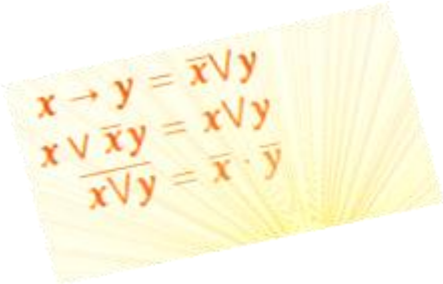
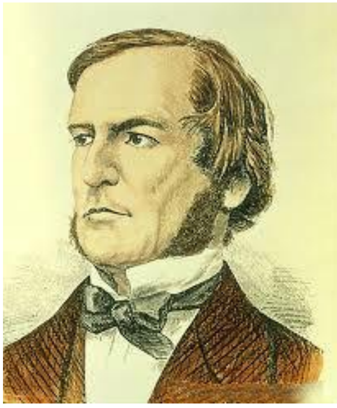
Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова,
Л.А. Севастьянов





Дискретная математика
Часть II
Математическая логика

Москва
Российский университет дружбы народов
2013

Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова,
Л.А. Севастьянов

Дискретная математика
Часть II
Математическая логика

Москва
Российский университет дружбы народов

2013

УДК 519.1
ББК 22.12

У т в е р ж д е н о
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Рецензент –

З 34 Дискретная математика. Часть II. Математическая логика, : [Учеб. пособие.]: Э.Р. Зарипова, М.Г. Кокотчикова, Л.А. Севастьянов. – М.: РУДН, 2013. – 116 с.

ISBN 978-5209-04949

В пособии излагаются основы математической логики, булева алгебра, исчисление высказываний, исчисление предикатов.

Предназначено для студентов I, II курсов математических, экономических и компьютерных специальностей.

Подготовлено на кафедре систем телекоммуникаций Российского университета дружбы народов.

ББК 22.12

I. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Введение в алгебру логики

1. Историческая справка. Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры

Историческая справка

Свое название алгебра логики (или булева алгебра) получила в честь английского математика Джорджа Буля (его фотографию читатель найдет на обложке этой книги), внесшего большой вклад в развитие двоичной системы исчисления и ее приложения к логике.

Одним из первых заинтересовался двоичной системой гениальный немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц. В своей работе «Искусство составления комбинаций» он заложил основы общего метода, который позволяет свести мысли человека к совершенно точным формальным высказываниям. Таким образом, открылась возможность перевести логику из словесного царства в царство математики.

Если у Лейбница и возникла мысль, что двоичная система может стать универсальным логическим языком, но он ее не высказал вслух. Лишь спустя более ста лет после смерти Лейбница (1716) английский математик-самоучка Джордж Буль энергично принялся за поиски такого универсального языка.

Дж. Буль был родом из бедной рабочей семьи, жившей в промышленном городе Линкольне в восточной Англии. Он, конечно, не мог получить солидное образование, но ему помогли его ум, решимость и целеустремленность.

Уже в 12 лет он изучил латинский язык, а через два года и греческий. А затем добавил к своей коллекции языков французский, немецкий и итальянский.

В 1831 г. в возрасте 16 лет Буль был вынужден поступить на работу, чтобы помочь семье. Четыре года он проработал на малооплачиваемой должности помощника учителя, но затем, осмелев, решил открыть собственную школу. Поняв, что ему следует углубить свои познания в математике, чтобы превзойти учеников, он приступил к чтению математических журналов, которые имелись в библиотеке местного научного учреждения. Изучив горы научных публикаций, он овладел сложнейшими математическими теориями своего времени. У него возникли и собственные оригинальные идеи. В 1839 г. одна из его статей была принята к публикации научным журналом. На протяжении следующего десятилетия работы Буля регулярно печатались, а его имя приобрело известность в научных кругах. В конце концов, деятельность Буля получила столь высокую оценку, что он, несмотря на отсутствие формального образования, был приглашен работать на математический факультет Королевского колледжа в Ирландии.

Имея теперь больше времени для научной работы, Буль все чаще стал задумываться над вопросом, над которым задолго до него размышлял Лейбниц, – как подчинить логику математики. В 1847 г. Буль написал важную статью на тему «Математический анализ логики», а в 1854 г. развил идеи в работе под названием «Исследование законов мышления». Эти основополагающие труды Буля внесли поистине революционные изменения в логику как науку.

Буль изобрел своеобразную алгебру – систему обозначений и правил, применимую к всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Пользуясь этой системой, Буль мог закодировать высказывания-утверждения, истинность или ложность которых требовалось доказать, – с помощью символов своего языка, а затем манипулировать ими подобно тому, как в математике манипулируют числами.

Большинство логиков того времени либо игнорировали, либо резко критиковали систему Буля. Но ее возможности оказались настолько велики, что она не могла остаться долго без внимания и сейчас в обязательном порядке входит в курс дискретной математики.

Прямое произведение множеств

Рассмотрим два множества A и B.

Прямым произведением множеств A и B (обозначение $A\times B$) называется множество упорядоченных пар (a, $в$) таких, что $a\in A$, $b\in B$. В частности, если $A=B$, то такое произведение обозначается A^2. Аналогично прямым произведением множеств $A_1,\dots A_n$ (обозначение $A_1\times\dots\times A_n$) называется множество всех упорядоченных наборов $(a_1,\dots,a_n)$ длины n таких, что $a_1\in A_1,\dots,\ a_n\in A_n$. $A\times\dots\times A$ обозначается A^n.

Соответствия и функции

Соответствием между множествами A и B называется подмножество $G\subseteq A\times B$.

Если $(a,b)\in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.

Проекцией подмножества $G \subseteq A\times B$ на множество A называется множество элементов $a\in A$ таких, что $(a,b)\in G$ (обозначение $пр_A G$). Аналогично $пр_B G$ – это множество элементов $b\in B$ таких, что $(a,b)\in G$.

Множество $пр_A G$ называется областью определения соответствия, а множество $пр_B G$ – областью значений соответствия. Если $пр_A G=A$, то соответствие называется всюду определенным (в противном случае соответствие называется частичным); если $пр_B G=B$, то соответствие называется сюръективным.

Множество всех $b\in B$, соответствующих элементу $a\in A$, называется образом a в B при соответствии G. Множество всех a, которым соответствует b, называется прообразом b в A при соответствии G.

Соответствие G называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента из $пр_A G$

является единственный элемент из $пр_B G$. Соответствие G между A и B называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и прообразом любого элемента из $пр_B G$ является единственный элемент из $пр_A G$.

Функцией называется функциональное соответствие. Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция f имеет тип $A \to B$ (обозначение $f: A \to B$). Каждому элементу a из своей области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений, обозначение $f(a)=b$. Элемент a называется аргументом функции, b – значением функции. Всюду определенная функция $f: A \to B$ называется отображением A в B. Образ A при отображении f обозначается $f(A)$. Если соответствие f при этом сюръективно, т.е. каждый элемент B имеет прообраз в A, то говорят, что имеет место отображение A на B (сюръективное отображение). Если $f(A)$ состоит из единственного элемента, то f называется функцией – константой.

Пусть даны функции $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Функция $h: A \to C$ называется композицией f и g (обозначение $f \circ g$), если имеет место равенство $h(a)=g(f(a)),\ a \in A$. Композиция f и g представляет собой последовательное применение функций f и g.

Алгебры

Функцию φ типа $\varphi: M^n \to M$ будем называть n-арной операцией на множестве M; n называется арностью операции φ. Множество M вместе с заданной на нем совокупностью операций $\Phi=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, т.е. система $A=\{M; \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, называется алгеброй; M называется основным, или несущим, множеством алгебры A. Вектор арностей операций алгебры называется ее типом, совокупность операций Φ-сигнатурой.

Множество $L \subseteq M$ называется замкнутым относительно n-арной операции φ на M, если $\varphi(L^n) \in L$, т.е. если значения φ на аргументах из L принадлежат L. Если L замкнуто относительно всех операций $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ алгебры A, то система $A'=\{L;\varphi_1,\dots,\varphi_m.\}$ называется подалгеброй A (при этом $\varphi_1,\dots,\varphi_m.$ рассматриваются как операции на L).

Пример 1.1. Пусть задано множество U. Множество всех его подмножеств называется булеаном U и обозначается через $B(U)$. Алгебра $B=\{B(U);\cup,\cap, -\}$ называется булевой алгеброй множеств над U, ее тип $(2,2,1)$. Элементами основного множества этой алгебры являются подмножества U. Для любого $U'\subseteq U$ $B'=\{B(U');\cup,\cap,-\}$ является подалгеброй B. Например, если $U=\{a,b,c,d\}$, то основное множество алгебры B содержит 16 элементов; алгебра $B'=\{B(U');\cup,\cap,-\}$, где $U'=\{a,b\}$ – подалгебра B; ее основное множество содержит четыре элемента.

2. *Функции алгебры логики. Примеры логических функций*

Функции алгебры логики

Рассмотрим двухэлементное множество $B=\{0,1\}$ и двоичные переменные, принимающие значения из B. Элементы 0 и 1 не являются числами в обычном смысле, хотя по некоторым свойствам и похожи на них. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая: 1 – «да», 0 – «нет» или 1 – «истина», 0 – «ложь».

Алгебра, образованная множеством B вместе со всеми возможными операциями на нем, называется алгеброй логики. Функцией алгебры логики от n переменных называется n-арная операция на B, т.е. $f:B^n\to B$, где $B^n=\{(x_1,\dots,x_n)|\ x_1,\dots,x_n \in B\}$. Итак, функция алгебры логики (или логическая функция) $f(x_1,\dots,x_n)$ – это функция, принимающая значения $0,1$, аргументы которой принимают значения $0,1$. Множество всех логических функций обозначаются P_2, множество всех логических функций n переменных – $P_2(n)$.

Для задания функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов значений аргументов, т.е. выписать таблицу 2.1.

Таблица 2.1

x_1 ,…, x_{n-1}, x_n	$f(x_1$,…, x_{n-1} $x_n)$
0 ,…, 0, 0	f(0, ,…, 0, 0)
0 ,…, 0, 1	f(0 ,…, 0, 1)
0 ,…, 1, 0	f(0 ,…, 1, 0)
0 ,…, 1, 1	f(0 ,…, 1, 1)
	…
1 ,…, 1, 1	f(1 ,…, 1, 1)

Можно видеть, что наборы n переменных принимают 2^n различных наборов значений (Это может быть доказано по индукции). Для удобства мы будем использовать стандартное расположение наборов значений аргументов: если набор рассматривать как запись числа в двоичном исчислении, то расположение наборов соответствует естественному расположению чисел $0,1,\ldots,2^n\text{-}1$.

Рассмотрим представление некоторого числа b в двоичной системе исчисления (т.е. в системе, имеющей только две цифры 0 и 1). Если b можно представить в виде

$$b=b_n2^n+ b_{n-1}2^{n-1}+\ldots+ b_12^1+ b_o2^o,$$

где $b_i \in B$, $i=0,\ldots,n$, т.е. либо 0 либо 1, то двоичная запись числа b будет выглядеть следующим образом $b_nb_{n-1}\ldots b_1b_o$.

Пример 1.2.1: $0_{10}=0\cdot 2^o=0_2$

$1_{10}=1\cdot 2^o=1_2$

$2_{10}=1\cdot 2^1+0\cdot 2^o=10_2$

$6_{10}=1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^o=110_2$

Вернемся к приведенной выше таблице. При любом наборе значений аргументов логическая функция может принимать значение либо 0, либо 1. Поскольку число различных наборов значений n аргументов равно 2^n, то число $|P_2(n)|$ различных функций n переменных равно 2^{2^n}.

Введенное понятие функции несовершенно, поскольку оно не позволяет рассматривать функции от меньшего числа аргументов как функции от большего числа аргументов. Для устранения этого недостатка введем следующее определение.

Определение. Функция $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots x_n)$ из P_2 зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\beta_i,\beta_{i+1},\dots,\beta_n$ переменных $x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n$, что

$$f(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},0,\beta_{i+1},\dots,\beta_n) \neq f(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\dots,\beta_n).$$

В этом случае переменная x_i называется существенной. Если x_i не является существенной переменной, то она называется несущественной или фиктивной.

Если переменная x_i является фиктивной переменной, то функция $f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ по существу зависит лишь от $(n$-$1)$-й переменной, т.е. представляет собой функцию $g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots x_n)$ от (n-1) переменной. Будем говорить, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из функции g введением фиктивной переменной.

Определение. Функции f и g называются равными, если функцию g можно получить из функции f путем добавления или изъятия фиктивных переменных.

В дальнейшем все функции мы будем рассматривать с точностью до фиктивных переменных.

Смысл удаления или введения фиктивных переменных в том, что любую конечную совокупность функций можно считать зависящей от одного и того же множества переменных, что часто бывает удобно. В частности, равенство $P_2(n) = 2^{2^n}$ справедливо при условии, что $P_2(n)$ содержит все функции n переменных, в том числе и функции с фиктивными переменными.

Примеры логических функций

Логических функций одной переменной – четыре. Они приводятся в следующей таблице 2.2.

Таблица 2.2.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*1*

Функции f_o и f_3 – константы *0* и *1* соответственно; f_1 – тождественная функция, $f(x)=x$; f_2 – отрицание x: $f_2(x)=\bar{x}$ (или $\rceil x$, читается *«не x»*). Отметим, что значения функций f_0 и f_3 не зависят от значения переменной и, следовательно, переменная x – фиктивная.

Логических функций двух переменных – 16. Они приводятся в следующей таблице 2.3.

Таблица 2.3.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
		0		$\&, \cdot$				$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
		$\sim, \equiv$	$\overline{x_2}$		$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	$/$	**1**
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*

Некоторые из этих 15 функций имеют отдельную запись, под функциями ниже написаны их обозначения. Подробнее остановимся на этих функциях.

Функции f_0 и f_{15} – константы *0* и *1*, т.е. функции с двумя фиктивными переменными.

Функция $f_1(x_1,x_2)$ называется <u>конъюнкцией</u> x_1 и x_2 и обозначается как $x_1\&x_2$ или $x_1\wedge x_2$, или $x_1\cdot x_2$ (знак конъюнкции часто опускают). Конъюнкция x_1 и x_2 равна *1*, если только x_1 и x_2 равны *1*, поэтому ее часто называют функцией **И**. Еще ее называют <u>логическим умножением</u>, т.к. ее таблица совпадает с таблицей умножения для *0* и *1*.

Функция $f_7(x_1,x_2)$ называется <u>дизъюнкцией</u> x_1 и x_2 и обозначается как $x_1\vee x_2$. Она равна *1*, если x_1 или x_2 равны *1*, поэтому ее называют еще функцией **ИЛИ** («или» здесь понимается в неразделительном смысле – хотя бы один из двух).

Функция $f_6(x_1,x_2)$ – это <u>сложение по модулю</u> *2*. Ее обозначение $x_1 \oplus x_2$. Она равна *1*, когда значения ее аргументов различны. Поэтому ее еще называют неравнозначностью.

Функция $f_9(x_1,x_2)$ называется <u>эквивалентностью</u> и обозначается как $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \equiv x_2$. Она равна *1*, когда значения ее аргументов равны, и равна *0* в противном случае.

$f_{13}(x_1,x_2)$ – <u>импликация</u>. Обозначение $x_1\to x_2$ или $x_1 \supset x_2$.(читается «если x_1, то x_2»).

$f_8(x_1,x_2)$ – <u>стрелка Пирса.</u> Обозначение $x_1\downarrow x_2$.

$f_{14}(x_1,x_2)$ – штрих Шеффера. Обозначение $x_1/\, x_2$.

Остальные функции специальных названий не имеют.

В заключении отметим, что

$x_1 \,\&\, x_2=min(x_1,x_2)$, $x_1 \vee x_2=max(x_1,x_2)$.

3. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра

Суперпозиции и формулы

Пусть даны функции $f{:}A\to B$ и $g{:}B\to C$. Функция $h{:}A\to C$ называется <u>композицией</u> функций f и g, если имеет место равенство $h(x)=g(f(x))$, где $x\in A$. Говорят, что функция h получена <u>подстановкой</u> f в g.

Суперпозицией функций $f_1,...,f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга, а формулой называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Пусть дано множество исходных функций $S=\{ f_1,...,f_m,...\}$. Символы переменных $x_1,...,x_n,...$ будем считать формулами глубины 0. Формула F имеет глубину $k+1$, если F имеет вид $f_i(F_1,...,F_{n(i)})$, где $f_i \in S_{n(i)}$ – число аргументов f_i, а $F_1,...,F_{n(i)}$ – формулы, максимальная из глубин которых равна k. $F_1,...,F_{n(i)}$ называются подформулами F; все подформулы формул $F_1,...,F_{n(i)}$ также называются подформулами F. Например, $f_2(x_1,x_2)$ – это формула глубины 1, а $f_3(f_1(x_3,x_1), f_2(x_1,f_3(x_1,x_2)))$ – формула глубины 3, содержащая одну подформулу глубины 2 и две подформулы глубины 1. Если f_1 обозначает дизъюнкцию, f_2 – конъюнкцию, а f_3 – сложение по $mod2$, то приведенная формула примет более привычный вид:

$$((x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \& (x_1 \oplus x_2))) \qquad (3.1)$$

Все формулы, построенные описанным способом, т.е. содержащие только символы переменных, скобки и знаки функций из множества S называются формулами над S.

Всякая формула, выражающая функцию f, как суперпозицию других функций, задает правило ее вычисления: для вычисления формулы необходимо вычислить значения всех ее подформул. Вычислим, например, формулу (3.1) на наборе $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0$. Используя таблицу 2.3 получим $x_3 \vee x_1=1;\ x_1 \oplus x_2=0,$ $x_1\&(x_1 \oplus x_2)=x_1\&0=0;\ ((x_3 \vee x_1) \oplus (x_1\&(x_1 \oplus x_2)))=1 \oplus 0=1.$

Таким образом, формула каждому набору значений аргументов ставит в соответствие значение функции и, поэтому, может служить наряду с таблицей способом задания и вычисления функции. По формуле, вычисляя ее на всех 2^n наборах, можно восстановить таблицу функции. О формуле, задающей функцию, говорят, что она реализует или представляет эту функцию.

В отличие от табличного задания представление данной функции формулой не единственно. Например, функцию f_{14} «штрих Шеффера» из таблицы 2.3 можно выразить формулами

$$f_{14}(x_1,x_2)= x_1 \mid x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$f_{14}(x_1,x_2)= x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2} \qquad (3.2)$$

а функцию f_8 «стрелка Пирса» – формулами

$$f_8(x_1,x_2)= x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$f_8(x_1,x_2)= x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \qquad (3.3)$$

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются <u>эквивалентными</u> или <u>равносильными</u>. Эквивалентность формул обозначается знаком равенства:

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}, \qquad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

Эти формулы являются законом де Моргана. При снятии общего отрицания меняются конъюнкция на дизъюнкцию и ставятся отрицания над элементами $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$

Для того чтобы выяснить, эквивалентны формулы или нет, можно по каждой формуле восстановить таблицу функции, а затем эти таблицы сравнить.

<u>Пример 3.1</u>: Доказать истинность формулы.

$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

Построим таблицу истинности для правой и левой части (таблица 1.3.1).

Таблица 3.1.

x_1	x_1	$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	*0*	*0*	***1***	*1*	*1*	***1***
0	*1*	*0*	***1***	*1*	*0*	***1***
1	*0*	*0*	***1***	*0*	*1*	***1***
1	*1*	*1*	***0***	*0*	*0*	***0***

Жирным отмечены левая и правая части формулы, видим, что они равны.

Читателю предлагается доказать истинность второй формулы $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

Существует и другой метод определения эквивалентности формул, называемый методом эквивалентных преобразований. Его мы рассмотрим позднее.

Булева алгебра

Алгебра ($P_2, \vee, \&, \rceil$), основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется булевой алгеброй логических функций. Операции булевой алгебры также часто называют булевыми операциями.

Свойства булевых операций.

1. Ассоциативность:

$$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \cdot x_2\right) \cdot x_3\right),$$

$$\left(x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(\left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3\right). \qquad (3.4)$$

2. Коммутативность:

$$x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2,$$

$$x_2 \vee x_1 = x_1 \vee x_2. \qquad (3.5)$$

3. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$\left(x_1 \cdot \left(x_2 \vee x_3\right)\right) = \left(x_1 \cdot x_2\right) \vee \left(x_1 \cdot x_3\right) \qquad (3.6)$$

4. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$\left(x_1 \vee \left(x_2 \cdot x_3\right)\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \cdot \left(x_1 \vee x_3\right) \qquad (3.6)$$

5. Идемпотентность:

$$x \cdot x = x$$

$$(x \vee x) = x \qquad (3.7)$$

6. Двойное отрицание:

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{3.8}$$

7. Свойства констант:

$$x \cdot 1 = x,\ x \cdot 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \vee 0 = x,\ \overline{0} = 1,\ \overline{1} = 0. \tag{3.9}$$

8. Закон де Моргана:

$$\overline{(x_1 \cdot x_2)} = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2),$$

$$\overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) \tag{3.10}$$

9. Закон противоречия:

$$x \cdot \overline{x} = 0 \tag{3.11}$$

10. Закон «исключения третьего»

$$x \vee \overline{x} = 1 \tag{3.12}$$

Соотношения (3.4) – (3.12) можно проверить стандартным методом, т.е. вычислением обеих частей равенств на всех наборах значений переменных.

Очевидно, что результат вычислений не зависит от того, являются ли эти переменные независимыми или получены, в свою очередь, в результате каких–то вычислений. Поэтому равенства (3.4) – (3.12) остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций и любых формул, представляющих эти функции. Т.е. справедливо правило подстановки: при подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой F.

4. Принцип двойственности. СДНФ. Разложение булевых функций по переменным

Принцип двойственности

Определение: Функция $f^*(x_1,\dots,x_n)$, равная $\overline{f(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)}$, называется двойственной функцией к функции $f(x_1,\dots,x_n)$.

Очевидно, что таблица для двойственной функции (при фиксированном порядке наборов значений переменных) получается из таблицы для функции $f(x_1,\dots,x_n)$ инвертированием (т.е. заменой *0* на *1* и *1* на *0*) столбца функции и его переворачиванием (таблицы 4.1 и 4.2).

Таблица 4.1.

x	f_0	f_1	f_2	f_3	f_0^*	f_1^*	f_2^*	f_3^*
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*

Таблица 4.2.

x_1	x_2	f_0	f_3	f_0^*	f_3^*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Из таблиц видно, что

функция *0* двойственна функции *1*,

функция *1* двойственна функции *0*,

функция x двойственна функции x,

функция $\overline{x}$ двойственна функции $\overline{x}$,

функция $x_1 \cdot x_2$ двойственна функции $x_1 \vee x_2$,

функция $x_1 \vee x_2$ двойственна функции $x_1 \cdot x_2$.

Функция, двойственная самой себе, является самодвойственной. Т.о. x и $\overline{x}$ являются самодвойственными функциями.

Из определения двойственности следует, что

$$(f^*)^* = (\overline{f(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)})^* = \overline{\overline{f(\overline{\overline{x}}_1,\dots,\overline{\overline{x}}_n)}} = f(x_1,\dots,x_n),$$

т.е. исходная функция f является двойственной к f^*.

Пусть функция $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ реализуется формулой F. Спрашивается, какой вид имеет формула F^*, реализующая функцию $\varphi^*(x_1,\dots,x_n)$.

Обозначим через $x_1,\dots,x_n$ все различные символы переменных, встречающиеся в множествах $(x_{11},\dots,x_{1n_1}),\dots,(x_{m1},\dots,x_{mn_m})$.

Теорема 4.1. Если

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = f(f_1(x_{11},\dots,x_{1n_1}),\dots,f_m(x_{m1},\dots,x_{mn_m})), \text{ то}$$

$$\varphi^*(x_1,\dots,x_n) = f^*(f_1^*(x_{11},\dots,x_{1n_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mn_m})).$$

Доказательство.

$$\varphi^*(x_1,\dots,x_n) = \overline{\varphi}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n) =$$

$$= \overline{f}(f_1(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1n_1}),\dots,f_m(\overline{x}_{m1},\dots,\overline{x}_{mn_m})) =$$

$$= \overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11},\dots,\overline{x}_{1n_1}),\dots,\overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_{m1},\dots,\overline{x}_{mn_m})) =$$

$$\overline{f}(\overline{f}_1^*(x_{11},\dots,x_{1n_1}),\dots,\overline{f}_m^*(x_{m1},\dots,x_{mn_m})) =$$

$$f^*(f_1^*(x_{11},\dots,x_{1n_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mn_m}))).\text{ч.т.д.}$$

Из теоремы вытекает следующий принцип.

Принцип двойственности. Если формула $F=F(f_1,\dots,f_m)$ реализует функцию $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, то формула $F^*=F(f_1^*,\dots,f_m^*)$ полученная из F заменой функций $f_1,\dots,f_m$ на $f_1^*,\dots,f_m^*$, реализует функцию $\varphi^*(x_1,\dots,x_n)$.

Формулу F^* будем называть формулой, двойственной к F.

Для формул над $(0,1,\vee,\&,)$ принцип двойственности может быть сформулирован так: для получения формулы F^*, двойственной к формуле F, нужно в формуле F всюду заменить 0 на 1, 1 на 0, $\&$ на $\vee$, $\vee$ на $\&$.

Пример 4.1.

Пусть $F_1(f_1)=f_1(x_1,x_2)=x_1\&x_2$.

Тогда $F_1{}^*(f_1)=F_1(f_1{}^*)=f_1{}^*(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$.

Пусть

$$F_2(f_1, f_2, f_3) = f_2(f_1(x_1,x_2), f_1(f_3(x_1), f_3(x_2))) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2.$$

Здесь f_1 – конъюнкция, f_2 – дизъюнкция, f_3 – отрицание.

Тогда

$$F_2^*(f_1, f_2, f_3) = F_2(f_1^*, f_2^*, f_3^*) =$$

$$= f_2^*(f_1^*(x_1,x_2), f_1^*(f_3^*(x_1), f_3^*(x_2))) = (x_1 \vee x_2)\,\&\,(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

Из принципа двойственности вытекает, что если

$$F(f_1,\ldots,f_m) = \Phi(g_1,\ldots,g_n), \text{ то } F^*(f_1,\ldots,f_m) = \Phi^*(g_1,\ldots,g_n)$$

Пример 4.2. Используя принцип двойственности, можно выводить формулы.

Читателю предлагается самостоятельно из равенства $\overline{x_1x_2} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ вывести равенство $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2$.

При рассмотрении свойств булевых функций принцип двойственности позволяет почти в два раза сокращать усилия на вывод равенств.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Введем обозначения $x^o = \bar{x}$, $x^1=x$. Пусть $\delta\in\{0,1\}$. Тогда

$$x^\delta = \begin{cases} x, \delta = 1 \\ \bar{x}, \delta = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^\delta=1 \Leftrightarrow x=\delta$.

Определение. Выражение вида $x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\ldots x_n^{\delta_n}$ называется элементарной конъюнкцией.

Членами конъюнкции являются либо сами переменные $x_1,\dots,x_n$, либо их отрицания.

Пример 4.3. Приведем примеры конъюнкций.

$x_1x_2,\quad x_3\bar{x}_4,\quad x_1x_2\bar{x}_4x_5.$

Определение. Элементарная конъюнкция, в которую включены все переменные, называется основной элементарной конъюнкцией (ОЭК).

Пример 4.4. Следующие конъюнкции являются элементарными конъюнкциями от 5 переменных.

$n=5;\quad K_1 = x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5,\quad K_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5.$

В элементарные конъюнкции K_1 и K_1 входят все пять переменных.

Лемма 4.1.

$$x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\dots x_n^{\delta_n} = \begin{cases} 1, \text{если } \delta_1 = x_1,\dots\delta_n = x_n, \\ 0, \text{если } \delta_i \ne x_i \text{ хотябы для одного } i. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $\delta_1=x_1,\dots,\ \delta_n=x_n$. Тогда

$$x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n} = x_1^{x_1}\cdots x_n^{x_n} = 1\cdots 1 = 1.$$

Пусть $\delta_k \ne x_k$, для некоторого k: $1 \le k \le n$. Тогда

$$x_1^{\delta_1}\cdots x_k^{\delta_k}\cdots x_n^{\delta_n} = x_1^{x_1}\cdots x_k^{\bar{x}_k}\cdots x_n^{x_n} = 1\cdots 1\cdot 0\cdot 1\cdots 1 = 0.$$

Определение. Формула $\Phi = k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_m$, где k_i– элементарные конъюнкции, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ). Если все k_i являются основными элементарными конъюнкциями, то ДНФ называется совершенной (СДНФ).

Пример 4.5. Для функций трех переменных ниже приведены ДНФ и СДНФ.

$$n = 3; \quad x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 - \text{ДНФ},$$
$$x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 - \text{СДНФ}.$$

Отличие заключается в том, что в СДНФ обязательно должны участвовать все три переменные одновременно, а для ДНФ нет.

Разложение булевых функций по переменным

Теорема 4.2. (о разложении функций по переменным). Каждую функцию алгебры логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ при любом m, $1 \le m \le n$, можно представить в следующей форме:

$$f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n) = \bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_m} x_1^{\delta_1} \cdots x_m^{\delta_m} f(\delta_1,\ldots,\delta_m,x_{m+1},\ldots,x_n), \quad (4.1)$$

где дизъюнкция берется по всем возможным наборам значений переменных $x_1,\ldots,x_m$.

Это представление называется разложением функции по m переменным $x_1,\ldots,x_m$.

Доказательство. Теорема доказывается подстановкой в обе части равенства (4.1) произвольного набора ($\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n$) всех n переменных.

Левая часть (4.1) дает $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Правая –

$$\bigvee_{\delta_1,\ldots,\delta_m} \alpha_1^{\delta_1} \cdots \alpha_m^{\delta_m} f(\delta_1,\ldots,\delta_m,\alpha_{m+1},\ldots\alpha_n) =$$
$$= \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Получаем, что левая и правая части равны, ч.т.д.

В качестве следствия получим два специальных случая разложения.

Следствие 4.1. Разложение по k-ой переменной

$$f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) =$$
$$= x_k f(x_1,\ldots,x_{k-1},1_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \vee \bar{x}_k f(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

Следствие 4.2. Разложение по всем n переменным

$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\delta_1,...,\delta_n} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} f(\delta_1,...,\delta_n)$. Но $f(\delta_1,...,\delta_n) = 0$ либо $f(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1$. Следовательно, при $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$ оно может быть преобразовано к виду

$$\bigvee_{\delta_1,...,\delta_n} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} f(\delta_1,...,\delta_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n},\ \text{т.е.}$$

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}\ \text{– СДНФ.}$$

Отсюда вытекает порядок построения СДНФ по функции, заданной таблицей.

5. *Построение СДНФ для функции, заданной таблицей СКНФ. Основные эквивалентные преобразования*

Построение СДНФ для функции, заданной таблицей

На предыдущей лекции была доказана теорема о разложении функций по переменным. В качестве следствия из нее получено разложение функций по всем переменным, являющееся СДНФ. Данное следствие носит конструктивный характер, т.к. оно по таблице функции позволяет построить формулу, являющуюся СДНФ (если $f \not\equiv 0$). СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице f; каждому «единичному» набору $(\delta_1, ..., \delta_n)$, т.е. набору, на котором значение функции равно 1, соответствует конъюнкция всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если δ_i=0, и без отрицания, если δ_i=1.

<u>Пример 5.1.</u> Записать СДНФ для функции $x_1 \to x_2$.

Запишем в табличном виде данную функцию, и все соответствующие основные элементарные конъюнкции

(ОЭК) (Таблица 5.1). Заметим, что ОЭК строятся на значениях функции равных 1, переменные x_1 и x_2 берутся с отрицанием, если на данном наборе принимают значение 0, иначе без отрицания.

Таблица 5.1

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	Основные элементарные конъюнкции (ОЭК)
0	*0*	*1*	$\bar{x}_1\bar{x}_2$
0	*1*	*1*	$\bar{x}_1 x_2$
1	*0*	*0*	-
1	*1*	*1*	$x_1 x_2$

Полученные ОЭК записываем в ответ через дизъюнкции, получаем СДНФ.

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 .$$

Представление логических функций булевыми формулами

Представить логическую функцию булевой формулой – это значит представить f в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Если $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$, то по следствию 4.2

$$f(x_1,..., x_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} \text{ – СДНФ}$$

т.е. булевой формулой для $f(x_1,...,x_n)$ может служить ее СДНФ.

Если же $f(x_1,...,x_n) \equiv 0$, то $f(x_1,...,x_n) = x_1 \bar{x}_1$.

Сформулируем изложенные результаты в виде

Теоремы 5.1. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой.
(без доказательства)

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Определение. Выражение вида $x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee ... \vee x_n^{\delta_n}$ называется элементарной дизъюнкцией.

Членами дизъюнкции являются либо $x_1,...,x_n$, либо их отрицания.

Пример 5.2. Приведем примеры элементарных дизъюнкций:

$$x_1 \vee x_2, \quad x_3 \vee \bar{x}_4, \quad x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5.$$

Определение. Элементарная дизъюнкция, в которую включены все переменные, называется основной элементарной дизъюнкцией (ОЭД).

Пример 5.3. Примеры для функции пяти переменных основных элементарных дизъюнкций приведены ниже.

$$n = 5;\ x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5, \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5.$$

Определение. Формула $\Phi = D_1 \cdot D_2 \cdots D_m$, где D_i – элементарные дизъюнкции, называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ). Если все D_i являются основными элементарными дизъюнкциями, то КНФ называется совершенной (СКНФ).

Пример 5.4. Для функции 3 переменных приведем примеры КНФ и СКНФ.

$$n=3;\ (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \text{ - КНФ},$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \text{ - СКНФ}.$$

В отличие от КНФ в СКНФ в скобках участвуют все три переменные.

Спрашивается, нельзя ли произвольную функцию алгебры логики представить в виде СКНФ? Покажем, что при $f \not\equiv 1$ это возможно.

Пусть $f(x_1,...,x_n) \not\equiv 1$. Разложим функцию $f^*(x_1,...,x_n)$ (очевидно $f^*(x_1,...,x_n) \not\equiv 0$) в СДНФ:

$$f^*(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{\delta_1,...,\delta_n \\ f^*(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}$$

Из принципа двойственности следует, что

$$f^{**}(x_1,\dots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f^*(\delta_1,\dots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\vee\dots\vee x_n^{\delta_n}. \qquad (5.1)$$

Левая часть равенства (5.1) есть $f(x_1,\dots,x_n)$, а правая может быть преобразована следующим образом:

$$\mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f^*(\delta_1,\dots,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\vee\dots\vee x_n^{\delta_n} = \mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f(\bar\delta_1,\dots,\bar\delta_n)=0}} x_1^{\delta_1}\vee\dots\vee x_n^{\delta_n} =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f(\delta_1,\dots,\delta_n)=0}} x_1^{\bar\delta_1}\vee\dots\vee x_n^{\bar\delta_n}.$$

Таким образом, получаем разложение

$$f(x_1,\dots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{\delta_1,\dots,\delta_n \\ f(\delta_1,\dots,\delta_n)=0}} x_1^{\bar\delta_1}\vee\dots\vee x_n^{\bar\delta_n} \qquad (5.2)$$

Данная формула носит конструктивный характер, т.к. она по таблице функции позволяет построить формулу, являющуюся СКНФ (если $f\not\equiv 1$).

СКНФ функции f содержит ровно столько дизъюнкций, сколько нулей в таблице f. Каждому «нулевому» набору $(\delta_1,\dots,\delta_n)$ значений переменных, т.е. набору, на котором значение функции равно 0, соответствует дизъюнкция всех переменных, в которых x_i взято с отрицанием, если $\delta_i=1$ и без отрицания, если $\delta_i=0$.

<u>Пример 5.5.</u> Записать СКНФ для функции $x_1\to x_2$.

Запишем в табличном виде данную функцию, и все соответствующие основные элементарные дизъюнкции (ОЭД) (Таблица 5.2). Заметим, что ОЭД строятся на значениях функции равных 0, переменные x_1 и x_2 берутся с отрицанием, если на данном наборе принимают значение 1, иначе без отрицания.

Таблица 5.2

x_1	x_i	$x_1 \to x_2$	Основные элементарные дизъюнкции (ОЭД)
0	*0*	*1*	-
0	*1*	*1*	-
1	*0*	*0*	$\overline{x_1} \vee x_2$
1	*1*	*1*	-

Полученные ОЭД записываем в ответ через конъюнкции, получаем СКНФ.

$$f(x_1, x_2) = x_1^0 \vee x_2^1 = \bar{x}_1 \vee x_2 .$$

Основные эквивалентные преобразования

В предыдущей теме 3 был изучен один из методов проверки эквивалентности функций, заключающийся в построении и сравнении таблиц обеих функций. Другим методом проверки эквивалентности функций и получения новых эквивалентностей является <u>метод эквивалентных преобразований</u>, заключающийся в построении цепи эквивалентных формул, на основе ранее доказанных эквивалентностей.

Рассмотрим некоторые основные эквивалентные преобразования в булевой алгебре и новые эквивалентности, которые могут быть получены с их помощью из (3.4) – (3.12).

<u>Поглощение</u>.

$$x \vee xy = x, \qquad (5.3)$$

$$x(x \vee y) = x. \qquad (5.4)$$

Докажем (5.3) и (5.4).

$$x \vee xy = x \cdot 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x\,1 = x.$$

$$x(x \vee y) = xx \vee xy = x \vee xy = x.$$

<u>Склеивание</u>.

$$xy \vee x\bar{y} = x. \qquad (5.5)$$

Докажем (5.5). $xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x \cdot 1 = x$.

<u>Обобщенное склеивание</u>.

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}. \tag{5.6}$$

Докажем (5.6). $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} = xz \vee y\bar{z}$.

<u>Расщепление.</u>

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y. \tag{5.7}$$

Докажем (5.7). $x \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee xy \vee \bar{x}y =$
$= x \cdot 1 \vee y \cdot 1 = x \vee y$.

Тема 2. Минимизация булевых функций

6. Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски

Проблема минимизации

Определение. ДНФ φ функции f называется

а) минимальной (минимальной по литералам), если она имеет наименьшее число символов переменных среди других ДНФ функции f;

б) кратчайшей (минимальной по конъюнкциям), если она имеет минимальное число элементарных конъюнкций.

Число различных элементарных конъюнкций от n переменных равно 3^n, т.к. любая переменная может либо входить в конъюнкцию, либо не входить, либо входить с отрицанием. Тогда ДНФ от n переменных однозначно определяется вектором длины 3^n, состоящим из нулей и единиц, где 1 означает, что соответствующая элементарная конъюнкция входит в ДНФ, а 0 – не входит. Поэтому число всех ДНФ от *«n»* переменных равно 2^{3^n}.

Для произвольной функции алгебры логики можно написать много ДНФ. Проблема минимизации состоит в том, чтобы для функции f построить минимальную ДНФ в определенном выше смысле. Эта проблема допускает тривиальное решение, заключающееся в переборе всех 2^{3^n} ДНФ, но очевидно, что такое решение является чрезвычайно трудоемким даже при небольших значениях n.

Определение. Формула Ψ влечет формулу Φ (обозначение $\Psi \mapsto \Phi$), если $(\Psi \mapsto \Phi)\equiv 1$, т.е. не существует такого набора значений переменных, при котором Ψ принимает значение 1, а Φ – значение 0.

Определение. Элементарная конъюнкция K называется импликантом функции f, если $K \mapsto f$.

Пример 6.1. Проверить является ли конъюнкция импликантом для заданной функции.

Пусть $f(x,y,z) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$ и пусть $K=x\,\bar{y}=x^1y^0$. $K=1 \Leftrightarrow x=1,\ y=0$. Поскольку $f(1,0,z)=1\cdot 1\cdot z \vee 1\cdot 1\cdot \bar{z} = z \vee \bar{z} \equiv 1$, то $K=x\,\bar{y}$ является импликантом функции f.

Пример 6.2. Проверить является ли конъюнкция импликантом для заданной функции.

Пусть $f(x,y,z,t) = x\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,t$ и пусть $K = x\,\bar{y} = x^1y^0$. $K=1 \Leftrightarrow x=1, y=0$. Поскольку $f(1,0,z,t) = z \vee t \not\equiv 1$, т.к. если $z=0$ и $t=0$, то $z \vee t=0$, т.е. $K=x\,\bar{y}$ не является импликантом f.

Теорема 6.1. Если формула Φ , реализующая функцию f, имеет вид $\Phi = \bigvee\limits_{i=1}^{n} k_i$, – ДНФ, то $k_i \mapsto \Phi$, $i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть в ДНФ функции $k_i=1$. Тогда $\Phi = k_1 \vee \ldots \vee k_i \vee \ldots \vee k_n = k_1 \vee \ldots \vee 1 \vee \ldots \vee k_n = 1$ и, следовательно, $f=1$.

Определение. Импликант P функции f называется простым, если при удалении любой переменной из P полученная элементарная конъюнкция не является импликантом.

В примере 6.1. $x\bar{y}$ – простой импликант, т.к. ни x ни $\bar{y}$ импликантами не являются.

Теорема 6.2. Каждая функция $f \not\equiv 0$ представима в виде $f = \bigvee\limits_{i} P_i$, где P_i – простые импликанты.

Доказательство. Нужно показать, что $f=1$ тогда и только тогда, когда $\bigvee\limits_{i} P_i = 1$. Очевидно, что если $\bigvee\limits_{i} P_i = 1$, то $f=1$.

Пусть теперь для некоторого набора значений переменных $f = \bigvee\limits_{i} k_i = 1$. В этом случае $k_i = 1$, а из теоремы 6.1. следует, что k_i – импликант. Сокращаем этот импликант до простого. Данную процедуру повторяем для всех наборов значений переменных, для которых $f=1$.

Определение. ДНФ $\Phi = \underset{i}{\vee} k_i$ функции f называют неизбыточной если:

1) все k_i – простые импликанты;
2) удаление любой k_i из Φ нарушает равенство $f=\Phi$.

Очевидно, что минимальная ДНФ является неизбыточной. Поэтому минимальные ДНФ следует искать среди неизбыточных. Таким образом задача минимизации может быть разделена на следующие этапы:

1) нахождение всех простых импликантов функции f;
2) нахождение неизбыточных ДНФ функции f;
3) выбор минимальных ДНФ функции f.

Порождение простых импликантов

Определение. Элементарная конъюнкция α покрывается элементарной конъюнкцией β, если каждая переменная, входящая в β, входит в α (с учетом отрицания).

Пример 6.2. Покрывающие конъюнкции.

Конъюнкция $\alpha = xyz$ покрывается конъюнкцией $\beta = xy$.

Конъюнкция $\alpha = x\bar{y}z$ не покрывается конъюнкцией $\beta = x\bar{z}$.

Определение. Элементарная конъюнкция α называется дополнением элементарной конъюнкции β по отношению к ДНФ Φ, если:

1) конъюнкция α покрывается конъюнкцией β,
2) в конъюнкцию α входят все переменные, входящие в Φ.

Пример 6.3. Найти дополнительные конъюнкции $\beta=xy$ по отношению к Φ.

Пусть $\Phi = xy\bar{z} \vee \bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\bar{y}$. Тогда конъюнкции $\alpha_1=xyzt$, $\alpha_2=xyz\bar{t}$, $\alpha_3=xy\bar{z}t$, $\alpha_4=xy\bar{z}\bar{t}$ являются дополнениями конъюнкции $\beta=xy$ по отношению к Φ.

Теорема 6.3. Пусть Φ – СДНФ функции f. Если β – импликант f, то все дополнения элементарной конъюнкции β по отношению к Φ входят в Φ.

Доказательство. Пусть $\beta = x_{i_1}^{\rho_1} x_{i_2}^{\rho_2} \ldots x_{i_m}^{\rho_m}$ – импликант функции f и пусть $\alpha = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n}$ является дополнением β по отношению к Φ. Предположим, что α не входит в Φ. Рассмотрим такой набор значений переменных, что $\alpha=1$, т.е. положим $x_i=\delta_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда $\rho_1 = \delta_{i_1}, \ldots, \rho_m = \delta_{i_m}$ и $\beta=1$, а $\Phi=0$ поскольку α по предположению не входит в Φ. Но это противоречит тому, что β является импликантом f. Ч.т.д.

Из теоремы следует, что объединяя в СДНФ Φ функции f соответствующим образом пары элементарных конъюнкций и применяя последовательно равенство $\gamma x \vee \gamma \bar{x} = \gamma$, можно в результате получить все простые импликанты функции f.

Пример 6.4. Найти простые импликанты для функции f.

Пусть $f=xyzt \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt$.

Первая и третья конъюнкции дают $xyzt \vee x\bar{y}zt = xzt$. Вторая и третья конъюнкции дают $x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt = x\bar{y}z$. Полученные выражения являются простыми импликантаим и, следовательно, $f=xzt \vee x\bar{y}z$.

Алгоритм Куайна и Мак-Клоски (перечисления простых импликантов)

Систематизируем изложенную выше идею.

1) Выпишем для функции f СДНФ Φ.
2) В каждой элементарной конъюнкции все переменные будем записывать в одинаковом порядке.
3) Каждую конъюнкцию будем представлять в виде последовательности из 1, 0 и –, ставя на i-м месте 1,

если i-я переменная входит в конъюнкцию без отрицания, *0* – если с отрицанием и –, если не входит.

Например, $xyz \vee x\overline{z} \vee x\overline{t}$ запишем в виде *111–* $\vee$ *1–0–* $\vee$ *1– –0.*

4) Образуем из элементарных конъюнкций группы, включая в одну группу наборы с одинаковым числом единиц (группы, в которых число единиц отличается на 1, называются соседними); расположим группы в порядке возрастания числа единиц.

Например, для функции

$$f(x,y,z,t) = xy\overline{z}t \vee x\overline{y}\overline{z}t \vee xy\overline{z}\overline{t} \vee x\overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee \overline{x}\overline{y}z\overline{t} \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}t \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$$

элементарные конъюнкции представляются как *1101, 1001, 1100, 1000, 0010, 0001, 0000,* а список групп будет следующим:

<u>0000</u>
0001
0010
<u>1000</u>
1001
<u>1100</u>
1101

5) Равенство $\gamma x \vee \gamma\overline{x} = \gamma$ может быть применимо только к подходящим парам наборов из соседних групп. Подходящая пара образуется двумя наборами, отличающимися в одной позиции, и в этой позиции не стоит черточка. Подходящие пары будем отмечать звездочками (*).
6) Ставим в различающейся позиции подходящей пары черточку и помещаем получившийся набор в следующий список групп.
7) Повторяем описанный процесс с шага 4, пока это возможно. Непомеченные наборы образуют простые импликанты.

В рассматриваемом примере шаги 6 и 7 выглядят следующим образом.

					*	*	*	$\underline{0000}$	000-
				*			*	0001	00-0
						*		0010	$\underline{-000}$
		*	*		*			$\underline{1000}$	-001
	*		*	*				1001	100-
*		*						$\underline{1100}$	$\underline{1-00}$
*	*							1101	1-01
									110-

		*		000-	$\underline{-00-}$
				00-0	1-0-
			*	$\underline{-000}$	
			*	-001	
*		*		100-	
	*			$\underline{1-00}$	
	*			1-01	
*				110-	

Непомеченными остались 00–0, –00–, 1–0–. Они и образуют простые импликанты $\bar{x}\bar{y}\bar{t}$, $\bar{y}\bar{z}$, $x\bar{z}$.

7. *Таблицы простых импликантов*

Пусть $\Phi = \bigvee_{i=1}^{p} k_i$ – СДНФ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – простые импликанты f, найденные по алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Перечислив все простые импликанты, нужно выбрать из них такое подмножество, что $\Phi \mapsto (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_r)$, т.к. в этом случае из того, что $(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_r) \mapsto \Phi$ следует, что $f \equiv \Phi$. Выбранное подмножество должно быть минимальным (в смысле сделанных ранее определений).

$\Phi \mapsto (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_r)$, если каждая k_i покрывается подходящим α_j. т.к. в противном случае существовали бы такие значения переменных, что непокрытая k_i (и, следовательно, Φ) принимали бы значение 1, а $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_r$ принимало бы значение 0.

Задача нахождения минимального подмножества простых импликантов решается с помощью таблиц, столбцы которых перенумерованы k_i, строки простыми импликантами $\alpha_{1},\ldots,\alpha_m$.

Из примера предыдущей лекции получаем следующую таблицу 7.1 простых импликантов:

Таблица 7.1.

	0000	*0001*	*0010*	*1000*	*1001*	*1100*	*1101*
00-0	×		×				
-00-	×	×		×	×		
1-0-				×	×	×	×

Крестики стоят в тех позициях, где импликант покрывает элементарную конъюнкцию.

Правило. Если в столбце имеется лишь один крестик, то соответствующая строка (т.е. импликант) должна быть выбрана обязательно (т.к. только этот импликант покрывает соответствующую конъюнкцию). Множество таких строк (т.е. импликантов) отражает ядро задачи. Далее, вычеркиваем все столбцы, у которых на пересечении с данной строкой есть крестик (т.е. конъюнкция покрывается импликантом).

В нашем примере в ядро задачи входят все импликанты. Следовательно, минимальным представлением для функции *f(x,y,z,t)* является $\bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$, т.е.

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} .$$

Возможны следующие варианты:

1) после выделения ядра еще остаются элементарные конъюнкции, подлежащие покрытию;
2) может оказаться, что останутся простые импликанты, которые не покрывают ни одну элементарную конъюнкцию, не покрытую элементами ядра.

В первом случае из множества импликантов, не входящих в ядро, требуется выбрать такие, которые покрывают оставшиеся непокрытыми элементарной конъюнкции. Во втором случае импликант является лишним.

<u>Пример 7.1.</u> По алгоритму Куайна и Мак-Клоски минимизировать функцию. (Пусть получили следующие импликанты, таблица 7.2).

Таблица 7.2.

	0000	*0100*	*1000*	*0011*	*0101*	*0110*	*1010*	*1011*	*0111*
01--					×	×			×
0-00	×	×							
-000	×		×						
101-							×	×	
-011				×				×	
0-11				×					×

Выделив ядро, и определив все элементарные конъюнкции, покрываемые им, придем к следующей таблице 7.3.

Таблица 7.3.

	0011
0-00	
-011	×
0-11	×

Элементарная конъюнкция 0011 покрывается любым из импликантов –011 и 0–11. 0–00 – лишний импликант.

Следовательно, получаем два неизбыточных выражения

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}y\vee\bar{y}\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}z\vee\bar{y}zt,$$

$$f(x,y,z,t)=\bar{x}y\vee\bar{y}\bar{z}\bar{t}\vee x\bar{y}z\vee\bar{x}zt,$$

минимальных по любому из определений.

Ответ. Минимальными являются следующие функции: $f(x,y,z,t) = \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}zt$,
и $f(x,y,z,t) = \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}zt$.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 7.2. Найдем минимальное представление следующей функции: $f(x,y,z,t) = (1001111110110000)$.

Таблица простых импликантов для данной функции приводится ниже (таблица 7.4).

Таблица 7.4.

	Имплик.	*0000*	*0100*	*1000*	*0011*	*0101*	*0110*	*1010*	*1011*	*0111*
a	*0-00*	×	×							
b	*-000*	×		×						
c	*10-0*			×				×		
d	*-011*				×				×	
e	*0-11*				×					×
f	*101-*							×	×	
g	*01- -*		×			×	×			×

Ядро *01–* покрывает *0100, 0101, 0110, 0111*. Вычеркивая соответствующие строки и столбцы, получаем таблицу 7.5.

Таблица 7.5.

	0000	*1000*	*0011*	*1010*	*1011*
0-00	×				
-000	×	×			
10-0		×		×	
-011			×		×
0-11			×		
101-				×	×

Последняя таблица 7.5 дает следующие минимальные представления исходной функции:

а) *–000*
10-0
-011

б) *0-00*
10-0
-011

и т.д. Данный пример показывает, что иногда сложно перебрать все варианты с помощью таблиц.

Эта задача может быть решена также следующим образом. Обозначим импликанты через *a,b,c,d,e,f,g*. Тогда из таблицы следует, что элементарная конъюнкция (*0000*) покрывается импликантами a или b ($a \vee b$), элементарная конъюнкция (*0100*) – импликантами a или g ($a \vee g$) и т.д.

Имеем:

$(a \vee b)(a \vee g)(b \vee c)(d \vee e)g(c \vee f)(d \vee f)(e \vee g)=$
$=(a \vee ag \vee ab \vee bg)(bd \vee be \vee cd \vee ce)(cd \vee cf \vee df \vee f)(e \vee g)g=(a \vee bg)(bd \vee be \vee cd \vee ce)(f \vee cd)g=$
$=(abd \vee abe \vee acd \vee ace \vee bdg\ \ beg \vee bcdg \vee bceg)(f \vee cd)g=$
$=(abdf \vee abef \vee acdf \vee acef \vee bdgf \vee bgef\ \ abcd \vee abcde \vee acd \vee acde \vee bcdg \vee bcdge)g=abdfg \vee abefg \vee acefg \vee bdgf \vee bgef \vee acdg \vee bcdg$

Получаем 7 различных неизбыточных представлений исходной функции. Из них минимальными являются последние четыре.

Заметим, что в любое представление входит импликант g, т.к. он является ядром.

<u>Ответ.</u> Минимальными являются следующие 7 функции:

1) $f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{y}zt \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}z$

2) $f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}zt \vee x\bar{y}z$

3) …

4) … Остальные функции в качестве упражнения предлагается выписать читателю самостоятельно.

Тема 3. Полнота и замкнутость систем логических функций

8. *Основные определения. Основные замкнутые классы*

Основные определения

Определение. Система функций $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ из P_2 называется функционально полной, если любая логическая функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Примеры полных систем:

а) P_2– полная система,

б) система $\{\neg,\vee,\wedge\}$ – полная система.

Не каждая система является полной. Так $\{0,1\}$ не является, очевидно, полной.

Теорема 8.1. Пусть даны две системы функций из P_2:

$F=\{f_1,\ldots,f_n\}$,

$G=\{g_1,\ldots,g_m\}$.

Пусть система F –полна и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы G. Тогда система G – полна.

Доказательство. Пусть h –произвольная функция из P_2. В силу полноты F ее можно представить в виде $h=u(f_1,\ldots,f_n)$. По условию теоремы

$f_1=u_1(g_1,\ldots,g_m)$

…………………

$f_n=u_n(g_1,\ldots,g_m)$

Тогда $h=u(f_1,\ldots,f_n)=u(u_1(g_1,\ldots,g_m),\ldots,u_n(g_1,\ldots,g_m))=u'(g_1,\ldots,g_m)$.

Из теоремы, например, вытекает:

а) система $\{\neg,\vee\}$ является полной, что следует из полноты системы $\{\neg,\vee,\wedge\}$ и равенства

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}\ .$$

б) система $\{\rceil, \wedge\}$ является полной, что может быть доказано либо аналогично предыдущему, либо через принцип двойственности.

<u>Определение.</u> Пусть F – некоторое подмножество функций из P_2. <u>Замыканием</u> F называется множество всех логических функций, представляемых в виде формул через функции из F.

Замыкание множества F обозначается через $[F]$.

Примеры замыканий:

а) $[P_2]=P_2$;

б) замыканием множества $\{1,\oplus\}$ будет класс L всех линейных функций, т.е. функций, имеющих вид

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\alpha_0\oplus\alpha_1x_1\oplus\ldots\oplus\alpha_nx_n,$$

где $\alpha_i=\{0,1\}$, $i=\overline{0,n}$.

<u>Определение.</u> Класс F называется <u>функционально замкнутым,</u> если $[F]=F$.

Примеры функционально замкнутых классов:

а) P_2;

б) класс L замкнут, т.к. линейная комбинация линейных выражений является линейным выражением.

<u>Определение</u> (полноты в терминах замыкания и замкнутых классов). F – полная систем, если $[F]=P_2$.

Основные замкнутые классы

<u>Класс логических функций T_0</u>

Обозначим через T_0 <u>класс всех логических функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, сохраняющих константу 0</u>, т.е. функций таких, для которых выполняется равенство $f(0,\ldots,0)=0$.

Заметим, что если $f\in T_0$, а f' – функция, равная f (т.е. отличающаяся некоторым множеством фиктивных переменных), то и $f'\in T_0$.

Далее, функции $0, x, x\&y, x\vee y, x\oplus y$ принадлежат классу T_0, а функции 1, $\bar{x}$ не входят в T_0.

Поскольку таблица для функций f из класса T_0 в первой строке содержит значение 0, то в T_0 содержится ровно $(1/2)2^{2^n}$ булевых функций, зависящих от переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Покажем, что T_0 –замкнутый класс. Так как T_0 содержит тождественную функцию (в противном случае необходимо было бы показать, что $x_i=f(f_1,\ldots,f_n)$), то для обоснования замкнутости достаточно показать, что функция Φ:

$$\Phi=f(f_1,\ldots,f_n)$$

принадлежит T_0, если $f,f_1,\ldots,f_n$ принадлежат T_0. Это следует из цепочки равенств $\Phi(0,\ldots,0)=f(f_1(0,\ldots,0),\ldots,f_n(0,\ldots,0))=f(0,\ldots,0)=0$.

Класс логических функций T_1

Обозначим через T_1 класс всех логических функций $f(x_1,\ldots,x_n)$, сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(1,\ldots,1)=1$.

Очевидно, что класс T_1 вместе с любой функцией содержит и любую равную ей функцию. Легко видеть, что функции $1, x, x\&y, x\vee y$ принадлежат классу T_1, а функции 0 и $\bar{x}$ не входят в T_1.

Аналогично предыдущему показывается, что T_1 содержит $(1/2)2^{2^n}$, функций, зависящих от n переменных, и является замкнутым классом.

Замечание. Класс T_1 состоит из функций, двойственных функциям из класса T_0.

Класс логических функций S

Обозначим через S класс всех самодвойственных функций f из P_2, т.е. таких, что $f^*=f$.

Как и выше, можно проверить, что добавление равных функций не выводит за пределы класса *S*. Очевидно, что функции *x*, $\bar{x}$ – самодвойственны.

Из определения самодвойственной функции:

$$\bar{f}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) = f(x_1,...,x_n),$$

следует, что на противоположных наборах $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n)$ самодвойственная функция принимает противоположные значения. Следовательно, самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на первой половине строк. Поэтому число всех самодвойственных функций, зависящих от переменных $x_1,\dots,x_n$, равно $2^{2^{n-1}}$.

Докажем, что класс *S* замкнут. Поскольку класс *S* содержит тождественную функцию, то достаточно показать, что функция Φ:

$$\Phi=f(f_1,\dots,f_n)$$

является самодвойственной, если $f, f_1,\dots,f_n$ – самодвойственны. Это проверяется непосредственно

$$\Phi^* = f^*(f_1^*,\dots,f_n^*) = f(f_1,\dots,f_n) = \Phi.$$

<u>Лемма (о несамодвойственной функции).</u> Если $f(x_1,\dots,x_n)\notin S$, то из нее путем подстановки функций *x* и $\bar{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одной переменной, т.е. константу.

<u>Доказательство.</u> Т.к. $f \notin S$ то найдется набор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ такой, что $f(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_n)$.

Рассмотрим функции $\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$, $i=\overline{1,n}$ и положим $\varphi(x) = f(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$.

Тогда имеем

$$\varphi(0) = f(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0)) = f(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n}) = f(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_n) =$$
$$= f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(1^{\alpha_1},...,1^{\alpha_n}) = f(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1)) = \varphi(1)$$

что и требовалось доказать.

Класс логических функций *M*

Определение. Для двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$ выполнено отношение предшествования $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, если $\alpha_1 \le \beta_1,...,\alpha_n \le \beta_n$.

Например, $(0,1,0,1) \prec (1,1,0,1)$.

Очевидно, что если $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \prec \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\gamma}$. При этом не любые пары наборов находятся в отношении предшествования. Например, наборы $(0,1)$ и $(1,0)$ в таком отношении не находятся. Таким образом, множество всех двоичных наборов длины n по отношению к операции предшествования $\prec$ является частично упорядоченным.

Определение. Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких, что $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ имеет место

$$f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta}).$$

Заметим, что функция, равная монотонной функции, также является монотонной.

Монотонными функциями являются $0, 1, x, x\&y, x \vee y$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций. Покажем, что класс M замкнут. Так как M содержит тождественную функцию, то достаточно показать, что функция Φ:

$$\Phi = f(f_1,...,f_m)$$

является монотонной, если $f, f_1,...,f_m$ монотонны.

Действительно, пусть

$$\tilde{x} = (x_1,...,x_n), \quad \tilde{x}^1 = (x_{11},...,x_{1l_1}),...,\tilde{x}^m = (x_{m1},...,x_{ml_m})$$

наборы переменных функций $\Phi, f_1,...,f_m$. Причем множество переменных функции Φ состоит из тех и только тех переменных, которые встречаются у функций $f_1,...,f_m$.

Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ два набора длины n значений переменной $\tilde{x}$, находящихся в отношении предшествования: $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$. Эти наборы определяют наборы $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m$ значений переменных $\tilde{x}^1, ..., \tilde{x}^m$ такие, что $\tilde{\alpha}^1 \prec \tilde{\beta}^1, ..., \tilde{\alpha}^m \prec \tilde{\beta}^m$. Так как функции $f_1, ..., f_m$ монотонны, то

$$f_1(\tilde{\alpha}^1) \leq f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m) \leq f_m(\tilde{\beta}^m).$$

Поэтому

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \prec (f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\beta}^m))$$

и в силу монотонности f имеем

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}^1), ..., f_m(\tilde{\alpha}^m)) \leq f(f_1(\tilde{\beta}^1), ..., f_m(\tilde{\beta}^m)) = \Phi(\tilde{\beta}),$$

т.е. $\Phi(\tilde{\alpha}) \leq \Phi(\tilde{\beta})$ – монотонна.

Определение. Будем называть наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соседними, если

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

и докажем следующую лемму.

Лемма (о немонотонной функции). Если $f(x_1, ..., x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\bar{x}$.

Доказательство. Докажем сначала, что найдутся соседние наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$: $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Действительно, так как $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1 : \tilde{\alpha}^1 \leq \tilde{\beta}^1$ и $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$. Если $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ соседние, то доказательство завершено.

Если же $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ не являются соседними наборами, то набор $\tilde{\beta}^1$ отличается от набора $\tilde{\alpha}^1$ в t координатах, где $t>1$, причем эти t координат в наборе $\tilde{\alpha}^1$ равны 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$

равны 1. В силу этого между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно вставить *t-1* промежуточных наборов $\tilde{\alpha}^2,...,\tilde{\alpha}^t$:

$$\tilde{\alpha}^1 \prec \tilde{\alpha}^2 \prec ... \prec \tilde{\alpha}^t \prec \tilde{\beta}^1,$$

причем наборы, стоящие рядом, будут соседними. Т.к. $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$, то, по крайней мере, на какой-то одной паре соседних наборов (обозначим их $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$) $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ – соседние по *i*-ой координате, т.е.

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},...,\alpha_n).$$

Имеем

$$\varphi(0) = f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}) =$$

$$= f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n) = \varphi(1).$$

Следовательно

$$\varphi(0) = 1, \text{ а } \varphi(1) = 0, \text{ т.е. } \varphi(x) = \bar{x}.$$

Класс логических функций *L*

Последним классом является класс *L* всех линейных функций. Он содержит константы *0* и *1*,функции x, $\bar{x}$, $x \oplus y$ и не содержит функций $x \vee y$, $x \& y$. Ранее было показано, что этот класс замкнут.

Лемма (о нелинейной функции). Если $f(x_1,...,x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций x и $\bar{x}$,а также, быть может, путем навешивания отрицания над *f* можно получить функцию $x_1 \& x_2$.

Замечание. Любая формула, построенная из констант *0,1* и функций $x_1 \& x_2$ и $x_1 \oplus x_2$, после раскрытия скобок и несложных алгебраических преобразований переходит в полином по *mod2* – полином Жегалкина.

Доказательство. Возьмем полином Жегалкина для нелинейной функции *f*:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{(i_1,...,i_s)} \alpha_{i_1...i_s} x_{i_1}...x_{i_s} .$$

В силу нелинейности полинома в нем найдется член, содержащий не менее двух множителей. Пусть это x_1 и x_2. Тогда полином можно записать следующим образом

$$\sum_{(i_1,...,i_s)} \alpha_{i_1...i_s} x_{i_1}...x_{i_s} = x_1 x_2 f_1(x_3,...,x_n) \oplus x_1 f_2(x_3,...,x_n) \oplus$$
$$\oplus x_2 f_3(x_3,...,x_n) \oplus f_4(x_3,...,x_n),$$

причем $f_1(x_3,...,x_n) \not\equiv 0$.

Выберем такие $\alpha_3,...,\alpha_n$, чтобы $f_1(\alpha_3,...,\alpha_n) = 1$. Тогда

$$\varphi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma,$$

где α, β, γ – константы, равные 0 или 1.

Рассмотрим функцию $\psi(x_1,x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1,x_2)$ следующим образом:

$$\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma.$$

Воспользуемся явным выражением для функции $\varphi(x_1,x_2)$, чтобы вычислить

$$\phi(x_1+\beta, x_2+\alpha)+\alpha\beta+\gamma = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus$$
$$\beta(x_2 \oplus \alpha)+\gamma+\alpha\beta+\gamma = x_1x_2+\alpha x_1+\beta x_2+\alpha\beta+\alpha x_1+\alpha\beta+ .$$
$$\beta x_2+\alpha\beta+\gamma+\alpha\beta+\gamma = x_1x_2$$

Следовательно, $\psi(x_1,x_2) = x_1 x_2$.

В заключение отметим, что классы T_0,T_1,S,M и L попарно различны, что видно из таблицы.

Таблица 8.1.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	-	-	+	-	+

Теорема (о функциональной полноте). Для того, чтобы система функций $F=\{f_1,...,f_n\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.

Доказательство. Необходимость. Пусть F – полна, т.е. $[F]=P_2$. Предположим, что F содержится в одном из замкнутых классов, который обозначим через F', т.е. $F \subseteq F'$. Но тогда

$$P_2=[F] \subseteq [F]'=F' \text{– противоречие.}$$

Достаточность. Пусть F не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов. Тогда из F можно выделить подсистему, содержащую 5 функций f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не содержатся соответственно в классах T_0, T_1, S, M, L. Пусть эта подсистема будет $F'=\{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}$.

Можно считать, что все эти функции зависят от одинакового числа переменных.

1. Построим при помощи функций f_i, f_j и f_k константы 0 и 1.

Рассмотрим $f_i \notin T_0$. Если $f_i(1,\ldots,1)=1$, то $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)$ есть константа 1, т.к. $\varphi(0)=f_i(0,\ldots,0)=1$, в силу того, что $f_i \notin T_0$ и $\varphi(1)=f_i(1,\ldots,1)=1$. Константу 0 получаем из f_j: $f_j(1,\ldots,1)=0$.

Если $f_i(1,\ldots,1)=0$, то $\varphi(x)=f_i(x,\ldots,x)$ есть $\bar{x}$, т.к. $\varphi(0)=f_i(0,\ldots,0)=1$, $\varphi(1)=f_i(1,\ldots,1)=0$. Возьмем f_k $(f_k \notin S)$. Из леммы о несамодвойственной функции мы можем получить константу 0 или 1, а т.к. у нас есть функция $\bar{x}$, то мы можем получить и вторую константу.

2. Имея константу 0 и 1 и функцию f_m $(f_m \notin M)$, мы по лемме о немонотонности функции можем получить функцию $\bar{x}$.

3. Имея константы 0 и 1, функцию $\bar{X}$ и функцию f_l $(f_l \notin L)$ мы по лемме о нелинейной функции можем получить функцию $x\&y$.

Таким образом, мы при помощи формул над F' (а значит и над F) получили функции $\bar{x}$ и $x_1\&x_2$, что доказывает достаточность. Ч.т.д.

Тема 4. Исчисление высказываний

9. Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие

Общие принципы построения формальной теории

Исчисление (или формальная теория) высказываний, строится следующим образом.

1. Определяется множество формул, или правильно построенных выражений, образующее язык теории.
2. Выделяется подмножество формул, называемых аксиомами теории.
3. Задаются правила вывода теории.

Выводом формулы B из формул $A_1,\ldots,A_n$ называется последовательность формул $F_1,\ldots,F_m$: F_m=B, а любая F_i есть либо аксиома, либо одна из формул $A_1,\ldots,A_n$, либо F_i непосредственно выводима из $F_1,\ldots,F_{i-1}$, по одному из правил вывода. Совокупность объектов, которые дают аксиомам содержательный смысл, называют интерпретацией данной системы аксиом. Аксиомы и правила вывода стараются выбирать таким образом, чтобы формальная теория имела содержательный смысл.

В соответствии с этими общими принципами построено и исчисление высказываний.

Определим высказывание как утвердительное предложение, которое может быть либо истинным (*И*) либо ложным (*Л*).

Например, высказываниями являются следующие предложения:

- Снег – белый.

- *Я* – человек.

4. Алфавит исчисления высказываний есть объединение трех множеств AU{$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$}U{(,)}, где
   A – множество пропозициональных переменных, т.е. переменных, значениями которых служат высказывания;
   {$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$} – множество логических связок;
   {(,)} – множество вспомогательных знаков.
5. <u>Формулы</u>
   - *a*, где $a \in A$ – формула;
   - если *A* и *B* – формулы, то $(\neg A),(A \vee B),(A \wedge B),(A \rightarrow B)$ – формулы.

Поскольку значениями пропозициональных переменных являются высказывания, которые, в свою очередь, принимают значения либо *И*, либо *Л*, то и формула также принимает два значения – *И* либо *Л*.

Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие

<u>Определение</u>. <u>Интерпретацией формулы</u> *F* называют приписывание значений **И** (истина) или **Л** (ложь) входящим в нее переменным.

<u>Определение</u>. Формула *F* <u>истинна</u> в некоторой интерпретации тогда и только тогда, когда она получает значение *И* в данной интерпретации.

Проверка истинности формул является одной из основных задач исчисления высказываний. Эта задача может быть решена путем введения аксиом и правил вывода.

Однако, введя аксиомы и правила вывода, можно заметить, что зависимость истинности формулы *F* исчисления высказываний от истинности, входящих в нее элементарных высказываний в точности соответствует зависимости значения логической функции, представляемой формулой F, от значений переменных этой функции. Иначе говоря, если задана формула $F(a_1,\ldots,a_n)$ и задана ее интерпретация, то для выяснения истинности ее нужно вычислить как логическую функцию на наборе $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, где $\delta_i=1$, если $a_i=И$ и $\delta_i=0$, если $a_i=Л$. Если $F(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1$, то $F=И$, если $F(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0$, то $F=Л$.

Поэтому вводить аксиомы и правила вывода мы не будем, а воспользуемся изученным аппаратом логических функций.

Определение. Формула F называется общезначимой тогда и только тогда, когда она истинна при всех интерпретациях (необщезначима в противном случае).

Определение Формула F называется противоречивой тогда и только тогда, когда она ложна при всех интерпретациях (в противном случае непротиворечива).

$F(x_1\ldots,x_n)\equiv И$ – общезначима, непротиворечива

$F(x_1,\ldots,x_n)=Л, F(y_1,\ldots,y_n)=И$ – необщезначима, непротиворечива

$F(x_1,\ldots,x_n)\equiv Л$ – противоречива, необщезначима.

Определение. Пусть даны формулы $F_1,\ldots,F_n$ и формула G. G есть логическое следствие формул $F_1,\ldots,F_n$ тогда и только тогда, когда для всякой интерпретации I, в которой $F_1\wedge\ldots\wedge F_n$ истинна, G также истинна. ($F_1,\ldots,F_n$ называется посылками).

Теорема 9.1. G есть логическое следствие $F_1,\ldots,F_n$ тогда и только тогда, когда формула $((F_1\wedge\ldots\wedge F_n)\to G)$ общезначима.

Доказательство. Обозначим $H=((F_1\wedge\ldots\wedge F_n)\to G)$.

Необходимость. Пусть G – логическое следствие $F_1,\ldots,F_n$. Если $F_i=И, i=\overline{1,n}$, то $G=И$, следовательно $H=И$. Если некоторое $F_i=Л$ в интерпретации I, то $F_1\wedge\ldots\wedge F_n=Л$ в этой интерпретации, следовательно при $G=И$ или $G=Л$ обязательно $H=И$, т.е. H – общезначима.

Достаточность. Пусть H–общезначима. Тогда если $F_1\wedge\ldots\wedge F_n=И$ в интерпретации I, то $G=И$ в этой интерпретации, т.е. G – логическое следствие.

Теорема доказана.

Теорема 9.2. G есть логическое следствие $F_1,\ldots,F_n$ тогда и только тогда, когда формула $(F_1 \wedge\ldots\wedge F_n \wedge(\urcorner G))$ противоречива.

Доказательство. Из теоремы 9.1. G – логическое следствие $\Leftrightarrow$ $((F_1\wedge\ldots\wedge F_n)\to G)$ общезначима, т.е. $\overline{((F_1\wedge\cdots F_n)\to G)}$ – противоречива. Но

$$\overline{((F_1\wedge\cdots\wedge F_n)\to G)} = \overline{(\overline{(F_1\wedge\cdots F_n)}\vee G)} =$$
$$= \overline{(\overline{F_1}\vee\cdots\vee\overline{F_n}\vee G)} = (F_1\wedge\cdots\wedge F_n\wedge\overline{G}).$$

Пример 9.1. Проверить является ли вопрос задачи логическим следствием?

Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме, может быть, случая, когда она длится более года и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать, забастовка оканчивается и президент фирмы не уходит. Длилась ли забастовка более года?

Ответ на этот вопрос может быть дан с помощью исчисления высказываний.

Обозначим элементарные высказывания через пропозициональные переменные:

p: конгресс отказывается действовать;

q: забастовка оканчивается;

r: президент фирмы уходит в отставку;

s: забастовка длится более года.

Тогда рассматриваемое высказывание может быть записано на языке исчисления высказываний следующим образом:

$$F_1 : p \to (\overline{q} \vee (rs))$$
$$F_2 : pq\overline{r}$$

$$G : s - ?$$

Используя теорему 9.2, получаем

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \overline{G} = (p \to (\overline{q} \vee (rs))) \wedge (pq\overline{r}) \wedge \overline{s} =$$
$$= (\overline{p} \vee \overline{q} \vee (rs)) \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) = \overline{(p \wedge \overline{q} \wedge (\overline{r}\,\overline{s}))} \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) =$$
$$= \overline{(pq\overline{r}\,\overline{s})} \wedge (pq\overline{r}\,\overline{s}) = 0$$

и, следовательно, заключение G является верным.

10. Метод резолюций для исчисления высказываний

Метод резолюций для исчисления высказываний

Определение. Дизъюнктом называется дизъюнкция пропозициональных переменных.

Определение. Пропозициональные переменные p и $\overline{p}$ называются контрарными.

Определение. Для любых двух дизъюнктов C_1 и C_2, если существует переменная σ_1 в C_1, которая контрарна переменной σ_2 в C_2, то вычеркнув σ_1 и σ_2 из C_1 и C_2 соответственно, и построив дизъюнкцию оставшихся дизъюнктов, получим резольвенту C_1 и C_2.

Определение. Дизъюнкт, не содержащий переменных, называется пустым (обозначаем **П**). Такой дизъюнкт по определению противоречив.

Пример 10.1. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee r$$
$$C_2: \quad \bar{p} \vee q$$
$$\frac{p \vee r, \quad \bar{p} \vee q}{r \vee q}$$

В данном примере $r \vee q$ – резольвента.

Пример 10.2 Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee q \vee r$$
$$C_2: \quad \bar{q} \vee s$$
$$\frac{p \vee q \vee r, \quad \bar{q} \vee s}{p \vee r \vee s}$$

В данном примере $p \vee r \vee s$ – резольвента.

Пример 10.3. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad p \vee q$$
$$C_2: \quad \bar{p}$$
$$\frac{p \vee q, \quad \bar{p}}{q}$$

В данном примере q – резольвента.

Пример 10.4. Для двух дизъюнктов C_1 и C_2 найти резольвенту.

$$C_1: \quad \bar{p} \vee q$$
$$C_2: \quad \bar{p} \vee r$$

В данном примере резольвенты не существует.

Теорема 10.1. Пусть даны два дизъюнкта C_1 и C_2. Тогда резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 есть их логическое следствие.

Доказательство. Пусть дизъюнкты C_1 и C_2 содержат контрарную пару переменных σ и $\overline{\sigma}$, т.е. $C_1 = \sigma \vee C_1'$ и $C_2 = \overline{\sigma} \vee C_2'$, где C_1' и C_2' – некоторые дизъюнкты. Пусть также $C = C_1' \vee C_2'$ – резольвента C_1 и C_2.

Пусть C_1 и C_2 истинны в некоторой интерпретации I. Нужно показать, что резольвента C дизъюнктов C_1 и C_2 также истинна в I. Прежде всего либо σ, либо $\overline{\sigma}$ ложны в I. Пусть σ ложна в I. Тогда дизъюнкт C_1 должен содержать более одной переменной, иначе C_1 был бы ложен в I. Следовательно C_1' должен быть истинен в I. Таким образом, резольвента $C = C_1' \vee C_2'$ истинна в I. Аналогично можно показать, что если $\overline{\sigma}$ ложна в I, то C_2' должен быть истинен в I, а, следовательно, и $C = C_1' \vee C_2'$ должна быть истинна в I. Теорема доказана.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов. Резолютивный вывод C из S есть такая конечная последовательность $C_1, C_2, \dots, C_k$ дизъюнктов, что $C_k = C$, а каждый C_i или принадлежит S или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих C_i.

Если существует вывод C из S , то C (по теореме 10.1) является логическим следствием S. Кроме того, если C=П, то $s_1 \& s_2 \& \dots \& s_n$ – противоречие. Здесь $\{ s_1, s_2, \dots, s_n \} = S$.

Пример 10.5. Является ли резольвента логическим следствием?

$$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{q}, p\}.$$

Резолютивный вывод:

$$\frac{\bar{p} \vee q, \bar{q}}{\bar{p}}, \quad \frac{\bar{p}, p}{П}.$$

Следовательно $(\bar{p} \vee q)(\bar{q})(p) \equiv Л$.

Рассмотренный метод может быть использован для проверки того, является ли формула G логическим следствием формул $F_1, \dots, F_n$.

Для такой проверки необходимо:

1) представить формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \bar{G}$ в виде КНФ, т.е. в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.

2) Если из множества дизъюнктов $S = \{F_1, \dots, F_2, \bar{G}\}$ удалось вывести П, то G логическое следствие $F_1, \dots, F_n$, в противном случае – нет.

Пример 10.6. Доказать, что r является логическим следствием формул $p \to q, q \to r, p$.

1) Представляем формулы $p \to q, q \to r$ в виде КНФ: $p \to q = \bar{p} \vee q, \quad q \to r = \bar{q} \vee r$.

$$S = \{\bar{p} \vee q, \bar{q} \vee r, p, \bar{r}\}.$$

2) Резолютивный вывод:

$$\frac{\bar{p} \vee q, \bar{q} \vee r}{\bar{p} \vee r}; \quad \frac{\bar{p} \vee r, p}{r}; \quad \frac{r, \bar{r}}{П}$$

Пример 10.7. Для задачи проверить вывод на логическое следствие.

Если Сергей интересуется логикой, то он посещает лекции по дискретной математике и не пропускает семинарские занятия. Если Сергей посещает лекции, то он пропускает семинарские занятия. Следовательно, Сергей не интересуется логикой.

Обозначим элементарные высказывания через пропозициональные переменные:

p: Сергей интересуется логикой;
q: Сергей посещает лекции;
r: Сергей посещает семинары.

Тогда рассматриваемое высказывание может быть записано на языке исчисления высказываний следующим образом:

$$\begin{array}{l} F_1\colon p \to qr \\ F_2\colon q \to \overline{r} \\ \hline G\colon \overline{p} \end{array}$$

1) Представляем формулу $F_1 \& F_2 \& \overline{G}$ в виде КНФ:

$$F_1 \& F_2 \& \overline{G} = (p \to qr)(q \to \overline{r})\overline{\overline{p}} = (\overline{p} \vee qr)(\overline{q} \vee \overline{r})p =$$

$$= (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee r)(\overline{q} \vee \overline{r})p.$$

$$S = \{\overline{p} \vee q, \overline{p} \vee r, \overline{q} \vee \overline{r}, p\}.$$

2) Резолютивный вывод

$$\frac{\overline{p} \vee q, \overline{q} \vee \overline{r}}{\overline{p} \vee \overline{r}}; \quad \frac{\overline{p} \vee \overline{r}, \overline{p} \vee r}{\overline{p}}; \quad \frac{\overline{p}, p}{\Pi}$$

Поскольку резолютивный вывод заканчивается пустым дизъюнктом, то G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

Тема. Исчисление предикатов

11. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Формулы. Интерпретация формул

Понятие предиката

В математике и других науках наряду с высказываниями встречаются выражения, имеющие форму высказывания, но содержащие переменные, принадлежащие некоторому множеству D. Множество называется предметной областью, а переменные – предметными переменными.

Например,

«2 – простое число» – высказывание;

«3>1» – высказывание.

Но, заменив числа в этих высказываниях предметной переменной n из множества натуральных чисел, получим выражения:

«n– простое число»,

«$n_1>n_2$»,

являющиеся не высказываниями, а предикатами. Предикаты отражают свойства и отношения между предметами из предметной области.

Введем следующие обозначения:

$P_1(n)$ – свойство «быть простым числом», а

$P_2(n_1,n_2)$ отношение «n_1 больше n_2».

В общем случае мы ничего не можем сказать о значении предиката, но подставив, например, в P_1 и P_2 значения $n=2,$ $n_1=3,$ $n_2=1$, получим

$P_1(2)$ – «2–простое число»,

$P_2(3,1)$ – «3 больше 1» –

истинные высказывания, а подставив значения $n=4$, $n_1=1$, $n_2=3$. получим

$P_1(4)$ – «4 – простое число»,

$P_2(1,3)$ – «1 больше 3» –

ложные высказывания, т.е. предикат при подстановке конкретных констант из предметной области, может принимать значение *И* или *Л*.

Кванторы

$\forall$ – квантор всеобщности;

$\exists$ – квантор существования.

Если $P(x)$ – одноместный предикат, то запись $(\forall x)P(x)$ означает, что свойство P выполняется для всех предметов из предметной области, а

$(\exists x)P(x)$ означает, что существует по крайней мере один предмет, обладающий свойством P.

Переход от $P(x)$ к $(\forall x)P(x)$ или к $(\exists x)P(x)$ называется связыванием переменной или навешиванием квантора на переменную x. Переменная, на которую навесили квантор, называется связанной, несвязанная переменная называется свободной.

Смысл связанных и свободных переменных различен. Свободная переменная – это переменная, которая может принимать любые значения из D . При этом $P(x)$ зависит от значения x . Выражение $(\forall x)P(x)$ от x не зависит и при заданных P и D имеет вполне определенное значение.

Например, если

$P(x)$ – «быть четным числом», то $(\forall x)P(x)$ принимает значение *Л*, если D – множество натуральных чисел и $(\forall x)P(x)$ принимает значение *И*, если $D=\{2,4,6,\dots\}$.

Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных и превращает его в предикат от меньшего числа переменных.

Алфавит

Пусть

D – предметная область (множество),

f: $D\times D\times\ldots\times D \to D$ – n-местная функция,

p:- $D\times D\times\ldots\times D \to B=\{0,1\}$ – n-местный предикат.

Пусть также

V – множество предметных переменных,

C – множество предметных констант,

F – множество функциональных (1,2,…- местных) символов,

P – множество предикатных (1,2,…- местных) символов,

$\{\neg,\vee,\wedge,\to\}$ – множество операций,

$\{\exists,\forall\}$ – множество кванторов,

$\{(,)\}$ – множество вспомогательных символов.

Тогда

$V\cup C\cup F\cup P\cup\{\neg,\vee,\wedge,\to\}\cup\{\exists,\forall\}\cup\{(,)\}$ – алфавит исчисления предикатов.

Формулы

Терм.

1. Всякая предметная переменная является термом.
2. Всякая предметная константа является термом.
3. Если f – n-местный функциональный символ, а $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то $f(t_1,\ldots,t_n)$ – терм.

Атом.

Если P – n-местный предикатный символ, $t_1,\ldots,t_n$ - термы, то $P\ (t_1,\ldots,t_n\ )$ – атом (атомарная или простейшая формула).

Формула.

1. Атом есть формула.
2. Если A и B – формулы, то $(\neg A),(A\vee B),(A\wedge B),(A \to B)$ – формулы, причем все переменные в этих

формулах – свободные.

3. Если A – формула, а x – свободная переменная в A, то $(\forall x)A$ и $(\exists\, x)A$ – формулы.

<u>Пример 11.1.</u> Приведем пример формулы и с названиями ее компонент.

Атом

$$(\forall x)\underbrace{\left(\overbrace{P(x)} \to \overbrace{Q(f(x),a)}\right)}_{\text{Область действия квантора}\,\forall}$$

Терм

Рис. 11.1. Формула и ее компоненты.

Все вхождения переменной x – связанные.

Интерпретация формул

<u>Определение.</u> Интерпретация I формулы F исчисления предикатов состоит из непустой предметной области D и указания значения всех констант, функциональных и предикатных символов, входящих в F. При этом:

1. каждой константе ставится в соответствие некоторый элемент из D;

2. каждому n –местному функциональному символу ставится в соответствие функция $D^n \to D$;

3. каждому n – местному предикатному символу ставится в соответствие n –местный предикат $D^n \to B$.

Если задана интерпретация I, то значение формулы определяется по следующим правилам:

а) если заданы значения формул G и H, то значения формул $\overline{G}, G \wedge H, H \vee G, H \to G$ можно определить по таблицам;

б) $(\forall x)G$ принимает значение *И*, если G имеет значение *И* для $\forall x \in D$; в противном случае G принимает значение *Л*;

в) $(\exists\ x)G$ принимает значение *И*, если G принимает значение *И* хотя бы для одного $x \in D$; в противном случае G принимает значение *Л*.

<u>Пример 11.2.</u> Рассмотрим формулу

$$G:(\forall x)(P(x) \to Q(f(x),a)).$$

Интерпретация:

1) $D=\{1,2\};$
2) $a=1;$
3) $f(1)=2;\ f(2)=1;$
4) $P(1)=Л,\ P(2)=И;\ Q(1,1)=И,\ Q(1,2)=И;\ Q(2,1)=Л,\ Q(2,2)=И.$

В данной интерпретации формула G принимает значение *И*.

В исчисление предикатов переносятся формулировки противоречивости (непротиворечивости), общезначимости (необщезначимости), логического следствия, данные для исчисления высказываний.

В исчислении предикатов верны также теоремы о логическом следствии, доказанные для исчисления высказываний.

Рассмотрим пример проверки логического следствия в исчислении предикатов.

<u>Пример 11.3.</u>

F_1: $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

F_2: $P(a)$

G: $Q(a)$

Рассмотрим любую интерпретацию I, в которой истинна формула $F_1 \wedge F_2$, т.е. формула $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge P(a)$. Тогда в этой интерпретации $P(a)=И$ и $(\forall x)(P(x) \to Q(x))=И$, т.е. $P(x) \to Q(x)=И$ для всех x из D, в том числе и для $x=a$.

Следовательно, $P(a) \rightarrow Q(a)=И$. Значит, т.к. $P(a)=И$, то и $Q(a)=И$.

Так как в исчислении предикатов имеется бесконечное число областей, которые в свою очередь могут быть бесконечны, то, вообще говоря, имеется бесконечное число интерпретаций формулы исчисления предикатов. Следовательно, в отличие от исчисления высказываний, невозможно доказать общезначимость или противоречивость формулы оценкой формулы при всех возможных интерпретациях.

В настоящее время разработаны и разрабатываются процедуры для проверки невыполнимости формул исчисления предикатов.

12. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму

Предваренная нормальная форма

В исчислении высказываний существуют две нормальные формы – конъюнктивная и дизъюнктивная. В исчислении предикатов также имеется нормальная форма, называемая предваренной нормальной формой.

Определение. Формула F исчисления предикатов находится в предваренной нормальной форме тогда и только тогда, когда формула F имеет вид

$$(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M),$$

где каждое $(Q_ix_i), i=\overline{1,n}$, есть или $(\forall x_i)$ или $(\exists x_i)$, а M есть формула, не содержащая кванторов. $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)$ называется префиксом, а M – матрицей формулы F.

Для приведения формулы исчисления предикатов к предваренной нормальной форме рассмотрим ряд эквивалентностей, содержащих кванторы.

Пусть F - формула, содержащая свободную переменную x (обозначим этот факт как $F[x]$). Пусть G - формула, не содержащая переменную x. Пусть Q есть или $\forall$ или $\exists$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

$$(Qx)F[x] \vee G = (Qx)(F[x] \vee G) \tag{12.1}$$

$$(Qx)F[x] \wedge G = (Qx)(F[x] \wedge G) \tag{12.2}$$

$$\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]} \tag{12.3}$$

$$\overline{(\exists x)F[x]} = (\forall x)\overline{F[x]} \tag{12.4}$$

Эквивалентности (12.1) и (12.2) очевидны, т.к. G не содержит x и, следовательно, может быть внесена в область действия квантора Q. Докажем эквивалентности (12.3) и (12.4). Пусть I - произвольная интерпретация с областью D . Если $\overline{(\forall x)F[x]}$ истинна в I, то $(\forall x)F[x]$ ложна в I. Это означает, что существует такой элемент e в D, что $F[e]$ ложна, т.е. $\overline{F[e]}$ истинна в I. Следовательно, $(\exists x)\overline{F[x]}$ истинна в I. С другой стороны, если $\overline{(\forall x)F[x]}$ ложна в I, то $(\forall x)F[x]$ истинна в I. Это означает, что $F[x]$ истинна для каждого элемента x в D, т.е. $\overline{F[x]}$ ложна для каждого элемента x в D. Следовательно, $(\exists x)\overline{F[x]}$ ложна в I. Т.к. $\overline{(\forall x)F[x]}$ и $(\exists x)\overline{F[x]}$ всегда принимают одно и то же истинностное значение при произвольной интерпретации, то по определению $\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]}$. Таким образом (12.3) доказано. Аналогично можно доказать и (12.4).

Предположим далее, что $F[x]$ и $H[x]$ - две формулы, содержащие свободную переменную x . Нетрудно доказать, что

$$(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)H[x] = (\forall x)(F[x] \wedge H[x]), \tag{12.5}$$

$$(\exists x)F[x] \vee (\exists x)H[x] = (\exists x)(F[x] \vee H[x]), \tag{12.6}$$

т.е. квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$ можно распределять по $\wedge$ и $\vee$ соответственно.

Однако $\forall$ и $\exists$ нельзя распределять по $\vee$ и $\wedge$ соответственно, т.е.

$$(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] \neq (\forall x)(F[x] \vee H[x]), \quad (12.7)$$

$$(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] \neq (\exists x)(F[x] \wedge H[x]). \quad (12.8)$$

В подобных случаях можно поступить следующим образом. Т.к. каждая связанная переменная в формуле может рассматриваться лишь как место для подстановки любой переменной, то каждую связанную переменную x можно переименовать в z, т.е. $(\forall x)H[x] = (\forall z)H[z]$. Если мы выберем переменную z, которая не встречается в $F[x]$, то

$$(\forall x)F[x] \vee (\forall x)H[x] = (\forall x)F[x] \vee (\forall z) H[z] =$$
$$= (\forall x) (\forall z)(F[x] \vee H[z]) \quad (12.9)$$

Аналогично

$$(\exists x)F[x] \wedge (\exists x)H[x] = (\exists x)F[x] \wedge (\exists z) H[z] =$$
$$=(\exists x)(\exists z)(F[x] H[z]) \quad (12.10)$$

Т.о., в общем случае имеем

$$(Q_1x)F[x] \vee (Q_2x)H[x]=(Q_1x)(Q_2z)(F[x] \vee H[z]), \quad (12.11)$$

$$(Q_3x)F[x] \wedge (Q_4x)H[x]=(Q_3x)(Q_4z)(F[x] \wedge H[z]), \quad (12.12)$$

где Q_1,Q_2 суть $\forall$ и $\exists$, а z не входит в $F[x]$. Конечно, если $Q_1=Q_2=\exists$, а $Q_3=Q_4=\forall$, то не обязательно переименовывать переменную x. Можно напрямую использовать формулы (12.5) - (12.8).

Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму

Шаг1. Используем $F \to G = \overline{F} \vee G$.

Шаг 2. Используем $\overline{\overline{F}} = F$,

или

$$\overline{F \vee G} = \overline{F} \wedge \overline{G}$$

$$\overline{F \wedge G} = \overline{F} \vee \overline{G}$$

или

$$\overline{(\forall x)F[x]} = (\exists x)\overline{F[x]},$$

$$\overline{(\exists x)F[x]} = (\forall x)\overline{F[x]}$$

чтобы внести знак отрицания внутрь формулы.

Шаг 3. Переименовываем связанные переменные, если это необходимо.

Шаг 4. Используем эквивалентности (12.1) - (12.6), (12.11), (12.12).

Пример 12.1. Привести к предваренной нормальной форме формулу $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$.

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = \overline{(\forall x)P(x)} \vee (\exists x)Q(x) =$$

$$= (\exists x)\overline{P(x)} \vee (\exists x)Q(x) = (\exists x)(\overline{P(x)} \vee Q(x))$$

Пример 12.2. Привести к предваренной нормальной форме формулу

$(\forall x)\ (\forall y)(((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u))$.

$$(\forall x)(\forall y)(((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)) =$$

$$(\forall x)(\forall y)(\overline{((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z))} \vee (\exists u)Q(x,y,u)) =$$

$$(\forall x)(\forall y)(((\forall z)(\overline{P(x,z)} \vee \overline{P(y,z)}) \vee (\exists u)Q(x,y,u)) =$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\overline{P(x,z)} \vee \overline{P(y,z)} \vee Q(x,y,u)).$$

13. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации

Скулемовская стандартная форма

Пусть формула F находится в предваренной нормальной форме $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M$. Пусть Q_r есть квантор существования в префиксе $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$, $1\le r \le n$. Если никакой квантор всеобщности не стоит в префиксе левее Q_r, выбираем константу C, отличную от других констант, входящих в M, заменяем все x_r , встречающиеся в M, на C и вычеркиваем (Q_rx_r) из префикса. Если $Q_{s_1},\dots,Q_{s_m}$ - список всех кванторов всеобщности, встречающихся левее $Q_r, 1\le s_1 < s_2 \dots < s_m < r$, выбираем новый m-местный функциональный символ f, отличный от других функциональных символов из M, заменяем все x_r из M на $f(x_{s_1},x_{s_2},\dots,x_{s_m})$ и вычеркиваем (Q_rx_r) из префикса. Применяем эту процедуру для всех кванторов существования, имеющихся в префиксе формулы F. Последняя из полученных формул есть скулемовская стандартная форма формулы F или просто стандартная форма формулы F. Константы и функции, используемые для замены переменных квантора существования, называются скулемовскими функциями.

Пример 13.1. Получить стандартную форму формулы F.
$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$.

Заменяем переменную x на константу a, переменную u на двухместную функцию $f(y,z)$, переменную w - на трехместную функцию $g(y,z,v)$. Получаем следующую стандартную форму формулы F:

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)).$$

Будем считать, что множество дизъюнктов S есть конъюнкция всех дизъюнктов из S, где каждая переменная в S управляется квантором всеобщности. Тогда стандартная форма формулы F может быть представлена множеством дизъюнктов S .

Теорема. Пусть S - множество дизъюнктов, представляющее стандартную форму формулы F. Тогда F

противоречива в том и только в том случае, когда S противоречиво.

<u>Доказательство.</u> Пусть F находится в предваренной нормальной форме, т.е. $F=(Q_1x_1)...(Q_nx_n)M[x_1,...,x_n]$. Здесь $M[x_1,\dots,x_n]$ означает, что матрица M содержит переменные $x_1,\dots,x_n$. Пусть Q_r - первый квантор существования и пусть

$$F_1=(\forall x_1)...(\forall x_{r-1})(Q_{r+1}x_{r+1})...(Q_nx_n)M[x_1,...,x_{r-1},f(x_1,...,x_{r-1}),x_{r+1},...x_n],$$

где f - скулемовская функция, соответствующая x_r, $1\leq r\leq n$. Нужно показать, что F противоречива тогда и только тогда, когда F_1 противоречива.

Пусть F противоречива. Если F_1 непротиворечива, то существует такая интерпретация I, что F_1 истинна в I, т.е. для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$ существует по крайней мере один элемент (а именно $f(x_1,\dots,x_{r-1})$), для которого

$$(Q_{r+1}x_{r+1})...(Q_nx_n)M[x_1...,x_{r-1},f(x_1,...,x_{r-1}),x_{r+1},...x_n]$$

истинна в I. Таким образом F истинна в I, что противоречит предположению. Следовательно, F_1 должна быть противоречива.

Пусть теперь F_1 противоречива. Если F непротиворечива, то существует интерпретация I, что F истинна в I, т.е. для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$ существует такой элемент x_r, что

$$(Q_{r+1}x_{r+1})\dots(Q_nx_n)M[x_1,\dots,x_{r-1},x_r,x_{r+1},\dots x_n]$$

истинна в I. Расширим интерпретацию I, включив в нее функцию f, которая отображает $(x_1,\dots,x_{r-1})$ на x_r для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$ из D , т.е. $f(x_1,\dots,x_{r-1})=x_r$. Обозначим такое расширение I через I'. Ясно, что для всех $x_1,\dots,x_{r-1}$

$$(Q_{r+1}x_{r+1})...(Q_nx_n)M[x_1...,x_{r-1},f(x_1,...,x_{r-1}),x_{r+1},...x_n]$$

истинна в I', т.е. F_1 истинна в I', что противоречит предположению о противоречивости F_1. Следовательно F - противоречива.

Пусть в F имеется m кванторов существования. Пусть $F_0=F$, а F_k получается из F_{k-1} заменой первого квантора существования в F_{k-1} скулемовской функцией, $k=1,\dots,m$. Ясно, что $S=F_m$. Аналогично предыдущему можно показать, что F_{k-1} противоречива тогда и только тогда, когда F_k противоречива,

$k=1,\dots,m$. Т.о. F противоречива тогда и только тогда, когда множество S противоречиво. Теорема доказана.

Замечания.

Пусть S - стандартная форма формулы F. Если F противоречива, то из доказанной теоремы следует, что $F=S$. Если F - непротиворечива, то вообще говоря $F \neq S$.

Например: F: $(\exists x)P(x)$, S:$P(a)$. S есть стандартная форма формулы F. Пусть I есть следующая интерпретация:

D={1,2}, a=1, P(1)= Л,P(2)=И

Тогда F истинна в I, но S ложна в I , т.е. $F \neq S$. Отметим, что формула может иметь более чем одну стандартную форму.

Подстановка и унификация

В методе резолюций существенным является нахождение контрарных пар. Для дизъюнктов, не содержащих функции это просто. Задача усложняется для дизъюнктов, содержащих функции.

Пример 13.1. Найти контрарные пары.

$$C_1 : P(x) \vee Q(x)$$

$$C_2 : \overline{P(f(x))} \vee R(x)$$

Здесь нет контрарных пар. Но если в C_1 вместо x подставить $f(a)$, а в C_2 вместо x подставить a, то получим

$$C_1 : P(f(a)) \vee Q(f(a))$$

$$C_2 : \overline{P(f(a))} \vee R(a)$$

Здесь $P(f(a))$ и $\overline{P(f(a))}$ являются контрарными.

<u>Определение</u>. Подстановка – это конечное множество вида $\{t_1|v_1,...,t_n|v_n\}$, где каждая v_i – переменная, каждый t_i – терм, отличный от v_i, все v_i различны.

<u>Пример 13.2</u>.

$$\{f(z)|x,y|z\},\ \{a|x,g(y)|y,f(g(b))|z\}.$$

<u>Определение</u>. Пусть $\theta=\{t_1|v_1,...,t_n|v_n\}$ – подстановка и E – выражение. Тогда $E\theta$ – выражение, полученное из E заменой одновременно всех вхождений переменной v_i, $i=\overline{1,n}$ в E на терм t_i. $E\theta$ называют примером E.

<u>Пример 13.3.</u>

$$\theta=\{a|x,\ f(b)\ |y,\ c|z\},\ E=P(x,y,z),\ \ E\theta = P(a,\ f(b),\ c).$$

<u>Определение</u>. Пусть $\theta = \{t_1|x_1,...,t_n|x_n\}$ и $\lambda = \{u_1|y_1,...,u_m|y_m\}$ – две подстановки. Тогда композиция θ и λ (обозначается $\theta^{\circ}\lambda$) есть подстановка, которая получается из множества

$$\{t_1\lambda|x_1,...,t_n\lambda|x_n,\ u_1|y_1,...,u_m|y_m\}$$

вычеркиванием всех элементов $t_j\lambda/x_j$, для которых $t_j\lambda=x_j$ и всех элементов $u_i|y_i$ таких, что $y_i\in\{x_1,...,x_n\}$.

<u>Пример 13.4.</u>

$$\theta =\{t_1|x_1,\ t_2|x_2\}=\{f(y)|x,\ z|y\}$$

$$\lambda = \{u_1|y_1,\ u_2|y_2,\ u_3|y_3\}= \{a|x,\ b|y,\ y|z\}$$

Тогда

$$\{t_1\lambda|x_1,\ t_2\lambda|x_2,\ u_1|y_1,\ u_2|y_2,\ u_3|y_3\}=\{f(b)\ |x,\ y|y,\ a|x,\ b|y,\ y|z\}.$$

Однако, т.к. $t_2\lambda=x_2$, то $t_2\lambda|x_2$ (т.е. $y|y$) необходимо вычеркнуть. Также нужно вычеркнуть $u_1|y_1$ и u_2/y_2, т.к. y_1 и $y_2\in\{x_1,x_2\}$. Таким образом получаем

$$\theta^{\circ}\lambda = \{f(b)|x,\ y|z\}.$$

<u>Определение</u>. Подстановка θ называется унификатором для множества $\{E_1,...,E_k\}$ тогда и только тогда, когда $E_1\theta = ... = E_k\theta$.

Говорят, что множество унифицируемо, если для него существует унификатор.

Определение. Множество рассогласований непустого множества выражений W получается выявлением первой (слева) позиции, на которой не для всех выражений из W стоит один и тот же символ, а затем выписыванием из каждого выражения в W подвыражения, которое начинается с символа, занимающего эту позицию.

Пример 13.5. Найти множество рассогласований.

$$W = \{P(x, \underline{f(y,z)}), P(x, \underline{a}), P(x, \underline{g(h(k(x)))})\}$$

Множество рассогласований:

$\{f(y,z), a, g(h(k(x)))\}$.

Алгоритм унификации:

Шаг 1. $K=0$, $W_k=W$, τ_k – пустой унификатор.

Шаг 2. Если W_k – единичный дизъюнкт, то остановка: τ_k – унификатор для W. В противном случае находим множество рассогласований D_k для W_k .

Шаг 3. Если существуют такие элементы v_k и t_k в D_k, что v_k – переменная, не входящая в t_k, то перейти к шагу 4. В противном случае остановка: W не унифицируемо.

Шаг 4. Пусть $\tau_{k+1}=\tau_k\{t_k/v_k\}$ и $W_{k+1}=W_k\{t_k/v_k\}$.

Шаг 5. $k:=k+1$ и перейти к шагу 2.

14. *Метод резолюций в исчислении предикатов*

Метод резолюций в исчислении предикатов

Определение. Атомарная формула есть литера.

Определение. Если две или более литер (с одинаковым знаком) дизъюнкта C имеют общий унификатор δ, то $C\delta$ называется склейкой C. Если $C\delta$ – единичный дизъюнкт, то склейка называется единичной склейкой.

Пример 14.1. Пусть $C = \underline{P(x)} \vee \underline{P(f(y))} \vee \overline{Q(x)}$. Тогда подчеркнутые литеры имеют общий унификатор $\delta = \{f(y)/x\}$. Следовательно,

$$C\delta = P(f(y)) \vee P(f(y)) \vee \overline{Q(f(y))} = P(f(y)) \vee \overline{Q(f(y))}$$ есть склейка C.

Определение. Пусть C_1 и C_2 – два дизъюнкта, которые не имеют никаких общих переменных. Пусть L_1 и L_2 – две литеры в C_1 и C_2 соответственно. Если L_1 и $\overline{L_2}$ имеют общий унификатор δ, то дизъюнкт

$$(C_1\delta \mid L_1\delta) \cup (C_2\delta \mid L_2\delta)$$

называется бинарной резольвентой C_1 и C_2. Литеры L_1 и L_2 называются отрезаемыми литерами.

Пример 14.2. Пусть $C_1 = P(x) \vee Q(x)$, а $C_2 = \overline{P(a)} \vee R(x)$. Т.к. x входит в C_1 и C_2, то заменяем переменную x в C_2 и пусть $C_2 = \overline{P(a)} \vee R(y)$. Выбираем $L_1 = P(x)$, $L_2 = \overline{P(a)}$.Т.к. $\overline{L_2} = P(a)$, то L_1 и $\overline{L_2}$ имеют унификатор $\delta = \{a|x\}$.

Следовательно

$$(C_1\delta - L_1\delta) \cup (C_2\delta - L_2\delta) =$$
$$= (\{P(a), Q(a)\} - \{P(a)\}) \cup (\{\overline{P(a)}, R(y)\} - \{\overline{P(a)}\}) =$$
$$\{Q(a)\} \cup \{R(y)\} = \{Q(a), R(y)\} = Q(a) \vee R(y)$$

Таким образом $Q(a) \vee R(y)$ – бинарная резольвента C_1 и C_2 и $P(x)$ и $\overline{P(a)}$ – отрезаемые литеры.

Определение. Резольвентой дизъюнктов C_1 и C_2 является одна из следующих резольвент:

1) бинарная резольвента C_1 и C_2;
2) бинарная резольвента C_1 и склейки C_2;
3) бинарная резольвента склейки C_1 и C_2;
4) бинарная резольвента склейки C_1 и склейки C_2.

Пример 14.3.

Пусть $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ и $C_2 = \overline{P\left(f\left(g(a)\right)\right)} \vee Q(b)$. Склейка C_1 есть $C_1' = P(f(y)) \vee R(g(y))$. Бинарная резольвента C_1' и C_2 есть $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ и она же есть и резольвента C_1 и C_2.

Метод резолюций есть правило вывода, которое порождает резольвенты для множества дизъюнктов. Метод резолюций полон, что доказывается следующей теоремой.

Теорема. Множество S дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта П из S (без доказательства).

Пример14.4. Применение метода резолюций в исчислении предикатов. Доказать справедливость следующих рассуждений.

У всякого шутника из города Габрово найдется шутка о каком-нибудь габровце и его теще, способная рассмешить всех жителей этого города, за исключением тещи габровца. Богдан – большой шутник. У мадам Петковой нет зятя.

Следовательно, мадам Петкову рассмешит шутка Богдана о Теодоре и его теще Хелене.

Введем следующие предикаты, константы и термы:

$J(x)$: x - шутник;

$E(x,y)$: x совпадает с y;

$S(x,y_1,y_2,z)$: шутка шутника x о габровцах y_1 и y_2 способна рассмешить габровца z ;

$m(x)$: теща габровца x;

b: Богдан;

p: мадам Петкова;

t: Теодор;

$h=m(t)$: Хелена.

В качестве предметной области берем всех жителей г. Габрово.

Имеем следующие посылки и вывод

F_1: $(\forall x)(J(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)(\overline{E(z,m(y))} \rightarrow S(x,y,m(y),z)))$

F_2: $J(b)$

F_3: $\overline{(\exists y)E(p,m(y))}$

G: $S(b,t,h,p)$

Приведем посылки и вывод к скулемовской форме.

$$F_1 : (\forall x)(\overline{J(x)} \vee (\exists y)(\forall z)(E(z,m(y)) \vee S(x,y,m(y),z))) =$$
$$= (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\overline{J(x)} \vee E(z,m(y)) \vee S(x,y,m(y),z)))$$

Исключаем квантор $(\exists y)$, заменяя все вхождения переменной y на скулемовскую функцию $f(x)$. Получаем

$(\forall x)(\forall z)(\overline{J(x)} \vee E(z,m(f(x)) \vee S(x,f(x),m(f(x)),z))$ - скулемовская форма

F_2 : уже находится в скулемовской форме.

$F_3 : \overline{(\exists y)E(p,m(y))} = (\forall y)\overline{E(p,m(y))}$ - скулемовская форма

G: уже находится в скулемовской форме.

Имеем следующее множество дизъюнктов:

$S = \{\overline{J(x)} \vee E(z, m(f(x))) \vee S(x, f(x), m(f(x)), z), J(b), \overline{E(p, m(y))},$
$\overline{S(b, t, h, p)}\}.$

Применяем метод резолюций. Делаем подстановку *{b/x}* в первом дизъюнкте, получаем контрарные литеры в 1-ом и во 2-ом дизъюнкте. В результате получим следующую резольвенту:

$$\frac{\overline{J(b)} \vee E(z, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), z), J(b)}{E(z, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), z)}$$

Делаем подстановку *{p/z,f(b)/y}* в резольвенте и 3-м дизъюнкте. В результате получаем:

$$\frac{E(p, m(f(b))) \vee S(b, f(b), m(f(b)), p), \overline{E(p, m(f(b)))}}{S(b, f(b), m(f(b)), p)}$$

Поскольку шутка Богдана *(b)* относится к Теодору *(t)* и его теще Хелене *(h=m(t))*, то *t=f(b)* и *h=m(f(b))*. Получаем

$$\frac{S(b, f(b), m(f(b)), p), \overline{S(b, f(b), m(f(b)), p}}{\Pi}$$

В результате получен пустой дизъюнкт П. Следовательно, вывод *G* верен.

II. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.Словарь (глоссарий) основных терминов и понятий

отсутствует

2.Методические указания для преподавателя, студента, слушателя

Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

На освоение дисциплины отводится 1 семестр. В качестве итогового контроля знаний предусмотрен экзамен. Упражнения, лекции, методику, тестирования и задания для самостоятельной работы студентов можно увидеть в разделе «Фонды оценочных средств» данного учебно-методического комплекса.

3.Сборник задач и упражнений

В качестве сборника задач предлагается использовать следующий сборник:

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. «Задачи и упражнения по курсу дискретной математики».// М.: "ФИЗМАТЛИТ", 2009 г., 416С.

4.Лабораторный практикум по дисциплине

Лабораторная работа 1.

Тема: Прямое произведение множеств. Соответствие и функции. Алгебры и подалгебры

Задание 1.

Для множеств $I = \{1,2,3\}$ и $A = \{a,b\}$

Найти: $пр_I G$, $пр_A G$, проверить функциональность соответствия. Найти образы и прообразы. Проверить сюрьективность и взаимно-однозначность соответствия.

А) $G_1 = \{(2,a),(3,a)\}$

Б) $G_2 = \{(2,a),(2,b),(3,a)\}$

В) $G_3 = \{(1,b),(2,a),(3,a)\}$

Задание 2.

Проверить, является ли соответствие взаимно-однозначным. $I = \{1,2\}$, $A = \{a,b,c\}$

А) $G_1 = \{(1,b),(2,a),(2,b)\}$

Б) $G_2 = \{(1,a),(2,b),(2,c)\}$

Задание 3.

Рассмотрим квадрат и его повороты вокруг центра (против часовой стрелки, переводящие вершины в вершины) . Таких поворотов существует бесконечное множество, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, и т.д., но они задают всего 4 различных отображения множества вершин в себя: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \pi$ и $\delta = \frac{3\pi}{2}$.

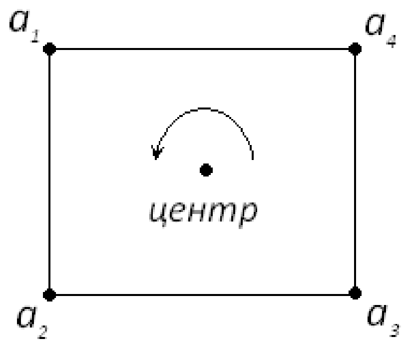


Рис. 1. Схема поворотов квадрата.

Для данного примера можно построить алгебру с основным множеством элементов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и сигнатурой $\Phi = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - унарные операции. Результаты операций на основном множестве удобно задать таблицей Кэли.

Определить: существуют ли в этой алгебре подалгебры?

<u>Задание 4.</u>

Рассмотрим множество $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ – из предыдущего примера, то есть множество отображений вершин квадрата в себя. Φ -сигнатура включает только одну бинарную операцию композиции $\Phi = \{\circ\}$. Система $\{K, \circ\}$ образует алгебру.

Вопрос: Существует ли в этой алгебре подалгебры? Если существуют, приведите пример подалгебры.

<u>Дополнение.</u>

Некоторые дополнительные примеры соответствия:

Различные виды кодирования - Азбука Морзе, представления чисел в различных системах счисления, секретные шифры и т.д. являются соответствиями между кодируемыми объектами и присвоенными им кодами. Эти соответствия обладают всеми свойствами взаимно-однозначного соответствия, кроме, быть может, сюрьективности. Единственность образа и прообраза в кодировании гарантирует однозначность шифровки и дешифровки. Отсутствие сюрьективности означает, что не всякий код имеет смысл, то есть соответствует какому либо объекту. Например, некоторые семизначные номера Москвы не соответствуют никаким телефонам.

<u>Определение булеана</u>

Пусть A - множество. Множеством всех его подмножеств называется булеанам A и обозначается $\beta(A)$. Алгебра

$B=\left(\beta\left(A\right);\cap,\cup,\neg\right)$называется булевой алгеброй множеств над A. Её вектор арностей $\left(2,2,1\right)$, сигнатура $\Phi=\left\{\cap,\cup,\neg\right\}$, элементами основного множества являются подмножества множества A. Для любого множества $A'\subset A$ алгебра $B'=\left(\beta\left(A'\right);\cap,\cup,\neg\right)$ является подалгеброй алгебры B. Например, если $A=\left\{a,b,c,d\right\}$, то $\beta\left(A\right)=\left\{\varnothing,a,b,c,d,ab,...\right\}$ содержит 16 элементов. Алгебра $B'=\left(\beta\left(\left\{a,c\right\}\right);\cap,\cup,\neg\right)$ - подалгебра алгебры B, и её основное множество содержит 4 элемента: $\beta\left(\left\{a,c\right\}\right)=\left\{\varnothing,a,c,ac\right\}$.

Задание 5.

Рассмотрим множество натуральных чисел и операции сложения и умножения на нем.

Вопрос: Является ли система $\left\{\mathrm{N};+,*\right\}$ алгеброй? Если да, то существуют ли в этой алгебре подалгебры?

Лабораторная работа 2.

Тема: Существенные и фиктивные переменные.

<u>Задание 1.</u>

По функциям $f(x_1,x_2)$ и $g(x_3,x_4)$ заданным векторно, построить функцию h.

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_3	x_4	g
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	x_3	h
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1) $f(x_1,x_2)=(1011)$, $g(x_3,x_4)=(1001)$

$h(x_2,x_3,x_4)=f(g(x_3,x_4),x_2)$

$g(0,0)=1$, $x_2=0$ следовательно $h(0,0,0)=f(1,0)=1$

$g(0,1)=0$, $x_2=0$ следовательно $h(0,0,1)=f(0,0)=1$

2) $f(x_1,x_2)=(1011)$, $g(x_3,x_4)=(1001)$,

$h(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1,x_2)\vee g(x_3,x_4)$

3) $f(x_1,x_2)=(1011)$, $g(x_3,x_4)=(1001)$,

$h(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1,x_2)\wedge g(x_3,x_4)$

4) $f(x_1,x_2)=(1011), g(x_3,x_4)=(1001)$,

$h=f(x_1,x_2)\oplus g(x_3,x_4)$

Задание 2.

Пусть ν_1 - число, двоичное представление которого есть (x_1,x_2), а ν_2 - число, двоичное представление которого есть (x_3,x_4). Пусть $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$есть старший разряд двоичного представления числа $|\nu_1-\nu_2|$. Построить таблицу функции f. Замечание: старшим разрядом является первая цифра в разности $|\nu_1-\nu_2|$.

Задание 3.

Функция $f(x_1,x_2,x_3)$ определяется следующим образом: она равна 1 либо при $x_1=1$, либо если переменные x_2 и x_3 принимают разные значения, а значение переменной x_1 меньше значения переменной x_3; во всех остальных случаях она равна 0. Построить таблицу истинности для функции f.

Задание 4.

Функция $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ определяется следующим образом:

она равна 0, только на тех наборах $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, для которых выполнено алгебраическое неравенство $\alpha_1+\alpha_2>\alpha_3+2\alpha_4$. Построить таблицу функции f.

Задание 5.

Определить существенные и фиктивные переменные для функций. Для доказательства существенности переменной, приведите хотя бы одно неравенство, а для доказательства фиктивности перечислите все пары наборов для каждой переменной.

А) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (11110000)$

Б) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (00110011)$

В) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (01011010)$

Г) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = (00111100)$

Д) $f\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \to x_2$

Е) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 \to \left(x_1 \vee x_2\right)\right) \to x_3$

Лабораторная работа 3

Тема: Логические функции

<u>Задание 1.</u>

Найти значение функции $f(x, y)$ с помощью упрощений.

А) $\overline{\left(\overline{x \vee y}\right) \cdot x}$ (доказать, что выражение тождественно истинно),

Б) $\overline{\overline{xy} \vee x}$ (доказать, что выражение тождественно ложно),

В) $\bar{x}y \cdot \overline{x\bar{y}} \cdot \left(xy \vee \bar{x}\bar{y}\right)$ (доказать, что выражение тождественно ложно).

<u>Теория (поглощение, склеивание, обобщенное склеивание, расщепление)</u>

А) <u>Поглощение:</u> $x \vee xy = x$.

Доказательство. $x \vee xy = x \cdot 1 \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x$.

Б) <u>Склеивание</u>: $xy \vee x\overline{y} = x$.

Доказательство. $xy \vee x\overline{y} = x\left(y \vee \overline{y}\right) = x \cdot 1 = x$.

В) <u>Обобщенное склеивание</u>: $xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}$.

Доказательство. Видим, что переменная z меняется на $\overline{z}$. Эти два элемента, содержащие z и $\overline{z}$ останутся в конце упрощений. Последний элемент расписываем $xy = xy \cdot 1 = xy\left(z \vee \overline{z}\right) = xyz \vee xy\overline{z}$.

Получаем: $xz \vee y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z}$ и группируем далее по отношению к переменной z:

$$\left(xz \vee xyz\right) \vee \left(y\overline{z} \vee xy\overline{z}\right) = xz\left(1 \vee y\right) \vee y\overline{z}\left(1 \vee x\right) =$$

$$= xz \cdot 1 \vee y\overline{z} \cdot 1 = xz \vee y\overline{z}$$

Г) <u>Расщепление:</u> $x \vee \overline{x}y = x \vee y$

Доказательство. Для $x \vee \overline{x}y$ первый элемент распишем, $xy \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y$, ищем элемент, который отличается от каждого другого элемента отрицанием одной переменной. В нашем случае это первый элемент последнего выражения. Повторяем его два раза и применяем к двум другим элементам $\left(xy \vee x\overline{y}\right) \vee \left(xy \vee \overline{x}y\right) = x\left(y \vee \overline{y}\right) \vee y\left(x \vee \overline{x}\right) = x \cdot 1 \vee y \cdot 1 = x \vee y$

<u>Задание 2.</u>

Упростить выражения:

А) $\left(x \vee y \vee z\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)$;

Б) $xy \vee \left(x \vee \overline{y}\right)$;

В) $\overline{\overline{x} \cdot \left(x \vee \overline{y}\right)}$;

Г) $\overline{\left(x \vee y \vee z\right) \cdot \left(x \vee \overline{y}\right)}$;

Д) $\bar{x}y \vee \overline{x\left(x \vee \bar{x}z \vee (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})\right)}$;

Е) $xy \vee \bar{x}(y \vee xz) \cdot \left(\overline{x \cdot (\bar{y} \vee z)} \vee yz\right)$;

Ж) $\overline{(x \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee z)}$;

З) $\overline{(x \vee y)(\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y})}$;

И) $\overline{(x \vee yz)(\bar{x} \vee \bar{y})} \cdot x \vee y\bar{z}$;

К) $\left(\overline{\bar{y}(x \vee z)} \vee \overline{\bar{x}(y \vee z)}\right) \cdot \overline{\bar{z}(x \vee y)}$;

Л) $(yx \vee \bar{x}z) \cdot (x \vee y \vee \bar{z}) \vee y \vee \overline{\bar{x}y(z \vee xy \vee \bar{x}y)}$.

Лабораторная работа 4

Тема: Принцип двойственности

Задание 1.

Определить с помощью таблиц истинности, является ли функция f двойственной к функции g?

А) $f = x \oplus y, g = x \sim y$

Б) $f = x \to y, g = y \to x$

В) $f = xy \vee xz \vee yz,\ g = xy \oplus xz \oplus yz$

Г) $f = x \mid y, g = x \downarrow y$

Д) $f = (\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x), g = (x \to y) \cdot (\bar{y} \to \bar{x})$

Е) $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x(y \sim z), g = (01101101)$

Задание 2.

С помощью таблиц истинности определить, является ли функция f самодвойственной?

А) $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$

Б) $f(x,y)=(\bar{x}\vee\bar{y})\to x$

Задание 3.

Пользуясь принципом двойственности, проверить самодвойственность функции f.

А) $f(x,y,z)=xy\vee yz\vee xz$

Б) $f(x,y,z,t)=xy\vee yz\vee xt\vee zt$

В) $f(x,y,z,t)=x\cdot 1\vee y(zt\vee 0)\vee \bar{x}yz$

Задание 4.

Найти для функции f двойственную ей функцию f^*.

Для обеих функций найти глубину формул.

$f(x,y,z)=xy\vee y\bar{z}\vee \bar{y}z$

Лабораторная работа 5

Тема: Преобразование логических функций. Двойственность

Правила преобразования функций:

1. $\bar{x}=x\,|\,x=x\downarrow x$
2. $xy=(x\,|\,y)\,|\,(x\,|\,y)$
3. $x\vee y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$
4. $x\oplus y=\bar{x}y\vee x\bar{y}$
5. $x\to y=\bar{x}\vee y$
6. $x\sim y=\overline{x\oplus y}$

7. $x \mid y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$
8. $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
9. $\overline{x} = x \oplus 1$
10. $x \sim y = x \oplus y \oplus 1$
11. $x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$
12. $x \sim y = xy \vee \overline{x}\overline{y}$

Задание 1.

Проверить является ли функция константой двумя способами: через приведение к ДНФ и таблично.

А) $f(x,y,z) = (x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \to z))$

Б) $f(x,y,z) = ((x \oplus y) \sim z) \cdot (x \to yz)$

Задание 2.

Показать, что x_1 является фиктивной переменной функции f, выразив f формулой, в которую переменная x_1 явно не входит.

А) $f(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2) \cdot (x_1 \downarrow x_2)$

Б) $f(x_1,x_2,x_3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1) x_3 \overline{x_1}) \oplus x_3$

В) $f(x_1,x_2,x_3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_3}) \to (\overline{x_1} \to x_2 \overline{x_3})) x_2$

Задание 3.

Для функции $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$ доказать самодвойственность двумя

способами: по правилу двойственности $f^* = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_1, \overline{x}_3)$ и таблично.

Задание 4.

Проверить справедливость соотношений через представление обеих частей равенства булевыми функциями.

А) $(x \vee y) \sim (x \vee z) = x \vee (y \sim z)$,

Б) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$,

В) $x(y \sim z) = xy \sim xz$.

Задание 5.

Проверить справедливость соотношений двумя способами: через представление обеих частей равенства булевыми функциями и таблично.

А) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$,

Б) $x \to yz = (x \to y) \cdot (x \to z)$

В) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$

Лабораторная работа 6
Тема: Полином Жегалкина. СКНФ. СДНФ

Задание 1. Построить СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина для функции f.

А) $f = (x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

Б) $f = (x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

В) $P(x_1, x_2, x_3) = (0110.1000)$

Г) $f(x_1, x_2, x_3) = (1111.1100)$

Д) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \oplus x_1 x_3) \vee x_2$

Е) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0111.1101.0001.0001)$

Ж) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101.0111.0101.0111)$

Лабораторная работа 7

Тема: Минимизация булевых функций

Задание 1. Представить выражения в виде ДНФ.

$\left(x_1 \oplus x_2\right) \to x_2 x_3$

$x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}$

Задание 2. Перейти от ДНФ к СДНФ (использовать правило $y = yx \vee y\overline{x}$).

А) $D = \left(x_1 \vee x_2 x_3\right)$

Б) $D = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3$

В) $D = x_1 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2} x_3$

Задание 3. Перейти от ДНФ к КНФ (использовать правило $x \vee yz = \left(x \vee y\right)\left(x \vee z\right)$).

А) $x_1 \vee \overline{x_2} x_3$

Б) $x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_3$

В) $x_1 \overline{x_3} \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$

Г) $x_1 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2} x_3$

Д) $x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}$

Задание 4. Перечислить простые импликанты по алгоритму Куайна и Мак-Клосски.

А) $f\left(x, y, z\right) = \left(1011.0101\right)$

Б) $f\left(x, y, z\right) = \left(1110.0110\right)$

В) $f\left(x, y, z, t\right) = \left(1101.1100.0101.0110\right)$

Г) $f\left(x, y, z\right) = \left(0111.0110\right)$

Д) $f\left(x, y, z, t\right) = \left(0001.1011.1101.1011\right)$

Лабораторная работа 8
Тема: Таблицы простых импликантов

<u>Задание 1.</u> Найти простые имликанты и выбрать из них минимальное подмножество. (Задание решить двумя способами).

А) $f(x,y,z,t) = (1101.0111.0101.0101)$

Б) $f(x,y,z,t) = (1100.0110.0101.0101)$

В) $f(x,y,z,t) = (1100.0110.0101.0100)$

Г) $f(x,y,z,t) = (0100.0110.0101.0100)$

Д) $f(x,y,z,t) = (0101.0111.0101.0101)$

Е) $f(x,y,z,t) = (0101.0111.0101.0100)$

Ж) $f(x,y,z,t) = (1100.0111.0101.0101)$

З) $f(x,y,z,t) = (1111.1111.0111.1110)$

<u>Решение</u> для А) $f(x,y,z,t) = (1101.0111.0101.0101)$

<u>Первый способ</u> (с помощью таблиц).

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_3	x_4	g
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	x_3	h
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Простые импликанты: $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$, $\overline{x}yz$, t

Второй способ (обозначаем простые импликанты, полученные из первого способа за переменные, и применяем их к наборам).

$$a(a\vee c)ccbc(b\vee c)ccc = abc(a\vee c)(b\vee c) = (abc\vee abc)(b\vee c) =$$
$$= abc(b\vee c) = abc\vee abc = abc$$

Ответ: $f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee t$

Лабораторная работа 9

Тема: Замкнутые классы

Задание 1.

1) Определить принадлежность функции $f(x,y,z)$ классу S.
2) Если возможно, представить константы через функцию $f(x,y,z)$

для функций:

А) $f(x,y,z) = (0011.1001)$,

Б) $f(x,y,z) = (x\downarrow y)\to(x\oplus z)$,

В) $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xyz$.

Задание 2.

1) Определить принадлежность функции f классу M (монотонных функций)
2) Если возможно, с помощью подстановок получить $\bar{x}$ через f.

А) $f(x,y)=(x\oplus y)(x\sim y)$,

Б) $f(x,y,z)=xy\overline{z}\to(x\oplus y\oplus z)$,

В) $f(x,y)=x\to(x\to y)$.

Задание 3.

1) Определить принадлежность функции f классу L (линейных функций).
2) Если возможно, с помощью подстановок получить конъюнкцию через f .

А) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_1x_3$. Выразить x_1x_2 через $f(x_1,x_2,x_3)$.

Б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2\oplus 1$.

Выразить а) x_1x_3, б) x_1x_2, в) x_2x_3 через $f(x_1,x_2,x_3)$.

Лабораторная работа 10

Тема: Исчисление высказываний

Задание (общее для всех задач): Решить логическую задачу двумя способами: по одной из двух теорем, и с помощью резолютивного вывода.

Задача 1. Известно, что после того, как сверкнет молния, должен грянуть гром. Молния сверкнула, следовательно, и гром должен грянуть.

<u>Задача 2</u>. Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены, и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Возрастут ли правительственные расходы?

<u>Задача 3</u>. Если в одном месте вещество пропадет, то в другом месте вещество появится. Есть теория, что в космосе существуют черные дыры, куда все пропадает, но откуда ничего не появляется. Верна ли эта теория?

<u>Задача 4</u>. Если в сети будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель. При целом предохранителе телевизор будет работать нормально, но только если он включен в сеть. Если телевизор работает нормально, то человек увидит новости. Верно ли, что человек может смотреть новости при условии, что предохранитель цел, напряжение в сети не скачет и телевизор включен в сеть.

<u>Задача 5</u>. Если знать язык программирования, то можно написать работающую программу. Работающую программу можно также получить при наличии знакомого программиста. Овладеть языком программирования можно, обучаясь в техническом ВУЗе. Если программа работает, то её написал выпускник технического ВУЗа. Но, если программа не работает, значит человек, написавший её, не знает язык программирования и у него нет знакомых программистов.

<u>Задача 6</u>. Преступник изготовит партию фальшивых денег, если у него имеются собственные материалы и работает станок. Эти два условия, к сожалению, выполняются, но фальшивые деньги не появляются, если хорошо работает полиция. Полиция работает хорошо т. и т.т.,к. каждый полицейский получает хорошую зарплату. Действительно ли, что в стране плохо работают полицейские и появляются фальшивые деньги?

<u>Задача 7</u>. Падение авторитета власти происходит т. и т.т.,к. нарастает анархия в обществе. Нарастание анархии ведет к появлению на политической арене безответственных политиков, и наоборот, появление безответственных политиков приводит к нарастанию анархии. Безответственные политики высказывают абсурдные идеи. Высказывание политиками таких идей демонстрирует неспособность управлять страной. Известно, что авторитет власти падает. Появляются ли политики, неспособные управлять страной.

<u>Задача 8</u>. На двери деканата злоумышленники масляной краской нарисовали несколько карикатур на преподавателей. Подозрение пало на известных хулиганов и вольнодумцев Пашу и Сашу. Кроме того, обнаружились три свидетеля, которые заявили:

Первый: Это они сделали вместе.

Второй: Рисовал на двери только Саша, а Паша в этом не участвовал.

***Третий*:** Если Паша рисовал на двери, то Саша тоже принимал в этом участие.

Известно, что все свидетели врали, т.е. говорили прямопротивоположное тому, что было на самом деле. Виноват ли Паша? Кто виноват?

<u>Задача 9</u>. Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме, может быть, случая, когда она длится более года и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать, забастовка оканчивается и президент фирмы не уходит. Длилась ли забастовка более года?

<u>Задача 10</u>. Если Сергей интересуется логикой, то он посещает лекции по дискретной математике и не пропускает семинарские занятия. Если Сергей посещает лекции, то он пропускает семинарские занятия, и наоборот. Верно ли, что Сергей не интересуется логикой?

Лабораторная работа 11.
Тема: Исчисление предикатов.

<u>Задание 1.</u>

Дано:

$N(x)$: « x - натуральное число»,

$c(x)$: « x - целое число»,

$p(x)$: « x - простое число»,

$r(x)$: « x - четное число»,

$d(x,y)$: « x - делится на число y »,

$s(x)$: « x - положительное число».

Выяснить, являются ли функции истинными?

А) $(\forall x)\big(N(x)\to c(x)\big)=?$

Б) $(\forall x)\big(c(x)\to\big(N(x)\vee p(x)\big)\big)=?$

В) $(\forall x)(\exists y)\big(\big(c(x)\wedge c(y)\big)\to d(x,y)\big)=?$

Г) $(\forall x)\big(\big(c(x)\wedge s(x)\big)\to N(x)\big)=?$

Д) $(\exists x)\big(p(x)\wedge r(x)\big)=?$

<u>Задание 2.</u> Записать предложения в виде исчисления предикатов, используя обозначения:

$R(x)$: «действительное число x »,

$P(x)$: «x - простое число»,

$Q(x)$: «x - рациональное число» ,

$M(x;y)$: «$x<y$».

Выяснить, являются ли функции истинными?

А) Каждое рациональное число есть действительное число.

Б) Существует число, которое является простым.

В) Для каждого числа x существует такое число y, что $x<y$.

Задание 3. Дана интерпретация:

$D=\{1,2\}$ - предметная область,

$P(1,1)$=И, $P(1,2)$=Л, $P(2,1)=Л$, $P(2,2)$=И.

Доказать, что $(\forall x)(\exists y)P(x,y)=И$.

Задание 4. Преобразовать в ПНФ:

А) $(\forall x)\big(P(x)\to(\exists y)Q(x,y)\big)$,

Б) $(\exists x)\big((\exists y)P(x,y)\to\big((\exists z)Q(z)\to R(x)\big)\big)$,

В) $(\forall x)(\forall y)\big((\exists z)P(x,y,z)\wedge\big((\exists u)Q(x,u)\to(\exists v)Q(y,v)\big)\big)$.

Задание 5. Привести формулу к ССФ.

А) $(\forall x)(\exists y)\big(\overline{P(x)}\vee Q(x,y)\big)$,

Б) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)\big(\overline{P(x,y)}\vee\overline{Q(z)}\vee R(x)\big)$,

В) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)\Big(P(x,y,z)\wedge\big(\overline{Q(x,u)}\vee Q(y,v)\big)\Big)$.

Задание 6. Привести формулу к ПНФ и ССФ.

А) $\overline{\big((\forall x)P(x)\big)\to\big((\exists y)(\forall z)Q(y,z)\big)}$

Б) $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)(\exists z)Q(x,z)$

В) $(\exists z)(\forall x)P(x,z)\rightarrow(\exists x)(\forall z)Q(x,z)$

Г) $\overline{(\exists z)(\forall x)P(x,z)\rightarrow(\exists x)(\forall z)Q(x,z)}$

5.Описание балльно-рейтинговой системы

Работа в семестре
Максимальное число баллов, набранных в семестре – 100

Вид задания	**Число заданий**	**Кол-во баллов**	**Сумма баллов**
1. Посещение лекций	-	-	-
2. Лабораторные работы	-	-	-
3. Практические занятия	-	-	-
4. Домашние задания	-	-	-
5. Контрольные работы	2	35,35	70
6. Рубежная аттестация	-	-	-
7. Работа на семинаре	-	-	-
8. Реферат	-	-	-
9. Коллоквиум	1	10	10
10. Итоговая аттестация (экзамен)	1	20	20
ИТОГО			100

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 - 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 - 85	4	69 - 85	4	C
51 - 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 - 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F
51 – 100	Зачет		Зачет	Passed

Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем. Работы, предоставленные с опозданием, не оцениваются. Студенты, получившие в течение семестра, оценку 3 или 4 (зачет) и желающие повысить свою оценку, допускаются к экзамену (итоговая аттестация). Экзаменационная работа оценивается из 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре. Оценка менее 51 балла (<3), полученная при итоговой аттестации, является неудовлетворительной.

6.Вопросы для самопроверки и обсуждений по темам

Для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов рекомендуется использовать вопросы и задания подобные перечисленным ниже:

Типовые задачи для промежуточного контроля знаний:

1. Построение СДНФ, СКНФ, нахождение существенных и фиктивных переменных, построение полинома Жегалкина.
2. Представление функции булевой формулой.
3. Нахождение двойственной функции по правилу

двойственности, по принципу двойственности и по таблице.

4. Проверка справедливости соотношения.
5. Построить минимальное представление исходной функции f с помощью алгоритма Куайна-МакКлоски и последующего выделения ядра.
6. Проверить является ли высказывание логическим следствием (двумя способами: любая из двух теорем и метод резолюций).
7. Найти предваренную и скулемовскую нормальные формы для формулы.
8. Проверить принадлежность функции классам монотонных функций, самодвойственных функций, линейных функций.

7.Задания для самостоятельной работы по темам

Для самостоятельной работы по теме «Исчисление высказываний» рекомендуется выполнить следующее задание:

Решение задач из сборника «Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. «Задачи и упражнения по курсу дискретной математики».// М.: "ФИЗМАТЛИТ", 2009 г., 416 с.»

8.Перечень рефератов и/или курсовых работ по темам

1. Исследование логических функций на принадлежность логическим классам.
2. Решение логических задач по теме «исчисление высказываний».
3. Решение логических задач по теме «исчисление предикатов».

9.Тестовые задания по темам (для текущего и промежуточного самоконтроля)

Примерные тестовые задания по дисциплине представлены ниже.

1. Какая из формул $F_1 = (\forall x)(\forall z)P(x, f(x), z)$, $F_2 = (\forall x)(\exists y)(\forall z)P(f(x), y, z)$ представлена в виде скулемовской стандартной формы?

Ответ:

□ F_1,

□ F_2,

□ ни одна,

□ обе.

2. Какая из элементарных конъюнкций $\alpha_1 = xyz$, $\alpha_2 = \bar{x}yz$ является дополнением элементарной конъюнкции $\beta = xy$ по отношению к ДНФ $\Phi = x\bar{y} \vee \bar{x}z$?

Ответ:

□ ни одна,

□ α_1,

□ α_2,

□ обе.

3. Какой из дизъюнктов $C_1 = p \vee \bar{q}$, $C_2 = p \vee r$ является резольвентой дизъюнктов $A = p \vee q$, $B = \bar{q} \vee r$?

Ответ:

□ C_1,

□ C_2,

□ ни один,

□ оба.

4. Постройте СКНФ функции $f(x,y)$, заданной таблицей.

x	*y*	*f(x,y)*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ответ: *f(x,y)*=

□ $xy \vee \bar{x} \vee y$,

□ $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$,

□ $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$,

□ $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

5. Какая из переменных функции $f(x,y)$, заданной таблицей, является фиктивной?

x	*y*	*f(x,y)*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ответ:

□ x,

□ y,

□ ни одна,

□ обе.

6. Какова глубина формулы $((x \vee y) \vee xy)$?

Ответ: □0,

□1,

□2,

□3.

7. Постройте функцию, двойственную функции $f(x, y)$, заданной таблицей.

x	y	$f(x,y)$	$f^*(x,y)$
0	0	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Ответ:

□(0101),
□(1010),
□(1001),
□(0110).

8. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ и соответствия $G_1 = \{(1, a), (3, b), (2, c)\}$, $G_2 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$. Какое из соответствий является функциональным?

Ответ:

□ G_1
□ G_2
□ ни одно
□ оба

9. Стрелка Пирса $x_1 \downarrow x_2$ может быть представлена вектором:

Ответ:

□ (1110)
□ (0001)
□ (1000)
□ (1001)

10. Определите, принадлежит ли функция $x \vee y$ замкнутым классам:

Ответ:

□ принадлежит классам T_0 , T_1, M и не принадлежит классам S, L.

□ принадлежит классам T_0 , T_1 и не принадлежит классам M, S, L.

□ принадлежит всем классам,

□ не принадлежит ни одному классу.

10.Тренинговые задания

В качестве тренинговых заданий рекомендуется использовать все упражнения лабораторного практикума.

11.Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу

Типовые вопросы для итогового контроля знаний:

1. Определение алгебры и подалгебры. Определение алгебры логики. Выписать таблицу с функциями алгебры логики.
2. Соответствия в теории множеств. Функциональное, сюръективное, взаимно-однозначное соответствие. Область определения и область значения соответствия.
3. Определения булевой алгебры, подалгебры. Выписать свойства булевых операций (ассоциативность и т.д.).
4. Определение фиктивных и существенных переменных.
5. Определение композиции, суперпозиции. Определение глубины формулы.
6. Определение двойственности и самодвойственности функций, принцип двойственности, табличное определение двойственности.
7. СДНФ: Определение ЭК, ОЭК, ДНФ, СДНФ. Теорема о разложении функций по переменным с доказательством. 2 следствия (частные случаи для теоремы) – разложение

по одной и по всем переменным.

8. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей.
9. Совершенная конъюнктивная нормальная форма: Опр. ЭД, ОЭД, КНФ, СКНФ. Представление функции, тождественно не равной единице через СКНФ.
10. Построение СКНФ для функции, заданной таблицей.
11. Основные эквивалентные преобразования и их доказательства (поглощение, склеивание, обобщенное склеивание, расщепление).
12. Теоремы о логическом следствии с доказательством.
13. Метод резолюций для исчисления высказываний.
14. Определение минимальной, кратчайшей и неизбыточной ДНФ.
15. Полином Жегалкина. Определение в общем виде. Частные случаи для 2 и 3 переменных. На примере для 2 переменных показать переход от любой логической функции к ПЖ.
16. Определение импликанта, простого импликанта. Теорема о представлении функции через простые имликанты.
17. Определение дополнения ЭК. Теорема о дополнениях импликанта.
18. Алгоритм перечисления простых импликантов (Куайна-МакКлоски).
19. Определение полной системы функций. Теорема о двух полных системах функций. Определение замыкания.
20. Класс функций Т0. Определение и доказательство замкнутости.
21. Класс функций Т1. Определение и доказательство замкнутости.
22. Класс функций S. Определение и лемма о несамодвойственной функции.
23. Класс функций М. Определение и лемма о немонотонной функции.
24. Класс функций L. Определение и лемма о нелинейной функции.

25. Теорема о функциональной полноте (без доказательства).
26. Исчисление высказываний. Алфавит исчисления высказываний, определение формул, общезначимость, противоречивость, логическое следствие.
27. Определение дизъюнкта, резольвенты, пустого дизъюнкта. Теорема о резольвенте с доказательством.
28. Определение предиката. Кванторы, свободные и связанные переменные. Алфавит исчисления предикатов. Определение терма, атома и формулы.
29. Определение предваренной нормальной формы. 10 правил – преобразований для ПНФ (без доказательства). Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.
30. Определение ССФ. Процедура преобразования формул в скулемовскую стандартную форму.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Математическая логика и теория алгоритмов

Направление подготовки

080500 **«Бизнес-информатика»**

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

III. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. Цели и задачи дисциплины:

Основной целью освоения дисциплины является знание основополагающих понятий, результатов и методов математической логики и теории алгоритмов. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса: освоение теории множеств, навыки работы с пропозициональными и предикатными исчислениями, знание формулировок и доказательств основных теорем курса.

Задачей дисциплины является развитие логического мышления у студентов и изучение основ математической логики и теории алгоритмов. Развиваются навыки формализации и описания дискретных математических объектов.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Цикл, к которому относится дисциплина: вариативная часть математического и естественнонаучного цикла Б.2.

Требования к входным знаниям и умениям: необходимо пройти обучение по дисциплинам «Комбинаторные алгоритмы», «Дискретная математика».

Студенту необходимо:

Знать: основные понятия теории множеств, основные понятия и методы теории комбинаторных алгоритмов.

Уметь: анализировать выводы, полученные при решении задач.

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей: Математический анализ, Теория автоматов и формальных языков, Теория вероятностей и математическая статистика, курсовая работа.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» направлен на формирование следующих компетенций: <u>   ОК: 1, ПК: 19, 20   </u>

(указываются в соответствии с ФГОС ВПО)

1. Владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1).
2. Использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-19).
3. Готовить научно-технические отчеты, презентации, научные публикации по результатам выполненных исследований (ПК-20).

В результате изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» студент должен:

Знать:

1. концепции дисциплин: Дискретная математика, Математическая логика и теория алгоритмов,
2. основные законы теоретического исследования.

Уметь:

1. использовать основные законы теоретического исследования; решать прикладные задачи по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»,
2. разрабатывать и реализовывать процессы жизненного цикла информационных систем, программного обеспечения, сервисов систем информационных технологий, а также методы и механизмы оценки и анализа функционирования средств и систем информационных технологий, относящихся к дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов».

Владеть:

1. современным математическим аппаратом;
2. вычислительными средствами;
3. базовыми математическими знаниями.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет _____3_____ зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		1	2
Аудиторные занятия (всего)	72	72	-
В том числе:	72	72	-
Лекции	36	36	-
Практические занятия (ПЗ)	-	-	-
Семинары (С)	-	-	-
Лабораторные работы (ЛР)	36	36	-
Самостоятельная работа (всего)	36	36	-
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)	-	-	-
Расчетно-графические работы	-	-	-
Реферат	-	-	-
Другие виды самостоятельной работы	-	-	-
Самостоятельная проработка дополнительного материала	36	36	-
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		экзамен	-
Общая трудоемкость час	108	108	-
зач. ед.	3	3	-

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение в алгебру логики	Прямое произведение множеств. Соответствия и функции. Алгебры. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. Булева Алгебра. Принцип двойственности. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ). Разложение булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.
2.	Минимизация булевых функций	Проблема минимизации. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.
3.	Полнота и замкнутость систем логических функций	Замкнутые классы. Класс логических функций, сохраняющий константы 0 и 1. Определение и доказательство замкнутости. Класс самодвойственных функций. Определение и лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Определение и лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Определение

		и лемма о нелинейной функции.
4.	Исчисление высказываний и предикатов	Общие принципы построения формальной теории. Интерпретация, общезначимость, противоречивость, логическое следствие. Метод резолюций для исчисления высказываний. Понятие предиката. Кванторы. Алфавит. Предваренная нормальная форма. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму. Скулемовская стандартная форма. Подстановка и унификация. Алгоритм унификации. Метод резолюций в исчислении предикатов.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин			
		1	2	3	4
1.	Математический анализ	+		+	
2.	Теория автоматов и формальных языков	+	+	+	+
3.	Теория вероятностей и математическая статистика	+	+	+	

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Сем.	СРС	Все-го час.
1.	Введение в алгебру логики	8		8		8	24
2.	Минимизация булевых функций	10		10		10	30
3.	Полнота и замкнутость систем логических функций	4		4		4	12
4.	Исчисление высказываний и предикатов	14		14		12	40
		36		36		36	108

6. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудо-емкость (час.)
1.	Алгебра логики	Решение примеров на прямое произведение множеств. Задача на истинность соответствия. Поиск подалгебры в алгебре. Суперпозиции и формулы. Решение задач на принцип двойственности и правило двойственности. Нахождение совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ). Нахождение совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ). Разложение	8

		булевых функций по переменным. Построение СДНФ для функции, заданной таблично.	
2.	Минимизация булевых функций	Минимизация функций. Порождение простых импликантов. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.	10
3.	Полнота и замкнутость систем логических функций	Решение задач на доказательство замкнутости класса. Класс самодвойственных функций. Решение задач с несамодвойственными функциями. Класс монотонных функций. Решение задач с немонотонными функциями. Класс линейных функций. Решение задач с нелинейными функциями.	4
4.	Исчисление высказываний и предикатов	Решение задач с использованием метода резолюций для исчисления высказываний. Применение кванторов. Поиск предваренной нормальной формы (ПНФ). Поиск скулемовской стандартной формы. Подстановка и унификация для ПНФ. Применение алгоритма унификации. Применение метода резолюций в исчислении предикатов.	14
	Итого:		36

7. Практические занятия

не предусмотрены

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ)

не предусмотрены

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

- Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. «Задачи и упражнения по курсу дискретной математики».// М.: "ФИЗМАТЛИТ", 2009 г., 416С.
- Новиков Ф.А. «Дискретная математика для программистов». Учебник. // Спб.: Изд. дом «Питер», 2009.
- Лавров И.А., Максимова Л.Л. «Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов». Учебное пособие.// М:, Изд-во Физматлит, 2009, 256 с.

б) дополнительная литература

1. Игошин В.И. «Математическая логика и теория алгоритмов». 4-е изд. Учебное пособие для ВУЗов, // М:, Изд-во «Академия», 2010
2. Просветов Г.И. «Дискретная математика: задачи и решения». Учебное пособие. //М. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2008.

в) программное обеспечение: Maple, MatLab, SciLab.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: не предусмотрено

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, корп. 1, учебные лаборатории кафедры систем телекоммуникаций:

1. ауд. 110: проектор DMS800 с интерактивной доской

Board 1077, ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz (10 шт.)

2. ауд. 114: проектор DMS800 с интерактивной доской Board 1077ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz (10 шт.)

3. ауд. 116: проектор DMS800 с интерактивной доской Board 1077, HP xw7800, Intel Core2 2.4 GHz (8 шт.)

Дисплейные классы ДК1, ДК2, ДК3, ДК4, ДК5, ДК6, ДК7: Intel Core i3-550 3.2 GHz – 60 шт.

Intel Pentium 4 2.8 GHz – 73 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

На освоение дисциплины отводится один семестр. В качестве итогового контроля знаний предусмотрен экзамен.

Для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов рекомендуется использовать вопросы и задания подобные перечисленным ниже:

Типовые задачи для промежуточного контроля знаний:

1. Построение СДНФ, СКНФ, нахождение существенных и фиктивных переменных, построение полинома Жегалкина.
2. Представление функции булевой формулой.
3. Нахождение двойственной функции по правилу двойственности, по принципу двойственности и по таблице.
4. Проверка справедливости соотношения.
5. Построить минимальное представление исходной функции f с помощью алгоритма Куайна-Мак Клоски и последующего выделения ядра.
6. Проверить является ли высказывание логическим следствием (двумя способами: любая из двух теорем и метод резолюций).
7. Найти предваренную и скулемовскую нормальные

формы для формулы.

8. Проверить принадлежность функции классам монотонных функций, самодвойственных функций, линейных функций.

Типовые вопросы для итогового контроля знаний:

1. Основные понятия теории множеств.
2. Понятие прямого произведения множеств.
3. Определение алгебры и подалгебры. Функции алгебры логики.
4. Соответствия и функции в теории множеств.
5. Булева алгебра и свойства булевых операций.
6. Принцип двойственности и свойство двойственности.
7. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
8. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей.
9. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.
10. Основные эквивалентные преобразования и их доказательства.
11. Полином Жегалкина.
12. Алгоритм Куайна-МакКлоски.
13. Определение фиктивных и существенных переменных.
14. Понятие двойственности и примеры двойственных и самодвойственных функций.
15. Определение минимальной, кратчайшей и неизбыточной ДНФ.
16. Теорема о функциональной полноте.
17. Определение и свойства функциональной полноты и замкнутости. Замыкание.
18. Общие принципы построения формальной в теории исчисления высказываний.
19. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.
20. Метод резолюций для исчисления высказываний.
21. Алгоритм унификации.
22. Класс функций Т0. Определение и доказательство

замкнутости.

23. Класс функций T1. Определение и доказательство замкнутости.
24. Класс функций S. Определение и лемма о несамодвойственной функции.
25. Класс функций M. Определение и лемма о немонотонной функции.
26. Класс функций L. Определение и лемма о нелинейной функции.
27. Понятие предиката, квантора, алфавита и формулы.
28. Интерпретация формул при исчислении предикатов.
29. Понятие скулемовской стандартной формы.
30. Предваренная нормальная форма.
31. Метод резолюций для исчисления высказываний.
32. Сравнительный анализ предикатов и высказываний. Примеры.
33. Понятие унификатора, склейки и резольвенты в исчислении предикатов.
34. Теоремы о логическом следствии.
35. Алгоритм преобразования формул в предваренную нормальную форму.
36. Теорема о функциональной полноте.

Оглавление

Учебное издание

Эльвира Ринатовна Зарипова
Мария Геннадьевна Кокотчикова
Леонид Антонович Севастьянов

Дискретная математика
Часть II. Математическая логика

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Технический редактор Н.А.Ясько

Тематический план 2013 г. №12

Подписано в печать 07.08.12
Усл.печ.л. 4,65
Тираж 200, Заказ 370

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография ИПК РУДН
ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41