|} = \frac{(-24 \cdot 6 - 14 \cdot 6 + 35 \cdot 12)}{\sqrt{(-24)^2 + (-14)^2 + 35^2} \cdot \sqrt{6^2 + 6^2 + 12^2}} =$$
$$= \frac{192}{\sqrt{216} \cdot \sqrt{1997}} = 0{,}29238.$$

Отсюда $\Theta = 16°59'52'' = 0{,}297$ радиан (с точностью до 0,001);

в) площадь грани ABC найдем по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\,|\,\overline{n}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+(-14)^2+35^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1997}\quad(\text{кв. ед.})\,;$$

г) уравнение высоты SK, опущенной из точки S на грань ABC, ищем в виде:

$$\frac{x-x_s}{l}=\frac{y-y_s}{m}=\frac{z-z_s}{n},$$

где вектор $\overline{P}\{l;m;n\}$ имеет такие же координаты как и вектор $\overline{n}=\{-24;-14;35\}$, так как эти векторы коллинеарны.

Тогда:

$$\frac{x-2}{-24}=\frac{y-4}{-14}=\frac{z-6}{35}$$

есть уравнение высоты SK.

Для определения длины высоты SK запишем нормальное уравнение плоскости ABC

$$\frac{24\cdot x+14\cdot y-35\cdot z-86}{\sqrt{24^2+14^2+(-35)^2}}=0$$

или

$$\frac{24x+14\cdot y-35\cdot z-86}{\sqrt{1997}}=0.$$

Тогда длина высоты SK определяется как

$$|\,SK\,|=\left|\frac{24\cdot x_s+14\cdot y_s-35\cdot z_s-86}{\sqrt{1997}}\right|=\left|\frac{24\cdot 2+14\cdot 4-35\cdot 6-86}{\sqrt{1997}}\right|=$$

$$=\frac{192\cdot\sqrt{1997}}{1997};$$

д) объем пирамиды $SABC$ определяем с помощью смешанного произведения векторов:

$$V=\pm\frac{1}{6}\;\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AS}.$$

Найдем

$$\overline{AS} = \{2-3;\ 4+4;\ 6+2\} = \{-1;\ 8;\ 8\},$$

тогда

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -7 & 7 & -2 \\ -7 & 2 & -4 \\ -1 & 8 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} -7 & 7 \\ -7 & 2 \\ -1 & 8 \end{matrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{6}\big(-7\cdot 2\cdot 8 + 7\cdot(-4)\cdot(-1) + (-2)(-7)\cdot 8 - (-2)(2)(-1) - (-7)(-4)8 - 7\cdot(-7)\cdot 8\big) =$$

$$= \pm\frac{1}{6}(-112 + 28 + 112 - 4 - 224 + 392) = \pm\frac{1}{6}\cdot 192 = 32 \text{ (куб. ед.)}.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Построение графиков элементарных функций

3.1.1. С помощью операций смещения, растяжения и отражения графиков функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ построить графики функций:

а) $y = | x^2 - 2 \cdot 4x + 12 |$.

Под модулем выделим полный квадрат:

$$y = | (x-4)^2 - 4 |.$$

Строим график функции $y = x^2$, смещаем его на 4 ед. вправо по оси Ox — $y = (x-4)^2$, этот график смещаем на 4 ед. вниз — $y = (x-4)^2 - 4$ и ту часть графика, которая находится под осью Ox отображаем относительно оси Ox, получаем график функции $y = | (x-4)^2 - 4 |$ (рис. 33).

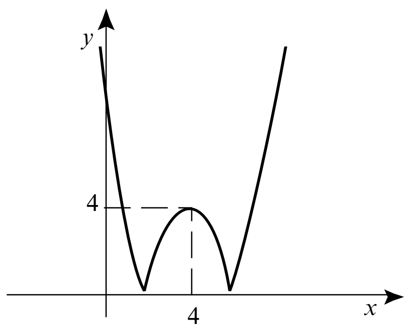


Рис. 33

б) $y=\frac{3x+1}{3-x}$ Выделяем целую часть $y=-3+\frac{10}{3-x}$ или $y+3=-\frac{10}{x-3}$. Строим кривую $y=\frac{10}{x}$, отображаем ее относительно оси Ox — $y=-\frac{10}{x}$, смещаем на 3 ед. вправо и на 3 ед. вниз, получаем график функции $y+3=-\frac{10}{x-3}$ или $y=\frac{3x+1}{3-x}$ (рис. 34).

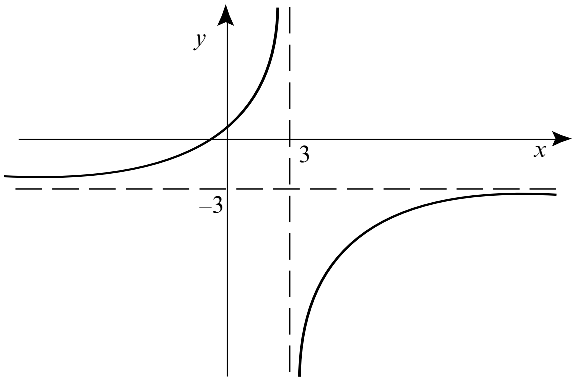


Рис. 34

3.2. Пределы, непрерывность и разрывы функций

3.2.1. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ (неопределенность $\infty-\infty$).

Решение. Умножим и разделим рассматриваемое выражение на $\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

(неопределенность $\frac{\pm\infty}{\infty}$; числитель и знаменатель разделим на x и при этом перед lim ставим знак «±»)

$$=\pm\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\pm\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\pm\frac{5}{2};$$

б)

$$\lim_{x\to2}\frac{8x^2-20x+8}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x+4}}=\left(\frac{8\cdot2^2-20\cdot2+8}{\sqrt{4\cdot2}-\sqrt{2\cdot2+4}}=\frac{0}{0}\text{ — неопределенность}\right).$$

Многочлен в числителе раскладываем на множители и числитель и знаменатель умножим на $\left(\sqrt{4x}+\sqrt{2x}+4\right)$:

$$\lim_{x\to2}\frac{8x^2-20x+8}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x+4}}=\lim_{x\to2}\frac{8(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{4x}+\sqrt{2x+4}\right)}{\left(\sqrt{4x}-\sqrt{2x+4}\right)\cdot\left(\sqrt{4x}+\sqrt{2x+4}\right)}=$$

$$=8\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4x-2x-4}\cdot\lim_{x\to2}\left(\sqrt{4x}+\sqrt{2x+4}\right)=$$

$$=8\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x-2)}\cdot\left(\sqrt{4\cdot2}+\sqrt{2\cdot2+4}\right)=4\cdot2\sqrt{8}\lim_{x\to2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=16\sqrt{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=24\sqrt{2};$$

в)

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos6x}{1-\cos4x}=\left(\frac{\cos0-\cos0}{1-\cos0}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\text{ — неопределенность}\right)=$$

(в числителе применяем формулу преобразования суммы в произведение, а в знаменателе — формулу половинного аргумента)

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin4x\cdot\sin(-2x)}{2\sin^2 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x\cdot\sin2x}{\sin^2 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=2.$$

Заменили числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\sin 4x\sim 4x$; $\sin 2x\sim 2x$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(2x+1)-2}{2x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)^{2x}\Rightarrow$

Обозначим теперь $\alpha=-\dfrac{2}{2x+1}$, откуда $2x=-\dfrac{2}{\alpha}-1$, причем при $x\to\infty$ имеем $\alpha\to 0$.

Тогда

$$\Rightarrow\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}-1}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}\cdot\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-1}=$$

$$=\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-2}\cdot(1+0)^{-1}=(e)^{-2}\cdot 1=e^{-2};$$

д)

$$C=\lim_{x\to\pi}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 4x}=\left((\cos 2\pi)^{\operatorname{ctg}^2 4\pi}=1^{\infty}\text{ — неопределенность}\right).$$

Полагаем $\cos 2x=1+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\pi}\alpha(x)=0$ и следовательно,

$$C=\lim_{x\to\pi}\left((1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{\alpha(x)\cdot\operatorname{ctg}^2 4x}=\lim_{x\to\pi}e^{\alpha(x)\cdot\operatorname{ctg}^2 4x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\alpha(x)\cdot\operatorname{ctg}^2 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 2x-1)\cdot\operatorname{ctg}^2 4x}$$

Вычисляем:

$$A=\lim_{x\to\pi}(\cos 2x-1)\cdot\operatorname{ctg}^2 4x=\lim_{x\to\pi}(-2\sin^2 x)\cdot\frac{\cos^2 4x}{\sin^2 4x}=$$

$$=-2\lim_{x\to\pi}\cos^2 4x\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 4x}=-2\cos^2 4\pi\cdot\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{\sin 4x}\right)^2.$$

Пусть $t=x-\pi$, отсюда $x=\pi+t$ и, если $x\to\pi$, то $t\to 0$. Тогда

$$A=-2\cdot 1\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(\pi+t)}{\sin 4(\pi+t)}\right)^2=-2\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\sin t}{\sin 4t}\right)^2=$$

$$=-2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{\sin 4t}\right)^2=-2\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\,\frac{4t}{\sin 4t}\cdot\frac{1}{4}\right)^2=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{16}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\sin\beta}\right)^2=-\frac{1}{8}(1\cdot 1)^2=-\frac{1}{8}.$$

Положили $\beta = 4t$ и, если $t \to 0$, то $\beta \to 4 \cdot 0 \to 0$. Имеем $C = e^{A} = e^{-\frac{1}{8}}$ окончательно $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 4x} = e^{-\frac{1}{8}}$.

3.2.2. Определить характер точек разрыва или установить непрерывность функции $f(x)$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Схематически изобразить поведение $f(x)$ в окрестностях этих точек:

а) $$f(x)=\begin{cases} 2(x+2) & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ (x-2)^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 4x & \text{при} \quad 2 < x < \infty. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывная, т.к.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} 2(x+2) = 4 = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} (x-2)^2 = 4.$$

В точке $x = 2$ функция $f(x)$ имеет разрыв 1-го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} (x-2)^2 = (2-0-2)^2 = 0$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} 4x =$ $= 4(2+0) = 8$, т.е. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ (рис. 35).

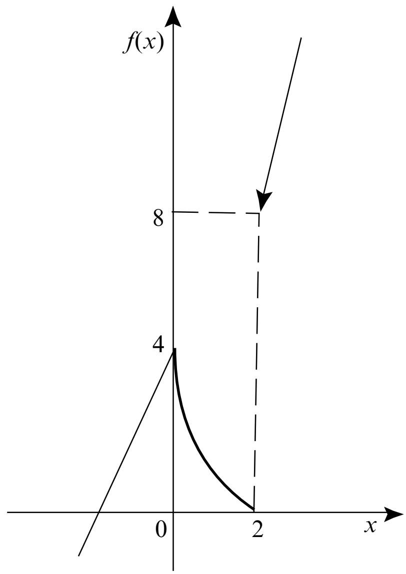


Рис. 35

б) $f(x)=\dfrac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}$.

$$\lim_{x\to -0}=\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{-0}}-2}=\frac{4}{2^{-\infty}-2}=\frac{4}{0-2}=-2,$$

$$\lim_{x\to +0}=\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{0}}-2}=\frac{4}{2^{\infty}-2}=\frac{4}{\infty}=0.$$

В точке $x = 0$ имеем разрыв 1-го рода.

$$\lim_{x\to 2-0}=\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{2-0}}-2}=\frac{4}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0}=\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{2+0}}-2}=\frac{4}{-0}=-\infty.$$

В точке $x = 2$ имеем разрыв 2-го рода.

Рассмотрим поведение функции на бесконечности

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{-\infty}}-2}=-4+0,\quad \lim_{x\to \infty}\frac{4}{2^{\frac{2}{x}}-2}=\frac{4}{2^{\frac{2}{\infty}}-2}=-4-0$$

(см. рис. 36).

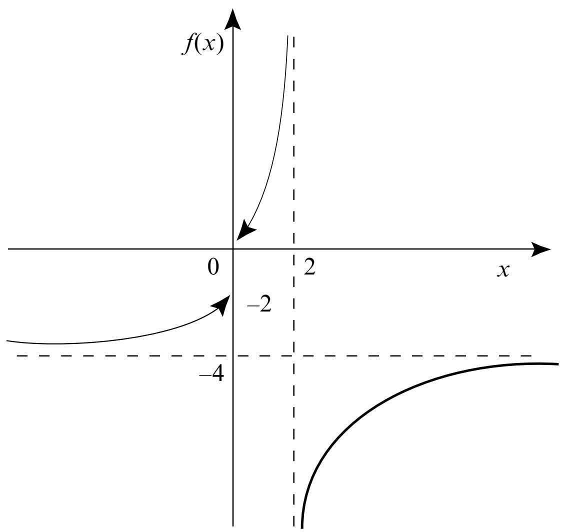


Рис. 36

3.3. Производные функций

3.3.1. Найти производные $y'(x)$ функций:

а) $y=\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^6$.

При нахождении производной y' применим теоремы о производной сложной функции, о производной степенной функции, о производной от алгебраической суммы функций, о выносе постоянной величины за знак производной: $(c\cdot f(x))'=\text{c}\cdot f'(x)$ и о производной от постоянной величины: $(c)'=0$:

$$y'=\left(\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^6\right)'=6\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^{6-1}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3+x^{\frac{1}{5}}+8\right)'=$$

$$=6\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^5\left(\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'+(8)'\right)=$$

$$=6\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1}+\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}+0\right)=$$

$$=6\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt[5]{x}+8\right)^5\left(x^2+\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right);$$

б) $y=3^{\frac{4}{x^2}}$. Применяя теоремы о производной от сложной функции и о производной от показательной функции, получим:

$$y'=\left(3^{\frac{4}{x^2}}\right)'=3^{\frac{4}{x^2}}\cdot\ln 3\cdot\left(\frac{4}{x^2}\right)'=3^{\frac{4}{x^2}}\cdot\ln 3\cdot 4(x^{-2})'=$$

$$=3^{\frac{4}{x^2}}\cdot\ln 3\cdot 4(-2x^{-3})=-\frac{8}{x^3}\cdot 3^{\frac{4}{x^2}}\cdot\ln 3.$$

в) $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{3x+1}{x^3+1}\right)^3}$. Используя свойства логарифмов, имеем:

$$y=\ln\left(\frac{3x+1}{x^3+1}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\ln\frac{3x+1}{x^3+1}=\frac{3}{4}(\ln(3x+1)-\ln(x^3+1)).$$

Находим производную:

$$y' = \left(\frac{3}{4}(\ln(3x+1) - \ln(x^3+1))\right)' = \frac{3}{4}\Big((\ln(3x+1))' - (\ln(x^3+1))'\Big) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{(3x+1)'}{3x+1} - \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{3x+1} - \frac{3x^2}{x^3+1}\right) = \frac{9}{4}\ \frac{1-x^2-2x^3}{(3x+1)(x^3+1)};$$

г) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. Рассматриваем производную от дроби:

$$y' = \left(\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)' = \frac{(\arcsin 3x)'\sqrt{1-9x^2} - \left(\sqrt{1-9x^2}\right)' \cdot \arcsin 3x}{\left(\sqrt{1-9x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot \sqrt{1-9x^2} - \dfrac{(1-9x^2)'}{2\sqrt{1-9x^2}} \cdot \arcsin 3x}{1-9x^2} =$$

$$= \frac{3 - \dfrac{-9 \cdot 2x}{2\sqrt{1-9x^2}} \cdot \arcsin 3x}{1-9x^2} = \frac{3\sqrt{1-9x^2} + 9x \cdot \arcsin 3x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}};$$

д) $y = (2x)^{\sin 3x}$. Здесь основание и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = \sin 3x \cdot \ln 2x$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией x, то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$. Следовательно,

$$(\ln y)' = (\sin 3x \cdot \ln 2x)', \quad \frac{y'}{y} = (\sin 3x)' \cdot \ln 2x + \sin 3x \cdot (\ln 2x)',$$

$$y' = y\left(\cos 3x \cdot (3x)' \cdot \ln 2x + \sin 3x \cdot \frac{1}{2x} \cdot (2x)'\right),$$

$$y' = y\left(\cos 3x \cdot 3 \cdot \ln 2x + \sin 3x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\right)$$

и окончательно

$$y' = (2x)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \cdot \ln 2x + \frac{1}{x}\sin 3x\right)$$

е) $e^{3x+2y} - \dfrac{2x}{3y} = 6.$ Функция задана неявно. Для того, чтобы найти y', продифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией от x, а затем разрешим уравнение относительно y' :

$$\left(e^{3x+2y} - \frac{2x}{3y}\right)' = 6', \quad (e^{3x+2y})' - \left(\frac{2}{3}\ \frac{x}{y}\right)' = 0,$$

$$e^{3x+2y} \cdot (3x+2y)' - \frac{2}{3}\ \frac{x' \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = 0.$$

Приводим к общему знаменателю:

$$3y^2 \cdot e^{3x + 2y}(3 + 2y') - 2(y - xy') = 0.$$

Отсюда находим

$$y' = \frac{y(2 - 9y \cdot e^{3x+2y})}{2(x + 3y^2 \cdot e^{3x+2y})};$$

ж) $\begin{cases} y = \ln 4t + 2t + 4, \\ x = 2t^2 + 2t + 8. \end{cases}$

Здесь функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями и тогда:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\ln 4t + 2t + 4)'}{(2t^2 + 2t + 8)'} = \frac{\frac{4}{4t} + 2}{2 \cdot 2t + 2} = \frac{1 + 2t}{t \cdot 2(2t+1)} = \frac{1}{2t}.$$

3.4. Приложения производной

3.4.1. Составить уравнения касательных к кривой $y = \dfrac{3x+2}{3x-2}$ параллельных прямой $3x + y + 3 = 0$.

Решение. Пусть M $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания касательной и кривой. Уравнение касательной выбираем в виде:

$$y - y_0 = k_{кас.} \cdot (x - x_0).$$

Так как касательная параллельна прямой $3x + y + 3 = 0$, угловой коэффициент которой $k_{пр.} = -3$, то $k_{кас.} = k_{пр.} = -3$.

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)' = \frac{(3x+2)'(3x-2)-(3x+2)(3x-2)'}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{3(3x-2-3x-2)}{(3\cdot x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}.$$

Так как производная y' в точке касания $(x_0; y_0)$ численно равна угловому коэффициенту касательной, то

$$y'(x_0) = \frac{-12}{(3x_0-2)^2} = K_{кас.} = -3,$$

отсюда

$$-12 = -3(3x_0 - 2)^2 \text{ и } 9x_0^2 - 12x_0 = 0.$$

Получаем

$$x_{01} = 0,\ x_{02} = \frac{4}{3},$$

тогда

$$y_{01} = \frac{3\cdot 0+2}{3\cdot 0-2} = -1 \text{ и } y_{02} = \frac{3\cdot\frac{4}{3}+2}{3\cdot\frac{4}{3}-2} = 3.$$

Имеем две точки касания $M_1\ (0; -1)$ и $M_2\left(\frac{4}{3}; 3\right)$, соответственно которым запишем два уравнения касательных: $y + 1 = -3(x - 0)$, отсюда

$$3x + y + 1 = 0 \text{ и } y - 3 = -3\left(x - \frac{4}{3}\right),$$

отсюда

$$3x + y - 7 = 0.$$

3.4.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$ на отрезке $[1; 11]$.

Решение. Данная функция непрерывна на $[1; 11]$. Находим $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 0$. Полагая $y' = 0$, имеем $x^2 + x - 6 = 0$, отсюда получаем две критические точки: $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на заданном отрезке достаточно вычислить ее значения на концах отрезка и в точке $x = 2$, так как точка $x = -3$ не принадлежит отрезку [1; 11]. Получим:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 36 + 1 = -30,$$
$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 1 = -43,$$
$$f(11) = 2 \cdot 11^3 + 3 \cdot 11^2 - 36 \cdot 11 + 1 = 2630.$$

Следовательно, наименьшее значение функции равное (–43), достигается в критической точке $x = 2$, а наибольшее равно 2630 — на правом конце отрезка, в точке $x = 11$.

3.4.3. Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции:

$$f(x) = \frac{(x-3)^3}{(x-3)^2 - 4}.$$

1. Область определения функции.

$$(x-3)^2 - 4 \neq 0;\ \ (x-3)^2 \neq 4;\ x - 3 \neq \pm 2;\ \ x \neq 5,\ \ x \neq 1.$$

Область определения — вся ось Ox за исключением точек $x = 5$ и $x = 1$.

2. Точки разрыва и интервалы непрерывности.

$$\lim_{x \to 5 \pm 0} \frac{(x-3)^3}{(x-3)^2 - 4} = \frac{(5 \pm 0 - 3)^3}{(5 \pm 0 - 3)^2 - 4} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{(x-3)^3}{(x-3)^2 - 4} = \frac{(1 \pm 0 - 3)^3}{(1 \pm 0 - 3)^2 - 4} = \pm\infty.$$

Точки разрыва $x = 5$ и $x = 1$. Интервалы непрерывности $(-\infty; 1)$, $(1; 5)$, $(5; \infty)$.

3. Слева от точек разрыва $x = 1$ и $x = 5$ функция $f(x) \to -\infty$, а справа — $f(x) \to +\infty$.

Вертикальные асимптоты: $x = 1$ и $x = 5$.

4. Точки пересечения с осями координат. С осью $Ox : y = 0$, тогда $\dfrac{(x-3)^3}{(x-3)^2 - 4} = 0$, отсюда $x = 3$.

С осью Oy : $x = 0$, тогда $f(x) = \dfrac{(0-3)^3}{(0-3)^2-4} = -\dfrac{27}{5}$.

Получим точки: $\left(0; -\dfrac{27}{5}\right)$ и (3; 0).

5. Симметрия графика.

$$x = 4, \text{ тогда } f(4) = \frac{(4-3)^3}{(4-3)^2-4} = -\frac{1}{3}.$$

$$x = -4, \text{ тогда } f(-4) = \frac{(-4-3)^3}{(-4-3)^2-4} = -\frac{343}{45}.$$

Так как $f(4) \neq f(-4)$, то функция общего вида.

6. Находим производную

$$f'(x) = \left(\frac{(x-3)^3}{(x-3)^2-4}\right)' =$$

$$= \frac{((x-3)^3)'((x-3)^2-4)-(x-3)^3((x-3)^2-4)'}{((x-3)^2-4)^2} =$$

$$= \frac{3(x-3)^2((x-3)^2-4)-(x-3)^3\cdot 2(x-3)}{((x-3)^2-4)^2} = \frac{(x-3)^2(x^2-6x-3)}{((x-3)^2-4)^2}.$$

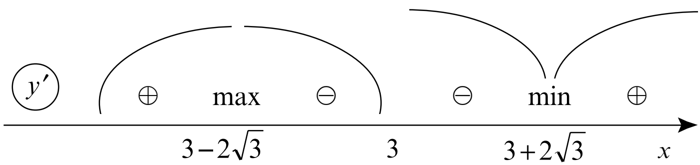
Находим критические точки:

$$y' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{(x-3)^2(x^2-6x-3)}{((x-3)^2-4)^2} = 0,$$

отсюда

$$x_1 = 3-2\sqrt{3},\ x_2 = 3+2\sqrt{3},\ x_3 = 3.$$

Исследуем знаки y' при переходе через критические точки.



$$y'(-1)=\frac{(-1-3)^2(1-6\cdot(-1)-3)}{((-1-3)^2-4)^2}>0;\quad y'(0)=\frac{(0-3)^2(0-6\cdot 0-3)}{((0-3)^2-4)^2}<0,$$

$$y'(4)=\frac{(4-3)^2(4^2-6\cdot 4-3)}{((4-3)^2-4)^2}<0;\quad y'(8)=\frac{(8-3)^2\cdot(8^2-6\cdot 8-3)}{((8-3)^2-4)^2}>0.$$

В интервалах $(-\infty;\,3-2\sqrt{3}]$ и $[+3+2\sqrt{3};\,\infty)$ функция возрастает, в интервале $[3-2\sqrt{3};\,1)\cup(1;\,5)\cup(5;\,3+2\sqrt{3}]$ функция убывает.

Так как при переходе через точку $x=3-2\sqrt{3}$ производная меняет знак с «+» на «–», то это точка max. Точка $x=3+2\sqrt{3}$ будет точкой min, так как при переходе через нее производная меняет знак с «–» на «+». Найдем:

$$y_{\max}(3-2\sqrt{3})=\frac{(3-2\sqrt{3}-3)^3}{(3-2\sqrt{3}-3)^2-4}=-3\sqrt{3},$$

$$y_{\min}(3+2\sqrt{3})=\frac{(3+2\sqrt{3}-3)^3}{(3-2\sqrt{3}-3)^2-4}=3\sqrt{3}.$$

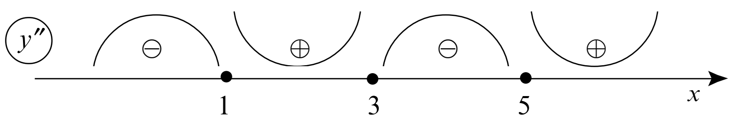
7. Для отыскания интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{(x-3)^2(x^2-6x-3)}{((x-3)^2-4)^2}\right)'=\frac{(2(x-3)(x^2-6x-3)+(x-3)^2(2x-6))}{((x-3)^2}\to$$

$$\to\frac{((x-3)^2-4)^2-(x-3)^2(x^2-6x-3)\cdot 2((x-3)^2-4)\cdot 2(x-3)}{-4)^4}=$$

$$=\frac{8(x-3)\cdot((x-3)^2-4)(x^2-6x+21)}{((x-3)^2-4)^4}.$$

Из условия $y''=0$ имеем $x-3=0$ или $x=3$. Условию $y''=\infty$ соответствует $x=1$ и $x=5$ (точки разрыва функции). Наносим эти три точки на числовую ось и исследуем знак второй производной на каждом из интервалов:



В интервалах (–∞; 1) и [3; 5) график функции — выпуклый, а в интервалах (1; 3] и (5; ∞) — вогнутый. В точке $x = 3$ график функции меняет направление выпуклости и так как $f(3) = 0$, то точка (3; 0) есть точка перегиба.

8. Наклонную асимптоту ищем в виде:

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^3}{((x-3)^2-4)\cdot x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^3}{\left(\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^2-\dfrac{4}{x^2}\right)\dfrac{x}{x}} = \frac{(1-0)^3}{((1-0)^2-0)} = 1$$

и

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)^3}{(x-3)^2-4}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+22x-27}{x^2-6x+5} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{22}{x}-\dfrac{27}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} = -3.$$

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид: $y = x - 3$.

9. Строим график функции (рис. 37).

Замечание. Вводя новую переменную $t = x - 3$, можно рассматривать функцию $y = \dfrac{t^3}{t^2-4}$, исследовать и построить ее график, а затем перенести ось $Of(x)$ на 3 ед. влево и вместо оси Ot написать ось Ox.

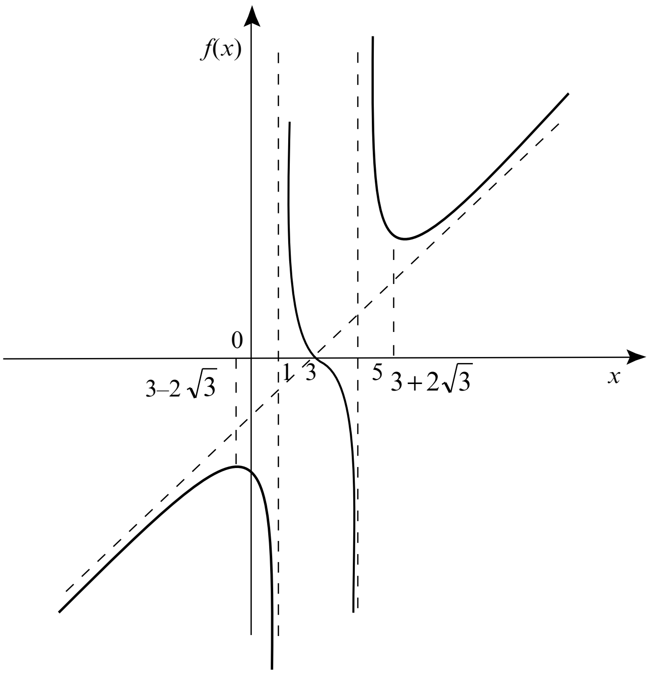


Рис. 37

3.5. Приближенное решение алгебраических уравнений

3.5.1. Отделить положительный корень уравнения $4x - \cos 2x = 0$ и решить его приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

а) методом деления отрезка попалам;

б) методом Ньютона (метод касательных).

Примечание. Можно считать, что точность ε достигнута, если разность между соседними приближениями x_{k+1} и x_k удовлетворяет неравенству $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

а) Пусть дано уравнение

$$f(x) = 4x - \cos 2x = 0,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ (функция $f(x)$ изменяется от 1 до 0) и $f(0)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (-1)\cdot\pi = -\pi < 0.$

Делим $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ пополам и выбираем ту из половин $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$ или $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки и, так как $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right) = (-1)\cdot 0{,}864 < 0$, то выбираем $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$ и т.д.

Последовательно имеем:

$$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]: f(0) = 4\cdot 0 - \cos 0 = -1;\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cdot\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\left[0; \frac{\pi}{8}\right]: f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 4\cdot\frac{\pi}{16} - \cos\frac{\pi}{8} = -0{,}138;$$

$$\left[\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8}\right]: f\left(\frac{3\pi}{32}\right) = 4\cdot\frac{3\pi}{32} - \cos\frac{3\pi}{16} = 0{,}337;$$

$$\left[\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{32}\right]: f\left(\frac{5\pi}{64}\right) = 4\cdot\frac{5\pi}{64} - \cos\frac{5\pi}{32} = 0{,}0998;$$

$$\left[\frac{\pi}{16}; \frac{5\pi}{64}\right]: f\left(\frac{9\pi}{128}\right) = 4\cdot\frac{9\pi}{128} - \cos\frac{9\pi}{64} = -0{,}0104;$$

$$\left[\frac{9\pi}{128}; \frac{5\pi}{64}\right]: f\left(\frac{19\pi}{256}\right) = 4\cdot\frac{19\pi}{256} - \cos\frac{19\pi}{128} = 0{,}0395;$$

$$\left[\frac{9\pi}{128}; \frac{19\pi}{256}\right]: f\left(\frac{37\pi}{512}\right) = 4\cdot\frac{37\pi}{512} - \cos\frac{37\pi}{256} = 0{,}0094.$$

Так как $\left|\frac{37\pi}{512} - \frac{19\pi}{256}\right| = 0{,}0061 < \varepsilon = 0{,}01$, то можно принять $x = \frac{37\pi}{512} = 0{,}227.$

б) Отделяем положительный корень уравнения

$$f(x) = 4x - \cos 2x = 0$$

методом Ньютона.

Учитывая предыдущее решение, заключаем, что искомый корень находится на $\left[\frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{8}\right]$, имеем:

$$f'(x) = 4 + 2\sin 2x$$

$$f''(x) = 4\cos 2x.$$

Отсюда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ при $\frac{\pi}{16} \le x \le \frac{\pi}{8}$. Так как должно быть $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = \frac{\pi}{8}$, ибо $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{4} = 0{,}864 > 0$. Вычисление производим по следующей схеме:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	$\frac{\pi}{8} = 0{,}393$	0,864	5,414	–0,159
1	0,234	0,044	4,902	–0,009
2	0,225	–0,0004	4,870	–0,00008

Находим $f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 + 2\sin 0{,}786 = 5{,}414$, затем h_0.

Вычисляем

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}393 - 0{,}159,$$

$$f(x_1) = f(0{,}234) = 4 \cdot 0{,}234 - \cos 0{,}468 = 0{,}044,$$

затем $f'(x_1)$ и h_1. Далее определяем

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}225,$$

$f(x_2)$ и $f'(x_2)$. Так как $|x_2 - x_1| = |0{,}225 - 0{,}234| = 0{,}009 < \varepsilon = 0{,}01$, то за положительный корень принимаем 0,225.

Раздел 3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Неопределенный интеграл

3.1.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении по заданной функции $F(x)$ находят ее производную $f(x) = F'(x)$. На практике часто приходится решать обратную задачу: требуется восстановить функцию $F(x)$, зная ее производную $f(x)$. Функцию $F(x)$ в этом случае называют первообразной для $f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если производная $F(x)$ равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. Пусть имеем функцию $f(x) = 2x$. Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для $f(x)$, т.к. $(x^2)' = 2x$. Но функция $F(x) = x^2 + 1$ тоже является первообразной функции $f(x)$, так как $(x^2 + 1)' = 2x$, и вообще — любая функция $F(x) = x^2 + C$ (где C — произвольная постоянная) есть первообразная для $f(x)$. Таким образом, данная функция имеет множество первообразных, причем можно показать, что любые две из них отличаются друг от друга на постоянное число.

Теорема 1 (о двух первообразных). Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Из этой теоремы следует, что если найдена какая-либо первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$ на некотором промежутке (конечном или бесконечном), то любая другая первообразная этой функции может быть найдена по формуле

$$F(x) = F(x) + C,$$

где $C = \text{const}$.

Определение 2. Множество первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению имеем:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная; $C = \text{const}$; x — независимая переменная интегрирования; $f(x)$ — подинтегральная функция; $f(x)dx$ — подинтегральное выражение; $\int$ — знак интеграла.

Операция нахождения первообразных функции называется ее интегрированием.

Геометрический смысл неопределенного интеграла. График первообразной $F(x)$ называют интегральной кривой. В системе координат $x0y$ графики всех первообразных от данной функции представляют семейство кривых, зависящих от величины постоянной C и получаемых одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси $0y$. Для примера, рассмотренного выше, имеем:

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Семейство первообразных ($x^2 + C$) геометрически интерпретируется совокупностью парабол.

Если из семейства первообразных нужно найти одну, то задают дополнительные условия, позволяющие определить постоянную C. Обычно с этой целью задают начальные условия: при значении аргумента $x = x_0$ функция имеет значение $F(x_0) = y_0$.

Пример. Требуется найти ту из первообразных функции $y = 2x$, которая принимает значение 3 при $x_0 = 1$.

Решение. $\int 2xdx = x^2 + C;\ 1^2 + C = 3;\ C = 2.$

Искомая первообразная: $F(x) = x^2 + 2$.

Теорема 2 (о существовании неопределенного интеграла).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для этой функции существует неопределенный интеграл на этом же отрезке.

3.1.2. Таблица основных интегралов

Рассмотрим свойства неопределенных интегралов.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$
3. $\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx.$
5. $\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$

В интегральном исчислении нет общего приема нахождения неопределенного интеграла. Существует несколько методов, которые дают возможность свести заданный интеграл к так называемому табличному. Прием, когда заданный интеграл можно сразу вычислить, используя его свойства и таблицу основных интегралов, называют непосредственным интегрированием.

Таблицы основных интегралов приведены в соответствующих разделах учебников, их необходимо выучить наизусть.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$ где $C = \text{const}.$
2. $\int e^x dx = e^x + C,\ \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ \ a \neq 1.$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$

   $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C,$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Необходимо обратить внимание на тесную связь этой таблицы с таблицей производных (задача нахождения неопределенного интеграла является обратной по отношению к задаче нахождения производной). Процесс интегрирования (нахождения неопределенного интеграла) по сравнению с дифференцированием (нахождением производной) может представлять значительные трудности. При дифференцировании задача сводится к тому, чтобы в таблице производных найти подходящую формулу, исходя из которой с помощью правил дифференцирования вычисляется искомая производная заданной функции. При интегрировании же нет какого-либо общего приема вычисления неопределенных интегралов. Имеется лишь ряд методов, позволяющих свести данный интеграл к табличным. Поэтому для каждого данного интеграла нужно суметь найти подходящий метод, с помощью которого преобразовать данный интеграл к табличному виду, а затем найти его по соответствующей формуле таблицы интегралов. Рассмотрим простейшие методы нахождения неопределенных интегралов.

3.1.3. Интегрирование методом замены переменной

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx,$ не являющийся табличным. Введем вместо x новую переменную t, связанную с x зависимостью $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция, для которой существует обратная функция. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и будет иметь место формула:

$$\int f(x)dx = \int [\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) называют формулой замены переменной.

Существует другой способ замены переменной интегрирования.

Если под знаком интеграла стоит сложная функция, умноженная на производную, т.е. $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$ то удобно сделать замену $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$, и тогда будем иметь:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du. \tag{3.2}$$

Отметим, что формулы (3.1) и (3.2) различаются только обозначениями переменных интегрирования.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx.$

Сделаем замену переменной $\operatorname{tg} x = t$, тогда $dt = (\operatorname{tg} x)' \cdot dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}.$

Получим табличный интеграл $\int t^3 dt = \frac{1}{4} \cdot t^4 + C,$ где C — произвольная постоянная. Производя обратную замену переменной, получим:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C.$$

Проверка. $\left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg}^4 x + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4\operatorname{tg}^3 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$ — подинтегральная функция.

Пример 3.2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$

Введем новую переменную интегрирования $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$ и $dx = 2tdt$. Используя формулу (3.1), будем иметь:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{t}{1+t^2}2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right] =$$
$$= 2(t - \operatorname{arctg} t + C) = 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\right)$$

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^4}$. Введем новую переменную интегрирования $u = x^2$. Тогда $du = 2xdx$, и данный интеграл будет иметь вид табличного:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u + C.$$

Возвращаясь к старой переменной интегрирования, имеем:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Пример 3.4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

и проверить результат дифференцированием.

Решение. Данный интеграл разложим на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$$

Для вычисления первого из этих интегралов воспользуемся тем, что

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = -\frac{1}{2}d(3-x^2),$$

(и тем самым, множитель x «подведем под знак дифференциала»), и сделаем замену переменной:

$$t = 3 - x^2.$$

Получаем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(3-x^2)}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Полученный интеграл является табличным: $\int t^{\alpha}dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Применяя эту формулу при $\alpha = -\frac{1}{2}$, имеем: $-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\sqrt{t} + C$.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}} = -\sqrt{3-x^2} + C.$$

Аналогично вычисляем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\left(arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}} \right) = arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-x^2}} = -\sqrt{3-x^2} + arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Проверка. Убедимся, что производная от полученного выражения совпадает с подинтегральной функцией. Применяя таблицу производных и правило дифференцирования сложных функций, находим:

$$\left(-\sqrt{3-x}\right)' = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}(3-x^2)' = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}};$$

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}.$$

Складывая эти два выражения, получаем подинтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено правильно.

3.1.4. Метод интегрирования по частям

Применение этого метода основывается на формуле:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3.3}$$

Ясно, что эту формулу имеет смысл применять лишь тогда, когда интеграл $\int v du$ оказывается более удобным для интегрирования (возможно даже, табличным), чем исходный интеграл $\int u dv$. Возникает вопрос: как представить подходящим образом подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде $u(x)dv(x)$. Общего правила для этого нет. Однако можно пользоваться следующими частными указаниями:

1. Если подинтегральное выражение содержит произведение показательной (e^{ax}) или тригонометрической функции ($\sin ax$, $\cos ax$) на многочлен, то за множитель $u(x)$ следует принять многочлен.

2. Если подинтегральное выражение содержит произведение логарифмической ($\ln ax$) или обратной тригонометрической функции ($\arcsin ax$, $\arccos ax$ и т.д.) на многочлен, то за множитель $u(x)$ следует принять логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

Пример 3.5. $\int x \cdot \ln^2 x \cdot dx$. Применим формулу интегрирования по частям $\int u \cdot dv = uv - \int u \cdot du$. Положим $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$, тогда $du = \frac{2\ln x}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.

По формуле получим:

$$\int x\ln^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\ln x}{x} = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x \cdot \ln x\, dx.$$

Снова применим формулу интегрирования по частям, положив $u = \ln x$, $dv = xdx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Тогда

$$\int x\ln^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Итак, $\int x\ln^2 x\, dx = \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C.$

Пример 3.6. Найти интеграл $\int x^2e^{2x}dx.$

Полагаем $u = x^2$. Оставшееся под интегралом выражение обозначаем через dv и преобразуем его с помощью приема «подведения функции под знак дифференциала»:

$$dv = e^{2x}dx = d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right).$$

Для применения формулы интегрирования во частям вычислим du и v:

$$du = d(x^2) = 2xdx, \;\; v = \int dv = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Согласно формуле интегрирования по частям, имеем:

$$\int x^2e^{2x}dx = x^2\,\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 2xdx.$$

Итак, исходный интеграл свелся к вычислению интеграла $\int e^{2x}xdx.$

К нему вновь применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int xe^{2x}dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\,dx.$$

Итак, получили интеграл табличного вида:

$$\int\frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Суммируя проведенные вычисления, имеем окончательно:

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Пример 3.7. Найти интеграл $\int \ln^2 x\,dx$.

Принимаем $u = \ln^2 x$ и $dv = dx$, тогда $du = 2\ln x\frac{1}{x}dx$, а $v = \int dx = x$ и, применяя формулу (3.3), имеем:

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\cdot\frac{2}{x}\ln x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx.$$

Интеграл $\int \ln x\,dx$ находим по частям, принимая $u = \ln x$ и $dv = dx$. Имея в виду, что $du = \dfrac{dx}{x}$ и $v = x$, используя второй раз формулу (3.3.), получим:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C_1 = x(\ln x - 1) + C_1,$$

а искомый интеграл будет иметь следующий вид:

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C.$$

3.1.5. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) называется отношение двух многочленов. Если степень многочлена, стоящего в числителе дроби, не меньше, чем степень многочлена в знаменателе, то в этой дроби следует выделить целую часть, т.е. представить ее в виде:

$$R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $R(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, причем степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$. Рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, обладающая этим свойством, называется правильной. Для интегрирования такой дроби ее необходимо разложить в сумму простейших дробей, которые легко интегрируются:

$$\frac{A}{x-a}\left(\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C\right),$$

$$\frac{B}{(x-b)^k}\left(\int \frac{B}{(x-b)^k}dx = -\frac{B}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-b)^{k-1}} + C\right),$$

$$\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k},\ p^2 - 4q < 0,$$

т.е. этот квадратный трехчлен не имеет действительных корней (интегрирование простейших дробей последнего типа будет показано ниже на примере). Остановимся подробнее на методике разложения правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей. Это выполняется по следующей схеме:

1. Сначала знаменатель дроби $Q(x)$ необходимо разложить на множители вида: $x - a$, $(x - b)^k$, $(x^2 + px + q)^k$.

При этом часто используется теорема Виета: если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1, x_2, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. Далее следует записать разложение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей, оставляя неопределенными коэффициентами A, B, C, D и т.д. При этом каждому множителю вида $(x - a)$ соответствует дробь $\frac{A}{x-a}$, множителю вида $(x - b)^k$ соответствует сумма дробей:

$$\frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{C}{(x-b)^k},$$

а множителю вида $x^2 + px + q$, если он не имеет действительных корней ($p^2 - 4q < 0$), соответствует дробь вида:

$$\frac{Dx+E}{x^2+px+q}.$$

3. Для определения коэффициентов A, B, C, D, E в этом разложении следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x у многочлена $P(x)$ и многочлена, который получается в числителе после приведения записанной суммы простейших дробей к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также находить эти коэффициенты путем сравнения значений указанных многочленов при конкретных значениях x (в первую очередь, при x, совпадающих с корнями знаменателя $Q(x)$).

Пример 3.8. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^2+4x+8}$. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому выделим сначала целую часть дроби, поделив с остатком числитель на знаменатель

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 & x^2+4x+8 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+4x^2+8x} & \quad x-4 \text{ (целая часть)} \\
-4x^2-8x & \\
\underline{-4x^2-16x-32} & \\
8x+32 & \text{(остаток).}
\end{array}
$$

Таким образом

$$\frac{x^3}{x^2+4x+8}=x-4+\frac{8x+32}{x^2+4x+8}$$

и

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+4x+8}=\int xdx-4\int dx+8\int\frac{(x+4)dx}{x^2+4x+8}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+8\int\frac{x+4}{x^2+4x+8}dx.$$

Для нахождения оставшегося интеграла выделим в числителе дифференциал знаменателя $d(x^2+4x+8)=(2x+4)dx$.

Затем разобьем интеграл на два слагаемых и в последнем выделим полный квадрат квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. Тем самым получим:

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+4x+8}=\frac{x^2}{2}-4x+4\int\frac{(2x+4)+4}{x^2+4x+8}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+4\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8}+4\int\frac{4dx}{(x^2+4x+4)+4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+4\int\frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8}+16\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x+4\ln(x^2+4x+8)+8\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Пример 3.9. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

1. Подинтегральная функция — правильная рациональная дробь.

2. Разложим знаменатель правильной рациональной дроби на простейшие действительные множители:

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = x^3 + 4x^2 + x^2 + 4x + 4x + 4 =$$
$$= x(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 4x + 4) = (x + 2)^2(x + 1).$$

3. Разложим правильную рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A_0}{(x+2)^2} + \frac{A_1}{x+2} + \frac{B}{x+1}.$$

Так как в знаменателе правильной дроби есть кратный линейный множитель, то в разложении появилась простейшая дробь II типа.

4. Приведем к общему знаменателю все дроби и затем отбросим его:

$$x^2 = A_0(x + 1) + A_1(x + 1)(x + 2) + B(x + 2)^2 =$$
$$= A_0x + A_0 + A_1x^2 + 3A_1x + 2A_1 + Bx^2 + 4Bx + 4B.$$

Таким образом, имеем

$$x^2 = (A_1 + B)x^2 + (A_0 + 3A_1 + 4B)x + (A_0 + 2A_1 + 4B).$$

5. Составляем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 1 = A_1 + B \\ x^1 & 0 = A_0 + 3A_1 + 4B \\ \text{св. чл.} & 0 = A_0 + 2A_1 + 4B \end{array}$$

6. Решая систему уравнений, получим $A_0 = -4$, $A_1 = 0$ и $B = 1$, а исходная подинтегральная функция разложится на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2} + \frac{0}{x+2} + \frac{1}{x+1}.$$

7. Вычисляем заданный интеграл:

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}=\int\frac{x^2dx}{(x+1)(x+2)^2}=-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-4\int(x+2)^{-2}d(x+2)+\ln|x+1|=\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C.$$

Пример 3.10. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{2x+3}=(2x+3)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(2x+3)^2}=(2x+3)^{\frac{2}{3}}$. Наименьшим общим кратным знаменателем дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ является 6. Поэтому, если применить подстановку $2x+3=t^6$, то будет иметь:

$$t=(2x+3)^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{2x+3}=(t^6)^{\frac{1}{2}}=t^3,\ \sqrt[3]{(2x+3)^2}=(t^6)^{\frac{2}{3}}=t^4,$$

т.е. иррациональности в подинтегральном выражении исчезают. Так как: $x=\frac{1}{2}(t^6-3)$, то $dx=\frac{1}{2}6t^5dt=3t^5dt.$

Подставляя найденные выражения в искомый интеграл, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}=\int\frac{3t^5dt}{t^3+t^4}=3\int\frac{t^2dt}{1+t}.$$

Таким образом, данный интеграл сведен к интегралу от рациональной функции. Для его нахождения выделим целую часть подинтегральной функции:

$$\frac{t^2}{1+t}=\frac{t^2-1+1}{1+t}=\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

Интегрируя каждое из слагаемых, находим:

$$\int\frac{t^2dt}{1+t}=\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|+C.$$

Возвратимся к старой переменной. Так как $t=\sqrt[6]{2x+3}$, то получаем следующий окончательный результат:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{(2x+3)^2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+3}-3\sqrt[6]{2x+3}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+3}+1\right|+C.$$

Пример 3.11. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos 2x - 1} dx.$

Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то подинтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$. Заметим, что при замене $\sin x$ на $-\sin x$ она меняет знак, т.е. является нечетной относительно $\sin x$. Применяем подстановку $\cos x = t$. Тогда

$$dx = -\frac{dt}{\sin x},\ \sin^2 x = 1 - t^2,\ \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos 2x - 1} dx =$$
$$= \frac{\sin x(\sin^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 2}\left(-\frac{dt}{\sin x}\right) = \frac{t^2}{2t^2 - 2} dt.$$

Итак, подинтегральное выражение преобразовано к дробно-рациональному виду. Выделяем целую часть и разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{2t^2-2} = \frac{t^2-1+1}{2(t^2-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

Отсюда

$$\int \frac{t^2 dt}{2t^2 - 2} = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x $\cos x = t$, находим:

$$\int \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos 2x - 1} dx = \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

3.2. Определенный интеграл

3.2.1. Основные понятия и свойства

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n частичных отрезков

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

В каждом из них выберем по одной произвольной точке

$$\xi_1 \in [a, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1}, b].$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ по $[a, b]$ называется величина

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|x_i - x_{i-1}|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{3.4}$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

3. $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

4. Если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

3.2.2. Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл связан с неопределенным интегралом по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b, \tag{3.5}$$

где $F(x)$ — произвольная первообразная функция $f\ (x)$.

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3.6}$$

Формула (3.5) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Пример 3.12.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Замена переменной в определенном интеграле отличается от замены переменной в неопределенном интеграле тем, что:

1) необходимо изменить пределы интегрирования;

2) возвращаться к первоначальной переменной не надо.

Пример 3.13. Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, вычислить определенный интеграл

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Решение. Чтобы избавиться от иррациональности, сделаем подстановку $1 + x = t^2$. Тогда

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{l} 1+x=t^2 \\ dx = 2tdt \\ x=3 \to t=2 \\ x=8 \to t=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{27}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 2\right) = \frac{32}{3}.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Bigg|_a^b - \int_a^b v(x)du(x), \qquad (3.7)$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b$ вычисляется по формуле (3.6).

3.2.3. Приложения определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла (3.4) состоит в том, что если график функции $y = f(x)$ ограничивает криволинейную трапецию $\Phi = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, то его величина равна площади этой трапеции. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть рис. 38 и заметить, что площадь криволинейной трапеции:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

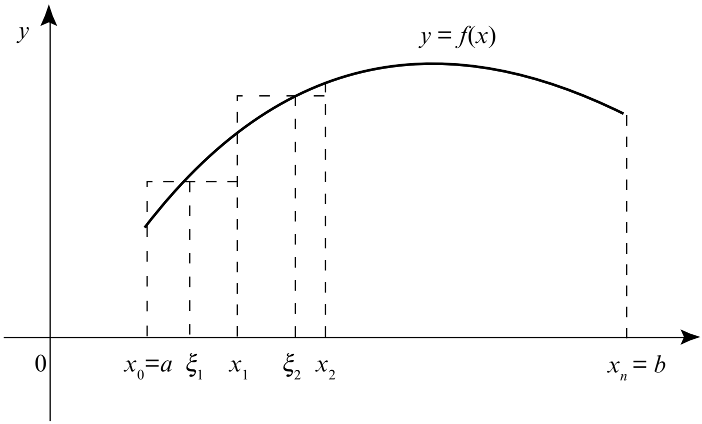


Рис. 38

Это равенство тем точнее, чем больше n. Поэтому точное значение:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|x_i - x_{i-1}|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.8)$$

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \qquad (3.9)$$

а длина дуги линии $y = f(x)$, заключенной между точками с абсциссами a и b, вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (3.10)$$

Пример 3.14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2$, $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$. Сделать чертеж.

Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

$$x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Находим: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках $A(-2; 0)$, $B(4; 6)$ (рис. 39).

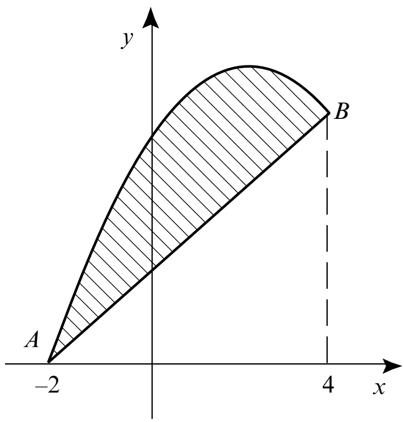


Рис. 39

Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

$$S = \int_{-2}^{4} \left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2 \right) dx = \int_{-2}^{4} \left(x - \frac{x^2}{2} + 4 \right) dx.$$

Последний интеграл находим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{4} = \frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 3.15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x + 4$ и $y = -x + 1$.

Найдем точки пересечения линий $y = -x^2 + x + 4$, $y = -x + 1$, приравнивая ординаты линий: $-x^2 + x + 4 = -x + 1$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Находим корни $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ и соответствующие им ординаты $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ (рис. 40).

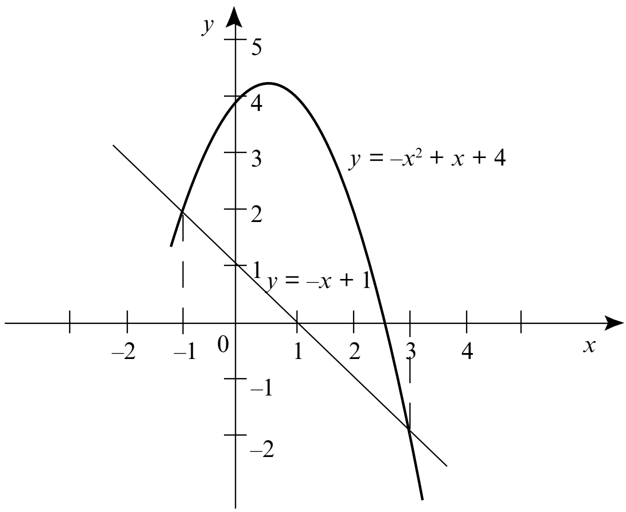


Рис. 40

По формуле площади фигуры получим:

$$S = \int_{-1}^{3} \left((-x^2 + x + 4) - (-x + 1) \right) dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Bigg|_{-1}^{3} = (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{32}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 3.16. Найти площадь, заключенную внутри лемниската Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (рис. 41).

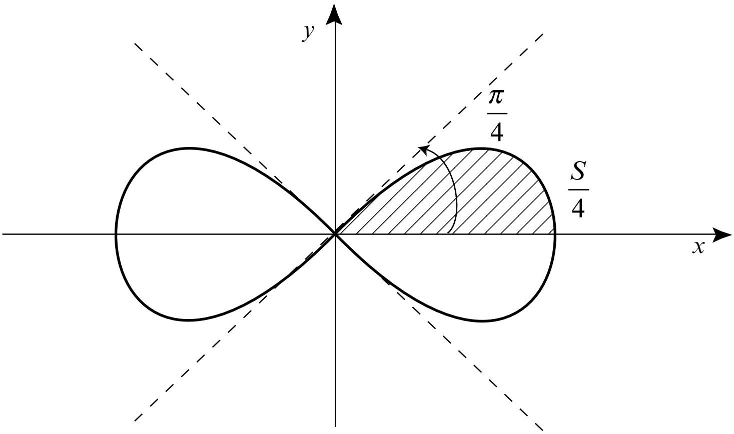


Рис. 41

В полярной системе координат площадь фигуры, ограниченной дугой кривой $r = f(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выразится интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\, d\varphi.$$

В силу симметрии кривой (рис. 41) определяем сначала одну четвертую искомой площади:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $S = a^2$.

Пример 3.17. Найти длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 42).

Дифференцируя уравнение астроиды, получим:

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

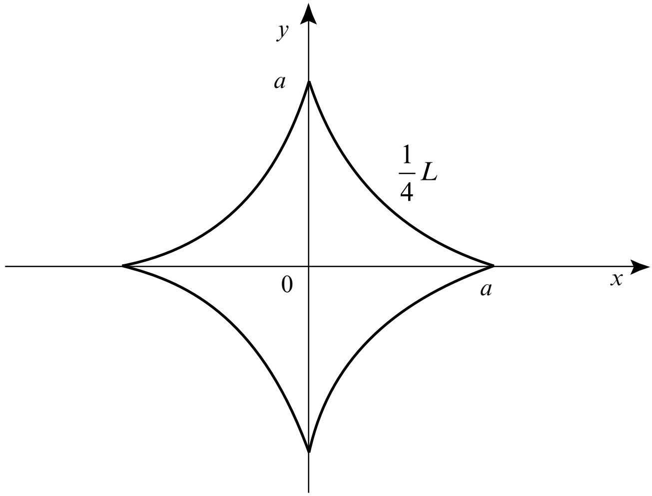


Рис. 42

Поэтому для длины дуги одной четверти астроиды имеем:

$$\frac{1}{4}L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a=\frac{3}{2}a.$$

Отсюда $L = 6a$.

Пример 3.18. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси Ox.

Решение.

$$V=\pi\int_0^\pi y^2dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 3.19. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 43).

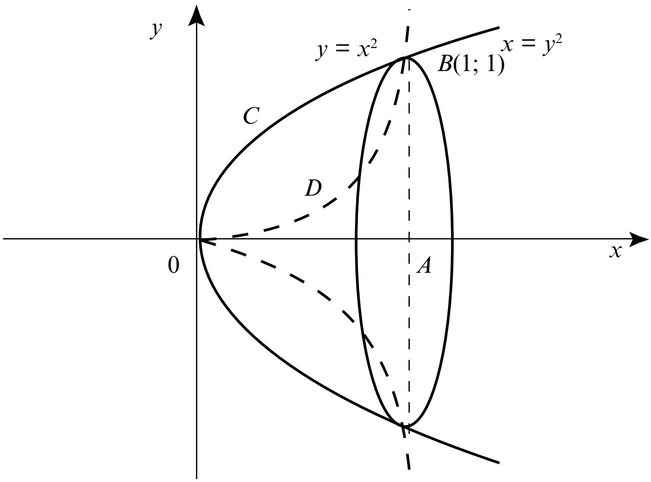


Рис. 43

Решение. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases} \quad x^4 = x, \quad x^4 - x = 0, \quad x(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, откуда точки пересечения кривых $O(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$. Как видно (рис. 43), искомый объем тела вращения равен разности двух объемов, образованных вращением вокруг оси Ox криволинейных трапеций $OCBA$ и $ODBA$:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 x dx - \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

3.3. Функции нескольких переменных

Пример 3.20. Найти область существования функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Решение. Функция имеет действительные значения, если $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Область существования функции есть множество точек внутри этого круга (рис. 44).

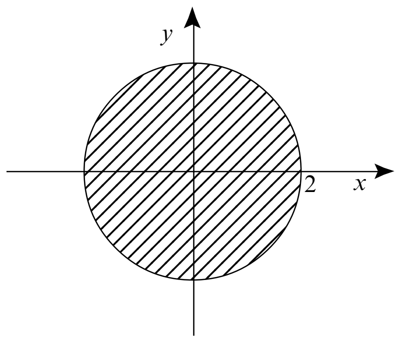


Рис. 44

Пример 3.21. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{xy+1}{x^2 - y}.$$

Решение. Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в нуль. Но $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$ — уравнение параболы. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$.

Пример 3.22. Найти частные производные функции $z = f(x; y)$:

а) $z = f(x; y) = x^5 - 2xy^2 + 3xy - x$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 - 2xy^2 + 3xy - x)'_x = 5x^4 - 2y^2 + 3y - 1.$$

Полагая теперь x постоянной величиной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 - 2xy^2 + 3xy - x)'_y = -4xy + 3x.$$

б) $z = \ln(x^3 + y^3)$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3} \cdot (x^3 + y^3)'_x = \frac{3x^2}{x^3 + y^3}.$$

Полагая теперь $x = \text{const}$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + y^3} \cdot (x^3 + y^3)'_y = \frac{3y^2}{x^3 + y^3}.$$

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ определяется формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример 3.23. Найти полный дифференциал функции

$$z = 3x^2y^3 - 2x^2y - y.$$

Находим прежде всего частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - 4xy;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 2x^2 - 1.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$dz = 2xy(3y^2 - 2)dx + (9x^2y^2 - 2x^2 - 1)dy.$$

Пример 3.24. Найти частные производные второго порядка функции $z = \cos x^5y^2$.

Сначала находим частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x^5y^2(x^5y^2)'_x = -\sin x^5y^2 \cdot 5x^4y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x^5y^2(x^5y^2)'_y = -\sin x^5y^2 \cdot 2x^5y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-5x^4y^2 \cdot \sin x^5y^2)'_x = (-5x^4y^2)'_x \cdot \sin x^5y^2 - 5x^4y^2(\sin x^5y^2)'_x =$$

$$= -20x^3y^2 \sin x^5y^2 - 5x^4y^2 \cos x^5y^2 \cdot (x^5y^2)'_x =$$

$$= -20x^3y^2 \sin x^5y^2 - 25x^8y^4 \cos x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-2x^5 y \sin x^5 y^2)'_y = (-2x^5 y)'_y \cdot \sin x^5 y^2 - 2x^5 y \cdot (\sin x^5 y^2)'_y =$$

$$= -2x^5 \cdot \sin x^5 y^2 - 2x^5 y \cdot \cos x^5 y^2 (x^5 y^2)'_y =$$

$$= -2x^5 \sin x^5 y^2 - 4x^{10} y^2 \cos x^5 y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-5x^4 y^2 \sin x^5 y^2)'_y = (-5x^4 y^2)'_y \cdot \sin x^5 y^2 - 5x^4 y^2 (\sin x^5 y^2)'_y =$$

$$= -10x^4 y \sin x^5 y^2 - 5x^4 y^2 \cos x^5 y^2 \cdot (x^5 y^2)'_y =$$

$$= -10x^4 y \sin x^5 y^2 - 10x^9 y^3 \cos x^5 y^2.$$

Производной функции $z = f(x, y)$ в данном направлении $\bar{a}$ называется:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin\alpha, \tag{3.11}$$

где a — угол, образованный вектором $\bar{a}$ с осью Ox.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j}. \tag{3.12}$$

Производная данной функции в направлении $\bar{a}$ связана с градиентом функции следующей формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \Pi_{P_{\bar{a}}} \operatorname{grad} z. \tag{3.13}$$

Пример 3.25. Найти градиент функции $z = x^2 - xy + y^3$ в точке $A(1;-1)$ и производную по направлению вектора $\bar{a} = 3\bar{\imath} - 4\bar{j}$.

Решение. Частные производные равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 3y^2.$$

По формуле (3.12):

$$\operatorname{grad} z\Big|_A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}\right)_A = (2x - y)_A \cdot \bar{\imath} + (-x + 3y^2)_A \cdot \bar{j} =$$

$$= \left(2 \cdot 1 - (-1)\right)\bar{\imath} + \left(-1 + 3(-1)^2\right)\bar{j} = 3\bar{\imath} + 2\bar{j}.$$

Производная по направлению по формуле (3.11) равна:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \frac{(-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{1}{5}\big(3\cdot 3+2(-4)\big)=\frac{1}{5}.$$

Используя частные производные, можно решать задачи на отыскание экстремума функции нескольких переменных.

Точки, в которых дифференцируемая функция $f(x;\ y)$ может достигать экстремума (так называемые стационарные точки), находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x;y)=0, \\ f'_y(x;y)=0 \end{cases} \tag{3.14}$$

(необходимые условия экстремума).

Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных заключаются в следующем: пусть $f'_x(a;b)=f'_y(a;b)=0$ и $A=f''_{xx}(a;b)$, $B=f''_{xy}(a;b)$, $C=f''_{yy}(a;b)$. Составим дискриминант

$$\Delta = A\cdot C - B^2.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $P(a;\ b)$, а именно, максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$), и минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$); 2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке P нет; 3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке P остается открытым (требуется дальнейшее исследование).

Пример 3.26. Найти экстремумы функции

$$z = e^x\cdot(4y - xy - y^2).$$

Решение. Определим стационарные точки z, решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x(4y-xy-y^2)+e^x(-y)=0, \\ e^x(4-x-2y)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x(3y-xy-y^2)=0, \\ e^x(4-x-2y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y-xy-y^2=0, \\ 4-x-2y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(3-x-y)=0, \\ 4-x-2y=0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение, если

$$\begin{cases} y=0, \\ 4-x-2y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ x=4 \end{cases}$$

или, если

$$\begin{cases} 3-x-y=0, \\ 4-x-2y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-y, \\ 4-(3-y)-2y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-y, \\ 1-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Таким образом, z имеет две стационарные точки: A (4; 0) и B (2; 1).

Используем достаточные условия экстремума. Для этого найдем частные производные z второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[e^x(3y-xy-y^2)\right]'_x = e^x(3y-xy-y^2)+e^x(-y) = e^x(2y-xy-y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[e^x(3y-xy-y^2)\right]'_y = e^x(3-x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[e^x(4-x-2y)\right]'_y = e^x(-2) = -2e^x.$$

Тогда

$$\Delta_A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right]_A = e^4\cdot 0\cdot(-2e^4) - \left[e^4\cdot(-1)\right]^2 = -e^8 < 0$$

и в точке A нет экстремума.

$$\Delta_B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right]_B = (-e^2)\cdot(-2e^2) - (-e^2)^2 = 2e^4 - e^4 = e^4.$$

Так как $\Delta_B > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_B = -e^2 < 0,$ то в точке B функция z имеет максимум.

Таким образом функция $z = e^x\,(4y - xy - y^2)$ имеет единственный экстремум — максимум в точке B (2; 1).

3.4. Двойные интегралы

Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. Пусть функции $f(x, y) = f(P)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области G плоскости $0xy$, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ — некоторое разбиение области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, площади которых также обозначим через $\Delta\sigma_k$, а диаметры — через d_k. Зафиксируем точки $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k$$

называется интегральной суммой для функции $f(P)$ по области G. Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n при $\max\limits_{1\le k\le n} d_k \to 0$ (при этом $n \to \infty$) и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, ни от выбора точек $P_k \in \Delta\sigma_k$, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается через $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k.$$

Для двойного интеграла справедливы свойства линейности и аддитивности.

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим способом. Пусть область G (рис. 45) ограничена кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \tag{3.15}$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x. Заметим при этом, что если кривая $\varphi_1(x)$ (или кривая $\varphi_2(x)$) в

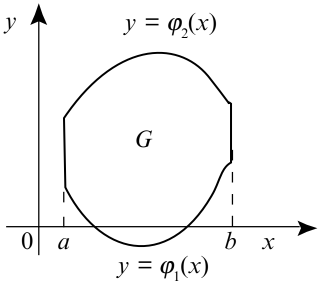


Рис. 45

промежутке $a \le x \le b$ задается различными аналитическими выражениями, например

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)} x & \text{при} \quad a \le x \le c, \\ \varphi_1^{(2)} x & \text{при} \quad c \le x \le b, \end{cases}$$

то интеграл справа записывается в виде суммы двух интегралов

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Аналогично, если область G ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем всюду на $[c, d]$ функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ (рис. 46), то

$$\iint_G f(x, y) dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx. \tag{3.16}$$

Двойной интеграл, представленный в виде (3.15) или (3.16), называется также повторным интегралом.

Рис. 46

Пример 3.27. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

Строим область интегрирования G по пределам интегрирования: $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y) = 1 - y$, $y = 0$, $y = 1$ (рис 47). Сверху область G ограничена кривой

$$\varphi_2(X) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

а снизу — прямой $y = 0$. Поэтому имеем

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\,dy.$$

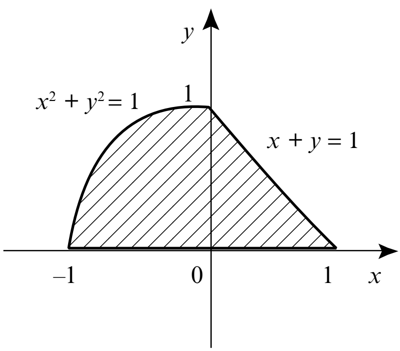


Рис. 47

Пример 3.28. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, где область интегрирования ограничена параболами $y = x - x^2$, $y = 1 - x^2$ и осью Oy (рис. 48).

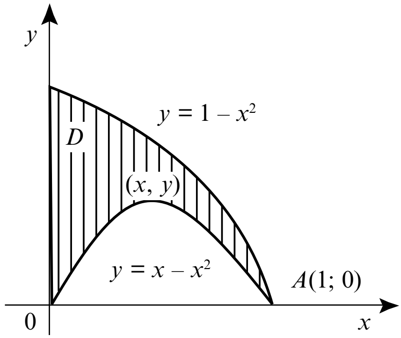


Рис. 48

Решение. Параболы пересекаются в точке A (1; 0). Область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy и определяется неравенствами

$$0 \le x \le 1;$$
$$x - x^2 \le y \le 1 - x^2.$$

Следовательно,

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} (x+2y)\,dy.$$

В результате

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 [x(1-x^2)+(1-x^2)^2 - x(x-x^2)-(x-x^2)^2]dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + x + 1)dx = \frac{2}{3}.$$

Пример 3.29. Выразить двойной интеграл по функции $f(x; y)$ по области D, ограниченной параболой $y = 3 - x^2$ и прямой $y = -1$, через двукратные интегралы при различном порядке интегрирования.

Решение. Решив систему уравнений $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = -1 \end{cases}$, найдем точки пересечения параболы и прямой. Это будут точки A (–2; –1) и

B (2; –1). Вершина параболы находится в точке C (0; 3); ось Oy является осью симметрии параболы (рис. 49).

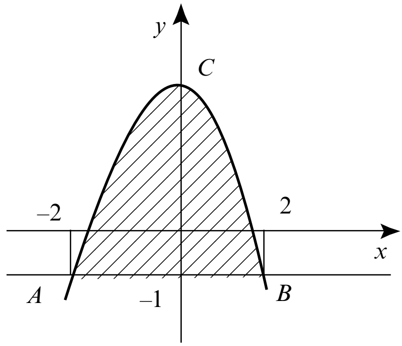


Рис. 49

Рассмотрим сначала повторный интеграл по области D, интегрируя во внутреннем интеграле по y, а во внешнем интеграле — по x. Для этого будем рассматривать область D как заключенную в полосе между прямыми $x = -2$ и $x = 2$ (область D проектируется на ось Ox в отрезок [–2; 2]). Область ограничена снизу отрезком AB с уравнением $y = -1 (-2 \le x \le 2)$, а сверху — дугой параболы $y = 3 - x^2$ $(-2 \le x \le 2)$. Следовательно, двукратный интеграл будет $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{3-x^2} f(x; y)\, dy$.

Изменим теперь порядок интегрирования, т.е. будем во внутреннем интеграле интегрировать по x, а во внешнем — по y. Для этого будем рассматривать область D как заключенную в полосе между прямыми $y = -1$ и $y = 3$ (область D проектируется на ось Oy в отрезок [–1; 3]). Область ограничена слева дугой параболы $x = -\sqrt{3 - y}$ $(-1 \le y \le 3)$, а справа — дугой параболы $x = \sqrt{3 - y}$ $(-1 \le y \le 3)$. Эти уравнения получаются, если уравнение $y = 3 - x^2$ разрешить относительно x. Следовательно, теперь двукратный интеграл будет $\int\limits_{-1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} f(x; y)\, dx$.

Итак,

$$\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{3-x^2} f(x;y)\,dy = \int\limits_{-1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} f(x;y)\,dx.$$

Площадь S плоской области G выражается, в зависимости от рассматриваемой системы координат, следующими интегралами:

$$S = \iint\limits_{G} dx\,dy \tag{3.17}$$

в декартовых прямоугольных координатах, а в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеем

$$S = \iint\limits_{G} r\,dr\,d\varphi. \tag{3.18}$$

Пример 3.30. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1+\cos\varphi)$ и $r = a\cos\varphi$ ($a > 0$).

В плоскости Oxy фигура показана на рис. 50.

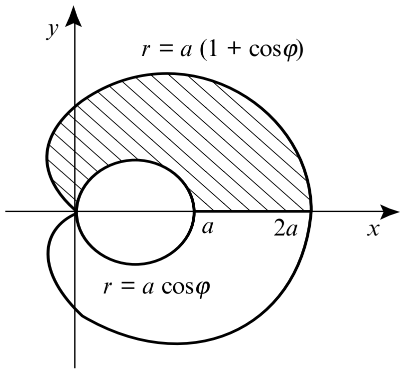


Рис. 50

Вычислим по формуле (3.18) площадь верхней части и удвоим:

$$S = 2\iint\limits_{G} r\,dr\,d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(r^2 \Big|_{0}^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (1+2\cos\varphi)\, d\varphi + a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^2(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + a^2\left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2 .$$

Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G, выражается интегралом

$$V = \iint_G f(x, y)\,dx\,dy \tag{3.19}$$

(функция $f(x, y) \geq 0$ однозначна в области G).

Пример 3.31. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x = 0$, $y = x$, $z = 1 - y\sqrt{y}$.

Решение. Построим чертеж, на котором изобразим тело, ограниченное указанными поверхностями (рис. 51 а). Объем тела $V = \iint\limits_D z\,dx\,dy$, где $z = 1 - y\sqrt{y}$ — уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, а D — область интегрирования, представляющая собой треугольник в плоскости xOy, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = x$ и $y = 1$, являющимися линиями пересечения

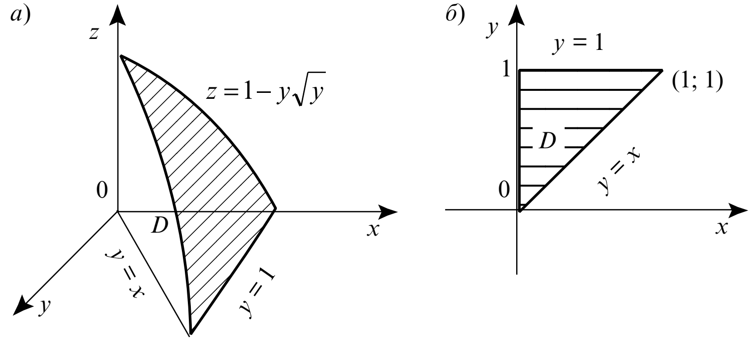


Рис. 51

с плоскостью xOy ($z = 0$) плоскостей $x = 0$, $y = x$ и $z = 1 - y\sqrt{y}$ (рис. 51 б). Вершинами этого треугольника являются точки (0; 0), (0; 1), (1; 1), получающиеся в результате решения систем уравнений, составленных из соответствующих пар уравнений сторон. Эту область можно рассматривать как заключенную в полосе между прямыми $y = 0$ и $y = 1$; слева область ограничена прямой $x = 0$, а справа — прямой $x = y$. Следовательно,

$$V = \iint_D \left(1 - y\sqrt{y}\right)dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y \left(1 - y\sqrt{y}\right)dx = \int_0^1 \left(1 - y\sqrt{y}\right)x\Big|_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - y\sqrt{y}\right)y\,dy = \int_0^1 \left(y - y^{\frac{5}{2}}\right)dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{3}{14}.$$

Итак, $V = \dfrac{3}{14}$ куб. ед.

Раздел 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Основные понятия

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Например, уравнение $y' \sin x + y \operatorname{tg} x = 1$ — первого порядка; $\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3$ — второго порядка; $y''' - 5xy' + xy = 0$ — третьего порядка.

Функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется решением этого уравнения. График решения называется интегральной кривой уравнения.

Если функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, задана неявно, т.е. соотношением вида $\varphi(x, y) = 0$, то говорят об интеграле уравнения.

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется общим решением этого уравнения. Так, для уравнения первого порядка общее решение имеет вид:

$$y = \varphi(x, C),$$

а для уравнения второго порядка — вид:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными решениями этого уравнения.

Геометрически общее решение определяет семейство кривых, а частное решение — некоторую кривую этого семейства.

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения задаются начальные условия. Для уравнения первого порядка они имеют вид $y(x_0) = y_0$; для уравнения второго порядка — вид $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. По этим начальным условиям определяются значения произвольных постоянных в общем решении уравнения, в результате чего получаются частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 4.1. Проверить, что функция $y = \cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Имеем

$$y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x.$$

Подставляя выражения для y'' и y в данное уравнение, получаем:

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0,$$

т.е., действительно, функция $y = \cos x$ является решением данного дифференциального уравнения.

Пример 4.2. Показать, что функция y, определяемая уравнением $x^2 - y^2 = 4$, является интегралом дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x}{y}$.

Решение. Продифференцировав обе части равенства по переменной x, получим:

$$2x - 2yy' = 0,$$

откуда $y' = \dfrac{x}{y}$.

4.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$M_1(x)\, N_1(y)dx + M_2(x)\, N_2(y)dy = 0.$$

Решается оно следующим образом. Поделив все члены уравнения на $N_1(y)\, M_2(x)$, получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Пример 4.3. Найти общий интеграл уравнения

$$\cos^2 y \operatorname{ctg} x\, dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y\, dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, поделив обе его части на выражение $\cos^2 y \cdot \sin^2 x$:

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}dx + \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}dy = 0.$$

Интегрируя обе части данного уравнения, получим

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}dx + \int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y}dy = C,$$

откуда

$$\frac{-\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2} = C.$$

Воспользуемся тем, что C — произвольная постоянная и заменим C на $\frac{C}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{ctg}^2 x = \mathrm{C}.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Пример 4.4. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $xy' - \frac{y}{\ln x} = 0.$

Решение. Выразим производную y' из уравнения $y' = \frac{y}{x \ln x}$. Правая часть разлагается на множители $f(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$, следовательно, это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x \ln x}$ или $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$. Теперь проинтегрируем обе части и для удобства допишем постоянную интегрирования в виде $\ln c$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x \ln x}, \ \ln|y| = \int \frac{d \ln x}{\ln x},$$

$$\ln|y| = \ln|\ln x| + \ln c \ (c > 0)$$

или

$$\ln|y| = \ln c |\ln x|,$$

тогда

$$|y| = \mathrm{c} |\ln x|.$$

Окончательно $y = c \cdot \ln x$, где c — любое число. Итак, искомое общее решение $y = c \ln x$.

Пример 4.5. Найти частное решение уравнения $(1 + e^x)yy' = \mathrm{e}^x$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0} = 1$.

Решение. Имеем $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx} = e^x$. Разделяя переменные, получим: $ydy = \dfrac{e^x dx}{1+e^x}$. Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C.$$

Теперь найдем C. Положим $x = 0$, $y = 1$, тогда

$$\frac{1}{2} = \ln(1+e^0) + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Подставляя значение C в выражение общего интеграла, найдем частный интеграл:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2$$

или

$$y^2 = 1 + 2\ln\frac{1+e^x}{2} = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2,$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Из начального условия следует, что $y > 0$ ($y|_{x=0} = 1$), поэтому перед корнем берем знак плюс. Итак, искомое частное решение:

$$y = \sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2} \quad \left(\text{или} \;\; x = \ln(2e^{\frac{y^2-1}{2}} - 1)\right).$$

Пример 4.6. Найти частный интеграл уравнения

$$y' \sin^2 x \ln y + y = 0,$$

удовлетворяющий начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Решение. Найдем общий интеграл данного уравнения. Для этого разделим переменные:

$$\sin^2 x \ln y \, dy + y \, dx = 0,$$

или

$$\frac{\ln y}{y} dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \operatorname{ctg} x + C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения. Используя начальные условия $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, подставляем в выражение общего интеграла заданные значения переменных $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$ — тем самым определяем значение произвольной постоянной C:

$$\frac{\ln^2 1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + C,$$

откуда $C = -1$. Итак, искомый частный интеграл

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \operatorname{ctg} x - 1.$$

4.3. Однородные уравнения

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

называется однородным уравнением.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$, где u — новая искомая функция.

Дифференцируя равенство $y = ux$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u. \tag{2}$$

Подставив выражения y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), имеем:

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u),$$

откуда

$$\frac{du}{f(u) - u} - \frac{dx}{x} = 0. \tag{3}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдя общее решение (интеграл) уравнения (3), получаем общее решение (интеграл) данного уравнения (1), заменив u на $\frac{y}{x}$.

Пример 4.7. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим:

$$y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \qquad (*)$$

т.е. y' есть функция отношения $\frac{y}{x}$. Это означает, что данное уравнение — однородное.

Для решения этого уравнения введем новую функцию $u = \frac{y}{x}$.

Тогда $y = ux$ и $y' = \frac{du}{dx}x + u$. Уравнение (*) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1+u^2}{u},$$

или

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = udu.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln|x| = \frac{u^2}{2} + \ln C,$$

откуда

$$\ln\frac{x}{C} = \frac{u^2}{2}$$

т.е.

$$x = Ce^{\frac{u^2}{2}}.$$

Заменяя в последнем равенстве u отношением $\frac{y}{x}$, окончательно получим:

$$x = Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}.$$

Пример 4.8. Рассмотрим следующий пример:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Решение. Делая подстановку $y = xu$, приводим уравнение к виду:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u^2}{2u}.$$

Отсюда

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}-u=\frac{1-u^2}{2u}$$

и потому

$$\frac{dx}{x}=\frac{2udu}{1-u^2};\ \ln|x|=-\ln|1-u^2|+\ln|C|;$$

$$x=\frac{C}{1-u^2};\ 1=\frac{Cx}{x^2-y^2};\ x^2-y^2=Cx;$$

$$y^2=x^2-Cx;\quad y=\pm\sqrt{x^2-Cx}.$$

Задача.

В теории резания возникает следующая задача: найти кривую, касательная к которой в каждой точке образует постоянный угол α с радиусом-вектором этой точки (рис. 52). По условию задачи имеем $\varphi = \alpha + \psi$ и потому

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha+\psi)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi}. \tag{1}$$

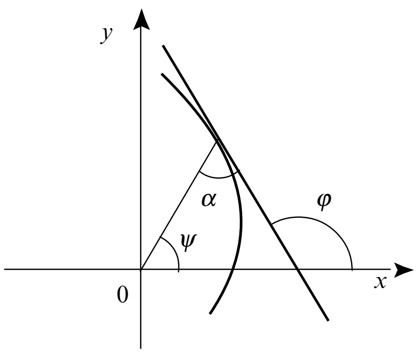


Рис. 52

Но из рис. 52 видно, что $\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x}$, а, как известно, $\operatorname{tg}\varphi = y'$. Поэтому равенство (1) можно записать так:

$$y' = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}},$$

где для краткости положено $k = \operatorname{tg}\alpha$. Это — однородное уравнение. Сделаем подстановку $y = xu$. После простых преобразований получаем, что

$$x\frac{du}{dx} = \frac{k(1+u^2)}{1-ku},$$

откуда находим

$$\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln C = \ln x.$$

Подставляя вместо u значение $\frac{y}{x}$ получаем равенство:

$$\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}.$$

Это равенство проще записать в полярных координатах, положив $x^2 + y^2 = r^2$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$. Мы получим, что

$$r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Эта кривая называется логарифмической спиралью.

4.4. Линейные уравнения

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x) \tag{1}$$

называется линейным уравнением.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными заменой искомой функции y произведением двух вспомогательных функций u и υ, т.е. $y = u\upsilon$.

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\upsilon\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\upsilon\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)\upsilon\right]=Q(x) \qquad (2)$$

Пользуясь тем, что одно из вспомогательных переменных, например υ, выбрано произвольно, подберем его так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т.е. в качестве υ возьмем одно из частных решений $\upsilon = \upsilon(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+P(x)\upsilon=0.$$

Подставив выражение $\upsilon = \upsilon(x)$ в уравнение (2), получим уравнение относительно функции u:

$$\upsilon\frac{du}{dx}=Q(x).$$

Это также уравнение с разделяющимися переменными. Найдя общее решение этого уравнения $u = u(x, C)$, получим общее решение уравнения (1):

$$y = u(x, C)\ \upsilon(x).$$

Пример 4.9. Найти общее решение уравнения

$$y' - y \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Решение. Положим $y = u\upsilon$, тогда $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$ и данное уравнение принимает вид

$$u'\upsilon + u\upsilon' - u\upsilon \operatorname{tg} x = \sin x,$$

или

$$u'\upsilon + u(\upsilon' - \upsilon \operatorname{tg} x) = \sin x. \qquad (*)$$

Решая уравнение $\upsilon' - \upsilon \operatorname{tg} x = 0$, получим простейшее частное решение:

$$\frac{d\upsilon}{dx}=\upsilon\operatorname{tg}x;\quad \frac{d\upsilon}{\upsilon}=\operatorname{tg}x\,dx;\quad \ln|\upsilon|=-\ln|\cos x|,$$

откуда

$$\upsilon=\frac{1}{\cos x}.$$

Подставляя υ в уравнение (*), получим уравнение

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x$$

из которого находим u:

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x; \quad du = \sin x \cos x \; dx,$$

откуда

$$u = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Итак, искомое общее решение

$$y = u\upsilon = \left(\frac{\sin^2 x}{2} + C \right) \frac{1}{\cos x}.$$

Пример 4.10. Решить дифференциальное уравнение:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$$

Решение. Полагая $y = u\upsilon$, приводим это уравнение к виду

$$\upsilon[u' + u \operatorname{tg} x] + u\upsilon' = \cos^2 x.$$

Приравняем квадратную скобку к нулю:

$$u' + u \operatorname{tg} x = 0,$$

мы получим, что

$$\frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x \, dx; \quad \ln u = \ln \cos x, \quad u = \cos x.$$

Подставляя полученное значение u в уравнение, получаем следующее уравнение для υ:

$$\cos x \cdot \upsilon' = \cos^2 x.$$

Отсюда находим:

$$\upsilon' = \cos x, \quad \upsilon = \sin x + C.$$

Таким образом,

$$y = u\upsilon = \cos x(\sin x + C).$$

Пример 4.11. Рассмотрим следующую задачу:

Материальная точка движется по прямой линии в сопротивляющейся среде под действием периодически меняющейся силы $F_1 = A \sin \omega t$. Сопротивление среды пропорционально скорости движения. Вывести закон изменения скорости тела, если его начальная скорость равнялась нулю.

По условию на тело действуют две силы: сила сопротивления среды $F_2 = -k\upsilon$ и периодическая сила $F_1 = A \sin \omega t$. Общая сила равна $F = -k\upsilon + A \sin \omega t$. Но по второму закону Ньютона имеем $F = ma$, а ускорение — это производная скорости по времени: $a = \frac{d\upsilon}{dt}$. Отсюда приходим к уравнению

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{k}{m}\upsilon + \frac{A}{m}\sin\omega t.$$

Это линейное уравнение первого порядка. Полагая $\upsilon = uw$, находим, что

$$uw' + w\left(u' + \frac{k}{m}u\right) = \frac{A}{m}\sin\omega t;$$

$$u = e^{-\frac{k}{m}t};\ \ w' = \frac{A}{m}e^{\frac{k}{m}t}\sin\omega t;$$

$$w = \frac{Ae^{\frac{k}{m}t}}{k^2 + m^2\omega^2}\left[\frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right] + C;$$

$$\upsilon = uw = \frac{A}{k^2 + m^2\omega^2}\left[\frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right] + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Полагая $t = 0$, $\upsilon = 0$, находим

$$0 = C - \frac{A\omega}{k^2 + m^2\omega^2},\ C = \frac{A\omega}{k^2 + m^2\omega^2};$$

имеем

$$\upsilon = \frac{A}{k^2 + m^2\omega^2}\left[\frac{k}{m}\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\frac{k}{m}t}\right].$$

4.5. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение 1-го порядка вида:

$$y = P(x)y + Q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение является линейным, а при $m = 1$ — уравнение с разделяющимися переменными).

Так же, как и линейное, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = u\upsilon$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-m}$.

Пример 4.12. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$.

Полагая $y = u\upsilon$, приводим уравнение к виду

$$\upsilon\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dx}u - \frac{x^2}{u\upsilon}\right) = 0.$$

Из общего решения $u = Cx$ уравнения

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

выбираем в качестве функции u одно частное решение, например

$$u_1 = x.$$

Подставляя u_1 в исходное уравнение, получаем новое уравнение $\frac{d\upsilon}{dx}x - \frac{x^2}{x\upsilon} = 0$, или $\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{\upsilon}$. Его общее решение $\upsilon = \sqrt{2x + C}$.

Перемножая u_1 и v, получаем общее решение исходного уравнения $y = x\sqrt{2x + C}$.

Пример 4.13. Решить уравнение Бернулли относительно $x = x\,(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}.$$

Положим $x = u\upsilon$ и приведем уравнение к виду:

$$\upsilon\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dy}u + \frac{1}{2u\upsilon}\right) = 0.$$

Рассмотрев уравнение

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0,$$

возьмем его частное решение $u_1 = \sqrt{y}$. Тогда мы придем к уравнению $\frac{d\upsilon}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2\upsilon\sqrt{y}} = 0$, общее решение которого $\upsilon^2 = \ln\frac{C}{y}$.

Перемножая $u_1^2 = y$ и υ^2, получим общий интеграл исходного уравнения

$$x^2 = y\ln\frac{C}{y}.$$

4.6. Дифференциальные уравнения второго порядка вида $y'' = f(x)$

Уравнения вида $y'' = f(x)$ решаются двукратным интегрированием. Полагая $y' = z$, получим $y'' = z'$; в результате приходим к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$z' = f(x), \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = f(x), \quad \text{или} \quad dz = f(x)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int dz = \int f(x)dx,$$

откуда

$$z = F(x) + C_1$$

[здесь $F(x)$ — первообразная от $f(x)$]. Заменяем в последнем уравнении z значением $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1,$$

или

$$dy = [F(x) + C_1]dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$y = \int F(x)dx + C_1x + C_2,$$

откуда

$$y = \Phi(x) + C_1x + C_2.$$

Это и есть общее решение уравнения $y'' = f(x)$.

Пример 4.14. Найти общее решение уравнения

$$y'' = 1 - x^2.$$

Решение. Положим $\frac{dy}{dx} = z,$ тогда данное уравнение запишется в виде:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - x^2, \quad \text{или} \quad dz = (1 - x^2)dx.$$

В результате интегрирования найдем

$$z = x - \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{x^3}{3} + C_1, \quad \text{или} \quad dy = \left(x - \frac{x^3}{3} + C_1\right)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2.$$

Пример 4.15. Найти частное решение уравнения

$$y'' = \sin x - 1,$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Имеем $\frac{dy}{dx} = z,$ откуда

$$\frac{dz}{dx} = \sin x - 1, \quad dz = (\sin x - 1)dx;$$

$$z = -\cos x - x + C_1.$$

Следовательно,

$$y' = -\cos x - x + C_1.$$

Используя начальные условия $y'(0) = 1$, получаем

$$1 = -\cos 0 + C_1,$$

откуда $C_1 = 2$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - x + 2,$$

или

$$dy = (-\cos x - x + 2)dx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$y = -\sin x - \frac{x^2}{2} + 2x + C_2.$$

Используя теперь начальные условия $y(0) = -1$, находим $C_2 = -1$. Итак, искомое частное решение имеет вид:

$$y = -\sin x - \frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

4.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Для отыскания общего решения уравнения (1) составляется характеристическое уравнение

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{2}$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями r, причем сама функция заменяется единицей.

Тогда общее решение уравнения (1) строится в зависимости от характера корней r_1 и r_2 уравнения (2). Здесь возможны три случая.

1-й случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_1 e^{r_2 x}. \tag{3}$$

2-й случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и равные: $r_1 = r_2 = r$. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}. \tag{4}$$

3-й случай. Корни r_1 и r_2 — комплексно сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Тогда общее решение зависывается так:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{5}$$

Пример 4.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение; для этого заменим функцию y и ее производные y' и y'' соответствующими степенями r: $r^0 = 1$, r *и* r^2. Тогда получим

$$r^2 - 5r - 6 = 0,$$

откуда $r_1 = -1$, $r_2 = 6$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (3) имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}.$$

Пример 4.17. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

из которого находим $r_{1,2} = 2$. Характеристическое уравнение имеет равные действительные корни, поэтому согласно формуле (4) общее решение запишется следующим образом:

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2x).$$

Пример 4.18. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 0.$$

Решение. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 + 9 = 0,$$

имеющее два мнимых сопряженных корня $r_{1,2} = \pm 3i$. Используя формулу (5) при $\alpha = 0$ и $\beta = 3$, получаем общее решение

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Пример 4.19. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 25y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2 + 6r + 25 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня $r_{1,2} = -3 \pm 4i$. По формуле (5) при $\alpha = -3$ и $\beta = 4$, получаем общее решение

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Пример 4.20. Найти частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

его корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Далее, используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Для этого подставим в общее решение заданные значения $x = 0$, $y = 1$; в результате получим одно из уравнений, связывающее C_1 и C_2:

$$1 = C_1 + C_2.$$

Второе уравнение относительно C_1 и C_2 получим следующим образом. Продифференцируем общее решение:

$$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$$

и подставим в найденное выражение заданны е значения $x = 0$, $y' = -1$:

$$-1 = C_1 + 2C_2.$$

Из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}$$

находим $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = 3e^x - 2e^{2x}.$$

4.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{1}$$

Оно отличается от соответствующего линейного однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

наличием в правой части некоторой функции $f(x)$.

Для нахождения общего решения уравнения (1) сначала нужно найти общее решение $\bar{y}$ уравнения (2), а затем найти какое-либо частное решение y^* уравнения (1). Их сумма есть общее решение данного неоднородного уравнения (1):

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Приведем правило отыскания частного решения y^* уравнения (1) в следующих двух случаях:

правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{kx} P_n(x). \tag{3}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n;

правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x. \tag{4}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{kx} P_n(x),$$

причем число k не является корнем характеристического уравнения

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{5}$$

соответствующего однородному уравнению (2). Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = e^{kx} Q_n(x), \tag{6}$$

где $Q_n(x)$ — некоторый многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами.

Если же число k является корнем характеристического уравнения (5), то частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = x^m e^{kx} Q_n(x), \tag{7}$$

где m — кратность корня k (т.е. $m = 1$, если k — однократный корень, и $m = 2$, если k — двукратный корень).

II. Пусть теперь правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x,$$

причем числа $\pm\lambda i$ не являются корнями характеристического уравнения (5). Тогда частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \tag{8}$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

Если же комплексные числа $\pm\lambda i$ являются корнями характеристического уравнения (5), то частное решение уравнения (1) следует искать в форме

$$y^* = x(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x). \tag{9}$$

Пример 4.21. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x.$$

Решение:

1. Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Решая отвечающее ему характеристическое уравнение

$$r^2 + 4r + 3 = 0,$$

получаем корни $r_1 = -3$, $r_2 = -1$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

2. Перейдем к отысканию частного решения y^* данного уравнения. Здесь правая часть $f(x) = (8x^2 + 84x)e^x$ имеет вид (3): $n = 2$, $P_2(x) = 8x^2 + 84x$, $k = 1$, причем $k = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение y^* нужно искать в форме

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

где A, B и C — некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что y^* должно быть решением данного уравнения. Найдем $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*'} = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (2Ax + B)e^x = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x,$$

$$y^{*''} = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x =$$

$$= (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x;$$

теперь подставим выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение:

$$(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x + 4(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x +$$
$$+3(Ax^2 + Bx + C)e^x = (8x^2 + 84x)e^x.$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, в результате получим

$$Ax^2 + (12A + 8B)x + (2A + 6B + 8C) = 8x^2 + 84x.$$

Это равенство выполняется тождественно только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства равны между собой.

Итак, имеем следующую систему уравнений для отыскания коэффициентов A, B и C:

$$\begin{cases} 8A = 8, \\ 12A + 8B = 84, \\ 2A + 6B + 8C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 1$, $B = 9$, $C = -7$. Таким образом, получаем искомое частное решение

$$y^* = (x^2 + 9x - 7)e^x.$$

Теперь можно записать общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + (x^2 + 9x - 7)e^x.$$

Пример 4.22. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = 14e^{-3x}.$$

Решение. 1. Найдем $\bar{y}$.

Характеристическое уравнение $r^2 + 6r + 9 = 0$, имеем корни $r_1 = r_2 = -3$. Следовательно,

$$\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{-3x}.$$

2. Найдем теперь y^*. Здесь правая часть имеет вид (3): $n = 0$, $P_0 = 14$, $k = -3$. Так как $k = -3$ является двукратным корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* следует искать в форме

$$y^* = Ax^2e^{-3x},$$

где A — коэффициент, подлежащий определению. Вычислим производные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = (-3Ax^2 + 2Ax)e^{-3x},$$
$$y^{*\prime\prime} = (9Ax^2 - 12Ax + 2A)e^{-3x}.$$

Подставляя выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{-3x} и приводя подобные члены, в итоге получим $2A = 14$, откуда $A = 7$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y^* = 7x^2e^{-3x}.$$

Итак, общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + 7x^2e^{-3x}.$$

Пример 4.23. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x.$$

Решение. 1. Найдем $\bar{y}$. Характеристическое уравнение

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

имеем корни $r_{1,2} = 2 \pm i$. Следовательно,

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

2. Будем теперь искать y^*. Здесь правая часть $f(x)$ имеет вид (4): $a = 2$, $b = 6$, $\lambda = \pm i$. Числа $\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение y^* следует искать в форме

$$y^* = A\cos x + B\sin x,$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Найдем производные $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = -A\sin x + B\cos x,$$
$$y^{*\prime\prime} = -A\cos x - B\sin x;$$

подставляя теперь выражения для y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение и группируя члены при $\cos x$ и $\sin x$, в результате получим

$$(4A - 4B)\cos x + (4A + 4B)\sin x = 2\cos x + 6\sin x.$$

Следовательно, для нахождения A и B имеем систему

$$\begin{cases} 4A - 4B = 2, \\ 4A + 4B = 6. \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$y^* = \cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = \overline{y} + y^* = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Пример 4.24. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 12\cos 2x.$$

Решение. 1. Найдем сначала $\overline{y}$. Характеристическое уравнение $r^2 + 4 = 0$, имеет корни $r_{1,2} = \pm 2i$. Следовательно,

$$\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2. Переходим к нахождению y^*. Здесь правая часть $f(x)$ имеет вид (4): $a = 12$, $b = 0$, $\lambda = \pm 2i$. Так как числа $\pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение следует искать в форме

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Имеем

$$y^{*'} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$
$$y^{*''} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x).$$

Подставив $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение и приведя подобные члены, получим

$$4B \cos 2x - 4A \sin 2x = 12 \cos 2x,$$

откуда

$$\begin{cases} 4B = 12, \\ -4A = 0, \end{cases}$$

т.е. $A = 0$, $B = 3$. Поэтому

$$y^* = 3x \sin 2x.$$

Итак, общее решение

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 3x \sin 2x.$$

Пример 4.25. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. 1. Характеристическое уравнение $r^2 + 2r - 8 = 0$ имеет корни $r_1 = -4$, $r_2 = 2$. Следовательно,

$$\bar{y} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}.$$

2. Правая часть данного уравнения имеет вид (3): $n = 1$, $P_1(x) = 12x + 20$, $k = 2$. Так как $k = 2$ является однократным корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* ищем в форме

$$y^* = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Отсюда

$$y^{*'} = (2Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} = (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)e^{2x},$$

$$y^{*''} = (4Ax^2 + 4Ax + 4Bx + 2B)e^{2x} + (4Ax + 2A + 2B)e^{2x} =$$

$$= (4Ax^2 + 8Ax + 4Bx + 2A + 4B)e^{2x}.$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{2x} и приводя подобные члены, окончательно получим

$$12Ax + (2A + 6B) = 12x + 20.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 12A \qquad\quad = 12, \\ 2A + 6B = 20, \end{cases}$$

находим $A = 1$, $B = 3$. Отсюда

$$y^* = (x^2 + 3x)e^{2x}.$$

Итак, найдено общее решение данного уравнения

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + (x^2 + 3x)e^{2x}.$$

3. Для нахождения искомого частного решения воспользуемся заданными начальными условиями. Найдем производную общего решения

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x} + (2x^2 + 8x + 3)e^{2x};$$

подставив в выражения для общего решения и его производной значения $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$, получим систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = -4C_1 + 2C_2 + 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = \dfrac{1}{3}$, $C_2 = -\dfrac{1}{3}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{3}e^{2x} + (x^2 + 3x)e^{2x}.$$

Раздел 5

РЯДЫ

5.1. Основные понятия

Числовым рядом называется выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность.

Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2,\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$ имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Этот предел называется суммой сходящегося ряда. Если конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся.

Пример 5.1. Написать пять первых членов последовательности, если ее n-й член a_n имеет вид:

1) $\dfrac{1}{4n-1}$; 2) $(-1)^n \cdot \dfrac{1}{4n-1}$; 3) $\dfrac{2^n+1}{2^n}$; 4) $\dfrac{2+(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Вместо n подставляем 1, 2, …, 5:

1) $\dfrac{1}{4n-1}$: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{19}$;

2) $(-1)^n \cdot \dfrac{1}{4n-1}$: $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{7}, -\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{15}, -\dfrac{1}{19}$;

3) $\dfrac{2^n+1}{2^n}$: $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{17}{16}, \dfrac{33}{32}$;

4) $\dfrac{2+(-1)^{n-1}}{n}$: $\dfrac{3}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{5}$.

Пример 5.2. Пользуясь непосредственно определением, показать что ряд сходится, и найти его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ \dots \ + \frac{1}{n(n+1)} + \ \dots \ .$$

Решение. По определению частичной суммы ряда имеем:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2},$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Таким образом, получаем следующую последовательность частичных сумм:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \dots,$$

общий член которой равен: $\dfrac{n}{n+1}$. Ясно, что эта последовательность сходится и ее предел равен единице:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Это означает, что данный ряд сходится и сумма его равна единице.

5.2. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Ряд может сходиться только при условии, что его общий член a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ – это необходимый признак сходимости ряда.

Если же $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0,$ то ряд расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

1. Признак сравнения. Если члены знакоположительного ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{2}$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \ (a > 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots \ + \frac{1}{n} + \ \ldots,$$

являющийся расходящимся рядом.

2. Признак Даламбера. Если для ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ – расходится (при $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным).

Пример 5.3. Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ \ldots \ + \frac{n}{n+1} + \ \ldots,$$

расходится.

Решение. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, предел общего члена ряда при $n \to \infty$ отличен от нуля, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется. Это означает, что данный ряд расходится.

Пример 5.4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ \dots\ + \frac{1}{5\cdot 2^n} + \dots\ .$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ \dots\ + \frac{1}{2^n} + \ \dots\ . \qquad (*)$$

Ряд (*) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. При этом каждый член $a_n = \frac{1}{5\cdot 2^n}$ данного ряда меньше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{2^n}$ ряда (*). Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

Пример 5.5. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ \dots\ + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ \dots .$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots\ + \frac{1}{n} + \dots\ .$$

Каждый член $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{n}$ гармонического ряда. Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

Пример 5.6. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^2}+\ \ldots\ .$$

Решение. Каждый член ряда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ +\frac{1}{n^2}+\ \ldots\ . \qquad (*)$$

меньше соответствующего члена ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \ldots\ .$$

Как было показано в задаче 5.2, последний ряд сходится. Следовательно, сходится и ряд (*). Сходимость исходного ряда, отличающегося от ряда (*) наличием первого члена 1, теперь очевидна.

Пример 5.7. С помощью признака Даламбера решить вопрос о сходимости ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ \ldots\ +\frac{n}{3^n}+\ \ldots\ .$$

Решение. Для того чтобы воспользоваться признаком Даламбера, надо знать (n + 1)-й член ряда. Он получается путем подстановки в выражение общего члена ряда $a_n=\frac{n}{3^n}$ вместо n числа n + 1: $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$. Теперь найдем предел отношения (n + 1)-го члена к n-му члену при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Так как $l=\frac{1}{3}<1,$ то данный ряд сходится.

Пример 5.8. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ \ldots\ +\frac{n!}{10^n}+\ \ldots .$$

Решение. Зная $a_n=\dfrac{n!}{10^n}$ найдем (n + 1)-й член ряда: $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}:\frac{n!}{10^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{n!\;10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

Так как $l=\infty>1$, то ряд расходится.

Пример 5.9. На основании признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$3+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{3^4}{4^4}+\ \ldots\ +\frac{3^n}{n^n}+\ \ldots\ .$$

Решение. Зная n-й член ряда $a_n=\dfrac{3^n}{n^n}$ запишем (n + 1)-й член: $a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}:\frac{3^n}{n^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n^n}{3^n\,(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=3\cdot e^{-1}\cdot 0=0.$$

Так как $l=0<1$, то ряд сходится.

5.3. Признак сходимости Лейбница

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots\ , \qquad (1)$$

где a_1, a_2, $a_{3,}$ … , a_n – положительные числа.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак Лейбница. Ряд (1) сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Применение сходящихся рядов к приближенным вычислениям основано на замене суммы ряда суммой нескольких первых его членов. Допускаемая при этом погрешность очень просто оценивается для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, – это погрешность меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда.

Пример 5.10. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ \dots\ .$$

Решение. Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\dots$$

и общий член при $n \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то в силу признака Лейбница ряд сходится.

Пример 5.11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ \dots\ .$$

суммой четырех первых его членов.

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится (см. задачу 5.10). Ошибка ΔS_4, получающаяся при замене суммы S этого ряда суммой четырех первых его членов, меньше абсолютного значения пятого члена: $\Delta S_4 < 0{,}2$.

5.4. Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Признак сходимости знакопеременного ряда. Если ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{2}$$

составленный из абсолютных величин членов рядов (1), сходится, то ряд (1) также сходится.

Знакопеременный ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда (1).

Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример 5.12. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ \ldots\ + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \ \ldots\ .$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ \ldots\ + \frac{1}{n!} + \ \ldots\ .$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, первоначальный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 5.13. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \ \ldots\ + \frac{\sin n}{n^2} + \ \ldots\ .$$

Решение. Рассматриваемый ряд знакопеременный, поскольку он содержит как положительные члены $\left(\frac{\sin 1}{1^2}, \frac{\sin 2}{2^2}, \frac{\sin 3}{3^2}, \frac{\sin 7}{7^2}, \ldots\right)$, так и отрицательные $\left(\frac{\sin 4}{4^2}, \frac{\sin 5}{5^2}, \frac{\sin 6}{6^2}, \ldots\right)$.

Ряд

$$\frac{|\sin 1|}{1^2}+\frac{|\sin 2|}{2^2}+\frac{|\sin 3|}{3^2}+\ \ldots\ +\frac{|\sin n|}{n^2}+\ \ldots$$

сходится, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^2}+\ \ldots\ .$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 5.14. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ \ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ \ldots\ . \qquad (*)$$

Решение. Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ \ldots\ +\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ \ldots\ ,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. задачу 5.5). Следовательно, ряд (*) не является абсолютно сходящимся. Остается выяснить, сходится ли он (условно) или расходится. Рассматриваемый ряд — знакочередующийся. Поэтому для решения вопроса о его сходимости можно воспользоваться признаком Лейбница. Так как члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\ldots$ и общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,$ то ряд (*) сходится. Итак, данный ряд сходится условно.

Пример 5.15. Исследовать на сходимость ряд

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ \ldots\ +\sin\frac{n\pi}{3}+\ \ldots\ .$$

Решение. Данный знакопеременный ряд расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$ — не существует.

5.5. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\ , \tag{1}$$

где $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\ \ldots$ – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Нахождение области сходимости состоит из двух этапов.

1. Определяется интервал сходимости степенного ряда, т.е. интервал $(–R,\ R)$ числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ и обладающий тем свойством, что при всех $|\,x\,| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при всех $|\,x\,| > R$ – ряд расходится. Для этого применяется признак Даламбера к ряду

$$|\,a_0\,| + |\,a_1\,|\,|\,x\,| + |\,a_2\,|\,|\,x\,|^2 + \ldots + |\,a_n\,|\,|\,x\,|^n + \ldots\ ,$$

члены которого есть абсолютные величины членов данного ряда (1).

2. Исследуется сходимость ряда (1) на концах интервала сходимости в точках $x = –R$ и $x = R$.

Пример 5.16. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{2^2}x^2+\frac{3}{2^3}x^3+\frac{4}{2^4}x^4+\ \ldots\ +\frac{n}{2^n}x^n+\ \ldots$$

в точках $x = 1$, $x = 3$, $x = –2$.

Решение. При $x = 1$ данный ряд превращается в числовой ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ \ldots\ +\frac{n}{2^n}+\ \ldots\ .$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

При x = 3 имеем ряд

$$\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{2}{2^2}\cdot 3^2+\frac{3}{2^3}\cdot 3^3+\ \ldots\ +\frac{n}{2^n}\cdot 3^n+\ \ldots\ .$$

Применяя признак Даламбера, получим

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]:\left[n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]\right\}=\frac{3}{2}>1.$$

Следовательно, в точке x = 3 данный ряд расходится.

Наконец, при x = –2 получаем следующий числовой ряд:

$$-1+2-3+4-\ldots+(-1)^n n+\ldots,$$

который расходится (так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда).

Пример 5.17. Найти область сходимости степенного ряда

$$1-\frac{x}{2\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 2^2}-\frac{x^3}{4\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)2^n}+\ldots\ .$$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{|x|}{2\cdot 2}+\frac{|x|^2}{3\cdot 2^2}+\frac{|x|^3}{4\cdot 2^3}+\ldots+\frac{|x|^n}{(n+1)2^n}+\ldots\ .$$

Согласно признаку Даламбера полученный знакоположительный ряд сходится (абсолютно) при тех значениях x, для которых $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1.$ Здесь $u_n=\frac{|x|^n}{(n+1)2^n},\quad u_{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}.$

Отсюда

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}:\frac{|x|^n}{(n+1)2^n}\right]=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{|x|}{2}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел l будет меньше единицы. Для этого решим неравенство $\frac{|x|}{2} < 1$, или $|x| < 2$, откуда $-2 < x < 2$.

Таким образом, первоначальный ряд сходится (абсолютно) в интервале $(-2; 2)$ — это и есть интервал сходимости данного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -2$ получаем числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots .$$

Это — гармонический ряд, который, как известно, расходится.

При $x = 2$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots ,$$

который по признаку Лейбница сходится (условно).

Итак, область сходимости данного ряда $-2 < x \le 2$.

Пример 5.18. Найти область сходимости степенного ряда

$$x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \ldots + n!\,x^n + \ldots .$$

Решение. Здесь $u_n = n!\,|x|^n$, $u_{n+1} = (n+1)!\,|x|^{n+1}$.

Отсюда

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1),$$

т.е.

$$l = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad x \ne 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера ряд сходится только в точке $x = 0$.

Пример 5.19. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{3^n}{n!}x^n + \ldots .$$

Решение. Имеем $u_n = \frac{3^n}{n!}|x|^n$, $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

Отсюда

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n!|x|^{n+1}}{(n+1)!\,3^n\,|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, при любом конечном x по признаку Даламбера данный ряд абсолютно сходится. Область сходимости рассматриваемого ряда есть вся числовая ось.

5.6. Разложение функций в степенные ряды Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\,. \quad (1)$$

При представлении элементарной функции в виде суммы ряда Тейлора обычно поступают следующим образом: вычисляют последовательные производные данной функции в точке $x = 0$, а затем, пользуясь формулой (1), составляют для нее ряд Тейлора и определяют интервал сходимости полученного ряда. В этом интервале ряд Тейлора сходится к породившей его функции $f(x)$, если только все значения $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(n)}(0)$, … получаются непосредственной подстановкой значения $x = 0$ в выражения $f(x)$, $f'(x)$, …, $f^{(n)}(x)$, … .

Применяя рассмотренный способ, можно найти разложение в ряд Тейлора для следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (4)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1), \qquad (5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1), \qquad (6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \ (-1 < x \le 1). \qquad (7)$$

Помимо указанного способа, можно получить разложения функций в ряд Тейлора, исходя из известных разложений, например, разложений (2) – (7). При этом возможно использование следующих действий над степенными рядами внутри их интервалов сходимости:

1) два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилу умножения многочленов;

2) степенной ряд можно почленно умножать на общий множитель;

3) степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

Так как степенной ряд для своей суммы есть ряд Тейлора, то полученное в результате указанных действий разложение будет искомым.

Пример 5.20. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{3x}$.

Решение. Вычислим значения данной функции и ее последовательных производных при $x = 0$:

$$\begin{array}{rr}
f(x) = e^{3x}, & f(0) = 1, \\
f'(x) = 3e^{3x}, & f'(0) = 3, \\
f''(x) = 3^2 e^{3x}, & f''(0) = 3^2, \\
f'''(x) = 3^3 e^{3x}, & f'''(0) = 3^3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}, & f^{(n)}(0) = 3^n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Подставляя полученные значения в общее выражение ряда Тейлора для произвольной функции, получим

$$e^{3x} = 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{3^n}{n!}x^n + \ldots \ .$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора для функции $f(x) = e^{3x}$. Полученный ряд сходится к породившей его функции $f(x) = e^{3x}$ при любом значении x (см. задачу 5.19).

Заметим, что то же самое разложение можно получить из ряда Тейлора для функции e^{3x} заменой x на $3x$.

Пример 5.21. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = ln(1-2x)$.

Решение. Заменяя в разложении (7) x на $-2x$, получим:

$$\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n} + \ldots ,$$

или

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{2^2}{2}x^2 - \frac{2^3}{3}x^3 - \ldots - \frac{2^n}{n}x^n - \ldots .$$

Разложение (7) справедливо в интервале $-1 < x \le 1$, а искомое разложение получается в результате замены x на $-2x$; следовательно, для нахождения интервала сходимости полученного ряда нужно решить неравенство

$$-1 < -2x \le 1,$$

откуда

$$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}.$$

Пример 5.22. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. По известной тригонометрической формуле имеем:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $\cos 2x$, заменяя в разложении (4) x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!} + \ldots ,$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots . \qquad (*)$$

Разложение (4) справедливо при любом x, поэтому ряд Тейлора для $\cos 2x$ сходится к породившей его функции также на всей числовой оси.

Для того чтобы получить разложение в ряд Тейлора функции $\frac{1}{2}\cos 2x$, умножим все члены ряда (*) на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots .$$

Тогда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots .$$

Это и есть разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = \cos^2 x$. Очевидно, что оно справедливо при любом x.

Пример 5.23. Применяя дифференцирование и интегрирование, найти разложение в ряд Тейлора для данной функции $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место.

Решение. Запишем выражение данной функции в виде интеграла:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Разложим подинтегральную функцию $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ в ряд Тейлора. Для этого в разложении (6) заменим x на $-t^2$:

$$f(t) = \frac{1}{1-(-t^2)} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots .$$

Очевидно, что этот ряд сходится в интервале (–1; 1). Интегрируя почленно полученный ряд в пределах от 0 до x (где $|x| < 1$), получаем разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Этот ряд сходится в том же интервале (–1; 1), что и исходный ряд.

5.7. Приложение рядов к приближенным вычислениям

Пример 5.24. Вычислить sin 18°, ограничиваясь первыми двумя членами ряда (3), и оценить получающуюся при этом погрешность.

Решение. Так как разложение sin x в ряд Тейлора справедливо при любом x, то, в частности, при $x=\dfrac{\pi}{10}$ имеем

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}-\ldots .$$

Полученный ряд — знакочередующийся. Ограничиваясь двумя членами этого ряда, т.е. считая $\sin\dfrac{\pi}{10}$ равным их сумме, мы тем самым допускаем ошибку, не превосходящую первого отбрасываемого члена $\dfrac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}$ (см. 5.3). Так как $\dfrac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!}<0{,}0001,$ то с точностью до 0,0001 получаем

$$\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}=0{,}3091.$$

Пример 5.25. Вычислить e^2 с точностью до 0,01.

Решение. Пользуясь разложением (2), при x = 2 получим

$$e^2=1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots .$$

Остается решить вопрос о том, сколько членов данного ряда надо взять, чтобы получить значение e^2 с требуемой точностью. Пусть искомое число членов равно k. Это означает, что ошибка

ΔS_k, которую мы допускаем, заменяя сумму ряда его k-й частичной суммой, равна сумме членов ряда, начиная с $(k + 1)$-го:

$$\Delta S_k = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{2^{k+3}}{(k+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2^{k+2}}{(k+1)!(k+2)} + \frac{2^{k+3}}{(k+1)!(k+2)(k+3)} + \ldots =$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{2}{k+2} + \frac{2^2}{(k+2)(k+3)} + \ldots\right].$$

Если в этом ряде заменить каждое из чисел $k + 2$, $k + 3$, … числом $k + 1$, то знаменатели дробей уменьшатся, а сами дроби, следовательно, увеличатся. Отсюда

$$\Delta S_k < \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{2}{k+1} + \frac{2^2}{(k+1)^2} + \ldots\right].$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{2}{k+1}$, и следовательно, равно

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{2}{k+1}} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Таким образом,

$$\Delta S_k < \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k+1}{k-1} = \frac{2^{k+1}}{k!(k-1)}.$$

Но с другой стороны, ошибка ΔS_k не должна превосходить 0,01: $\Delta S_k < 0{,}01$. Решая методом подбора неравенство

$$\frac{2^{k+1}}{k!(k-1)} < 0{,}01 \quad \text{или} \quad \frac{k!(k-1)}{2^{k+1}} > 100,$$

получим $k > 7$.

Итак, для достижения требуемой точности надо взять 8 членов ряда:

$$e^2 \approx 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} \approx 7{,}38\ .$$

Пример 5.26. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,01.

Решение. Данный определенный интеграл можно вычислить только приближенно. Для этого разложим подинтегральную функцию в ряд Тейлора:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots .$$

Отсюда

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx =$$

$$= x \Big|_0^1 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{1}{7!} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 + \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \dots \approx 1 - \frac{1}{3!3} = 0{,}94$$

(здесь мы ограничились двумя первыми членами этого знакопеременного ряда, так как третий член $\frac{1}{5!5}$ меньше 0,01).

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛАМ 3, 4 И 5

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Неопределенный интеграл

4.1.1. Найти интегралы и в пункте а) результат проверить дифференцированием:

а) $$J=\int\left(4x^2+\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+8\right)dx=\int 4x^2dx+\int 2x^{-\frac{3}{5}}dx+8\int dx=$$

$$=4\int x^2dx+2\int x^{-\frac{3}{5}}dx+8\int dx=4\cdot\frac{x^3}{3}+2\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+8x+C=$$

$$=\frac{4}{3}x^3+5x^{\frac{2}{5}}+8x+C.$$

Результат проверяем дифференцированием:

$$d\left(\frac{4}{3}x^3+5x^{\frac{2}{5}}+8x+C\right)=\left(\frac{4}{3}x^3+5x^{\frac{2}{5}}+8x+C\right)'dx=$$

$$=\left(\frac{4}{3}\cdot 3x^2+5\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{2}{5}-1}+8\cdot 1+0\right)dx=\left(4x^2+\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+8\right)dx.$$

Верно.

б) $$J=\int\frac{dx}{x\sqrt{5x-2x^2}}.$$

Введем подстановку $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

$$J=-\int\frac{dt\cdot t}{t^2\sqrt{\frac{5}{t}-2\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{5t-2}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{5t-2.}}$$

Пусть $z = 5t - 2$, тогда $dz = 5dt$ и $dt = \frac{dz}{5}$.

$$J = -\int \frac{dz}{5\sqrt{z}} = -\frac{1}{5}\int z^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{1}{5}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{z} + C =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{5t-2} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{5\cdot\frac{1}{x} - 2} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5-2x}{x}} + C = -\frac{2}{5}\frac{\sqrt{5x-2x^2}}{x} + C.$$

в) $J = \int (x+3)^2 e^{-2x} dx.$

Применяем формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du.$ Пусть $u = (x + 3)^2$, $du = 2(x + 3)dx$.

$$dv = e^{-2x}dx;\ \ v = -\frac{1}{2}\int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

$$J = (x+3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) 2(x+3)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+3)^2 e^{-2x} + \int (x+3)e^{-2x} dx.$$

Еще раз интегрируем по частям: $u = x + 3$, $du = dx$.

$$dv = e^{-2x}dx;\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x},$$

тогда

$$J = -\frac{1}{2}(x+3)^2 e^{-2x} + (x+3)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+3)^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left((x+3)^2 + (x+3) + \frac{1}{2}\right) + C.$$

г) $J=\int\frac{3x+13}{x^3-6x^2+13}dx.$

Подинтегральная функция представляет собой правильную алгебраическую дробь. Раскладываем знаменатель на простые множители и дробь представляем в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{3x+13}{x(x^2-6x+13)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+13};$$

$$3x + 13 = A(x^2 - 6x + 13) + (Bx + C)\cdot x.$$

Равенство справедливо при любом x. Пусть

$x = 0 : 3\cdot 0 + 13 = A(0 - 6\cdot 0 + 13) + (B\cdot 0 + C)\cdot 0;\ 13 = 13A;\ A = 1.$

$x = -1 : -3 + 13 = A(1 + 6 + 13) - (-B + C);\ 10 = 20A + B - C;$
$10 = 20 + B - C;\ \text{B} - \text{C} = - 10.$

$x = 1 : 3 + 13 = A(1 - 6 + 13) + B + C;\ 16 = 8\cdot 1 + B + C;\ B + C = 8.$

Имеем систему: $\begin{cases}B-C=-10\\ B+C=8\end{cases}$, из которой $B = -1$; $C = 9$.

Тогда

$$J=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+9}{x^2-6x+13}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x-9}{x^2-6x+13}dx.$$

Рассмотрим $J_1=\int\frac{x-9}{x^2-6x+13}\,dx.$

Пусть $t=\frac{1}{2}(x^2-6x+13)$, отсюда $dt = (x - 3)dx$.

Имеем

$$J_1=\int\frac{(x-3)-6}{x^2-6x+13}\,dx=\int\frac{(x-3)dx}{x^2-6x+13}-6\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=$$

$$=\int\frac{dt}{2t}-6\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\ln|t|-6\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}.$$

Подставляем в J:

$$J=\ln|x|-\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-6x+13}{2}\right|-3\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}\right)+C=$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-6x+13}{2}\right|+3\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

д) $J=\int\frac{dx}{\sin 3x+3}$.

Пусть $t=3x,\ x=\frac{1}{3}t,\ dx=\frac{1}{3}dt,$ тогда $J=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sin t+3}$.

Рассмотрим $J_1=\int\frac{dt}{\sin t+3}$.

Введем подстановку: $z=\operatorname{tg}\frac{t}{2},$ тогда $\sin t=\frac{2z}{1+z^2}$ и $dt=\frac{2dz}{1+z^2}$.

Имеем:

$$J_1=\int\frac{2dz}{(1+z^2)\left(\frac{2z}{1+z^2}+3\right)}=2\int\frac{dz}{2z+3+3z^2}=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2+\frac{2}{3}z+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dz}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\int\frac{d\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3z+1}{\sqrt{8}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{8}}+C.$$

Окончательно

$$J=\int\frac{dx}{\sin 3x+3}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{3x}{2}+1}{\sqrt{8}}+C.$$

4.2. Несобственные интегралы

4.2.1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $J=\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{(2^2+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{dx}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$.

Пусть $t=\dfrac{x}{2}$ и $dt=\dfrac{1}{2}dx$, сменим пределы интегрирования:

$$t_{\text{Н}}=\frac{x_{\text{Н}}}{2}=\frac{2}{2}=1,\ t_{\text{В}}=\frac{x_{\text{В}}}{2}=\frac{b}{2}.$$

$$J=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{\frac{b}{2}}\frac{dt}{(1+t^2)\operatorname{arctg}t}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\frac{b}{2}}\frac{dz}{z}\Rightarrow$$

Пусть $z=\operatorname{arctg}t$, тогда $dz=\dfrac{dt}{1+t^2}$ и новые пределы интегрирования будут:

$$z_{\text{Н}}=\operatorname{arctg}t_{\text{С}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},\ z_{\text{В}}=\operatorname{arctg}t_{\text{В}}=\operatorname{arctg}\frac{b}{2}.$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln z\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\frac{b}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\operatorname{arctg}\frac{b}{2}-\ln\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\operatorname{arctg}\infty-\ln\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}\frac{4}{\pi}=\frac{1}{2}\ln 2-$$

интеграл сходится.

б) $J=\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}.$

Найдем точки, в которых подинтегральная функция терпит разрыв: $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=3$ и обе точки принадлежат отрезку интегрирования [2; 5]. Тогда

$$J=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \delta\to0}}\int_{2+\varepsilon}^{3-\delta}\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}+\lim_{\gamma\to0}\int_{3+\gamma}^{5}\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \delta\to0}}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3-\delta}+\lim_{\gamma\to0}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|\Bigg|_{3+\gamma}^{5}=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \delta\to0}}\left(\ln\left|3-\delta-\frac{5}{2}+\sqrt{(3-\delta)^2-5(3-\delta)+6}\right|-\ln\left|2+\varepsilon-\frac{5}{2}+\sqrt{(2+\varepsilon)^2-5(2+\varepsilon)+6}\right|\right)+$$

$$+\lim_{\gamma\to0}\left(\ln\left|5-\frac{5}{2}+\sqrt{5^2-5\cdot5+6}\right|-\ln\left|3+\gamma-\frac{5}{2}+\sqrt{(3+\gamma)^2-5(3+\gamma)+6}\right|\right)=$$

$$= \ln\left|3-\frac{5}{2}\right| - \ln\left|2-\frac{5}{2}\right| + \ln\left|\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right| - \ln\left|3-\frac{5}{2}\right| = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} +$$

$$+\ln\frac{5+2\sqrt{6}}{2} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{(5+2\sqrt{6})\cdot 2}{2} = \ln(5+2\sqrt{6}) \text{ —}$$

интеграл сходится.

4.3. Приложения определенных интегралов

4.3.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, и построить схематические чертежи фигур.

а) $y = x^2 + 2x - 16$, $4x - y - 8 = 0$.

Имеем параболу: $y = (x + 1)^2 - 17$ и прямую: $4x - y - 8 = 0$. Нужно определить заштрихованную площадь (рис. 53).

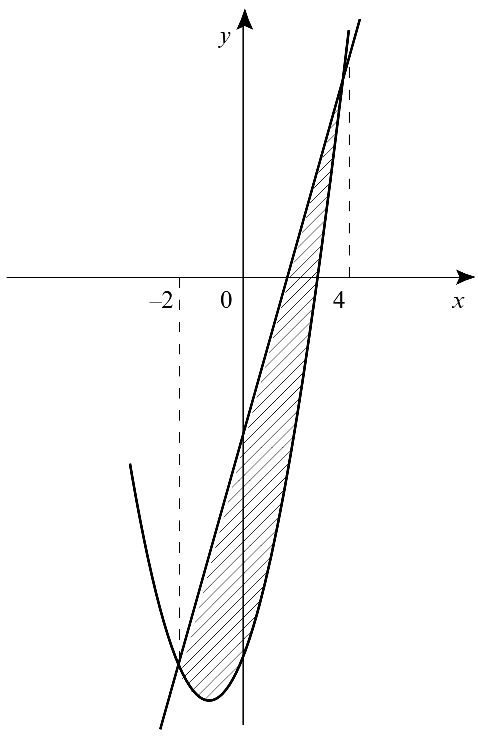


Рис. 53

Найдем общие точки фигуры (пределы интегрирования):

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 16, \\ y = 4x - 8, \end{cases}$$

отсюда $x^2 - 2x - 8 = 0$ и $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Площадь фигуры определяется как:

$$S = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx = \int_{-2}^{4} |(4x-8) - (x^2 + 2x - 16)|\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{4} |8 + 2x - x^2|\, dx = \left(8x + 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= \left(8 \cdot 4 + 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3\right) - \left(8 \cdot (-2) + (-2)^2 - \frac{1}{2}(-2)^3\right) = 36 \text{ (кв. ед.)}$$

б) $(x^2 + y^2)^2 = 18\, xy$.

Запишем это уравнение в полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

Подставив, получим:

$$\rho^2 = 9 \sin 2\varphi.$$

Площадь лемнискаты (рис. 54) равна четырем заштрихованным площадям, тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi\, d\varphi = 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -9\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

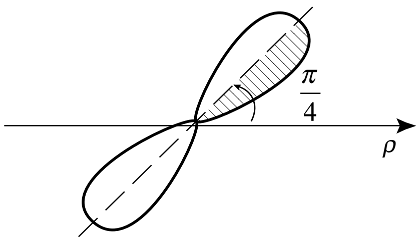


Рис. 54

4.3.2. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y=0;\quad y=\frac{x^2}{4};\quad 2x+y-12=0.$$

Находим общие точки фигуры:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4}, \\ y=-2x+12, \end{cases}$$

отсюда $x^2+8x-48=0$ и $x_1=-12$, $x_2=4$.

Заштрихованная фигура (рис. 55) вращается вокруг оси Ox. Объем тела вращения определяется как:

$$V=\pi\int_0^4 y^2dx+\pi\int_4^6 y^2dx=\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx+\pi\int_4^6(-2x+12)^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4dx+4\pi\int_4^6(x^2-12x+36)dx=$$

$$=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^4+4\pi\left(\frac{1}{3}x^3-12\cdot\frac{1}{2}x^2+36x\right)\Big|_4^6=$$

$$=\frac{\pi}{80}\cdot 4^5+4\pi\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 6^3-6\cdot 6^2+36\cdot 6\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-6\cdot 4^2+36\cdot 4\right)\right)=$$

$$=\frac{64\pi}{5}+\frac{32\pi}{3}=\frac{352}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

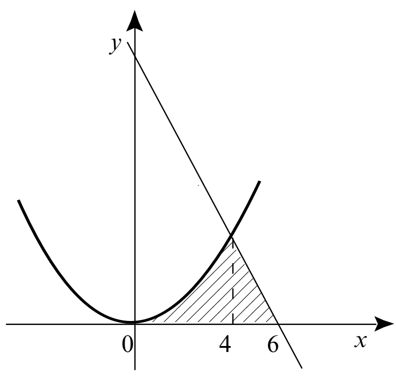


Рис. 55

4.4. Приближенные вычисления определенных интегралов

4.4.1. Разбивая отрезок интегрирования сначала на 10 равных частей, а затем на 20 частей, найти приближенно интегралы J_{10} и J_{20}. Определить точность с помощью разности $\varepsilon = | J_{10} - J_{20} |$.

$$J = \int_{-1}^{9} \sqrt{x^2 + 4}\, dx$$

а) по формуле трапеций;

б) по формуле Симпсона.

Решение. Имеем подинтегральную функцию $y = \sqrt{x^2 + 4}$. Составим вспомогательную таблицу.

x_i	x_i^2	$x_i^2 + 4$	При делении на 10 частей $y_i = \sqrt{x_i^2 + 4}$	При делении на 20 частей $y_i = \sqrt{x_i^2 + 4}$
–1	1	5	y_0 = 2,23607	y_0 = 2,23607
–0,5	0,25	4,25		y_1 = 2,06155
0	0	4	y_1 = 2,0	y_2 = 2,0
0,5	0,25	4,25		y_3 = 2,06155
1	1	5	y_2 = 2,23607	y_4 = 2,23607
1,5	2,25	6,25		y_5 = 2, 5
2	4	8	y_3 = 2,82843	y_6 = 2,82843
2,5	6,25	10,25		y_7 = 3, 20156
3	9	13	y_4 = 3,60555	y_8 = 3,60555
3,5	12,25	16,25		y_9 = 4,03113
4	16	20	y_5 = 4,47214	y_{10} = 4,47214
4,5	20,25	24,25		y_{11} = 4,92443
5	25	29	y_6 = 5,38516	y_{12} = 5,38516
5,5	30,25	34,25		y_{13} = 5,85235
6	36	40	y_7 = 6,32456	y_{14} = 6,32456
6,5	42,25	46,25		y_{15} = 6,80074
7	49	53	y_8 = 7,28011	y_{16} = 7,28011
7,5	56,25	60,25		y_{17} = 7,76209
8	64	68	y_9 = 8,24621	y_{18} = 8,24621
8.5	72,25	76,25		y_{19} = 8,73212
9	81	85	y_{10} = 9,21954	y_{20} = 9,21954

а) По формуле трапеций.

При делении на 10 частей:

$$J_{10}=\int_{-1}^{9}\sqrt{x^2+4}\,dx\approx\frac{9-(-1)}{10}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_8+y_9+\frac{y_{10}}{2}\right)=$$

$$=\frac{10}{10}\cdot 48{,}10604=48{,}10604.$$

При делении на 20 частей:

$$J_{20}=\int_{-1}^{9}\sqrt{x^2+4}\,dx\approx\frac{9-(-1)}{20}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{18}+y_{19}+\frac{y_{20}}{2}\right)=$$

$$=\frac{10}{20}\cdot 96{,}03356=48{,}01678.$$

Точность вычислений оцениваем с помощью разности:

$$\varepsilon=|J_{10}-J_{20}|=|48{,}10604-48{,}01678|=0{,}08926.$$

б) По формуле Симпсона.

При делении на 10 частей:

$$J_{10}=\int_{-1}^{9}\sqrt{x^2+4}\,dx\approx$$

$$\approx\frac{9-(-1)}{10\cdot 3}(y_0+4(y_1+y_3+\ldots+y_9)+2(y_2+y_4+\ldots+y_8)+y_{10})=$$

$$=\frac{10}{10\cdot 3}\cdot 143{,}95475=47{,}98492.$$

При делении на 20 частей:

$$J_{20}=\int_{-1}^{9}\sqrt{x^2+4}\,dx\approx$$

$$\approx\frac{9-(-1)}{20\cdot 3}(y_0+4(y_1+y_3+\ldots+y_{17}+y_{19})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{16}+y_{18})+y_{20})=$$

$$=\frac{10}{20\cdot 3}\cdot 287{,}92215=47{,}98702.$$

Точность вычислений:

$$e=|J_{10}-J_{20}|=|47{,}98492-47{,}98702|=0{,}0021.$$

Известно, что при одинаковом числе точек разбиения формула Симпсона дает более точный результат.

5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Частные производные и дифференциал функции

5.1.1. Найти частные производные z'_x, z'_y, и z''_{xy} функций:
а) $z = (x-4)^2y^2 + x^4(y+2)^3 + 8$.
Находим:

$$z'_x = \left((x-4)^2 \cdot y^2 + x^4(y+2)^3 + 8\right)'_x = 2(x-4)\cdot y^2 + 4x^3(y+2)^3;$$

$$z'_y = \left((x-4)^2 y^2 + x^4(y+2)^3 + 8\right)'_y = 2(x-4)^2 y + 3x^4(y+2)^2;$$

$$z'_{xy} = \left(2(x-4)\cdot y^2 + 4x^3(y+2)^3\right)'_y = 4(x-4)y + 12x^3(y+2)^2.$$

б) $z = e^{\frac{x-4}{y-2}}$.
Находим:

$$z'_x = \left(e^{\frac{x-4}{y-2}}\right)'_x = e^{\frac{x-4}{y-2}} \cdot \left(\frac{x-4}{y-2}\right)'_x = \frac{1}{y-2}e^{\frac{x-4}{y-2}};$$

$$z'_y = \left(e^{\frac{x-4}{y-2}}\right)'_y = e^{\frac{x-4}{y-2}} \cdot \left(\frac{x-4}{y-2}\right)'_y = -\frac{x-4}{(y-2)^2}e^{\frac{x-4}{y-2}};$$

$$z'_{xy} = \left(\frac{1}{y-2}\cdot e^{\frac{x-4}{y-2}}\right)'_y = \left(\frac{1}{y-2}\right)'_y \cdot e^{\frac{x-4}{y-2}} + \frac{1}{y-2}\cdot\left(e^{\frac{x-4}{y-2}}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{(y-2)^2}e^{\frac{x-4}{y-2}} + \frac{1}{y-2}\cdot e^{\frac{x-4}{y-2}}\cdot\left(-\frac{x-4}{(y-2)^2}\right) = -\frac{1}{(y-2)^2}e^{\frac{x-4}{y-2}}\cdot\left(1+\frac{x-4}{y-2}\right).$$

5.1.2. Найти дифференциал dz функции:

$$z = \sin^2(4x^2 - 2y^2).$$

Полный дифференциал определяется как:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\sin^2(4x^2 - 2y^2)\right)'_x = 2\sin(4x^2 - 2y^2)\cdot\left(\sin(4x^2 - 2y^2)\right)'_x =$$

$$= 2\sin(4x^2 - 2y^2)\cdot\cos(4x^2 - 2y^2)\cdot\left(4x^2 - 2y^2\right)'_x =$$

$$= \sin 2(4x^2 - 2y^2)\cdot 4\cdot 2x = 8x\sin(8x^2 - 4y^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\sin^2(4x^2 - 2y^2)\right)'_y = 2\sin(4x^2 - 2y^2)\left(\sin(4x^2 - 2y^2)\right)'_y =$$

$$= 2\sin(4x^2 - 2y^2)\cdot\cos(4x^2 - 2y^2)\cdot\left(4x^2 - 2y^2\right)'_y =$$

$$= \sin 2(4x^2 - 2y^2)\cdot(-2\cdot 2y) = -4y\cdot\sin(8x^2 - 2y^2).$$

Тогда полный дифференциал будет равен:

$$dz = 8x\sin(8x^2 - 4y^2)\,dx - 4y\sin(8x^2 - 2y^2)\,dy =$$

$$= 4\sin(8x^2 - 4y^2)\,(2xdx - ydy).$$

5.1.3. Показать, что функция $z = y\ln(4x^2 - 2y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}z'_x + \frac{2}{y}z'_y = \frac{2z}{y^2}$.

Найдем частные производные:

$$z'_x = \left(y\ln(4x^2 - 2y^2)\right)'_x = y\cdot\frac{1}{4x^2 - 2y^2}\cdot\left(4x^2 - 2y^2\right)'_x = \frac{8xy}{4x^2 - 2y^2},$$

$$z'_y = \left(y\cdot\ln(4x^2 - 2y^2)\right)'_y = y'_y\cdot\ln\left(4x^2 - 2y^2\right) + y\cdot\left(\ln(4x^2 - 2y^2)\right)'_y =$$

$$= \ln(4x^2 - 2y^2) + y\cdot\frac{1}{4x^2 - 2y^2}\cdot\left(4x^2 - 2y^2\right)'_y = \ln(4x^2 - 2y^2) - \frac{4y^2}{4x^2 - 2y^2}.$$

Подставляем найденные частные производные в уравнение:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{8xy}{4x^2 - 2y^2} + \frac{2}{y}\left(\ln(4x^2 - 2y^2) - \frac{4y^2}{4x^2 - 2y^2}\right) = \frac{2y\ln(4x^2 - 2y^2)}{y^2};$$

$$\frac{8y}{4x^2 - 2y^2} + \frac{2\ln(4x^2 - 2y^2)}{y} - \frac{8y}{4x^2 - 2y^2} = \frac{2\ln(4x^2 - 2y^2)}{y};$$

$$\frac{2\ln(4x^2 - 2y^2)}{y} = \frac{2\ln(4x^2 - 2y^2)}{y}.$$

Получили тождество.

5.2. Приложения частных производных

5.2.1. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $4z = xy - 2x - 4y + 8$ в точке M (–4; –2; 8).

Решение. Проверим принадлежит ли точка M поверхности:

$$4 \cdot 8 = (-4) \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) - 4(-2) + 8, \quad 32 = 32,$$

следовательно, точка М принадлежит поверхности.

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_M) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_M).$$

Найдем значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{1}{4}(xy - 2x - 4y + 8)\right)'_x = \frac{1}{4}(y - 2); \; \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M =$$

$$= \frac{1}{4}(-2 - 2) = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{4}(xy - 2x - 4y + 8)\right)'_y = \frac{1}{4}(x - 4); \; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M =$$

$$= \frac{1}{4}(-4 - 4) = -2,$$

и подставим в уравнение касательной плоскости:

$$z - 8 = (-1)\,(x - (-4)) + (-2)(y - (-2)) \quad \text{или} \quad x + 2y + z = 0.$$

Уравнение нормали берем в виде:

$$\frac{x - x_M}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_M}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_M}{-1}, \text{ или } \frac{x + 4}{-1} = \frac{y + 2}{-2} = \frac{z - 8}{-1},$$

$$\text{или} \quad x + 4 = \frac{y + 2}{2} = z - 8.$$

5.2.2. Найти градиент и производную по направлению $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$ функции $z = \ln(4x^2 + 2y^2)$ в точке A (–2; 4).

Решение. Градиент функции $z = f(x, y)$ равен:

$$\overline{\text{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\bar{j}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(4x^2 + 2y^2)\right)'_x = \frac{1}{4x^2 + 2y^2}\cdot\left(4x^2 + 2y^2\right)'_x = \frac{8x}{4x^2 + 2y^2} = \frac{4x}{2x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(4x^2 + 2y^2)\right)'_y = \frac{1}{4x^2 + 2y^2}\cdot\left(4x^2 + 2y^2\right)'_y \frac{2\cdot 2y}{4x^2 + 2y^2} = \frac{2y}{2x^2 + y^2}$$

и их значения в точке A (–2; 4):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = \frac{4(-2)}{2(-2)^2 + 4^2} = -\frac{1}{3};\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = \frac{2\cdot 4}{2(-2)^2 + 4^2} = \frac{1}{3}.$$

Тогда градиент в точке A равен:

$$\left(\overline{\text{grad}}\, z\right)_A = -\frac{1}{3}\bar{\imath} + \frac{1}{3}\bar{j}.$$

Производная функции z в направлении вектора $\bar{a}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\alpha.$$

Найдем направляющий косинус вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_A = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{3\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{15}.$$

5.2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 20$$

в замкнутой области D, заданной неравенствами:

$$x \geq 0,\ x - 2y \leq 0, \quad x + y - 6 \leq 0.$$

Решение.

а) Найдем частные производные и приравняем их к нулю (необходимые условия экстремума):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 20)'_x = 8x - 16;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0;\ 8x - 16 = 0;\ x_0 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 20)'_y = 2y - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0;\ 2y - 4 = 0;\ y_0 = 2;$$

Стационарная точка $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ лежит в замкнутой области, так как: $2 \geq 0$; $2 - 2 \cdot 2 < 0$; $2 + 2 - 6 < 0$.

Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (8x - 16)'_x = 8; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (8x - 16)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y - 4)'_y = 2$$

и их значения в стационарной точке M (2; 2):

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 8; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = 0; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 2.$$

Так как $\Delta = A \cdot C - B^2 = 8 \cdot 2 - 0 = 16 > 0$, то в точке M функция имеет экстремум, а именно минимум, так как $A = 8 > 0$; $z_{min}(2; 2) = 4 \cdot 2^2 + 2^2 - 16 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 20 = 0$.

б) Построим замкнутую область OAB (рис. 56).

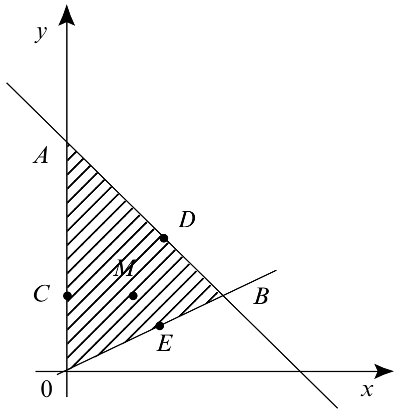


Рис. 56

Рассмотрим контур $x = 0$ (прямая OA). Имеем функцию одной переменной: $z = y^2 - 4y + 20$. Исследуем ее на экстремум:

$$z' = 2y - 4.$$

Из $z' = 0$ имеем $2y - 4 = 0$ или $y = 2$. И так как

$$z''(2) = (2y - 4)'_{y=2} = (2)_{y=2} = 2 > 0,$$

то имеем минимум и $z_C = z\,(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 20 = 16$.

Далее рассмотрим контур $x + y - 6 = 0$ или $y = 6 - x$ (прямая AB). Имеем:

$$z = 4x^2 + (6 - x)^2 - 16x - 4(6 - x) + 20$$

или

$$z = 5x^2 - 24x + 32.$$

Найдем $z' = 10x - 24$ и из $z' = 0$ имеем $10x - 24 = 0$, или $x = \dfrac{12}{5}$

Так как $z'' = (10x - 24)' = 10 > 0$, то при $x = \dfrac{12}{5}$ имеем минимум и $z_D = z\left(\dfrac{12}{5}\right) = 5 \cdot \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 - 24 \cdot \left(\dfrac{12}{5}\right) + 32 = \dfrac{16}{5}$.

На контуре $x - 2y = 0$ или $x = 2y$ (прямая OB) имеем $z = 4(2y)^2 + y^2 - 16 \cdot 2y - 4y + 20$ или $z = 17y^2 - 36y + 20$. Находим производную $z' = (17y^2 - 36y + 20)' = 34y - 36$, приравниваем ее к нулю $z' = 0$ или $34y - 36 = 0$, отсюда $y = \frac{18}{17}$.

Так как $z'' = (34y - 36)' = 34 > 0$, то в точке $y = \frac{18}{17}$ имеем минимум и $z_E = 17\left(\frac{18}{17}\right)^2 - 36 \cdot \frac{18}{17} + 20 = \frac{16}{17}$.

Найдем значения функции z в точках O (0; 0), A (0; 6) и B (4; 2):

$$z_0 = 20;\ z_A = 4 \cdot 0 + 6^2 - 16 \cdot 0 - 4 \cdot 6 + 20 = 32;$$

$$z_B = 4 \cdot 4^2 + 2^2 - 16 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 20 = 16.$$

Из найденных значений $z_{min} = 0$; $z_C = 16$; $z_D = \frac{16}{5}$; $z_E = \frac{16}{17}$; $z_0 = 20$; $z_A = 32$; $z_B = 16$ выбираем наименьшее и наибольшее. Получаем, что $z_{наим} = 0$, $z_{наиб} = 32$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Уравнения первого порядка

8.1.1. Найти общее решение уравнения:

а) $y' = e^{4x - 2y}$. Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его.

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} \cdot e^{-2y}, \quad e^{2y}dy = e^{4x}dx.$$

Интегрируем

$$\int e^{2y}dy = \int e^{4x}dx \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\int e^{2y}d(2y) = \frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x).$$

Тогда $\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{4}e^{4x} + C$ или $e^{2y} = \frac{1}{2}e^{4x} + C$ есть общее решение исходного уравнения.

б) $(3x - 5y)\,y' = 5x + 3y$.

Разделив уравнение на x

$$\left(3 - 5\frac{y}{x}\right)y' = 5 + 3\frac{y}{x},$$

получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка, которое сведем к уравнению с разделяющимися переменными введением функции $t = \dfrac{y}{x}$, отсюда $y = x \cdot t$ и $y' = t + x \cdot t'$.

Подставляем в исходное уравнение $(3 - 5t)(t + xt') = 5 + 3t$, или $t + xt' = \dfrac{5+3t}{3-5t}$, или $x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{5+3t}{3-5t} - t$, или $x \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{5+5t^2}{3-5t}$. Разделяем переменные $\dfrac{3-5t}{5+5t^2}dt = \dfrac{dx}{x}$. Числитель делим почленно на знаменатель и интегрируем

$$\frac{3}{5}\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{tdt}{1+t^2} = \int\frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}\int\frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \int\frac{dx}{x}.$$

Все интегралы табличные, тогда

$$\frac{3}{5}\operatorname{arc\ tg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln x + \ln C \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}\operatorname{arc\ tg} t = \ln cx\sqrt{1+t^2}.$$

Подставляем сюда $t = \dfrac{y}{x}$, получим

$$\frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln cx\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad \text{или} \quad \frac{3}{5}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln c\sqrt{x^2+y^2}.$$

Это и будет общее решение исходного дифференциального уравнения.

в) $(4+x^2)y' + 2y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое решаем подстановкой Бернулли $y = u(x) \cdot v(x)$ и $y' = u'v + uv'$, после чего приходим к решению двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Подставляем $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение

$$(4+x^2)(u'v+uv')+2uv=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}.$$

Группируем

$$(4+x^2)u'v+((4+x^2)v'+2v)u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}. \tag{a}$$

Пусть

$$(4+x^2)v'+2v=0 \text{ или } (4+x^2)\frac{dv}{dx}=-2v.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{4+x^2}, \text{ или } \int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{2^2+x^2}, \text{ или } \ln v=-2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2},$$

отсюда

$$v=e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}} \tag{b}$$

Подставляем функцию (b) в уравнение (a)

$$(4+x^2)e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\cdot u'=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} \quad \text{или} \quad (4+x^2)e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{du}{dx}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$du=e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{4+x^2} \quad \text{или} \quad \int du=\int e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\frac{dx}{4+x^2}. \tag{c}$$

Чтобы взять интеграл в правой части, введем новую переменную $t=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$, тогда

$$dt=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}dx \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}dt=\frac{dx}{4+x^2}.$$

Выражение (c) примет вид

$$u=\frac{1}{2}\int te^t\,dt. \tag{d}$$

Этот интеграл берется по частям по формуле $\int u dv = uv - \int v \cdot du$, но функции $u(x)$ и $v(x)$ здесь совсем другие, чем (b) и (c).

$$u = t, \quad du = dt,$$

$$dv = e^t dt, \int dv = \int e^t dt \quad \text{или} \quad v = e^t. \tag{e}$$

С использованием выражений (e) интеграл (d) с использованием формулы интегрирования по частям запишется как

$$u = \frac{1}{2}(t \cdot e^t - \int e^t \cdot dt) = \frac{1}{2}(te^t - e^t + c).$$

Подставляя сюда $t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$, получим:

$$u = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} \cdot e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}} - e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}} + c\right). \tag{f}$$

Следовательно, решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = uv = \frac{1}{2}e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} \cdot e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}} - e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}} + c\right)$$

$$\text{или} \quad y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} - 1 + c \cdot e^{-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}\right).$$

г) $y' + \frac{4}{x}y = x^2 y^2$.

Это, так называемое, дифференциальное уравнение Бернулли вида

$$y' + p\,(x) \cdot y = q\,(x) \cdot y^n.$$

Сначала его нужно разделить на y^n, а затем ввести вспомогательную функцию $z = y^{-n+1}$.

Делим исходное уравнение на y^2

$$y^{-2} \cdot y' + \frac{4}{x} \cdot y^{-1} = x^2. \tag{a}$$

Пусть $z = y^{-2+1} = y^{-1}$, найдем

$$z' = -y^{-2}\cdot y' \quad \text{или} \quad y^{-2}\cdot y' = -z' \tag{b}$$

Подставляем функции (b) в уравнение (a)

$$-z' + \frac{4}{x}\cdot z = x^2. \tag{c}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение, которое решаем методом Бернулли

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'. \tag{d}$$

Подставляем функции (d) в уравнение (c)

$$-(u'v + uv') + \frac{4}{x}uv = x^2$$

и группируем

$$-u'v + \left(-uv' + \frac{4}{x}uv\right) = x^2 \quad \text{или} \quad -u'v + \left(-v' + \frac{4}{x}v\right)u = x^2. \tag{e}$$

Пусть

$$-v' + \frac{4}{x}v = 0, \ \text{или} \ \frac{dv}{dx} = \frac{4}{x}v, \ \text{или} \ \frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x}, \ \text{или} \ \int\frac{dv}{v} = 4\int\frac{dx}{x}. \tag{f}$$

Отсюда

$$\ln v = 4\ln x \quad \text{или} \quad v = x^4. \tag{g}$$

Подставляем (g) в уравнение (e)

$$-x^4\cdot u' = x^2$$

или при $x \neq 0$

$$-x^2\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{или} \quad du = -\frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируем

$$\int du = -\int x^{-2}dx, \quad \text{или} \quad u = -\frac{x^{-1}}{-1} + C, \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{x} + C.$$

Эту функцию и (g) подставляем в (d)

$$z = x^4\left(\frac{1}{x}+C\right) \text{ или } z = x^3 + Cx^4.$$

Из выражения (b)

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^3 + Cx^4}.$$

Таким образом, решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{x^3 + c \cdot x^4}.$$

8.1.2. Скорость роста банковского вклада пропорциональна с коэффициентом равным $m = 3$ величине вклада. Найти закон изменения величины вклада со временем, если первоначальная сумма вклада составляла $n = 2$ миллионов рублей.

Если величину вклада обозначить через $J = J(t)$, где t – время, то скорость роста вклада есть производная, т.е. $J' = \frac{dJ}{dt}$ и она пропорциональна величине вклада J с коэффициентом пропорциональности, равным 3, т.е.

$$\frac{dJ}{dt} = 3J.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dJ}{J} = 3dt \quad \text{или} \quad \int\frac{dJ}{J} = 3\int dt$$

$$\ln J = 3t + C \text{ или } J = e^{3t + C}.$$

В начальный момент времени, т.е. при $t = 0$ начальный вклад $J_0 = 2$ млн руб. Тогда

$$J_0 = e^{3 \cdot 0 + C};\ e^C = 2 \text{ и } C \cdot \ln e = \ln 2, \text{ т.е. } C = \ln 2.$$

Окончательно: $J = e^{3t + \ln 2}$ или $J = 2e^{3t}$.

8.2. Линейные уравнения высших порядков

8.2.1. Решить задачу Коши:

а) $y''' - 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 1.$

Понизим порядок дифуравнения, обозначив $t = y'$, тогда $t' = y''$, $t'' = y'''$ и уравнение имеет вид:

$$t'' - 2t' - 3 = 0. \tag{a}$$

Его характеристическое уравнение $r^2 - 2r - 3 = 0$, корни которого $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Тогда решение уравнения (а) имеет вид:

$$t = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{dy}{dx} = C_1e^{-x} + C_1e^{3x},$$

отсюда $dy = (C_1e^{-x} + C_2e^{3x})\,dx$. Интегрируя это выражение, получим

$$y = -C_1e^{-x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x} + C_3. \tag{b}$$

Это есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Используя начальные условия, найдем постоянные C_1, C_2, C_3:

$$y' = C_1e^{-x} + C_2e^{3x},\ y'' = -C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x},$$

тогда

$$\begin{cases} -C_1 + \frac{1}{3}C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 = 3, \\ -C_1 + 3C_2 = 1. \end{cases}$$

Из этой системы $C_1 = 2, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = \frac{5}{3}.$

А частное решение исходного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям, будет:

$$y = -2e^{-x} + \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + \frac{5}{3}.$$

б) $y'' - 6y' + 9y = (x + 1)\, e^{4x}$, $\quad y\,(0) = 1$, $\quad y'\,(0) = 3$. (a)

Находим общее решение однородного дифференциального уравнения (дифура), соответствующего исходному дифуру (a):

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \tag{b}$$

Его характеристическое уравнение $r^2 - 6r + 9 = 0$, а корни $r_1 = r_2 = 3$. Тогда общее решение дифура (b) будет:

$$y^* = e^{3x}\,(C_1 + C_2 x). \tag{c}$$

Частное решение исходного дифура (a) берем в виде:

$$\bar{y} = (Ax + B) \cdot e^{4x}, \tag{d}$$

тогда

$$\bar{y}' = Ae^{4x} + 4\,(Ax + B)\,e^{4x}, \;\; \bar{y}'' = 8Ae^{4x} + 16\,(Ax + B)\,e^{4x},$$

подставляем в (a) и группируем: $(2A + B) + Ax = 1 + x$, отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$2A + B = 1 \;\text{ и }\; A = 1,$$

т.е. $A = 1$, $B = -1$, а выражение (d) принимает вид:

$$\bar{y} = (x - 1) \cdot e^{4x}. \tag{e}$$

Суммируя (c) и (e), найдем общее решение неоднородного дифференциального уравнения (a):

$$y = y^* + \bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + (x - 1)e^{4x}. \tag{f}$$

Найдем $y' = 3(C_1 + C_2 x)\,e^{3x} + C_2 e^{3x} + e^{4x} + 4\,(x - 1)\,e^{4x}$ и используя начальные условия (a), имеем:

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 1, \\ 3 = 3C_1 + C_2 + 1 - 4, \end{cases}$$

отсюда $C_1 = 2$, $C_3 = 0$.

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в (f) и частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = 2e^{3x} + (x - 1)\,e^{4x}.$$

в) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. (a)

Однородное дифуравнение

$$y'' + 4y = 0 \tag{b}$$

имеет характеристическое уравнение $r^2 + 4 = 0$, а его корни будут $r_{1,2} = \pm 2i$ Тогда общее решение дифура (b) будет:

$$y^* = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x. \tag{c}$$

Частное решение дифура (а) ищем в виде:

$$\bar{y} = A \sin x + B \cos x. \tag{d}$$

Определив $\bar{y}' = A\cos x - B\sin x$ и $\bar{y}'' = -A\sin x - B\cos x$ и подставив в (а), после группировки имеем

$$3A \sin x + 3B \cos x = \sin x,$$

отсюда $3A = 1$, $3B = 0$ или $A = \dfrac{1}{3}$ и $B = 0$. Подставляя A и B в (d) и суммируя с (с), найдем общее решение дифура (а):

$$y = y^* + \bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{3}\sin x. \tag{e}$$

Найдем $y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{3}\cos x$ и, используя начальные условия (а), имеем

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \dfrac{1}{3} \cdot 0, \\ 3 = 2C_1 \cdot 1 - 2C_2 \cdot 0 + \dfrac{1}{3} \cdot 1, \end{cases}$$

отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = \dfrac{4}{3}$.

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (е), будем иметь решение исходного дифференциального уравнения (а), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = \frac{4}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x.$$

8.3. Системы линейных уравнений

8.3.1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y, \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Продифференцируем первое уравнение системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt}$$

и подставим в него y'_t из 2-го уравнения системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 16x - 8y,$$

а в это уравнение подставим y из 1-го уравнения системы, имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 20x = 0 \quad \text{или} \quad x'' - 4x' + 20x = 0. \qquad \text{(a)}$$

Его характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 20 = 0$, корни которого $r = 2 \pm 4i$. Тогда дифференциальное уравнение (a) имеет решение:

$$x = e^{2t}(C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t). \qquad \text{(b)}$$

Подставляя это решение в 1-ое уравнение системы, после группирования найдем, что

$$y = e^{2t}(-C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t). \qquad \text{(c)}$$

Подставляя в (b) и (c) начальные условия, определим, что

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1), \\ 2 = 1 \cdot (-C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0), \end{cases}$$

отсюда $C_1 = -2$, $C_2 = 1$.

Подставив эти константы в (b) и (c), найдем решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$x = e^{2t}(-2\sin 4t + \cos 4t),$$

$$y = e^{2t}(\sin 4t + 2\cos 4t).$$

9. РЯДЫ

9.1. Числовые ряды

9.1.1. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{3k^2-2k+3}{1-2k+2k^2}$.

Рассмотрим общий член

$$a_k = \frac{mk^2-nk+3}{nk^2-2k+1}.$$

Применим необходимый признак сходимости числового ряда.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то ряд возможно сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, то ряд расходится.

Для нашего примера:

$$J = \lim_{k\to\infty}\frac{mk^2-nk+3}{nk^2-2k+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Имеем неопределенность, числитель и знаменатель делим на k^2

$$J = \lim_{k\to\infty}\frac{m-\frac{n}{k}+\frac{3}{k^2}}{n-\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} = \frac{m-\frac{n}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{n-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{m-0+0}{n-0+0} = \frac{m}{n} \neq 0,$$

так как по условию $m \neq 0$.

Следовательно, у всех студентов ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда.

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^{k+4}+1}{3^{k+3}+2}$.

Имеем $a_k=\dfrac{2^{k+4}+1}{3^{k+3}+2}$ и $a_{k+1}=\dfrac{2^{k+5}+1}{3^{k+4}+2}$.

Исследуем сходимость ряда по признаку Даламбера:

$$l=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2^{k+5}+1)(3^{k+3}+2)}{(3^{k+4}+2)(2^{k+4}+1)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{2^{k+5}+1}{2^{k+4}}\cdot\dfrac{3^{k+3}+2}{3^{k+3}}}{\dfrac{3^{k+4}+2}{3^{k+3}}\cdot\dfrac{2^{k+4}+1}{2^{k+4}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{2^{k+4}}\right)\left(1+\dfrac{2}{3^{k+3}}\right)}{\left(3+\dfrac{2}{3^{k+3}}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^{k+4}}\right)}=\frac{(2+0)(1+0)}{(3+0)(1+0)}=\frac{2}{3}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{3k^2+2}{5k^2+3}\right)^k$.

Имеем $a_k=\left(\dfrac{3k^2+2}{5k^2+3}\right)^k$.

По признаку Коши имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{3k^2+2}{5k^2+3}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k^2+2}{5k^2+3}=\lim_{k\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{k^2}}{5+\dfrac{3}{k^2}}=\frac{3+\dfrac{2}{\infty}}{5+\dfrac{3}{\infty}}=\frac{3+0}{5+0}=\frac{3}{5}<1,$$

следовательно, ряд сходится. Пример сконструирован так, что коэффициент $(m+n)$ перед k^2 в знаменателе больше, чем коэффициент m перед k^2 в числителе, а поэтому всегда предел будет меньше единицы, т.е. ряд будет сходящийся.

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k)!}{4^k+1}$.

Имеем $a_k=\dfrac{(2k)!}{4^k+1}$, $a_{k+1}=\dfrac{(2k+2)!}{4^{k+1}+1}$.

Исследуем сходимость ряда по признаку Даламбера:

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!\ (4^k+1)}{(4^{k+1}+1)\quad(2k)!} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{4^k+1}{4^{k+1}+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (2k+1)(2k+2) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{4^k}}{4+\frac{1}{4^k}} = \infty \cdot \frac{1}{4} = \infty > 1.$$

Следовательно, ряд расходится

9.2. Степенные ряды

9.2.1. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}\cdot x^k}{2^k+1} : \frac{2^2}{2+1}x + \frac{2^4}{2^2+1}x^2 + \frac{2^6}{2^3+1}x^3 + \ldots$

Согласно признаку Даламбера искомый ряд сходится при тех значениях x, для которых:

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^{2(k+1)}x^{k+1}(2^k+1)}{(2^{k+1}+1)\,2^{2k}\,x^k} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2^2\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}{\left(2+\frac{1}{2^k}\right)} |x| = \frac{4(1+0)}{(2+0)} |x| = 2|x| < 1,$$

т.е. $|x| < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -\frac{1}{2}$ получаем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{2^k+1} : -\frac{2}{2+1} + \frac{2^2}{2^2+1} - \frac{2^3}{2^3+1} + \ldots .$$

Это знакочередующийся, для которого

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^k+1}=1\neq 0,$$

т.е. по признаку Лейбница ряд расходится.

При $x=\frac{1}{2}$ имеем числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^k+1}:\frac{2}{2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\frac{2^3}{2^3+1}...,$$

который расходится, так как предел общего числа не равен нулю.

Итак, область сходимости данного ряда $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2k^3+1}{3k^4+2}(x-2)^k.$

Применим признак Даламбера:

$$a_k=\frac{2k^3+1}{3k^4+2}(x-2)^k;\quad a_{k+1}=\frac{2(k+1)^3+1}{3(k+1)^4+2}(x-2)^{k+1};$$

$$l=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2(k+1)^3+1)\,(x-2)^{k+1}(3k^4+2)}{(3(k+1)^4+2)\,(2k^3+1)(x-2)^k}\right|=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(2\left(1+\frac{1}{k}\right)^3+\frac{1}{k^3}\right)(x-2)\left(3+\frac{2}{k^4}\right)}{\left(3\left(1+\frac{1}{k}\right)^4+\frac{2}{k^4}\right)\left(2+\frac{1}{k^3}\right)}\right|=|x-2|<1.$$

Отсюда заключаем, что ряд сходится при $-1<x-2<1$, или $1<x<3$.

При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k^3+1}{3k^4+2}:-\frac{2\cdot1+1}{3\cdot1+2};\ \frac{2\cdot2^3+1}{3\cdot2^4+2};\ -\frac{2\cdot3^3+1}{3\cdot3^4+2};\ ...,$$

который сходится по признаку Лейбница, так как его члены убывают, а предел общего члена при $k\to\infty$ равен нулю.

При $x = 3$ имеем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+1}{3k^4+2} : \frac{3}{5}; \ \frac{17}{50}; \ \frac{55}{245}; \ \ldots; \ \frac{2k^3+1}{3k^4+2}; \ \frac{2(k+1)^3+1}{3(k+1)^4+2}; \ldots$$

Сравним его с гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots,$$

который расходится.

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Так как предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^4+2}{k(2k^3+1)} = \frac{3}{2},$$

лежит между 0 и ∞, то оба ряда расходятся, т.е. при $x = 3$ исходный ряд расходится.

Итак, область сходимости данного ряда: $1 \le x < 3$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot x^k}{(2k)!} : \frac{2}{2!}x + \frac{2^2}{4!}x^2 + \frac{2^3}{6!}x^3 + \ldots$

Применим признак Даламбера:

$$a_k = \frac{2^k \cdot x^k}{(2k)!}; \quad a_{k+1} = \frac{2^{k+1} \cdot x^{k+1}}{(2k+2)!};$$

$$l = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^{k+1} \cdot x^{k+1} \cdot (2k)!}{(2k+2)! \cdot 2^k \cdot x^k} \right| = 2\,|\,x\,| \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)} =$$

$$= 2\,|\,x\,| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4k^2+6k+2} = 0 < 1.$$

Следовательно, при любом конечном x по признаку Даламбера данный ряд абсолютно сходится. Область сходимости рассматриваемого ряда есть вся числовая ось.

9.2.2. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$; $x_0 = 3$.

Запишем функцию в виде:

$$f(x)=\frac{(x+4)-4}{x+4}; \quad f(x)=1-\frac{4}{x+4}.$$

Вычислим значения данной функции и ее последовательных производных при $x_0 = 3$:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=1-4(x+4)^{-1}, & f(3)=\dfrac{3}{7}, \\
f'(x)=4(x+4)^{-2}, & f'(3)=\dfrac{4}{7^2}, \\
f''(x)=-8(x+4)^{-3}, & f''(3)=-4\cdot\dfrac{2!}{7^3}, \\
f'''(x)=24(x+4)^{-4}, & f'''(3)=4\cdot\dfrac{3!}{7^4}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot 4\cdot n!\cdot(x+4)^{-(n+1)}, & f^{(n)}(3)=(-1)^{n+1}\cdot 4\cdot\dfrac{n!}{7^{n+1}}.
\end{array}$$

Подставляя полученные значения в общее выражение ряда Тейлора для произвольной функции $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$

$$+\ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\ +\ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\ +\ \dots\ +\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ \dots,$$

получим

$$\frac{x}{x+4}=\frac{3}{7}+\frac{4}{7^2}(x-3)-\frac{4}{7^3}(x-3)^2+\frac{4}{7^4}(x-3)^3-\dots+(-1)^{n+1}\frac{4}{7^{n+1}}(x-3)^n+\dots$$

б) $f(x)=\displaystyle\int_0^{2x}\frac{dx}{1-x^3}$, $x_0 = 0$.

Возьмем табличное разложение

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^n t^n+\dots, \quad |t|<1,$$

в котором положим $t = -x^3$.

Имеем

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+\ldots+x^{3n}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Интегрируем этот ряд:

$$f(x)=\int_0^{2x}\frac{dx}{1-x^3}=\int_0^{2x}(1+x^3+x^6+x^9+\ldots+x^{3n}+\ldots)\,dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{10}}{10}+\ldots+\frac{x^{3n+1}}{3n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^{2x}=$$

$$=2x+4x^4+\frac{2^7}{7}x^7+\frac{2^{10}}{10}x^{10}+\ldots+\frac{2^{3n+1}}{3n+1}x^{3n+1}+\ldots$$

Получили искомое разложение.

9.2.3. С помощью разложения в ряд вычислить приближенно с точностью 0,001 значения:

а) e^{-3}.

Берем разложение функции $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ (-\infty<x<\infty)$$

и подставляем в него $x = -3$:

$$e^{-3}=1-3+\frac{(-3)^2}{2!}+\frac{(-3)^3}{3!}+\frac{(-3)^4}{4!}+\frac{(-3)^5}{5!}+\frac{(-3)^6}{6!}+\frac{(-3)^7}{7!}+$$

$$+\frac{(-3)^8}{8!}+\frac{(-3)^9}{9!}+\frac{(-3)^{10}}{10!}+\frac{(-3)^{11}}{11!}+\frac{(-3)^{12}}{12!}+\frac{(-3)^{13}}{13!}=$$

$$=-2+4{,}5-4{,}5+3{,}375-2{,}025+1{,}012-0{,}434+0{,}163-0{,}054+$$

$$+0{,}016-0{,}004+0{,}001-0{,}00026.$$

Полученный ряд знакочередующийся. Поэтому, ограничиваясь первыми двенадцатью членами ряда, мы получим ошибку 0,00026 < 0,001.

Следовательно, e^{-3} = 0,05.

б) $\int\limits_0^{0,8} \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx.$

Возьмем табличное разложение:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

и подставим в него $t = x^2$:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$

Рассмотрим функцию:

$$\frac{\sin x^2}{x} = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \ldots$$

и проинтегрируем ее:

$$\int\limits_0^{0,8} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \int\limits_0^{0,8} \left(x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6 \cdot 3!} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 5!} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0,8} = \frac{0{,}8^2}{2} - \frac{0{,}8^6}{6 \cdot 3!} + \frac{0{,}6^{10}}{10 \cdot 5!} =$$

$$= 0{,}32 - 0{,}007 + 0{,}00009.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (ошибка при этом не превосходит $0{,}00009 < 0{,}001$) имеем окончательно:

$$\int\limits_0^{0,8} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = 0{,}313.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

6. ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Двойные интегралы

6.1.1. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{y+4} f(x;y)\,dx$.

Область интегрирования (заштрихована) (рис. 57) ограничена снизу и сверху прямыми $y = 0$ и $y = 2$, а слева и справа прямыми $x = 2y$ и $x = y + 4$. Меняем пределы интегрирования, тогда в направлении оси Oy на $x \in [0;6]$ нужно выделить две области: $x \in [0;4]$ и $x \in [4;6]$ и первая область D_1 будет ограничена снизу и сверху прямыми: $y = 0$ и $y = \frac{x}{2}$, а вторая область — $y = x - 4$ и $y = 2$.

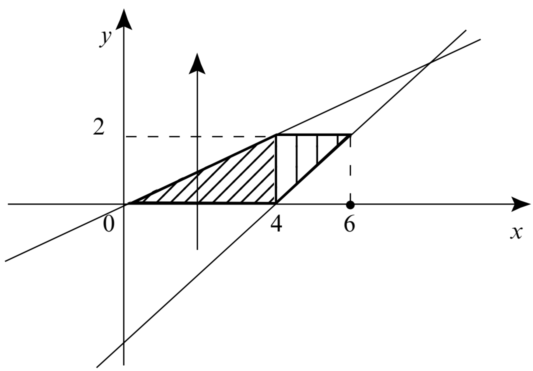


Рис. 57

Тогда $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{y+4} f(x;y)\,dx = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{x-4}^{2} f(x;y)\,dy.$

б) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x^2}{16}} f(x;y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_0^{\frac{6-x}{2}} f(x;y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{4\sqrt{y}}^{6-2y} f(x;y)\,dx.$

Строим область интегрирования D (рис. 58). Она состоит из двух областей: D_1 – на отрезке $x \in [0; 4]$ ограниченной снизу и сверху кривыми $y = 0$ и $y = \frac{x^2}{16}$, и D_2 — на отрезке $x \in [4; 6]$ ограниченной снизу и сверху прямыми $y = 0$ и $y = \frac{6-x}{2}$.

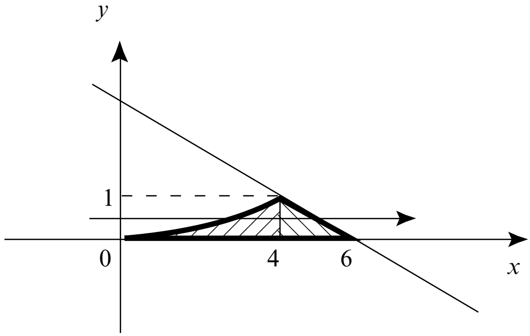


Рис. 58

При изменении порядка интегрирования будем иметь правильную область D, ограниченную слева и справа кривыми $x = 4\sqrt{y}$ и $x = 6 - 2y$, а снизу и сверху прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Ответ записан наверху.

6.1.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$; $y = x^2$ и плоскостью, проходящей через точки A (2; 4; 0), B (–4; 4; 0), C (0; 0; 6).

Составим уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C & z_B - z_C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z-6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -4 & 4 & -6 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 2 & 4 \\ -4 & 4 \end{matrix} =$$

$$= x \cdot 4 \cdot (-6) + y(-6)(-4) + (z-6)2 \cdot 4 - (z-6)4(-4) - x(-6)4 - y \cdot 2 \cdot (-6) = 0,$$

или

$$-24x + 24y + 8z - 48 + 16z - 96 + 24x + 12y = 0,$$

или

$$3y + 2z - 12 = 0$$

и окончательно

$$z = 6 - \frac{3}{2}y.$$

Изобразим тело (рис. 59): параболический цилиндр $y = x^2$ ограничен снизу плоскостью $z = 0$, а сверху — плоскостью $z = 6 - \frac{3}{2}y$ параллельной оси Ox. Область интегрирования D (рис. 60) есть фигура ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

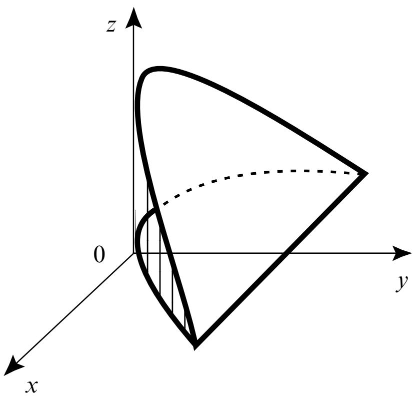


Рис. 59

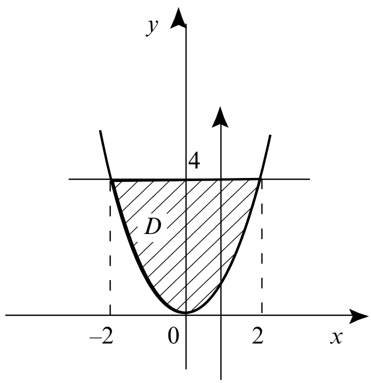


Рис. 60

В силу симметрии тела относительно плоскости zOy удвоим интеграл:

$$V = 2\int_0^2 dx \int_{x^2}^4 \left(6 - \frac{3}{2}y\right)dy = 2\int_0^2 dx \left(6y - \frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_{x^2}^4 =$$

$$= 2\int_0^2 \left(\left(6\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot 4^2\right) - \left(6\cdot x^2 - \frac{3}{4}(x^2)^2\right)\right)dx = 2\int_0^2 \left(12 - 6x^2 - \frac{3}{4}x^4\right)dx =$$

$$= 2\left(12x - 2x^3 - \frac{3}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(12\cdot 2 - 2\cdot 2^3 - \frac{3}{20}\cdot 2^5\right) = \frac{32}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

6.1.3. Изобразить и найти площадь фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 0$; $y = x^2$ и $y = 4\,(x - 6)^2$.

Построим две параболы и найдем их точки пересечения:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4(x-6)^2, \end{cases}$$

отсюда $x^2 = 4(x - 6)^2$ или $x^2 - 16x + 48 = 0$, его корни $x_1 = 4$ и $x_2 = 12$. На чертеже (рис. 61) изображена заштрихованная фигура, площадь которой определяем:

$$S = \int_0^4 dx \int_0^{x^2} dy + \int_4^6 dx \int_0^{4(x-6)^2} dy = \int_0^4 dx \cdot y \Big|_0^{x^2} + \int_4^6 dx \cdot y \Big|_0^{4(x-6)^2} =$$

$$= \int_0^4 x^2 dx + 4\int_4^6 (x-6)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 + \frac{4}{3}(x-6)^3 \Big|_4^6 = \frac{1}{3}4^3 + \frac{4}{3}\Big((6-6)^3 - (4-6)^3\Big) =$$

$$= \frac{64}{3} + \frac{32}{3} = 32 \text{ (кв. ед.)}$$

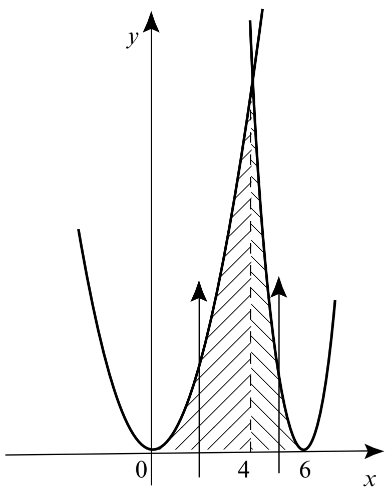


Рис. 61

б) $(x^2 + y^2)^2 = 18 \cdot xy$.

В полярных координатах это уравнение запишется в виде (смотрите пример 4.4.1б): $\rho^2 = 9 \sin 2\varphi$. Рассмотрим заштрихованную область, для нее координаты ρ и φ определены неравенствами $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le 3\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Тогда

$$S = \iint\limits_D \rho \, d\varphi \, d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho \, d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \, \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^{3\sqrt{\sin 2\varphi}} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3\sqrt{\sin 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 18 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi \, d(2\varphi) = 9(-\cos 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -9\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}.$$

6.2. Тройные интегралы

6.2.1. Найти интеграл $\iiint\limits_V x \, dx \, dy \, dz$, если тело V ограничено плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $x + 4y - 2z = 0$ и $x + y + z - 6 = 0$.

Решение. Тело V ограничено координатными плоскостями xOz и yOz, а снизу и сверху – соответственно плоскостями: $z = \dfrac{1}{2}(x + 4y)$ и $z = 6 - x - y$. Найдем линию пересечения этих плоскостей:

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2}(x + 4y) \\ z = 6 - x - y, \end{cases}$$

или

$$\frac{1}{2}(x + 4y) = 6 - x - y,$$

или

$$x + 2y - 4 = 0.$$

Имеем $y=\frac{1}{2}(4-x)$. Построим на плоскости xOy область D (рис. 62). Вычисляем:

$$\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}dy\int\limits_{\frac{1}{2}(x+4y)}^{6-x-y}dz=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}dy\,z\Big|_{\frac{1}{2}(x+4y)}^{6-x-y}=$$

$$=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}dy\left((6-x-y)-\frac{1}{2}(x+4y)\right)=$$

$$=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(4-x)}\left(6-\frac{3}{2}x-3y\right)dy=3\int\limits_0^4 x\,dx\left(2y-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}(4-x)}=$$

$$=3\int\limits_0^4 x\,dx\left(2\cdot\frac{1}{2}(4-x)-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}(4-x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(4-x)\right)^2\right)=$$

$$=3\int\limits_0^4 x\left(2-x+\frac{1}{8}x^2\right)dx=3\int\limits_0^4\left(2x-x^2+\frac{1}{8}x^3\right)dx=$$

$$=3\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^4=3\left(16-\frac{64}{3}+8\right)=8.$$

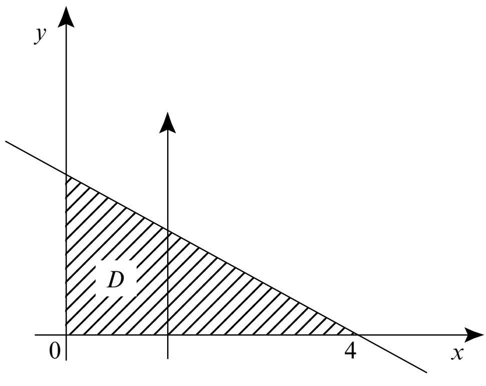


Рис. 62

6.2.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $2z = x^2 + y^2$; $z = 2$; $x = 0$; $y = 2x$.

Решение. Тело снизу ограничено поверхностью $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, а сверху — $z = 2$. На плоскости xOy построим область D (рис. 63).

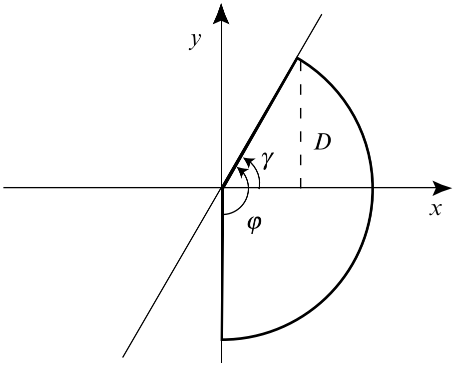


Рис. 63

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Уравнение параболоида будет иметь вид:

$$2z = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi, \text{ или } 2z = \rho^2, \text{ или } z = \frac{\rho^2}{2}.$$

Радиус ρ изменяется от 0 до $\rho = \sqrt{2z} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.

Найдем пределы изменения угла φ (рис. 64).

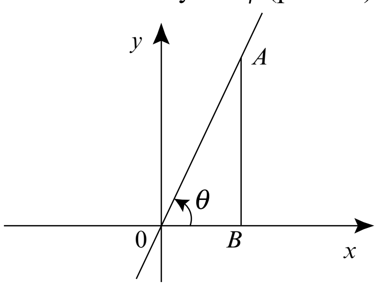


Рис. 64

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2$, тогда θ = 63,4349° и φ = 90° + θ = = 153,4349° = 0,852π, т.е. φ изменяется от 0 до 153,4349° = 0,852π.

Находим объем:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho\, z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} = \int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)d\rho = \int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho - \frac{1}{2}\rho^3\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi \left(2\cdot\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^2 = 2\int\limits_0^{0,852\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{0,852\pi} = 1,704\pi \text{ (куб. ед.).}$$

6.3. Криволинейные интегралы

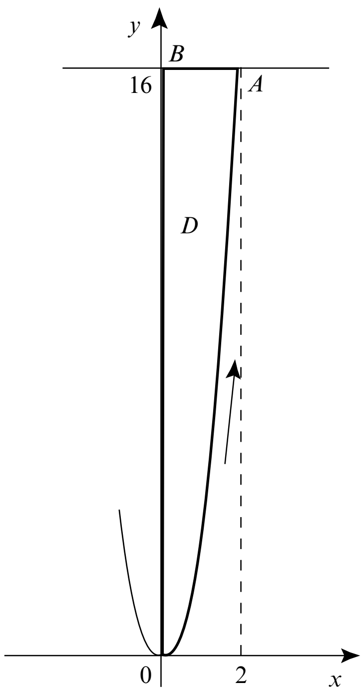


Рис. 65

6.3.1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy,$$

где

$$P(x;\,y) = 2x + 2y,$$

$$Q(x;\,y) = 4x + 2y,$$

а контур C ($OABO$) ограничен линиями:

$$OA: y = 4x^2,$$

$$AB: y = 16,$$

$$BO: x = 0.$$

а) Вычисляем непосредственно. Строим контур (рис. 65).

Обход контура совершаем против часовой стрелки:

$$\oint\limits_{OABO} (2x+2y)\,dx+(4x+2y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{OA}\left(2(x+4x^2)\,dx+2(2x+4x^2)\,d\,(4x^2)\right)+$$

$$+\int\limits_{AB}\left(2(x+16)\,dx+2(2x+16)\,d16\right)+\int\limits_{BO}(2yd0+2ydy)=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}(2x+40x^2+64x^3)\,dx+\int\limits_{2}^{0}(2x+32)\,dx+2\int\limits_{16}^{0}y\,dy=$$

$$=\left(x^2+\frac{40}{3}x^3+16x^4\right)\Big|_0^2+(x^2+32x)\Big|_2^0+y^2\Big|_{16}^0=$$

$$=\left(4+\frac{320}{3}+256\right)-(4+64)-256=\frac{128}{3}.$$

б) Вычисляем криволинейный интеграл по формуле Грина:

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_D(4-2)\,dx\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^2 dx\int\limits_{4x^2}^{16}dy=2\int\limits_0^2 dx\cdot y\Big|_{4x^2}^{16}=$$

$$=8\int\limits_0^2(4-x^2)\,dx=8\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=8\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{128}{3}.$$

Вычисление криволинейного интеграла непосредственно и по формуле Грина совпало.

6.3.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$J=\int\limits_C(2x+4z)\,dx+(2y+2z)\,dy-12zdz$$

вдоль одного витка винтовой линии C:

$$\begin{cases} x = 2\cos 4t, \\ y = 2\sin 4t, \\ z = 6t, \qquad\qquad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Решение.

$$J = \int_0^{2\pi} \big((4\cos 4t + 24t)(-2\cdot 4\sin 4t)\,dt +$$

$$+(4\sin 4t + 12t)\cdot(2\cdot 4\cos 4t)\,dt - 12\cdot 6\cdot t\cdot 6dt\big) =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (-2\sin 4t\cos 4t - 12t\sin 4t + 2\sin 4t\cdot\cos 4t + 6t\cos 4t - 27t)\,dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (-12t\sin 4t + 6t\cos 4t - 27t)\,dt =$$

$$= 48\left(-4\int_0^{2\pi} t\sin 4t\,dt + 2\int_0^{2\pi} t\cos 4t\,dt - 9\int_0^{2\pi} tdt\right).$$

Рассмотрим два интеграла, которые возьмем по частям:

$$J_1 = \int t\sin 4t\,dt = -\frac{1}{4}t\cos 4t + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4t\,d\,(4t) = -\frac{1}{4}t\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 4t.$$

$$u = t, \ \ du = dt;$$

$$dv = \sin 4t\,dt, \ v = \frac{1}{4}\int \sin 4t\,d\,(4t) = -\frac{1}{4}\cos 4t.$$

$$J_2 = \int t\cos 4t\,dt = \frac{1}{4}t\sin 4t - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\int \sin 4t\,d\,(4t) = \frac{1}{4}t\sin 4t + \frac{1}{16}\cos 4t.$$

$$u = t, \ \ du = dt;$$

$$dv = \cos 4t\,dt, \ v = \frac{1}{4}\int \cos 4t\,d\,(4t) = \frac{1}{4}\sin 4t.$$

Интеграл J вычисляем дальше:

$$J = 48\left(-4\left(-\frac{1}{4}t\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 4t\right) + 2\left(\frac{1}{4}t\sin 4t + \frac{1}{16}\cos 4t\right) - \frac{9}{2}t^2\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 48\left(t\cos 4t - \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{2}t\sin 4t + \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{9}{2}t^2\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 48\left(\left(2\pi\cos 8\pi - \frac{1}{4}\sin 8\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sin 8\pi + \frac{1}{8}\cos 8\pi - \frac{9}{2}4\pi^2\right) - \left(\frac{1}{8}\cos 0\right)\right) =$$

$$= 48\left(2\pi + \frac{1}{8} - 18\pi^2 - \frac{1}{8}\right) = 96\pi(1 - 9\pi).$$

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

7.1. Дифференциальные операции

7.1.2. Найти в точке A (–1, –3, 0) градиент скалярного поля

$$U = \frac{z+4}{3x+y}.$$

Градиентом скалярного поля U (A), обозначаемым символом grad u, называется вектор, проекциями которого являются частные производные функции U (A) по соответствующим координатам, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3(z+4)}{(3x+y)^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(z+4)}{(3x+y)^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{3x+y}$$

и их значения в точке A

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A = -\frac{1}{3};\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A = -\frac{1}{9};\quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{6}$$

и эти значения подставим в формулу grad u:

$$\operatorname{grad} u = -\frac{1}{3}\bar{\imath} - \frac{1}{9}\bar{j} - \frac{1}{6}\bar{k}.$$

7.1.3. Найти в точке B (3, 1, 4) дивергенцию векторного поля

$$\bar{F}(x, y, z) = \frac{z^2 - x^2}{y}\bar{\imath} + \frac{z^2 - 3y^2}{x}\bar{j} + 10z\bar{k}.$$

Дивергенция поля $\bar{F}$ выражается следующим образом

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \left(\frac{z^2 - x^2}{y}\right)'_x = -\frac{2x}{y};\ \frac{\partial F_y}{\partial y} = \left(\frac{z^2 - 3y^2}{x}\right)'_y = -\frac{6y}{x};\quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = (10z)'_z = 10$$

и найдем их значения в точке B (3, 1, 4)

$$\left.\frac{\partial Fx}{\partial x}\right|_B = -\frac{2\cdot 3}{1} = -6;\ \left.\frac{\partial Fy}{\partial y}\right|_B = -\frac{6\cdot 1}{3} = -2;\ \left.\frac{\partial Fz}{\partial z}\right|_B = 10$$

и подставим в формулу для $\operatorname{div}\bar{F}$

$$\operatorname{div}\bar{F}_B = -6 - 2 + 10 = 2.$$

7.1.4. Найти в точке C (2, 3, 1) ротор векторного поля

$$\bar{F}\,(x, y, z) = \frac{3x - 2y}{z}\bar{\imath} + \frac{2x - 3y}{z}\bar{j} - (2x + 3y)z\bar{k}.$$

В трехмерном пространстве $\operatorname{rot}\bar{F}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\bar{F} = F_x\,\bar{\imath} + F_y\,\bar{j} + F_z\,\bar{k}$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\left(\frac{3x-2y}{z}\right)'_y=\frac{-2}{z};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\left(\frac{3x-2y}{z}\right)'_z=-\frac{3x-2y}{z^2};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\left(\frac{2x-3y}{z}\right)'_x=\frac{2}{z};\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\left(\frac{2x-3y}{z}\right)'_y-\frac{2x-3y}{z^2};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=\big((2x+3y)z\big)'_x=2z;\quad \frac{\partial F_z}{\partial y}=\big((2x+3y)z\big)'_y=3z$$

и их значения в точке С (2, 3, 1)

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=-2;\ \frac{\partial F_x}{\partial z}=0;\ \frac{\partial F_y}{\partial x}=2;\ \frac{\partial F_y}{\partial z}=5;\ \frac{\partial F_z}{\partial x}=2;\ \frac{\partial F_z}{\partial y}=3$$

и эти значения подставляем в формулу для $\operatorname{rot}\overline{F}$:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=-2\bar{\imath}-2\bar{j}+4\bar{k}.$$

7.2. Интегралы и интегральные теоремы

7.2.1. Убедиться, что поле $\overline{F}\,(x,y,z)=3z\bar{\imath}+5z\bar{j}+(3x+5y)\bar{k}$ потенциально и найти его потенциал.

Решение. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\overline{F}\,(x,y,z)$ является равенство нулю ротора (вихря) этого поля: $\operatorname{rot}\overline{F}=0$ Находим вектор ротора поля $\overline{F}=P\bar{\imath}+Q\bar{j}+R\bar{k}=3z\bar{\imath}+5z\bar{j}+(3x+5y)\bar{k}$:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3z & 5z & 3x+5y\end{vmatrix}=$$

$$=\big((3x+5y)'_y-(5z)'_z\big)\bar{\imath}-\big((3x+5y)'_x-(3z)'_z\big)\bar{j}+\big((5z)'_x-(3z)'_y\big)\bar{k}=$$

$$=(5-5)\,\bar{\imath}-(3-3)\bar{j}+(0-0)\bar{k}=0\cdot\bar{\imath}+0\cdot\bar{j}+0\cdot\bar{k}=0,$$

т.е. данное поле потенциально.

7.2.2. Даны поле $\overline{F}=(3y^2-5z^2)\cdot\bar{i}+(5x^2-3\cdot z^2)\cdot\bar{j}+8xy\cdot\overline{k}$ и пирамида с вершинами O (0; 0; 0), A (3; 0; 0), B (0; 5; 0) и C (0; 0; 8). Найти:

а) поток поля $\overline{F}$ через грань ABC пирамиды в направлении нормали, составляющей острый угол с осью Oz;

б) поток поля $\overline{F}$ через внешнюю поверхность пирамиды с помощью теоремы Остроградского – Гаусса;

в) циркуляцию поля $\overline{F}$ вдоль замкнутого контура ABC:

в$_1$) непосредственно;

в$_2$) с помощью теоремы Стокса (обход контура происходит в положительном направлении относительно внешней нормали к поверхности пирамиды).

Решение. Строим чертеж пирамиды $OABC$ (рис. 66). Найдем уравнение плоскости ABC как уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{8}=1$ или $40x + 24y + 15z - 120 = 0$.

Единичный вектор нормали к этой плоскости, обеспечивающий требуемое направление ориентации поверхности, имеет вид:

$$\bar{n}=\frac{\overline{N}}{|\overline{N}|},$$

где $\overline{N}=(40;24;15)$.

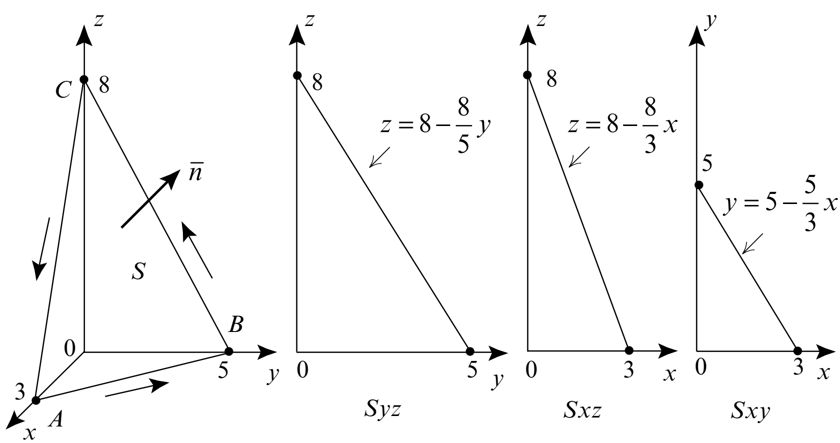


Рис. 66

Здесь

$$|\overline{N}| = \sqrt{40^2 + 24^2 + 15^2} = \sqrt{2401} = 49.$$

Тогда

$$\overline{n} = \frac{40}{49} \cdot \bar{i} + \frac{24}{49} \cdot \bar{j} + \frac{15}{49} \cdot \overline{k} = \left(\frac{40}{49};\ \frac{24}{49};\ \frac{15}{49} \right).$$

Следовательно, направляющие косинусы вектора $\overline{n}$ равны:

$$\cos\alpha = \frac{40}{49},\ \cos\beta = \frac{24}{49},\ \cos\gamma = \frac{15}{49}.$$

Тогда

$$\cos a \cdot dS = dy \cdot dz,\quad \cos\beta \cdot dS = dx \cdot dz,\ \cos\gamma \cdot dS = dx \cdot dy.$$

Для данного векторного поля $\overline{F} = (P;\ Q;\ R)$ будет

$$P = 3y^2 - 5z^2,\ Q = 5x^2 - 3z^2,\ R = 8xy.$$

Тогда по определению потока векторного поля $\overline{F} = (P;\ Q;\ R)$ через поверхность $S = ABC$ получаем:

$$\Pi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma) \cdot dS =$$

$$= \iint\limits_S (3y^2 - 5z^2) \cdot \cos\alpha \cdot dS + (5x^2 - 3z^2) \cdot \cos\beta \cdot dS + 8xy \cdot \cos\gamma \cdot dS =$$

$$= \iint\limits_S (3y^2 - 5z^2) \cdot dy\, dz + (5x^2 - 3z^2) \cdot dz\, dx + 8xy \cdot dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{S_{yz}} (3y^2 - 5z^2) \cdot dy\, dz + \iint\limits_{S_{xz}} (5x^2 - 3z^2) dz \cdot dx + \iint\limits_{S_{xy}} 8xy\, dx\, dy,$$

где S_{yz}, S_{xz}, и S_{xy} – проекции поверхности S на соответствующие координатные плоскости.

Следовательно,

$$\Pi = \int_0^5 dy \int_0^{8-\frac{8}{5}y} (3y^2 - 5z^2)\,dz + \int_0^3 dx \int_0^{8-\frac{8}{3}x} (5x^2 - 3z^2)\cdot dz + \int_0^3 dx \int_0^{5-\frac{5}{3}x} 8xy\,dy =$$

$$= \int_0^5 dy \cdot \left(3y^2 \cdot \frac{8}{5}\cdot(5-y) - \frac{5}{3}\cdot(5-y)^3 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3 \right) +$$

$$+ \int_0^3 dx \cdot \left(5x^2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3}x\right) - \left(8 - \frac{8}{3}x\right)^3 \right) + \int_0^3 dx\, \frac{8x}{2}\cdot\left(5 - \frac{5}{3}x\right)^2 =$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{24}{5}(5y^2 - y^3) - \frac{8^3}{25\cdot 9}(5-y^3) \right)\cdot dy +$$

$$+ \int_0^3 \left(40x^2 - \frac{40}{3}x^3 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot (3-x)^3 \right) dx + 4\cdot\frac{25}{9}\cdot\int_0^3 (9x - 6x^2 + x^3)\cdot dx =$$

$$= \frac{24}{5}\cdot\left(\frac{625}{3} - \frac{625}{4}\right) - \frac{128}{9\cdot 25}\cdot(-5)^4 + \frac{40}{3}\cdot 27 - \frac{10}{3}\cdot 81 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot \frac{3^4}{4} +$$

$$+ \frac{100}{9}\cdot\left(\frac{81}{2} - 2\cdot 27 + \frac{81}{4}\right) = 250 - \frac{128\cdot 25}{9} + 40\cdot 9 - 270 + 128\cdot 3 + 100\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= -105\frac{5}{9} - 294 + 75 = -324\frac{5}{9}.$$

б) Поток векторного поля $\overline{F}$ через внешнюю поверхность S всех граней пирамиды $OABC$ равен интегралу от дивергенции этого векторного поля, т.е. по формуле Остроградского – Гаусса имеем:

$$\oiint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot ds = \iiint_V \operatorname{div} F \cdot dv.$$

Здесь

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (3y^2 - 5z^2)'_x + (5x^2 - 3z^2)'_y + (8xy)'_z = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Следовательно

$$\oiint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\cdot ds = \iiint_V \operatorname{div}\overline{F}\cdot dv = \iiint_V 0\cdot dv = 0.$$

в) Найдем циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ вдоль замкнутого контура $ABCA$, где

$$\overline{F}=(3y^2-5z^2)\cdot\bar{i}+(5x^2-3z^2)\cdot\bar{j}+8xy\cdot\bar{k}.$$

Применяем сначала теорему Стокса.

$$Ц=\oint\limits_C \overline{F}\cdot d\bar{r}=\iint\limits_S \bar{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{F}\cdot ds.$$

Здесь контур C — в виде сторон треугольника ABC, лежащего в плоскости $40x + 24y + 15z - 120 = 0$, проходящей через точки A, B и C.

Найдем ротор данного векторного поля.

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y^2-5z^2 & 5x^2-3z^2 & 8xy\end{vmatrix}=$$

$$=(8x+6z)\cdot\bar{i}-(8y+10z)\cdot\bar{j}+(10x-6y)\cdot\bar{k}.$$

Тогда

$$Ц=\iint\limits_{Syz}(8x+6z)\,dy\,dz+\iint\limits_{Sxz}(-8y-10z)\,dx\,dz+\iint\limits_{Sxy}(10x-6y)\cdot dx\,dy.$$

Используем здесь, что уравнение плоскости есть $40x + 24y + 15z - 120 = 0$ и для каждой координатной плоскости будем через это уравнение выражать нужные координаты. Тогда получаем интегралы:

$$Ц=\int\limits_0^5 dy\int\limits_0^{8-\frac{8}{5}y}\left(24-\frac{24}{5}y+3z\right)dz-\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{8-\frac{8}{3}x}\left(40-\frac{40}{3}x+5z\right)\cdot dz+$$

$$+\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{5-\frac{5}{3}x}(10x-6y)\cdot dy=$$

$$=\frac{288}{25}\cdot\int\limits_0^5(5-y)^2\cdot dy-\frac{480}{9}\cdot\int\limits_0^3(3-x)^2dx+\int\limits_0^3(-75+100x-25x^2)\cdot dx=$$

$$=-\frac{288}{25}\cdot\frac{(x-5)^3}{3}\Bigg|_0^5+\frac{480}{9}\cdot\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_0^3+\left(-75x+50x^2-\frac{25}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{288}{25\cdot 3}\cdot 5^3-\frac{480}{27}\cdot 3^3+\left(-75\cdot 3+50\cdot 9-\frac{25}{3}\cdot 27\right)=$$

$$=480-480+(-225+450-225)=0+0=0.$$

Вычислим циркуляцию поля $\overline{F}$ непосредственно по формуле

$$Ц = \oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \oint_C P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz =$$

$$= \oint_C (3y^2 - 5z^2)\, dx + (5x^2 - 3z^2) \cdot dy + 8xy \cdot dz.$$

Разобьем общий интеграл по контуру C на три части:

$$Ц = Ц_{AB} + Ц_{BC} + Ц_{CA}.$$

Участок AB: $z = 0,\ dz = 0,\ y = \frac{5}{3} \cdot (3 - x),\ dy = -\frac{5}{3} \cdot dx.$ Тогда

$$Ц_{AB} = \int_3^0 (3y^2 dx + 5x^2 dy) = \int_3^0 \left(3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot (3-x)^2 - \frac{25}{3} x^2 \right) dx =$$

$$= \int_3^0 \frac{25}{3} ((3-x)^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{25}{3} \left(-\frac{(3-x)^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_3^0 = \frac{25}{9} \cdot \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{3} \right) = 0.$$

Участок BC: $x = 0$, $dx = 0$, $z = \frac{8}{5}(5 - y),\ dz = -\frac{8}{5} dy.$ Тогда

$$Ц_{BC} = \int_5^0 (-3z^2 dy) = \int_5^0 \left(-3 \cdot \frac{8^2}{5^2} \cdot (5-y)^2 \right) dy =$$

$$= \frac{3 \cdot 64}{25} \cdot \frac{(5-y)^3}{3} \Big|_5^0 = \frac{64}{25} \cdot 125 = 320.$$

Участок CA: $y = 0$, $dy = 0$, $z = \frac{8}{3}(3 - x),\ dz = -\frac{8}{3} dx.$ Тогда

$$Ц_{CA} = \int_0^3 \left(-5 \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot (3-x) \right)^2 \right) \cdot dx = \frac{5 \cdot 64}{9} \cdot \frac{(3-x)^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{320}{27}(-27) = -320.$$

В результате $Ц = Ц_{AB} + Ц_{BC} + Ц_{CA} = 0 + 320 - 320 = 0$. Совпадение величин циркуляции $Ц$, найденных разными способами, говорит о правильности результата.

9.3. Ряды Фурье

9.3.1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале:

$$f(x) = (x-4)^2 \text{ в интервале } (0;\, 4).$$

Решение. Доопределим (продолжим) данную функцию на сегмент [–4; 0] четным образом и разложим ее в ряд Фурье, считая ее заданной на сегменте [–4; 4], где она будет четной (рис. 67). Тогда ее коэффициенты в ряде Фурье будут:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cdot\cos\frac{m\pi x}{4}+b_m\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}\right),$$

где

$$a_m=\frac{1}{4}\cdot\int_{-4}^{4}f(x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{4}\cdot dx,\ b_m=\frac{1}{4}\cdot\int_{-4}^{4}f(x)\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}\cdot dx.$$

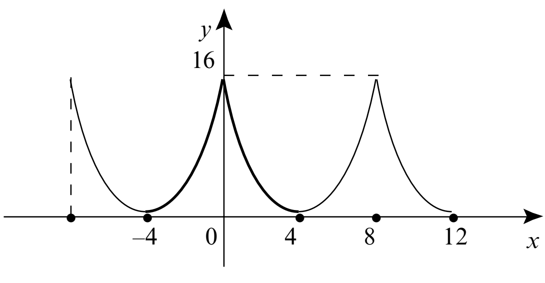


Рис. 67

Так как $f(x)$ – четная функция, то ее ряд Фурье содержит только свободный член a_0 и косинусы, а $b_m = 0$.

Тогда

$$a_m=\frac{2}{4}\cdot\int_{0}^{4}f(x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{4}\cdot dx,\ m=0,1,2,...$$

На отрезке [0; 4] $f(x)$ будет представляться рядом Фурье тем же, что и на отрезке [–4; 4].

Тогда

$$a_0=\frac{2}{4}\cdot\int\limits_0^4 (x-4)^2\cdot 1\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^4 (x-4)^2\cdot d(x-4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-4)^3}{3}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot[(4-4)^3-(0-4)^3]=\frac{1}{6}\cdot(0+4^3)=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}.$$

Аналогично

$$a_m=\frac{2}{4}\cdot\int\limits_0^4 (x-4)^2\cdot\cos\frac{m\pi x}{4}\cdot dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{интегрирование по частям}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=(x-4)^2,\ du=2\cdot(x-4)\cdot dx,\\ dv=\cos\dfrac{m\pi x}{4}\cdot dx,\ v=\dfrac{4}{m\pi}\cdot\sin\dfrac{m\pi x}{4}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-4)^2\cdot\frac{4}{m\pi}\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}\Big|_0^4-\int\limits_0^4\frac{4}{m\pi}\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}\cdot 2\cdot(x-4)\cdot dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[0-\frac{4^2\cdot 4}{m\pi}\cdot 0-\frac{8}{m\pi}\cdot\int\limits_0^4 (x-4)\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}dx\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{по частям}:\ u=x-4,\ du=dx,\\ dv=\sin\dfrac{m\pi x}{4}\cdot dx,\ v=-\dfrac{4}{m\pi}\cdot\cos\dfrac{m\pi x}{4}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{m\pi}\right)\cdot\left[(x-4)\cdot\left(-\frac{4}{m\pi}\right)\cos\frac{m\pi x}{4}\Big|_0^4-\int\limits_0^4\left(-\frac{4}{m\pi}\right)\cdot\cos\frac{m\pi x}{4}\cdot dx\right]=$$

$$=-\frac{4}{m\pi}\cdot\left[0+(-4)\cdot\frac{4}{m\pi}\cdot\cos 0+\frac{4}{m\pi}\cdot\frac{4}{m\pi}\cdot\sin\frac{m\pi x}{4}\Big|_0^4\right]=$$

$$=-\frac{4}{m\pi}\cdot\left[-\frac{16}{m\pi}\cdot 1+0\right]=\frac{64}{m^2\cdot\pi^2}.$$

Тогда с учетом $b_m = 0$ ряд Фурье получает вид:

$$f(x) = \frac{32}{2\cdot 3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{64}{m^2\cdot\pi^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{4} = \frac{16}{3} + \frac{64}{\pi^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{4} =$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{64}{\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{2^2}\cdot\cos\frac{2\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cdot\cos\frac{3\pi x}{4} + \ldots\right).$$

10. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

10.1. Действия с комплексными числами

10.1.1. Выполнить действия:

а) $(4 + i\cdot 5)^2 \cdot (5 - i\cdot 4) = (16 + 40\cdot i + 25\cdot i^2)\cdot(5 - 4\cdot i) =$
$=(-9 + 40\cdot i)(5 - 4i) = -45 + 200\cdot i + 36\cdot i + 160 = 115 + 236\cdot i.$

б) $\dfrac{4 - i\cdot 5}{5 + i\cdot 4} = \dfrac{(4 - 5\cdot i)(5 - 4\cdot i)}{(5 + 4\cdot i)(5 - 4\cdot i)} = \dfrac{20 - 25\cdot i - 16\cdot i - 20}{5^2 + 4^2} = \dfrac{-41\cdot i}{41} = -i.$

10.2.1. Показать, что функция $f(z) = (z + 4)^2 + z - 5\cdot i$ аналитична.

Представим функцию $f(z)$ в виде $u(x, y) + i\cdot v(x, y)$, где $z = x + i\cdot y$. Получаем

$$f(z) = (x + i\cdot y + 4)^2 + x + i\cdot y - 5i =$$
$$=(x + 4)^2 + 2\cdot(x + 4)\cdot y\cdot i - y^2 + x + i\cdot y - 5i =$$
$$=(x + 4)^2 + x - y^2 + i\cdot(2\,(x + 4)\cdot y + y - 5).$$

Тогда $u(x, y) = (x + 4)^2 + x - y^2$, $v(x, y) = 2(x + 4)\cdot y + y - 5$. Проверим выполнение для $f(z)$ условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Находим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cdot(x + 4) + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2\cdot y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\cdot y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2\cdot(x + 4) + 1.$$

Получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,(x+4)+1 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\,(2y) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Коши – Римана выполнены и данная функция $f\,(z)$ – аналитична.

10.3.1. Вычислить $\int\limits_C ((5x-y)+i\cdot(x+4\cdot y))\,dz,$ где контур C — незамкнутая ломаная, соединяющая точки $O\,(0,\ 0)$, $A\,(4,\ 5)$ и $B\,(0,\ 9)$ (рис. 68).

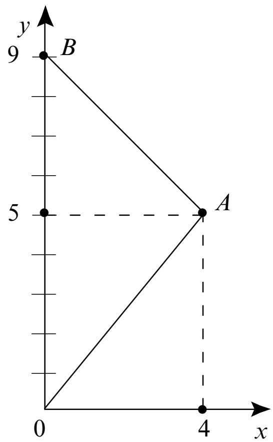


Рис. 68

Используем формулу

$$\int\limits_C f(z)\cdot dz = \int\limits_C u\,(x,y)\cdot dx - v\,(x,y)\cdot dy + i\cdot\int\limits_C v\,(x,y)\cdot dx + u\,(x,y)\cdot dy,$$

где общий интеграл по контуру $C = OAB$ разобьем на два контура OA и AB.

Уравнение OA: $y = \frac{5}{4}x,\ \ dy = \frac{5}{4}\cdot dx.$

Для AB: $y = 9 - x$, $dy = -dx$.

Тогда

$$\int\limits_{OA} f(z)\cdot dz = \int\limits_{OA} (5x-y)\cdot dx-(x+4y)\cdot dy+i\cdot\int\limits_{OA}(x+4y)\cdot dx+(5x-y)\cdot dy=$$

$$=\int\limits_0^4\left(5x-\frac{5}{4}x-\left(x+4\cdot\frac{5}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}\right)dx+i\cdot\int\limits_0^4\left(x+5x+\left(5x-\frac{5}{4}x\right)\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(-\frac{15}{4}\right)x\cdot dx+i\cdot\int\limits_0^4\frac{171}{16}x\cdot dx=-\frac{15}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4+i\cdot\frac{171}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=-30+\frac{171}{2}\cdot i.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{AB}(5x-y)\cdot dx-(x+4y)\cdot dy+i\cdot\int\limits_{AB}(x+4y)\cdot dx+(5x-y)\cdot dy=$$

$$=\int\limits_4^0\big(5x-(9-x)-(x+4\cdot(9-x))(-1)\big)dx+$$

$$+i\cdot\int\limits_4^0(x+36-4x-5x+9-x)\cdot dx=$$

$$=\int\limits_4^0(3x+27)\cdot dx+i\cdot\int\limits_4^0(45-9x)=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}+27x\right)\Big|_4^0+i\cdot\left(45x-9\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^0=$$

$$=-132-108\,i.$$

Тогда $\int\limits_C f(z)\cdot dz=-30+\frac{171}{2}\cdot i-132-108\cdot i=-162-\frac{45}{2}\cdot i.$

10.4.1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-13z+36}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ в ряд Тейлора и найти радиус сходимости ряда.

Представим данную функцию в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{z}{z^2-13z+36}=\frac{z}{(z-4)(z-9)}=\frac{-\frac{4}{5}}{z-4}+\frac{\frac{9}{5}}{z-9}.$$

Разложим каждую из этих функций в ряд по степеням $z - z_0 =$ $= z - 0 = z$ с помощью геометрической прогрессии:

$$f(z) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z-4} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{z-9} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{-4 \cdot \left(1 - \frac{z}{4}\right)} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{-9 \cdot \left(1 - \frac{z}{9}\right)} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{4}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \ldots\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{z}{9} + \frac{z^2}{9^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 - 1 + \frac{z}{4} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{4^2} - \frac{z^2}{9^2} + \ldots\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(z \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + z^2 \cdot \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{9^2}\right) + \ldots\right).$$

Область сходимости каждой из прогрессий есть $|z| < 4$ и $|z| < 9$. Общая часть дает радиус сходимости равный $R = 4$ или $|z| < 4$.

10.5.1. Определить тип особых точек функции $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 5 \cdot z^2}$ и найти вычеты в них.

Разложим данную функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 5z^2} = \frac{1}{z^2 \cdot (z+5)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{5 \cdot \left(1 + \frac{z}{5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{5^2} - \frac{z^3}{5^3} + \ldots\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{5 \cdot z} + \frac{1}{5^2} - \frac{z}{5^3} + \ldots\right).$$

Это разложение верно при $|z| < 5$. Следовательно, данная функция имеет точку $z_0 = 0$ полюсом второго порядка. Вычетом этой функции $f(z)$ относительно полюса $z_0 = 0$ является коэффициент при $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$, т.е. число $\dfrac{1}{5} \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{1}{25}$.

Аналогично, при разложении $f(z)$ по степеням разностей $z - (-5) = z + 5$ получим, что точка $z_1 = -5$ будет полюсом первого порядка (степени от $\frac{1}{z}$ дадут правильную часть ряда Лорана) и вычет в точке $z_1 = -5$ будет равен $\frac{1}{25}$, т.к.

$$f(z)=\frac{1}{z+5}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{z+5}\cdot\left(\frac{1}{z+5-5}\right)^2=\frac{1}{z+5}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{1-\frac{z+5}{5}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{z+5}\cdot\left(1+\frac{z+5}{5}+\frac{(z+5)^2}{25}+\dots\right)^2=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{z+5}+\frac{2}{25\cdot 5}+\dots$$

11.2.1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение: $x'' - x' - 20\cdot x = \mathrm{e}^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$.

Решение. Переходим от оригиналов к изображениям функций.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p) = x$,

$$x'(t) \risingdotseq p\cdot X(p) - x_0 = p\cdot X - 0 = p\cdot X,$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2\cdot X(p) - p\cdot x_0 - x_0' = p^2\cdot X - 4.$$

Тогда с учетом того, что изображение правой части есть $e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$, получим операторное уравнение в виде:

$$p^2\cdot X - p\cdot X - 20\cdot X - 4 = \frac{1}{p+1},$$

$$X\cdot(p^2-p-20)=\frac{1}{p+1}+4.$$

Отсюда находим

$$X=\frac{1}{(p+1)(p^2-p-20)}+\frac{4}{p^2-p-20}=\frac{1}{(p+1)(p-5)(p+4)}+\frac{4}{(p-5)(p+4)}=$$

$$=-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{54}\cdot\frac{1}{p-5}+\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{p+4}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p-5}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p+4}=$$

$$=-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{25}{54}\cdot\frac{1}{p-5}-\frac{11}{27}\cdot\frac{1}{p+4}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим искомое частное решение:

$$x(t)=-\frac{1}{18}\cdot e^{-t}+\frac{25}{54}\cdot e^{5t}-\frac{11}{27}\cdot e^{-4t}.$$

РАЗДЕЛ 6

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

6.1.1. Классическое определение вероятности

Если испытание может привести к одному и только к одному из n различных равновозможных исходов (называемых элементарными исходами) и если m из этих исходов благоприятствуют появлению событий A, то вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Это — классическое определение вероятности.

Отметим основные свойства вероятности.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события I, т.е. такого события, которое при испытании обязательно произойдет, равна единице:

$$P(I) = 1.$$

3. Вероятность невозможного события O, т.е. события, которое в результате испытания не может произойти, равна нулю:

$$P(O) = 0.$$

4. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\overline{A}$, т.е. таких событий, что появление одного из них исключает появление другого, равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 6.1. Из урны, в которой находится 4 белых, 9 черных и 7 красных шаров, наугад вынимают один шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Здесь элементарным исходом является извлечение из урны любого шара. Число всех таких исходов равно числу шаров в урне, т.е. $n = 20$. Число исходов, благоприятствующих появлению белого шара (событие A), очевидно, равно числу белых шаров в урне, т.е. $m = 4$. Поэтому по формуле (1) находим:

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Пример 6.2. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной восьми?

Решение. Обозначим через A_{ij} событие, состоящее в том, что при первом подбрасывании выпало i очков, а при втором – j очков. Тогда 36 событий

$$\begin{array}{llll} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{16}; \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{26}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ A_{61}, & A_{62}, & \ldots, & A_{66} \end{array}$$

можно рассматривать как элементарные исходы опыта. Следовательно, число всех элементарных исходов $n = 36$. Появлению события A (сумма выпавших очков равна восьми) благоприятствуют исходы A_{26}, A_{35}, A_{44}, A_{53}, A_{62}. Таким образом, $m = 5$. Отсюда получаем:

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

6.1.2. Геометрические вероятности

Если результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем положения точек в этой области равновозможны, то вероятность события находится по формуле

$$p = \frac{S_0}{S}, \tag{2}$$

где S – геометрическая мера (длина, площадь или объем) всей области, S_0 – геометрическая мера той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

Пример 6.3. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круге, окажется внутри квадрата?

Решение. Площадь круга $S = \pi r^2$, площадь квадрата $S_0 = 2r^2$, где r – радиус круга (рис. 69). Отсюда по формуле (2) находим искомую вероятность:

$$p = \frac{S_0}{S} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}.$$

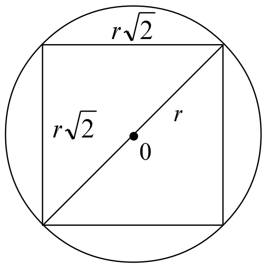


Рис. 69

Пример 6.4. Известно, что телефонный звонок должен последовать от 11 ч до 11 ч 30 мин. Какова вероятность того, что звонок произойдет в последние 10 минут указанного промежутка, если момент звонка случаен?

Решение. Воспользуемся геометрической схемой. Для этого промежуток времени от 11 ч до 11 ч 30 мин представим в виде отрезка AB длиной в 30 единиц, а промежуток времени от 11 ч 20 мин до 11 ч 30 мин – в виде отрезка CB длиной в 10 единиц (рис. 70). Слу-

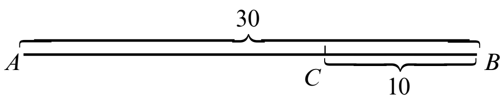


Рис. 70

чайный звонок в некоторый момент рассматриваемого получаса изображается наугад взятой точкой на отрезке AB. Тогда вероятность того, что звонок произойдет в интервале от 11 ч 20 мин до 11 ч 30 мин, в полученной схеме означает вероятность того, что точка, наугад взятая на отрезке AB, окажется принадлежащей отрезку CB. Эта вероятность, очевидно, равна:

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Пример 6.5. В любой момент времени промежутка T равновозможны поступления в приемник двух сигналов. Приемник считается забитым, если разность по времени между сигналами меньше $\tau < T$. Какова вероятность того, что приемник будет забит?

Решение. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат xOy. Пусть x и y – моменты поступления в приемник соответственно первого и второго сигналов. Тогда все возможные комбинации поступления сигналов изобразятся точками квадрата $0 \le x \le T$, $0 \le y \le T$. Так как моменты поступления сигналов равновозможны в течение промежутка времени T, то положения точек $(x; y)$ в области рассматриваемого квадрата также равновозможны.

Выясним, какие точки квадрата благоприятствуют интересующему нас событию A (приемник забит). Событие A может произойти лишь в том случае, если разность по времени между сигналами будет меньше τ т.е. если

$$| x - y) < \tau. \qquad (*)$$

Таким образом, область квадрата, благоприятствующая событию A (на рис. 71 она заштрихована), состоит из точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству (*).

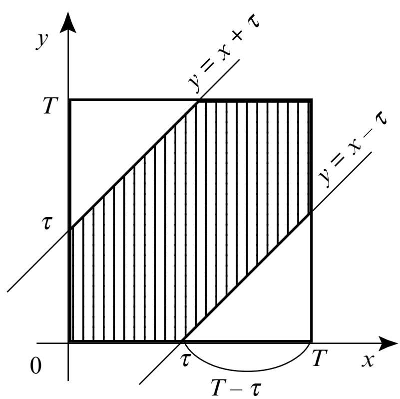


Рис. 71

Площадь квадрата $S = T^2$; площадь заштрихованной области

$$S_0 = T^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(T-\tau)^2 = T^2 - (T-\tau)^2.$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

6.1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном осуществлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, т.е. никакие два из них не могут осуществиться вместе, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{3}$$

Вероятность события A, вычисленная в предположении, что произошло событие B, называется условной вероятностью события A при условии B и обозначается $P(A / B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \ldots P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{4}$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, т.е. осуществление любого числа из них не меняет вероятностей осуществления остальных, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n). \tag{5}$$

Пример 6.6. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение некоторого времени t равна $p_1 = 0{,}9$, второго — $p_2 = 0{,}8$. Какова вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

Решение. Рассмотрим следующие события: A_1 и A_2 — бесперебойная работа соответственно первого и второго станков в течение времени t; A — бесперебойная работа обоих станков в течение указанного времени. Тогда событие A есть совмещение событий A_1 и A_2, т.е. $A = A_1 A_2$. Так как события A_1 и A_2 независимы (станки работают независимо друг от друга), то по формуле (5) получим:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Пример 6.7. В задаче 6.6. определить вероятность бесперебойной работы хотя бы одного из двух станков в течение времени t (событие B).

Решение.

Первый способ. Рассмотрим противоположное событие $\overline{B}$ означающее простой обоих станков в течение времени t. Очевидно, что событие $\overline{B}$ есть совмещение событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ — простоев первого и второго станков, т.е. $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Так как события $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ независимы, то

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)] = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Отсюда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}98.$$

Второй способ. Событие B происходит в том случае, когда имеет место одно из следующих трех несовместных событий: либо $A_1 \cdot \overline{A}_2$ — совмещение событий A_1 и $\overline{A}_2$ (первый станок работает, второй — не работает), либо $\overline{A}_1 \cdot A_2$ — совмещение событий $\overline{A}_1$ и A_2 (первый станок не работает, второй – работает), либо $A_1 A_2$ — совмещение событий A_1 и A_2 (оба станка работают), т.е.

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2.$$

По формуле (3) получим:

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2).$$

В силу того, что события A_1 и A_2, а следовательно, A_1 и $\overline{A_2}$, $\overline{A_1}$ и A_2 независимы, имеем:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= P(A_1)[1 - P(A_2)] + [1 - P(A_1)]\, P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}98.$$

Пример 6.8. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов; вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают выход из строя соответственно первого, второго и третьего элементов. Их вероятности по условию соответственно равны: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}3$; $P(A_3) = 0{,}4$. Тогда вероятности противоположных событий $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ соответственно первый, второй и третий элемент не вышел из строя) равны:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}8;\ P(A_2) = 0{,}7;\ P(A_3) = 0{,}6.$$

Событие A, состоящее в том, что разрыва цепи не произошло, есть совмещение независимых событий $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$: $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Следовательно, по формуле (5) получаем:

$$P(A) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

Пример 6.9. В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно вынимают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым.

Решение. Рассмотрим следующие события: A — первый вынутый шар черный, B — второй шар красный, C — третий шар белый. Обозначим через D событие, заключающееся в том, что шары вынуты в последовательности: черный, красный, белый. Очевидно, $D = A \cdot B \cdot C$.

По формуле (4) имеем:

$$P(D) = P(A) \cdot P(B / A) \cdot P(C / AB).$$

Найдем вероятности, входящие в правую часть этого равенства. Вероятность того, что первоначально вынут черный шар, $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Вероятность извлечения из урны красного шара при условии, что первоначально был вынут черный шар, $P(B / A) = \frac{5}{14}$, так как после изъятия черного шара в урне осталось 14 шаров и из них — 5 красных. Вероятность извлечения из урны белого шара после того, как были извлечены черный и красный шары, $P(C / AB) = \frac{4}{13}$ (после изъятия черного и красного шаров в урне осталось 13 шаров и из них — 4 белых).

Таким образом,

$$P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{91}.$$

Пример 6.10. Завод изготавливает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью $p_1 = 0{,}1$. Изделие осматривается одним контролером; он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью $p_2 = 0{,}8$, а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна $p_3 = 0{,}3$. Найти вероятности следующих событий:

A_1 – изделие будет забраковано, но ошибочно;

A_2 – изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом;

A_3 – изделие будет забраковано.

Решение. Рассмотрим следующие события:

B_1 – изделие имеет дефект;

B_2 – контролер обнаружит имеющийся дефект;

B_3 – контролер забракует изделие, не имеющее дефекта.

По условию задачи $P(B_1) = p_1 = 0{,}1$; $P(B_2) = p_2 = 0{,}8$; $P_{\overline{B}_1}(B_3) = p_3 = 0{,}3$. Событие A_1 по смыслу означает: «изделие не имеет дефекта и изделие будет забраковано контролером», т.е. $A_1 = \overline{B}_1 \cdot B_3$. Тогда

$$P(A_1) = P(\overline{B}_1 \cdot B_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P_{\overline{B}_1}(B_3) = (1 - p_1) \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27.$$

Событие A_2 по смыслу означает: «изделие имеет дефект и контролер не обнаружит дефект», т.е. $A_2 = B_1 \cdot \overline{B}_2$. Тогда

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) = p_1 \cdot (1 - p_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02,$$

т.к. события B и $\overline{B}_2$ независимые.

Событие A_3 по смыслу означает: «изделие имеет дефект и контролер обнаруживает дефект или изделие не имеет дефекта и контролер забракует изделие», т.е.

$$A_3 = B_1 \cdot B_2 + \overline{B}_1 \cdot B_3$$

и

$$P(A_3) = P(B_1 \cdot B_2 + \overline{B}_1 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) + P(\overline{B}_1) \cdot P_{\overline{B}_1}(B_3) =$$
$$= P_1 \cdot P_2 + (1 - p_1) \cdot p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}35.$$

6.1.4. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если с некоторым опытом связано n исключающих друг друга событий (гипотез) H_1, H_2, … , H_n и если событие A может осуществиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$, то после проведения опыта, в результате которого осуществилось событие A, вероятности гипотез можно переоценить по формуле Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 6.11. Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй — 5 белых и 4 черных, в третьей — 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым; б) белый шар вынут из второй урны.

Решение:

а) пусть A — событие, означающее, что извлечен белый шар. Рассмотрим три гипотезы:

H_1	—	выбрана	первая	урна;
H_2	—	,,	вторая	,, ;
H_3	—	,,	третья	,, .

Так как урна, из которой извлекают шар, выбирается наугад, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A соответственно равны:

$P(A/H_1) = \dfrac{4}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из первой урны),

$P(A/H_2) = \dfrac{5}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из второй урны),

$P(A/H_3) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из третьей урны).

Отсюда по формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

б) для определения вероятности того, что белый шар извлечен из второй урны, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\,P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{18}.$$

Пример 6.12. По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0,72 и 0,28. Из-за помех $\frac{1}{6}$ часть A-сигналов искажается и принимается как B-сигналы, а $\frac{1}{7}$ часть переданных B-сигналов принимается как A-сигналы.

а) Определить вероятность того, что на приемном пункте будет принят A-сигнал.

б) Известно, что принят A-сигнал. Какова вероятность того, что он же и был передан?

Решение:

а) пусть событие A – на приемном пункте появился A-сигнал. Введем гипотезы: H_A – передан сигнал A, H_B – передан сигнал B. По условию $P(H_A) = 0{,}72$; $P(H_B) = 0{,}28$.

Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что он же послан, равна:

$$P(A/H_A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Вероятность того, что принят A-сигнал при условии, что послан B-сигнал, равна:

$$P(A/H_B) = \frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = P(H_A)\cdot P(A/H_A) + P(H_B)\cdot P(A/H_B) = 0{,}72\cdot\frac{5}{6} + 0{,}28\cdot\frac{1}{7} = 0{,}64.$$

б) вероятность приема A-сигнала при условии, что он же был передан, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_A/A) = \frac{P(H_A)\cdot P(A/H_A)}{P(A)} = \frac{0{,}72\cdot\frac{5}{6}}{0{,}64} = \frac{0{,}6}{0{,}64}.$$

Пример 6.13. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы p_4, для второй – p_5, для третьей – p_6. Пассажир направился за билетом. Какова вероятность того, что он приобретет билет?

Решение. Рассмотрим следующие случайные события:

A – пассажир приобретет билет;
H_1 – пассажир направился в первую кассу;
H_2 – пассажир направился во вторую кассу;
H_3 – пассажир направился в третью кассу.

Ясно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий и несовместны (мы считаем, что пассажир может направиться только в одну кассу). События H_1, H_2, H_3 являются гипотезами. Событие A может произойти только при условии, что произошла одна из гипотез.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= P_1(1-p_4) + P_2(1-p_5) + P_3(1-p_6).$$

Пример 6.14. Имеются три партии деталей по 30 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу взятой партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Затем из той же партии вторично наудачу извлекли деталь, которая также оказалась стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Решение. Обозначим через A событие — в каждом из двух испытаний была извлечена стандартная деталь.

Можно сделать три предположения (гипотезы): H_1 — детали извлекались из первой партии; H_2 — детали извлекались из второй партии; H_3 — детали извлекались из третьей партии.

Так как детали извлекались из наудачу взятой партии, то вероятности гипотез одинаковы:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Найдем условную вероятность $P_{H_1}(A)$, т.е. вероятность того, что из первой партии будут последовательно извлечены две стандартные детали:

$$P_{H_1}(A) = \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29} = \frac{38}{87}.$$

Найдем условную вероятность $P_{H_2}(A)$, т.е. вероятность того, что из второй партии будут последовательно извлечены (без возвращения) две стандартные детали:

$$P_{H_2}(A)=\frac{15}{30}\cdot\frac{14}{29}=\frac{7}{29}.$$

Найдем условную вероятность $P_{H_3}(A)$, т.е. вероятность того, что из третьей партии будут последовательно извлечены две стандартные детали:

$$P_{H_3}(A)=\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{3}{29}.$$

Искомая вероятность того, что обе извлеченные стандартные детали взяты из третьей партии, по формуле Бейеса равна:

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{29}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{38}{87}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{29}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{29}}=\frac{\frac{1}{29}}{\frac{68}{261}}=\frac{9}{68}.$$

6.2. Схема повторных испытаний

6.2.1. Формула Бернулли

Если при одних и тех же условиях определенный опыт повторяется n раз и если вероятность появления некоторого события A в каждом опыте равна p, то вероятность того, что событие A в серии из n опытов произойдет ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{где}\ q=1-p. \tag{1}$$

Сочетания из n по k находят по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ \text{где}\ n!=P_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Число k_0 появлений события A в серии из n опытов, вероятность которого наибольшая, называется наивероятнейшим числом наступления события A в n опытах. Это число находят по формуле

$$k_0 = [np + p]. \tag{2}$$

Символ [...] означает здесь целую часть числа.

Если число $np + p$ – целое, то наивероятнейшим будет также и число $k_0 - 1$ с той же вероятностью $P_n(k_0)$.

Пример 6.15. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две детали будут нестандартными. Каково наивероятнейшее число нестандартных деталей в рассматриваемой выборке из 30 деталей и какова его вероятность?

Решение. Здесь опыт заключается в проверке каждой из 30 деталей на качество. Событие A – появление нестандартной детали; его вероятность $P = 0{,}04$, тогда $q = 0{,}96$. Отсюда по формуле Бернулли находим:

$$P_{30}(2) = C_{30}^2 (0{,}04)^2 (0{,}96)^{28} \approx 0{,}202.$$

Наивероятнейшее число нестандартных деталей в данной выборке вычисляется по формуле (2):

$$k_0 = [30 \cdot 0{,}04 + 0{,}04] = [1{,}24] = 1,$$

а его вероятность равна

$$P_{30}(1) = C_{30}^1 \cdot 0{,}04^1 \cdot (0{,}96)^{29} \approx 0{,}305.$$

Пример 6.16. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет: а) хотя бы одно попадание; б) не менее трех попаданий; в) не более одного попадания.

Решение. Здесь $n = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. а) Найдем вероятность противоположного события – в серии из четырех выстрелов нет ни одного попадания в цель:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}2^4 = 0{,}0016.$$

Отсюда находим вероятность хотя бы одного попадания в цель:

$$P_4(k \geq 1) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984.$$

б) Событие B, заключающееся в том, что в серии из четырех выстрелов произошло не менее трех попаданий в цель, означает, что было либо три попадания (событие C), либо четыре (событие D), т.е. $B = C + D$. Отсюда $P(B) = P(C) + P(D)$; следовательно,

$$P_4\ (k \geq 3) = P_4\ (3) + P_4\ (4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 =$$
$$= 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^4 = 0{,}8192.$$

в) Аналогично вычисляется вероятность попадания в цель не более одного раза:

$$P_4\ (k \leq 1) = P_4\ (0) + P_4\ (1) = 0{,}0016 + C_4^1 p^1 q^3 =$$
$$= 0{,}0016 + 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}2576.$$

6.2.2. Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p появления некоторого события A постоянна в n независимых испытаниях и отлична от 0 и 1, то вероятность P_{mn} того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз при $n \to \infty$, удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}\ P_{mn}}{\varphi(x)} = 1,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Отсюда следует, что при сделанных предположениях относительно p, если n достаточно большое, имеет место приближенное равенство:

$$P_{mn} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

Пример 6.17. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Решение. Требуется найти вероятность $P_{13,26}$. Зная теорему Лапласа, необходимые вычисления производим по следующей схеме:

$$p = 0{,}4; \qquad np = 26 \cdot 0{,}4 = 10{,}4;$$
$$q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6; \qquad npq = 10{,}4 \cdot 0{,}6 = 6{,}24;$$
$$n = 26; \qquad \sqrt{npq} = \sqrt{6{,}24} = 2{,}50;$$
$$m = 13; \qquad m - np = 13 - 10{,}4 = 2{,}6;$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2{,}60}{2{,}50} = 1{,}04;$$

$$\varphi(x) = \varphi(1{,}04) = 0{,}2323;$$

$$P_{mn} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}2323}{2{,}50} = 0{,}093.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находим по таблице.

6.2.3. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что m — число появлений события A при n испытаниях — заключено между $a = np + \alpha\sqrt{npq}$ и $b = np + \beta\sqrt{npq}$ $(a < b)$, удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(a < m < b)}{\frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]} = 1, \tag{4}$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа, а $\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$ $(q = 1 - p)$. Отсюда при достаточно большом n следует приближенное равенство:

$$P(a < m < b) \approx \frac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{2}. \tag{5}$$

Если в соотношении (4) положить $\alpha = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ и $\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, то получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(np-\varepsilon n < m < np+\varepsilon n)}{\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)} = 1, \tag{6}$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$ (теорема Бернулли), так как $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1$ и $P(np-\varepsilon n < m < np+\varepsilon n) = P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$.

При достаточно больших n из формулы (6) следует приближенное равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \tag{7}$$

или

$$P(|m-np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \tag{8}$$

Пример 6.18. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760?

Решение. Известны число независимых испытаний n = 1000 и вероятность наступления события в отдельном испытании p = 0,7. Требуется найти вероятность того, что число появлений события заключено между a = 652 и b = 760. Искомую вероятность находим по формуле (5)

$$P(a < m < b) \approx \frac{1}{2}[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

Расчет α и β производим по следующей схеме:

$$np = 0{,}7 \cdot 1000 = 700;$$

$$npq = 700 \cdot (1 - 0{,}7) = 700 \cdot 0{,}3 = 210;$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{210} = 14{,}491;$$

$$a - np = 652 - 700 = -48;$$

$$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-48}{14{,}491} = -3{,}31;$$

$$b - np = 760 - 700 = 60;$$

$$\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60}{14{,}491} = 4{,}14;$$

$$\begin{array}{r} -\,\begin{array}{l} \Phi(\beta) = \Phi(4{,}14) = 0{,}99997 \\ \Phi(\alpha) = \Phi(-3{,}31) = -0{,}99813 \end{array} \\ \hline \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 1{,}99810. \end{array}$$

Поэтому искомая вероятность приближенно равна:

$$\frac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{2} = \frac{1{,}99810}{2} = 0{,}99905.$$

Пример 6.19. Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Можно ли считать полученное отклонение числа появлений герба от 2020 случайным или же оно обусловлено систематической причиной?

Решение. Расхождение эмпирической частоты Бюффона от теоретической можно считать случайным, если вероятность того, что при 4040 бросаниях монеты отклонение числа выпадений герба от 2020 равно или больше по абсолютной величине, чем у Бюффона, достаточно большая. Пусть m — число выпадений герба при 4040 бросаниях монеты. Находим вероятность:

$$P(|m - 2020| < 28),$$

где $28 = |2048 - 2020|$;

$$P(|m - np| < \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

В данном случае p = 0,5, q = 0,5, n = 4040, ε = 28. Отсюда

$$np = 4040 \cdot 0{,}5 = 2020; \quad \sqrt{npq} = \sqrt{1010} = 31{,}78;$$

$$npq = 2020 \cdot 0{,}5 = 1010; \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \frac{28}{31{,}78} = 0{,}881;$$

$$P\,(\,|\,m - 2020\,| < 28) \approx \Phi\,(0{,}881) = 0{,}6217.$$

Поэтому вероятность противоположного события, т.е. того, что $|\,m - 2020\,| \geq 28$, равна 1 – 0,6217 = 0,3783. Так как эта вероятность достаточно большая, то результат Бюффона можно считать обусловленным случайными причинами.

Пример 6.20. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения частости взошедших семян от вероятности p = 0,9, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью P = 0,995.

Решение. Мы знаем, что если n — число независимых испытаний и p — вероятность наступления события в отдельном испытании, то при любом $\varepsilon > 0$ имеет место приближенное равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $q = 1 - p$. В нашем случае $n = 600$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P = 0{,}995$, ε — ? По формуле (7):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}9\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \text{ или } \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}995.$$

Пользуясь таблицей, решаем уравнение $\Phi\,(t)$ = 0,995; t = 2,81.

Отсюда $\varepsilon\sqrt{\dfrac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 2{,}81$ и, следовательно,

$$\varepsilon = 2{,}81\sqrt{\frac{0{,}09}{6 \cdot 100}} = \frac{2{,}81 \cdot 0{,}3}{10\sqrt{6}} = 0{,}034.$$

Пример 6.21. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частости изделий первого сорта в них от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01?

Решение. Здесь $p = 0{,}85$, $q = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, $\varepsilon = 0{,}01$, $P = 0{,}997$, n — ? Так как в равенстве $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ известна вероятность P, стоящая слева, то сначала решим уравнение $\Phi(t) = P$. Пусть t_P — корень этого уравнения. Тогда $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx t_P$, $\varepsilon^2 \frac{n}{pq} \approx t_P^2$ и, следовательно, $n \approx \frac{pqt_P^2}{\varepsilon^2}$. Для нашего случая $t_{0,997} = 3$, поэтому

$$n \approx \frac{0{,}85 \cdot 0{,}15 \cdot 3^2}{(0{,}01)^2} = \frac{1{,}1475}{0{,}0001} = 11475.$$

6.3. Случайные величины

Случайная величина (СВ) — это переменная, принимающая в каждом конкретном испытании конкретное числовое значение, которое может меняться от опыта к опыту.

Примеры: количество клиентов, посетивших парикмахерскую за день; месячная прибыль ателье; время проявления фотопленки.

Случайные величины представляют результаты измерений в случайных экспериментах (испытаниях). Существует два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины — это переменные, принимающие только отделенные друг от друга числовые значения (которые можно заранее перечислить).

Примеры: оценки в зачетной книжке (3, 4, 5); количество студентов на экзамене.

Непрерывная случайная величина может принимать любые значения из замкнутого или открытого интервала. Например, размеры одной и той же детали, определяемые разными людьми или с применением разных инструментов, различны.

Возможны комбинированные (дискретно-непрерывные) случайные величины, которые на одних интервалах являются непрерывными, а на других — дискретными.

6.3.1. Законы распределения

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины называется любое правило, позволяющее находить все вероятности каждого значения этой величины. Для случайных величин любого вида — это правило, позволяющее находить вероятности появления этой величины в любом заданном интервале ее значений. Законы распределения задаются в аналитической, графической или табличной форме. Обычно для этого используются:

а) ряд распределения (многоугольник распределения);

б) интегральная функция распределения;

в) дифференциальная функция распределения.

Ряд распределения это таблица, в которой перечислены все возможные значения СВ и соответствующие им вероятности. Он является исчерпывающей характеристикой дискретной СВ.

У непрерывных СВ ряд распределения отсутствует, поэтому он не является универсальным законом распределения СВ. Пример ряда распределения иллюстрируется табл. 1, где представлено (в порядке возрастания) пять значений дискретной случайной величины X. При этом сумма всех вероятностей всегда равна единице.

Таблица 1

x_i	–3	0	1	3	4
P_i	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1

Интегральной функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P(X < x),$$

где x — некоторая текущая переменная.

Интегральная функция распределения — самая универсальная характеристика СВ. Она существует и для дискретных и для непрерывных СВ, полностью и однозначно характеризуя их с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Часто слово «интегральная» опускается.

На рис. 72 представлена интегральная функция распределения дискретной случайной величины, заданной табл. 1.

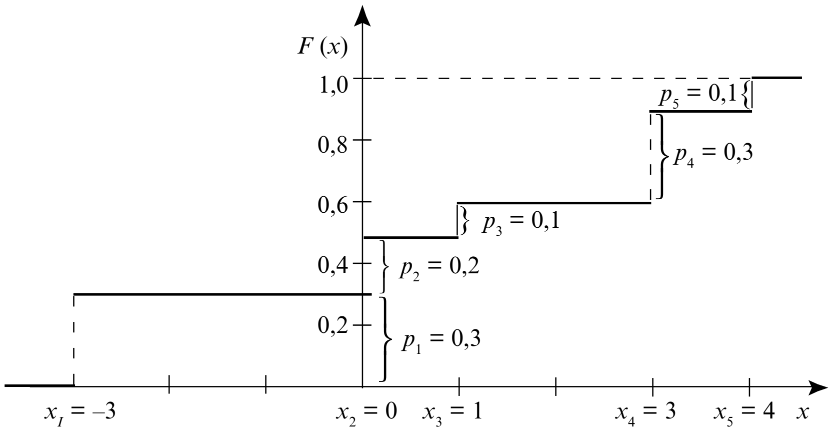


Рис. 72. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины (см. табл. 1)

Основные свойства интегральной функции распределения:

1. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей: $0 \le F(x) \le 1$, где на границах интервала: $F(x = -\infty) = 0$ и $F(x = +\infty) = 1$.

2. Вероятность появления СВ в интервале от α до β, равна разности значений интегральной функции распределения на концах интервала, т.е.

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

3. Интегральная функция — неубывающая функция своего аргумента, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

4. В отдельных точках $F(x)$ может иметь разрыв. В этих точках величина скачка функции распределения равна вероятности появления случайной величины в этой точке:

$$P(X = x) = F(x + 0) - F(x).$$

5. График функции распределения дискретной СВ имеет ступенчатый вид (рис. 72), а непрерывной — непрерывную линию (рис. 73).

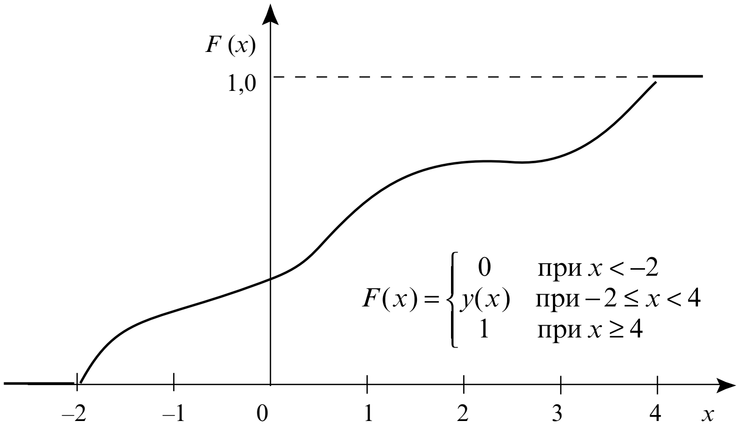


Рис. 73. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины

Плотностью (дифференциальной функцией) распределения непрерывной случайной величины x называется производная ее интегральной функции: $f(x) = F'(x)$.

Основные свойства плотности распределения:

1. Дифференциальная функция неотрицательна: $f(x) \ge 0$.

2. Интеграл от $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до x^* равен интегральной функции распределения

$$\int_{-\infty}^{x^*} f(x)\,dx = F(x^*) = P(X < x^*) = P(-\infty < X < x^*).$$

Этот интеграл численно равен площади фигуры, лежащей левее точки x^* и заключенной между кривой плотности и осью абсцисс (рис. 74).

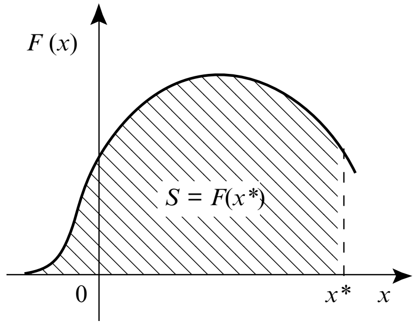


Рис. 74. Графическое изображение интегральной функции $F(x^*) = P(X < x^*)$

3. С помощью дифференциальной функции можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал от α до β, которая равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

т.е. вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $(\alpha; \beta)$ равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от α до β (см. рис. 75).

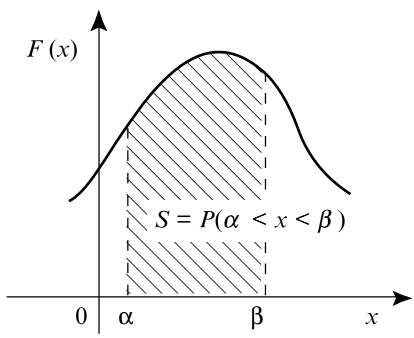


Рис. 75. Графическое изображение интегральной функции в интервале от α до β

4. Интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах равен единице:

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Пример 6.22. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0; 1).

Решение. Искомая вероятность равна приращению интегральной функции на заданном интервале:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0).$$

Так как на интервале (0; 1) по условию $F(x) = \dfrac{x}{2}$, то

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$P(0 < X < 1) = \frac{1}{2}.$$

6.3.2. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ — наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его положение и степень разбросанности.

Математическим ожиданием называется:

а) для дискретной случайной величины – сумма всех произведений ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = \sum_i x_i \cdot p_i;$$

б) для непрерывных случайных величин:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

Здесь $f(x)$ — дифференциальная функция распределения СВ.

Свойства математического ожидания (МО):

1. МО постоянной равно ей самой:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак МО:

$$M(K \cdot X) = K \cdot M(X).$$

3. МО суммы двух случайных величин, являющихся функцией одного случайного события A, равно сумме математических ожиданий этих СВ:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. МО произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению их МО:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Свойства 3 и 4 можно распространить на любое число слагаемых или сомножителей.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

а) для дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i;$$

б) для непрерывной СВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)\, dx.$$

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата СВ X и квадратом ее математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = M(C^2) - [M(C)]^2 = C^2 - (C)^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносит за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(K \cdot X) = K^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия суммы или разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия суммы СВ с постоянной равна дисперсии СВ:

$$D(X + C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X).$$

5. Свойства 3 и 4 можно распространить на любое число слагаемых.

Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Использование $\sigma(X)$ полезно благодаря одинаковой размерности его с размерностью математического ожидания.

6.3.3. Дискретные распределения

Геометрическое распределение

Дискретная СВ с рядом распределения

x	1	2	3	…	n	…
p	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	…	$P(n)$	…

где $P(n) = P \cdot q^{n-1}$, $q = 1 - P$, $0 < P < 1$, P — постоянное число, имеет геометрическое распределение.

Если X имеет геометрическое распределение, то

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Биномиальное распределение

Пусть n — некоторое натуральное число, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Дискретная СВ с рядом распределения

x	0	1	2	…	k	…	n	...
p	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$	…	$p(k)$	…	$p(n)$	...

где $P(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, имеет биномиальное распределение.

Если X — случайная величина, равная числу появлений некоторого события A в n независимых испытаниях ($p = p(A)$ — вероятность появления события A в одном испытании), то X имеет биномиальное распределение.

Если СВ X имеет биномиальное распределение, то

$$M(X) = n \cdot p,\ D(X) = n \cdot p \cdot q,\ \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

Распределение Пуассона

Распределением Пуассона называется распределение дискретной СВ, вероятности значений которой вычисляются по формуле Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = n \cdot p$ – среднее число появлений события.

Для распределения Пуассона

$$M(X) = \lambda \quad \text{и} \quad D(X) = \lambda.$$

Это свойство применяют на практике при решении вопроса: правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона?

Пример 6.23. Вероятность сдать заказ в ателье равна $p < 1{,}0$. Настойчивый клиент обходит все имеющиеся в городе ателье, пока не добьется успеха. Какова вероятность, что ему это удастся не раньше, чем с третьего раза, если по статистике среднее число попыток равно 5.

Решение. Случайная величина распределена по геометрическому закону. Поэтому $M(X) = 5 = \frac{1}{p}$, отсюда $p = 0{,}2$. Найдем $P(1) = p \cdot q^{1-1} = 0{,}2$ и $P(2) = p \cdot q^{2-1} = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$ — вероятности того, что клиент добьется успеха с первого и со второго раза соответственно.

События, что клиент добьется успеха не раньше, чем с третьего раза или с первого, или со второго раза, образуют полную группу событий, т.е. $P(m \geq 3) + [P(m = 1) + P(m = 2)] = 1$. Отсюда $P(m \geq 3) = 1 - [P(1) + P(2)] = 1 - (0{,}2 + 0{,}16) = 0{,}64$.

Пример 6.24. На абонементное обслуживание поставлено 5 телевизоров. Известно, что для группы из пяти телевизоров математическое ожидание числа отказавших за год равно единице. Если телевизоры имеют одинаковую вероятность безотказной работы, то какова вероятность, что за год потребуется хотя бы один ремонт?

Решение. Случайная величина распределена по биномиальному закону, так как испытания независимы и вероятность $P(A) = \text{const}$. Поскольку математическое ожидание числа отказавших телевизоров равно единице, то математическое ожидание годных равно:

$$M(X_A) = n - M(X_{\overline{A}}) = 5 - 1 = 4.$$

Параметр P определяется из формулы математического ожидания, $M(X) = n \cdot p$, т.е. $P = \frac{4}{5} = 0{,}8$. «Потребуется хотя бы один ремонт» соответствует вероятности $P_5(n < 5)$, где n — число годных телевизоров. Тогда из анализа полной группы случайных величин $P_5(n < 5) = 1 - P_5(n = 5)$. При этом вероятность годности всех телевизоров рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(n = 5,\ m = 5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^{5-5} = p^5 = 0{,}8^5.$$

Вероятность искомого события равна:

$$P_{n=5}(m > 5) = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67.$$

Задачу можно решить и другим способом. Так как вероятность ремонта любого телевизора $q = 0{,}2$, а вероятность безотказной работы P = 0,8, то вероятность хотя бы одного ремонта из пяти телевизоров равна:

$$P(A) = 1 - p^5 = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67.$$

Пример 6.25. Приемщица за один час принимает в среднем две заявки. Предполагается простейший поток заявок. Чему равна вероятность поступления четырех заявок за четыре часа?

Решение. Для простейшего потока событий можно воспользоваться распределением Пуассона, которое будет иметь вид:

$$P_n(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

где по условию $\lambda = 2$; $t = 4$ и тогда $\lambda t = 8$, а m — число заявок.

Вероятность появления не менее четырех событий рассмотрим как:

$$P_n(m \geq 4) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] =$$

$$1 - \left[\frac{8^0}{0!} e^{-8} + \frac{8}{1!} e^{-8} + \frac{8^2}{2!} e^{-8} + \frac{8^3}{3!} e^{-8}\right] =$$

$$= 1 - e^{-8}\left(1 + 8 + 32 + \frac{256}{3}\right) = 1 - 0{,}0424 = 0{,}9576.$$

6.3.4. Непрерывные распределения

6.3.4.1. Равномерное распределение

Распределение вероятностей называется равномерным, если дифференциальная функция имеет постоянное значение на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, т.е. $f(x) = C$ на $(a;\, b)$ и $f(x) = 0$ при всех остальных значениях x.

Из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ имеем $\int\limits_{a}^{b} C \cdot dx = 1$ или $C(b - a) = 1$, отсюда $C = \dfrac{1}{(b-a)}$.

Тогда закон равномерного распределения запишем в виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

График равномерного распределения представлен на рис. 76.

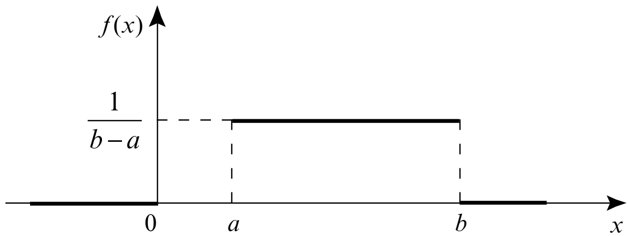


Рис. 76

Найдем интегральную функцию:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int_{a}^{x} C\cdot dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Ее график представлен на рис. 77.

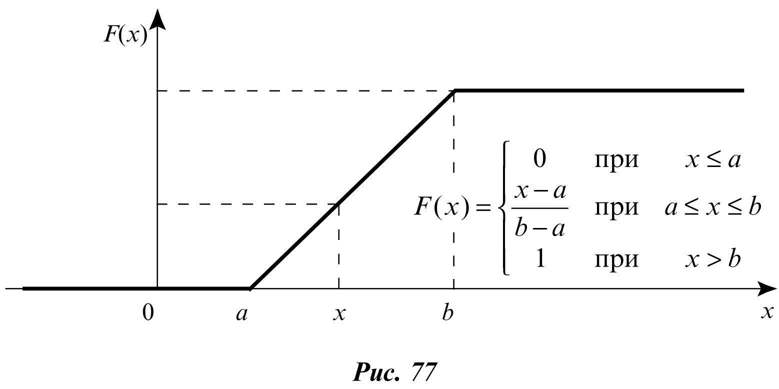


Рис. 77

Для равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{b+a}{2} \quad \text{и} \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 6.26. Мастер, осуществляющий ремонт на дому, может появиться в любое время с 10 до 18 часов. Клиент, прождав до 14 часов, отлучился на один час. Какова вероятность, что мастер (приход его обязателен) не застанет его дома?

Решение. Из анализа формулировки задачи принимаем равномерный закон распределения случайного времени прихода мастера. Для определения границ интервала времени учтем, что раз до 14 часов мастер не пришел, то до 18 часов он придет обязательно. Следовательно, $a = 14$ и $b = 18$, а интегральная функция распределения:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-14}{18-14}.$$

Тогда вероятность его появления в момент отсутствия клиента (с 14 до 15 часов) равна:

$$P(14 < X < 15) = F(15) - F(14) = \frac{15-14}{18-14} - \frac{14-14}{18-14} = \frac{1}{4}.$$

6.3.4.2. Экспоненциальное (показательное) распределение

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

где λ — постоянное положительное число.

Найдем интегральную функцию:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} \cdot dx = \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)} \Big|_{0}^{x} =$$

$$= \frac{\lambda}{-\lambda} (e^{-\lambda x} - e^{0}) = 1 - e^{-\lambda x},$$

где $\lambda = \text{const}$.

Вероятность безотказной работы на интервале времени от нуля до x^*, соответствующей событию «появление отказа после $t = x^*$»:

$$P(X > x^*) = 1 - P(-\infty < X < x^*) = 1 - F(x^*) = 1 - (1 - e^{-\lambda x^*}) = e^{-\lambda t}.$$

Пример 6.27. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения для экспоненциального закона с параметром $\lambda = 0{,}7$, для которого:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda x} \end{cases} \approx \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0{,}7 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cong 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ при } x \geq 0.$$

Графики этих функций изображены на рис. 78.

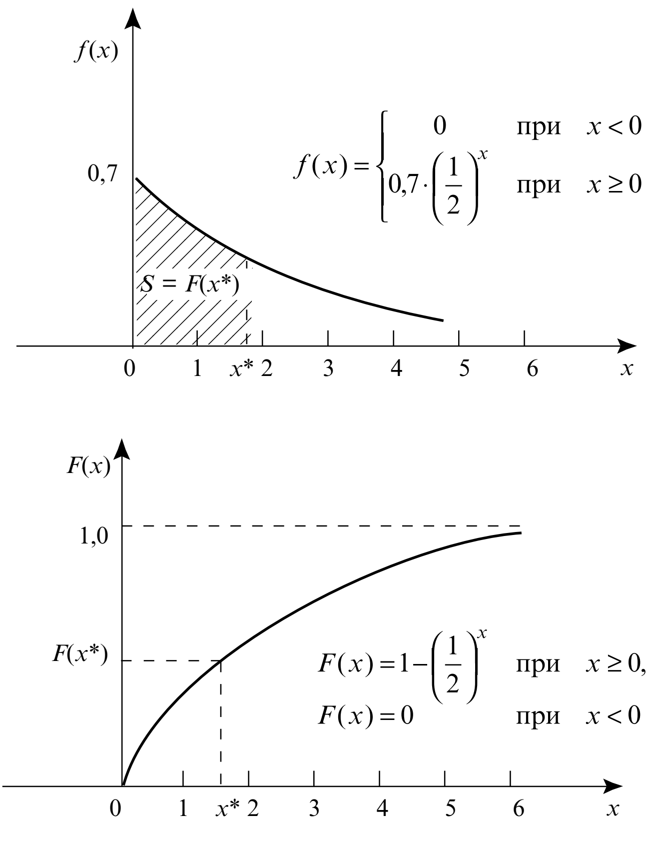


Рис. 78

Пример 6.28. Радиосистема, имеющая 1000 элементов (с интенсивностью отказов $\lambda_i = 10^{-6}$ отк / ч), прошла испытание и принята заказчиком. Требуется определить вероятность безотказной работы системы в интервале $t_1 < (t = t_1 + \Delta\, t) < t_2$, где $\Delta t = 1000$ ч.

Решение. Интенсивность отказа системы из $n = 1000$ нерезервированных элементов, каждый из которых имеет $\lambda_i = 10^{-6}$ отк / ч, равна $\lambda_s = n \cdot \lambda_i = 10^{-3}$ отк / ч. При таких исходных данных вероятность отказа системы за время $t = 1000$ ч равна:

$$P\,(X > t) = e^{-\lambda\, t} = e^{-10^{-3}\cdot 1000} = e^{-1} = 0{,}37.$$

Пример 6.29. Холодильник имеет постоянную интенсивность отказа равную $\lambda = 10^{-5}$ отк / ч. Какова вероятность, что он откажет после гарантийного срока $\tau = 20000$ часов?

Решение. Учитывая постоянную интенсивность отказов, можно принять экспоненциальный закон распределения вероятностей. Тогда вероятность отказа в интервале $0 < X < 20000$ будет определяться с помощью интегральной функции:

$$P\,(0 < X < x) = 1 - e^{-\lambda\, x} = 1 - e^{-10^{-5}\cdot 20000} = 1 - e^{-0{,}2} \cong 0{,}181.$$

Очевидно, что вероятность отказа после гарантийного срока будет равна $P\,(X > 20000) = 0{,}819$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, равно величине, обратной параметру распределения:

$$M\,(X) = \frac{1}{\lambda},$$

а дисперсия:

$$D\,(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Преимущество этого распределения в том, что оно определяется одним параметром λ, а обычно эти параметры бывают неизвестными и трудность заключается в том, чтобы их оценить.

Рассмотрим вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $(a;\, b)$:

$$P\,(a < X < b) = F\,(b) - F\,(a) = (1 - e^{-\lambda\, b}) - (1 - e^{-\lambda\, a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda\, b}.$$

Итак, $P\,(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda\, b}$.

6.3.4.3. Нормальный закон распределения

На практике очень часто имеют дело со случайными величинами, зависящими от большого числа сравнительно незначительных и взаимно независимых факторов.

Пример. При измерении длины материала, веса порции химиката и т.п. имеют место ошибки измерения. Найти вероятность, что ошибка лежит в пределах от $-\Delta x$ до $+\Delta x$.

Плотность распределения такой случайной величины описывается кривой, представленной на графике (рис. 79), где $x_1 = x^* - \Delta x$ и $x_2 = x^* + \Delta x$. Это нормальный закон распределения.

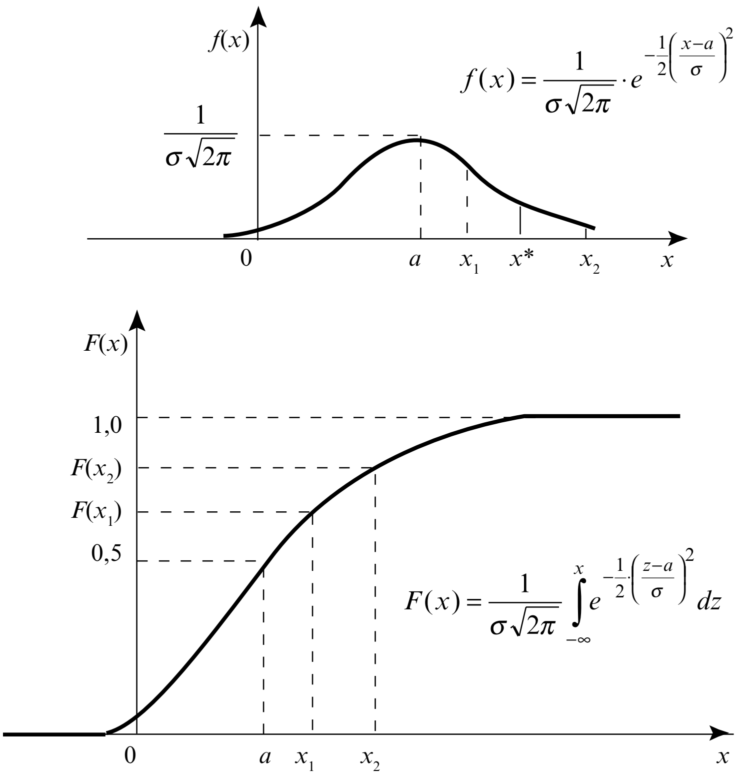


Рис. 79. График плотности (кривая Гаусса) и интегральная функция нормального закона распределения непрерывной случайной величины

Нормально распределенной называется случайная величина, имеющая в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ плотность, определяемую формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Ее интегральная функция:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)^2} dz.$$

При $\sigma = 1$ и $a = 0$ будем иметь нормированное нормальное распределение

$$F_н(x) = 0{,}5 + \Phi(x),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — интеграл Лапласа.

Указанный интеграл можно вычислить, пользуясь таблицами, и тогда вероятность попадания *СВ X* в интервал определяется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

($\Phi(-x) = -\Phi(x)$ — нечетная функция).

Доказано, что переход от нормированной к обычной функции осуществляется подстановкой:

$$F(x) = F_н\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Пример 6.30. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 2 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания СВ X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 4).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

По условию: $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $a = 2$, $\sigma = 5$, следовательно,

$$P(1 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{5}\right) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}2).$$

Так как функция Лапласа нечетная, то

$$\Phi(-0{,}2) = -\Phi(0{,}2).$$

Таким образом,

$$P(1 < X < 4) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}2).$$

По таблице находим:

$$\Phi(0{,}4) = 0{,}1554; \quad \Phi(0{,}2) = 0{,}0793.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(1 < X < 4) = 0{,}1554 + 0{,}0793 = 0{,}2347.$$

Пример 6.31. Три непрерывные случайные величины имеют различные распределения: а) равномерное; б) экспоненциальное; в) нормальное. Для всех трех распределений $M(X_i) = \sigma(X_i) = 4$.

Найти для всех законов распределения вероятность того, что в результате испытания СВ X_i примет значение, заключенное в интервале (5; 12).

Решение.

а) Равномерное распределение.

Дифференциальная функция равномерного распределения СВ X_1 имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Параметры a и b найдем из условия, что для равномерного распределения

$$\begin{cases} M(X_1) = \dfrac{b+a}{2}, \\ D(X_1) = \dfrac{(b-a)^2}{12} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{b+a}{2} = 4, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = 4^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} b+a=8, \\ (b-a)^2=192 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b+a=8, \\ b-a=8\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что

$$a=4\,(1-\sqrt{3}\,)\cong 2{,}93; \quad b=4\,(1+\sqrt{3}\,)\cong 10{,}93.$$

При извлечении квадратного корня во втором уравнении системы взят знак «+» с учетом того, что $a < b$.

Имеем

$$f\,(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<4\,(1-\sqrt{3}\,), \\ \dfrac{1}{8\sqrt{3}} & \text{при} \quad 4\,(1-\sqrt{3}\,)\le x\le 4\,(1+\sqrt{3}\,), \\ 0 & \text{при} \quad x>4\,(1+\sqrt{3}\,). \end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X_1 в интервале $(\alpha;\,\beta\,)$ определяем по формуле

$$P\,(\alpha<X_1<\beta\,)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Для нашего случая искомая вероятность равна:

$$P\,(5<X_1<12)=\int_{5}^{12} f(x)\cdot dx=\int_{5}^{4\,(1+\sqrt{3}\,)}\frac{1}{8\sqrt{3}}\,dx+\int_{4\,(1+\sqrt{3}\,)}^{12} 0\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}\,x\,\Bigg|_{5}^{4\,(1+\sqrt{3}\,)}=\frac{1}{8\sqrt{3}}\,(4+4\sqrt{3}-5)=0{,}428.$$

Итак,

$$P\,(5<X_1<12)=0{,}428.$$

б) Экспоненциальное распределение.

Интегральная функция экспоненциального распределения СВ X_2 имеет вид:

$$F\,(x)=1-e^{-\lambda x}.$$

Известно, что $M(X_2)=\frac{1}{\lambda}$ или $\frac{1}{\lambda}=4$ по условию. Отсюда $\lambda = 0{,}25$. Тогда

$$F(x) = 1 - e^{-0{,}25x}.$$

Искомая вероятность:

$$P(5 < X_2 < 12) = e^{-0{,}25\cdot 5} - e^{-0{,}25\cdot 12} = e^{-1{,}25} - e^{-3} = 0{,}2367.$$

в) Нормальное распределение.

Вероятность того, что СВ X_3, подчиненная нормальному закону распределения, попадет в интервал $(\alpha; \beta)$, равна:

$$P(\alpha < X_3 < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция Лапласа, a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение. Так как по условию задачи $a = \sigma = 4$, то искомая вероятность равна:

$$P(5 < X_3 < 12) = \Phi\left(\frac{12-4}{4}\right) - \Phi\left(\frac{5-4}{4}\right) = \Phi(2) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right).$$

Находим по таблицам, что

$$\Phi(2) = 0{,}4772; \quad \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = \Phi(0{,}25) = 0{,}0987.$$

Тогда

$$P(5 < X_3 < 12) = 0{,}4772 - 0{,}0987 = 0{,}3785.$$

6.4. Основные понятия математической статистики

6.4.1. Генеральная совокупность. Выборка. Основные типы задач математической статистики

Пусть X — некоторая случайная величина (количественный признак). В дальнейшем все значения этой СВ будем называть генеральной совокупностью. Если, например, X — дискретная СВ, то генеральная совокупность — $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Допустим, что в процессе наблюдений или опытов мы получили n значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ случайной величины X. В дальнейшем будем говорить, что сделали выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности X.

Число n называется объемом выборки.

Выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности X также можно представить, как значения n экземпляров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X.

Заметим, что среди элементов выборки могут быть повторяющиеся. Поэтому для каждого элемента x_i выборки говорят о частоте ее появления, т.е. сколько раз число x_i наблюдалось в выборке.

В дальнейшем мы часто будем задавать выборку в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — различные элементы выборки, а $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — частоты элементов выборки.

Ясно, что в этом случае объем выборки $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Значения $x_1, \ldots, x_m$ выборки будем называть вариантами.

Если варианты выборки расположены в возрастающем порядке, то выборка называется вариационным рядом.

Например,

x_i	–1	2	5	10	11
n_i	2	7	1	1	5

Варианты выборки называются равноотстоящими, если $X_{i+1} - X_i = h$, где h — постоянное число.

На практике при описании реальных процессов различные характеристики процесса являются случайными величинами. Поэтому возникают задачи определения законов распределения, математических ожиданий и других характеристик этих СВ, основываясь на изучении выборок.

Пусть значения СВ X определяют генеральную совокупность и $F(x) = P(X < x)$ — интегральная функция распределения X. В дальнейшем мы будем ее называть теоретической функцией распределения генеральной совокупности X. Зная функцию $F(x)$, можно определить все характеристики СВ X. Поэтому поставим перед собой следующую задачу: можно ли с помощью выборок из генеральной совокупности X приближенно найти функцию $F(x)$?

Пусть задана выборка

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

объема $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Построим функцию $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x — число вариантов выборки, меньших x, т.е. $\frac{n_x}{n}$ представляет относительную частоту вариант выборки, меньших x. Функция $F^*(x)$ называется функцией распределения выборки или эмпирической функцией распределения.

Пример 6.32. Найти эмпирическую функцию по выборке

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Решение. Найдем объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна единице, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$. Значение $X = 4$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 10 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2 \text{ при } 1 < X \le 4.$$

Значения $X < 6$, а именно $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, наблюдались $n_1 + n_2 = 10 + 15 = 25$ раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \text{ при } 4 < X \le 6.$$

Так как $x_3 = 6$ — наибольшая варианта, то

$$F^*(x) = \frac{50}{50} = 1 \text{ при } x > 6.$$

Значит,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Графически эта функция изображена на рис. 80.

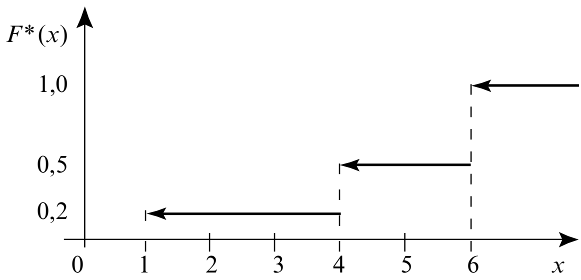


Рис. 80

Эмпирическая функция $F^*(x)$ является приближением теоретической функции $F(x)$, и чем больше объем выборки n, тем точнее $F^*(x)$ описывает $F(x)$ (по вероятности, т.е. случайные отклонения маловероятны).

В заключение заметим: эмпирическая функция обладает аналогичными свойствами, что и теоретическая функция распределения.

6.4.2. Статистическая оценка параметров распределения

Пусть значения случайной величины X образуют генеральную совокупность. Закон распределения СВ (например, нормальный закон) X нам известен. Однако неизвестны некоторые параметры этого распределения (например, МО или дисперсия).

Требуется, изучая выборки из генеральной совокупности, оценить, т.е. приближенно найти, неизвестный параметр.

Статистической оценкой неизвестного параметра называется всякая функция φ вариант x_i выборки, дающая приближенное значение этого параметра.

Если обозначим неизвестный параметр через θ, а его оценку через θ^*, то $\theta^* = \theta(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности X.

Рассматривая варианты $x_1, \ldots, x_n$ выборки как значения n экземпляров $X_1, \ldots, X_n$ СВ X, получим:

$$\theta^* = \varphi(X_1, \ldots, X_n),$$

т.е. статистическая оценка θ^* является функцией от случайных величин X_1, …, X_n, а значит и сама является СВ. Таким образом, статистическая оценка θ^* принимает значения (различные) в зависимости от выборки.

Ясно, что для одного и того же неизвестного параметра можно построить различные статистические оценки. Наша задача понять, какие оценки являются «хорошими».

Во-первых, естественно желание, чтобы статистическая оценка, являясь случайной величиной, имела своим математическим ожиданием неизвестный параметр.

Статистическая оценка θ^* неизвестного параметра θ называется несмещенной, если $M(\theta^*) = \theta$.

Во-вторых, естественно требовать, чтобы значения статистической оценки θ^* по возможности более тесно концентрировались около θ. Вспоминая, что дисперсия является мерой рассеяния значений СВ около среднего значения, дадим следующее определение.

Статистическая оценка θ^* неизвестного параметра θ называется эффективной, если она обладает наименьшей дисперсией среди всех статистических оценок параметра θ.

В третьих, естественно считать, что, чем больше объем выборки, тем точнее значение статистической оценки определяет неизвестный параметр.

Статистическая оценка θ^* неизвестного параметра θ называется состоятельной, если она стремится по вероятности к θ, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\theta^* - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

6.4.3. Генеральная средняя. Выборочная средняя

Пусть значения случайной величины X образуют генеральную совокупность. Математическое ожидание X будем называть генеральной средней и обозначать $\overline{x}_{\Gamma}$ т.е. $\overline{x}_{\Gamma} = M(X)$.

Рассмотрим некоторую выборку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (варианты могут повторяться) из генеральной совокупности X. Будем ее рассматривать как значения n экземпляров $X_1, X_2, \ldots, X_n$ СВ X. Рассмотрим статистическую оценку

$$\overline{X}_{\text{в}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

которая называется выборочной средней. Конкретное значение статистической оценки $\overline{X}_{\text{В}}$ при выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

(статистическая оценка $\overline{X}_{\text{В}}$ является СВ, а $\overline{x}_{\text{В}}$ — конкретное значение $\overline{X}_{\text{В}}$, зависящее от выборки).

В дальнейшем и $\overline{x}_{\text{В}}$ будем называть выборочной средней.

Если выборка задана в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

то ясно, что $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_m \cdot n_m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n}.$$

Выборочная средняя $\overline{X}_{\text{В}}$ является эффективной, несмещенной и состоятельной статистической оценкой для математического ожидания $M(X)$, т.е. для генеральной средней $\overline{X}_{\Gamma}$.

6.4.4. Выборочная дисперсия

Пусть значения СВ X образуют генеральную совокупность. Дисперсию $D(X)$ СВ X будем называть генеральной дисперсией и обозначать D_{Γ}, а среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}}$

Требуется найти статистическую оценку для D_{Γ}.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности X, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – n экземпляров X. Рассмотрим статистическую оценку

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2,$$

которая называется выборочной дисперсией. $D_{\text{В}}$ — случайная величина. Ее конкретное значение при данной выборке $x_1, \ldots, x_n$

равно $d_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_В)^2$ ($d_В$ также называется выборочной дисперсией).

Если выборка из генеральной совокупности задана в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, то

$$d_В = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_В)^2 n_i}{n}.$$

Пример 6.33. Пусть выборка задана таблицей

x_i	0	–1	1	2
n_i	5	3	1	1

$n = 5 + 3 + 1 + 1 = 10$. Тогда

$$\bar{x}_В = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{0\cdot 5 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{10} = 0;$$

$$d_В = \frac{0^2\cdot 5 + (-1)^2\cdot 3 + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1}{10} = \frac{3+1+4}{10} = 0{,}8.$$

$D_В$ является смещенной статистической оценкой для $D(X)$. Поэтому рассматривают статистическую оценку $s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_В$, которая называется исправленной выборочной дисперсией. s^2 является несмещенной статистической оценкой для $D_Г$ Нетрудно видеть, что при больших n: $s^2 \approx D_В$.

Величина $\sqrt{d_В} = \sigma_В$ называется выборочным среднеквадратическим отклонением, а $\sqrt{s^2} = s = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\sigma_В$ — исправленным выборочным среднеквадратическим отклонением.

Пример 6.34. Пусть генеральная совокупность X подчинена нормальному закону. Требуется оценить ее параметры.

Так как параметрами нормального распределения являются $\sigma = \sigma_{\text{Г}}$ и $a = M(X) = \overline{x}_{\text{Г}}$, то

$\sigma \approx \sigma$ при объеме выборки $n \leq 30$,

$\sigma \approx \sigma_{\text{В}}$ при объеме выборки $n > 30$.

6.4.5. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть СВ X образуют генеральную совокупность и θ — неизвестный параметр СВ X. Если статистическая оценка θ^* является состоятельной, то чем больше объем выборки, тем точнее получаем значение θ. Однако на практике мы имеем выборки не очень большого объема, поэтому не можем гарантировать большую точность.

Пусть θ^* — статистическая оценка для θ. Величина $|\theta^* - \theta|$ называется точностью оценки. Ясно, что точность является СВ, т.к. θ^* — случайная величина. Зададим малое положительное число δ и потребуем, чтобы точность оценки $|\theta^* - \theta|$ была меньше δ, т.е. $|\theta^* - \theta| < \delta$.

Мы не можем категорически утверждать, что оценка θ^* удовлетворяет неравенству $|\theta^* - \theta| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство выполнится.

Надежностью γ или доверительной вероятностью оценки θ по θ^* называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta^* - \theta| < \delta$, т.е.

$$\gamma = P\{|\theta^* - \theta| < \delta\}.$$

Обычно надежность g задают наперед, причем, за γ берут число, близкое к 1 (0,9; 0,95; 0,99; …).

Так как неравенство $|\theta^* - \theta| < \delta$ равносильно двойному неравенству $\theta^* - \delta \leq \theta \leq \theta^* + \delta$, то получаем:

$$\gamma = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\}.$$

Интервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$) называется доверительным интервалом, т.е. доверительный интервал покрывает неизвестный параметр θ с вероятностью γ. Заметим, что концы доверительного интервала являются случайными и изменяются от выборки к выборке, поэтому точнее говорить, что интервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$) покрывает неизвестный параметр θ, а не θ принадлежит этому интервалу.

Пусть генеральная совокупность задана случайной величиной X, распределенной по нормальному закону, причем, среднее квадратическое отклонение σ известно. Неизвестным является математическое ожидание $a = M(X)$. Требуется найти доверительный интервал для a при заданной надежности γ.

Выборочная средняя

$$\overline{X}_{\text{В}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

является статистической оценкой для $\bar{x}_{\Gamma} = a$.

Теорема. Случайная величина $\bar{x}_{\text{В}}$ имеет нормальное распределение, если X имеет нормальное распределение, и $M(\overline{X}_{\text{В}}) = a$, $\sigma(\overline{X}_{\text{В}}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$, $a = M(X)$.

Доверительный интервал для a имеет вид:

$$\overline{X}_{\text{В}} - \delta < a < \overline{X}_{\text{В}} + \delta$$

и

$$P\{|\overline{X}_{\text{В}} - a| < \delta\} = \gamma.$$

Находим δ.

Пользуясь соотношением

$$P\{|\overline{X}_{\text{В}} - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_{\text{В}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа, имеем:

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma.$$

Обозначив $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}=t,$ получим $\Phi(t) = \gamma$. Так как γ задана, то по таблице значений функции Лапласа находим значение t.

Из равенства $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ находим $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ — точность оценки. Значит, доверительный интервал для a имеет вид:

$$\left(\overline{X}_{\text{В}}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}_{\text{В}}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Если задана выборка из генеральной совокупности X

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n = n_1 + \ldots + n_m$, то доверительный интервал будет:

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i\cdot x_i}{n}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i\cdot x_i}{n}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

т.е.

$$\left(\overline{x}_{\text{В}}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{\text{В}}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 6.35. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\overline{X}_{\text{В}}=10{,}43$, объем выборки $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\overline{x}_{\text{В}}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{\text{В}}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t) = 0{,}95$ получим: $\Phi(t) = 0{,}475$. По таблице находим $t = 1{,}96$. Найдем точность оценки

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 5}{\sqrt{100}}=0{,}98.$$

Искомый доверительный интервал $(10{,}43 - 0{,}98 < a < 10{,}43 + 0{,}98)$ или $(9{,}45 < a < 11{,}41)$.

Смысл полученного результата таков: если будет произведено большое число выборок, то 95% из них определят такие доверительные интервалы, в которых математическое ожидание будет заключено.

6.5. Методы расчета характеристик выборки

Рассмотрим рациональные методы определения характеристик выборки $\bar{x}_{\text{В}}$ и $d_{\text{В}}$.

6.5.1. Условные варианты. Метод произведений

Пусть выборка из генеральной совокупности X является вариационным рядом с равноотстоящими вариантами, т.е.

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Условными называют варианты u_i, определяемые равенством

$$u_i = \frac{x_i - C}{h},$$

где C — ложный нуль. Обычно полагают C равным варианте с наибольшей частотой.

Нетрудно видеть, что условные варианты принимают только целые значения, и, если $x_{i0} = C$, то $u_{i0} = 0$.

Условные варианты u_1, u_2, …, u_n образуют условную выборку

u_i	u_1	u_2	…	u_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

Тогда можно определить условные эмпирические моменты порядка k:

$$M_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot u_i^k}{n}.$$

Определив условные выборочные моменты первого и второго порядка

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot u_i}{n}; \quad M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot u_i^2}{n},$$

можно определить выборочные среднюю и дисперсию:

$$\bar{x}_В = M_1^* \cdot h + C; \quad d_В = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2.$$

Пример 6.36. Даны выборочные варианты x_i и соответствующие частоты n_i количественного признака X:

x_i	10	15	20	25	30
n_i	6	16	50	24	4

Найти методом произведений выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего:

1) запишем варианты x_i в первый столбец;

2) запишем частоты n_i во второй столбец;

3) в качестве ложного нуля C выберем варианту 20 (эта варианта имеет наибольшую частоту); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей варианту 20, пишем 0; над нулем последовательно записываем условные варианты –1, –2, а под нулем — последовательно 1, 2;

4) произведения частот на условные варианты u_i записываем в четвертый столбец; находим сумму этих произведений и помещаем ее в нижнюю клетку столбца;

5) произведения частот на квадраты условных вариант запишем в пятый столбец; сумму чисел столбца (80) помещаем в нижнюю клетку столбца;

6) произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой (контрольный) столбец; сумму чисел столбца (188) помещаем в нижнюю клетку столбца.

В итоге получим следующую расчетную таблицу:

x_i	n_i	u_i	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$	$n_i(u_i + 1)^2$
10	6	–2	–12	24	6
15	16	–1	–16	16	0
20	50	0	0	0	50
25	24	1	24	24	96
30	4	2	8	16	36
	$n = 100$		$\sum n_i u_i = 4$	$\sum n_i u_i^2 = 80$	$\sum n_i(u_i+1)^2 = 188$

Контроль

$$\sum n_i \cdot u_i^2 + 2\sum n_i \cdot u_i + n = 80 + 2\cdot 4 + 100 = 188;$$

$$\sum n_i\,(u_i+1)^2 = 188.$$

Совпадение найденных сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i\,u_i}{n} = \frac{4}{100} = 0{,}04; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i\,u_i^2}{n} = \frac{80}{100} = 0{,}8.$$

Найдем шаг (разность между двумя соседними вариантами): $h = 15 - 10 = 5$.

Найдем искомую выборочную среднюю:

$$\overline{x}_{\text{в}} = M_1^* \cdot h + C = 0{,}04\cdot 5 + 20 = 20{,}2.$$

Найдем искомую выборочную дисперсию:

$$d_{\text{в}} = [M_2^* - (M_1^*)^2]\cdot h = [0{,}8 - (0{,}04)^2]\cdot 5^2 = 19{,}96.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{d_{\text{в}}} = \sqrt{19{,}96} = 4{,}47.$$

6.5.2. Эмпирические и теоретические частоты

Пусть значения СВ X образуют генеральную совокупность. Закон распределения X неизвестен.

Рассмотрим некоторую выборку объема n из генеральной совокупности

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n = n_1 + \ldots + n_m$.

Частоты n_i появления вариант x_i также называют эмпирическими частотами.

Пусть X — дискретная СВ и имеются основания предположить, что изучаемая величина X распределена по некоторому определенному закону. Зная закон распределения X, мы можем найти вероятности p_i появления значений x_i, т.е.

$$p_i = P\,\{X = x_i\}.$$

Теоретическими частотами n_i называют частоты, определяемые по формуле $n_i = n \cdot p_i$.

Нетрудно видеть, что n_i указывает, сколько раз должно появиться в среднем значение x_i случайной величины X с предполагаемым законом распределения.

Пусть теперь X — непрерывная СВ. Рассмотрим более детально определение теоретических частот, предполагая, что X — нормально распределенная случайная величина.

Пусть

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n = n_1 + \ldots + n_m$, равноотстоящая выборка из генеральной совокупности X, $n_1, \ldots, n_m$ — эмпирические частоты, $x_{i+1} - x_i = h$.

Тогда теоретические частоты определяются по формуле

$$n_i' = n \cdot p_i,$$

где p_i — вероятность попадания X в i-ый частичный интервал с концами $x_i - \dfrac{h}{2}$ и $x_i + \dfrac{h}{2}$.

Приближенно вероятности p_i могут быть найдены по формуле

$$p_i = \frac{h}{\sigma_{\text{В}}} \cdot \varphi(u_i),$$

где $u_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Значения функции $\varphi(u)$ находятся по таблице.

6.6. Статистическая проверка гипотез

Во многих случаях результаты наблюдений используются для проверки предположений (гипотез) относительно либо самого вида распределения генеральной совокупности, либо значения параметров уже известного распределения — статистических гипотез. Пусть известно распределение СВ X (например, это нормальный закон), и по выборке необходимо проверить гипотезу о значении некоторого параметра ($\overline{x}_{\text{Г}}$, $D_{\text{Г}}$ или $\sigma_{\text{Г}}$) этого распределения.

В дальнейшем выдвигаемую и проверяемую гипотезу будем называть нулевой гипотезой (или основной) и обозначать ее через H_0. Наряду с H_0 рассматривают также одну из альтернативных (конкурирующих) гипотез H_1. Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра θ некоторому заданному значению θ_0, т.е. H_0: $\theta = \theta_0$, то в качестве альтернативной гипотезы можно рассмотреть одну из следующих: а) H_1: $\theta > \theta_0$; б) H_1: $\theta < \theta_0$; в) H_1: $\theta \neq \theta_0$; г) H_1: $\theta = \theta_1$, где θ_1 — другое заданное значение параметра θ.

Выдвинутая гипотеза H_0 может соответствовать истине или нет. При проверке гипотезы H_0 по результатам выборки могут быть допущены ошибки двух родов: 1) ошибка первого рода — отвергнута правильная гипотеза; 2) ошибка второго рода — принята неправильная гипотеза. Последствия этих ошибок неравнозначны, и роль каждой оценивается до конца по условиям конкретной задачи. Например, если при проверке качества партии деталей по выборке из нее в качестве H_0 принята гипотеза, что доля брака не более 0,1%, то при допущении здесь ошибки первого рода будет забракована годная продукция, а допустив ошибку второго рода, выпустим потребителю партию деталей с долей брака больше допустимого. Перед началом анализа выборки фиксируют очень малое число α. Вероятность совершить ошибку первого рода называется уровнем значимости α. Обычно берут $\alpha = 0{,}05; 0{,}01; 0{,}005$.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0, называется критерием или статистическим критерием K. Выбор K зависит от конкретной задачи.

Обычно критерий проверки гипотезы реализуется с помощью некоторой статистической характеристики, определенной по выборке, т.е. с помощью некоторой статистики θ. Здесь θ — некоторая СВ, закон распределения которой известен.

В множестве всех возможных значений статистики q критерия K выделим подмножество ω_0, при котором гипотеза H_0 отклоняется. Это подмножество называется критической областью. То подмножество значений θ, при котором гипотезу H_0 не отклоняют, называется областью принятия гипотезы (допустимой областью). Точки, разделяющие эти области, называются критическими точками. Для определения критических точек используют принцип практической невозможности событий, имеющих малую вероятность. При этом задаются достаточно малой величиной α, называемой уровнем значимости критерия, и определяют критическую область как множество тех значений θ, вероятность которых принадлежать к области ω_0 равнялась бы α, т.е.

$$P\{\theta \in \omega_0\} = \alpha.$$

Если по данным выборки при данном уровне значимости получается, что $\theta \notin \omega_0$, то это может служить основанием для отклонения гипотезы H_0.

Рассмотрим проверку гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X. Пусть распределение X неизвестно, но есть основание предположить, что X имеет нормальное распределение, т.е. выдвигается нулевая гипотеза H_0 о нормальности СВ X. Статистический критерий, с помощью которого проверяется нулевая гипотеза, называется критерием согласия. Имеется несколько критериев согласия. Обычно в них используют статистики, имеющие таблицы распределений, подготовленные заранее: статистику с нормальным нормированным распределением, статистику χ^2 и статистику Фишера. Рассмотрим критерий согласия Пирсона (критерий согласия χ^2 Пирсона, χ^2 — «хи квадрат»).

Пусть для X получена выборка объема n, заданная в виде статистического ряда с равноотстоящими вариантами:

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

Найдем по данным выборки величины $\overline{x}_В$ и $\sigma_В$. Предполагая, что X имеет нормальное распределение, вычислим величины n_i':

$$n_i' = \frac{n \cdot h}{\sigma_В} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_В}{\sigma_В}\right), \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}},$$

называемые теоретическими частотами, в противоположность чему n_i здесь называют эмпирическими частотами.

В качестве статистики θ выбирают СВ χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Она подчиняется распределению χ^2 с числом степенной свободы $\nu = s - r - 1$, где s — число различных значений x_i; r — число параметров, от которых зависит распределение. Для нормального закона таких параметров два: $a = \overline{x}_В = M(X)$ и $\sigma = s = \sqrt{D_В \cdot \frac{n}{n-1}}$, т.е. $r = 2$, и $\nu = s - 3$. Если эмпирическое и теоретическое распределения совпадают, то $\chi^2 = 0$. По данному уровню значимости а и числу степеней свободы ν в таблице распределения χ^2 находят критическое значение $\chi^2_{крит.}$ и определяют критическую область: $\chi^2 < \chi^2_{крит.}$, $\omega_0 = \{\chi^2 : \chi^2 \geq \chi^2_{крит.}\}$. Затем вычисляют наблюдаемое значение χ^2, т.е. $\chi^2_{набл.}$ по формуле

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Если окажется, что $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$ то нулевую гипотезу H_0 о том, что X имеет нормальное распределение, принимают. В этом случае опытные данные выборки хорошо согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Пример 6.37. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

n_i	6	12	16	40	13	8	5
n_i'	4	11	15	43	15	6	6

Решение. Число различных вариант m равно 7, значит число степеней свободы распределения χ^2 равно $7 - 3 = 4$. По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы 4 находим $\chi^2_{\text{кр.}} = 9{,}5$. Вычислим $\chi^2_{\text{набл.}}$, для чего составим расчетную таблицу.

1	2	3	4	5	6
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	6	4	2	4	1
2	12	11	1	1	0,09
3	16	15	1	1	0,061
4	40	43	–3	9	0,21
5	13	15	–2	4	0,27
6	8	6	2	4	0,7
7	5	6	–1	1	0,17
					$\chi^2_{\text{набл.}} = 2{,}4$

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$ то нулевая гипотеза о нормальности генеральной совокупности принимается.

Пример 6.38. Дано статистическое распределение выборки:

x_i	1,6	3,0	4,4	5,8	7,2	6,6	10,0
n_i	3	7	15	35	22	13	5

Решение.

1.Найдем методом произведений выборочные: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Воспользуемся методом произведений, для чего составляем табл. 1.

Таблица 1

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
1,6	3	–3	–9	27	12
3,0	7	–2	–14	28	7
4,4	15	–1	–15	16	0
5,8	35	0	0	0	35
7,2	22	1	22	22	88
8,6	13	2	26	52	117
10,0	5	3	15	45	80
	$n=\sum n_i = 100$		$\sum n_i \cdot u_i = 25$	$\sum n_i \cdot u_i^2 = 189$	$\sum n_i \, (u_i + 1)^2 = 339$

В качестве ложного нуля принимаем $C = 5{,}8$ — варианта с наибольшей частотой 35. Шаг выборки $h = x_2 - x_1 = 3{,}0 - 1{,}6 = 1{,}4$. Тогда условные варианты определяем по формуле

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \frac{x_i - 5{,}8}{1{,}4}.$$

Подсчитываем условные варианты u_i и заполняем все столбцы.

Последний столбец служит для контроля вычислений по тождеству:

$$\sum n_i \, (u_i + 1)^2 = \sum n_i \, u_i^2 + 2 \sum n_i \, u_i + n.$$

Контроль: $339 = 189 + 2 \cdot 25 + 100$.

Вычисления произведены верно. Найдем условные моменты.

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{25}{100} = 0{,}25; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{189}{100} = 1{,}89.$$

Вычисляем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_В = M_1^* \cdot h + C = 0{,}25 \cdot 1{,}4 + 5{,}8 = 6{,}15.$$

Находим выборочную дисперсию:

$$d_В = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [1{,}89 - (0{,}25)^2] \cdot 1{,}4^2 = 3{,}58.$$

Определяем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_В = \sqrt{d_В} = \sqrt{3{,}58} = 1{,}89.$$

2. Строим нормальную кривую.

Для облегчения вычислений все расчеты сводим в табл. 2.

Таблица 2

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}_В = x_i - 6{,}15$	$u_i = \dfrac{x_i - x_В}{\sigma_В} = \dfrac{x_i - 6{,}15}{1{,}89}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 74{,}07 \cdot \varphi(u_i)$
1,6	3	–4,55	–2,41	0,0219	2
3,0	7	–3,15	–1,67	0,0989	7
4,4	15	–1,75	–0,92	0,2613	19
5,8	35	–0,35	–0,18	0,3925	30
7,2	22	1,05	0,56	0,3410	25
8,6	13	2,45	1,30	0,1714	13
10,0	5	3,85	2,04	0,0498	4
	100				$n = \sum n_i' = 100$

Заполняем первые три столбца.

В четвертом столбце записываем условные варианты по формуле, указанной в «шапке» таблицы. В пятом столбце находим значения функции

$$\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u_i^2}{2}}.$$

Функция $\varphi(u_i)$ четная, т.е. $\varphi(u_i) = \varphi(-u_i)$.

Значения функции $\varphi(u_i)$ в зависимости от аргумента u_i (берутся положительные u_i, т.к. функция $\varphi(u_i)$ четная) находим из таблицы.

Теоретические частоты теоретической кривой находим по формуле

$$n_i' = n \cdot p_i = n \cdot h \cdot \frac{1}{\sigma_{\text{В}}} \cdot \varphi(u_i) = \frac{nh}{\sigma_{\text{В}}} \varphi(u_i) =$$

$$= \frac{100 \cdot 1{,}4}{1{,}89} \varphi(u_i) = 74{,}07 \ \varphi(u_i)$$

и заполняем последний столбец. Отметим, что в последнем столбце частоты n_i' округляются до целого числа и $\sum n_i' = \sum n_i = 100$.

В системе координат $(x_i;\ y_i = n_i')$ строим нормальную (теоретическую) кривую (рис. 81) по выравнивающим частотам n_i' (они отмечены кружками) и полигон наблюдаемых частот (они отмечены крестиками). Полигон наблюдаемых частот построен в системе координат $(x_i;\ y_i = n_i)$.

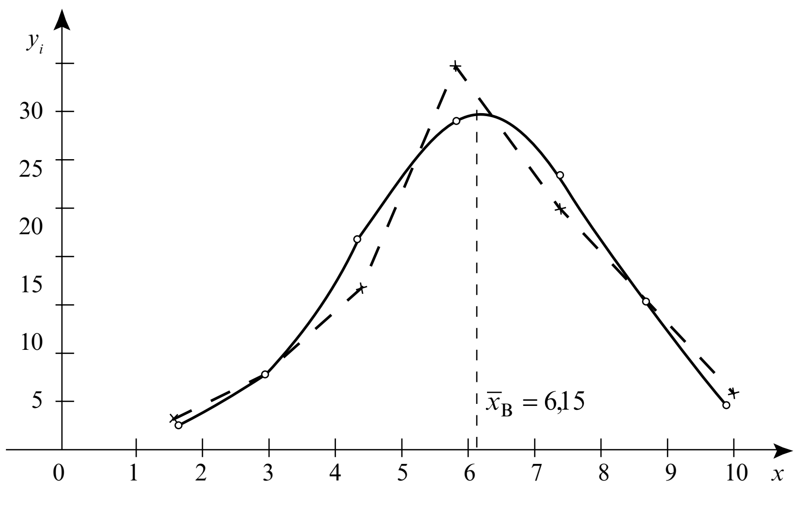


Рис. 81

3. Проверяем гипотезу о нормальности X при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вычислим $\chi^2_{\text{набл.}}$, для чего составим расчетную таблицу 3.

Таблица 3

n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\dfrac{n_i^2}{n'_i}$
1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	1	0,5	9	4,5
7	7	0	0	0	49	7
15	19	–4	16	0,84	225	11,84
35	30	5	25	0,83	1225	40,83
22	25	3	9	0,36	484	19,36
13	13	0	0	0	169	13
5	4	1	1	0,25	25	6,25
100	100			$\chi^2_{\text{набл.}} = 2{,}78$		102,78

Суммируя числа пятого столбца, получаем $\chi^2_{\text{набл.}} = 2{,}78$

Суммируя числа последнего столбца, получаем 102,78.

Контроль: $\chi^2_{\text{набл.}} = 2{,}78$

$$\sum \frac{n_i^2}{n'_i} - \sum n_i = 102{,}78 - 100 = 2{,}78.$$

Совпадение результатов подтверждает правильность вычислений.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариантов) 7. $\nu = 7 - 3 = 4$.

По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = 4$ находим $\chi^2_{\text{кр.}} = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$ то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

4. Найдем доверительный интервал для оценки неизвестного МО $M(X)$, полагая, что X имеет нормальное распределение, среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sigma_X = \sigma_B = 1{,}89$ и доверительная вероятность $\gamma = 0{,}95$.

Известен объем выборки: $n = 100$, выборочная средняя $\bar{x}_B = 6{,}15$.

Из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ получим $\Phi(t) = 0{,}475$. По таблице находим параметр $t = 1{,}96$.

Найдем точность оценки

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 1{,}89}{\sqrt{100}} = 0{,}37.$$

Доверительный интервал таков:

$$\bar{x}_B - \delta < M(X) < \bar{x}_B + \delta$$

или $6{,}15 - 0{,}37 < M(X) < 6{,}15 + 0{,}37 \Leftrightarrow 5{,}78 < M(X) < 6{,}52$.

Надежность $\gamma = 0{,}95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определят такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен.

6.7. Элементы теории корреляции

Корреляционный анализ — широко известный и эффективный метод математической статистики, позволяющий по совокупности значений показателей выявлять и описывать связи между показателями.

Если каждому значению величины X соответствует несколько значений величины $У$, но число этих значений, как и сами значения, остается не вполне определенным, то такие связи называются статистическими. Например, уровень производительности труда на предприятиях тем выше, чем больше его электровооруженность. Вместе с тем, нет никаких оснований утверждать об однозначности этой зависимости.

Если изменение одной из переменных сопровождается изменениями условного среднего значения другой переменной величины, то такая зависимость является корреляционной.

Под условным средним $\bar{y}_X$ подразумевают среднее арифметическое значений $У$, соответствующих значению $X = x$. Например, пусть при $x_1 = 2$ величина $У$ приняла значения $y_1 = 5$, $y_2 = 6$ и $y_3 = 10$. Тогда условное среднее равно

$$\bar{y}_2 = \frac{(5+6+10)}{3} = 7.$$

Корреляционной зависимостью $У$ от X называют функциональную зависимость условной средней $\bar{y}_X$ от x: $\bar{y}_X = f(x)$. Это уравнение называют уравнением регрессии $У$ на X; функцию $f(x)$ называют регрессией $У$ на X, а ее график — линией регрессии $У$ на X.

Корреляционный анализ рассматривает две основные задачи.

Первая задача теории корреляции — установить форму корреляционной связи, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная и т.д.).

Вторая задача теории корреляции — оценить тесноту (силу) корреляционной связи.

Теснота корреляционной связи (зависимости) $У$ на X оценивается по величине рассеивания значений $У$ вокруг условного среднего. Большое рассеивание свидетельствует о слабой зависимости $У$ от X, малое рассеивание указывает на наличие сильной зависимости.

6.7.1. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным данным

Пусть количественные признаки X и $У$ связаны линейной корреляционной таблицей и в результате независимых испытаний получены n пар чисел:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

Выборочное уравнение прямой линии регрессии $У$ на X выбираем в виде:

$$y = \rho_{yx} \cdot x + В.$$

Параметры ρ_{yx} и B, которые определяются методом наименьших квадратов, имеют вид:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad \mathrm{B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Величина $r_{\mathrm{B}} = \rho_{yx}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ — называется выборочным коэффициентом корреляции. Она служит для оценки тесноты линейной корреляционной зависимости.

Абсолютная величина выборочного коэффициента корреляции не превосходит единицы, т.е. $-1 \le r_{\mathrm{B}} \le 1$.

С возрастанием $|r_{\mathrm{B}}|$ линейная корреляционная зависимость становится более тесной и при $|r_{\mathrm{B}}| = 1$ переходит в функциональную.

6.7.2. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным

При большом числе испытаний одно и то же значение X может встретиться n_x раз, одно и то ж значение $У$ может встретиться n_y раз и одна и та же пара чисел $(x; y)$ может встретиться n_{xy} раз, причем обычно $\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n$ — объем выборки. Поэтому данные наблюдений группируют, т.е. подсчитывают n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Если обе линии регрессии $У$ на X и X на $У$ — прямые, то корреляция является линейной.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии $У$ на X имеет вид:

$$\overline{y}_x - \overline{y}_{\mathrm{B}} = r_{\mathrm{B}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x - \overline{x}_{\mathrm{B}}),$$

где $\overline{y}_x$ — условная средняя; $\overline{x}_{\mathrm{B}}$ и $\overline{y}_{\mathrm{B}}$ — выборочные средние признаков X и $У$; σ_x и σ_y — выборочные средние квадратические отклонения; r_{B} — выборочный коэффициент корреляции.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на $У$ имеет вид:

$$\overline{x}_y - \overline{x}_{\text{В}} = r_{\text{В}} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\ (y - \overline{y}_{\text{В}}).$$

Считаем, что данные наблюдений над признаками X и $У$ заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами.

Тогда переходим к условным вариантам:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}; \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где C_1 — варианта признака X, имеющая наибольшую частоту; C_2 — варианта признака $У$, имеющая наибольшую частоту; h_1 — шаг (разность между двумя соседними вариантами X); h_2 — шаг (разность между двумя соседними вариантами Y).

Тогда выборочный коэффициент корреляции

$$r_{\text{В}} = \frac{\sum n_{uv}\, u_i v_j - \overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}.$$

Величины $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u, σ_v могут быть найдены методом произведений, либо непосредственно по формулам

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u \cdot u}{n}; \quad \overline{v} = \frac{\sum n_v \cdot v}{n}; \quad \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}; \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}.$$

Зная эти величины, найдем параметры, входящие в уравнения регрессии, по формулам

$$\overline{x} = h_1 \cdot \overline{u} + C_1; \quad \overline{y} = h_2 \cdot \overline{v} + C_2; \quad \sigma_x = h_1\, \sigma_u; \quad \sigma_y = h_2\, \sigma_v.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ 6

12.1. Случайные события

12.1.1. В ящике находятся 6 одинаковых пар перчаток черного цвета и 4 одинаковых пары перчаток бежевого цвета. Найти вероятность того, что две наудачу извлеченные перчатки образуют пару.

Решение. Рассмотрим событие A — две извлеченные наудачу перчатки образуют пару; и гипотезы: B_1 — извлечена пара перчаток черного цвета, B_2 — извлечена пара перчаток бежевого цвета, B_3 — извлеченные перчатки пару не образуют.

Вероятность гипотезы B_1 по теореме умножения равна произведению вероятностей того, что первая перчатка черного цвета и вторая перчатка черного цвета, т.е.

$$P(B_1) = P_{1\,\text{чер.}} \cdot P_{2\,\text{чер.}} = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}.$$

Аналогично, вероятность гипотезы B_2 равна:

$$P(B_2) = P_{1\,\text{беж.}} \cdot P_{2\,\text{беж.}} = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}.$$

Так как гипотезы B_1, B_2 и B_3 составляют полную группу событий, то вероятность гипотезы B_3 равна:

$$P(B_3) = 1 - \left(P(B_1) + P(B_2)\right) = 1 - \left(\frac{33}{95} + \frac{14}{95}\right) = \frac{48}{95}.$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A),$$

где $P_{B_2}(A)$ есть вероятность того, что пару образуют две черные перчатки и $P_{B_1}(A) = 1$; $P_{B_2}(A)$ — вероятность того, что пару образуют две бежевые перчатки и $P_{B_2}(A) = 1$; и, наконец, $P_{B_3}(A)$ — вероятность того, что пару образуют перчатки разного цвета и $P_{B_3}(A) = 0$.

Подставляем в формулу полной вероятности:

$$P(A)=\frac{33}{95}\cdot 1+\frac{14}{95}\cdot 1+\frac{48}{95}\cdot 0=\frac{47}{95}.$$

Таким образом, вероятность того, что две наудачу извлеченные перчатки образуют пару равна $\frac{47}{95}$.

12.1.2. В урне находятся 3 шара белого цвета и 5 шаров черного цвета. Наудачу по одному извлекают 3 шара и после каждого извлечения возвращают обратно в урну. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется:

а) ровно два белых шара, б) не мене двух белых шаров.

Решение. Имеем схему с возвращением, т.е. каждый раз состав шаров не изменяется:

а) при извлечении трех шаров два из них должны быть белыми, а один черный. При этом черный может оказаться или первым, или вторым, или третьим. Применяя совместно теоремы сложения и умножения вероятностей, имеем:

$$P=P_{1б}\cdot P_{2б}\cdot P_{3ч}+P_{1б}\cdot P_{2ч}\cdot P_{3б}+P_{1ч}\cdot P_{2б}\cdot P_{3б}=$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{135}{512};$$

б) вынуть не менее двух белых шаров означает, что белых шаров должно быть или два, или три:

$$P\,(\text{не менее})=P\,(2\,\text{белых})+P\,(3\,\text{белых})=\frac{135}{512}+P_{1б}\cdot P_{2б}\cdot P_{3б}=$$
$$=\frac{135}{512}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{162}{512}.$$

12.1.3. В урне находятся 6 белых и 5 черных шаров. Три шара наудачу последовательно извлекаются без возвращения их в урну. Найти вероятность, что третий по счету шар окажется белым.

Решение. Если третий по счету шар должен быть белым, то первые два шара могут быть белыми, или белым и черным, или черным и белым, или черными, т.е. имеются четыре группы несовместных событий. Применяя к ним теорему умножения вероятностей, получим:

$$P = P_{1б} \cdot P_{2б} \cdot P_{3б} + (P_{1б} \cdot P_{2ч} \cdot P_{3б} + P_{1ч} \cdot P_{2б} \cdot P_{3б}) + P_{1ч} \cdot P_{2ч} \cdot P_{3б} =$$
$$= \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{540}{990} = \frac{6}{11}.$$

12.2. Случайные величины

12.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	–2	–1	0	m	$m+n$
P_i	0,2	0,1	0,2	P_4	P_5

Найти вероятности P_4, P_5 и дисперсию $D(x)$, если математическое ожидание $M(x) = -0{,}5 + 0{,}5 \cdot m + 0{,}1 \cdot n$.

Решение. Из условия $\sum P_i = 1$ имеем $P_4 + P_5 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$ или $P_4 + P_5 = 0{,}5$.

Из определения математического ожидания $M(x) = \sum x_i \cdot p_i$ получим:

$$-0{,}4 - 0{,}1 + m \cdot P_4 + (m+n)\,P_5 = -0{,}5 + 0{,}5m + 0{,}1n,$$

или

$$m \cdot P_4 + (m+n)\,P_5 = 0{,}5m + 0{,}1n,$$

или

$$m\,(P_4 + P_5) + nP_5 = 0{,}5m + 0{,}1n.$$

Из этих двух уравнений с двумя неизвестными относительно P_4 и P_5 имеем:

$$P_4 = 0{,}4,\ P_5 = 0{,}1.$$

Дисперсию найдем из формулы

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2.$$

Находим математическое ожидание квадрата случайной величины

$$M\,(x^2) = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + m^2 \cdot 0{,}4 + (m+n)^2 \cdot 0{,}1 = \\ = 0{,}9 + 0{,}4 \cdot \mathrm{m}^2 + 0{,}1 \cdot (m+n)^2.$$

Тогда

$$D\,(x) = (0{,}9 + 0{,}4 \cdot m^2 + 0{,}1 \cdot (m+n)^2) - (-0{,}5 + 0{,}5m + 0{,}1n)^2 = \\ = 0{,}65 + 0{,}25\mathrm{m}^2 + 0{,}1 \cdot m \cdot n + 0{,}09 \cdot n^2 + 0{,}5 \cdot m + 0{,}1 \cdot n$$

Сюда подставляйте свои m и n и получайте готовый ответ. Однако, с самого начала этой задачи берите свои значения параметров m и n и решайте.

12.2.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x \le 4, \\ \dfrac{a\,(x-4)}{2} & \text{при} \quad 4 < x < 6, \\ 0 & \text{при} \quad 6 \le x < \infty. \end{cases}$$

Найти: а) параметр a.

Из условия, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$ имеем

$$\frac{a}{2}\int\limits_4^6 (x-4)\,dx = 1, \text{ или } \frac{a}{2}\,\frac{(x-4)^2}{2}\Big|_4^6 = 1, \text{ или } \frac{a}{4}\Big((6-4)^2 - (4-4)^2\Big) = 1,$$

$$\text{или } \frac{a}{4} \cdot 4 = 1;$$

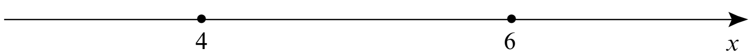
откуда $a = 1$.

б) функцию распределения $F\,(x)$.

Из свойства функции плотности $f\,(x)$ имеем:

$$F\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Рассматриваем три интервала.



При $x \le 4$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$$

При 4 < x < 6.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \frac{1}{2}\int_{4}^{x} (x-4)\,dx = \frac{1}{4}(x-4)^2 \Big|_{4}^{x} =$$

$$= \frac{1}{4}\left((x-4)^2 - (4-4)^2\right) = \frac{(x-4)^2}{4}.$$

При x ≥ 6.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \frac{1}{2}\int_{4}^{6} (x-4)\,dx + \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = \frac{1}{4}(x-4)^2 \Big|_{4}^{6} =$$

$$= \frac{1}{4}\left((6-4)^2 + (4-4)^2\right) = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 4, \\ \dfrac{(x-4)^2}{4} & \text{при} \quad 4 < x < 6, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 6; \end{cases}$$

в) вероятность попадания случайной величины X в интервал (5, 7).

$$P(5 < X < 7) = F(7) - F(5) = F(6) - F(5) =$$

$$= \frac{(6-4)^2}{4} - \frac{(5-4)^2}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

или другим способом

$$P(5 < X < 7) = \int_{5}^{7} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{5}^{6} (x-4)\,dx + \int_{6}^{7} 0 \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x-4)^2 \Big|_{5}^{6} = \frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}.$$

г) математическое ожидание $M(x)$ и $D(x)$.

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_4^6 x(x-4)\,dx=\frac{1}{2}\int_4^6 (x^2-4x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_4^6=\frac{1}{2}\left(\frac{6^3}{3}-2\cdot 6^2-\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)\right)=\frac{16}{3}.$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))^2\cdot f(x)=\frac{1}{2}\int_4^6\left(x-\frac{16}{3}\right)^2(x-4)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_4^6\left(x^3-\frac{44}{3}x^2+\frac{640}{9}x-\frac{1024}{9}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{44}{9}x^3+\frac{320}{9}x^2-\frac{1024}{9}x\right)\Bigg|_4^6=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{6^4}{4}-\frac{44}{9}\cdot 6^3+\frac{320}{9}6^2-\frac{1024}{9}\cdot 6\right)-\left(\frac{4^4}{4}-\frac{44}{9}\cdot 4^3+\frac{320}{9}4^2-\frac{1024}{9}\cdot 4\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1212}{9}+\frac{1216}{9}\right)=\frac{2}{9}.$$

д) построим функции $F(x)$ (рис. 82) и $f(x)$ (рис. 83).

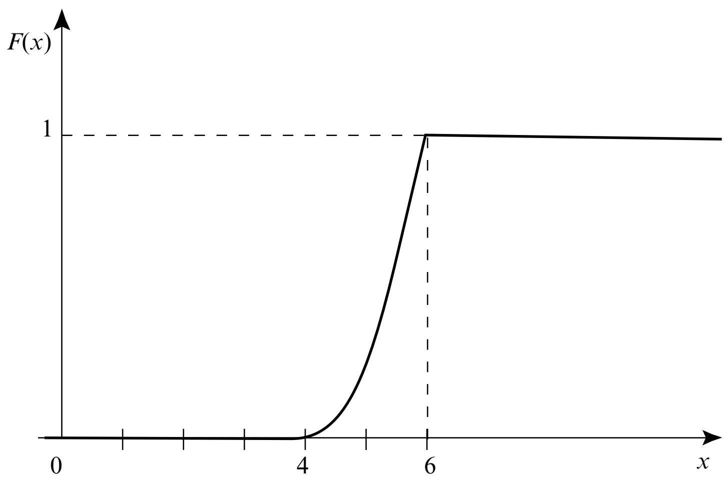


Рис. 82

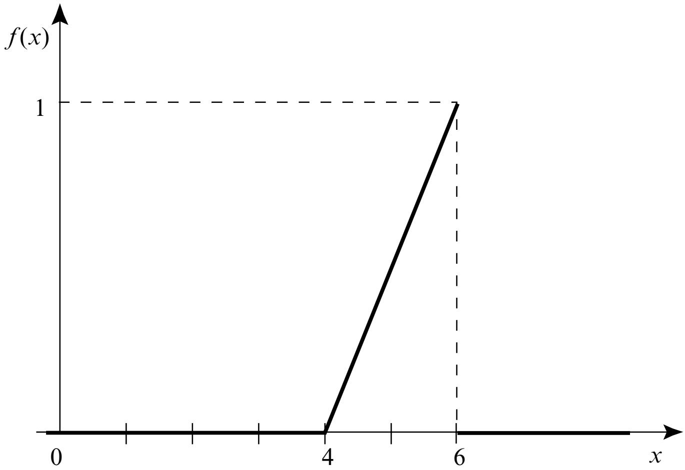


Рис. 83

12.2.3. Случайные величины X_1, X_2, X_3 имеют геометрическое, биномиальное и пуассоновское распределения соответственно. Найти вероятности $P(4 \le X_i \le 6)$, если математические ожидания $M(X_i) = 4$, а дисперсия $D(X_2) = 2$:

а) Для геометрического распределения

$$M(X) = \frac{1}{P}, \text{ или } P = \frac{1}{M(X_1)} = \frac{1}{4} \text{ и } q = 1 - P = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$P(4 \le X_1 \le 6) = P(4) + P(5) + P(6) = p \cdot q^{4-1} + pq^{5-1} + p \cdot q^{6-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5\right) = \frac{1}{4}\,\frac{999}{1024} = 0{,}244.$$

Так как для геометрического закона распределения $P(n) = P \cdot q^{n-1}$.

б) Для биномиального распределения $M(X) = np$ и $D(X) = npq$

$$\begin{cases} 4 = np, \\ 2 = npq. \end{cases}$$

Делим одно уравнение на другое, получаем

$$q = \frac{1}{2}, \quad p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad n = 8.$$

Вероятность

$$P\,(4 \le X_2 \le 6) = P_{4,8} + P_{5,8} + P_{6,8}.$$

По формуле Бернулли

$$P_{mn} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m \cdot q^{n-m}$$

имеем

$$P_{4,8} = \frac{8!}{4!(8-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} = \frac{70}{256}.$$

$$P_{5,8} = \frac{8!}{5!(8-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \frac{56}{256}.$$

$$P_{6,8} = \frac{8!}{6!(8-6)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{8-6} = \frac{28}{256}.$$

Окончательно

$$P\,(4 \le X_2 \le 6) = \frac{70}{256} + \frac{56}{256} + \frac{28}{256} = \frac{154}{256} = 0{,}602.$$

в) Для пуассоновского распределения

$$M\,(X) = D\,(X) = \lambda; \quad M\,(X_3) = \lambda \quad \text{и} \quad \lambda = 4.$$

Вероятность

$$P\,(4 \le X_3 \le 6) = P_{4,8} + P_{5,8} + P_{6,8}.$$

По формуле Пуассона

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Тогда

$$P\,(4 \le X_1 \le 6) = \frac{4^4}{4!}e^{-4} + \frac{4^5}{5!}e^{-4} + \frac{4^6}{6!}e^{-4} = 4^4 \cdot e^{-4}\left(\frac{1}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{4^2}{6!}\right) =$$

$$= 4^4 \cdot e^{-4} \cdot \frac{35}{360} = 0{,}456.$$

12.2.4. Случайные величины X_4, X_5, X_6 имеют равномерное, показательное и нормальное распределения соответственно. Найти вероятность $P\ (2 < X_i < 6)$, если у этих случайных величин математические ожидания и средне квадратические отклонения равны 4:

а) Закон равномерного распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a<x\le b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

Найдем параметры a и b из условия

$$M(X)=\frac{b+a}{2}=4; \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=4^2.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} b+a=8 \\ b-a=\pm 8\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решая эту систему найдем, что

$$a_1=4+4\sqrt{3}, \quad b_1=4-4\sqrt{3},$$
$$a_2=4-4\sqrt{3}, \quad b_2=4+4\sqrt{3}.$$

Так как предполагается, что $a < b$, то

$$a=4-4\sqrt{3}, \quad b=4+4\sqrt{3}.$$

Тогда

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 4-4\sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{24} & \text{при} \quad 4-4\sqrt{3}<x\le 4+4\sqrt{3} \\ 0 & \text{при} \quad x>4+4\sqrt{3} \end{cases}$$

Определяем искомую вероятность

$$P(2<X_4<6)=\int_2^6 \frac{\sqrt{3}}{24}dx=\frac{\sqrt{3}}{24}\cdot x\Big|_2^6=\frac{\sqrt{3}}{24}(6-2)=\frac{\sqrt{3}}{6}=0{,}289.$$

б) Показательное распределение имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

Для показательного распределения $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ и $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$. Тогда $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

Определяем вероятность

$$P(2<X_5<6)=\frac{1}{4}\int_2^6 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-\int_2^6 e^{-\frac{1}{4}x}d\left(-\frac{1}{4}x\right)=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_2^6=$$

$$=-\left(e^{-\frac{3}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-0,5}-e^{-1,5}=0,606-0,223=0,383.$$

в) Вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины определяется как

$$P(\alpha<X_6<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Здесь a = M (X) = 4, σ = 4. Тогда

$$P(2<X_6<6)=\Phi\left(\frac{6-4}{4}\right)-\Phi\left(\frac{2-4}{4}\right)=\Phi(0,5)-\Phi(-0,5)=2\Phi(0,5)=$$
$$=2\cdot 0,1915=0,383,$$

где функция Лапласа $\Phi(t)$ определяется по таблицам.

13. Математическая статистика

13.1. Численная обработка данных одномерной выборки

Выборка X объемом 100 измерений задана таблицей:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0,2	1,4	2,6	3,8	5	6,2	7,4
m_{x_j}	5	13	25	25	19	10	3

где x_i — результаты измерений, m_{x_i} — частоты с которыми встречаются значения x_i.

13.1.1 Построить полигон относительных частот $W_i = m_{x_i} / N$.

Решение. Вычисляя относительные частоты $W_i = m_{x_i} / N = m_i / 100$ получаем:

x_i	0,2	1,4	2,6	3,8	5	6,2	7,4
W_i	0,05	0,13	0,25	0,25	0,19	0,1	0,03

Построим полигон относительных частот (рис. 84).

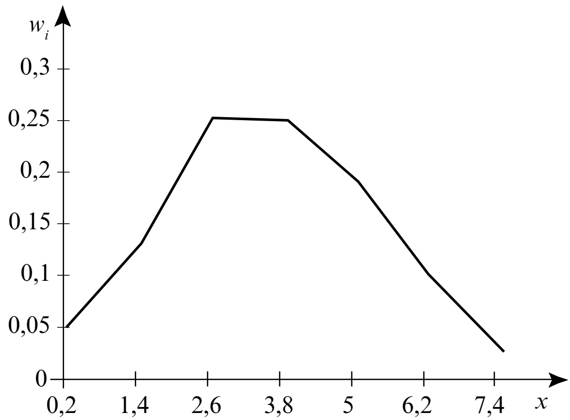


Рис. 84

13.1.2. Вычислить среднее выборочное $\overline{X}$, выборочную дисперсию D_x и среднее квадратическое отклонение σ_x.

Решение. Для вычисления $\overline{X}$, D_x и σ_x воспользуемся методом произведений. Введем условные варианты

$$u_1 = \frac{(x_i - c_x)}{h_x},$$

где c_x — значение x_i, которому соответствует наибольшая частота, $c_x = 3{,}8$, h_x – шаг выборки, $h_x = 1{,}2$.

Тогда, вычисляя u_i, получим условный ряд:

u_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
m_i	5	13	25	25	19	10	3

Для этого ряда составим расчетную таблицу

i	u_i	m_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i (u_i + 1)^2$
1	-3	5	-15	45	20
2	-2	13	-26	52	13
3	-1	25	-25	25	0
4	0	25	0	0	25
5	1	19	19	19	76
6	2	10	20	40	90
7	3	3	9	27	48
$\sum$		100	–18	208	272

Проверка:

$$\sum m_i (u_i + 1)^2 = \sum m_i u_i^2 + 2\sum m_i u_i + \sum m_i, \quad 272 = 272.$$

Найдем теперь условные характеристики:

$$\overline{U} = \frac{\sum m_i u_i}{N} = -0{,}18; \; D_u = \frac{\sum m_i u_i^2}{N} - (\overline{U})^2 = 2{,}048; \sigma_u = D_u^{1/2} = 1{,}43.$$

Возвращаясь к исходному вариационному ряду, с помощью равенств $x_i = h_x u_i + c_x$ получаем:

$$\overline{X} = h_x \overline{U} + c_x = 3{,}58; \quad D_x = h_x^2 D_u = 2{,}949; \quad \sigma_x = h_x \sigma_u = 1{,}72.$$

13.1.3. По критерию χ^2 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, используя критерий χ^2 (Пирсона) при $\alpha = 0{,}05$.

В основе критерия лежит сравнение частот m_i и теоретических частот m_i^T, вычисленных в предположении нормального распределения генеральной совокупности. Критерий Пирсона не подтверждает однозначно правильность или неправильность гипотезы, а только устанавливает ее согласие или несогласие с данными выборки при данном уровне значимости. В качестве критерия выбирается величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T}.$$

Ее значение сравнивают с критическим значением $\chi^2_{\text{кр}}$, определяемым по соответствующей таблице значений при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $k = p - 1 - r$, где p – число интервалов, r – число параметров нормально закона распределения. В данном случае $p = 7$; $r = 2$; $k = 4$.

По таблице распределения χ^2 с $k = 7 - 2 - 1 = 4$ степенями свободы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}49$.

Если в результате вычислений выполняется неравенство $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза принимается при данном уровне значимости. Если же $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотезу отвергают. Применим критерий Пирсона к данной выборке. Для этого составим расчетную таблицу, находя теоретические частоты m_i^T для нормального распределения по формуле

$$m_i^T = \frac{Nh_x}{\sigma_x} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \overline{X}}{\sigma_x}\right)$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$.

x_i	$z_i = \frac{x_i - \overline{X}}{\sigma_x}$	$\varphi(z_i)$	m_i^T	m_i	$m_i - m_i^T$	$\frac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T}$
0,2	–1,97	0,06	4,42	5	0,58	0,076
1,4	–1,27	0,20	13,73	13	–0,73	0,038
2,6	–0,57	0,37	26,15	25	–1,15	0,051
3,8	0,13	0,44	30,58	25	–5,58	1,017
5	0,82	0,31	21,94	19	–2,94	0,393
6,2	1,52	0,14	9,66	10	0,34	0,012
7,4	2,22	0,04	2,61	3	0,39	0,059
Σ						1,65

Складывая числа последнего столбца таблицы, получаем $\chi^2 = 1{,}65$.

Так как $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

Таким образом, с уровнем значимости $a = 0{,}05$ можно считать, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами $a = \overline{X} = 3{,}58$; $\sigma_x = 1{,}72$.

Ответ. $\overline{X} = 3{,}584$; $D_x = 2{,}949$; $\sigma_x = 1{,}72$; гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

13.2. Построение уравнения прямой регрессии

Двумерная выборка результатов совместных измерений признаков x и y объемом $N = 100$ измерений задана корреляционной таблицей:

i	j	1	2	3	4	5	m_{x_i}
	x_i \ y_j	0,5	1,3	2,1	2,9	3,7	
1	0,2	2	3				5
2	1,4	3	8	2			13
3	2,6		9	16			25
4	3,8			15	10		25
5	5			9	10		19
6	6,2			3	6	1	10
7	7,4				1	2	3
m_{y_j}		5	20	45	27	3	$N = 100$

13.2.1. Найти $\overline{Y}$ и σ_y для выборки

y_j	0,5	1,3	2,1	2,9	3,7
m_{y_j}	5	20	45	27	3

Решение. Для вычисления $\overline{Y}$, D_y и σ_y воспользуемся методом произведений. Введем условные варианты $v_j = (y_j - c_y) / h_y$, где c_y — значение y_j, которому соответствует наибольшая частота, $c_y = 2{,}1$, h_y – шаг выборки, $h_y = 0{,}8$.

Тогда, вычисляя v_j, получим условный ряд:

v_j	–2	–1	0	1	2
m_j	5	20	45	27	3

Для этого ряда составим расчетную таблицу

j	v_j	m_j	$m_j v_j$	$m_j v_j^2$	$m_j(v_j + 1)^2$
1	–2	5	–10	20	5
2	–1	20	–20	20	0
3	0	45	0	0	45
4	1	27	27	27	108
5	2	3	6	12	27
$\sum$		100	3	79	185

Проверка:

$$m_j(v_j+1)^2 = \sum m_j v_j^2 + 2\sum m_j v_j + \sum m_j, \ 185 = 185.$$

Условные характеристики:

$$\overline{V} = \frac{\sum m_j v_j}{N} = 0{,}03; \quad D_v = \frac{\sum m_j u_j^2}{N} - (\overline{V})^2 = 0{,}789;$$

$$\sigma_v = D_v^{1/2} = 0{,}89.$$

Возвращаясь к исходному вариационному ряду, с помощью равенств $y_j = h_y v_j + c_y$ получаем

$$\overline{Y} = h_y \overline{V} + c_y = 2{,}12; \quad D_y = h_y^2 D_v = 0{,}505;$$

$$\sigma_y = h_y \sigma_v = 0{,}71.$$

13.2.2. Построить уравнение прямой регрессии Y на X в виде $\bar{y}_x = ax + b$. Уравнение прямой регресии Y на X имеет вид:

$$\bar{y}_x - \overline{Y} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{X}).$$

Значения x_i и частоты их появления m_{x_i} совпадают с данными для задачи 13.1.2.

Следовательно,

$$\overline{X} = 3{,}584;\ \sigma_x = 1{,}72.$$

Значения $\overline{Y}$ и σ_y найдены в задаче 13.2.1: $\overline{Y}$ =2,12; σ_y =0,71.

Коэффициент корреляции определяется по формуле

$$r = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\overline{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{5} m_{ij} x_i y_i$.

Для нахождения $\overline{XY}$ воспользуемся корреляционной таблицей

i	j	1	2	3	4	5	m_{x_i}	$\overline{XY} = \sum_{j=1}^{5} m_{ij} x_i y_j$
	x_i \ y_j	0,5	1,3	2,1	2,9	3,7		
1	0,2	2	3				5	0,98
2	1,4	3	8	2			13	22,54
3	2,6		9	16			25	117,78
4	3,8		15	10			25	229,9
5	5			9	10		19	239,5
6	6,2			3	6	1	10	169,88
7	7,4				1	2	3	76,22
m_{y_j}		5	20	45	27	3	N = 100	$\sum$ = 856,8

Как следует из таблицы $\overline{XY}$ = 8,568.

Таким образом,

$$r = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}78.$$

Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y}_x = \overline{Y} - \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\overline{X} + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}x.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$\overline{y}_x = 0{,}96 + 0{,}324x.$$

13.2.3. На графике изобразить корреляционное поле и построить прямую $\overline{y}_x = ax + b$.

Построим график прямой регрессии Y на X (рис. 85).

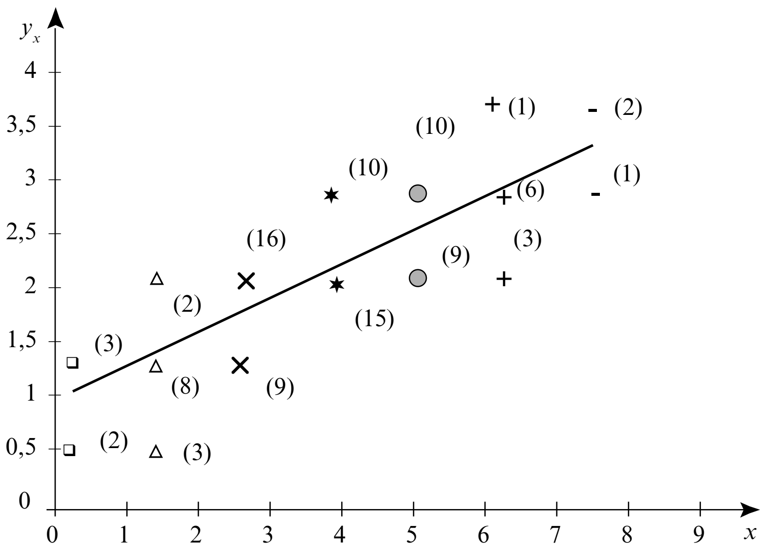


Рис. 85

На графике рядом с точками указаны частоты их появления.

РАЗДЕЛ 7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Особенностью развития современного общества является сложный характер рыночной экономики, характеризуемый изменением и быстрой сменяемостью условий экономической деятельности, предъявлением высоких требований к методам планирования и хозяйственной деятельности. В этих условиях использование серьезных методов анализа в экономических исследованиях приобретает первостепенное значение. Математическое моделирование экономических ситуаций на базе современной вычислительной техники позволяет автоматизировать сбор и обработку первичной информации, выделить основные параметры, влияющие на деятельность фирмы, рассчитать различные варианты деятельности (проектирования) фирмы, определить наиболее целесообразные мероприятия, обеспечивающие необходимую эффективность производства или предпринимательства, и на основе этих данных принять решение о выборе оптимальной стратегии по управлению деятельностью фирмы (формы бизнеса).

Большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано понятием сложная система.

Сложность системы определяется количеством входящих в нее элементов, связями между этими элементами, а также взаимоотношениями между системой и средой. Экономика страны обладает всеми признаками очень сложных систем. Она объединяет огромное число элементов, отличается многообразием внутренних связей и связей с другими системами (природная среда, экономика других стран и т.д.).

Сложность экономики иногда рассматривается как обоснование невозможности ее моделирования, изучения средствами математики. Но такая точка зрения в принципе неверна. Моделировать можно объект любой природы и любой сложности. И как раз сложные объекты представляют наибольший интерес для моделирования, именно здесь моделирование может дать результаты, которые нельзя получить другими способами исследования.

Основополагающим для практического применения математического моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей конкретной и качественной информацией. Точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных моделей.

Исходная информация имеет существенно различный характер и происхождение и может быть разделена на две категории: о прошлом развитии и современном состоянии объектов (экономические наблюдения и их обработка) и о будущем развитии объектов, включающую данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы).

Методы экономических наблюдений и использование результатов этих наблюдений разрабатываются экономической статистикой. Так как в экономике многие процессы являются массовыми, то моделирование должно опираться на массовые наблюдения. Экономические процессы являются динамическими вследствие изменчивости их параметров и структурных отношений. Поэтому такие экономические процессы следует постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных.

Познание количественных отношений экономических процессов и явлений опирается на экономические измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования.

Экономические процессы, сохраняя характер массовых процессов, обязательно включают случайные (стохастические) компоненты. Непредвидимые случайности могут быть вызваны природными явлениями, изменениями в международной обстановке, научно-техническими открытиями, различными субъективными факторами. Таким образом, экономические закономерности имеют стохастический характер.

Для методологии планирования важное значение имеет понятие неопределенности экономического развития. В исследованиях по экономическому прогнозированию и планированию различают два типа неопределенности: «истинную», обусловленную свойствами экономических процессов, и «информационную», связанную с неполнотой и неточностью имеющейся информации об этих процессах.

Сложность экономических процессов и явлений и другие, отмеченные выше особенности экономических систем, затрудняют не только построение математических моделей, но и проверку их адекватности, истинности получаемых результатов.

В экономике и других общественных науках тезис «практика — критерий истины» в большей степени применим к простым дескриптивным моделям, используемым для пассивного описания и объяснения действительности.

Следует отметить, что создание конструктивной комплексной методики адекватности моделей, учитывающей как объективные особенности моделируемых объектов, так и особенности их познания, по-прежнему является одной из наиболее актуальных задач экономико-математических исследований.

7.1. Линейное программирование

Теорию и решение задач смотрите в учебнике [17] гл. 2 и гл. 4.

Линейное программирование (ЛП) изучает важную для практики задачу отыскания экстремума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений.

Сущность этих задач заключается в том, чтобы из множества возможных вариантов исследуемого экономического процесса выбрать по какому-либо признаку наилучший, или, как его называют, оптимальный вариант.

В этом методе обязателен специальный показатель выгодности плана, который называют показателем или критерием оптимальности плана. Часто это прибыль, доход, валовый продукт, производительность, эффективность. В таких случаях выгодно, чтобы показатель оптимальности был для выбранного варианта плана максимальным. Если показателем оптимальности плана служат издержки, себестоимость, капиталовложения или трудоемкость, то необходимо планировать так, чтобы показатель оптимальности для выбранного плана был минимальным.

Таким образом, ясно, что цель, которую мы ставим перед собой заключается в максимизации или минимизации некоторого количества средств (денег, сырья, оборудования, продуктов питания и т. д.), которое математически выражается в виде линейной формы некоторого числа переменных.

Множество возможных вариантов, из которых выбирается оптимальный план, всегда ограничено (ресурсами сырья, наличием рабочей силы, количеством оборудования и т.п.). Поэтому каждый из рассматриваемых вариантов должен быть допустимым планом, удовлетворяющим имеющимся ограничениям. Показатель оптимальности плана является некоторой функцией $Z = f(x)$ плана X. Поэтому задача отыскания оптимального плана сводится к математической задаче нахождения экстремума этой функции.

Решение экстремальных экономических задач можно разбить на три этапа: 1) построение экономико-математической модели; 2) нахождение оптимального решения одним из математических методов; 3) практическое внедрение в народное хозяйство.

Построение экономико-математической модели состоит в создании упрощенной экономической модели, в которой в схематической форме отражена сущность изучаемого процесса. При этом особое внимание должно быть уделено отражению в модели всех существенных особенностей задачи и учету всех ограничивающих условий, которые могут повлиять на результат. Затем определяют цель решения, выбирают критерий оптимальности и дают математическую формулировку задачи.

7.1.1. Задача оптимального производства продукции

Для изготовления двух видов изделий I и II используются три вида сырья.

На производство единицы изделия I требуется затратить сырья первого вида 13 кг, сырья второго вида — 32 кг, сырья третьего вида — 58 кг.

На производство единицы изделия II требуется затратить сырья первого вида 24 кг, сырья второго вида — 32 кг и сырья третьего вида — 29 кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 312 кг, сырьем второго вида — 480 кг, сырьем третьего вида — 696 кг.

Прибыль от реализации единицы готового изделия I составляет 4 усл. ед., а изделия II — 3 усл. ед.

Требуется составить план производства изделий I и II, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации, если заранее планируется изготовление не менее 10 единиц изделий I и II.

Решение. Рассмотрим математическую модель задачи. Если за x_1 взять количество изделий I, планируемых к выпуску, а за x_2 — количество изделий II, то получим задачу линейного программирования.

При ограничениях

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 \le 312, \\ 32x_1 + 32x_2 \le 480, \\ 58x_1 + 29x_2 \le 696, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

найти максимум линейной функции

$$Z = 4x_1 + 3x_2. \tag{7.2}$$

Геометрическое решение задачи

Поскольку задача двухмерная, то ее можно решить графически.

Система ограничений (7.1) дает многоугольник решений. Для его построения проводим прямые, являющиеся границами многоугольника и с помощью пробной точки, например (0; 0), определим полуплоскости, задаваемые этими прямыми (рис. 86):

$$l_1: 13x_1 + 24x_2 = 312,$$
$$l_2: 32x_1 + 32x_2 = 480,$$
$$l_3: 58x_1 + 29x_2 = 696,$$
$$l_4: x_1 + x_2 = 10.$$

В пересечении соответствующих полуплоскостей получим шестиугольник $ABCDEF$.

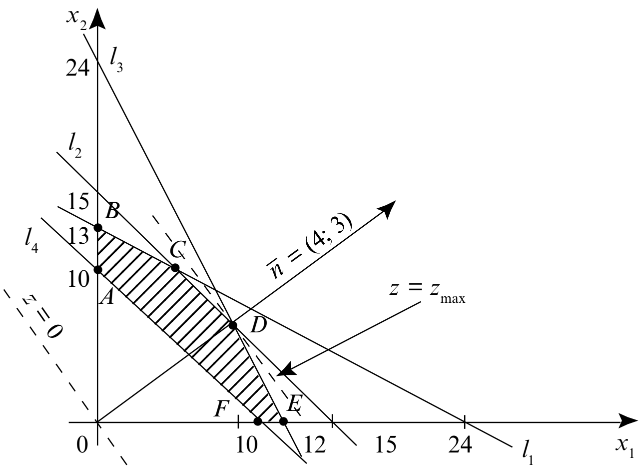


Рис. 86

Для нахождения max z построим из начала координат вектор $\bar{n} = (4;\ 3)$ и перпендикулярную ему линию уровня $z = 0$, т.е. прямую $4x_1 + 3x_2 = 0$.

Далее передвигаем линию уровня $z = \text{const}$ в направлении возрастания z, т.е. параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{n}$. В последней пересекаемой вершине D получаем наибольшее значение z. Вершина D — это точка пересечения прямых l_2 и l_3.

Находим координаты точки D из системы:

$$\begin{cases} 32x_1 + 32x_2 = 480, \\ 58x_1 + 29x_2 = 696, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 = 24. \end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, т.е. D (9; 6) и при этом $z = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 6 = 54$ (усл. ед.).

Для решения задачи симплекс — методом приведем систему ограничений (7.1) к форме равенств с помощью неотрицательных дополнительных переменных y_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{cases} 13x_1 + 24x_2 + y_1 = 312, \\ x_1 + x_2 + y_2 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + y_3 = 24, \\ -x_1 - x_2 + y_4 = -10, \\ -4x_1 - 3x_2 + Z = 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

при этом $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2$); $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Записываем систему с помощью укороченных таблиц (табл. 7.1).

Таблица 7.1

	x_1	x_2	1
y_1	13	24	= 312
y_2	1	1	= 15
y_3	2	1	= 24
y_4	$\boxed{-1}$	–1	= –10
Z	–4	–3	= 0

Так как в I — столбце есть отрицательный элемент, то его нужно сделать положительным. Выбираем y_4 — строку с отрицательным свободным членом «–10».

В этой же строке есть отрицательные элементы, выбираем какой-нибудь из них, например, «–1» в x_1 — столбце. И x_1 — столбец принимаем в качестве разрешающего столбца.

Делим свободные члены на соответствующие элементы разрешающего столбца, получаем {24, 15, 12, 10} и наименьшее положительное отношение будет соответствовать разрешающей строке, следовательно, y_4 — строка является разрешающей, а элемент $\boxed{-1}$ разрешающим элементом. Совершаем шаг модифицированного жорданова исключения (ШМЖИ) с разрешающим элементом $\boxed{-1}$ по правилу:

1) на месте разрешающего элемента стоит величина ему обратная;

2) элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

3) элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и знак меняется;

4) остальные элементы новой таблицы находятся по формуле прямоугольника [17, стр. 52]:

$$\begin{matrix}\text{новые}\\ \text{элементы}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{старые}\\ \text{элементы}\end{matrix} - \frac{\begin{matrix}\text{соответ. элем.}\\ \text{разр. строки}\end{matrix} \cdot \begin{matrix}\text{соответ. элем.}\\ \text{разр. столбца}\end{matrix}}{\text{разрешающий элемент}}.$$

Получаем табл. 7.2, при этом переменные x_1 и y_4 меняются местами. Из таблицы видно, что свободные коэффициенты в I — столбце не отрицательны, следовательно, получено опорное решение: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $y_1 = 182$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 0$, $Z = 40$. Геометрически это означает, что мы находимся в вершине F (10;0) многоугольника решений $ABCDEF$.

Таблица 7.2

	y_4	x_2	1
y_1	13	11	= 182
y_2	1	0	= 5
y_3	$\boxed{2}$	–1	= 4
x_1	–1	1	= 10
Z	–4	1	= 40

Это решение не является оптимальным, так как в Z — строке имеется отрицательный коэффициент, улучшаем план.

Выбираем разрешающий элемент по правилу: выбираем столбец с наименьшим отрицательным элементом в z-строке — разрешающий столбец, делим свободные члены в I-столбце на соответствующие коэффициенты и наименьшее положительное отношение соответствует разрешающей строке. На пересечении стоит разрешающий элемент $\boxed{2}$. Совершая ШМЖИ с разрешающим элементом $\boxed{2}$ по выше приведенному правилу, получаем табл. 7.3.

Таблица 7.3

	y_3	x_2	1
y_1	$-\frac{13}{2}$	$\frac{35}{2}$	= 156
y_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	= 3
y_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	= 2
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	= 12
Z	2	–1	= 48

Решение, получаемое из табл. 7.3, также не является оптимальным, так как в Z-строке имеется отрицательный коэффициент. Определяя из табл. 7.3 разрешающий элемент $\boxed{\frac{1}{2}}$ и

Таблица 7.4

	y_3	y_2	1
y_1	11	–35	= 51
x_2	–1	2	= 6
y_4	0	1	= 5
x_1	$\boxed{1}$	–1	= 9
Z	1	2	= 54

совершая ШМЖИ, приходим к табл. 7.4, в которой все коэффициенты в Z-строке неотрицательны, а, следовательно, max Z уже достигнут и ему соответствует решение $x_1 = 9$, $x_2 = 6$, при этом $Z_{\max} = 54$ (усл. ед.).

Ответ: максимальная прибыль $Z = 54$ (усл. ед.) достигается при изготовлении 9 единиц изделий I и 6 единиц изделий II.

7.1.2. Транспортная задача

Это задача о наиболее экономном плане перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов производства (станций отправления) в пункты потребления (станции назначения).

Транспортная задача является важнейшей частной моделью линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта. Особо важное значение она имеет в деле рационализации поставок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

7.1.2.1. Постановка задачи и ее математическая модель

Некоторый однородный продукт производится в m пунктах производства A_1, A_2, …, A_m. Задан объем производства a_i пункта A_i $(i = \overline{1,\ m})$. Произведенный продукт должен быть перевезен в n пунктов потребления B_1, B_2, …, B_n. Известен спрос b_j пункта B_j $(j = \overline{1, n})$. Заданы также транспортные издержки C_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j. Требуется составить план перевозок, обеспечивающий при минимальных транспортных расходах (издержках) удовлетворения спроса всех пунктов потребления за счет продукта, произведенного во всех пунктах производства.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда условие задачи можно записать в виде табл. 7.5, которую в дальнейшем будем называть матрицей планирования.

Таблица 7.5

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	Σa_i Σb_j

Поэтому математическая формулировка транспортной задачи сводится к минимизации линейной формы

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \tag{7.4}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \tag{7.5}$$

(ограничения по запасам),

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}, \tag{7.6}$$

(ограничения по потребностям),

$$x_{ij} \geq 0. \tag{7.7}$$

Различают задачи с закрытой моделью, когда $\sum a_i = \sum b_j$ и открытой моделью, когда $\sum a_i \neq \sum b_j$, т.е. баланс между запасами и потребностями отсутствует.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных запасов суммарным потребностям, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный ($n$ + 1)-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и полагают $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный ($m$ + 1)-й пункт отправления с запасами груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и принимают $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Математическая модель транспортной задачи относится к задачам линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ограничений (7.5) — (7.7): ограничения заданы в виде уравнений; каждая неизвестная входит лишь в два уравнения, коэффициенты при неизвестных — единицы, для ее решения созданы специальные алгоритмы. Самым распространенным методом решения транспортной задачи является метод потенциалов.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1. Определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана) — первоначальное распределение поставок.

2. Построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты).

После выполнения первого этапа шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

7.1.2.2. Построение первоначального опорного плана

Рассмотрим два метода построения первого опорного плана.

План составляется последовательным заполнением по одной клетке в таблице перевозок так, что каждый раз либо полностью удовлетворяется потребность одного из потребителей, либо полностью ввозится груз от некоторого поставщика. В теории доказывается, что базисное решение системы ограничений (из $m + n$ уравнений с mn переменными) в условиях транспортной задачи имеет $m + n - 1$ базисных переменных (ее ранг равен $m + n - 1$), поэтому, совершив $m + n - 1$ указанных шагов, получим первый опорный план. Различие двух методов отыскания первого опорного плана состоит в различии способов выбора последовательности заполнения клеток.

Диагональный метод или метод северо-западного угла. При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка («северо-западный угол») оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки переменного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn}, т.е. идет как бы по диагонали таблицы перевозок.

Метод наименьшей стоимости. Исходное опорное решение, построенное диагональным методом, как правило, оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его определении совершенно игнорируются величины затрат c_{ij}. Поэтому требуются в дальнейших расчетах много итераций для достижения оптимального плана. Число итераций можно сократить, если исходный план строить по более рациональному правилу «минимального элемента». Сущность его состоит в том, что на каждом шаге заполняется клетка с наименьшей величиной c_{ij}. Если такая клетка не единственная, то лучше заполнять ту, по вертикали или горизонтали которой встречаются большие c_{ij}, а в принципе заполняется любая из них.

Пусть это будет клетка (i, j). Запишем в эту клетку $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Если $a_i < b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребность B_j стала $b'_j = b_j - a_i$. Поэтому, не принимая более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей. Для случая $a_i > b_j$ из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы A_i полагаются равными $a'_i = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности — удовлетворены. Необходимо отметить, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами, планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, однако они, несомненно, ближе к оптимальному, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Прежде чем перейти к анализу оптимальности планов и способам их улучшения, выясним, каким требованиям должны удовлетворять составляемые планы. Для этого вернемся к системе ограничений (7.5) — (7.7). Очевидно, что первая группа уравнений требует, чтобы сумма элементов плана по i-й строке равнялась a_i, $i = \overline{1, m}$; а вторая группа — чтобы сумма элементов по j-му столбцу была равна b_j, $j = \overline{1, n}$. Условие закрытости модели транспортной задачи означает, что среди $m + n$ уравнений системы ограничений независимых только $m + n - 1$, поэтому в любом базисном решении этой системы должно быть $m + n - 1$ базисных переменных. Поскольку свободные переменные в таком решении равны нулю, то в транспортной таблице им будут соответствовать пустые клети.

Клетки таблицы, в которых записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными.

В теории доказано, что базисное решение системы ограничений (7.5) — (7.7) в условиях транспортной задачи должно иметь $m + n - 1$ базисных переменных.

План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$.

Если на каком-то этапе решения получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток 0 и тем самым объявив их базисными. Поскольку этим дополнительным клеткам будут отвечать нулевые перевозки, то общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменится. Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. Приведем условия, которым должен соответствовать пополненный план.

Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Ломаная может иметь точки самопересечения, но не в клетках цикла.

План называется ациклическим, если его базисные клетки не содержат циклов.

Доказано, что оптимальные планы являются ациклическими, поэтому и первоначальный план также должен удовлетворять этому требованию. Заметим, что планы, полученные с помощью методов северо-западного угла и наименьшей стоимости, ациклические. Однако если план оказался вырожденным, то при его пополнении требование ацикличности необходимо учитывать.

7.1.2.3. Оптимальность базисного решения. Метод потенциалов

Получив первый опорный план, следует проверить его оптимальность и, если требуется, перейти к новому опорному плану с лучшим значением целевой функции Z. Для этого применяют метод потенциалов. Каждому поставщику A_i и каждому потребителю B_j сопоставляют, соответственно, величины U_i и V_j — потенциалы этих пунктов.

Для того чтобы некоторый опорный план $X^* = \| x_{ij}^* \|$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из $(m + n)$ чисел U_i^*, V_j^*, удовлетворяющих условиям:

$$C_{ij} - (U_i + V_j) = 0 \quad \text{для} \quad x_{ij} \geq 0 \tag{7.8}$$

(для занятых клеток) и

$$\Delta C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \geq 0, \ (i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}) \tag{7.9}$$

(для свободных клеток).

Числа U_i^*, V_j^*, называются потенциалами соответственно производителей и потребителей, вся их система — потенциальной, а условия (7.8) — (7.9) — условиями потенциальности системы $\{U_i^*, V_j^*\}$; каждое в отдельности неравенство (равенство) называется условием потенциальности для соответствующей клетки (i, j).

Поскольку число неизвестных потенциалов $(m + n)$ всегда на единицу больше числа уравнений (числа заполненных клеток) $N = m + n - 1$, то выбираем строку, где есть занятая клетка и для этой строки назначаем потенциал равным нулю, например $U_1 = 0$, и легко находим последовательно из уравнений (7.8) значения остальных потенциалов.

Если же число заполненных клеток $N < m + n - 1$, то вводим дополнительно необходимое количество занятых клеток с нулевыми перевозками $x_{ij} = 0$, которые нужны для определения потенциалов из уравнений (7.8).

Затем для всех свободных клеток из соотношений (7.9) определяем величину ΔC_{ij} и, если все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получим оптимальный план перевозок, если же встречаем отрицательные ΔC_{ij}, то план не оптимален и его надо улучшать.

7.1.2.4. Улучшение плана перевозок

Среди пустых клеток с отрицательными значениями ΔC_{ij} выбираем ту, у которой ΔC_{ij} наименьшая. Эта пустая клетка рекомендуется к заполнению, в результате которого одна из заполненных клеток станет пустой. Процедура перепланировки соответствует взаимной перемене роли двух переменных в симплексном методе. Например, в табл. 7.5 клеткой, рекомендуемой к заполнению служит пустая клетка (1, 2), следовательно, переменная x_{12} из не основных (нулевых) переходит в основные (положительные). Остается определить, какая из основных переменных должна стать не основной.

Для свободной клетки строим замкнутую ломанную линию (цикл), состоящую из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых. Одна из вершин находится в свободной клетке, а остальные в занятых клетках, число вершин всегда четное. Свободной вершине придаем знак плюс, знаки остальных вершин чередуются. На каждой стороне этой ломанной линии — контура могут находиться две заполненные вершины, кроме того одна вершина лежит в заполняемой пустой клетке.

Наиболее часто контур имеет вид прямоугольника, но возможны фигуры другого типа (рис. 87).

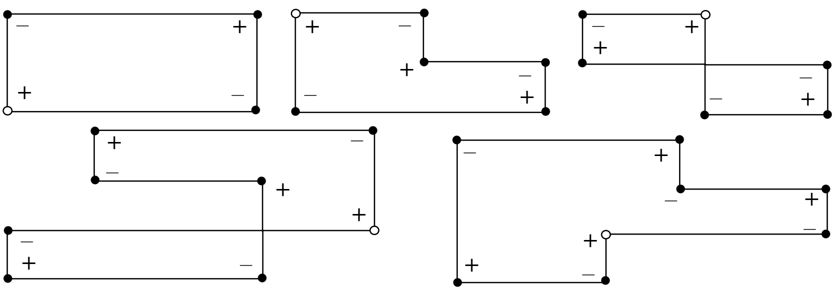


Рис. 87

Перепланировке подвергаются только клетки контура, а величина перевозок во всех остальных заполненных клетках таблицы не изменяется.

В отрицательных вершинах контура выбираем наименьшее число и это число прибавляем к положительным вершинам и отнимаем от отрицательных вершин. Выбранная отрицательная вершина станет свободной, число занятых вершин не изменится, баланс перевозок старого и нового контура останется без изменения.

Далее строим новую таблицу перевозок и проверяем оптимальность плана. Если план оптимальный, то получим оптимальное решение транспортной задачи, если нет, то план улучшаем. Через какое-то число последовательных шагов улучшения планов перевозок будет получен оптимальный план.

7.1.2.5. Задача определения оптимального плана перевозок

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количестве 200, 205, 225 тонн. Полученный груз требуется перевезти в пять пунктов B_1, B_2, …, B_5, потребности которых составляют 190, 130, 80, 100 и 130 тонн. Расстояние C_{ij} в ед. км. ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, 5$) между пунктами отправления и пунктами назначения приведены в табл. 7.6.

Следует спланировать перевозки однородного груза так, чтобы общие затраты всех перевозок в тонно-километрах были бы минимальными.

Таблица 7.6

a_i \ b_j	$b_1 = 190$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 100$	$b_5 = 130$
$a_1 = 200$	5	7	4	9	5
$a_2 = 205$	7	4	3	4	7
$a_3 = 225$	9	10	6	8	7

Так как $\sum a_i = 200 + 205 + 225 = 630$, $\sum b_j = 190 + 130 + 80 + 100 + 130 = 630$, т.е. $\sum a_i = \sum b_j$, то имеем закрытую модель транспортной задачи.

Составляем исходное опорное решение по правилу минимальной стоимости. В клетке (2, 3) наименьшая стоимость $C_{23} = 3$ и туда отправляем весь необходимый груз 80 т. Далее наименьшая стоимость $C_{24} = C_{22} = 4$ и в клетку (2, 4) направляем все 100 т необходимого груза, а в клетку (2, 2) — оставшиеся на базе A_2 25 т. Теперь наименьшая стоимость $C_{11} = C_{15} = 5$ и в клетку (1, 1) направляем 190 т необходимого груза, а в клетку (1, 5) — 10 т оставшегося на базе A_1 груза. Затем направляем 120 т груза в клетку (3, 5) и 105 т в клетку (3, 2). Правильность заполнения таблицы проверяем суммируя грузы в заполненных клетках по строкам и столбцам. Получим опорное решение (табл. 7.8).

Таблица 7.8

V_j / U_i	$V_1 = 5$	$V_2 = 8$	$V_3 = 7$	$V_4 = 8$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	$\boxed{5}$ 190	$\boxed{7}$ $\boxed{-1}$	$\boxed{4}$ $\boxed{-3}$	$\boxed{9}$ $\boxed{1}$	$\boxed{5}$ 10	200
$U_2 = -4$	$\boxed{7}$ $\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 25	$\boxed{3}$ 80	$\boxed{4}$ 100	$\boxed{7}$ $\boxed{6}$	205
$U_3 = 2$	$\boxed{9}$ $\boxed{2}$	$\boxed{10}$ 105	$\boxed{6}$ $\boxed{-3}$	$\boxed{8}$ $\boxed{-2}$	$\boxed{7}$ 120	225
	190	130	80	100	130	a_i / b_j

Всего должно быть заполненных клеток $N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$, у нас также заполнено семь клеток.

Проверяем оптимальность полученного плана перевозок методом потенциалов.

Поставщику ставим в соответствие потенциалы U_i ($i = 1, 2, 3$), а потребителю — V_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$) и определяем их. Назначаем $U_1 = 0$, а все остальные потенциалы находим из условия, что для занятых клеток должны выполняться условия (7.8):

$$C_{15} - (U_1 + V_5) = 0,\ 5 - (0 + V_5) = 0,\ V_5 = 5;$$
$$C_{35} - (U_3 + V_5) = 0,\ 7 - (U_3 + 5) = 0,\ U_3 = 2;$$
$$C_{32} - (U_3 + V_2) = 0,\ 10 - (2 + V_2) = 0,\ V_2 = 8;$$
$$C_{22} - (U_2 + V_2) = 0,\ 4 - (U_2 + 8) = 0,\ U_2 = -4;$$
$$C_{23} - (U_2 + V_3) = 0,\ 3 - (-4 + V_3) = 0,\ V_3 = 7;$$
$$C_{24} - (U_2 + V_4) = 0,\ 4 - (-4 + V_4) = 0,\ V_4 = 8;$$
$$C_{11} - (U_1 + V_1) = 0,\ 5 - (0 + V_1) = 0,\ V_1 = 5.$$

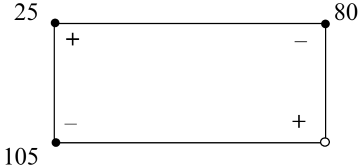
Для всех свободных клеток находим ΔC_{ij} из соотношения (7.9) и записываем в табл. 7.8 в прямоугольники $\square$.

$$\Delta C_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 7 - (0 + 8) = -1;$$
$$\Delta C_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 7) = -3;$$
$$\Delta C_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 9 - (0 + 8) = 1;$$
$$\Delta C_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 7 - (-4 + 5) = 6;$$
$$\Delta C_{25} = C_{25} - (U_2 + V_5) = 7 - (-4 + 5) = 6;$$
$$\Delta C_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 9 - (2 + 5) = 2;$$
$$\Delta C_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 6 - (2 + 7) = -3;$$
$$\Delta C_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 8 - (2 + 8) = -2.$$

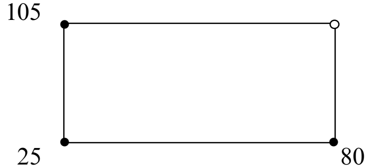
Так как имеются $\Delta C_{ij} < 0$, то, согласно п. 7.1.2.3, план табл. 7.8 не является оптимальным и его нужно улучшить соответственно п. 7.1.2.4.

Для свободной клетки (3; 3) с наименьшим отрицательным $C_{33} = -3$ строим контур (пунктирный прямоугольник) и улучшаем соответствующий ему план перевозок.

Старый контур



Новый контур



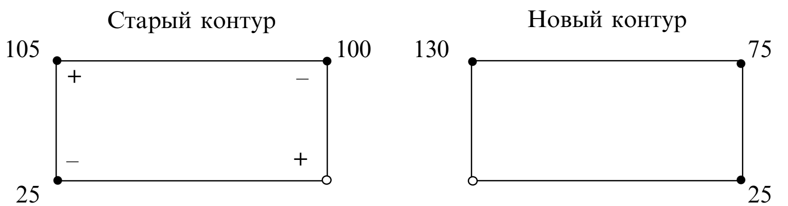
Среди отрицательных вершин выбираем наименьшее значение 80 и прибавляем его к положительным вершинам и отнимаем от отрицательных вершин. Получили новый контур перевозок опять с одной свободной вершиной и не нарушенным балансом перевозок.

Далее строим новый план перевозок (табл. 7.9).

Таблица 7.9

U_i \ V_j	$V_1 = 5$	$V_2 = 8$	$V_3 = 4$	$V_4 = 8$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	5 190	7 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{0}$	9 $\boxed{1}$	5 10	200
$U_2 = -4$	7 $\boxed{6}$	4 105	3 $\boxed{3}$	4 100	7 $\boxed{6}$	205
$U_3 = 2$	9 $\boxed{2}$	10 25	6 80	8 $\boxed{-2}$	7 120	225
	190	130	80	100	130	a_i \ b_j

Проверяем его оптимальность, находя потенциалы U_i, V_j и ΔC_{ij}. Так как $\Delta C_{34} = -2 < 0$, то для клетки (3, 4) строим улучшенный контур.



Строим улучшенный план перевозок (табл. 7.10).

Таблица 7.10

U_i \ V_j	$V_1 = 5$	$V_2 = 6$	$V_3 = 4$	$V_4 = 6$	$V_5 = 5$	
$U_1 = 0$	5 190	7 $\boxed{1}$	4 $\boxed{0}$	9 $\boxed{3}$	5 10	200
$U_2 = -2$	7 $\boxed{4}$	4 130	3 $\boxed{1}$	4 75	7 $\boxed{4}$	205
$U_3 = 2$	9 $\boxed{2}$	10 $\boxed{2}$	6 80	8 25	7 120	225
	190	130	80	100	130	a_i \ b_j

Так как все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получен оптимальный план перевозок.

$$X = (x_{11} = 190,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0,\ x_{14} = 0,\ x_{15} = 10,$$
$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 130,\ x_{23} = 0,\ x_{24} = 75,\ x_{25} = 0,$$
$$x_{31} = 0,\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 80,\ x_{34} = 25,\ x_{35} = 120).$$

Транспортные расходы при этом будут минимальными:

$$Z_{\min} = 5 \cdot 190 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 130 + 4 \cdot 75 + 6 \cdot 80 + 8 \cdot 25 + 7 \cdot 120 = \\ =3340 \text{ тонно-км.}$$

7.1.2.6. Открытая модель транспортной задачи

Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности $\sum a_i > \sum b_j$;

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы $\sum b_j > \sum a_i$.

Формулироваться данная задача будет следующим образом.

Найти min значение линейной функции $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, & (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & (j = \overline{1,n}). \end{cases} \quad \text{(случай } a) \tag{7.10}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & (i = \overline{1,m}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j, & (j = \overline{1,n}). \end{cases} \quad \text{(случай } b) \tag{7.11}$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{7.12}$$

Открытая модель решается приведением к закрытой.

В случае (a) вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребности которого $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$.

В случае (*б*) вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$.

Стоимости перевозок в обеих случаях полагаются равными нулю.

При равных стоимостях перевозки единицы груза от поставщиков к фиктивному потребителю затраты на перевозку груза реальным потребителям минимальны, а фиктивному потребителю будет направлен груз от наименее выгодных поставщиков.

Составить оптимальный план перевозок.

Имеем матрицу планирования (табл. 7.11).

Таблица 7.11

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	6	8	12	16	100
A_2	16	10	8	6	15	400
A_3	4	1	9	11	13	100
A_4	3	2	7	7	15	100
	50	100	150	200	250	$b_j \backslash a_i$

$$\sum a_i = 700; \ \sum b_j = 750.$$

Вводим фиктивного поставщика $A_{m+1} = A_5$, объем запасов которого $a_{m+1} = a_5 = 50$. При составлении опорного плана методом min стоимости необходимо наименьшую стоимость выбирать только среди стоимостей реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика распределять в последнюю очередь.

Число заполненных клеток 7, а должно быть $m + n - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$, тогда в клетках (4, 2) и (3, 5) ставим нули.

Находим U_i, V_j и ΔC_{ij} и записываем их в табл. 7.12 в $\square$. Так как все $\Delta C_{ij} \geq 0$, то получили оптимальный план перевозок (табл. 7.12).

Таблица 7.12

U_i \ V_j	$V_1 = 1$	$V_2 = 3$	$V_3 = 8$	$V_4 = 6$	$V_5 = 15$	
$U_1 = 0$	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{6}$ $\boxed{3}$	$\boxed{8}$ 50	$\boxed{12}$ $\boxed{6}$	$\boxed{16}$ $\boxed{1}$	100
$U_2 = 0$	$\boxed{16}$ $\boxed{15}$	$\boxed{10}$ $\boxed{7}$	$\boxed{8}$ $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ 200	$\boxed{15}$ 200	400
$U_3 = -2$	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 100	$\boxed{9}$ $\boxed{3}$	$\boxed{11}$ $\boxed{7}$	$\boxed{13}$ 0	100
$U_4 = -1$	$\boxed{3}$ $\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{7}$ 100	$\boxed{7}$ $\boxed{2}$	$\boxed{15}$ $\boxed{1}$	100
$U_5 = -15$	$\boxed{0}$ $\boxed{14}$	$\boxed{0}$ $\boxed{12}$	$\boxed{0}$ $\boxed{7}$	$\boxed{0}$ $\boxed{9}$	$\boxed{0}$ 50	50
	50	100	150	200	250	b_j \ a_i

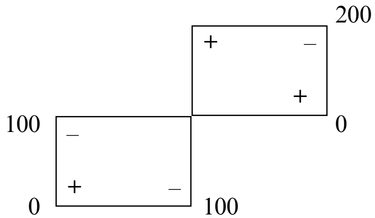
$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

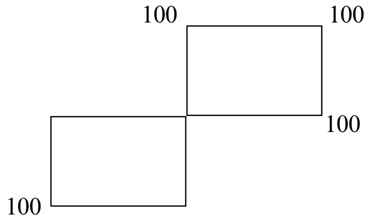
Найдем суммарную стоимость перевозок по оптимальному плану:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} C_{ij}x_{ij} = 50\cdot 1 + 50\cdot 8 + 200\cdot 6 + 200\cdot 15 + 100\cdot 1 + 100\cdot 7 = 5450.$$

Анализируя этот план, можно сделать следующие выводы. Потребитель B_5 получает 50 ед. груза от фиктивного поставщика, следовательно, его потребности будут неудовлетворены на это же количество единиц.

Оптимальный план не является единственным, так как для клетки A_2B_3 сумма потенциалов равна стоимости перевозок и в нее по циклу можно переместить 100 ед. груза. При перераспределении система потенциалов не изменится и стоимость перевозок останется прежней.





$Z_{\text{ст.пл.}} =$
$= 3000 + 700 + 100 = 3800.$

$Z_{\text{нов.пл.}} =$
$= 800 + 1500 + 1300 + 200 = 3800.$

7.2. Математические методы в экономике

7.2.1. Сетевое планирование

Системы сетевого планирования и управления (СПУ), являющиеся разновидностью автоматизированных систем управления, предназначены для управления деятельностью, направленной на достижение определенной цели.

Объектом управления в системах СПУ является коллектив, располагающий определенными ресурсами и выполняющий комплекс работ, призванный обеспечить достижение намеченной цели. Метод СПУ позволяет в любых, даже самых сложных ситуациях, быстро принимать наиболее правильные решения, выявить резервы времени и средств на одних участках работы и перебросить их на другие, более напряженные.

Важной особенностью систем СПУ является системный подход к вопросам организации управления, согласно которому коллективы исполнителей, принимающие участие в проекте и объединенные общностью поставленной перед ними задачи, несмотря на их различную ведомственную подчиненность, рассматриваются как звенья единой сложной организационной системы.

Для отображения процесса выполнения проекта и управления им в системах СПУ используется сетевая модель.

7.2.1.1. Сетевой график. Критический путь

Важнейшей основой метода СПУ является сетевой график.

Сетевой график представляет собой графическое изображение последовательности выполнения комплексной разработки, показывающее взаимосвязь и взаимозависимость отдельных этапов, выполнение которых обеспечивает достижение конечной цели разработки.

Достоинство сетевых графиков заключается в их наглядности и сравнительной простоте исполнения. Сетевые графики позволяют:

а) выявлять важнейшие работы, от своевременного выполнения которых зависит соблюдение сроков окончания всей разработки;

б) наглядно представлять ход разработки в целом, взаимосвязь и взаимозависимость отдельных этапов разработки;

в) определять общую потребность в рабочей силе и материальных ресурсах для выполнения плана;

г) выявлять резервы времени и материальные ресурсы с целью наиболее эффективного выполнения плана;

д) совершенствовать методы планирования и устанавливать строгий ритм в работе;

е) использовать вычислительную технику для расчета показателей сетевых графиков.

Приведенный перечень преимуществ применения методов сетевого планирования и управления не является исчерпывающим, однако дает возможность оценить его огромное мобилизующее значение как эффективного средства улучшения организации труда и управления производством.

Таким образом, методы СПУ, обеспечивая руководителя необходимой информацией о ходе выполнения разработки, дают ему возможность принимать решения, направленные на достижение максимального эффекта при минимальных затратах времени и ресурсов, поэтому применение методов СПУ близко подходит к возможности разработки оптимальных планов.

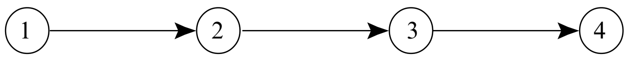
Рассмотрим теперь основные термины, применяемые при пользовании сетевыми графиками.

Работа характеризует конкретный этап трудового процесса по выполнению определенной операции комплексной разработки. Этот термин означает, что для осуществления работы требуются затраты рабочей силы, материальных ресурсов и времени.

Событие является фактом окончания всех предшествующих данному событию работ, либо началом работ, следующих непосредственно за данным событием. Для совершения события не требуется никаких затрат, а само событие не имеет продолжительности.

При составлении сетевого графика необходимо обеспечить логическую последовательность наступления событий, которая определяется взаимосвязью и последовательностью выполнения соответствующих работ. На сетевом графике события обозначаются кружками, в которые в определенной последовательности вписываются цифры.

Приведем следующий простейший график:



Из графика следует, что событие 3 не может наступить, пока не совершится событие 2 и т.д. При этом событие 2 называется последующим по отношению к событию 1, так же как событие 4 является последующим по отношению к событию 3. Событие 3 — предшествующее по отношению к событию 4. В указанных определениях имеется в виду, что события следуют одно за другим и между ними нет промежуточных событий. Одно событие может иметь и несколько предшествующих, либо последующих событий. Например, на графике (рис. 88) событие 6 имеет два предшествующих события (4 и 5).

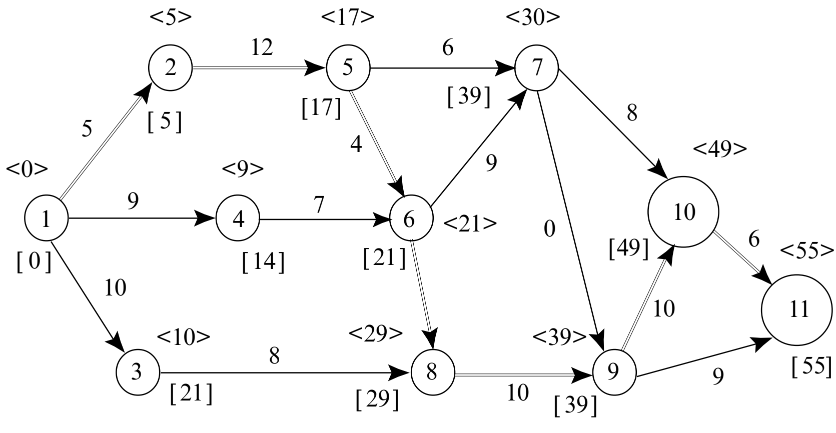
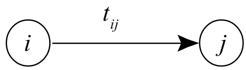


Рис. 88

Если наступлению данного события не предшествует какая-либо работа, то это событие называется исходным (на рис. 88 это событие 1). Событие, не имеющее последующих работ, называется завершающим, т.е. наступлением завершающего события достигается конечная цель данной разработки (на рис. 88 это событие 11).

Операция — это сама работа или действие. Она обозначается:



Это означает, что начальное событие i происходит раньше конечного события j, а длительность операции $(i - j)$, которая обозначается стрелкой, будет равна t_{ij}.

Фиктивной называется работа, не требующая затрат рабочего времени и ресурсов на ее выполнение. Она характеризует зависимость выполнения данной работы от выполнения какой-то другой. Длительность этой работы $t_{ij} = 0$ (на рис. 88 это работа 7—9).

Продолжительность выполнения работы измеряется в единицах времени: часах, днях, неделях и т.д.

Любая последовательность работ в сети, в которой конечное событие каждой работы последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется путем.

Следует различать два вида пути:

1) полным путем называется непрерывная последовательность выполнения работ от исходного до завершающего события;

2) критическим путем называется путь от исходного до завершающего события, который характеризуется наибольшей продолжительностью выполнения работ, находящихся на этом пути.

Первичный сетевой график составляется на основе исходных (первичных) данных представленных ответственными исполнителями этапов комплексной работы до его оптимизации.

Рассмотрим детальнее сетевой график некоторого комплекса работ, который необходимо выполнить, чтобы организовать производство нового вида изделия (рис. 88).

В практическом применении сетевых графиков может быть различное количество событий и работ, характеризующих те или иные виды разработок. При этом, если количество событий не превышает 300, графики обсчитывают с помощью простейших микрокалькуляторов. При числе же событий свыше 300, и в особенности 500—1000 и более, параметры сети рассматриваются при помощи ЭВМ.

Определяем продолжительности полных путей, для чего составляем табл. 7.13.

Таблица 7.13

Вид полного пути	Продолжительность пути T	
1-2-5-7-10-11	5 + 12 + 6 + 8 + 6	= 37
1-2-5-7-9-10-11	5 + 12 + 6 + 0 + 10 + 6	= 39
1-2-5-7-9-11	5 + 12 + 6 + 0 + 9	= 32
1-2-5-6-7-10-11	5 + 12 + 4 + 9 + 8 + 6	= 44
1-2-5-6-7-9-10-11	5 + 12 + 4 + 9 + 0 + 10 + 6	= 46
1-2-5-6-7-9-11	5 + 12 + 4 + 9 + 0 + 9	= 39
1-2-5-6-8-9-10-11	5 + 12 +4 + 8 + 10 + 10 + 6	= 55
1-2-5-6-8-9-11	5 + 12 +4 + 8 + 10 + 9	= 48
1-3-8-9-10-11	9 + 7 +9 + 8 + 6	= 39
1-3-8-9-11	9 + 7 +9 + 0 + 10 + 6	= 41
1-4-6-7-10-11	9 + 7 +9 + 0 + 9	= 34
1-4-6-7-9-10-11	9 + 7 +8 + 10 + 10 + 6	= 50
1-4-6-7-9-11	9 + 7 +8 + 10 + 9	= 43
1-4-6-8-9-10-11	10 + 8 + 10 +10 + 6	= 44
1-4-6-8-9-11	10 + 8 + 10 + 9	= 37

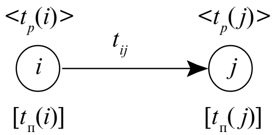
Отсюда видно, что продолжительность критического пути, т.е. пути, имеющего наибольшую продолжительность, равна $T_{кр} = 55$ (дней). Это означает, что при прочих равных условиях раньше чем через 55 (дней) данная работа не закончится. Следовательно, продолжительность критического пути представляет собой наиболее ранний срок завершения всей работы от исходного до завершающего события.

В сети может быть несколько критических путей.

7.2.1.2. Временные параметры сетей. Резервы времени

Основными временными параметрами сетей являются ранние и поздние сроки наступления событий. Зная их, можно вычислить остальные параметры сети — сроки начала и окончания работ и резервы времени событий и работ.

Рассмотрим работу $(i - j)$:



Ранний возможный срок $< t_p\ (i) >$ наступления события j есть наименьший возможный срок окончания данной работы:

$$t_p(j) = \max_i\ [t_p\ (i) + t_{ij}], \tag{7.13}$$

т.е. раннее возможное событие j равно раннему возможному предшествующему событию i, сложенному с длительностью работы $(i - j)$.

Когда для события j имеется несколько ранних возможных, то берется наибольшее.

Очевидно, максимальное значение раннего окончания работы будет характеризовать продолжительность критического пути $(T_{кр})$.

Поздним допустимым сроком наступления события называется максимально допустимый срок наступления этого события, не требующий увеличения времени на осуществление всего проекта.

$$t_п(i) = \min_i\ [t_п\ (j) - t_{ij}]. \tag{7.14}$$

Позднее допустимое равняется разности позднего окончания события j и продолжительности последующих работ.

Если для события i будет несколько поздних допустимых, то берется наименьшее.

Работы, у которых $< t_p\ (j) >$ и $[t_n\ (i)]$ совпадают, называются критическими работами, лежащими на критическом пути. Это есть второй способ определения критического пути.

Как уже отмечалось, продолжительность критического пути больше продолжительности любого другого пути сетевого графика.

Разность между продолжительностью критического пути $T_{кр}$ и продолжительностью пути $L - T(L)$ называется резервом времени пути L.

$$R(L) = T_{кр} - T(L). \qquad (7.15)$$

Резерв времени $R(L)$ показывает, на сколько могут в сумме быть увеличены продолжительности работ, принадлежащих пути L, без влияния на срок проекта.

Различают четыре резерва времени:

1. Полный резерв $ПР = R_n(i; j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}$, (7.16)
2. Свободный резерв $СР = R_c(i; j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij}$, (7.17)
3. Независимый резерв $НР = R_н(i; j) = t_p(j) - t_n(i) - t_{ij}$, (7.18)
4. Гарантированный резерв $ГР = R_r(i; j) = t_n(j) - t_n(i) - t_{ij}$, (7.19)

Полный резерв времени — это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить продолжительность без изменения общего срока проекта.

Из этого определения следует, что полный резерв времени по отдельным работам позволяет маневрировать ресурсами с тем, чтобы наилучшим образом выполнить всю разработку. Полный резерв времени является зависимым резервом, т.е. его применение может привести к изменению резервов по другим работам. Поэтому при использовании полного резерва времени обычно пересчитывают параметры сетевого графика для определения нового распределения резервов.

Свободный резерв времени — это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить их продолжительность без изменения раннего начала последующих работ, этот резерв может быть использован непосредственно исполнителем той или иной работы, и это не повлечет за собой изменения условий производства последующих работ. Полный же резерв времени может быть использован только с разрешения центра, так как его использование изменяет ранние сроки начала последующих работ.

Всегда ПР > СР.

На критическом пути все резервы времени равны нулю.

Это свойство может служить третьим определением критического пути.

Независимый резерв времени означает запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ним работ.

Гарантированный резерв означает для исполнителя работы резерв времени, который он имеет, когда исполнители предшествующих работ заканчивают их в неудобные для него поздние допустимые сроки, но и он сдает свою работу в поздний срок.

Если $R_с\,(i;\,j)$ и $R_н\,(i;\,j)$ имеют отрицательные значения, то эти резервы заменяются нулем.

Существуют различные формы расчета параметров сети: табличный и графический. Наиболее удобной является табличная форма.

Для рассмотренного примера сетевого графика (рис. 88) в табл. 7.14 приведены ранние и поздние сроки окончания и начала работ и резервы времени.

При анализе графика прежде всего обращают внимание на критические работы, от которых в решающей степени зависит своевременное и качественное выполнение всей разработки. Следует также обращать внимание на наличие резервов времени по отдельным работам. Например, по работе (5, 7) свободный резерв составляет 7 дней. Это означает, что продолжительность выполнения данной работы при необходимости можно «растянуть» в пределах семи дней, либо начать эту работу позже.

Нахождение величины резервов нельзя рассматривать, однако, как оценку времени простоя исполнителей. На выполнение работ сетевого графика при правильном планировании выделяются ресурсы (в человеко-часах, машино-часах и т.д.), равные суммарной трудоемкости всех предусмотренных работ.

Оценка резервов времени позволяет более рационально распределить трудовые и материальные ресурсы по работам графика. Большинство работ обладает закономерностью: увеличивая число исполнителей, удается уменьшить длительность выполнения работы. Эта закономерность может иметь разные формы, но чаще других встречается гиперболическая зависимость $t = a + \frac{b}{x}$ длительности работы t от количества работников x.

Таблица 7.14

Работа $(i-j)$	Продолжительность работы t_{ij}	Начало работы		Конец работы		Резервы времени				Работы, лежащие на критическом пути
		ранний срок $<t_p(i)>$	поздний срок $[t_n(i)]$	ранний срок $<t_p(j)>$	поздний срок $[t_n(j)]$	*ПР*	*СР*	*НР*	*ГР*	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(1, 2)	5	0	0	5	5	0	0	0	0	1–2
(1, 3)	10	0	0	10	21	11	0	0	11	
(1, 4)	9	0	0	9	14	5	0	0	5	
(2, 5)	12	5	5	17	17	0	0	0	0	2–5
(3, 8)	8	10	21	29	29	11	11	0	0	
(4, 6)	7	9	14	21	21	5	5	0	0	
(5, 6)	4	17	17	21	21	0	0	0	0	5–6
(5, 7)	6	17	17	30	39	16	7	7	16	
(6, 7)	9	21	21	30	39	9	0	0	9	
(6, 8)	8	21	21	29	29	0	0	0	0	6–8
(7, 9)	0	30	39	39	39	9	9	0	0	
(7, 10)	8	30	39	49	49	11	11	2	2	
(8, 9)	10	29	29	39	39	0	0	0	0	8–9
(9, 10)	10	39	39	49	49	0	0	0	0	9–10
(9, 11)	9	39	39	55	55	7	7	7	7	
(10, 11)	6	49	49	55	55	0	0	0	0	10–11

Перебрасывая людей и технику с ненапряженных работ на напряженные работы критического пути, можно сократить сроки выполнения всего комплекса работ.

Одним из важнейших преимуществ применения сетевых графиков является возможность их оптимизации по различным признакам: по времени (сокращение $T_{кр}$), по людским ресурсам, по материальным ресурсам, по стоимости и технико-экономическим показателям, а также по различным сочетаниям этих признаков.

Так, например, оптимизация сетевого графика по времени предполагает, прежде всего, нахождение возможности сокращения продолжительности критического пути. Это может быть достигнуто различными путями.

Из сетевого графика видно, что сокращение общей продолжительности выполнения разработки возможно только за счет сокращения продолжительности выполнения работ, лежащих на критическом пути.

7.2.1.3. Пример построения сетевого графика задачи 15.1 контрольной работы (рис. 89).

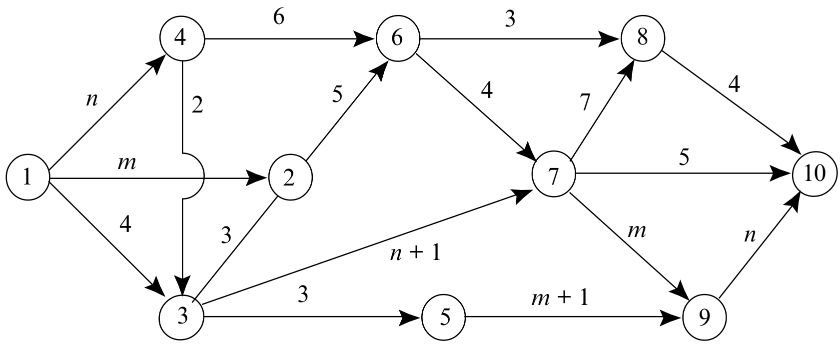


Рис. 89

7.2.2. Межотраслевой баланс

7.2.2.1. Модель межотраслевого баланса

Балансовый метод применяется для анализа, нормирования, прогноза и планирования производства и распределения продукции на различных уровнях — от отдельного предприятия до народного хозяйства в целом.

Центральная идея межотраслевого баланса (МОБ) заключается в том, что каждая отрасль в нем рассматривается и как производитель, и как потребитель. Модель МОБ — одна из самых простых экономико-математических моделей. Она представляет собой единую взаимосвязанную систему информации о взаимных поставках продукции между всеми отраслями производства, а также об объеме и отраслевой структуре основных производственных фондов, обеспеченности народного хозяйства ресурсами труда и т.д.

Такая модель позволяет рассчитать сбалансированный план на основе точного учета всех межотраслевых связей и рассмотреть при этом множество возможных вариантов. В основе исследований балансовых моделей лежат балансовые таблицы, содержащие данные о производстве и потреблении продукции различных отраслей или предприятий. Характерные черты и особенности этого метода описываются с помощью матричных моделей баланса. Из математических методов здесь главным образом используется аппарат линейной алгебры.

Рассмотрим пример предельно упрощенной системы, состоящей из двух производственных отраслей. Пусть исполнение баланса за предшествующий период характеризуется данными, приведенными в табл. 7.15.

Таблица 7.15

	№ отраслей (k) / № отраслей (i)	Потребление		Итого затрат $\sum x_{ik}$	Конечный продукт y_i	Валовый выпуск x_i
		1	2			
Производство	1	0,2 100	0,4 160	260	240	500
	2	0,55 275	0,1 40	315	85	400
Итого затрат в k-ю отрасль		375	200	575 / 575		

Продукция каждой отрасли частично идет на внешнее потребление (конечный продукт), а частично используется в качестве сырья, полуфабрикатов или других средств производства в других отраслях, в том числе и в данной. Эту часть продукции называют производственным потреблением. Поэтому каждая из рассматриваемых отраслей выступает и как производитель продукции (1-й столбец продукции) и как ее потребитель (1-я строка таблицы). Приведенную таблицу конкретного примера можно записать и в более общем виде (табл. 7.16).

Обозначим через x_i валовый выпуск продукции i-й отрасли за планируемый период и через y_i — конечный продукт, идущий на внешнее для рассматриваемой системы потребление (средства производства других экономических систем, потребление населения, образование запасов и т.д.). Таким образом, разность $(x_i - y_i)$ составляет часть продукции i-й отрасли, предназначенную для внутрипроизводственного потребления. Предполагаем, что баланс составляется в стоимостном разрезе. Обозначим через x_{ik} часть продукции i-й отрасли, которая потребляется k-й отраслью, для обеспечения выпуска ее продукции в размере x_i.

Таблица 7.16

№ отраслей (i) \ № отраслей (k)		Потребление		Итого затрат $\sum x_{ik}$	Конечный продукт y_i	Валовый выпуск x_i
		1	2			
Производство	1	x_{11}	x_{12}	$\sum x_{1k}$	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	$\sum x_{2k}$	y_2	x_2
Итого затрат в k-ю отрасль		$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$			

Очевидно, величины, расположенные в строках, связаны следующими балансовыми равенствами:

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12}) = y_1, \\ x_2 - (x_{21} + x_{22}) = y_2. \end{cases}$$

Отсюда стоимостной баланс в общем виде запишется уравнениями:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i \quad (i = \overline{1,\ n}). \tag{7.20}$$

Рассмотрев отношение количества продукции i-й отрасли, поступающей в k-ю отрасль для обеспечения выпуска ее продукции в размере x_k, получим затраты на единицу валовой продукции

$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k} \quad (i,\ k = \overline{1,\ n}), \tag{7.21}$$

откуда

$$x_{ik} = a_{ik} \cdot x_k. \tag{7.22}$$

Рассчитываем a_{ik} по формуле (7.21) и записываем в табл. 7.15 в углах соответствующих клеток.

Найденные коэффициенты прямых затрат и образуют неотрицательную матрицу прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Подставляя в уравнение (7.20) соотношения (7.22) получим:

$$x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k = y_i \quad (i = \overline{1, n}). \tag{7.24}$$

Систему уравнений МОБ (7.24) запишем в матричной форме

$$(E - A)\, X = Y, \tag{7.25}$$

где E — единичная матрица, A — матрица прямых затрат (7.23), X и Y — столбцовые матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

7.2.2.2. Полные внутрипроизводственные затраты

Пусть матрица

$$P = (E - A)^{-1}, \ \mathrm{P} = \| P_{ik} \|, \tag{7.26}$$

тогда из (7.25): $(E - A)^{-1} \cdot (E - A) \cdot X = (E - A)^{-1} \cdot Y$ и, так как $(E - A)^{-1} \cdot (E - A) = E$ и $EX = X$, то получаем, что объемы производства отраслей X определяются как

$$X = PY \tag{7.27}$$

по заданным величинам конечного продукта потребления Y и матрице P, которую называют матрицей коэффициентов полных затрат.

Элементы матрицы P включают не только затраты i-й продукции, необходимой для создания одной единицы k-й продукции, но и те затраты, которые необходимы для создания в каждой отрасли одной единицы конечного продукта.

7.2.2.3. Косвенные затраты

Значит полные затраты P_{ik} включают как прямые a_{ik} так и косвенные $(P_{ik} - a_{ik})$ затраты. Очевидно, что всегда $P_{ik} \geq a_{ik}$, точнее

$$P = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^m + \ldots \qquad (7.28)$$

Матрицы A^2, A^3, … , A^m,… называются матрицами коэффициентов косвенных затрат 1-го, 2-го и т.д. порядков и коэффициенты полных затрат получают в виде суммы коэффициентов прямых затрат и косвенных затрат.

Прямые затраты не отражают в полной мере сложных количественных взаимосвязей, наблюдающихся в народном хозяйстве. Они в частности не отражают обратных связей, имеющих далеко не маловажное значение.

Как возникают косвенные затраты? Например, на изготовление трактора в виде прямых затрат расходуется чугун, сталь, и т.д., но для производства стали также нужен чугун. Таким образом, кроме прямых затрат чугуна, имеются и косвенные затраты чугуна, связанные с производством трактора. В эти косвенные затраты входит и чугун, необходимый для создания того количества чугуна, которое составляет прямые затраты. Эти косвенные затраты могут иногда существенно превышать прямые затраты.

Исходя из (7.27), валовый выпуск k-й отрасли x_k определяется как

$$x_k = P_{k1} \cdot y_1 + P_{k2} \cdot y_2 + \ldots + P_{kn} \cdot y_n \quad (k = \overline{1,\ n}). \qquad (7.29)$$

Модель межотраслевого баланса (7.24), (7.25) или (7.29) позволяет решить следующие задачи:

1) определить объем конечной продукции отраслей y_1, y_2, …, y_n по заданным объемам валовой продукции x_1, x_2, …, x_n;

2) по заданной матрице коэффициентов прямых затрат A определить матрицу коэффициентов полных затрат P, элементы

которой служат важными показателями для планирования развития отраслей;

3) определить объем валовой продукции отраслей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по заданным объемам конечной продукции $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

4) по n заданным объемам конечной или валовой продукции отраслей $x_1, y_2, x_3, y_4, \ldots$ определить оставшиеся n объемов.

7.2.2.4. Решение типовой задачи

Рассмотрим пример составления межотраслевого баланса производства и распределения продукции для трехотраслевой экономической системы, заданной матрицей коэффициентов прямых затрат A и вектором конечной продукции Y:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных затрат: плановые объемы валовой продукции $X = (x_1, x_2, x_3)$; величину межотраслевых потоков, т.е. значения x_{ik} ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$); матрицу косвенных затрат; по заданному вектору увеличения косвенного выпуска продукции ΔY определить изменение плана ΔX.

Находим матрицу $(E – A)$:

$$K=E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}92 \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы полных затрат (7.28) обращаем матрицу K.

Первый способ нахождения $K^{-1} = (E - A)^{-1}$. Вычисляем определитель

$$|K|=\begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix}=0{,}511.$$

Так как $|K| \neq 0$, то существует матрица $K^{-1} = P$ обратная заданной матрице K.

Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы K.

$$K_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0{,}88 & -0{,}03 \\ -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}808; \quad K_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}15 & -0{,}03 \\ -0{,}1 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}141;$$

$$K_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}15 & 0{,}88 \\ -0{,}1 & -0{,}05 \end{vmatrix} = 0{,}096; \quad K_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}24;$$

$$K_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}624; \quad K_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}1 & -0{,}05 \end{vmatrix} = 0{,}06;$$

$$K_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0{,}25 & -0{,}2 \\ 0{,}88 & -0{,}03 \end{vmatrix} = 0{,}184; \quad K_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}15 & -0{,}03 \end{vmatrix} = 0{,}051;$$

$$K_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}15 & 0{,}88 \end{vmatrix} = 0{,}579.$$

Из алгебраических дополнений составляем транспонированную матрицу и, деля ее на $|K|$, получаем обратную матрицу K^{-1}:

$$P = K^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}808 & 0{,}24 & 0{,}184 \\ 0{,}141 & 0{,}624 & 0{,}051 \\ 0{,}096 & 0{,}06 & 0{,}579 \end{pmatrix} : 0{,}511 = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другой способ нахождения обратной матрицы K^{-1} с помощью жордановых исключений. Составляем табл. 7.17.

Таблица 7.17

	x_1	x_2	x_3
$b_1 =$	0,7	–0,25	–0,2
$b_2 =$	0,15	0,88	–0,03
$b_3 =$	–0,1	–0,05	0,92

Совершаем последовательно три шага жордановых исключений, меняя местами b_i и x_k, получаем табл. 7.18—7.20.

Таблица 7.18

	b_1	x_2	x_3
$x_1 =$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{7}$
$b_2 =$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{1157}{1400}$	$-\frac{51}{700}$
$b_3 =$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{35}$	$\frac{156}{175}$

Таблица 7.19

	b_1	b_2	x_3
$x_1 =$	$\frac{8800}{5785}$	$\frac{2500}{5785}$	$\frac{1835}{5785}$
$x_2 =$	$\frac{1500}{5785}$	$\frac{7000}{5785}$	$\frac{510}{5785}$
$b_3 =$	$-\frac{955}{5785}$	$-\frac{600}{5785}$	$\frac{51132}{57850}$

Таблица 7.20

	b_1	b_2	b_3
$x_1 =$	$\frac{40405}{25566}$	$\frac{2000}{4261}$	$\frac{18350}{51132}$
$x_2 =$	$\frac{1175}{4261}$	$\frac{5200}{4261}$	$\frac{5100}{51132}$
$x_3 =$	$\frac{9550}{51132}$	$\frac{6000}{51132}$	$\frac{57850}{51132}$

Внутри табл. 7.20 стоит обратная матрица K^{-1}. Округляя до третьего знака после запятой, имеем:

$$P = K^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix}.$$

Находим объем производства отраслей (валовая продукция):

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102{,}197 \\ 41{,}047 \\ 26{,}383 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, плановые объемы валовой продукции трех отраслей, необходимые для обеспечения заданного уровня конечной продукции равны:

$$x_1 = 102{,}2; \quad x_2 = 41{,}0; \quad x_3 = 26{,}4.$$

Для составления баланса рассчитываем межотраслевые потоки средств производства по формуле (7.22):

$x_{11} = 0{,}3 \cdot 102{,}2 = 37{,}7$; $x_{21} = 0{,}15 \cdot 102{,}2 = 15{,}3$; $x_{31} = 0{,}1 \cdot 102{,}2 = 10{,}2$;
$x_{12} = 0{,}25 \cdot 41{,}0 = 10{,}2$; $x_{22} = 0{,}12 \cdot 41{,}0 = 4{,}9$; $x_{32} = 0{,}05 \cdot 41{,}0 = 2{,}1$;
$x_{13} = 0{,}2 \cdot 26{,}4 = 5{,}3$; $x_{23} = 0{,}03 \cdot 26{,}4 = 0{,}8$; $x_{33} = 0{,}08 \cdot 26{,}4 = 2{,}1$.

Результаты вычислений представим в форме межотраслевого баланса (табл. 7.21). Величина чистой продукции определяется здесь как разница между валовой продукцией отрасли и суммой межотраслевых потоков в каждом столбце.

Таблица 7.21

Потребляющие отрасли / Производящие отрасли	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	30,7	10,2	5,3	56	102,2
2	15,3	4,9	0,8	20	41,0
3	10,2	2,1	2,1	12	26,4
Чистая продукция	46,0	23,8	18,2	–	–
Валовая продукция	102,2	41,0	26,4	–	169,6

На основе заданных матриц Y и A по уровню конечного продукта и коэффициентов прямых затрат получен полностью сбалансированный план общего производства продукции и ее распределения как между отраслями в качестве средств производства, так и для конечного использования.

Матрицу косвенных затрат найдем из формулы (7.28):

$$C = P - A - E = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}280 & 0{,}219 & 0{,}159 \\ 0{,}126 & 0{,}100 & 0{,}070 \\ 0{,}087 & 0{,}067 & 0{,}051 \end{pmatrix}.$$

Определяем изменение плана ΔX, которое потребуется при увеличении конечного выпуска продукции 1-й отрасли на 20, 2-й — на 10 и 3-й — на 5 (единиц).

$$\Delta X = P\Delta Y = \begin{pmatrix} 1{,}580 & 0{,}469 & 0{,}359 \\ 0{,}276 & 1{,}220 & 0{,}100 \\ 0{,}187 & 0{,}117 & 1{,}131 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38{,}085 \\ 18{,}220 \\ 10{,}565 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, потребуется увеличить валовый выпуск 1-й отрасли на Δx_1 = 38,1, 2-й отрасли на Δx_2 = 18,2 и 3-й отрасли на 10,6 (единиц).

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

В первом семестре, студенты выполняющие одну контрольную работу, решают задачи: 1.4.2; 2.1.2; 2.3.1; 3.2.1; 3.3.1; 3.4.3.

Если по графику студенты должны сдать две контрольные работы, то в 1-ю входят задачи: 1.4.1; 1.4.2; 2.1.2; 2.2.1; 2.3.1, а во 2-ю: 3.2.1; 3.2.2; 3.3.1; 3.4.2; 3.4.3.

Номера задач контрольных работ, которые Вы будете выполнять в других семестрах, следует узнавать заранее на зачетно-экзаменационных сессиях при чтении Вам лекций.

Студенты спец. 061800 «Математические методы в экономике» в первом семестре выполняют две контрольные работы по «Высшей алгебре». В 1-ю входят задачи: 1.1.1; 1.2.1; 1.3.1; 1.4.1; 1.4.2; 1.4.3, а во 2-ю; 2.1.1; 2.1.2; 2.2.1; 2.3.1.

Студенты спец. 0618 «Математические методы в экономике» в первом семестре также выполняют две контрольные работы по «Математическому анализу». В 1-ю входят задачи: 3.1.1; 3.2.1; 3.2.2; 3.3.1, а во 2-ю: 3.4.1; 3.4.2; 3.4.3; 3.5.1.

Перед тем как приступить к решению задач контрольной работы нужно изучить соответствующий теоретический материал (какой-то небольшой раздел!). Этот материал нужно закрепить, решая самостоятельно (!) (может быть и несколько раз) уже решенные задачи, соответствующие рассматриваемому Вами теоретическому материалу. После этого Вы приступаете к решению задачи контрольной работы, одновременно сверяясь с уже решенной аналогичной типовой задачей из раздела «Решение типовых задач».

Требования к оформлению контрольных работ

1. Контрольные работы следует выполнять в ученических тетрадях (желательно в клетку). На обложке необходимо указать: название учебного заведения, факультета (института); название кафедры; номер и название контрольной работы; название специальности; фамилию, имя, отчество и личный шифр студента.

2. На каждой странице надо оставить поля размером 4 см для оценки задач и методических указаний проверяющего работу.

3. Условия задач переписывать необязательно, достаточно указать номер задачи по данному пособию.

Формирование исходных данных к задачам

Каждая контрольная работа состоит из задач одного или нескольких разделов сборника.

Условия задач, входящих в контрольную работу, одинаковы для всех студентов, однако числовые данные задач зависят от личного шифра студента, выполняющего работу.

Для того, чтобы получить свои личные числовые данные, необходимо взять две последние цифры своего шифра (A – предпоследняя цифра, B – последняя) и выбрать из таблицы 1 параметр m, а из таблицы 2 параметр n. Эти два числа m и n и нужно подставить в условия задач контрольной работы.

Таблица 1 (выбор параметра m)

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	4	3	5	1	3	2	4	2	1	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	2	1	4	5	3	1	5	2	4

Например, если шифр студента 1097–037, то $A = 3$, $B = 7$, и из таблиц находим, что $m = 1$, $n = 5$. Полученные $m = 1$ и $n = 5$ подставляются в условия всех задач контрольной работы этого студента.

1. Линейная алгебра

1.1. Действия с матрицами

1.1.1. Выполнить действия:

а) $2\cdot\begin{pmatrix} m-n & n \\ 2 & 0 \\ m+n & -m \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ n & -m \\ 2 & n \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & m & n+1 \\ 0 & 2n & -2 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2. Вычисление определителей

1.2.1. Проверить, что определитель Δ равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+n & m & n \\ -n & m-n & -m \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

а) способом Крамера; б) разложением по строке.

1.3. Обратная матрица

1.3.1. Найти обратную матрицу к матрице A и проверить выполнение равенства $A \cdot A^{-1} = E$:

а) $A = \begin{pmatrix} m-n & m \\ -n & m+n \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} m & n & m+n \\ n & m-n & m \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4. Системы линейных уравнений

1.4.1. Записать систему

$$\begin{cases} (m+n)x + (m-n)y = m^2 + n^2, \\ mx + ny = 2mn, \end{cases}$$

в матричном виде $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ и решить ее с помощью вычисления обратной матрицы.

1.4.2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2m + 3n - 1, \\ mx_1 + nx_2 + (m-n)x_3 = m^2 + n^2 - m + n, \\ (m+n)x_1 + mx_2 + nx_3 = m^2 + 2mn - n. \end{cases}$$

1.4.3. Дана система

$$\begin{cases} nx_1 + (m+n)x_2 + mx_3 + 2x_4 - mx_5 = m^2 + 2mn - n, \\ (m-n)x_1 + mx_2 + nx_3 + nx_4 - 3x_5 = -m^2 + mn + n, \\ mx_1 + (2m+n)x_2 + (m+n)x_3 + (2+n)x_4 - (m+3)x_5 = 3mn. \end{cases}$$

1. С помощью теоремы Кронекера-Капелли установить совместность системы.

2. Найти общее решение системы в виде

$$x_1 = f(x_3, x_4, x_5),$$
$$x_2 = \varphi(x_3, x_4, x_5).$$

3. Найти частное решение системы $\bar{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, положив $x_3 = m$, $x_4 = n$, $x_5 = m - n$ и проверить систему.

1.5. Собственные числа и собственые векторы

1.5.1. Найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} m-n & n \\ m & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Аналитическая геометрия

2.1. Прямая на плоскости

2.1.1. На прямую $mx + ny - m^2 - n^2 = 0$, способную отражать лучи, падает луч $2nx + my - 3mn = 0$. Составить уравнение отраженного луча.

2.1.2. Дан треугольник ABC с вершинами $A\ (m + 1; n + 1)$, $B\ (m; -n)$ и $C\ (-m; n)$. Найти:

а) величину угла A;

б) координаты точки пересечения медиан;

в) координаты точки пересечения высот;

г) длину высоты, опущенной из вершины A;

д) площадь треугольника ABC;

е) систему неравенств, задающих область внутри треугольника ABC, и сделать чертеж.

2.2. Кривые второго порядка на плоскости

2.2.1. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $F\ (n; m)$ к расстоянию до прямой $x = -m$ равно $\frac{m}{n}\cdot$ Привести это уравнение у каноническому виду и определить тип кривой.

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

2.3.1. Пирамида $SABC$ задана вершинами S $(m;\ n;\ m+n)$, A $(m+1;\ -n;\ -m)$, B $(-n;\ m+1;\ -n)$, C $(-n;\ -m;\ -m-n)$. Найти:

а) уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C;

б) величину угла между ребром SC и гранью ABC;

в) площадь грани ABC;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC и ее длину;

д) объем пирамиды $SABC$.

3. Дифференциальное исчисление

3.1. Построение графиков элементарных функций

3.1.1. С помощью смещения, растяжения и отражения графиков функций $y = x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$ построить графики функций:

а) $y = | x^2 - 2mx + m^2 - n^2 |$;

б) $y = \dfrac{mx+n}{m-nx}$.

3.2. Пределы, непрерывность и разрывы функций

3.2.1. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+mx+n}-\sqrt{x^2-nx+m}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to n/m}\dfrac{mnx^2-(m^2+n^2)\,x+mn}{\sqrt{2mx}-\sqrt{mx+n}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(mx)-\cos((m+n)\,x)}{1-\cos(nx)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{mx-n}{mx+n}\right)^{(m+n)x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos(2nx))^{\mathrm{ctg}^2(mx)}$.

3.2.2. В точках $x_1 = 0$ и $x_2 = n$ для функции $f(x)$ установить непрерывность или определить характер точек разрыва. Нарисовать график функции $f(x)$ в окрестностях этих точек:

а) $f(x)=\dfrac{m}{2^{n/x}-2}$;

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{m}{n}(x+n), & \text{если} \quad -\infty < x < 0, \\ \dfrac{m}{n^2}(x-n)^2, & \text{если} \quad 0 \le x \le n, \\ mx, & \text{если} \quad n < x < +\infty; \end{cases}$

3.3. Производные функций

3.3.1. Найти производные $y'(x)$ функций:

а) $y=\left(\dfrac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}+\sqrt[m+1]{x^4}+mn\right)^{m+n}$; б) $y=(n+1)^{m/x^n}$;

в) $y=\ln\left(\dfrac{mx+n}{x^m+n}\right)^{m/(m+n)}$; г) $y=\dfrac{\arcsin(nx)}{\sqrt{1-(nx)^2}}$;

д) $y=(nx)^{\sin(mx)}$; е) $e^{mx+ny}-\dfrac{nx}{my}=mn$;

ж) $\begin{cases} x=\ln(mt)+nt+m, \\ y=nt^2+2t+mn. \end{cases}$

3.4. Приложения производной

3.4.1. Составить уравнения касательных к графику функции $y=\dfrac{mx+n}{mx-n}$, параллельных прямой $2mx + ny + mn = 0$.

3.4.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3(m-n)x^2 - 6mnx + 1$ на отрезке $[m - n; m + n]$.

3.4.3. С помощью методов дифференциального исчисления построить график функции $y=\dfrac{(x-m)^3}{(x-m)^2-n^2}$.

3.5. Приближенное решение алгебраических уравнений

3.5.1. Для уравнения $mx - \cos(nx) = 0$ отделить положительный корень и найти его приближенно с точностью $\varepsilon = 0{,}01$:

а) методом деления отрезка пополам;

б) методом касательных.

Примечание. Можно считать, что точность ε достигнута, если разность между соседними приближениями x_{k+1} и x_k удовлетворяет неравенству $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

4. Интегральное исчисление

4.1. Неопределенный интеграл

4.1.1. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \left(m \cdot x^n - \frac{n}{\sqrt[m+1]{x^{n+1}}} + mn \right)^2 dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{mx - nx^2}}$;

в) $\displaystyle\int (x+m)^2 \cdot e^{-nx} dx$; г) $\displaystyle\int \frac{nx + m^2 + n^2}{x^3 - 2nx^2 + (m^2 + n^2)x} dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(mx) + n + 1}$.

4.2. Несобственные интегралы

4.2.1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dx}{(n^2 + x^2) \cdot \operatorname{arctg}(x/n)}$; б) $\displaystyle\int_n^{m+n} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - (m+n)x + mn}}$.

4.3. Применения определенных интегралов

4.3.1. Построить схематический чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2 + mx - n^2$, $(mn + n^2)x - (m + n)y + m^2n - n^3 = 0$;

б) $(x^2 + y^2)^2 = 2(m + n)^2 xy$.

4.3.2. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 0,\ y = \frac{x^2}{m},\ mx + ny - m^2 - mn = 0.$$

4.4. Приближенное вычисление определенных интегралов

4.4.1. Для вычисления определенного интеграла $J = \int\limits_{m-5}^{m+5} \sqrt{x^2 + n}\, dx$, разбивая отрезок интегрирования сначала на 10 равных частей, а затем на 20 равных частей, найти приближенные значения J_{10} и J_{20}:

а) по формуле трапеций;

б) по формуле Симпсона.

Оценить точность приближения с помощью разности $\varepsilon = | J_{10} - J_{20} |$.

5. Функции нескольких переменных

5.1. Частные производные и дифференциал функции

5.1.1. Найти частные производные z'_x, z'_y и z''_{xy} функций:

а) $z = (x - m)^2 \cdot y^n + x^m \cdot (y + n)^3 + mn$;

б) $z = e^{\frac{x-m}{y-n}}$.

5.1.2. Найти дифференциал dz функции $z = \sin^2 (mx^2 - \mathrm{n}y^2)$.

5.1.3. Показать, что функция $z = y \cdot \ln (mx^2 - ny^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{n}{x} \cdot z'_x + \frac{m}{y} \cdot z'_y = \frac{mz}{y^2}$.

5.2. Приложения частных производных

5.2.1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $4z = xy - nx - my + mn$ в точке $(-m; -n; mn)$.

5.2.2. Для функции $z = \ln (mx^2 + ny^2)$ в точке A $(-n; m)$ найти градиент и производную по направлению $\bar{a} = m \cdot \bar{i} - n \cdot \bar{j}$.

5.2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4x^2 + y^2 - 4mx - ny + m^2 + n^2$ в области, заданной неравенствами: $x \geq 0$; $nx - my \leq 0$; $x + y - m - n \leq 0$.

6. Двойные, тройные и криволинейные интегралы

6.1. Двойные интегралы

6.1.1. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^n dy \int\limits_{my/n}^{y+m} f(x,y)\,dx$;

б) $\int\limits_0^m dx \int\limits_0^{(x/m)^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_m^{m+n} dx \int\limits_0^{(m+n-x)/n} f(x,y)\,dy$.

6.1.2. Сделать чертеж и найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $y = x^2$ и плоскостью, проходящей через точки A (n; n^2; 0), B ($-m$; n^2; 0) и C (0; 0; $m + n$).

6.1.3. Сделать чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 0$, $y = x^2$, $ny = -m^2(x - m - n)$;

б) $x^2 + y^2 \geq 6$, $x^2 + y^2 \leq 2nx + 2ny$.

6.2. Тройные интегралы

6.2.1. Найти $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, если тело V ограничено плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $n^2x + m^2y - mnz = 0$ и $x + y + z - m - n = 0$.

6.2.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $nz = x^2 + y^2$, $z = n$, $x = 0$, $ny = mx$.

6.3. Криволинейные интегралы

6.3.1. Вычислить

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

где $P(x, y) = ny + 2x$, $Q(x, y) = mx + 2y$, а контур C образован линиями $n^2y = m^2x^2$, $y = m^2$, $x = 0$:

а) непосредственно;

б) по формуле Грина.

6.3.2. Вычислить

$$\oint_C (2x+mz)\,dx+(2y+nz)\,dy-2\,(m+n)\,zdz,$$

где контур C является одним витком винтовой линии:

$$\begin{cases} x=n\cos(mt), \\ y=n\sin(mt), \quad 0\le t\le 2\pi. \\ z=(m+n)\,t, \end{cases}$$

7. Элементы теории поля

7.1. Дифференциальные операции

7.1.1. Найти в точке A $(-n; -m; 0)$ градиент скалярного поля

$$u=\frac{z+m+n}{mx+ny}.$$

7.1.2. Найти в точке B $(n; m; m+n)$ дивергенцию векторного поля

$$\overline{F}(x,y,z)=\frac{z^2-mx^2}{y}\cdot\bar{i}+\frac{z^2-ny^2}{x}\cdot\bar{j}+(m^2+n^2)\,z\cdot\overline{k}.$$

7.1.3. Найти в точке C $(m; n; 1)$ ротор векторного поля

$$\overline{F}(x,y,z)=\frac{nx-my}{z}\cdot\bar{i}+\frac{mx-ny}{z}\,\bar{j}-(mx+ny)\,z\cdot\overline{k}.$$

7.2. Интегралы и интегральные теоремы

7.2.1. Убедиться, что поле $\overline{F}(x,y,z)=mz\cdot\bar{i}+nz\cdot\bar{j}+(mx+ny)\cdot\overline{k}$ потенциально, и найти его потенциал.

7.2.2. Даны поле $\overline{F}=(my^2-nz^2)\cdot\bar{i}+(nx^2-mz^2)\cdot\bar{j}+(m+n)\,xy\cdot\overline{k}$ и пирамида с вершинами $O\,(0;\ 0;\ 0)$, $A\,(m;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ n;\ 0)$, $C\,(0; 0; m+n)$. Найти:

а) поток поля $\overline{F}$ через грань ABC пирамиды в направлении нормали, составляющей острый угол с осью OZ;

б) поток поля $\overline{F}$ через внешнюю поверхность пирамиды с помощью теоремы Остроградского – Гаусса;

в) циркуляцию поля $\overline{F}$ вдоль замкнутого контура ABC:

$в_1$) непосредственно;

$в_2$) с помощью теоремы Стокса (обход контура происходит в положительном направлении относительно внешней нормали к поверхности пирамиды).

8. Дифференциальные уравнения

8.1. Уравнения первого порядка

8.1.1. Найти общее решение уравнения:

а) $y' = e^{mx-ny}$;

б) $(nx - my) \cdot y' = mx + ny$;

в) $(m^2 + x^2) \cdot y' + ny = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{m}$;

г) $y' + \dfrac{my}{x} = x^2 \cdot y^{n+1}$.

8.1.2. Скорость роста банковского вклада пропорциональна с коэффициентом равным m величине вклада. Найти закон изменения величины вклада со временем, если первоначальная сумма вклада составляла n миллионов рублей.

8.2. Линейные уравнения высших порядков

8.2.1. Решить задачу Коши:

а) $y''' - (m - n) \cdot y'' - mn \cdot y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = m$, $y''(0) = n$;

б) $y'' - 2n \cdot y' + n^2 y = (x + m) \cdot e^{(m+n)x}$, $y(0) = m$, $y'(0) = n$;

в) $y'' + n^2 y = \sin(mx)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = m + n$.

8.3. Системы линейных уравнений

8.3.1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = mx - ny, \\ \dfrac{dy}{dt} = nx + my, \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

9. Ряды

9.1. Числовые ряды

9.1.1. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{mk^2 - nk + 3}{1 - 2k + nk^2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+n} + 1}{3^{k+m} + 2}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m \cdot k^2 + n}{(m+n) \cdot k^2 + m} \right)^k$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(mk)!}{(n+1)^k + 1}$.

9.2. Степенные ряды

9.2.1. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{mk} \cdot x^k}{2^{nk} + 1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot k^m + 1}{3 \cdot k^{m+1} + 2} \cdot (x - n)^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{nk} \cdot x^k}{(mk)!}$.

9.2.2. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

а) $f(x) = \frac{x}{x+m}$, $x_0 = n$;

б) $f(x) = \int\limits_0^{nx} \frac{dx}{1 - x^m}$, $x_0 = 0$.

9.2.3. С помощью разложения в ряд вычислить приближенно с точностью 0,001 значения:

а) e^{-n};

б) $\int\limits_0^{\frac{n}{m+n}} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$.

9.3. Ряды Фурье

9.3.1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале: $f(x) = (x - m)^2$ в интервале $(0, m)$.

10. Функции комплексного переменного

10.1. Действия с комплексными числами

10.1.1. Выполнить действия:
а) $(m + in)^2 \cdot (n - im)$;

б) $\dfrac{m - in}{n + im}$.

10.2. Аналитические функции

10.2.1. Показать, что функция $f(z) = (z + m)^2 + z - ni$ аналитична.

10.3. Интегрирование функций комплексного переменного

10.3.1. Вычислить $\int\limits_C ((nx - y) + i(x + my))\,dz$, где контур C — незамкнутая ломаная, соединяющая точки $O(0, 0)$, $A(m, n)$ и $B(0, m + n)$.

10.4. Ряды Тейлора и Лорана

10.4.1. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - (2m + n)z + m^2 + mn}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ в ряд Тейлора и найти радиус сходимости ряда.

10.5. Вычеты и их приложения

10.5.1. Определить тип особых точек функции $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + nz^2}$ и найти вычеты в них.

11. Приложения операционного исчисления

11.1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение:

$$x'' + (m - n)x' - mnx = e^{(m-n)t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = m.$$

12. Теория вероятностей

12.1. Случайные события

12.1.1. В ящике находятся (m + 3) одинаковых пар перчаток черного цвета и (n + 2) одинаковых пар перчаток бежевого цвета. Найти вероятность того, что две наудачу извлеченные перчатки образуют пару.

12.1.2. В урне находятся 3 шара белого цвета и (n + 1) шаров черного цвета. Наудачу по одному извлекаются 3 шара и после каждого извлечения возвращаются в урну. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется:

а) ровно два белых шара;

б) не менее двух белых шаров.

12.1.3. В урне находятся (m + 2) белых (n + 2) черных шара. Последовательно извлекаются наудачу три шара без их возвращения в урну.

Найти вероятность того, что третий по счету шар окажется белым.

12.2. Случайные величины

12.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины x имеет вид:

x_i	–2	–1	0	m	$m+n$
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4, p_5, и дисперсию $D(X)$, если математическое ожидание $M(X) = -0{,}5 + 0{,}5m + 0{,}1n$.

12.2.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x \le m, \\ a\cdot(x-m)/n & \text{при} \quad m < x < m+n, \\ 0 & \text{при} \quad m+n \le x < +\infty. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(m+\frac{n}{2},\ m+n+1\right)$;

г) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

12.2.3. Случайные величины X_1, X_2, X_3 имеют геометрическое, биномиальное и пуассоновское распределения соответственно. Найти вероятности $P(m \le X_i \le m + 2)$, если математические ожидания $M(X_i) = n + 1$, а дисперсия $D(X_2) = (n + 1)(7 - n) / 8$.

12.2.4. Случайные величины X_4, X_5, X_6 имеют равномерное, показательное и нормальное распределения соответственно. Найти вероятности $P(n < X_i < n + m)$, если у этих случайных величин математические ожидания и средние квадратические отклонения равны m.

13. Математическая статистика

13.1. Численная обработка данных одномерной выборки

Выборка X объемом $N = 100$ измерений задана таблицей:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
m_{x_i}	5	13	$20 + (m + n)$	$30 - (m + n)$	19	10	3

где x_i — результаты измерений, m_{x_i} — частоты, с которыми встречаются значения x_i, $\sum_{i=1}^{7} m_{x_i} = 100$, $x_i = 0{,}2 \cdot m + (i - 1) \cdot 0{,}3 \cdot n$.

13.1.1. Построить полигон относительных частот $W_i = \frac{m_{x_i}}{N}$.

13.1.2. Вычислить среднее выборочное $\overline{X}$, выборочную дисперсию D_x и среднее квадратическое отклонение σ_x.

13.1.3. По критерию χ^2 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Примечание. Для расчетов $\overline{X}$ и D_x рекомендуется перейти к условным значениям $u_i = \frac{x_i - c_x}{0{,}3 \cdot n}$ и, взяв за ложный нуль c_x значение с наибольшей частотой, использовать суммы $\sum_{i=1}^{7} m_{x_i} \cdot u_i$ и $\sum_{i=1}^{7} m_{x_i} \cdot u_i^2$.

13.2. Построение уравнения прямой регрессии

Двумерная выборка результатов совместных измерений признаков x и y объемом $N = 100$ измерений задана корреляционной таблицей:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	m_{x_i}	
x_1	2	3	–	–	–	5
x_2	3	8	2	–	–	13
x_3	–	$8 + m$	$12 + n$	–	–	$20 + (m + n)$
x_4	–	–	$16 – m$	$14 – n$	–	$30 – (m + n)$
x_5	–	–	9	10	–	19
x_6	–	–	3	6	1	10
x_7	–	–	–	1	2	3
m_{y_j}	5	$19 + m$	$42 + n – m$	$31 – n$	3	$N = 100$

где $x_i = 0{,}2 \cdot m + (i – 1) \cdot 0{,}3 \cdot n$, $y_j = 0{,}5 \cdot m + (j – 1) \cdot 0{,}2 \cdot n$.

13.2.1. Найти $\overline{Y}$ и σ_y для выборки

y_j	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
m_{y_j}	5	$19 + m$	$42 + n – m$	$31 – n$	3

(Расчеты $\overline{Y}$ и σ_y можно провести аналогично расчетам $\overline{X}$ и σ_x в задаче 13.1.2).

13.2.2. Построить уравнение прямой регрессии Y на X в виде $\overline{y}_x = ax + b$, $\overline{X}$ и σ_x следует взять из задачи 13.1.2.

13.2.3. На графике изобразить корреляционное поле, то есть нанести точки (x_i, y_j) и построить прямую $\overline{y}_x = ax + b$.

Примечание. Уравнение регрессии сначала рекомендуется найти в виде $\dfrac{\overline{y}_x - \overline{Y}}{\sigma_y} = r \cdot \dfrac{x - \overline{X}}{\sigma_x}$, где r — выборочный коэффициент корреляции, для расчета которого можно воспользоваться методом четырех полей.

14. Линейное программирование

14.1. Задача оптимального производства продукции

Предприятие планирует выпуск двух видов продукции I и II, на производство которых расходуется три вида сырья A, B и C. Потребность a_{ij} на каждую единицу j-го вида продукции i-го вида сырья, запас b_i соответствующего вида сырья и прибыль c_j от реализации единицы j-го вида продукции заданы таблицей:

Виды сырья	Виды продукции		Запасы сырья
	I	II	
A	$a_{11} = n$	$a_{12} = 2$	$b_1 = mn + 5n$
B	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 1$	$b_2 = m + n + 3$
C	$a_{31} = 2$	$a_{32} = m + 1$	$b_3 = mn + 4m + n + 4$
прибыль	$c_1 = m + 2$	$c_2 = n + 1$	
план (ед.)	x_1	x_2	

14.1.1. Для производства двух видов продукции I и II с планом x_1 и x_2 единиц составить целевую функцию прибыли Z и соответствующую систему ограничений по запасам сырья, предполагая, что требуется изготовить в сумме не менее n единиц обоих видов продукции.

14.1.2. В условиях задачи 14.1.1. составить оптимальный план (x_1, x_2) производства продукции, обеспечивающий максимальную прибыль $Z_{\max}$. Определить остатки каждого вида сырья. (Задачу решить симплекс – методом).

14.1.3. Построить по полученной системе ограничений многоугольник допустимых решений и найти оптимальный план производства геометрическим путем. Определить соответствующую прибыль $Z_{\max}$.

14.2. Транспортная задача

На трех складах A_1, A_2 и A_3 хранится $a_1 = 100$, $a_2 = 200$ и $a_3 = 60 + 10n$ единиц одного и того же груза. Этот груз требуется доставить трем потребителям B_1, B_2 и B_3, заказы которых составляют $b_1 = 190$, $b_2 = 120$ и $b_3 = 10m$ единиц груза соответственно.

Стоимости перевозок c_{ij} единицы груза с i-го склада j-му потребителю указаны в правых верхних углах соответствующих клеток транспортной таблицы:

Запасы \ Потребности		B_1, $b_1 = 190$	B_2, $b_2 = 120$	B_3, $b_3 = 10m$
A_1	$a_1 = 100$	4	2	m
A_2	$a_2 = 200$	n	5	3
A_3	$a_3 = 60 + 10n$	1	$m + 1$	6

14.2.1. Сравнивая суммарный запас $a = \sum_{i=1}^{3} a_i$ и суммарную потребность $b = \sum_{j=1}^{3} b_j$ в грузе, установить, является ли модель транспортной задачи, заданная этой таблицей, открытой или закрытой. Если модель является открытой, то ее необходимо закрыть, добавив фиктивный склад A_4' и $a_4' = b - a$ в случае $a < b$ или фиктивного потребителя B_4' с потребностью $b_4' = a - b$ в случае $a > b$ и положив соответствующие им тарифы перевозок нулевыми.

14.2.2. Составить первоначальный план перевозок. (Рекомендуется воспользоваться методом наименьшей стоимости.)

14.2.3. Проверить, является ли первоначальный план оптимальным в смысле суммарной стоимости перевозок, и если это не так, то составить оптимальный план

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

обеспечивающий минимальную стоимость перевозок $S_{\min} = \sum_{i,\,j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij}$. Найти эту стоимость.

15. Математические методы в экономике

15.1. Сетевое планирование

Процесс производства сложной продукции разбивается на отдельные этапы, зашифрованные номерами 1, 2, …, 10. 1 — начальный этап производства продукции, 10 — завершающий. Переход от i-го этапа к j-му этапу назовем операцией. Возможности выполнения операций $(i > j)$ и их продолжительности t_{ij} задаются таблицей.

№ п/п	шифр операции	продолжительность операции	№ п/п	шифр операции	продолжительность операции
	$i \to j$	t_{ij}		$i \to j$	t_{ij}
1	$1 \to 2$	m	10	$5 \to 9$	$m + 1$
2	$1 \to 3$	4	11	$6 \to 7$	4
3	$1 \to 4$	n	12	$6 \to 8$	3
4	$2 \to 3$	3	13	$7 \to 8$	7
5	$2 \to 6$	5	14	$7 \to 9$	m
6	$4 \to 3$	2	15	$7 \to 10$	5
7	$4 \to 6$	6	16	$8 \to 10$	4
8	$3 \to 5$	3	17	$9 \to 10$	n
9	$3 \to 7$	$n + 1$			

15.1.1. Составьте и упорядочите по слоям сетевой график производства работ. Номера этапов необходимо обвести кружками, а операции $i \to j$ обозначить стрелками, проставляя над ними продолжительность t_{ij} операции.

15.1.2. Считая, что начало работы происходит во время $t_1 = 0$, определите время $t_p(j)$ окончания каждого j-го этапа и время $t_n(i)$ позднего допустимого срока наступления i-го события.

15.1.3. Найдите критическое время завершения процесса работ $T_{\text{кр}}$ и выделите стрелки, лежащие на критическом пути.

15.1.4. Для каждой операции $i \to j$ определите резервы свободного времени $СР_{ij}$, полный резерв $ПР_{ij}$, независимый резерв $НР_{ij}$ и гарантийный резерв $ГР_{ij}$. Решите задачу табличным методом. Номера этапов, лежащие на критическом пути подчеркните.

15.2. Задача межотраслевого баланса

Три отрасли промышленности *I*, *II* и *III* являются производителями и в то же время потребителями некоторой продукции. Их взаимосвязи определяет матрица A коэффициентов прямых затрат

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\cdot m & 0{,}1\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1\cdot n\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix},$$

в которой число a_{ij}, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца равно x_{ij}/X_j, где x_{ij} – поток средств производства из i-й отрасли в j-ю, а X_j – валовой объем продукции j-й отрасли (все объемы продукции выражаются в единицах стоимости).

Задан также вектор $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1000\\ 500+100n\\ 400+100m\end{pmatrix}$ объемов конечной продукции.

15.2.1. Составить уравнения межотраслевого баланса.

15.2.2. Решить систему уравнений межотраслевого баланса, то есть найти объемы валовой продукции каждой отрасли X_1, X_2, X_3, обеспечивающие потребности всех отраслей и изготовление конечной продукции Y. (Расчеты рекомендуется производить с точностью до трех знаков после запятой).

15.2.3. Составить матрицу X потоков средств производства x_{ij}.

15.2.4. Определить чистую продукцию каждой отрасли $P_j = X_j - \sum_{i=1}^{3} x_{ij}.$

15.2.5. Результаты расчетов оформить в виде таблицы межотраслевого баланса:

потребляющие отрасли / производящие отрасли	I	II	III	конечный продукт	валовой продукт
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	X_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	X_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	X_3
общий доход	P_1	P_2	P_3		
валовой продукт	X_1	X_2	X_3		

СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. *Белов Б. А.* Сборник контрольных заданий по курсам высшей математики и математических методов в экономике для студентов-заочников всех специальностей / Под ред. д.ф.м.н., проф. К. А. Самарова. – М: Изд-во МГУ сервиса. 2000.
3. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
4. *Гмурман В. Е.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая школа, 1980.
5. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1980.
6. *Данко П. Е.*, *Попов А. Г.*, *Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1980.
7. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.
8. *Ильин В. А.*, *Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
9. *Краснов М. Л.*, *Киселев А. И.*, *Макаренко Г. Н.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
10. *Красс М. С.* Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998.
11. *Кузнецов Ю. Н.*, *Кузубов В. И.*, *Велощенко А. Б.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
12. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – 14-е изд. испр. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2000.
13. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1978.
14. *Сдвижков О. А.* Математика на компьютере: Maple 8. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003.
15. *Солодовников А. С.*, *Бабайцев В. А.*, *Браилов А. В.*, *Шандра И. Г.* Математика в экономике: Учебник: в 2-х ч. – М.: Финансы и статистика, 1999.
16. *Четыркин Е. М.*, *Калихман И. Л.* Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.
17. *Шапкин А. С.*, *Мазаева Н. П.* Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Шапкин Александр Сергеевич,
Шапкин Виктор Александрович

ЗАДАЧИ
по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007399.06.09 от 26.06.2009 г.

Подписано в печать 28.01.2010. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Печ. л. 27,0.
Тираж 2000 экз. (1-й завод 1—500 экз.) Заказ №

Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732.
Для писем: 129347, Москва, п/о И-347;
Тел./факс: 8 (499) 182-01-58, 182-11-79, 183-93-01.
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис;
http://www.dashkov.ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ»,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел.: 554-21-86