

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени В. Г. КОРОЛЕНКО»

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ  
АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА  
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

*Учебно-методическое пособие*

Учебное электронное издание  
на компакт-диске

Авторы-составители  
**О. Н. Чупракова, Н. В. Леонтьева**

Глазов  
ГГПИ  
2019

© Чупракова О. Н., 2019  
© Леонтьева Н. В., 2019  
© ФГБОУ ВО «Глазовский государственный  
педагогический институт имени В. Г. Короленко», 2019

**ISBN 978-5-93008-288-3**

УДК 372.851  
ББК 74.262.21  
М 54

*Рекомендовано к изданию  
научно-методическим советом  
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный  
педагогический институт имени В. Г. Короленко»  
в качестве учебно-методического пособия.  
Протокол № 9 от 26.02.2019 г.*

Рецензент: *И. В. Владыкина*, канд. пед. наук, доцент, декан факультета информатики, физики и математики, ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко»

Авторы-составители:

*О. Н. Чупракова*, канд. пед. наук, ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко»,

*Н. В. Леонтьева*, канд. пед. наук, ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко»

**М 54 Методика обучения алгебре и началам анализа в средней школе :** учебно-методическое пособие [Электронный ресурс]. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

В предлагаемом учебно-методическом пособии для студентов направления подготовки «Педагогическое образование» профиля «Математика» рассматривается содержание курса методики обучения алгебре в 7–9 классах и алгебре и началам анализа в 10–11 классах. Приводятся планы лекций, задания к ним и вопросы для самоподготовки. В конце учебно-методического пособия приведено групповое задание для самостоятельной работы студентов.

Системные требования: процессор с тактовой частотой 1,3 ГГц и выше; 256 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 2000/XP/7/8/10; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-х и выше; мышь.

© Чупракова О. Н., 2019

© Леонтьева Н. В., 2019

© ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко», 2019

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ  
АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА  
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

*Учебно-методическое пособие*

Учебное электронное издание  
на компакт-диске

Авторы-составители  
**Ольга Николаевна Чупракова,  
Наталья Владимировна Леонтьева**

Технический редактор, корректор *Л. В. Ларионова*  
Оригинал-макет: *К. В. Белинская*

Подписано к использованию 10.06.2019. Объем издания 2 Мб.  
Тираж 8 экз. Заказ № 1849 – 2019.

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт  
имени В. Г. Короленко»

427621, Россия, Удмуртская Республика, г. Глазов, ул. Первомайская, д. 25  
Тел./факс: 8 (34141) 5-60-09, e-mail: izdat@mail.ru

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Общие вопросы методики обучения алгебре в школе

Числа и вычисления

Выражения и преобразования

Уравнения и неравенства

Функции и их графики

Комбинаторика, теория вероятностей, статистика в школе

Линия начал анализа

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Групповое задание «Логико-математический анализ темы  
школьного курса»

Список рекомендованных источников информации

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач, решаемых в современных педагогических вузах, является обеспечение подготовки кадров высокой степени квалификации, владеющих всеми необходимыми компетенциями, готовыми к постоянному самосовершенствованию. Составной частью такой подготовки является методическая подготовка будущего учителя, в первую очередь, при изучении методики обучения математике. Основными целями освоения данной дисциплины являются: изучение теоретических основ обучения математике; введение студентов в преподавательскую деятельность, приобщение их к проблемам, возникающим в процессе обучения математике; знакомство студентов с практическим опытом преподавания математики в школе.

Данное учебно-методическое пособие является составной частью учебно-методического комплекса «Методика обучения математике», соответствует программе дисциплины и содержит как теоретический материал, так и большое количество развивающих заданий для студентов. Основное содержание направлено на изучение частной методики обучения математике.

В курсах алгебры основной школы и алгебры и начал анализа средней школы можно выделить следующие содержательно-методические линии: «Числа и вычисления», «Выражения и преобразования», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Теория вероятности и математическая статистика», «Начала анализа».

Каждый параграф данного учебно-методического пособия раскрывает методику обучения одной содержательно-методической линии и включает в себя краткое содержание лекций, практические задания и вопросы для самоподготовки.

Пособие может быть использовано во время практических занятий по методике обучения математике, а также для самостоятельной работы студентов, что предполагает: просмотр краткого содержания лекции накануне занятия, выполнение практических заданий, подготовка ответов на вопросы самоподготовки, выполнение группового задания.

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

### МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В ШКОЛЕ

#### *Краткое содержание лекции*

#### **Специфика обучения алгебре в 7–9 классах**

1. Абстрактность содержания. При усвоении абстрактных алгебраических понятий значительное внимание следует уделять наглядному представлению изменения зависимостей величин, широкому использованию различных иллюстраций при решении практических задач, опоре на арифметические примеры при усвоении абстрактных алгебраических понятий.

2. Терминология и символика. В математике часто применяют одинаковые способы для записи выражений, имеющих различный смысл, а также различные обозначения для одних и тех же понятий, что требует отдельной работы по усвоению алгебраической терминологии и символики.

3. Алгоритмичность алгебры. Алгебра – наиболее алгоритмизированный раздел математики. Необходимо совмещать алгоритмизацию материала и умение мыслить нестандартно. Предлагать задачи, в которых нерационально использовать алгоритмы, задачи с многовариантными условиями, избегать однозначности формулировок. Желательно научить обучающихся применять известные алгоритмы в новых, незнакомых ситуациях.

4. Национальная особенность – просмотр информации слева направо, поэтому учащиеся гораздо чаще используют теоремы, тождества слева направо, чем справа налево.

5. Характер изложения материала. Дедуктивность изложения материала не согласуется с возрастными особенностями учащихся. В процессе обучения алгебре важную роль должен играть конкретно-индуктивный метод: рассмотрение примеров, задач с конкретным содержанием, приводящих через обобщение к новым понятиям и правилам.

6. Отсутствие мотивации. Неосознанность целей изучения темы и математики в целом, а также малое количество жизненных ситуаций,

вызывающих личную заинтересованность учащихся, приводят к слабой сформированности мотивации изучения математики.

### Особенности изучения алгебры в 10–11 классах

1. Более высокий уровень абстракции и логической организации изучаемого материала.

2. Осуществляется переход к дедуктивному методу обучения, изучение математики на уровне методов (дифференциальное исчисление, векторный и координатный методы).

3. Происходит знакомство учащихся с фундаментальными понятиями математики (действительное число, предел последовательности, производная функции и т. д.).

4. Завершается изучение основных содержательно-методических линий школьного курса математики, обобщается и систематизируется пройденный материал. Появляются и новые линии, например, линия элементов анализа.

5. Средствами математики обеспечивается процесс формирования естественнонаучной картины мира, происходит усиление прикладной направленности школьного курса математики. Математический аппарат широко используется в смежных дисциплинах.

6. Содержание курса алгебры ориентировано на подготовку к государственной итоговой аттестации, на продолжение математического образования на различных уровнях высшей школы.

### *Практические задания*

**Задание 1.** а) Какое арифметическое действие подразумевается между цифрами чисел  $5\frac{1}{2}$  и  $5\sqrt{2}$  (между целой и дробной частью; между цифрой 5 и радикалом)?

б) Чем отличается понятие числа от цифры? Приведите примеры корректного и некорректного использования данных понятий.

в) Чем отличаются выражения  $4 - 2 + 1$  и  $4 - (2 + 1)$ ?

г) Какой знак стоит между частями выражения  $\sin x$  ( $\sin$  и  $x$ )?

**Задание 2.** Приведите примеры наглядной иллюстрации абстрактного материала.

**Задание 3.** Приведите пример задачи, в решении которой нерационально использовать алгоритм, или задачи с нестандартной формулировкой, или задачи с многовариантным условием.

**Задание 4.** Разработайте фрагмент урока введения новой темы конкретно-индуктивным методом.

**Задание 5.** Приведите примеры жизненных ситуаций, которые можно использовать на этапе мотивации с целью вызвать личную заинтересованность учащихся.

**Задание 6.** Приведите примеры применения математики в смежных дисциплинах, технике, производстве.

**Задание 7.** Изучите материалы государственной итоговой аттестации (демоверсию, кодификатор, спецификацию). Какие знания и умения обучающихся проверяются на экзаменах? Охарактеризуйте количество и типы заданий, критерии оценивания. В чем заключаются особенности экзаменационных заданий?

### *Вопросы для самоподготовки*

1. Особенности обучения математике в начальной школе (1–4 классы).
2. Основные задачи курсов арифметики и алгебры в средней общеобразовательной школе.
3. Основные учебники и учебные пособия для учащихся по алгебре для основной и средней школы.
4. Психолого-педагогические особенности подростков и закономерности изучения содержательно-методических линий школьного курса математики.



## ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

Число – одно из первых и основных понятий математики. В течение тысячелетий развивалось и обобщалось понятие числа. В сознании учащихся этот путь в некоторой степени повторяется.

$N \subset Z \subset Q \cup I \subset R \subset C$  – логическая схема расширения понятия числа.

Натуральные числа – числа, используемые при счете.

Целые числа – натуральные числа, 0 и отрицательные числа.

Рациональные числа – числа вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z, n \in N$ , или числа, которые можно представить в виде бесконечной периодической дроби.

Иррациональные числа – бесконечные десятичные непериодические дроби (числа, которые невозможно представить дробью вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z, n \in N$ ).

Действительные числа – бесконечные десятичные дроби (представляют собой объединение множества рациональных и иррациональных чисел).

Комплексные числа – числа вида  $a + bi$ , где  $a, b \in R, i$  – мнимая единица,  $i^2 = -1$ .

#### **Место чисел и вычислений в программе и учебниках**

##### **1 этап. Пропедевтический (подготовительный)**

1–4 классы: счет, натуральный ряд, число 0, величины, измерения, приемы решения задач, запись и чтение чисел, знаки, сравнение, доли, правила устных и письменных вычислений.

##### **2 этап. Основной**

5–6 классы: натуральные числа, знаки, решение задач, дробные числа, проценты, калькулятор, делимость натуральных чисел, обыкновенные дроби, пропорции, положительные и отрицательные числа.

### **3 этап. Завершающий**

7–11 классы: степень с натуральным показателем, приближенные вычисления, квадратные корни, иррациональные числа, числовые неравенства и их свойства, степень с целым показателем, степень с рациональным показателем, корень  $n$ -й степени, степень с иррациональным показателем, логарифмические числа.

#### **Цели изучения чисел и вычислений в школе**

1. Формирование у учащихся знаний о числах и действиях с ними, вычислительных умений и их использование для решения задач.
2. Знакомство учащихся с элементами финансовой математики, применение в работе электронных средств вычислений.
3. Формирование алгоритмической и вычислительной культуры, в том числе устного счета.

#### **Основные типы математических задач**

1. Выполнить вычислительные действия.
2. Вычислить значение числового выражения.
3. Решить текстовую задачу.
4. Выполнить приближенные вычисления.

#### **Специальные приемы и методы обучения**

1. Формирование понятия натурального числа начинается в начальной школе, в 5 классе – систематизируется и расширяется. Понимание того, что любое натуральное число может быть изображено единственной точкой на координатном луче, но не каждой точке координатного луча соответствует натуральное число, приводит к необходимости введения новых чисел.

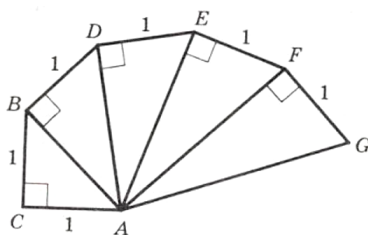
2. Отрицательные числа вводятся на наглядной основе: графическое представление точки на оси; изображение температуры на температурной шкале; аналогия с наличными деньгами (доходом или имуществом) и долгом; изменение уровня воды в море; отрицательные этажи подземной парковки; время до н. э.; перерасход по кредитной карте, по тарифу телефона («ушли в минус»).

Действия с отрицательными числами можно объяснить и на житейском уровне: например, друг моего друга – мой друг; враг моего друга – мой враг; друг моего врага – мой враг; сумма двух долгов есть долг; сумма двух имуществ есть имущество; произведение двух долгов или имуществ есть имущество. Для сравнения отрицательных и положительных чисел используется координатная прямая.

3. Формирование понятия дроби (обыкновенной) начинается с умения находить доли при делении какой-либо величины на несколько равных частей. Здесь используются упражнения на умение показывать и называть доли отрезка, круга, прямоугольника, треугольника. Большое значение имеет координатный луч, он используется для сравнения чисел и для изучения основного свойства дроби.

Десятичные дроби – это частный случай обыкновенных дробей (когда знаменатель дроби равен  $10^n$ ), он рассматривается как способ записи дробей со знаменателем  $10^n$ . Запись десятичных дробей составляет продолжение нумерации целых чисел («вправо»), что обеспечивает большую доступность их введения. Техника операций с десятичными дробями аналогична действиям с целыми числами, поэтому проще, чем с обыкновенными дробями.

4. Для введения иррациональных чисел обычно используют следующие задачи: 1) Найти сторону квадрата, площадь которого равна 2; 2) решить уравнение  $x^2 = 2$ ; 3) измерить длину отрезка. Геометрически построить иррациональные числа можно с использованием теоремы Пифагора (рис.).



### Практические задания

**Задание 1.** Решите задачи: а) Шестизначное число оканчивается на 7. Если переставить цифру 7 в начало числа, то получится число в 5 раз больше первоначального. Найти первоначальное число.

б) Мальчик написал на бумажке число 86 и говорит своему товарищу: «Не производя никакой записи, увеличь это число на 12 и покажи мне ответ». Недолго думая, товарищ показал ответ. А вы это сделать сумеете?

в) Укажите рациональные и иррациональные числа:  $\frac{1}{7}$ ; 0; 0,25;  $-2,(3)$ ; 0,818118111...; 217;  $\pi$ .

**Задание 2.** Разделите вышеперечисленные цели изучения чисел и вычислений в школе на три группы – образовательные, воспитательные, развивающие цели. Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 3.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).























**Задание 4.** Ответьте на вопрос задачи: Вы собрались купить новые джинсы. Их продают со скидкой 20 % от цены 50\$, но вам также придется заплатить 8 % налога от продаж. Продавщица заговорщически предлагает сэкономить ваши деньги и сначала посчитать налог, а затем 20-процентную скидку от полученной суммы. Согласитесь ли вы?

**Задание 5.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

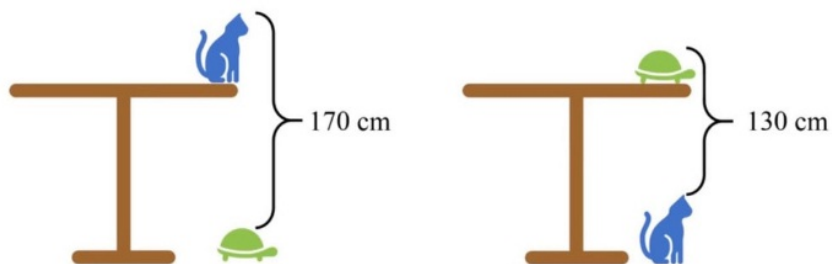
**Задание 6.** Если умножить число 111 111 111 само на себя, то получится интересное число 12 345 678 987 654 321. Сформулируйте исследовательскую задачу на этом материале.

**Задание 7.** Умножьте число 259 на ваш возраст и на 39. Что получилось? Приведите примеры других занимательных арифметических заданий, арифметических фокусов (с днями недели, днем рождения, номером паспорта, номером денежной купюры и т. д.), арифметических софизмов.

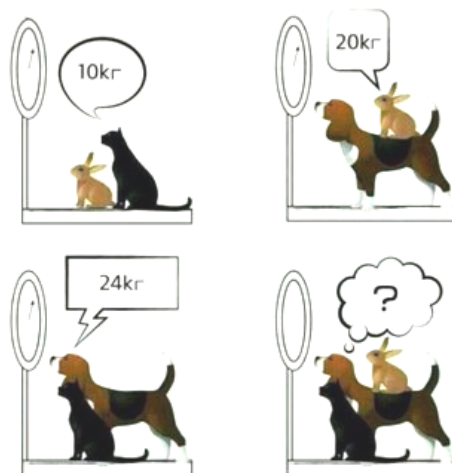
**Задание 8.** Решите задачи:

 ÷  = 1	 +  +  = 21
 ×  ×  = 64	 +  +  = 19
 = 	 +  +  = 15
 +  +  = ?	 +  ×  = ?

**Задание 9.** а) Вычислите высоту стола, учитывая данные на рисунке.



б) Сколько будут весить все животные вместе: заяц, кошка и собака?



*Вопросы для самоподготовки*

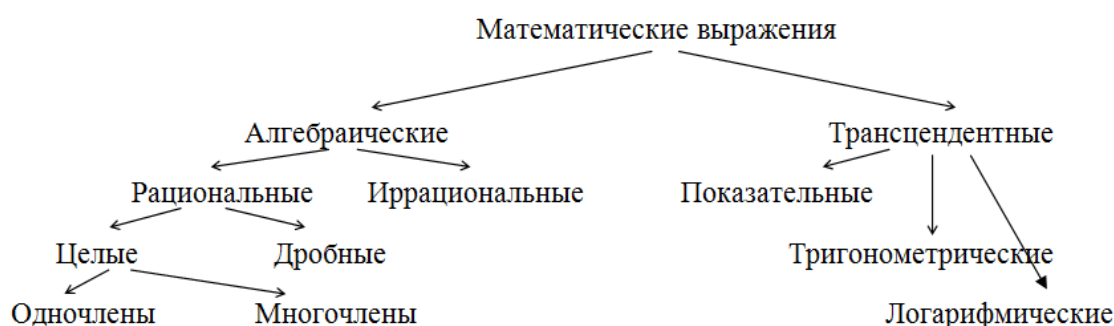
1. Приемы устного счета.
2. Перечислите основные сведения о числах и операциях над ними, изучаемые в курсе начальной школы.
3. Методика изучения натуральных и дробных чисел в 5–6 классах.
4. Последовательность и особенности изучения обыкновенных и десятичных дробей.
5. Два основных подхода к введению отрицательных чисел: сравнительная характеристика (формально-логический – невыполнимость операции вычитания на множестве  $N$ ; реально-конкретный – рассмотрение величин, изменяющихся в двух противоположных направлениях).
6. Разные определения понятия рационального числа.
7. Основные подходы к введению иррациональных чисел.
8. Понятие действительного числа в школьном курсе математики.
9. Знакомство обучающихся с комплексными числами: основные понятия, особенности введения, их место в системе знаний школьников о числах.
10. История развития и становления понятия числа.

## ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Краткое содержание лекции*

### Основные понятия темы

Алгебраическое выражение – это числа, буквы, соединенные знаками алгебраических действий и скобками, указывающими порядок действий. (Основные классы алгебраических выражений приведены на схеме.)



Тождество (тождественно равные выражения) – равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Тождественное преобразование – замена одного алгебраического выражения тождественно равным ему алгебраическим выражением.

### Тождественные преобразования выражений, изучаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа

Вид выражения	Преобразования
Одночлены	Умножение, деление, возведение в степень
Многочлены	Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, разложение на множители, приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, умножение и деление по формулам сокращенного умножения
Дробные	Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, сокращение дробей, приведение дробей к общему знаменателю
Иррациональные	Умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, внесение (вынесение) под (из-под) знак (-а) радикала, уничтожение иррациональности в знаменателе и числителе дроби
Логарифмические	Нахождение логарифма выражения, нахождение выражения по его логарифму, логарифмирование
Тригонометрические	Алгебраические преобразования рациональных и иррациональных тригонометрических выражений, преобразование по формулам тригонометрии

### **Место тождественных преобразований в программе и учебниках**

5–6 классы: приведение подобных слагаемых и раскрытие скобок.

7 класс: вынесение общего множителя за скобки, умножение многочлена на многочлен, разложение на множители способом группировки, доказательство тождеств, формулы сокращенного умножения, приведение к общему знаменателю.

8 класс: преобразование рациональных выражений; вынесение множителей из-под знака корня; внесение множителей под знак корня; преобразование выражений, содержащих квадратные корни; выделение квадрата двучлена; свойства степени с целым показателем.

9 класс: разложение квадратного трехчлена на множители; свойства арифметического корня  $n$ -й степени; преобразование выражений, содержащих степени с дробным показателем; преобразования тригонометрических выражений.

10–11 классы: тождественные преобразования тригонометрических, показательных, логарифмических, степенных выражений.

### **Цели изучения выражений и преобразований**

Образовательная: формирование техники и культуры тождественных преобразований и умения ее использовать для решения других задач алгебры и ее приложений в арифметике и началах анализа.

Воспитательная: осознание учащимися буквенного исчисления как формально-оперативного аппарата математики (формирование абстрактного мышления и мировоззрения).

Развивающая: развитие логического и алгоритмического мышления.

### **Основные типы математических задач**

1. Упростить выражение (в том числе и дробно-рациональное).



2. Найти числовое значение выражения наиболее рациональным способом.
3. Разложить выражение на множители.
4. Доказать тождество (неравенство).

### Специальные приемы и методы обучения

#### 1. Этапы работы с тождественным преобразованием

1.1. Мотивация. (Почему мы вводим данное тождественное преобразование?)

1.2. Знакомство с алгоритмом (выведение алгоритма). Запись последовательности действий одним из способов: правило, формула, словесное описание, блок-схема, образец пояснения. Его непосредственное применение.

1.3. Применение нового алгоритма совместно с другими уже известными.

1.4. Решение круга задач с использованием в том числе нового алгоритма.

2. Цикл упражнений делится на две части. К первой части относятся задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Ученики должны видеть все производимые операции, поэтому все упражнения выполняются письменно и с комментированием каждого шага (например, представить в виде произведения  $(121 - x^2)$ , раскрытие скобок).

Вторая часть упражнений связывает изучаемое тождество с различными приложениями. Упражнения разбросаны по разным темам (например, решение уравнений и неравенств, доказательство тождеств).

3. Чтение алгебраических выражений разными способами (развитие математической речи). Например, выражение  $a^3 + b^3$  можно прочитать:

- «сумма кубов чисел  $a$  и  $b$ »;
- « $a$  в кубе плюс  $b$  в кубе»;
- «сумма третьих степеней величин  $a$  и  $b$ ».

4. Геометрическая иллюстрация формул (основных тождеств) и их доказательств.

5. Мнемонические приемы – стихи, смешные картинки, схемы, аббревиатуры...

Для учащихся старшей школы можно использовать следующие приемы логического и осмысленного запоминания формул:

- расположение формул группами;
- запоминание одной ключевой формулы и самостоятельный вывод из нее остальных;

- словесные формулировки формул и правил.

6. Решение задач занимательного характера.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Определите вид выражения – алгебраическое или трансцендентное: а)  $\frac{a}{5} + 3 + \lg 10 - 2x$ ; б)  $\log\left(\frac{a}{5} + 3 - 2x\right)$ ?

**Задание 2.** Приведите примеры использования тождественных преобразований выражений при решении уравнений, неравенств, при изучении функций.

**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** Приведите примеры геометрической иллюстрации формул и их доказательств.

**Задание 6.** Приведите примеры мнемонических приемов по данной теме.

**Задание 7.** Приведите примеры задач занимательного или нестандартного характера по данной теме. Например, «Подставьте вместо многоточия одночлены так, чтобы выполнялось равенство  $(3x + \dots)^2 = 9x^2 + 6ax + \dots$ ».

**Задание 8.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 9.** Выполните задания: а) Разложите на множители:

$$a^2 + b^2 - (c^2 + 2ab);$$

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4.$$

б) Найдите значение выражения:

$$0,789^3 + 3 \cdot 0,789 \cdot 0,211 + 0,211^3;$$

$$\sqrt{13}\sqrt{13 + \sqrt{156}}\sqrt{13 + \sqrt{156 + \sqrt{156}}}\sqrt{13 - \sqrt{156 + \sqrt{156}}}.$$

в) Найдите трехзначное число, записанное в десятичной системе в виде  $abc$ , равное полусумме чисел  $bca$  и  $cab$ . (Ответ: 407, 518, 629, 370, 481, 592, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.)

г) Приведите сумму к общему знаменателю и сократите получившуюся

дробь 
$$\frac{m^2 - mn}{m^2n + n^3} - \frac{2m^2}{n^3 - mn^2 + m^2n - m^3}.$$

### *Вопросы для самоподготовки*

1. Основные различия тождественных и равносильных преобразований.
2. Методические особенности изучения преобразований числовых выражений в 5–6 классах.
3. Формулы сокращенного умножения. Их использование в преобразованиях выражений.
4. Изучение преобразований дробно-рациональных выражений.
5. Изучение преобразований иррациональных выражений.
6. Изучение преобразований степенных выражений.

7. Методика изучения преобразований выражений, содержащих тригонометрические выражения.

8. Методика изучения преобразований выражений, содержащих логарифмы.

## УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

Уравнение; неравенство с переменной; корень уравнения; решение неравенств с переменной; система и совокупность уравнений и неравенств; уравнение с несколькими неизвестными.

Различные трактовки понятия «уравнение (с одной переменной)»:

*Уравнение* (с одной переменной):

– это равенство двух выражений, в котором некоторые буквы считаются неизвестными, а остальные известными;

– равенство, справедливое при некоторых значениях неизвестной (переменной)  $x$ ;

– равенство значений двух функций  $f(x) = g(x)$ ;

– вопросительное предложение: существуют ли такие значения переменной, при которых функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют равные числовые значения?

– предложение в виде равенства функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , относительно которого поставлена задача: найти такие значения переменной  $x$ , при которых это предложение истинно.

*Область определения уравнения* – это множество значений переменной, для которых функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены.

*Корнем уравнения* называется каждое значение переменной  $x$  из области определения уравнения, при котором высказывание  $f(x) = g(x)$  истинно.

*Решить уравнение* – значит, найти множество всех его корней.

Два уравнения, множество корней которых совпадают, называют *равносильными* (включая случай, когда уравнения решений не имеют).

Для неравенств  $f(x) < g(x)$  или  $f(x) > g(x)$  определения аналогичны.

Виды уравнений и неравенств различаются в зависимости от вида функций  $f(x)$  и  $g(x)$ :

1. Целые: линейные ( $ax + b = 0$ );  
квадратные ( $ax^2 + bx + c = 0$ );  
высших степеней ( $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ).
2. Дробные.
3. Иррациональные.
4. Показательные ( $a^x = b$ ).
5. Логарифмические ( $\log_a x = b$ ).
6. Тригонометрические ( $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ ).

Для каждого вида уравнений и неравенств можно составить уравнения и неравенства с модулем и с параметром.

### Место уравнений и неравенств в программе и учебниках

Класс	Уравнения	Неравенства
5–6 классы	Простейшие линейные уравнения, решение текстовых задач с помощью уравнений	
7 класс	Линейные уравнения и их системы, решение текстовых задач	
8 класс	Квадратные уравнения, решение текстовых задач	Линейные неравенства с одной переменной, система линейных неравенств
9 класс	Уравнения 3-й и 4-й степеней, система уравнений 2-й степени, решение текстовых задач с помощью составления систем	Неравенства 2-й степени, метод интервалов
10 класс	Тригонометрические уравнения	Простейшие тригонометрические неравенства
11 класс	Показательные, логарифмические, степенные уравнения и их системы	Показательные, логарифмические, степенные неравенства и их системы

### **Цели изучения уравнений и неравенств**

**Образовательные:** изучение основных методов решения уравнений, неравенств и их систем, формирование представлений об уравнениях и неравенствах как о математическом аппарате для решения различных задач математики и других областей знаний.

**Развивающие:** развитие познавательных процессов у обучающихся, математической речи, умения учиться (способностей к самообразованию), алгоритмического мышления, элементов творческой деятельности, пространственного воображения (например, при решении графическим методом).

**Воспитательные:** развитие интереса к математике, воспитание общей культуры (гуманистической, экологической и т. д. через содержание текстовых задач), культуры общения, чувства прекрасного, подготовка к выбору профессии.

### **Основные типы математических задач**

1. Решить уравнение (неравенство, их систему или совокупность).
2. Решить текстовую задачу алгебраическим методом (т. е. с помощью уравнения, неравенства, системы, совокупности).

### **Специальные приемы и методы обучения**

1. В 5–6 классах неизвестные компоненты уравнения отыскиваются на основе правил выполнения действий и их свойств. Например, чтобы найти неизвестное слагаемое, нужно из суммы вычесть известное слагаемое.

2. Знакомство с графическим методом решения уравнений создает наглядное представление, что облегчает дальнейшее усвоение уравнений.

3. Для простейших уравнений и неравенств полезно записывать (создавать, запоминать) алгоритмы их решения (планы, блок-схемы). Для более сложных уравнений используют приемы решения уравнений.

4. Необходимо видеть (распознавать) в более сложных задачах простейшие уравнения и неравенства, определять их тип (например, линейное, квадратичное) и применять для их решения изученные алгоритмы.

5. Создавать нестандартные ситуации в задании. Например, не просто решить уравнение, а «Найти середину интервала, который является решением данного неравенства...», «Найти корни тригонометрического уравнения... принадлежащего промежутку...» и т. п.

6. Для облегчения решения текстовых задач с помощью составления уравнений (неравенств) применяют графическую запись условия задачи: схема, таблица, иллюстрация.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Приведите примеры уравнений каждого вида согласно представленной классификации.

**Задание 2.** Есть ли в учебниках разных авторских коллективов отдельные разделы, посвященные уравнениям и неравенствам с модулем и с параметром? Укажите учебник, класс и тему.

**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий (уравнение, неравенство, система, совокупность) каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** Составьте алгоритм решения квадратных уравнений. Всегда ли возможно и целесообразно использовать алгоритмы при обучении учащихся



решению уравнений различных видов? Приведите примеры положительных и отрицательных последствий составления алгоритмов для решения уравнений.

**Задание 6.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 7.** Выполните задания:

а) Решите уравнение:  $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = x^2 - 1$ .

б) Решите неравенство:  $\frac{x}{|x|} \leq \sqrt{9-x^2}$ .

в) Решите систему неравенств: 
$$\begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0 \\ 2-7x \leq 14-3x. \end{cases}$$

г) Маша спустилась по движущемуся вниз эскалатору за 36 секунд. По неподвижному эскалатору с той же скоростью относительно него она спустится за 1 минуту 3 секунды. За сколько секунд она спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора? (Ответ: 84 секунд.)

**Задание 8.** Выполните задания, встречающиеся на государственной итоговой аттестации:

а) При сближении источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала  $f_0 =$

140 Гц и определяется следующим выражением:  $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$  (Гц), где  $c$  – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а  $u = 9$  м/с и  $v = 7$  м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости  $c$  (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике  $f$  будет не менее 145 Гц?

б) Два тела массой  $m = 9$  кг каждое движутся с одинаковой скоростью  $v = 10$  м/с под углом  $2\alpha$  друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением

$Q = mv^2 \sin^2 \alpha$ . Под каким наименьшим углом  $2\alpha$  (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 450 джоулей?

в) Для обогрева помещения, температура в котором равна  $T_{\text{п}} = 20$  °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой  $T_{\text{в}} = 88$  °С. Расход проходящей через трубу воды  $m = 0,4$  кг/с. Проходя по трубе расстояние  $x$  (м), вода охлаждается до температуры  $T$  (°С), причем  $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$  (м), где

$c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$  – теплоемкость воды,  $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}$  – коэффициент теплообмена, а

$\alpha = 1,2$  – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы равна 64 м?

г) При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , где  $l_0 = 50$  м – длина покоящейся ракеты,  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с – скорость света, а  $v$  – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 48 м? Ответ выразите в км/с.

д) На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле:  $T = \rho g l^3 - mg$ , где  $l$  – линейный размер аппарата в метрах,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения (считайте  $g = 10$  Н/кг), а  $m = 25$  кг – масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше, чем 1 000 Н? Ответ выразите в метрах.

е) Расстояние между городами А и В равно 580 км. Из города А в город В со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В вышел со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Через сколько часов после выезда второго автомобиля автомобили встретятся?

ж) Расстояние между пристанями А и В равно 60 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним вышла моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

### *Вопросы для самоподготовки*

1. Изучите вопросы равносильности уравнений, неравенств и их систем в школьном курсе математики.
2. Назовите общие методы решения уравнений и неравенств разных видов. Приведите примеры решения конкретных уравнений.
3. Назовите общие методы решения неравенств разных видов. Приведите примеры решения конкретных неравенств.
4. Назовите методы решения уравнений и неравенств, специфические для разных видов. Приведите примеры решения конкретных уравнений и неравенств.
5. В чем различие между графическим решением уравнения и графическим истолкованием решения уравнения. На каком конкретном материале учащимся средней школы можно показать силу графического метода решения уравнения.
6. Нестандартные приемы решения уравнений.
7. Методика обучения доказательству неравенств, приемы доказательства.
8. Обучение решению систем неравенств и систем уравнений.

9. Обобщенные приемы, алгоритмы решения уравнений и неравенств (по О. Б. Епишевой).
10. Способы проверки решения уравнений и неравенств.
11. Решение текстовых задач с помощью составления уравнения (или системы уравнений).
12. Методика изучения линейных уравнений с двумя переменными.

## ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

Функция – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью.

Существует несколько определений понятия «функция»:

- неопределяемое (первичное) понятие математического анализа;
- отображение одного числового множества  $X$  на другое числовое множество  $Y$  (понятие отображения первично);
- любое отношение, установленное между элементами множеств  $X$  и  $Y$ ;
- некоторое соответствие между элементами множеств  $X$  и  $Y$ ;

Обозначается  $f: X \rightarrow Y$ , где  $f$  – функция или закон соответствия, множество  $X$  – область определения  $D(f)$ , множество  $Y$  – множество значений функций  $E(f)$ .

Если функция  $f$  ставит в соответствие элементу  $x$  элемент  $y$ , а функция  $g$  – элементу  $y$  элемент  $z$ , то говорят, что  $z = g(f(x))$  есть сложная функция (функция от функции).

Функция может быть задана одним или несколькими аналитическими выражениями, словесным (вербальным) определением, таблицей, графиком и т. д.

### **Место функций в программе и учебниках**

#### **1 этап. Пропедевтический**

1–4 классы: примеры зависимости величин.

5 класс: изображение натуральных чисел на числовом луче, вычисление по формулам.

6 класс: понятие о прямой и обратной пропорциональности величин; положительные и отрицательные числа; прямоугольная система координат; координаты точки; примеры графиков.

### **2 этап. Основной (изучение функций элементарными средствами)**

7 класс: понятие функции; способы задания функции; график функции; функция  $y = kx + b$  и ее график; функции  $y = x^2$  и  $y = x^3$ .

8 класс: функция  $y = k/x$  и ее график; функция  $y = \sqrt{x}$ , ее свойства и график.

9 класс: квадратичная функция  $y = ax^2 + bx + c$ , ее свойства и график; возрастание и убывание функции; четность и нечетность функции; простейшие преобразования графиков.

### **3 этап. Завершающий (исследование функций с помощью производной)**

10 класс: тригонометрические функции, их свойства и графики; периодичность функции; систематизация сведений о функциях и графиках; применение производной к исследованию функций.

11 класс: показательная, логарифмическая и степенная функции.

### **Цели изучения функций в школе**

Образовательная: осознание учащимися на том или ином уровне понятия функции как одной из основных математических моделей, позволяющих описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, применять методы исследования функций.

Развивающая: развитие функционального стиля мышления, мировоззрения, раскрытие общенаучной и общекультурной роли математики.

Воспитательная: эстетическое и экологическое воспитание, профессиональная ориентация учащихся.

### Основные типы математических задач

1. Исследовать функцию (более простые задачи – на исследование отдельных свойств функций).
2. Построить график функции на основе исследования.

### Основные приемы и методы обучения

1. Схема изучения функций:
  - 1) Анализ конкретных задач или примеров из реальной жизни, науки, техники, приводящих к данной функции (мотивация).
  - 2) Определение рассматриваемой функции, ее запись с помощью формулы, исследование параметров, входящих в эту формулу.
  - 3) Построение графика функции, установление влияния параметров на характер графического изображения функции.
  - 4) Обучение учащихся истолкованию свойств функций на трех языках: графическом, словесном, символическом.
  - 5) Исследование основных свойств функции, исходя из ее графика (обучение чтению графиков).
  - 6) Использование полученных знаний и умений при решении задач (уравнений и неравенств).
2. Возможности ИКТ при изучении данной содержательно-методической линии.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Составьте классификацию элементарных функций.

**Задание 2.** Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий, проверяющих знание функций и их свойств. Приведите примеры заданий.

**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** а) Исследуйте поведение графика и свойств квадратичной функции в зависимости от коэффициентов (коэффициенты положительные, отрицательные, равны нулю).

б) Проведите аналогичное исследование для линейной функции.

**Задание 6.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 7.** Выполните задания:

а) Найдите область определения функции:  $y = \sqrt{6 + 3x - 9x^2}$ .

б) Найдите множество значений функции:  $y = 1 + 2 \sin 3x$ .

в) Сравните числа:  $\log_{0,2} 3$  и  $\log_{0,2} 2,5$ .

г) Выясните, возрастает или убывает функция  $y = \cos x$  на отрезке  $[3\pi; 4\pi]$ .

д) Выясните, является ли данная функция четной или нечетной:

1)  $y = x^2 + \cos x$ ; 2)  $y = x^3 - \sin x$ .

е) Найдите наименьший положительный период функции: 1)  $y = \sin \frac{x}{7}$ ;

2)  $y = 3 \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x + 1)$ .

**Задание 8.** Выполните задания с практическим содержанием:

а) Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле  $P = \frac{U^2}{R}$ ,

где  $U$  – напряжение (в вольтах),  $R$  – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите  $P$  (в ваттах), если  $R = 6$  Ом и  $U = 12$  В.

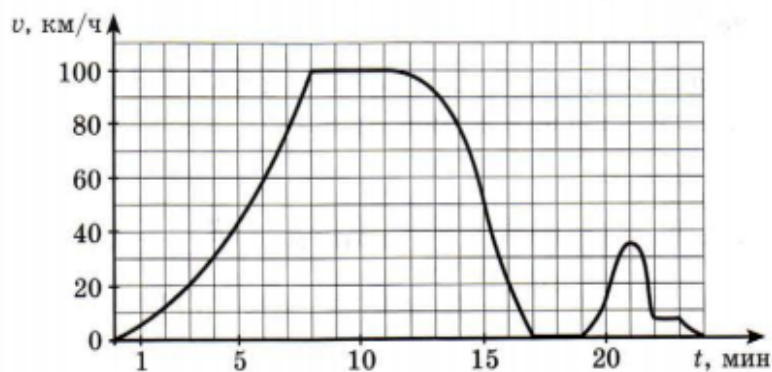
б) В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону  $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ , где  $m_0$  – начальная масса изотопа,  $t$  – время, прошедшее от начала распада,  $T$  – период полураспада в минутах. В лаборатории получили



газ, содержащий  $m_0 = 40$  мг изотопа азота-13, период полураспада которого  $T = 10$  мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 5 мг?

в) Двухпроцентный вклад в банк, равный  $a$  рублям, через  $n$  лет становится равным  $a \cdot (1,02)^n$ , а трехпроцентный вклад становится равным  $a \cdot (1,03)^n$ . Через сколько лет каждый из вкладов удвоится? Вычисления провести на калькуляторе. (Ответ: По первому вкладу примерно через 35 лет, а по второму – через 23,5 года.)

г) На рисунке изображен график изменения скорости автомобиля на протяжении его движения из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:



- 1) Когда скорость автомобиля была равна нулю?
- 2) Сколько времени добирался автомобилист из пункта  $A$  в пункт  $B$ ?
- 3) С какой максимальной скоростью двигался автомобиль?
- 4) В какие промежутки времени автомобиль двигался, а когда стоял?
- 5) В какие промежутки времени скорость автомобиля увеличивалась, уменьшалась, была постоянной?

Какие свойства функции вы использовали, чтобы ответить на эти вопросы?

### Вопросы для самоподготовки

1. Функциональная пропедевтика в 5–6 классах.

2. Назовите имена математиков, внесших вклад в развитие понятия функции.
3. Почему функциональная линия объединяет другие основные линии школьного курса математики?
4. В чем заключается реализация межпредметных связей при изучении функций?
5. Методика изучения линейной функции в средней школе.
6. Методика изучения функции  $y = \frac{k}{x}$  в средней школе.
7. Методика изучения квадратичной функции в средней школе.
8. Методика изучения функции  $y = \sqrt{x}$  в средней школе.
9. Методика изучения тригонометрических функций в средней школе.
10. Методика изучения показательной и логарифмической функций в средней школе.
11. Различные случаи степенных функций в зависимости от показателя степени.
12. Что входит в схему исследования функции?
13. Преобразования графиков функций.
14. Приведите примеры функций с необычными свойствами или графиком (например, функция Дирихле).

## КОМБИНАТОРИКА, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СТАТИСТИКА В ШКОЛЕ

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

*Испытанием* называется реализация определенного комплекса условий, который может воспроизводиться неограниченное число раз.

*Результатом испытания* является событие. Простейший результат испытания называется элементарным событием (исходом).

События  $A$  и  $B$  называют *совместными*, если они могут произойти одновременно в одном испытании. События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если они никогда не могут произойти в результате одного испытания.

Пример:  $A$  – «идет дождь»,  $B$  – «на небе нет ни облачка» – несовместные.

$A$  – «Коля проиграл в шашки»,  $B$  – «Саша выиграл в шашки»,  $C$  – «Витя наблюдал за игрой» – совместные. События называют попарно несовместными, если никакие два из них не могут произойти одновременно. События образуют полную группу, если в результате испытания обязательно произойдет одно из этих событий.

*Сложным событием* называется произвольное подмножество пространства элементарных событий.

Сложное событие в результате испытания наступает тогда и только тогда, когда в результате испытаний происходят все элементарные события, составляющие сложное событие. Такие элементарные события называют благоприятствующими.

Например: испытание – подбрасывание кубика. Элементарное событие – выпадение грани с номером «1». Сложное событие – выпадение нечетной грани.

Событие бывает:

– *достоверное* – всегда происходит в результате испытания (например, после зимы наступает весна);

– *невозможное* – никогда не происходит (например, день рождения 30 февраля);

– *случайное* – может произойти или не произойти в результате испытания (например, в школе отменили занятия).

*Вероятность события  $A$*  – это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу несовместных элементарных исходов, которые образуют полную группу:  $P(A) = \frac{m}{n}$ , где  $m$  – число элементарных исходов, которые благоприятствуют  $A$ ;  $n$  – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Исходя из этого можно записать следующие три свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

*Противоположное событие* по отношению к рассматриваемому событию  $A$  – это событие, которое не происходит, если  $A$  происходит.

### **Место вероятностно-статистической линии в программе и учебниках**

5–6 классы. Существование и построение комбинаций с какими-либо заданными свойствами. Перебор возможных вариантов. Достоверное, невозможное, случайное событие. Сравнение шансов наступления случайных событий на основе интуитивных соображений, на классической, статистической основах, с помощью геометрических соображений. Представление данных. Чтение таблиц, диаграмм.

7–9 классы. Комбинаторные правила произведения и сложения. Решение комбинаторных задач на правила умножения и сложения. Эксперимент со случайными исходами, случайное событие. Операции над событиями. Частота события. Вероятность события. Вычисление вероятности наступления

случайных событий на классической, статистической, геометрической основах. Первичная обработка статистических данных. Наглядное представление статистической информации. Статистические характеристики. Статистические исследования. Статистическое оценивание и прогноз.

10–11 классы. Размещения, перестановки, сочетания. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Вероятностное пространство. Вероятность события. Вероятности суммы и произведения событий. Решение задач. Случайные величины и их характеристики. Понятие о законе больших чисел. В ходе изложения вопросов данной линии включаются сведения по историческому становлению и развитию изучаемых явлений.

### **Цели изучения вероятностно-статистической линии в школе**

**Образовательные:** формирование функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчеты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчет числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах.

**Развивающие:** обогащение представлений о современной картине мира и методах его исследования, формирование понимания роли статистики как источника социально значимой информации и закладывание основ вероятностного мышления, развитие умения анализировать, внимания, исследовательской деятельности.

**Воспитательные:** развитие у учащихся культуры общения, умения работать в группах, элементов ораторского искусства; способствовать развитию творческой деятельности учащихся, потребности к самообразованию.

### **Основные типы математических задач**

1. Задачи на определение вида события (подготовительные).
2. Комбинаторные задачи.
3. Вычисление вероятности события.
4. Статистические задачи.

### **Специальные приемы и методы обучения**

1. Наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений возраст 10–13 лет (это 5–7 классы). Экспериментальная работа в 5 и 6 классах по пропедевтике вероятностных представлений, проведению опытов со случайными исходами и обсуждению на качественном уровне их результатов показала, что этот не закреплённый формальными «обязательными результатами» период даёт хорошее развитие вероятностной интуиции и статистических представлений детей.

2. Желательно подбирать примеры и задачи с учётом различных интересов и возрастных особенностей развития учащихся, использовать задачи прикладного характера, анализ реальных ситуаций. Избегать утративших свою актуальность для общества примеров и задач.

3. В процессе обучения много времени отводить задачам, требующим от учащихся работы в малых группах, самостоятельного сбора данных, обобщения результатов совместной работы, проведения самостоятельных исследований, работ практического характера, постановки экспериментов, проведения небольших лабораторных работ, подготовки долгосрочных заданий, дающих детям возможность ощутить себя первооткрывателями, так как все это диктуется своеобразием вероятностно-статистического материала, его тесной связью с практической деятельностью.

4. Алгоритм решения вероятностных (стохастических) задач:
  - 1) Уясните, в чём состоит рассматриваемое в задаче испытание.
  - 2) Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условии задачи.

3) С помощью введенных обозначений выразите событие, вероятность наступления которого необходимо найти.

4) Если требуется найти вероятность суммы событий, выясните, совместны или несовместны рассматриваемые события. Если же требуется найти вероятность произведения событий, выясните, зависимы или независимы рассматриваемые события.

5) Выберите соответствующую условию задачи формулу и выполните необходимые вычисления.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Выделите основное содержание элементов комбинаторики и статистики в школьном курсе математики.

**Задание 2.** Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий вероятностно-статистической линии. Приведите примеры заданий.

**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** Экспериментальный практикум.

1) Установите, можно ли считать первую пришедшую в голову цифру от 0 до 9 случайной. Для этого, не задумываясь, быстро напишите на листке бумаги четыре первые пришедшие вам в голову цифры от 0 до 9. Затем соберите информацию со всей группы и подсчитайте, сколько раз написана каждая из цифр. Полученные данные занесите в таблицу.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота										

Анализ результатов. Если выбор носит чисто случайный характер, то все цифры должны встретиться примерно одинаковое количество раз. Например, если в классе 20 учеников, то всего получено 80 цифр. Тогда каждая цифра должна встречаться примерно 8 раз. Если цифра встречается менее 4 раз, то ее можно считать «редкой». Если цифра встретила более 12 раз, то такая цифра «частая». Пользуясь построенной таблицей, ответьте на вопросы.

а) Есть ли в таблице «частые» и «редкие» цифры?

б) Попробуйте объяснить, какие исторические явления и культурные традиции связаны с цифрами 3 и 7. А с цифрой 8?

Сделайте вывод о том, можно ли считать первую пришедшую в голову цифру случайной.

2) Проведите эксперимент с монеткой (в парах): подбросьте монету 50 раз и подсчитайте, сколько раз выпадет орел. Затем подсчитайте, сколько всеми студентами группы было проведено опытов и каково общее число выпадений орла. Сделайте вывод.

**Задание 6.** Придумайте экспериментальную работу по любой теме данной содержательно-методической линии.

**Задание 7.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 8.** Чем отличаются следующие три задачи? Решите их.

1) В соревновании участвуют 7 команд. Сколько существует вариантов распределения мест между командами?

2) В полуфинале участвовало 7 команд. Из них в финал вышли 3. Сколько различных вариантов выхода команд в финал?

3) Из 7 команд, участвующих в полуфинале, 3 команды разыграли медали: золотую, серебряную и бронзовую. Сколько различных вариантов тройки победителей существует?



**Задание 9.** Выполните задания:

а) Три первоклассника по очереди покупают воздушные шарик. Каждый из них покупает шарик одного из двух цветов: зеленого (З) или синего (С). Выпишите элементарные события этого эксперимента. Считая, что все они равновозможны, найдите вероятность каждого из них.

б) В коробке лежат 24 одинаковые авторучки. Из них 13 красные, 5 зеленые, остальные синие. Продавец наудачу достает одну авторучку. Найдите вероятности событий: «извлеченная ручка красная»; «извлеченная ручка не зеленая».

в) В школьной физической лаборатории 15 мультиметров, два из которых бракованные. Учитель наугад взял для урока 12 мультиметров. Какова вероятность того, что они все исправные?

г) Два стрелка стреляют по мишени, состоящей из трех областей. Попадание в первую область дает стрелку 3 очка, во вторую – 2 очка, в третью – 1 очко, непопадание в мишень – 0 очков. Законы распределения вероятности числа выбитых очков для каждого из стрелков заданы таблицами, где  $x$  – число очков, выбитых первым стрелком,  $y$  – вторым. Определите, какой стрелок лучше стреляет по этой мишени. (Указание: математическое ожидание случайной величины есть ее значение в среднем.)

$x_i$	3	2	1	0
$p_i$	0,5	0,1	0,2	0,2

$y_i$	3	2	1	0
$p_i$	0,3	0,55	0,1	0,05

д) В сборнике занимательных задач Я. Перельмана «Живая математика» есть рассказ «Бесплатный обед». В нем описывается случай, произошедший с десятью выпускниками, которые не могут отпраздновать окончание школы, потому что никак не решат: в каком порядке им сесть. На выручку им пришел официант, который предложил сегодня сесть, как придется, на другой день прийти и сесть по-другому – и так каждый день, пока не наступит такой день, когда они опять сядут так, как сидят сегодня. И тогда официант обещал

угостить всех бесплатным обедом. Как вы думаете, долго ли друзьям придется дожидаться бесплатного обеда?

е) В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из Италии Джованни Лучио будет выступать первым, вторым или третьим.

ж) В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что хотя бы один из спортсменов из Италии будет выступать первым, вторым или третьим.

#### *Вопросы для самоподготовки*

1. Какова роль вероятностно-статистических знаний в развитии (математической культуры) обучающихся?
2. История возникновения и развития теории вероятностей.
3. Приведите примеры применения комбинаторики, теории вероятностей, математической статистики в жизни, в других дисциплинах.
4. Перечислите особенности изучения стохастики в 5–6 классах; 7–9 классах; 10–11 классах.
5. Методика обучения решению комбинаторных задач.
6. Вычисление вероятности наступления случайных событий на классической, статистической, геометрической основах.
7. Бином Ньютона и треугольник Паскаля.
8. Как проводятся статистические исследования в ходе изучения математики?

## ЛИНИЯ НАЧАЛ АНАЛИЗА

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

Понятие производной функции является одним из важнейших понятий курса математического анализа, оно положено в основу дифференциального исчисления и служит исходной базой при построении интегрального исчисления.

*Производной функции*  $y = f(x)$ , заданной на некотором интервале  $(a; b)$ , в точке  $x$  этого интервала, называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Правила дифференцирования:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Основные направления применения производной функции: исследование функции на экстремум, отыскание наименьшего и наибольшего значений функции на интервале, отыскание промежутков возрастания/убывания и выпуклости/вогнутости функции, применение к решению физических задач, к приближенным вычислениям, к построению касательной к графику функции.

Функция  $F(x)$  называется *первообразной функции*  $f(x)$  на некотором промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка  $F'(x) = f(x)$ .

Существует три подхода к определению понятия «интеграл»:

1) интеграл – это приращение первообразной  $F$ ;

2) интеграл – это предел интегральных сумм (когда длина частичного отрезка разбиения стремится к 0);

3) интеграл – это площадь криволинейной трапеции.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \text{формула Ньютона – Лейбница.}$$

Применение интеграла: вычисление площади фигуры, ограниченной линиями, объема тела, работы переменной силы, нахождение центра масс и др.

### **Место темы в программе и учебниках**

10–11 классы: производная, геометрический смысл производной, применение производной к исследованию функций, первообразная и интеграл.

### **Цели изучения начал анализа в школе**

Образовательная: подготовить необходимый аппарат для исследования функций и построения их графиков, для изучения физики (скорость, ускорение, колебания и т. д.) и геометрии (площади поверхностей и объем геометрических тел); углубить и расширить знания по математике и их значение для изучения других наук.

Развивающая: способствовать формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, логического мышления, повышению математической культуры.

Воспитательная: воспитание культуры личности: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимание значимости математики для общественного прогресса.

### **Основные типы математических задач**

1. Найти производную функции.

2. Исследовать свойства функции с помощью производной.
3. Решение текстовых задач с помощью производной (нахождение уравнения касательной, мгновенной скорости, наибольшего значения площади или объема и т. д.).
4. Найти первообразную функции.
5. Вычислить площадь криволинейной трапеции.
6. Вычислить определенный интеграл.
7. Решение текстовых задач с помощью интеграла (на вычисление площади фигуры, ограниченной линиями, объемов тел, работы переменной силы, нахождение центра масс).

### Специальные приемы и методы обучения

1. Пропедевтика. Основная идея дифференциального исчисления состоит в представлении функции как линейной в достаточно малой окрестности. Поэтому необходимо повторение линейной функции, ее свойств и графика.
2. Введение понятия производной может происходить двумя путями: 1) вводятся понятия приращение аргумента и приращение функции и на их основе дается определение производной функции, затем показывается применение производной в задачах о мгновенной скорости движения и о проведении касательной к графику функции; 2) рассматриваются задачи, которые показывают важность предельного перехода (задача о мгновенной скорости движения, о мгновенной величине тока, о теплоемкости тела в точке, о проведении касательной к графику функции), а затем вводится определение производной функции.
3. Понятие предела функции (на интуитивном уровне) удобно ввести при изучении бесконечно убывающей геометрической прогрессии (при  $n \rightarrow \infty$  предел суммы такой прогрессии стремится к 0).
4. Задачи исследования свойств функции с помощью производной хорошо

поддаются алгоритмизации. Например, алгоритм исследования монотонности функции:

- 1) найти производную функции;
- 2) найти стационарные и критические точки;
- 3) определить знаки производной на получившихся промежутках;
- 4) опираясь на теоремы, сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах.

5. В большинстве действующих школьных учебниках порядок изучения первообразной и интеграла следующий: сначала вводится понятие первообразной, с ее помощью вычисляется площадь криволинейной трапеции, а затем переходят к понятию определенного интеграла и формуле Ньютона – Лейбница. Возможность применения первообразной и интеграла к вычислению площадей и объемов дает богатый материал для решения задач.

6. Для успешного изучения темы «Первообразная и интеграл» обучающиеся должны (с ними необходимо повторить): знать все ранее изученные функции; уметь строить графики функций; уметь читать графики; узнавать, какой функции соответствует данный график.

7. Необходимо выучить (как таблицу умножения) производные и первообразные основных элементарных функций.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Изучите по учебнику (например, учебнику Колмогорова А. Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10–11 класс) тему «Приращение функции» и выполните упражнения, представленные в учебнике по этой теме.

**Задание 2.** Вспомните и назовите формулы производной и первообразной для всех изученных функций.

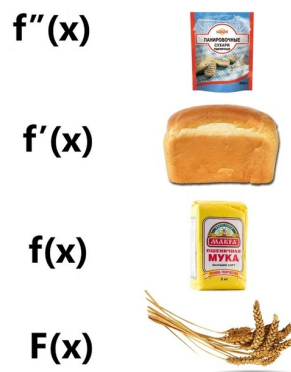
**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий по данной теме. Приведите примеры заданий.

**Задание 6.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 7.** Охарактеризуйте закономерность, представленную на рисунке. Предложите, где и как можно использовать данный рисунок на уроке.



**Задание 8.** Выполните задания:

а) Точка движется прямолинейно по закону  $s = t^2 - 4t$ .

1) Выразите скорость точки как функцию времени.

2) Вычислите скорость точки в момент времени  $t = 5$ .

3) В какой момент времени скорость была равна нулю?

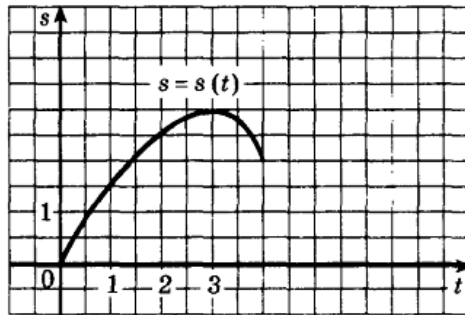
б) Дана функция  $f(x) = x^2 - 6x + 11$ .

1) Найдите производную функции.

2) Вычислите тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой:  $x = -1$ ;  $x = 0$ ;  $x = 2$ .

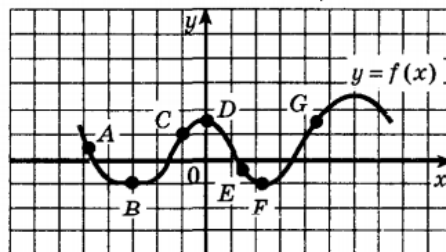
3) При каком значении  $x$  тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  равен: 0; 1; 3?

в) Закон движения точки задан графиком зависимости пути  $s$  от времени  $t$  (рис.). Найдите среднюю скорость движения точки на отрезках  $[0; 1]$ ,  $[1; 2]$ ,  $[2; 3]$ .



г) Тело, масса которого  $m = 5$  кг, движется прямолинейно по закону  $s = 1 - t + t^2$  (где  $s$  измеряется в метрах,  $t$  – в секундах). Найдите кинетическую энергию тела  $\frac{mv^2}{2}$  через 10 с после начала движения.

д) Функция  $y = f(x)$  задана своим графиком (рис.). В каких точках  $A, B, C, D, E, F, G$  производная этой функции принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения; в) значения, равные 0?

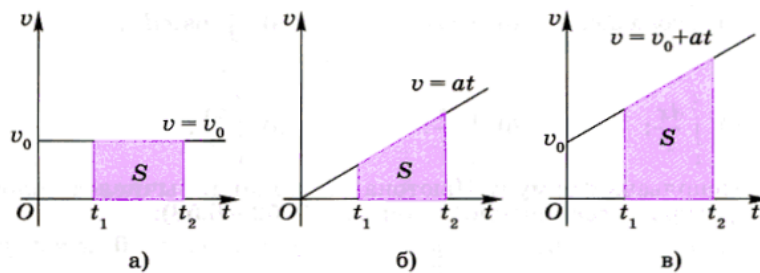


е) Найдите точки графика функции  $f(x) = e^x + e^{-x}$ , в которых касательная к этому графику параллельна прямой  $y = \frac{3}{2}x$ .

ж) Найдите площадь одной арки синусоиды.

з) Точка движется по прямой. Зависимость ее скорости от времени задана формулой  $v = f(t)$ . График функции  $v$  изображен на рисунке (а–в).





1) Какой физический смысл имеет площадь  $S$  фигуры, закрашенной на рисунке?

2) Определите по рисунку путь, пройденный точкой за промежутки времени:  $[0; t_1]$ ,  $[0; t_2]$ ,  $[t_1; t_2]$ , считая, что 1 единица на оси  $Ot$  соответствует 1 с, 1 единица на оси  $Ov$  соответствует 1 м/с.

3) Определите путь  $S$ , пройденный точкой за промежуток времени  $[0; t]$ . Верно ли, что в каждом случае площадь закрашенной фигуры равна  $S(t_2) - S(t_1)$ ?

и) Вычислите объем тела, полученного вращением кривой – графика функции  $y = x^2$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ , вокруг оси  $Oy$ .

Какие методические приемы можно использовать при изучении перечисленных задач?

#### *Вопросы для самоподготовки*

1. Как излагаются в школьных учебниках вопросы, связанные с понятиями предела функции и непрерывности? (Необходимо рассмотреть учебники базового и профильного уровней.)

2. В чем заключается механический смысл производной? Приведите примеры задач на механический смысл производной.

3. В чем заключается геометрический смысл производной? Приведите примеры задач на геометрический смысл производной.

4. Приложение производной к приближенным вычислениям.

5. Приложение производной в физике, технике, экономике. (См. учебник для СПО Башмакова М. И. Математика, раздел «Прикладные задачи».)
6. Производные высших порядков и их применение к исследованию функций в учебниках алгебры для средней школы.
7. Применение интегралов в геометрии и физике.
8. Понятие дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
9. Из истории дифференциального исчисления.
10. Из истории интегрального исчисления.

## АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

### *Краткое содержание лекции*

#### **Основные понятия темы**

Числовая последовательность – функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Способы задания: словесный, табличный, графический, аналитический, рекуррентный.

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

Разность арифметической прогрессии – число, показывающее, насколько каждый последующий член больше или меньше предыдущего.

Основные формулы арифметической прогрессии:

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d - \text{формула } n\text{-го члена.}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} - \text{сумма первых } n \text{ членов.}$$

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность отличных от 0 чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Знаменатель – число, равное отношению второго и любого последующего члена к предыдущему члену прогрессии.

Основные формулы геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} - \text{формула } n\text{-го члена.}$$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}; S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1} - \text{сумма первых } n\text{-членов.}$$

### **Место темы в программе и учебниках**

9 класс: Последовательности. Способы задания последовательностей. Арифметическая прогрессия. Формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии. Сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Формула  $n$ -го члена геометрической прогрессии. Сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

### **Цели изучения прогрессий в школе**

Образовательные: усвоение учащимися формул арифметической и геометрической прогрессий, применяемых при решении задач; обобщение и систематизация знаний и навыков (вычислительных, графических, логических, функциональных) при изучении данной темы.

Развивающие: развитие умений и навыков использовать алгоритмический подход при изучении предмета (математики); способствовать формированию логического мышления у учащихся; умения сравнивать, сопоставлять, делать выводы.

Воспитательные: формирование у учащихся интереса к предмету, умение работать в команде, коммуникативных навыков.

### **Основные типы математических задач**

1. Задачи на определение вида последовательности.
2. Задачи на нахождение первого члена прогрессии.
3. Задачи на нахождение  $n$ -го члена прогрессии.
4. Задачи на нахождение разности/знаменателя прогрессии.
5. Задачи на нахождение номера члена прогрессии.
6. Задачи на нахождение суммы первых  $n$  членов прогрессии.
7. Решение текстовых задач.

### Специальные приемы и методы обучения

1. Данная тема является более «изолированной» от других разделов алгебры, чем остальные темы.

2. Существует несколько подходов к изучению прогрессий. По традиционной методике арифметическая и геометрическая прогрессии рассматриваются на уроках отдельно. В конце же проводится отдельное обобщающее занятие, позволяющее систематизировать полученные знания. В подобной ситуации изучение прогрессий проходит поэтапно – от простого к сложному, от знакомства к анализу.

Альтернативой указанной методике является одновременное изучение двух разнотипных прогрессий. В таком случае материал подается с точки зрения сравнения – поиска аналогий и различий. Это вынуждает использовать в один момент слишком много учебной литературы, зато позволяет максимально включить в работу логическое мышление.

Можно объединить два вышеупомянутых метода и параллельно рассматривать только ключевые понятия: что такое геометрическая и арифметическая прогрессии, как находится их  $n$ -й член. После этого ознакомление с этими двумя числовыми рядами проходит отдельно и последовательно. В результате школьники приобретают важные навыки: сопоставление понятий; нахождение схожести и различия; определение закономерностей; создание математических моделей и т. п.

3. Первое знакомство учащихся с прогрессиями (как арифметической, так и геометрической) можно начать с конкретных примеров нескольких последовательностей, среди которых имеются, например, арифметические прогрессии. Рассматривая эти примеры, учащиеся могут выявить характеристические свойства последовательностей некоторого вида, которые учитель затем называет арифметическими прогрессиями, предлагает учащимся самостоятельно сформулировать определение такой прогрессии.

Следует указать учащимся, что любую постоянную последовательность, каждый член которой принимает значение, равное числу  $c$ , можно рассматривать и как арифметическую прогрессию с разностью  $0$ , и как геометрическую прогрессию со знаменателем  $1$ .

4. Вывод суммы первых  $n$  членов арифметической или геометрической прогрессий не вызывает у учащихся затруднений, но чтобы эта работа заинтересовала учащихся, им можно рассказать предание о маленьком Карле Гауссе, решившем в десятилетнем возрасте очень быстро задачу о нахождении суммы первых ста натуральных чисел, и древнюю индийскую легенду об изобретателе шахмат Сете.

### *Практические задания*

**Задание 1.** Выведите характеристические свойства прогрессий с помощью последовательного выполнения заданий:

1) Найти среднее арифметическое (геометрическое) чисел 2 и 8. Записать найденное число с данными в порядке возрастания. Образуют ли эти числа арифметическую (геометрическую) прогрессию?

2) Справедлива ли зависимость для трех последовательных членов рассматриваемой прогрессии?

а)  $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$  (для арифметической прогрессии);

б)  $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$  (для геометрической прогрессии).

3) Доказать, что для членов прогрессии справедлива закономерность:

а)  $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$  (для арифметической прогрессии);

б)  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$ ,  $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$  (для геометрической прогрессии).

**Задание 2.** Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий на прогрессии (последовательности). Приведите примеры заданий.

**Задание 3.** Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

**Задание 4.** Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

**Задание 5.** Познакомьтесь с легендами и ответьте на вопросы:

а) Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Карл Гаусс быстро получил результат: 5050. Как он это сделал?

б) По легенде, когда создатель шахмат – древнеиндийский математик Сета, показал своё изобретение правителю страны, тому так понравилась игра, что он дал изобретателю право самому выбрать награду. Мудрец попросил у короля за первую клетку шахматной доски заплатить ему одно зерно пшеницы, за вторую – два, за третью – четыре и т. д., удваивая количество зерен на каждой следующей клетке. Правитель быстро согласился, даже несколько обидевшись на столь невысокую оценку изобретения, и приказал казначею подсчитать и выдать изобретателю нужное количество зерна. Сможет ли расплатиться правитель с мудрецом?

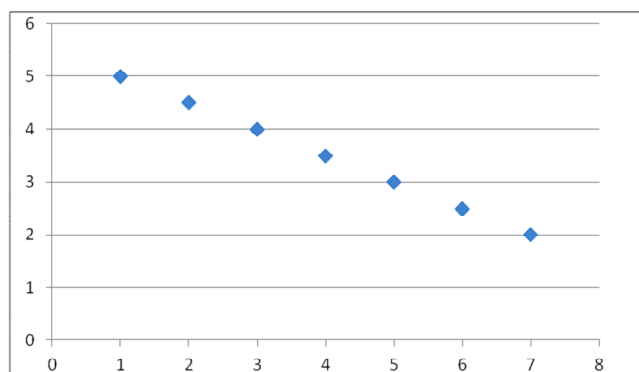
**Задание 6.** Сформулируйте типичные ошибки, допускаемые обучающимися по данной теме.

**Задание 7.** Выполните задания:

а) Содержит ли арифметическая прогрессия  $2; 9...$  число 156?

б) Часы бьют каждый час и отбивают столько ударов, сколько показывает часовая стрелка. Сколько ударов отобьют часы в течение 12 часов?

в) Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной – соответствующий член последовательности. На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии  $(a_n)$ . Найдите  $a_1$  и  $d$ .



г) Из арифметических прогрессий, заданных формулой  $n$ -го члена, выберите ту, для которой выполняется условия  $a_{10} > 0$ :

1.  $a_n = -4$ .    2.  $a_n = 4n - 40$     3.  $a_n = 4n - 50$     4.  $a_n = -4n + 50$

д) Три последовательных числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 27, а при уменьшении первого числа на 1, уменьшении второго на 3 и при увеличении третьего на 3, получили геометрическую прогрессию.

**Задание 8.** Выполните задания с практическим содержанием:

а) Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день – на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

б) Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1 400 м, а затем каждый следующий день они проходили на 100 м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту в 5 000 м?

в) Задача о семи старухах. Старухи направляются в Рим, каждая имеет 7 мулов, каждый мул тащит 7 мешков, в каждом мешке находится 7 хлебов, у каждого хлеба лежит 7 ножей, каждый нож нарежет 7 кусков хлеба. Чему равно общее число всего перечисленного?



г) При каждом делении амебы получаются две новые особи. Сколько особей будет после 6 делений? После 10 делений?

д) За просроченный платеж в 3 млн. руб. фирма должна платить пеню в размере 5 % ежемесячно от суммы платежа. Сколько должна будет выплатить фирма за трехмесячную задержку?

*Вопросы для самоподготовки*

1. Виды последовательностей и способы их задания. Примеры.
2. Введение понятий арифметической и геометрической прогрессий по способу одновременного сопоставления.
3. Вывод формул  $n$ -го члена арифметической (геометрической) прогрессии и суммы первых членов арифметической (геометрической) прогрессии.
4. В чем заключается реализация межпредметных связей при изучении последовательностей (прогрессий)?
5. Старинные задачи на прогрессии.
6. Нестандартные задачи на прогрессии.
7. Задача Фибоначчи.
8. Стихи и прогрессии.
9. «Сложные проценты» и геометрическая прогрессия.
10. Методика изложения данной темы в школьных учебниках математики разных авторских коллективов.

## **ГРУППОВОЕ ЗАДАНИЕ «ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕМЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА»**

Проанализировать одну из предложенных тем по следующему плану:

### **1. Основные понятия темы**

Понятия, определения понятий, свойства, правила, аксиомы, теоремы, следствия, классификации понятий. Специфические методы решения задач или доказательства теорем.

### **2. Место темы в рабочей программе и школьных учебниках**

Классы и содержание темы, которое изучается в указанных классах.

### **3. Цели изучения темы в школе**

Цели изучения темы (образовательная, воспитательная, развивающая).

Планируемые результаты обучения (предметные, метапредметные, личностные): ученик знает, владеет, умеет, понимает, находит, определяет, решает, анализирует, имеет представление и т. д.

### **4. Основные типы математических задач**

Перечислить типы задач, которые решаются в данной теме. Привести примеры каждого типа заданий.

### **5. Специальные приемы и методы обучения**

Особенности изучения темы на каждом этапе, способы и примеры мотивации изучения темы, возможности для использования наглядности, исторического материала, ИКТ, занимательных заданий, материала межпредметного, прикладного, профориентационного характера.

Ошибки и трудности учащихся, которые могут возникнуть при изучении темы.

### **Рекомендации**

Задание выполняется группой студентов (2–3 человека).

Для выполнения задания используйте школьные учебники математики, книги для учителя, рабочие программы, книги по истории математики, журналы «Математика в школе», «Математика» (приложение к газете «Первое сентября»).

### **Темы школьного курса для выполнения группового задания**

1. Действительные числа.
2. Иррациональные числа. Преобразование иррациональных выражений.
3. Приближенные вычисления.
4. Понятие числовой последовательности. Виды последовательностей.
5. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
6. Метод математической индукции и его применение.
7. Дробно-рациональные выражения.
8. Понятие функции. Свойства функций. Обратная функция.
9. Степенная функция.
10. Квадратные уравнения.
11. Уравнения с двумя переменными.
12. Неравенства с двумя переменными.
13. Логарифмическая функция, логарифмические уравнения и неравенства.
14. Показательная функция, показательные уравнения и неравенства.
15. Тригонометрические функции.
16. Тригонометрические уравнения и неравенства.
17. Понятие непрерывности функции.
18. Производная.
19. Первообразная и интеграл.
20. Уравнения с параметрами.
21. Модуль числа. Уравнения и неравенства с модулем.
22. Комбинаторика.

23. Вероятность.
24. Математическая статистика.
25. Процент. Виды задач на проценты.
26. Масштаб.
27. Множества. Операции над множествами.
28. Математическая логика. Высказывания и операции над ними.
29. Делимость чисел. Свойства и признаки делимости.
30. Текстовые задачи на движение.
31. Текстовые задачи на работу.

**СПИСОК****РЕКОМЕНДОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ**

1. *Денищева, Л. О.* Теория и методика обучения математике в школе : учебное пособие [Электронный ресурс] / Л. О. Денищева, А. Е. Захарова, М. Н. Кочагина и др. ; под общ. ред. Л. О. Денищевой. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
2. *Епишева, О. Б.* Учить школьников учиться математике : формирование приемов учебной деятельности / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990.
3. *Захарова, А. Е.* Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики в основной школе : учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / А. Е. Захарова, Ю. М. Высочанская. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
4. *Коваленко, В. Г.* Дидактические игры на уроках математики : кн. для учителя. – М. : Просвещение, 1990.
5. *Крупич, В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. – М. : Прометей, 1995.
6. *Медведева, О. С.* Психолого-педагогические основы обучения математике. Теория, методика, практика [Электронный ресурс]. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
7. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум : учебное пособие для студентов математических факультетов педагогических университетов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, В. В. Орлов и др. ; под науч. ред. В. В. Орлова. – М. : Дрофа, 2007.
8. Методика и технология обучения математике : курс лекций : учебное пособие для студентов математических факультетов вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, В. В. Орлов и др. ; под ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005.

9. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин и др. – М. : Просвещение, 1977.

10. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / А. Я. Блох, В. А. Гусев и др. ; сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987.

11. *Окунев, А. А.* Спасибо за урок, дети! – М. : Просвещение, 1988.

12. *Саранцев, Г. И.* Упражнения в обучении математике. – 2-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 2005.

13. *Темербекова, А. А.* Методика обучения математике : учебное пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. – СПб. : Лань, 2015.

14. Теория и методика обучения математике : психолого-педагогические основы : учебное пособие [Электронный ресурс] / В. А. Гусев. – 3-е изд. – М. : Лаборатория знаний, 2017.

15. *Федосеева, Р. И.* Изучение тождественных преобразований в неполной средней школе. – Ижевск, 1994.