А. С. КУТУЗОВ

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

А. С. Кутузов

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

DirectMEDIA

Москва
Берлин
2020

УДК 517.9(075)
ББК 22.162я7
К95

Кутузов, А. С.

К95 Введение в функциональный анализ : учебное пособие / А. С. Кутузов. — Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. — 481 с.

ISBN 978-5-4499-0433-1

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов направления (специальности) «Прикладная математика и информатика». Может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов.

Текст приводится в авторской редакции.

УДК 517.9(075)
ББК 22.162я7

ISBN 978-5-4499-0433-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие преследует две цели: во-первых, обобщить изученные ранее в других дисциплинах математические понятия, методы геометрии, алгебры и математического анализа и на этой основе сформировать как можно более единый подход к решению задач математики, во-вторых, изучить методы, задачи и теоремы функционального анализа и показать, как абстрактная теория может быть приложима к решению конкретных прикладных задач.

Высокая степень абстракции понятий функционального анализа позволяет, с одной стороны, с единых позиций исследовать на первый взгляд далекие друг от друга вопросы, с другой же стороны, делает изучение данной дисциплины достаточно трудоемким процессом. В пособии мы стараемся излагать большинство вопросов на доступном студенту-старшекурснику языке.

По большей части пособие предназначено для студентов направления "Прикладная математика и информатика". Для понимания материала студентам необходимо обладать знаниями, полученными при изучении дисциплин "Математический анализ" (это в самой большей степени), "Алгебра", "Аналитическая геометрия", "Дифференциальные уравнения" и (в меньшей степени) "Комплексный анализ" (также, известный, как "ТФКП"). На многие известные (и не очень) факты из этих дисциплин (например, теорема о двух милиционерах, теорема Лиувилля и т.д.) время от времени в тексте будут даваться отсылки, однако помещать их полные формулировки в рамках этой книги было бы нецелесообразно, ибо это привело бы к излишнему увеличению ее объема и служило бы отвлекающим фактором от основной линии повествования.

Пособие разделено на две большие взаимосвязанные части. Первая часть посвящена основным видам пространств функционального анализа – метрическим, линейным нормированным и гильбертовым (мы не затрагиваем топологические пространства – см. ориентацию на прикладников – и не затрагиваем пространства Соболева). Вторая часть посвящена операторам, действующим в рассматриваемых пространствах. Значительное внимание уделено введению в спектральную теорию ограниченных операторов, поскольку это – наиболее практически содержательная часть функционального анализа (см. "Уравнения математической физики", "Квантовая физика"). Каждая часть пособия состоит из логических разделов, каждый раздел – из пунктов. Структура пунктов проста: даются теоретические сведения, примеры решения задач, относящихся к данной теории, а также задачи для самостоятельного решения. Редко примеры и задачи могут следовать после двух-трех теоретических пунктов.

Теоретический материал излагается с достаточной степенью строгости (иногда даже чересчур подробно, дабы минимизировать употребление таких слов, как "очевидно"), кое-где с отсылками к предшествующим дисциплинам. Имеются утверждения, принимаемые без доказательства (чаще всего, ввиду их технической сложности, реже – из-за довольно большого объема рассуждений), но, тем не менее, знать эти утверждения обязательно. Сказанное относится, например, к теореме о пополнении (имеется ввиду классическое конструктивное доказательство), теореме об общем виде функционалов на пространствах суммируемых функций, некоторым свойствам рефлексивных пространств, свойствам выпуклости (последним некоторое внимание уделяется только в дополнении к основному материалу) и т.д. Во всех таких случаях обязательно даются ссылки на источники, в которых можно при желании ознакомиться с полными доказательствами. Некоторые теоремы, для сокращения выкладок, формулируются и доказываются в более простых предположениях, чем в общем случае (например, теорема Арцела-Асколи доказана только для отрезка, теория Фредгольма излагается только для гильбертовых пространств и т.д.). В большинстве таких случаев даются ссылки на литературу, содержащую полные доказательства. Список рекомендуемой литературы по функциональному анализу (содержащий как старые, проверенные временем и не нуждающиеся в дополнительном представлении, так и более современные источники, как, например, [10]) приведен в конце пособия.

Практическая часть пособия состоит из подробных примеров решения задач и задач для самостоятельного решения. Разумеется, невозможно примерами охватить всего многообразия задач, но, как нам кажется, ключевые вопросы в примерах по большей части освещены.

Поскольку пособие ориентировано в первую очередь на студентов-прикладников, то большинство примеров и задач имеют скорее вычислительный характер. Количество теоретических задач и задач на доказательство сведено к минимуму, но обойтись без них совсем никак нельзя. Ко многим задачам для самостоятельного решения (необязательно сложным) даются указания. Связано это, в первую очередь, с тем, что некоторые результаты, приведенные в качестве задач, используются и при изложении теории. В задачи для самостоятельного решения эти результаты вынесены, поскольку они являются достаточно простыми для самостоятельного выполнения средним студентом-третьекурсником.

Наконец, практический материал этой книги может быть использован для организации самостоятельной работы студентов, подготовки коллоквиумов и студенческих олимпиад.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Лемма (неравенство Юнга): пусть $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a>0$, $b>0$, тогда справедливо неравенство $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.

Доказательство: разделим доказываемое неравенство на ab, тогда $1\le\frac{1}{p}\frac{a^{p-1}}{b}+\frac{1}{q}\frac{b^{q-1}}{a}=\frac{1}{p}\frac{a^{p-1}}{b}+\frac{1}{q}\left(\frac{b}{a^{\frac{1}{q-1}}}\right)^{q-1}$. Далее, поскольку $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\frac{1}{q-1}=\frac{p}{q}$, $p-1=\frac{p}{q}$. Таким образом, достаточно доказать, что $1\le\frac{1}{p}\frac{a^{\frac{p}{q}}}{b}+\frac{1}{q}\left(\frac{b}{a^{\frac{p}{q}}}\right)^{q-1}$. Обозначим $\frac{b}{a^{\frac{p}{q}}}=t$, тогда надо доказать, что $1\le\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{q}t^{q-1}$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{q}t^{q-1}$, тогда достаточно доказать, что ее минимальное значение равно 1. Исследуем $\varphi(t)$ на минимум: $\varphi'(t)=\frac{1}{p}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{q}(q-1)t^{q-2}=0$, откуда $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}(q-1)t^q$. Поскольку $\frac{q-1}{q}=\frac{1}{p}$, то $t^q=1$, откуда $t=1$. Поскольку $\varphi''(t)=\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{t^3}+\frac{1}{q}(q-1)(q-2)t^{q-3}$, то $\varphi''(1)=\frac{2}{p}+\frac{1}{q}(q-1)(q-2)=\frac{2}{p}+\frac{q-2}{p}=\frac{q}{p}>0$, значит, $t=1$ – точка минимума функции и значит, минимальное значение равно $\varphi(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Лемма доказана.

Лемма (неравенство Гельдера): пусть $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, тогда $\forall a_i,b_i$ ($i=\overline{1,n}$) справедливо неравенство $\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Доказательство: поскольку $\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\le\sum_{i=1}^n|a_i||b_i|$, то достаточно доказать, что $\sum_{i=1}^n|a_i||b_i|\le\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Обозначив $\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=A$ и $\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=B$, и, поделив обе части доказываемого неравенства на AB, получим, что достаточно доказать неравенство $\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{A}\cdot\frac{|b_i|}{B}\le 1$. Применяя неравенство Юнга, получаем, что $\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{A}\cdot\frac{|b_i|}{B}\le\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|a_i|}{A}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|b_i|}{B}\right)^q\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{B^q}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{A^p}+$ $+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{B^q}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{A^p}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{B^q}\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{A^p}\cdot A^p+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{B^q}\cdot B^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Лемма доказана.

Замечание: очевидно, что $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, поэтому $\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Если при этом сходятся оба ряда $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p$ и $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q$, то из полученного неравенства следует, что все частичные суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i||b_i|$ ограничены сверху. Поскольку это ряд с неотрицательными слагаемыми, то, в силу критерия Вейерштрасса, он сходится. Тем самым, переходя в неравенстве $\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i||b_i|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, т.е. неравенство Гельдера справедливо и для бесконечных сумм.

Лемма (неравенство Минковского): пусть $p\ge 1$, тогда $\forall a_i,b_i\ \ (i=\overline{1,n})$ справедливо неравенство $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство: если $p=1$, то, поскольку модуль суммы не превосходит сумму модулей, неравенство очевидно верно. Будем считать, что $p>1$ и найдем $q>1$ так, чтобы $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ясно, что достаточно доказать неравенство $\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Преобразуем левую часть:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)(|a_i|+|b_i|)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|b_i|\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left|\begin{matrix}\text{неравенство}\\ \text{Гельдера}\end{matrix}\right|\le$$

$$\le\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Разделим полученное неравенство на $\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{qp}}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{qp}}\le\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Возведем полученное неравенство в степень p:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{1-\frac{1}{q}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Окончательно, осталось заметить, что $\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{q}$.

Теорема доказана.

Замечание: аналогично предыдущему замечанию, можно показать, что, если сходятся ряды $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p$ и $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p$, то сходится и ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(|a_i|+|b_i|\right)^p$, причем $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(|a_i|+|b_i|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Определение: система множеств K называется кольцом, если $\forall A, B \in K$: $A \bigcap B \in K$, $A \bigcup B \in K$, $A \setminus B \in K$.

Определение: пусть X – множество, K – кольцо его подмножеств. Функция $m: K \to \mathbb{R}$ называется счетно-аддитивной мерой, если:

1. $\forall c \in K$: $m(c) \geq 0$;

2. $\forall c_1, c_2, ... \in K$ (непересекающихся): $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} c_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(c_k)$.

При этом множества, которые принадлежат K, называются измеримыми.

Определение: пусть X – множество, K – кольцо его подмножеств. Мера $m: K \to \mathbb{R}$ называется счетно-полуаддитивной, если $\forall c, c_1, c_2, ... \in K$ из условия $c = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ следует, что $m(c) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(c_k)$.

Замечание: свойства счетной аддитивности и счетной полуаддитивности меры эквивалентны.

Определение: пусть X – множество, K – кольцо его подмножеств, m – счетно-аддитивная мера на K, $E \subset X$ – произвольное множество. Внешней (верхней) мерой Лебега множества E называется величина $\mu^*(E) = \inf \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)$, где точная нижняя грань берется по всем системам $\{E_k\} \subset K$, которые покрывают множество E.

Замечание: верхняя мера неотрицательна, монотонна (т.е. из условия $E_1 \subset E_2$ вытекает, что $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$) и счетно-полуаддитивна.

Определение: пусть X – множество, K – кольцо его подмножеств, $E \subset X$ – произвольное множество. Множество E называется измеримым по Лебегу множеством конечной меры (суммируемым), если $\forall \varepsilon > 0$ существует множество $F \in K$, такое, что $\mu^*(E \Delta F) < \varepsilon$, где $E \Delta F = (E \setminus F) \bigcup (F \setminus E)$ – симметрическая разность.

Замечание: функция μ^*, рассматриваемая только на системе суммируемых множеств, называется мерой Лебега и обозначается μ. На системе суммируемых множеств мера Лебега счетно-аддитивна. В пространстве $\mathbb{R}^n$ часто в качестве кольца K выступает система элементарных множеств, т.е. множеств, являющихся конечным объединением параллелепипедов.

Определение: пусть X – множество, A – система его подмножеств. Эта система называется σ-алгеброй, если она является кольцом и $\forall c_1, c_2, ... \in A$: $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} c_k \in A$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} c_k \in A$ и $X \in A$.

Определение: множество E называется измеримым по Лебегу, если его пересечение с любым суммируемым множеством является суммируемым.

Замечание: совокупность измеримых множеств образует σ-алгебру. Мерой Лебега измеримого множества называется его верхняя мера μ^*.

Определение: пусть X – множество, на котором задана σ-алгебра измеримых подмножеств с мерой Лебега μ. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если $\forall c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X : f(x) < c\}$ – измеримо (т.е. принадлежит σ-алгебре, которая задана на X).

Теорема (об эквивалентных определениях измеримости): следующие четыре условия эквивалентны:

1. f измерима;
2. $\{x : f(x) \le c\}$ измеримо;
3. $\{x : f(x) > c\}$ измеримо;
4. $\{x : f(x) \ge c\}$ измеримо.

Теорема (об операциях с измеримыми функциями): если f и g измеримы, то $f+g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ ($g \ne 0$), $|f|$, $|f|^p$ также измеримы. Кроме того, любая непрерывная функция измерима. Измеримы также функции $h_1 = \max(f,g)$, $h_2 = \min(f,g)$, $f^+ = \begin{cases} f, f \ge 0 \\ 0, f < 0 \end{cases}$ и $f^- = \begin{cases} 0, & f \ge 0 \\ -f, f < 0 \end{cases}$.

Определение: функции f и g, определенные на измеримом множестве X, называются равными почти всюду (эквивалентными), если множество тех значений аргумента, при которых они не равны, имеет нулевую меру, т.е. $\mu\{x \in X : f(x) \ne g(x)\} = 0$.

Определение: последовательность f_n называется сходящейся почти всюду на измеримом множестве X к функции f при $n \to \infty$, если множество точек $\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$ имеет нулевую меру.

Теорема (об измеримости предельной функции): если $f_n(x)$ измеримы и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$, то $f(x)$ также измерима.

Теорема Егорова: пусть E – суммируемое множество ($\mu(E) < +\infty$), $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, причем все f_n измеримы, тогда, если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$, то $\forall \delta > 0$ $\exists E_\delta \subset E$ – измеримое множество (множество Егорова) такое, что $\mu(E_\delta) < \delta$ и $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E \setminus E_\delta}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Определение: пусть X – измеримое множество и $f_n(x)$ – последовательность определенных на нем измеримых функций, $f(x)$ – измеримая функция, тогда последовательность $f_n(x)$ называется сходящейся по мере к функции $f(x)$ если $\forall \sigma > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \sigma\} = 0$. Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mu}{\to}} f(x)$.

Теорема (о связи сходимостей по мере и почти всюду): 1. Если $\mu(E)<+\infty$, то из $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$ следует, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{\mu}{\to}} f(x)$ (теорема Лебега);

2. Если $\mu(E)\le+\infty$ и $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{\mu}{\to}} f(x)$, то $\exists f_{n_k}(x)\underset{k\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$ (теорема Рисса).

Определение: пусть $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$, причем $E_k\cap E_l=\varnothing$ при $k\ne l$. Функция $h:E\to\mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\forall x\in E_k\;\; h(x)=c_k\in\mathbb{R}$ при $k=\overline{1,n}$.

Замечание: ступенчатая функция измерима тогда и только тогда, когда каждое множество E_k измеримо.

Теорема (об аппроксимации): всякую неотрицательную измеримую на измеримом множестве X функцию можно представить, как предел неубывающей последовательности неотрицательных измеримых ступенчатых функций.

Определение: пусть E – измеримое множество конечной меры с заданной на нем счетно-аддитивной мерой μ.

1. Интегралом Лебега от ступенчатой функции $h:E\to\mathbb{R}$ по множеству E и мере μ называется величина $\int\limits_E h(x)d\mu=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mu(E_k)$.

2. Интегралом Лебега от неотрицательной измеримой функции $f:E\to\mathbb{R}$ по множеству E и мере μ называется величина $\int\limits_E f(x)d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E h_n(x)d\mu$, где $h_n(x)$ – неубывающая последовательность неотрицательных измеримых ступенчатых функций такая, что $\forall x\in E\;\; h_n(x)\underset{n\to\infty}{\to} f(x)$.

3. Интегралом Лебега от измеримой функции $f:E\to\mathbb{R}$ по множеству E и мере μ называется величина $\int\limits_E f(x)d\mu=\int\limits_E f^+(x)d\mu-\int\limits_E f^-(x)d\mu$.

Определение: функция, интеграл Лебега которой существует и конечен, называется суммируемой.

Теорема (об интегрируемости модуля): функция f суммируема на множестве E тогда и только тогда, когда на E суммируем $|f|$. При этом $\left|\int\limits_E f(x)d\mu\right|\le\int\limits_E|f(x)|d\mu$.

Замечание: интеграл Лебега обладает всеми свойствами интеграла Римана: линейность, аддитивность, интегрирование неравенств (при этом достаточно, чтобы было $f\le g$ почти всюду). Измеримая почти всюду ограниченная функция интегрируема по Лебегу. Если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают. При определенных условиях интеграл Лебега обладает свойством счетной аддитивности. Интеграл Лебега по множеству нулевой меры равен нулю.

Определение: мера μ на измеримом множестве X называется σ-конечной, если существует такая последовательность $\{X_n\} \subset X$, что $\mu(X_n) < +\infty$, $X_n \subset X_{n+1}$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. При этом любая такая последовательность множеств называется исчерпывающей.

Определение: измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры μ, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)d\mu$ существует и конечен, а также не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега функции f по множеству X и обозначается $\int\limits_X f(x)d\mu$.

Замечание: для интегралов по множествам бесконечной меры справедливы все результаты, что и для интегралов по множеству конечной меры, за исключением интегрируемости измеримой почти всюду ограниченной функции.

Теорема (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега): пусть функция f суммируема на измеримом множестве X, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall X_\delta \subset X$ (измеримого) $\mu(X_\delta) < \delta$ $\left| \int\limits_{X_\delta} f(x)d\mu \right| < \varepsilon$.

Теорема Лебега (об ограниченной сходимости): пусть X – измеримое множество, $f_n(x)$ – последовательность измеримых на X функций и выполнены условия:

1. $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$;
2. $\forall n, x$ $|f_n(x)| \le g(x)$ почти всюду, причем $g(x)$ – суммируемая функция.

Тогда $f(x)$ также суммируема на X и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$.

Теорема Б. Леви (о монотонной сходимости): пусть X – измеримое множество, $f_n(x)$ – монотонная по n последовательность суммируемых функций и пусть $\forall n$ $\left| \int\limits_X f_n(x)d\mu \right| \le c$, тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)$ на X, причем $f(x)$ суммируема на X и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$.

Теорема Б. Леви (для рядов): пусть $a_k(x)$ – суммируемые неотрицательные на измеримом множестве X функции, и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_X a_k(x)d\mu$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится на X почти всюду. При этом его сумма является суммируемой функцией и $\int_X \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X a_k(x)d\mu$.

Теорема Фату (о суммируемости предельной функции): пусть X – измеримое множество, $f_n(x)$ – последовательность суммируемых на X функций, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{п.в.} f(x)$, $f_n(x) \geq 0$ почти всюду на X и $\int_X f_n(x)d\mu \leq c$. Тогда $f(x)$ – суммируема на X и $\int_X f(x)d\mu \leq c$.

Теорема (о производной интеграла Лебега): для всякой суммируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ почти всюду справедливо равенство (для $x \in [a,b]$)
$\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f(t)d\mu = f(x)$.

Определение: функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной конечной системы попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k), $k = \overline{1,n}$ такой, что $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ выполняется $\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$.

Замечание: всякая абсолютно непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем. Сумма абсолютно непрерывных функций и произведение абсолютно непрерывной функции на число – абсолютно непрерывная функция.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница): если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\int_{[a,b]} f'(x)d\mu = f(b) - f(a)$.

Теорема Фубини: 1. Пусть $f(x_1,x_2)$ – суммируемая на измеримом множестве $X = X_1 \times X_2$ функция, тогда $\int_X f(x_1,x_2)d\mu = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2 \right)d\mu_1 =$

$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1 \right)d\mu_2$;

2. Если существует хотя бы один из интегралов $\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)| d\mu_2 \right)d\mu_1$ или $\int_{X_2}\left(\int_{X_1} |f(x_1,x_2)| d\mu_1 \right)d\mu_2$, то функция $f(x_1,x_2)$ суммируема на $X = X_1 \times X_2$ и справедливо равенство из п. 1.

Теорема (о связи интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана): пусть на конечном полуинтервале $\left[a,b\right)$ задана непрерывная функция $f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $\left[a,b\right]$ тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл Римана $\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$. В случае интегрируемости $f(x)$ по Лебегу на $\left[a,b\right]$ справедливо равенство $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство: пусть $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $\left[a,b\right]$, тогда $\left|f(x)\right|$ также интегрируем по Лебегу. Рассмотрим последовательность функций $g_n(x)=\begin{cases}\left|f(x)\right|, x\in\left[a,b-\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, \qquad x\in\left(b-\dfrac{1}{n},b\right]\end{cases}$. Ясно, что $g_n(x)\overset{п.в.}{\to}\left|f(x)\right|$, причем все $g_n(x)$ непрерывны почти всюду на $\left[a,b\right]$, а потому интегрируемы на $\left[a,b\right]$ по Риману и по Лебегу. Поскольку $\left|g_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|$, то выполнены все условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости, согласно которой $\int\limits_{[a,b]}\left|f(x)\right|d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} g_n(x)d\mu=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^{b-\frac{1}{n}}\left|f(x)\right|dx=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$, т.е. интеграл $\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$ сходится. Если рассмотреть последовательность $f_n(x)=\begin{cases}f(x), x\in\left[a,b-\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, \qquad x\in\left(b-\dfrac{1}{n},b\right]\end{cases}$, то $f_n(x)\overset{п.в.}{\to}f(x)$, причем $\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|$ и, аналогично, используя теорему Лебега, заключаем, что $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Обратно: пусть интеграл $\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$ сходится. Рассмотрим ту же самую последовательность $g_n(x)$, каждая из функций которой интегрируема по Риману и по Лебегу и $g_n(x)\overset{п.в.}{\to}\left|f(x)\right|$. Эта последовательность монотонно не убывает по

n, причем $\int\limits_{[a,b]} g_n(x)d\mu = \int\limits_a^{b-\frac{1}{n}} |f(x)|dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx = \text{const}$. В силу теоремы Б. Леви функция $|f(x)|$ интегрируема по Лебегу на $[a,b]$, следовательно, интегрируема по Лебегу и $f(x)$.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, класс интегрируемых по Риману в несобственном смысле на отрезке $[a,b]$ функций включает класс функций, интегрируемых по Лебегу. Если несобственный интеграл Римана сходится условно, то в смысле Лебега такой интеграл не существует. Аналогичное утверждение имеет место для интеграла по лучу $[a,+\infty)$. Аналогичные утверждения (без особых изменений в доказательствах) справедливы для кратных интегралов Римана и Лебега.

Упражнения: 1. Привести пример функции, интегрируемой на некотором множестве в смысле несобственного интеграла Римана, но неинтегрируемой на этом же множестве по Лебегу.

2. Пусть X – суммируемое множество и функция f суммируема на X. Доказать, что для любой исчерпывающей множество X последовательности $\{X_n\}$ $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)d\mu$.

Указание: рассмотреть последовательность $f_n(x) = \begin{cases} f(x), x \in X_n \\ 0, \quad x \notin X_n \end{cases}$ *и применить теорему Лебега об ограниченной сходимости.*

3. Пусть f – неотрицательная измеримая функция на множестве X с заданной на нем σ-конечной мерой, $\{X_n\}$ – какая-то исчерпывающая последовательность множества X. Доказать, что, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)d\mu$, то существует и интеграл $\int\limits_X f(x)d\mu$.

4. Доказать теорему о связи интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана в случае множества $[a,+\infty)$.

Указание: воспользоваться определением несобственного интеграла Римана, определением интеграла Лебега по множеству бесконечной меры, связью между интегралами Римана и Лебега, а также предыдущей задачей.

Теорема (неравенство Гельдера для интеграла Лебега): пусть f, g – измеримые функции на измеримом множестве E, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и пусть $|f|^p$, $|g|^q$ – суммируемы, тогда $f \cdot g$ также суммируема и $\left|\int\limits_E f \cdot g d\mu\right| \le \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$.

Доказательство: обозначим $\left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = A$ и $\left(\int\limits_E |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = B$. Деля требуемое неравенство на AB, получаем, что надо доказать, что $\left|\int\limits_E \frac{f}{A}\cdot\frac{g}{B}\,d\mu\right| \le 1$. Применяя неравенство Юнга, получаем:

$$\left|\int\limits_E \frac{f}{A}\cdot\frac{g}{B}\,d\mu\right| \le \int\limits_E \frac{|f|}{A}\cdot\frac{|g|}{B}\,d\mu \le \frac{1}{p}\frac{\int\limits_E |f|^p\,d\mu}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int\limits_E |g|^q\,d\mu}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Теорема доказана.

Теорема (неравенство Минковского для интеграла Лебега): пусть f, g – измеримые функции на измеримом множестве E, $p \ge 1$, $|f|^p$, $|g|^p$ – суммируемы, тогда $|f+g|^p$ также суммируема и $\left(\int\limits_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство: если $p=1$, то $\int\limits_E |f+g|\,d\mu \le \int\limits_E |f|\,d\mu + \int\limits_E |g|\,d\mu$ – очевидно. Пусть $p>1$. Тогда поскольку $|f+g| \le |f|+|g|$, то достаточно доказать, что $\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Выберем $q>1$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда:

$$\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_E (|f|+|g|)(|f|+|g|)^{p-1}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_E |f|(|f|+|g|)^{p-1}\,d\mu + \int\limits_E |g|(|f|+|g|)^{p-1}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left|\begin{matrix}\text{неравенство}\\ \text{Гельдера}\end{matrix}\right| \le$$

$$\le \left(\left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E (|f|+|g|)^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_E (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Разделим полученное неравенство на $\left(\int_E \left(|f|+|g|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{pq}}$, тогда

$$\left(\int_E \left(|f|+|g|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{pq}} \le \left(\left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда $\left(\int_E \left(|f|+|g|\right)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, значит,

$$\left(\int_E \left(|f|+|g|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

Теорема (неравенство Чебышева): пусть f – суммируемая на измеримом множестве E функция, причем $f \ge 0$, тогда $\forall c > 0$ $\mu\{x \in E : f(x) \ge c\} \le \frac{1}{c}\int_E f d\mu$.

Доказательство: обозначим $E_1 = \{x \in E : f(x) \ge c\}$, $E_2 = \{x \in E : f(x) < c\}$. Ясно, что $E_1 \bigcup E_2 = E$ и $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$.

Тогда $\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \ge \int_{E_1} f d\mu \ge c\int_{E_1} 1 d\mu = c\mu(E_1)$, откуда $\mu(E_1) \le \frac{1}{c}\int_E f d\mu$.

Теорема доказана.

Замечание: при доказательстве использовали свойство интеграла Лебега $\int_E 1 d\mu = \mu(E)$ (поскольку 1 – ступенчатая функция на E).

Теорема (о функциях с нулевым интегралом): пусть f – неотрицательная измеримая функция на измеримом множестве E, тогда $\int_E f d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $f \overset{п.в.}{=} 0$.

Доказательство: пусть $\int_E f d\mu = 0$. В силу неравенства Чебышева $\forall c > 0$ $\mu\{x : f(x) \ge c\} \le \frac{1}{c}\int_E f d\mu = 0$, значит, $\mu\{x : f(x) \ge c\} = 0$, поскольку отрицательной мера быть не может. Рассмотрим множества $E_1 = \{x : f(x) > 1\}$, $E_2 = \left\{x : f(x) > \frac{1}{2}\right\}, \ldots,$ $E_n = \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}, \ldots$. Из сказанного выше ясно, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(E_n) = 0$. Ясно, что, если в некоторой точке x $f(x) > 0$, то найдется номер n такой, что $f(x) > \frac{1}{n}$, значит, эта точка x принадлежит множеству E_n.

Итак, $\exists n \in \mathbb{N}$: $\{x : f(x) > 0\} \in E_n$. Таким образом, $\mu\{x : f(x) > 0\} = 0$. Поскольку по условию $f(x) \geq 0$, то отсюда следует, что $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$, значит, $f \overset{п.в.}{=} 0$.

Обратно: пусть $f \overset{п.в.}{=} 0$. Отметим, что $\int\limits_E 0 d\mu = 0$ (0 – ступенчатая функция на E). Кроме того, очевидно, что, если $f_n(x) \to f(x)$, то $f_n(x) \overset{п.в.}{\to} f(x)$, а, если $f = 0$, то $f \overset{п.в.}{=} 0$. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = 0 \underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} 0 \overset{п.в.}{=} f(x)$. Поскольку очевидно, что $|f_n| = 0 \leq 0 = g$ и g – суммируема, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x) d\mu = \int\limits_E f(x) d\mu$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E 0 d\mu = \int\limits_E f d\mu$, т.е. $\int\limits_E f d\mu = 0$.

Теорема доказана.

Замечание: из этой теоремы следует, что интегралы Лебега от почти всюду совпадающих функций равны (заметим, что в части достаточности условие неотрицательности функции не требуется).

Определение: пусть f – измеримая функция. Классом функций, соответствующим данной функции f, называется множество $[f] = \left\{ g : g \overset{п.в.}{=} f \right\}$.

Определение (операции с классами): $[f] + [g] = [f + g]$, $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$, $\dfrac{[f]}{[g]} = \left[\dfrac{f}{g}\right]$, $\|[f]\| = [|f|]$, $[f]^p = [f^p]$; если $g \in [f]$, то $\int\limits_E g d\mu = \int\limits_E f d\mu$; $[f] \leq [g] \Leftrightarrow f \overset{п.в.}{\leq} g$.

Замечание: всюду далее (в тех частях, что касаются интеграла Лебега), если не оговорено особо, все рассматриваемые множества предполагаются измеримыми. Также, если это не вызывает недоразумений (особенно в примерах и задачах), интеграл Лебега по подмножеству числовой прямой будем обозначать $\int\limits_a^b f(x)dx$. Более подробно о построении и свойствах меры и интеграла Лебега см. в [5].

Упражнения: 1. Доказать обобщенное неравенство Чебышева: при $p \geq 0$ $\mu\{x \in E : f(x) \geq c\} \leq \dfrac{1}{c^p}\int\limits_E f^p d\mu$ (в условиях теоремы о неравенстве Чебышева).

2. Доказать, что в неравенстве Гельдера знак равенства достигается тогда и только тогда, когда почти всюду на E $f(x)g(x) \geq 0$ или $f(x)g(x) \leq 0$ и для некоторых чисел α и β, не равных нулю одновременно, $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$.

3. Доказать, что в неравенстве Минковского знак равенства достигается тогда и только тогда, когда для некоторых неотрицательных чисел α и β, не равных нулю одновременно, $\alpha f(x)=\beta g(x)$ почти всюду на E.

4. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)=\begin{cases} x^3, \ x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ 1, \ x\in[0,1]\bigcap\mathbb{Q} \end{cases}$ на отрезке $[0,1]$.

5. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ если } x \text{ - целое} \\ \cos x, \text{ если } x \text{ - нецелое} \end{cases}$ на отрезке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)=\begin{cases} e^x, \text{ если } x=\dfrac{m}{2^n}, m,n\in\mathbb{N} \\ -e^x, \text{ в других точках} \end{cases}$ на отрезке $[2,8]$.

7. Вычислить интеграл Лебега функции $f(x)=\begin{cases} x, \ x \text{ - алгебраическое} \\ x^2, \ x \text{ - трансцендентное} \end{cases}$ на отрезке $[0,1]$.

8. Вычислить интеграл Лебега:

а) $\int\limits_{[-3,3]} \operatorname{sign}\cos\pi x d\mu$; б) $\int\limits_{(0,1]} \operatorname{sign}\sin\dfrac{\pi}{x} d\mu$;

в) $\int\limits_{[0,2]\times[0,2]} [x+y] d\mu$; г) $\int\limits_{x^2\le y\le 4} \sqrt{\left[y-x^2\right]} d\mu$.

Здесь $[a]$ – целая часть числа $a\in\mathbb{R}$.

Указание: показать, что все подынтегральные функции являются ступенчатыми.

ЧАСТЬ I. ПРОСТРАНСТВА

РАЗДЕЛ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Понятия метрики и метрического пространства

Определение: пусть X – произвольное множество. Отображение $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой (расстоянием) в X, если оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома неотрицательности);
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Замечание: напомним, что прямым или декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Определение: множество X, рассматриваемое вместе с заданной на нем метрикой ρ, называется метрическим пространством, а элементы $x, y, z, ... \in X$ – точками (или векторами) этого метрического пространства.

Замечание: иногда метрическое пространство X вместе с заданной на нем метрикой ρ обозначают (X, ρ).

Замечание: всякое подмножество Y метрического пространства X, рассматриваемое с тем же расстоянием между элементами, также является метрическим пространством и называется подпространством пространства X.

Определение: расстоянием между двумя множествами M и N метрического пространства X называется число $\rho(M, N) = \inf\limits_{\substack{x \in M \\ y \in N}} \rho(x, y)$.

Замечание: в частности, расстоянием от точки $a \in X$ до множества $M \subset X$ называется число $\rho(a, M) = \inf\limits_{x \in M} \rho(a, x)$.

Определение: две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$, введенные на одном и том же метрическом пространстве X, называются эквивалентными, если для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset X$ и для элемента $x \in X$ из того, что при $n \to \infty$ $\rho_1(x_n, x) \to 0$ следует, что $\rho_2(x_n, x) \to 0$ и наоборот.

Теорема (достаточное условие эквивалентности метрик): пусть X – метрическое пространство, $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ – две метрики в нем. Пусть существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $\forall x, y \in X$ справедливо неравенство $c_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2\rho_1(x, y)$. Тогда метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

Примеры решения задач

1. Пусть $X = [1, +\infty)$, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x + y}, & \text{при } x \neq y \\ 0, & \text{при } x = y \end{cases}$. Доказать, что ρ – метрика.

Решение: проверим аксиомы метрики.

а) $\rho(x,y)\ge 0$ – очевидно;

б) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ – очевидно;

в) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ – очевидно;

г) проверим, что $\rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Ясно, что $\rho(x,z)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+z}, & \text{при } x\ne z\\ 0, & \text{при } x=z\end{cases}$, $\rho(y,z)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } y\ne z\\ 0, & \text{при } y=z\end{cases}$ и

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{при } x\ne y\\ 0, & \text{при } x=y\end{cases}+\begin{cases}1+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } y\ne z\\ 0, & \text{при } y=z\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{при } x\ne y, y=z\\ 1+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } y\ne z, x=y\\ 2+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } x\ne y, y\ne z\\ 0, & \text{при } x=y, y=z\end{cases}$$

Таким образом, надо рассмотреть отдельно четыре случая.

Случай 1: $x\ne y, y=z$, тогда $x\ne z$ и

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=1+\frac{1}{x+y}=1+\frac{1}{x+z}=\rho(x,z).$$

Случай 2: $y\ne z, x=y$, тогда $x\ne z$

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=1+\frac{1}{y+z}=1+\frac{1}{x+z}=\rho(x,z).$$

Случай 3: $x\ne y, y\ne z$. Здесь возможно два варианта:

Случай 3-а: $x\ne z$ и надо проверить, что $2+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}\ge 1+\dfrac{1}{x+z}$, т.е., что $1+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}-\dfrac{1}{x+z}\ge 0$. Поскольку по условию $x\ge 1$, $y\ge 1$, $z\ge 1$, то $x+z\ge 2$, откуда $\dfrac{1}{x+z}\le\dfrac{1}{2}$, т.е. $-\dfrac{1}{x+z}\ge -\dfrac{1}{2}$, откуда $1-\dfrac{1}{x+z}\ge 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ и, значит $1+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}-\dfrac{1}{x+z}\ge\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{2}>0$.

Случай 3-б: $x=z$ и надо проверить, что $2+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}\ge 0$, но это очевидно, поскольку $x\ge 1$, $y\ge 1$, $z\ge 1$.

Случай 4: $x = y, y = z$, тогда $x = z$ и $\rho(x,y)+\rho(y,z)=0=\rho(x,z)$.

Итак, в любом случае, $\rho(x,y)+\rho(y,z)\ge\rho(x,z)$, т.е. аксиома треугольника доказана. Таким образом, функция ρ определяет метрику.

2. Пусть X – произвольное множество, а отображение $\rho_1 : X\times X\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

а) $\rho_1(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (аксиома тождества);

б) $\rho_1(x,y)\le\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z)\ \forall x,y,z\in X$ (аксиома треугольника).

Доказать, что функция ρ_1 определяет метрику в X.

Решение: по определению метрики, достаточно проверить выполнение для функции ρ_1 аксиом неотрицательности и симметрии.

Пусть в условии б) $y = x$, тогда $\rho_1(x,x)\le\rho_1(x,z)+\rho_1(x,z)=2\rho_1(x,z)$ и, в силу условия а) $2\rho_1(x,z)\ge 0$, откуда $\rho_1(x,z)\ge 0\ \ \forall x,z\in X$. Условие неотрицательности проверено.

Пусть в условии б) $z = x$, тогда $\rho_1(x,y)\le\rho_1(x,x)+\rho_1(y,x)$ и, в силу условия а) $\rho_1(x,y)\le\rho_1(y,x)\ \ \forall x,y\in X$. Поскольку это неравенство верно для любой пары элементов $x,y\in X$, то справедливо и неравенство $\rho_1(x,y)\ge\rho_1(y,x)$. Откуда $\forall x,y\in X\ \ \rho_1(x,y)=\rho_1(y,x)$ и условие симметрии проверено.

3. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}: x\ge 0\}$ функция, удовлетворяющая условиям:

а) $f(0)=0$ и $f(x)>0$ при $x>0$;

б) $f(x)$ не убывает при $x\ge 0$;

в) $\dfrac{f(x)}{x}$ не возрастает при $x>0$.

Доказать, что формулой $\rho(x,y)=f\left(|x-y|\right)$ определяется метрика в $\mathbb{R}$.

Решение: очевидно, что аксиомы неотрицательности, тождества и симметрии выполняются.

Покажем, что для проверки аксиомы треугольника достаточно доказать неравенство $f(a+b)\le f(a)+f(b)$ при произвольных $a\ge b>0$.

Действительно, поскольку $|x-y|\le|x-z|+|z-y|$ и справедливо условие б), то получаем, что $f\left(|x-y|\right)\le f\left(|x-z|+|z-y|\right)$ и поэтому для доказательства аксиомы треугольника $f\left(|x-y|\right)\le f\left(|x-z|\right)+f\left(|z-y|\right)$ достаточно доказать, что $f\left(|x-z|+|z-y|\right)\le f\left(|x-z|\right)+f\left(|z-y|\right)$. Обозначая $|x-z|=a$, $|z-y|=b$ (или наоборот, чтобы выполнялось условие $a\ge b>0$) получим требуемое.

Рассмотрим функцию $\varphi(a,b)=f(a)+f(b)-f(a+b)$. Надо доказать, что $\varphi(a,b)\ge 0$. По теореме Лагранжа $f(a+b)-f(a)=f'(\xi)(a+b-a)=f'(\xi)b$ для $\xi\in\left(a,a+b\right)$, откуда $\varphi(a,b)=f(b)-\left[f(a+b)-f(a)\right]=f(b)-f'(\xi)b$. Из условия в) следует, что при $x>0$ $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\le 0$, т.е. $\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}\le 0$, откуда $f'(x)x-f(x)\le 0$, т.е., $f'(x)\le\frac{f(x)}{x}$, значит, $-f'(\xi)\ge-\frac{f(\xi)}{\xi}$ и получаем, что $\varphi(a,b)\ge f(b)-\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot b$.

Поскольку $a<\xi$, то из условия в) следует, что $\frac{f(a)}{a}\ge\frac{f(\xi)}{\xi}$, значит, $-\frac{f(\xi)}{\xi}\ge-\frac{f(a)}{a}$ и $\varphi(a,b)\ge f(b)-\frac{f(a)}{a}\cdot b=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{a}$. Поскольку $a\ge b$, то из условия в) получаем, что $\frac{f(a)}{a}\le\frac{f(b)}{b}$, откуда $a\cdot f(b)-b\cdot f(a)\ge 0$, значит, $\varphi(a,b)\ge 0$.

4. Пусть X – множество всех алгебраических многочленов степени n на отрезке $[0,1]$, и если $P(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$, а $Q(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$, то $\rho_1(P,Q)=\max_{t\in[0,1]}|P(t)-Q(t)|$, а $\rho_2(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|$. Доказать, что эти две метрики эквивалентны.

Решение: обозначим $g(t)=P(t)-Q(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k-\sum_{k=0}^{n}b_k t^k=\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)t^k=\sum_{k=0}^{n}c_k t^k$.

Тогда $\rho_1(P,Q)=\max_{t\in[0,1]}|g(t)|=\max_{t\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n}c_k t^k\right|\le\max_{t\in[0,1]}\sum_{k=0}^{n}|c_k|t^k\le\sum_{k=0}^{n}|c_k|\max_{t\in[0,1]}t^k=\sum_{k=0}^{n}|c_k|=$ $=\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|=\rho_2(P,Q)$.

Рассмотрим разбиение $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n=1$ отрезка $[0,1]$. Составим систему уравнений $\sum_{k=0}^{n}c_k t_i^{\,k}=g(t_i)$, где $i=0,1,2,...,n$. Неизвестные здесь – коэффициенты c_k. Определитель матрицы этой системы имеет вид $|A|=\begin{vmatrix}1 & t_0 & t_0^{\,2} & \cdots & t_0^{\,n}\\ 1 & t_1 & t_1^{\,2} & \cdots & t_1^{\,n}\\ 1 & t_2 & t_2^{\,2} & \cdots & t_2^{\,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & t_n & t_n^{\,2} & \cdots & t_n^{\,n}\end{vmatrix}$.

Это – определитель Вандермонда, он равен $\prod_{1\le i<j\le n}(t_j-t_i)\ne 0$, поскольку все точки разбиения отличны друг от друга. Таким образом, система имеет единственное решение $c_k=A^{-1}g(t_i)=\sum_{i=0}^{n}d_{ki}g(t_i)$, где $k=0,1,2,...,n$, d_{ki} – коэффициенты обратной матрицы A^{-1}. Заметим, что числа d_{ki} зависят только от выбора точек разбиения, но не зависят от многочлена $g(t)$.

Таким образом, $\rho_2(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}|c_k|=\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=0}^{n}d_{ki}g(t_i)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}|d_{ki}||g(t_i)|$. Ясно, что

$\forall i\ \ |g(t_i)| \le \max\limits_{t\in[0,1]} |g(t)|$, тогда $\rho_2(P,Q) \le \max\limits_{t\in[0,1]} |g(t)| \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} |d_{ki}| = \rho_1(P,Q) \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} |d_{ki}|$.

Итак, $\rho_1(P,Q) \le \rho_2(P,Q) \le \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} |d_{ki}| \cdot \rho_1(P,Q)$, следовательно, в силу достаточного условия, метрики эквивалентны.

5. Доказать, что для произвольных множеств M и N в метрическом пространстве X $\rho(M,N) = \inf\limits_{x\in M} \rho(x,N) = \inf\limits_{y\in N} \rho(M,y)$.

Решение: покажем, что для произвольной ограниченной снизу функции f, определенной на прямом произведении $M \times N = \{(x,y) : x \in M, y \in N\}$ произвольных множеств M и N справедливо равенство $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) = \inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right)$.

Очевидно, что $\forall x \in M$ $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) \le \inf\limits_{y\in N} f(x,y)$, откуда $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) \le \inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right)$.

Поскольку $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y)$ – это наибольшая миноранта для $f(x,y)$, то $\forall \varepsilon > 0$ число $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) + \varepsilon$ минорантой не является, т.е. найдется пара $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ такая, что $f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) + \varepsilon$.

Далее, поскольку $\inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right) \le \inf\limits_{y\in N} f(x_\varepsilon, y) \le f(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, то получаем, что $\inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right) < \inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) + \varepsilon$. Тогда $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) \le \inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right) < \inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) + \varepsilon$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} f(x,y) = \inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} f(x,y)\right)$.

Далее, берем $f(x,y) = \rho(x,y)$. Поскольку $\rho(x,y) \ge 0$, то $\rho(x,y)$ ограничена снизу, тогда $\rho(M,N) = \inf\limits_{\substack{x\in M\\ y\in N}} \rho(x,y) = \inf\limits_{x\in M}\left(\inf\limits_{y\in N} \rho(x,y)\right) = \inf\limits_{x\in M} \rho(x,N)$.

Доказательство второго равенства предлагается проделать самостоятельно (см. задачу 26).

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать достаточное условие эквивалентности метрик.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$. Проверить, что $\forall x, y \in X$ расстояние $\rho(x,y) = |x - y|$ удовлетворяет аксиомам метрики.

3. Пусть $X = \mathbb{R}$. Являются ли метриками в X следующие функции:

а) $\rho(x,y) \equiv 0\ \ \forall x, y \in X$;

б) $\rho(x,y) = x - y\ \ \forall x, y \in X$;

в) $\rho(x,y)\equiv 1 \ \ \forall x,y\in X$?

4. Является ли функция $\rho(x,y)=\begin{cases}1, \text{ при } x\neq y\\ 0, \text{ при } x=y\end{cases}$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

5. Является ли функция $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

6. Является ли функция $\rho(x,y)=\left|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y\right|$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

7. Является ли функция $\rho(x,y)=\left|x^3-y^3\right|$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

8. Является ли функция $\rho(x,y)=\ln\left(1+|x-y|\right)$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

9. Показать, что на множестве $\mathbb{N}$ функция $\rho(m,n)=\dfrac{|m-n|}{mn}$ определяет метрику.

10. Является ли метрическим пространством множество X всех прямых на плоскости, если расстояние между двумя прямыми $L_1: x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$ и $L_2: x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ определить формулой $\rho\left(L_1,L_2\right)=|p_1-p_2|+|\sin\alpha_1-\sin\alpha_2|$?

11. Является ли метрическим пространством множество X всех прямых на плоскости, если расстояние между двумя прямыми $L_1: x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$ и $L_2: x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$ определить формулой $\rho\left(L_1,L_2\right)=|p_1-p_2|+|\sin\alpha_1-\sin\alpha_2|$ и для этих прямых $0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}$?

12. Пусть X – множество всех точек окружности радиуса R с центром в начале координат. Примем за расстояние между двумя его точками длину кратчайшей дуги окружности, их соединяющей. Является ли X метрическим пространством?

13. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве (X,ρ) для любых $x,y,z\in X$ справедливо неравенство $\left|\rho(x,z)-\rho(y,z)\right|\le\rho(x,y)$ (второе неравенство треугольника).

14. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве (X,ρ) для любых элементов $x,y,z,u\in X$ справедливо неравенство четырехугольника $\left|\rho(x,z)-\rho(y,u)\right|\le\rho(x,y)+\rho(z,u)$.

15. Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2$?

16. Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$?

17. Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\max\left\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\right\}$?

18. Является ли метрическим пространством множество двумерных векторов, если положить $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}$?

Указание: использовать неравенство Минковского.

19. Пусть на числовой прямой $\mathbb{R}$ расстояние определяется формулой $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Проверить, что ρ действительно является метрикой.

Указание: по аналогии со стереографической проекцией установить взаимно однозначное соответствие между числовой прямой и окружностью. Найти расстояние между образами точек прямой на окружности и воспользоваться задачей 18.

20. Пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на множестве $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$, удовлетворяющая условиям:

а) $f(0)=0$ и $f(x)>0$ при $x>0$;

б) $f(x)$ не убывает;

в) $f''(x)\leq 0$ при $x>0$.

Доказать, что формулой $\rho(x,y)=f\left(|x-y|\right)$ определяется метрика в $\mathbb{R}$.

21. Пусть X – метрическое пространство, $\rho(x,y)$ – метрика в нем. Доказать, что функция $\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ также определяет метрику в X.

Указание: при проверке аксиомы треугольника доказать следующие вспомогательные утверждения: для любых чисел $0\leq a\leq b$ выполняется неравенство $a+ab\leq b+ab$, а отсюда следует, что $\dfrac{a}{1+a}\leq\dfrac{b}{1+b}$. Либо можно воспользоваться монотонным возрастанием функции $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$.

22. Является ли функция $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

23. Пусть $X=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\rho_1(x,y)=|x-y|$ и $\rho_2(x,y)=|\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y|$. Доказать, что метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

Указание: воспользоваться определением эквивалентных метрик.

24. Доказать, что формулой $\rho(x,y)=\mathrm{arctg}|x-y|$ определяется метрика в $\mathbb{R}$.

Указание: воспользоваться примером 3.

25. Используя задачу 20, показать, что функция $\rho(x,y)=\ln\left(1+|x-y|\right)$ определяет метрику на множестве $\mathbb{R}$.

26. В условиях примера 5 доказать, что $\rho(M,N)=\inf\limits_{y\in N}\rho(M,y)$.

27. Пусть $C^{(n)}[0,1]$ – пространство всех функций, определенных на отрезке $[0,1]$ и имеющих непрерывную n-ю производную ($n\in\mathbb{N}$). Доказать, что фор-

мулы $\rho_1(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\max_{t\in[0,1]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|$ и $\rho_2(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\max_{t\in[0,1]}\frac{\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|}{k!}$ определяют в $C^{(n)}\left[0,1\right]$ эквивалентные метрики.

Указание: показать, что $\rho_2(x,y)\le\rho_1(x,y)\le n!\rho_2(x,y)$.

28. В условиях задачи 27 показать, что метрики $\rho_1(x,y)$ и $\rho_2(x,y)$ эквивалентны метрике $\rho_3(x,y)=\max_{0\le k\le n}\max_{t\in[0,1]}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|$.

29. Построить пример непустых непересекающихся замкнутых множеств в $\mathbb{R}^2$, расстояние между которыми равно нулю.

Указание: например $M=\left\{(x,y): y=0\right\}$ *и* $N=\left\{(x,y): xy=1\right\}$.

30. Пусть X – метрическое пространство, $\rho(x,y)$ – метрика в нем. Доказать, что $\rho(x,y)$ – непрерывная функция по совокупности своих аргументов, т.е. если $x_n\to x$ и $y_n\to y$, то $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.

Указание: если $x_n\to x$, *то* $\rho(x_n,x)\to 0$. *Воспользоваться задачей 14.*

31. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Показать, что для того, чтобы формула $\rho(x,y)=\left|f(x)-f(y)\right|$ задавала метрику на $\mathbb{R}$, функция f должна быть строго монотонна.

1.2. Множества в метрических пространствах. Примеры метрических пространств

Определение: пусть X – метрическое пространство, тогда множество $B(a,R)=\{x\in X:\rho(x,a)<R\}$ называется открытым шаром с центром в точке $a\in X$ радиуса R.

Определение: пусть X – метрическое пространство, тогда множество $B[a,R]=\{x\in X:\rho(x,a)\le R\}$ называется замкнутым шаром с центром в точке $a\in X$ радиуса R.

Определение: пусть X – метрическое пространство. Окрестностью точки $a\in X$ называется любой открытый шар с центром в этой точке.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Множество M называется ограниченным, если его можно целиком заключить в некоторый шар (открытый или замкнутый).

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Множество M называется открытым, если любая точка в нем лежит вместе с некоторой окрестностью.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Множество M называется замкнутым, если его дополнение $X\setminus M$ является открытым множеством.

Теорема (свойства открытых и замкнутых множеств): 1. Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

2. Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Точка $a\in X$ называется предельной точкой для множества M, если в любой окрестности точки a лежит бесконечно много точек из M.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Точка $a\in M$ называется изолированной точкой множества M, если в некоторой окрестности точки a нет точек из M, отличных от точки a.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Замыканием множества M называется множество, полученное добавлением к M всех его предельных точек. Обозначение: $\overline{M}$.

Теорема (о замкнутости замыкания): замыкание множества всегда является замкнутым множеством.

Теорема (критерий замкнутости): множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Замечание: доказательства сформулированных теорем ничем не отличаются от ранее доказанных аналогичных фактов в математическом анализе.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Точка $a\in M$ называется внутренней точкой множества M, если она лежит в M вместе с некоторой своей окрестностью. Совокупность внутренних точек обозначается M^0.

Замечание: ясно, что если $M = M^0$, то множество M открыто, а если $M = \bar{M}$, то множество M замкнуто. Очевидны включения: $M^0 \subset M \subset \bar{M}$.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$ – множество в нем. Точка $a \in X$ называется граничной точкой множества M, если в произвольной ее окрестности содержатся как точки из множества M, так и точки, множеству M не принадлежащие. Совокупность граничных точек множества M обозначается ∂M и называется границей этого множества.

Определение (примеры метрических пространств):

№	Название, обозначение	Описание	Расстояние
1.	Числовая прямая, $\mathbb{R}$	Множество всех вещественных чисел	$\rho(x,y) = \lvert x-y \rvert$
2.	Евклидово n-мерное пространство, $\mathbb{R}^n$	Множество всех упорядоченных систем из n вещественных чисел	$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \eta_k)^2}$, где $x = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $y = (\eta_1,\dots,\eta_n)$
3.	Пространство $C[a,b]$	Множество всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$	$\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} \lvert x(t) - y(t) \rvert$
4.	Пространство l_∞	Множество ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, т.е. таких, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lvert \xi_k \rvert \le c_x$, где c_x – константа, своя для каждой последовательности x.	$\rho(x,y) = \sup\limits_{k} \lvert \xi_k - \eta_k \rvert$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$
5.	Пространство c	Множество сходящихся числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, т.е. таких, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$	$\rho(x,y) = \sup\limits_{k} \lvert \xi_k - \eta_k \rvert$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$
6.	Пространство c_0	Множество числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, сходящихся к нулю, т.е. таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$	$\rho(x,y) = \sup\limits_{k} \lvert \xi_k - \eta_k \rvert$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$
7.	Пространство $L_p[a,b]$, $p \ge 1$	Множество всех функций $x(t)$, для которых $\int_a^b \lvert x(t) \rvert^p dt < +\infty$ (в смысле Лебега)	$\rho(x,y) = \left(\int_a^b \lvert x(t) - y(t) \rvert^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$

8.	Пространство l_p, $p \ge 1$	Множество числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert\xi_k\rvert^p < +\infty$	$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lvert\xi_k - \eta_k\rvert^p \right)^{\frac{1}{p}}$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ...)$

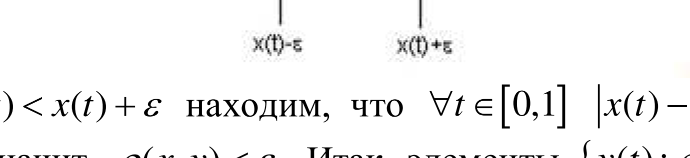
Замечание: указанные метрические пространства являются основными, однако, помимо этих, существует множество других пространств.

Замечание: метрика $\rho(x,y) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ может рассматриваться также и в пространстве ограниченных разрывных на отрезке $[a,b]$ функций. Таким же образом можно задавать метрику в пространстве функций, непрерывных на интервале (a,b) (а также на различных видах полуинтервалов, конечных или бесконечных). Для пространства функций, непрерывных на отрезке, верно, что $\rho(x,y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Примеры решения задач

1. Доказать, что множество E всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих неравенствам $A < x(t) < B$ (A, B – фиксированные числа), является открытым.

Решение: по определению открытого множества надо доказать, что любая точка лежит в нем вместе с некоторой своей окрестностью (т.е. вместе с открытым шаром с центром в этой точке). Пусть $x(t) \in E$. Обозначим $\alpha = \inf\limits_{t \in [0,1]} x(t)$, $\beta = \sup\limits_{t \in [0,1]} x(t)$. Покажем, что $\alpha > A$. От противного: допустим, что $\alpha \le A$. Поскольку $x(t)$ непрерывна на $[0,1]$, то по теореме Вейерштрасса, она принимает на этом отрезке свое наименьшее значение, т.е. $\exists t_0 \in [0,1]$: $x(t_0) = \alpha \le A$. Это противоречит условию $\forall t \in [0,1]$ $x(t) > A$. Аналогично доказывается, что $\beta < B$. Далее, обозначим $\varepsilon = \min\{\alpha - A, B - \beta\}$ и рассмотрим непрерывную на $[0,1]$ функцию $y(t)$ такую, что $\forall t \in [0,1]$ $x(t) - \varepsilon < y(t) < x(t) + \varepsilon$. Покажем, что $y(t) \in E$ (см. рис.). Действительно, если $\varepsilon = \alpha - A \le B - \beta$, то справедлива цепочка соотношений $A \le x(t) - (\alpha - A) < y(t) < x(t) + B - \beta \le B$. Аналогичные рассуждения справедливы в случае $\varepsilon = B - \beta \le \alpha - A$.



Из $x(t) - \varepsilon < y(t) < x(t) + \varepsilon$ находим, что $\forall t \in [0,1]$ $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$, откуда $\sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon$, значит, $\rho(x,y) < \varepsilon$. Итак, элементы $\{y(t) : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ представляют собой открытый шар с центром в точке $x(t)$ радиуса ε, который целиком лежит в множестве E. Значит каждая функция $x(t)$ лежит в множестве E вместе со своей окрестностью (которая называется еще ε-окрестностью). Тем самым, множество E открыто.

2. Разместить в единичном шаре в пространстве l_2 счетное число непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{8}$.

Решение: решим задачу для замкнутых шаров.

Пусть $B=\{x\in l_2:\rho(x,0)\le 1\}$ – единичный шар с центром в начале координат, $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0,...)$ $\forall k\in\mathbb{N}$ – счетное множество векторов в l_2, $B_k=\left\{x\in l_2:\rho\left(x,\frac{1}{4}e_k\right)\le\frac{1}{8}\right\}$ – счетное число шаров с центрами в точках $\frac{1}{4}e_k$ и радиусами $\frac{1}{8}$. Покажем, что $\forall k\in\mathbb{N}$ $B_k\subset B$.

Если $x\in B_k$, то $\rho(x,0)\le\rho\left(x,\frac{1}{4}e_k\right)+\rho\left(\frac{1}{4}e_k,0\right)\le\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}<1$, откуда следует, что $\forall x\in B_k$ тем более $x\in B$, значит $\forall k$ $B_k\subset B$.

Покажем, что $B_k\bigcap B_m=\varnothing$ при $k\ne m$. Предварительно отметим, что $\rho\left(\frac{1}{4}e_k,\frac{1}{4}e_m\right)=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Пусть $x\in B_k$, $y\in B_m$. Тогда:

$$\rho\left(\frac{e_k}{4},\frac{e_m}{4}\right)\le\rho\left(\frac{e_k}{4},x\right)+\rho(x,y)+\rho\left(y,\frac{e_m}{4}\right)\le\frac{1}{8}+\rho(x,y)+\frac{1}{8},$$

откуда $\frac{\sqrt{2}}{4}\le\frac{1}{4}+\rho(x,y)$, т.е. $\rho(x,y)\ge\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{4}>0$. Поскольку точки x и y произвольны, то шары общих точек не имеют, а значит, не пересекаются.

3. Доказать, что множество $M=\left\{x\in C^{(1)}[0,1]:x'\left(\frac{1}{2}\right)=2\right\}$ – замкнуто в пространстве $C^{(1)}[0,1]$.

Решение: пространством $C^{(1)}[0,1]$ называется множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|+$ $+\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)-y'(t)|$. Пусть x_0 – предельная точка множества M, т.е. в любом шаре $B(x_0,\varepsilon)$ содержится бесконечно много точек $x\in M$, т.е. $\rho(x_0,x)<\varepsilon$, откуда $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-x_0(t)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)-y_0'(t)|<\varepsilon$, в частности, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)-x_0'(t)|<\varepsilon$, т.е. $\forall t\in[0,1]$ $|x'(t)-x_0'(t)|<\varepsilon$. В частности, $\left|x'\left(\frac{1}{2}\right)-x_0'\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$, откуда $\left|2-x_0'\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$.

В силу произвольности ε заключаем, что $x_0'\left(\frac{1}{2}\right)=2$, т.е. $x_0 \in M$ и M – замкнуто.

4. Доказать, что множество $M=\{x\in C[0,1]:3\le x(t)<5\}$ не открыто, не замкнуто и ограничено в пространстве $C[0,1]$.

Решение: рассмотрим точку $x_0(t)\equiv 3\in M$ и точку $x(t)=x_0(t)-\frac{\varepsilon}{2}$ при любом $\varepsilon>0$. Ясно, что $x(t)\notin M$, однако $\rho(x,x_0)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-x_0(t)|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, откуда следует, что $x\in B(x_0,\varepsilon)$. Итак, в любой окрестности точки x_0 нашли точку, не принадлежащую M, следовательно, $B(x_0,\varepsilon)\not\subset M$, т.е. M – не открыто.

Покажем, что M – не замкнуто. Для этого достаточно найти предельную точку, не принадлежащую M. Ясно, что $x_0(t)\equiv 5\notin M$ и осталось доказать, что эта точка предельная для M, т.е. в любой ее окрестности найдется точка из M.

Рассмотрим $x(t)=x_0(t)-\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},2\right\}$, тогда ясно, что $x(t)\in M$, а, с другой стороны, $\rho(x,x_0)=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},2\right\}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, т.е. $x\in B(x_0,\varepsilon)$.

Для доказательства ограниченности достаточно заключить множество M в некоторый шар, например, в шар с центром в начале координат, т.е. надо доказать, что $\forall x(t)\in M\quad \rho(x,0)<R$. Поскольку $\rho(x,0)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|<5$, то достаточно взять $R=5$.

5. Доказать, что множество $M=\{x\in l_1:\xi_k>-1\}$ открыто в пространстве l_1.

Решение: рассмотрим $x_0=\left(\xi_k^0\right)\in M$, т.е. $\forall k\in\mathbb{N}\ \ \xi_k^0>-1$ и $a=\inf\limits_k \xi_k^0\ge -1$. Поскольку $x_0\in l_1$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k^0=0$, т.е. $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall k>N\quad \xi_k^0>-\frac{1}{2}$, откуда $a>-1$ (если какие-то $\xi_k^0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$, то их лишь конечное число, поэтому среди них $\inf\xi_k^0=\min\xi_k^0>-1$). Далее, $\forall x=(\xi_k)\in B(x_0,r)\quad \xi_k^0-\xi_k\le\left|\xi_k-\xi_k^0\right|\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k-\xi_k^0\right|=\rho(x,x_0)<r$. С другой стороны $\xi_k=\xi_k-\xi_k^0+\xi_k^0>-r+\xi_k^0=-1+(\xi_k^0-a)\ge -1$ при $r=1+a>0$. Тем самым, $x\in M$ и потому $B(x_0,r)\subset M$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X – метрическое пространство, $M\subset X$ – множество в нем. Доказать справедливость соотношения $\bar{M}=M^0\bigcup\partial M$.

2. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$ – множество в нем. Доказать, что точка $a \in X$ может быть предельной для множества M только если $a \in M$ или $a \in \partial M$.

3. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с обычной метрикой построить открытый и замкнутый шары с центрами в точке $a = 1$ радиуса $R = 2$.

4. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \neq y \\ 0, \text{ при } x = y \end{cases}$ найти замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = 1$ радиуса $R = 2$.

5. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \neq y \\ 0, \text{ при } x = y \end{cases}$ найти замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = 1$ радиуса $R = \frac{1}{2}$.

6. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \neq y \\ 0, \text{ при } x = y \end{cases}$ найти замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = 1$ радиуса $R = 1$.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ построить замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = (0,0)$ радиуса $R = 1$.

8. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\big\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\big\}$ построить замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = (0,0)$ радиуса $R = 1$.

9. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$ построить замкнутый и открытый шары с центрами в точке $a = (0,0)$ радиуса $R = 1$.

10. Построить метрическое пространство (X, ρ) и в нем замкнутые шары $B_1[a_1, r_1]$ и $B_2[a_2, r_2]$ так, что $B_1 \subset B_2$, а $r_1 > r_2$.

11. Построить метрическое пространство (X, ρ) и в нем замкнутые ограниченные множества $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ такие, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \varnothing$.

Указание: в пространстве $\mathbb{R}$ *рассмотреть метрику* $\rho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ *и множества* $F_k = \big[k, +\infty\big)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

12. Привести пример метрического пространства, в котором замыкание открытого шара не совпадает с замкнутым шаром (т.е. $\overline{B(a, R)} \neq B[a, R]$).

Указание: на $\mathbb{R}$ *рассмотреть метрику* $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \neq y \\ 0, \text{ при } x = y \end{cases}$ *и шары* $B(a, 1)$ *и* $B[a, 1]$, *где* a *– произвольная фиксированная точка.*

13. Пусть $X=[1,+\infty)$, $\rho(x,y)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{при } x\neq y\\ 0, & \text{при } x=y\end{cases}$. Найти $B\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$, $B\left[2,\dfrac{5}{4}\right]$, $B\left[10,\dfrac{6}{5}\right]$.

14. Найти расстояние между элементами $x=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{2^3},\ldots\right)$ и $y=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^3},\ldots\right)$ в пространстве l_1.

15. Найти расстояние между элементами $x=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\ldots\right)$ и $y=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^3},\ldots\right)$ в пространстве l_2.

16. Найти расстояние между функциями $f_1(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ и $f_2(x)=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^2$ в пространстве $C[0,1]$.

17. Найти расстояние $\rho(f_1,f_2)$ в пространстве $C[0,2\pi]$, если $f_1(x)=a\sin x$, $f_2(x)=b\cos x$.

18. Найти расстояние $\rho(f_1,f_2)$ в пространстве $L_1[-1,1]$, если $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\sin x$.

19. Найти расстояние в пространстве $C[0,1]$ между $x(t)=t^3$ и $y(t)=t^2-1$.

20. Найти расстояние в пространстве $C\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ между $x(t)=\sin t$ и $y(t)=\cos t$.

21. Найти расстояние в пространстве $C[-\pi,\pi]$ между $x(t)=\sin t$ и $y(t)=\cos t$.

22. Изобразить шар $B[t^2,2]$ в $C[0,1]$.

23. Пусть $x_0(t)$ – фиксированная функция из $C[a,b]$. Доказать, что множество $E=\left\{x(t)\in C[a,b]: x(t)<x_0(t)\right\}$ открыто в $C[a,b]$. Является ли оно ограниченным?

Указание: показать, что $\alpha=\inf\limits_{t\in[a,b]}x_0(t)>\beta=\sup\limits_{t\in[a,b]}x(t)$, *и выбрать* $\varepsilon=\alpha-\beta$.

24. Доказать, что множество $M=\left\{x\in l_\infty:\xi_k>-1\right\}$ не является открытым в пространстве l_∞.

Указание: рассмотреть $x_0=\left\{-\dfrac{k}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}\in M$ *и* $x_l=\begin{cases}-\dfrac{k}{k+1}, & k\neq l\\ -1, & k=l\end{cases}\notin M$ *и подобрать* l *таким образом, чтобы* $x_l\in B(x_0,\varepsilon)$.

25. Является ли множество $\left\{x(t)\in C[0,1]:\sqrt{t}<x(t)<\sqrt[3]{t}\right\}$ открытым в $C[0,1]$?

26. Является ли множество $\left\{x(t)\in C[0,1]: x(t)=\sqrt{t}\cos\frac{a}{t},\, a\in[0,1],\, t\in(0,1]\right\}$ ограниченным?

27. Пусть $x_0(t)$ – фиксированная функция из $C[a,b]$, A – фиксированное число. Доказать, что множество $E=\left\{x(t)\in C[a,b]: A<x(t)<x_0(t)\right\}$ открыто в $C[a,b]$.

28. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – фиксированные функции из $C[a,b]$. Доказать, что множество $E=\left\{x(t)\in C[a,b]: x_1(t)<x(t)<x_2(t)\right\}$ открыто в $C[a,b]$.

29. Является ли открытым множество многочленов в пространстве $C[a,b]$?

30. Привести пример метрического пространства, в котором существует шар, имеющий несколько центров и шар, совпадающий с множеством своих центров.

Указание: например, это может быть пространство, в котором расстояния между различными точками одинаково.

31. Разместить в единичном шаре в пространстве l_2 счетное число непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{10}$.

32. Является ли множество $E=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_\infty: 0<\xi_k<1\ \forall k\in\mathbb{N}\right\}$ открытым в пространстве l_∞?

33. Доказать, что множество $E=\left\{x(t)\in C[0,1]: e^t<x(t)<4\right\}$ является ограниченным и открытым и не является замкнутым в пространстве $C[0,1]$.

34. Доказать, что множество $E=\left\{x\in c_0: 0<\xi_k<2\right\}$ является ограниченным и не является открытым и замкнутым в пространстве c_0.

35. Доказать, что множество $E=\left\{x(t)\in L_1[0,1]: \int_0^1 x(t)dt=1\right\}$ не является ограниченным и открытым и является замкнутым в пространстве $L_1[0,1]$.

Указание: для доказательства неограниченности подобрать последовательность функций $x_n(t)=\begin{cases} f(n),\ t\in\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ g(n),\ t\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}\in E$, *для которых* $\int_0^1 |x_n(t)|dt\to\infty$.

36. Доказать, что множество $E=\left\{x\in l_2: \xi_k\ge 0\right\}$ не является ограниченным и открытым и является замкнутым в пространстве l_2.

37. Доказать, что множество $E=\left\{x\in l_1: \xi_k<\frac{k+1}{k}\right\}$ не является ограниченным и замкнутым, и является открытым в пространстве l_1.

Указание: для $x_0\in E$ *показать, что* $a=\inf\limits_k\left(\frac{k+1}{k}-\xi_k^0\right)>0$ *и взять* $r=a$.

38. Является ли множество $\{\sin nt : n \in \mathbb{N}\}$ замкнутым в $L_2[-\pi, \pi]$?

Указание: показать, что $\rho(x_n, x_m) = \mathrm{const}$ *и множество не имеет предельных точек.*

39. Доказать, что множество $E = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) + x(1) > 1\}$ открыто в $C[0,1]$. Является ли оно замкнутым и ограниченным?

Указание: выбрать $\varepsilon = \dfrac{x(0) + x(1) - 1}{2}$.

1.3. Сходящиеся и фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства

Определение: пусть X – метрическое пространство. Его элемент x называется пределом последовательности $\{x_n\} \subset X$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначение: $x_n \to x$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Замечание: определение предела равносильно тому, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \;\; \rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Теорема (о подпоследовательности): пусть X – метрическое пространство, последовательность $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$, $x \in X$. Тогда любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в X к той же точке $x \in X$.

Доказательство: по определению $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \;\; \rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Аналогично, $\forall m > N \;\; \rho(x_m, x) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall m, n > N \;\; \rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \dfrac{2\varepsilon}{3}$. Далее, $\forall n_k > N \;\; \rho(x_{n_k}, x) \le \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x)$. Взяв $n_k = m > N$, получим, что $\rho(x_{n_k}, x) < \dfrac{2\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. По определению это означает, что $\rho(x_{n_k}, x) \to 0$.

Теорема доказана.

Теорема (о единственности предела): пусть X – метрическое пространство, последовательность $\{x_n\} \subset X$. Тогда эта последовательность не может сходиться более чем к одному пределу.

Доказательство: пусть при $n \to \infty$ $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \;\; \rho(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$. Т.к. x и y фиксированы, а $\varepsilon > 0$ – любое, то последнее неравенство возможно только если $\rho(x, y) = 0$, т.е. $x = y$.

Теорема доказана.

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности): пусть X – метрическое пространство, последовательность $\{x_n\} \subset X$. Тогда, если $x_n \to x$ при $n \to \infty$, а $x_0 \in X$ – произвольный фиксированный элемент, то числа $\rho(x_n, x_0)$ образуют ограниченное множество.

Доказательство: по определению предела $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. В частности, при $\varepsilon = 1 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \;\; \rho(x_n, x) < 1$. Тогда $\forall n > N$ $\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) < 1 + \rho(x, x_0)$. Поскольку числа x и x_0 фиксированы, то $\rho(x, x_0) = \text{const}$, откуда $\forall n > N \;\; \rho(x_n, x_0) < M$. Тогда, выбирая $c = \max\{\rho(x_1, x_0), \rho(x_2, x_0), \ldots, \rho(x_N, x_0), M\}$, получим, что $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \rho(x_n, x_0) \le c$.

Теорема доказана.

Теорема (критерий предельной точки): пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$ – множество в нем. Точка $a \in X$ является предельной для множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность попарно различных точек $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к a.

Доказательство: пусть a – предельная точка множества M, т.е., в любой ее окрестности лежит бесконечно много точек из M. В частности, рассмотрим окрестность $B(a,1)$ (открытый шар с центром в точке a радиуса 1) и найдем точку $x_1 \in B(a,1)$ такую, что $x_1 \in M$. Аналогично, в окрестности $B\left(a,\frac{1}{2}\right)$ найдем точку $x_2 \in B\left(a,\frac{1}{2}\right)$ такую, что $x_2 \in M$ и при этом $x_2 \neq x_1$. Точки действительно можно выбрать не совпадающими, поскольку в любой окрестности точки a точек из M – бесконечно много. На n-м шаге получим точку $x_n \in B\left(a,\frac{1}{n}\right)$ такую, что $x_n \in M$ и x_n не совпадает со всеми ранее построенными. И т.д.

Построили последовательность $\{x_n\} \subset M$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B\left(a,\frac{1}{n}\right)$, т.е. $\rho(x_n,a) < \frac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, по теореме о двух милиционерах получаем, что $\rho(x_n,a) \to 0$.

Обратно: пусть $\exists \{x_n\} \subset M$: $x_n \to a$ при $n \to \infty$. По определению предела, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\rho(x_n,a) < \varepsilon$, т.е. $x_n \in B(a,\varepsilon)$. Таким образом, в любой окрестности $B(a,\varepsilon)$ точки a лежит бесконечно много точек $x_n \in M$, значит a – предельная точка множества M.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}$ его элементов называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n,m > N$ $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Определение: метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Замечание: в силу критерия Коши $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^n$ – полные пространства. Все пространства, приведенные в п. 1.2, являются полными. Их полнота будет обоснована в разделе 2.

Теорема (о полноте подпространства): замкнутое подпространство полного пространства является полным пространством.

Доказательство: пусть X – полное метрическое пространство, K – его замкнутое подпространство. Рассмотрим фундаментальную в K последовательность. Поскольку пространство X полно, а последовательность ему принадлежит и является фундаментальной, то она имеет предел в X. Этот предел – предельная точка для K, поскольку является пределом элементов из K. Поскольку K – замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки, и, значит, этот предел принадлежит K. Таким образом, фундаментальная в K последовательность имеет предел, принадлежащий K. Следовательно K – полно.

Теорема доказана.

Замечание: полное метрическое пространство всегда является замкнутым. Действительно, если бы $\exists x_n \subset X : x_n \to x_0 \notin X$, то, поскольку сходящаяся последовательность фундаментальна, получили бы противоречие с полнотой X.

Примеры решения задач

1. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(a,r)} \subset B[a,r]$.

Решение: пусть точка $x \in \overline{B(a,r)}$, тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in B(a,r)$. Таким образом, $\rho(x,a) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,a) < \rho(x,x_n) + r$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\rho(x,a) \le r$, т.е., что $x \in B[a,r]$.

2. Показать, что в $C[a,b]$ $\overline{B(x_0,r)} = B[x_0,r]$.

Решение: поскольку $\overline{B(x_0,r)} \subset B[x_0,r]$, то достаточно показать, что $B[x_0,r] \subset \overline{B(x_0,r)}$. Пусть $x(t) \in B[x_0,r]$ и $x_n(t) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)x(t) + \dfrac{1}{n}x_0(t)$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, тогда $\rho(x_0,x_n) = \sup\limits_{t\in[a,b]}\left|x_0(t) - x_n(t)\right| = \sup\limits_{t\in[a,b]}\left|x_0(t) - \left(1-\dfrac{1}{n}\right)x(t) - \dfrac{1}{n}x_0(t)\right| =$
$= \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|x_0(t) - x(t)\right| = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)\rho(x,x_0) \le \left(1-\dfrac{1}{n}\right)r < r$. Таким образом, $\left\{x_n(t)\right\} \subset B(x_0,r)$. Кроме того, при $n \to \infty$ $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$, значит, $x(t) \in \overline{B(x_0,r)}$. Таким образом, $B[x_0,r] \subset \overline{B(x_0,r)}$.

3. Показать, что пространство $C_0^{(1)}[0,1]$ всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]}\left|x(t) - y(t)\right|$ не является полным.

Решение: ясно, что $C_0^{(1)}[0,1]$ – это подпространство полного пространства $C[0,1]$ всех непрерывных функций на $[0,1]$ с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]}\left|x(t) - y(t)\right|$. Предположим, что $C_0^{(1)}[0,1]$ – полно, тогда оно замкнуто, т.е. $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} = C_0^{(1)}[0,1]$. Поскольку $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} = C[0,1]$ (см. задачу 17), а $C[0,1] \ne C_0^{(1)}[0,1]$, то предположение неверно.

4. Через $C_1[0,2]$ обозначим пространство непрерывных на $[0,2]$ функций с метрикой $\rho(x,y) = \int\limits_0^2\left|x(t) - y(t)\right|dt$. Доказать, что $C_1[0,2]$ не является полным пространством.

Решение: покажем, что фундаментальная в $C_1[0,2]$ последовательность может не иметь предела в $C_1[0,2]$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1-\frac{1}{n}\\ n(1-t), & 1-\frac{1}{n}\le t\le 1\\ 0, & 1\le t\le 2\end{cases}$. Ясно, что $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n(t)\in C_1[0,2]$. Тогда, при $n>m$ имеем $x_n(t)-x_m(t)=\begin{cases}1-1, & 0\le t\le 1-\frac{1}{m}\\ 1-m(1-t), & 1-\frac{1}{m}\le t\le 1-\frac{1}{n}\\ n(1-t)-m(1-t), & 1-\frac{1}{n}\le t\le 1\\ 0-0, & 1\le t\le 2\end{cases}$. Таким образом,

$$\rho(x_n,x_m)=\int_0^2|x_n(t)-x_m(t)|dt=\int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{n}}|1-m(1-t)|dt+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}|n(1-t)-m(1-t)|dt=$$

$$=\int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{n}}\big(1-m(1-t)\big)dt+(n-m)\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(1-t)dt=\left(t+m\frac{(1-t)^2}{2}\right)\Bigg|_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{n}}-$$

$$-(n-m)\frac{(1-t)^2}{2}\Bigg|_{1-\frac{1}{n}}^{1}=-\frac{1}{n}+\frac{m}{2n^2}+\frac{1}{2m}-\left(-\frac{1}{2n}+\frac{m}{2n^2}\right)=\frac{1}{2m}-\frac{1}{2n}.$$

Значит $\lim\limits_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)=0$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\colon\ \forall n>m>N\ \ \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна. Пусть теперь $f(t)$ – произвольная функция из $C_1[0,2]$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & 1<t\le 2\end{cases}\notin C_1[0,2]$.

Тогда $\quad 0\le\int_0^2|f(t)-\varphi(t)|dt\le\int_0^2|f(t)-x_n(t)|dt+\int_0^2|x_n(t)-\varphi(t)|dt=\rho(x_n,f)+$ $+\int_0^2|x_n(t)-\varphi(t)|dt$. Заметим, что $x_n(t)-\varphi(t)=\begin{cases}1-1, & 0\le t\le 1-\frac{1}{n}\\ n(1-t)-1, & 1-\frac{1}{n}\le t\le 1\\ 0-0, & 1\le t\le 2\end{cases}$, тогда

$$\int_0^2 |x_n(t)-\varphi(t)|dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} |n(1-t)-1|dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \left(1-n(1-t)\right)dt = \left(t+n\frac{(1-t)^2}{2}\right)\Bigg|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, $0 \le \int_0^2 |f(t)-\varphi(t)|dt \le \rho(x_n, f) + \frac{1}{2n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $0 \le \int_0^2 |f(t)-\varphi(t)|dt \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, f)$. Если для какой-то функции $f(t)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, f) = 0$, то $\int_0^2 |f(t)-\varphi(t)|dt = 0$ и тогда, как известно из математического анализа, $f(t) = \varphi(t)$ почти всюду (т.е. всюду, кроме точек, образующих множество нулевой меры). Поскольку $f(t)$ непрерывна, а $\varphi(t)$ имеет скачок, то равенство $f(t) = \varphi(t)$ почти всюду невозможно, значит, $\forall f(t) \in C_1[0,2]$ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, f) \ne 0$, следовательно $\{x_n(t)\}$ не сходится.

5. Является ли последовательность $x_n(t) = \sqrt[n]{1+t^n}$ сходящейся в пространстве $C[0,2]$?

Решение: заметим, что при $t \in [0,1]$ $x_n(t) \to 1$. Пусть $t \in (1,2]$, тогда, используя правило Лопиталя (считая переменную n пробегающей действительные значения), находим, что:

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+t^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+t^n} \cdot t^n \ln t}{1} = \ln t \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \ln t.$$

Таким образом, в этом случае, $x_n(t) \to t$. Окончательно, получаем, что поточечно $x_n(t) \to x_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ t, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$, причем $x_0(t)$ непрерывна. Поскольку сходимость в пространстве $C[0,2]$ эквивалентна равномерной сходимости (см. задачу 4), а поточечная сходимость всегда следует из равномерной, то в пространстве $C[0,2]$ исходная последовательность может сходиться только к той же самой функции $x_0(t)$. Проверим, сходится ли последовательность в пространстве $C[0,2]$, т.е. проверим условие $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Ясно, что $\rho(x_n, x_0) = \sup\limits_{t\in[0,2]} \left|\sqrt[n]{1+t^n} - x_0(t)\right| = \max\left\{ \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\sqrt[n]{1+t^n} - 1\right|, \sup\limits_{t\in[1,2]} \left|\sqrt[n]{1+t^n} - t\right| \right\}$.

Найдем $\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\sqrt[n]{1+t^n} - 1\right|$. Для этого обозначим $f(t) = \sqrt[n]{1+t^n} - 1$. Заметим, что $f(0) = 0$, $f(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$ при $n \to \infty$. Найдем критические точки функции $f(t)$. Поскольку $f'(t) = \frac{1}{n} \cdot (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot n \cdot t^{n-1} = (1+t^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot t^{n-1} = 0$ и точка $t = 0$ уже рассмотрена, то получаем уравнение $(1+t^n)^{\frac{1}{n}-1}=0$. Поскольку $\frac{1}{n}\le 1$, то решений данное уравнение не имеет. Итак, $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\sqrt[n]{1+t^n}-1\right|=\sqrt[n]{2}-1\to 0$. Найдем $\sup\limits_{t\in[1,2]}\left|\sqrt[n]{1+t^n}-t\right|$. Обозначим $f(t)=\sqrt[n]{1+t^n}-t$. Заметим, что $f(1)=\sqrt[n]{2}-1\to 0$, $f(2)=\sqrt[n]{1+2^n}-2\to 0$ при $n\to\infty$, $f'(t)=\frac{1}{n}\cdot(1+t^n)^{\frac{1}{n}-1}\cdot n\cdot t^{n-1}-1=(1+t^n)^{\frac{1}{n}-1}\cdot t^{n-1}-1=0$. Тогда $(1+t^n)^{\frac{1}{n}-1}=t^{1-n}$, откуда $(1+t^n)^{\frac{1-n}{n}}=t^{1-n}$. Таким образом, $(1+t^n)^{\frac{1}{n}}=t$, откуда получаем, что $1+t^n=t^n$, а это уравнение решений не имеет.

Итак, $\sup\limits_{t\in[1,2]}\left|\sqrt[n]{1+t^n}-t\right|=\max\left\{\sqrt[n]{2}-1,\sqrt[n]{1+2^n}-2\right\}$. Окончательно, $\rho(x_n,x_0)=$ $=\max\left\{\sqrt[n]{2}-1,\sqrt[n]{1+2^n}-2\right\}\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно, последовательность сходится в $C[0,2]$.

6. Является ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n},0,0,...\right)$ сходящейся в пространстве l_1?

Решение: I способ: ясно, что покоординатно $x_n\to x_0=(0,0,0,...)$ при $n\to\infty$. Нетрудно проверить, что из сходимости последовательности $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...\right)\in l_p$ к вектору $x_0=\left(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},...\right)\in l_p$ в пространстве l_p следует покоординатная сходимость, т.е. что $\xi_1^{(n)}\to\xi_1^{(0)}$, $\xi_2^{(n)}\to\xi_2^{(0)},\dots$ Таким образом, если последовательность сходится покоординатно, то в пространстве l_1 она может иметь только тот же самый предел. Проверим сходимость в пространстве l_1. Т.к. $\rho(x_n,x_0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot n=1\not\to 0$, то последовательность не сходится в l_1.

II способ: поскольку пространство l_1 полное, то в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел, поэтому для доказательства сходимости достаточно доказать фундаментальность последовательности. Если же последовательность не будет фундаментальной, то сходиться она тем более не будет (см. задачу 1). Итак, надо проверить, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n,m>N$ $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. Пусть $x_m=\left(\underbrace{\frac{1}{m},\frac{1}{m},...,\frac{1}{m}}_{m},0,0,...\right)$ и $n>m$, тогда

$$\rho(x_n,x_m)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|=\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{n}=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\cdot m+\frac{1}{n}\cdot(n-m)=$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\cdot m+\frac{1}{n}(n-m)=2-\frac{2m}{n}.$$

Выбирая $n=2m$, получим, что $\rho(x_n,x_m)=1$, тогда при $\varepsilon<1$ получаем противоречие с определением фундаментальности. Итак, последовательность не является фундаментальной, а значит не сходится.

7. Является ли последовательность $x_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},0,0,...\right)$ сходящейся в пространстве l_3?

Решение: ясно, что покоординатно при $n\to\infty$ $x_n\to x_0=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right)$. Проверим сходимость в пространстве l_3: $\rho(x_n,x_0)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Поскольку $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ – это остаток сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$, то по теореме об остатке сходящегося ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\to 0$ при $n\to\infty$. Итак, $\rho(x_n,x_0)\to 0$ при $n\to\infty$, значит, последовательность сходится в l_3.

8. Доказать полноту пространства n_α, элементами которого являются всевозможные последовательности $x=\left(\xi_n\right)$, для которых $\sup\limits_n \alpha_n\left|\xi_n\right|<+\infty$ ($\alpha=\left(\alpha_n\right)$ – фиксированная последовательность положительных чисел), с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_n\left(\beta_n\left|\xi_n-\eta_n\right|\right)$, где $\beta=\left(\beta_n\right)$ – такая последовательность положительных чисел, что величина $L=\sup\limits_n\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ конечна.

Решение: необходимо доказать, что всякая фундаментальная последовательность элементов пространства n_α сходится к элементу из n_α.

Пусть $x_k=\left(\xi_n^{(k)}\right)\in n_\alpha$ – фундаментальная последовательность, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall k,m>N$ $\rho(x_k,x_m)<\varepsilon$, т.е. $\sup\limits_n\left(\beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|\right)<\varepsilon$, откуда $\forall n\in\mathbb{N}$ $\beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|<\varepsilon$. Поскольку $\beta_n>0$, то при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ последовательность $\left(\xi_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Поскольку при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ это уже числовая последовательность, то для нее, в силу критерия Коши, $\exists\lim\limits_{k\to\infty}\xi_n^{(k)}=\xi_n$.

Покажем, что $x=\left(\xi_n\right)\in n_\alpha$. Поскольку $\forall n\in\mathbb{N}$ $\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|<\frac{\varepsilon\alpha_n}{\beta_n}\le\varepsilon L$, то, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall k>N$ $\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n\right|\le\varepsilon L$.

Далее, $\alpha_n\left|\xi_n\right|\le\alpha_n\left|\xi_n-\xi_n^{(k)}\right|+\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|\le\varepsilon L+\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|$. Беря в этом неравенстве точную верхнюю грань по всем n, получим $\sup\limits_n\alpha_n\left|\xi_n\right|\le\sup\limits_n\left(\varepsilon L+\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|\right)\le$ $\le\varepsilon L+\sup\limits_n\left(\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|\right)$. Поскольку $x_k=\left(\xi_n^{(k)}\right)\in n_\alpha$, то $\sup\limits_n\left(\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|\right)<+\infty$, значит, $\sup\limits_n\alpha_n\left|\xi_n\right|<+\infty$, тем самым, $x=\left(\xi_n\right)\in n_\alpha$.

Перепишем определение фундаментальности в виде: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}$: $\forall k,m>N\ \ \sup\limits_n\left(\beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall k>N\ \ \beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\forall k>N$ $\sup\limits_n\left(\beta_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n\right|\right)\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Тем самым, $\rho(x_k,x)\to 0$ при $k\to\infty$, следовательно, последовательность сходится в пространстве n_α.

9. Введем на прямой $\mathbb{R}$ метрику $\rho(x,y)=\operatorname{arctg}\left|x-y\right|$. Является ли это пространство полным?

Решение: рассмотрим фундаментальную в указанном пространстве последовательность чисел $\left\{x_n\right\}$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n,m>N\ \ \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. Ясно, что определение фундаментальности эквивалентно равенству $\lim\limits_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)=0$ для всех независимых $n,m\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\operatorname{arctg}\left|x_n-x_m\right|=0$, а поскольку арктангенс – непрерывная функция, то получаем, что $\lim\limits_{n,m\to\infty}\left|x_n-x_m\right|=0$. Получили, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n,m>N\ \ \left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$, а это есть определение фундаментальности последовательности $\left\{x_n\right\}$ в пространстве $\mathbb{R}$ с обычной метрикой. Поскольку в $\mathbb{R}$ с обычной метрикой справедлив критерий Коши, то получаем, что в $\mathbb{R}$ с обычной метрикой последовательность $\left\{x_n\right\}$ сходится, т.е. $\exists x\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-x\right|=0$. В силу непрерывности арктангенса получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\left|x_n-x\right|=0$, т.е. $\rho(x_n,x)\underset{n\to\infty}{\to}0$, откуда $x_n\to x$. Итак, у всякой фундаментальной последовательности нашли предел, следовательно, пространство является полным.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства фундаментальна.

2. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность элементов метрического пространства ограничена (т.е. если $x_0\in X$ – произвольный фиксированный элемент, то множество $\left\{\rho(x_n,x_0)\right\}$ ограничено).

3. На числовой прямой с обычной метрикой даны множества $\left[0,1\right]$, $\left(0,1\right)$,

$\left[0,+\infty\right)$, $\left(0,+\infty\right)$. Выяснить, какие из этих множеств являются полными метрическими пространствами.

4. Доказать, что сходимость в пространстве $C\left[a,b\right]$ – есть равномерная сходимость на отрезке $\left[a,b\right]$.

5. Доказать, что сходимость в пространстве l_∞ – есть сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат.

6. Найти предел последовательности функций $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, если $x\in\mathbb{R}$. Сходится ли эта последовательность равномерно?

7. Найти предел последовательности функций $f_n(x)=(\sin x)^n$, если $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Сходится ли эта последовательность равномерно?

8. Найти предел последовательности функций $f_n(x)=e^{-nx}$, если $x\in\left[0,1\right]$. Сходится ли эта последовательность равномерно?

9. Найти предел последовательности функций $f_n(x)=e^{\frac{x}{n}}$, если $x\in\mathbb{R}$. Сходится ли эта последовательность равномерно?

10. Показать, что множество функций из $C\left[0,1\right]$, удовлетворяющее условию $x(0)=x(1)$, замкнуто.

Указание: показать, что предел любой последовательности элементов этого множества принадлежит этому множеству.

11. Пусть k – фиксированная постоянная. Найти замыкание множества $\left\{x(t)\in C\left[a,b\right]:\left|x(t)\right|\le k\right\}$.

Указание: показать, что множество замкнуто.

12. Через M_k обозначим множество функций $x(t)$ из $C\left[a,b\right]$, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной k: $\forall t_1,t_2\in\left[a,b\right]$ $\left|x(t_1)-x(t_2)\right|\le k\left|t_1-t_2\right|$. Доказать, что $M_k=\bar{N}$, где N – множество всех таких дифференцируемых на отрезке $\left[a,b\right]$ функций, что $\forall t\in\left[a,b\right]$ $\left|x'(t)\right|\le k$.

Указание: показать, что $\bar{N}\subset M_k$ *(т.е.* $x\in N\Rightarrow x\in M_k$ *и, если* $\left\{x_n\right\}\subset N$, $x_n\to x_0$*, то* $x_0\in M_k$*, можно использовать теорему Лагранжа) и, что* $M_k\subset\bar{N}$ *(для любой функции* $x\in M_k$ *рассмотреть* $x_n(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}x(\tau)d\tau$ *и показать, что* $\left\{x_n\right\}\subset N$ *и* $x_n\rightrightarrows x$*. Для доказательства поточечной сходимости обозначить* $F(t)$ *– первообразную* $x(t)$ *и воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница. Доказать равномерную сходимость сперва для случая* $x(t)=p(t)=\sum\limits_{i=1}^{m+1}c_{i-1}t^{i-1}$*, а для общего случая использовать аппроксимационную теорему Вейерштрасса).*

13. В условиях предыдущей задачи доказать, что множество $M = \bigcup_k M_k$ не является замкнутым и найти его замыкание.

Указание: $\overline{M} = C[a,b]$. *Воспользоваться примером 3.*

14. Найти замыкание множества всех многочленов в пространстве $C[a,b]$.

Указание: использовать аппроксимационную теорему Вейерштрасса.

15. Пусть $C_1[0,1]$ метрическое пространство, состоящее из всех непрерывных на $[0,1]$ функций с метрикой $\rho_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$. Доказать, что метрики пространств $C[0,1]$ и $C_1[0,1]$ не эквивалентны.

Указание: рассмотреть в этих пространствах последовательность функций $x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}.$

16. Показать, что в l_∞ $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$.

17. Привести пример последовательности непрерывно дифференцируемых функций в $C[0,1]$, которая сходится к непрерывной, но не дифференцируемой функции из $C[0,1]$. Привести пример функции, лежащей в $C[0,1]$, но не лежащей в $C_0^{(1)}[0,1]$ (определение $C_0^{(1)}[0,1]$ см. в примере 3).

18. Пусть на $\mathbb{R}$ задана метрика $\rho(x,y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|$. Доказать, что полученное метрическое пространство не является полным.

Указание: рассмотреть последовательность $x_n = n$.

19. Доказать полноту пространства m_α, элементами которого являются всевозможные последовательности $x = (\xi_n)$, для которых $\sup_n \alpha_n |\xi_n| < \infty$ ($\alpha = (\alpha_n)$ – фиксированная последовательность положительных чисел), с метрикой $\rho(x,y) = \sup_n \left(\alpha_n |\xi_n - \eta_n|\right)$.

20. Доказать полноту пространства c_α, элементами которого являются всевозможные последовательности $x = (\xi_n)$, для которых $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \xi_n < \infty$ ($\alpha = (\alpha_n)$ – фиксированная последовательность положительных чисел), с метрикой $\rho(x,y) = \sup_n \left(\alpha_n |\xi_n - \eta_n|\right)$.

21. Доказать, что пространство $C_0(-\infty,+\infty)$ определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, для которых $\lim_{|t|\to+\infty} x(t) = 0$ с метрикой $\rho(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)|$, является полным.

22. Введем на прямой $\mathbb{R}$ метрику $\rho(x,y) = \ln\left(1 + |x - y|\right)$. Является ли это пространство полным?

23. Пусть на $\mathbb{R}$ задана метрика $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$. Является ли полученное метрическое пространство полным?

24. Пусть на $\mathbb{R}$ задана метрика $\rho(x,y)=\left|x^3-y^3\right|$. Является ли полученное метрическое пространство полным?

25. Доказать, что последовательность $x_n(t)=t^n-t^{2n}$ не является сходящейся в $C[0,1]$.

26. Является ли последовательность $x_n(t)=\frac{t}{n}\ln\frac{t}{n}$ сходящейся в пространстве $C[0,1]$?

27. Является ли последовательность $x_n(t)=e^{n(t-1)}$ сходящейся в пространстве $C[0,1]$?

28. Является ли последовательность $x_n(t)=t^n-t^{n-1}$ сходящейся в пространстве $C[0,1]$?

29. Является ли последовательность $x_n(t)=t^n-t^{10n}$ сходящейся в пространстве $C[0,1]$?

30. Является ли последовательность $x_n(t)=n\left(t^{\frac{1}{n}}-1\right)$ сходящейся в пространстве $C[0,1]$?

31. Сходится ли последовательность $x_n(t)=e^{\frac{t}{n}}$ в пространстве $L_2[0,1]$?

32. Сходится ли последовательность $x_n(t)=t^n-t^{2n}$ в пространстве $L_1[0,1]$?

33. Является ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,\ldots\right)$ сходящейся в пространстве l_2?

34. Является ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-1},\frac{1}{n^\sigma},\frac{1}{(n+1)^\sigma},\ldots\right)$, $\sigma>1$ сходящейся в пространстве l_1?

35. Является ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},0,\ldots,0}_{n},1,0,0,\ldots\right)$, сходящейся в пространстве l_2?

36. Выяснить, сходится ли в метрическом пространстве l_1 последовательность $x_n=\left(\underbrace{0,\ldots0}_{n},\frac{1}{n},0,\ldots\right)$.

37. Выяснить, сходится ли в метрическом пространстве l_2 последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...\right)$.

38. Доказать, что последовательность из примера 7 фундаментальна.

39. Доказать, что множество рациональных чисел не является полным пространством в пространстве $\mathbb{R}$.

Указание: аналогично примеру 3. Использовать второй замечательный предел.

40. Доказать, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар является замкнутым множеством.

Указание: используя неравенство четырехугольника, доказать, что расстояние $\rho(x, y)$ *– непрерывная функция, т.е., если* $x_n \to x$, *и* $y_n \to y$, *то* $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. *Показать, что замкнутый шар содержит все свои предельные точки. При доказательстве для открытого шара выбрать* $\varepsilon = r - \rho(x, a)$, *где* $x \in B(a, r)$.

41. Доказать, что параллелепипед $\left\{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_k| \le a_k\right\}$ – замкнутое множество.

42. Доказать, что параллелепипед $\Pi = \left\{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_k| < 1\right\}$ – открытое множество.

Указание: найти ε. *Выбрать точку* $y = (\eta_k)$ *так, чтобы* $\left|\eta_k - \xi_k^0\right| < \frac{\varepsilon}{\left(\sqrt{2}\right)^k}$, *показать, что такие элементы* $y \in \Pi$ *и при этом* $y \in B(x_0, \varepsilon)$ *при* $x_0 \in \Pi$.

43. Проверить, является ли замкнутым следующее множество $\left\{x(t) \in C[0,1] : x(t) = \sqrt{t}\cos\frac{a}{t}, a \in [0,1], t \in (0,1]\right\}$?

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t) = \sqrt{t}\cos\frac{a_n}{t} \xrightarrow{C[0,1]} x(t)$. *Заметить, что ограниченная последовательность* a_n *имеет сходящуюся подпоследовательность* $a_{n_k} \to a$, *откуда* $x_{n_k} \xrightarrow{C[0,1]} \sqrt{t}\cos\frac{a}{t}$ *и воспользоваться единственностью предела. Для доказательства равномерной сходимости* $\left\{x_{n_k}\right\}$ *сперва показать, что* $x_{n_k} - \sqrt{t}\cos\frac{a}{t} \underset{t\to 0}{\overset{k}{\rightrightarrows}} 0$, *т.е., что* $\forall t < \delta \;\; \forall k \;\; \left|x_{n_k} - \sqrt{t}\cos\frac{a}{t}\right| < \varepsilon$, *а затем оценить* $\left|x_{n_k} - \sqrt{t}\cos\frac{a}{t}\right|$ *при* $t \ge \delta > 0$ *и* $k > N \in \mathbb{N}$.

44. Проверить, является ли замкнутым следующее множество $\left\{x(t) \in C[0,1] : a \ge 1, \forall t \in [0,1], x(t) = \sqrt{t}\cos(at)\right\}$?

Указание: доказать, что, если $x_n(t) \xrightarrow{C[0,1]} x(t)$*, то* $a_n \not\to \infty$.

45. Доказать, что пространство всех многочленов, определенных на $[0,1]$ с метрикой $\rho(P,Q)=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|P(t)-Q(t)\right|$ не полно.

Указание: воспользоваться примером 3 и задачей 14.

46. Привести пример фундаментальной последовательности в пространстве $(0,+\infty)$ с метрикой $\rho(x,y)=\left|\frac{1}{\mathrm{sh}x}-\frac{1}{\mathrm{sh}y}\right|$, которая не является сходящейся.

47. Привести пример фундаментальной последовательности в пространстве $(0,1)$ с метрикой $\rho(x,y)=\left|\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin y}\right|$, которая не является сходящейся.

48. Привести пример фундаментальной последовательности в пространстве $(0,1)$ с метрикой $\rho(x,y)=\left|\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln y}\right|$, которая не является сходящейся.

49. Привести пример фундаментальной последовательности в пространстве $(0,+\infty)$ с метрикой $\rho(x,y)=\left|\frac{1}{\mathrm{ch}x}-\frac{1}{\mathrm{ch}y}\right|$, которая не является сходящейся.

50. Проверить, что пространство $C_2[-1,1]$ всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с метрикой $\rho(x,y)=\left(\int\limits_{-1}^{1}\left|x(t)-y(t)\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ не является полным.

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t\le -\frac{1}{n}\\ nt, & -\frac{1}{n}\le t\le \frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$.

51. Рассмотрим множество X и на нем функцию $\rho(x,y)=\sin\left|x-y\right|$. Является ли указанное множество с таким образом введенным расстоянием метрическим пространством? Если является, то будет ли это пространство полным, если: а) $X=(0,\pi)$; б) $X=[0,\pi)$; в) $X=[0,\pi]$?

52. Является ли сходящейся в пространствах l_p $(1\le p\le\infty)$ и c_0 последовательность $x_n=\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\dots\right)$?

53. Исследовать на сходимость в пространствах c_0, c, l_p $(1\le p\le\infty)$ последовательность $x_n=\left(\frac{\sin 1}{2},\frac{2\sin 2}{3},\dots,\frac{n\sin n}{n+1},\sin(n+1),\sin(n+2),\dots\right)$.

54. Исследовать на сходимость в пространствах c_0, c, l_p $(1 \le p \le \infty)$ последовательность $x_n = \left(\xi_k^n\right)_{k=1}^{\infty}$, где $\xi_k^n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \le n \\ \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n \end{cases}$.

55. Исследовать на сходимость в пространствах c_0, c, l_p $(1 \le p \le \infty)$ последовательность $x_n = \left(1, \dfrac{1}{\ln 2}, ..., \dfrac{1}{\ln n}, 0, 0, ...\right)$.

56. Исследовать на сходимость в пространствах $C[0,1], C^{(1)}[0,1]$ последовательности $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n}$ и $x_n(t) = \operatorname{arctg}\left(n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

57. Исследовать на сходимость в пространствах $C[0,1], C^{(1)}[0,1]$ последовательность $x_n(t) = n\left(\sqrt{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\right)$.

58. Доказать, что множество M всех многочленов $p(t)$ таких, что $p(0) = p(1) = 0$ не замкнуто в $C[0,1]$.

Указание: для непрерывной функции $f(t)$ существует последовательность многочленов $p_n(t) \rightrightarrows f(t)$. Показать, что $M \ni t(1-t)p_n(t) \rightrightarrows t(1-t)f(t)$ и выбрать такую функцию $f(t)$, чтобы $t(1-t)f(t) \notin M$.

59. Доказать полноту метрического пространства $C^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, если метрика в нем определяется, как $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)| + \sup\limits_{t\in[a,b]}|x'(t) - y'(t)|$.

60. Доказать полноту метрического пространства $C^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, если метрика в нем определяется, как $\rho(x,y) = \max\left\{\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t) - y(t)|, \sup\limits_{t\in[a,b]}|x'(t) - y'(t)|\right\}$.

1.4. Свойства полных метрических пространств

Теорема (о вложенных шарах): последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, в полном метрическом пространстве всегда имеет – и причем ровно одну – общую точку.

Доказательство: пусть $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ – последовательность вложенных замкнутых шаров, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – их центры, $R_1, R_2, R_3, \ldots$ – их радиусы. Возьмем $n > m$, тогда $B_n \subset B_m$, в частности, $a_n \in B_m$, поэтому $\rho(a_n, a_m) \le R_m$. По условию $R_m \to 0$ при $m \to \infty$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m > N\ \ R_m < \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > m > N\ \ \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальна. Поскольку пространство по условию полное, то эта последовательность имеет предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Далее, возьмем любой шар B_k, тогда при всех $n > k\ \ B_n \subset B_k$, в частности, $a_n \in B_k$. Итак, начиная с некоторого номера, все a_n лежат в шаре B_k. Поскольку $a_n \to a$, то a – предельная точка последовательности $\{a_n\}$. По условию шар B_k замкнут, т.е. содержит свои предельные точки, следовательно, $a \in B_k$. Поскольку B_k выбирался произвольно, то a – общая точка для всех шаров.

Покажем, что такая точка одна. От противного: допустим, что есть еще одна точка $b \ne a$, являющаяся общей для всех шаров, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a, b \in B_n$, тогда $\rho(a,b) \le \rho(a,a_n) + \rho(a_n,b) \le R_n + R_n = 2R_n$. Перейдем к пределу при $n \to \infty$, тогда, поскольку $R_n \to 0$, то $\rho(a,b) \le 0$. По определению расстояние не может быть отрицательным, следовательно $\rho(a,b) = 0$, откуда, в силу аксиомы тождества, $a = b$. Противоречие.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – метрическое пространство. Диаметром ограниченного множества $E \subset X$ называется число $d(E) = \sup\limits_{x,y\in E} \rho(x,y)$.

Теорема (о вложенных множествах): пусть в полном метрическом пространстве X дана последовательность замкнутых множеств, вложенных друг в друга, диаметры которых стремятся к нулю. Тогда существует одна и только одна точка, принадлежащая всем этим множествам.

Доказательство: в техническом плане повторяет доказательство теоремы о вложенных шарах, а потому предлагается проделать его самостоятельно (задача 1).

Теорема (достаточное условие полноты): пусть X – метрическое пространство, и в нем любая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Тогда пространство X – полное.

Доказательство: по определению полноты надо доказать, что всякая фундаментальная в X последовательность сходится в X. Пусть $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальная последовательность, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \ge N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ найдем номер N_1 так, чтобы $\forall n,m \ge N_1 \;\; \rho(x_n, x_m) \le \frac{1}{2}$.

При $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ найдем номер $N_2 > N_1$ так, чтобы $\forall n,m \ge N_2 \;\; \rho(x_n, x_m) \le \frac{1}{2^2}$.

При $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$ найдем номер $N_3 > N_2$ так, чтобы $\forall n,m \ge N_3 \;\; \rho(x_n, x_m) \le \frac{1}{2^3}$ и т.д.

На k-м шаге, при $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ найдем номер $N_k > N_{k-1}$ так, чтобы $\forall n,m \ge N_k$ $\rho(x_n, x_m) \le \frac{1}{2^k}$, и т.д. Составим последовательность $\left\{x_{N_k}\right\}$, тогда ясно, что при $m > k \;\; \rho(x_{N_k}, x_{N_m}) \le \frac{1}{2^k}$.

Обозначим $\overline{B}_k$ – замкнутый шар радиуса $\frac{1}{2^{k-1}}$ с центром в точке x_{N_k}. Покажем, что $\overline{B}_{k+1} \subset \overline{B}_k$. Пусть $x \in \overline{B}_{k+1}$, тогда $\rho(x, x_{N_k}) \le \rho(x, x_{N_{k+1}}) + \rho(x_{N_{k+1}}, x_{N_k})$. Поскольку $\rho(x_{N_k}, x_{N_m}) \le \frac{1}{2^k}$, то $\rho(x_{N_{k+1}}, x_{N_k}) \le \frac{1}{2^k}$. Кроме того, поскольку $\overline{B}_{k+1}$ – замкнутый шар радиуса $\frac{1}{2^k}$ с центром в точке $x_{N_{k+1}}$, то $\rho(x, x_{N_{k+1}}) \le \frac{1}{2^k}$. Таким образом, $\rho(x, x_{N_k}) \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, следовательно, $x \in \overline{B}_k$.

Итак, шары $\overline{B}_k$ являются замкнутыми и вложенными, их радиусы, равные $\frac{1}{2^{k-1}}$, стремятся к нулю, значит, по условию, они имеют общую точку $a \in \overline{B}_k$ $\forall k$. Покажем, что a является пределом последовательности $\left\{x_n\right\}$. Поскольку $a \in \overline{B}_k$ и x_{N_k} – центр шара $\overline{B}_k$, то $\rho(x_{N_k}, a) \le \frac{1}{2^{k-1}}$, тогда

$$\rho(x_n, a) \le \rho(x_n, x_{N_k}) + \rho(x_{N_k}, a) \le \rho(x_n, x_{N_k}) + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Поскольку $\left\{x_n\right\}$ – фундаментальна, то $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n,m \to \infty$. В частности, при $m = N_k$ получаем, что $\rho(x_n, x_{N_k}) \to 0$ при $n,k \to \infty$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n,k \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$, т.е. $x_n \to a$.

Теорема доказана.

Определение: множество E называется счетным, если существует взаимно-однозначное соответствие элементов этого множества и множества $\mathbb{N}$.

Замечание: иными словами, элементы этого множества можно занумеровать натуральными числами, т.е. расположить в последовательность.

Замечание: множество $\mathbb{R}$ и любой его интервал – несчетные множества.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E называется нигде не плотным в X, если в любом шаре положительного радиуса в пространстве X найдется другой шар положительного радиуса, в котором нет точек из E.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E называется всюду плотным в X, если в любом шаре положительного радиуса в пространстве X есть хотя бы одна точка из E.

Теорема Бэра: полное метрическое пространство нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство: допустим, что это сделать можно, т.е. есть нигде не плотные множества, которых счетное число, значит, их можно расположить в последовательность $X_1, X_2, X_3, \ldots$, и объединение этих множеств дает все пространство X.

Возьмем произвольный замкнутый шар B_1 радиуса $R_1 = 1$. Множество X_1 нигде не плотно в X, поэтому в шаре B_1 найдется другой замкнутый шар B_2, в котором нет точек из X_1. Ясно, что если его радиус уменьшить, то точек из X_1 в нем тем более не будет, значит, можно считать, что его радиус $R_2 \le \frac{1}{2}$. Аналогично, поскольку X_2 нигде не плотно, то в шаре B_2 можно найти другой замкнутый шар B_3, в котором нет точек из X_2. При этом можно считать, что его радиус $R_3 \le \frac{1}{3}$. И т.д. Получили последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Пространство X по условию полное, поэтому, по теореме о вложенных шарах, у них есть общая точка a. В частности, $a \in B_2$, а в B_2 нет точек из X_1, поэтому $a \notin X_1$. Аналогично, $a \in B_3$, а в B_3 нет точек из X_2, поэтому $a \notin X_2$. И т.д. Получили, что ни одному из множеств $X_1, X_2, X_3, \ldots$ точка a не принадлежит. С другой стороны, объединение множеств $X_1, X_2, X_3, \ldots$ дает все пространство X, значит, хотя бы в одном из них точка a должна лежать. Противоречие.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E называется множеством первой категории, если оно может быть представлено в виде объединения не более чем счетного числа нигде не плотных множеств.

Определение: множество, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории.

Замечание: таким образом, из теоремы Бэра следует, что всякое полное метрическое пространство является множеством второй категории.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E называется всюду плотным в X, если $\forall x \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists y \in E: \; \rho(x, y) < \varepsilon$, т.е. если любой элемент пространства X можно с любой точностью приблизить элементом множества E.

Замечание: очевидно, что оба определения всюду плотности эквивалентны, только в первом не указаны явно радиусы шаров.

Замечание: пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Множество E называется всюду плотным в X, если $\overline{E} = X$, т.е. $\forall x \in X \quad \exists \{y_n\} \subset E: \ y_n \to x$ при $n \to \infty$ (см. задачу 8).

Примеры решения задач

1. Рассмотрим пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ с метрикой $\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}$.

Доказать его полноту. Построить в нем последовательность непустых замкнутых вложенных шаров, имеющих пустое пересечение. Как это согласуется с теоремой о вложенных шарах?

Решение: поскольку при $m \neq n \quad \rho(m,n) > 1$, то никакая последовательность $\{x_n\} \subset (\mathbb{N}, \rho)$ не является фундаментальной, если для всех $n,m \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_m$ (поскольку, выбирая $\varepsilon < 1$, получим противоречие определению фундаментальности). Таким образом, последовательность $\{x_n\} \subset (\mathbb{N}, \rho)$ фундаментальна тогда и только тогда, когда она является постоянной, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$ (финально-постоянная последовательность). Поскольку всякая такая финально-постоянная последовательность имеет предел (равный этой постоянной), то всякая фундаментальная последовательность в $(\mathbb{N}, \rho)$ сходится, следовательно, $(\mathbb{N}, \rho)$ – полно.

Рассмотрим систему замкнутых шаров $B_n = \left\{ k : \rho(k,n) \leq 1 + \dfrac{1}{2n} \right\}$. Если $k \neq n$, то получим, что точка $k \in B_n$ удовлетворяет условию $1 + \dfrac{1}{k+n} \leq 1 + \dfrac{1}{2n}$, откуда $\dfrac{1}{k+n} \leq \dfrac{1}{n+n}$, т.е. $k \geq n$ и, значит, $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Тогда ясно, что $B_{n+1} \subset B_n$, т.е. шары вложены. При этом, пересечение шаров B_1 и B_2 не содержит точку 1. Пересечение шаров B_2 и B_3 не содержит точку 2 и т.д. Таким образом, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Поскольку радиусы шаров $1 + \dfrac{1}{2n} \to 1$ при $n \to \infty$, то теорема о вложенных шарах не выполняется.

2. Доказать, что множество R всех многочленов всюду плотно в пространстве $C^{(k)}[a,b]$ всех k раз непрерывно дифференцируемых функций с метрикой $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t \in [a,b]} \left| x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t) \right|$.

Решение: проведем доказательство индукцией по k. Пусть $k = 0$. Покажем всюду плотность R в $C^{(0)}[a,b] = C[a,b]$. Это утверждение предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 9). Пусть R всюду плотно в $C^{(k-1)}[a,b]$. Возьмем $x_0(t)\in C^{(k)}[a,b]$, тогда ясно, что $x_0'(t)\in C^{(k-1)}[a,b]$, и по предположению индукции существует многочлен $p(t)\in R$ такой, что $\rho_{C^{(k-1)}[a,b]}(x_0', p)<\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$ $\forall\varepsilon>0$. Пусть $p_1(t)=x_0(a)+\int\limits_a^t p(\tau)d\tau$. Ясно, что $p_1(t)$ – многочлен. Имеем:

$$\rho_{C^{(k)}[a,b]}(x_0,p_1)=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}\left|x_0^{(i)}(t)-p_1^{(i)}(t)\right|=\max_{t\in[a,b]}\left|x_0(t)-p_1(t)\right|+$$
$$+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0'(t)-p_1'(t)\right|+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0''(t)-p_1''(t)\right|+\ldots+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0^{(k)}(t)-p_1^{(k)}(t)\right|.$$

Заметим, что $p_1'(t)=p(t)$, $p_1''(t)=p'(t)$,..., $p_1^{(k)}(t)=p^{(k-1)}(t)$ и тогда

$$\max_{t\in[a,b]}\left|x_0'(t)-p_1'(t)\right|+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0''(t)-p_1''(t)\right|+\ldots+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0^{(k)}(t)-p_1^{(k)}(t)\right|=$$
$$=\max_{t\in[a,b]}\left|x_0'(t)-p(t)\right|+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0''(t)-p'(t)\right|+\ldots+\max_{t\in[a,b]}\left|x_0^{(k)}(t)-p^{(k-1)}(t)\right|=$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}\max_{t\in[a,b]}\left|\left(x_0'(t)\right)^{(i)}-p^{(i)}(t)\right|=\rho_{C^{(k-1)}[a,b]}(x_0',p)<\frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

Кроме того, $x_0(t)-p_1(t)=x_0(t)-x_0(a)+\int\limits_a^t p(\tau)d\tau=\int\limits_a^t x_0'(\tau)d\tau+\int\limits_a^t p(\tau)d\tau=$ $=\int\limits_a^t\left(x_0'(\tau)-p(\tau)\right)d\tau$. Тогда $\rho_{C^{(k)}[a,b]}(x_0,p_1)<\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\int\limits_a^t\left(x_0'(\tau)-p(\tau)\right)d\tau\right|+\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$.

Далее, поскольку $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\left(x_0'(t)\right)^{(i)}-p^{(i)}(t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$, то $\forall i=\overline{0,k-1}$ $\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\left(x_0'(t)\right)^{(i)}-p^{(i)}(t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$, и, в частности, $\max\limits_{t\in[a,b]}\left|x_0'(t)-p(t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$, следовательно, $\forall t\in[a,b]$ $\left|x_0'(t)-p(t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a+1}$. Таким образом, окончательно:

$$\rho_{C^{(k)}[a,b]}(x_0,p_1)<\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t\left(x_0'(\tau)-p(\tau)\right)d\tau\right|+\frac{\varepsilon}{b-a+1}\le$$
$$\le\max_{t\in[a,b]}\int_a^t\left|x_0'(\tau)-p(\tau)\right|d\tau+\frac{\varepsilon}{b-a+1}<\frac{\varepsilon}{b-a+1}\cdot\max_{t\in[a,b]}\int_a^t 1d\tau+\frac{\varepsilon}{b-a+1}=$$
$$=\frac{\varepsilon}{b-a+1}\cdot\max_{t\in[a,b]}(t-a)+\frac{\varepsilon}{b-a+1}=\frac{\varepsilon(b-a)}{b-a+1}+\frac{\varepsilon}{b-a+1}=\varepsilon.$$

Итак, получили, что R всюду плотно в $C^{(k)}[a,b]$.

3. Пусть n_0 – фиксированное натуральное число и

$$L_{n_0}=\{x=(\xi_n)\in l_2:\xi_n=0\text{ при }n>n_0\}.$$

Доказать, что множество L_{n_0} нигде не плотно в l_2.

Решение: покажем, что произвольный шар $B(x_0, r) \in l_2$ содержит в себе другой шар, в котором нет точек из L_{n_0}. Если в шаре $B(x_0,r)$ нет точек из L_{n_0}, то утверждение доказано.

Допустим, в шаре $B(x_0,r)$ лежит точка $x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, ..., \xi_{n_0}^{(1)}, 0, 0, ...) \in L_{n_0}$. Ясно, что $r_1 = \rho(x_0, x_1) < r$. Возьмем $0 < \varepsilon < r - r_1$ и рассмотрим шар $B(x_1,\varepsilon)$. Пусть $x \in B(x_1, \varepsilon)$, тогда $\rho(x, x_0) \le \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_0) < \varepsilon + r_1 < r$, следовательно, $x \in B(x_0, r)$, т.е. $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$.

Рассмотрим точку $x_2 = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, ..., \xi_{n_0}^{(1)}, \dfrac{\varepsilon}{2}, 0, 0, ... \right) \notin L_{n_0}$ и шар $B\left(x_2, \dfrac{\varepsilon}{4} \right)$. Пусть $x \in B\left(x_2, \dfrac{\varepsilon}{4} \right)$. Тогда $\rho(x, x_1) \le \rho(x, x_2) + \rho(x_2, x_1) < \dfrac{\varepsilon}{4} + \rho(x_2, x_1)$. Поскольку $\rho(x_2, x_1) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $\rho(x, x_1) < \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$, т.е., $x \in B(x_1,\varepsilon)$, откуда $B\left(x_2, \dfrac{\varepsilon}{4} \right) \subset B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, r)$.

Покажем, что в шаре $B\left(x_2, \dfrac{\varepsilon}{4} \right)$ нет точек из множества L_{n_0}. Действительно, пусть $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n_0}, 0, 0, ...) \in L_{n_0}$, тогда $\rho(x, x_2) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n_0} \left| \xi_k - \xi_k^{(1)} \right|^2 + \dfrac{\varepsilon^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \ge \dfrac{\varepsilon}{2} > \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Таким образом, $x \notin B\left(x_2, \dfrac{\varepsilon}{4} \right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать теорему о вложенных множествах.
2. Доказать, что множества $\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ являются счетными.
3. Доказать, что множество $\mathbb{N}$ не является всюду плотным и является нигде не плотным в метрическом пространстве $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.
4. Доказать, что отрезок $[0,1]$ не является всюду плотным и нигде не плотным в метрическом пространстве $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.
5. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ является всюду плотным в метрическом пространстве $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой.
6. Доказать, что всякая прямая является нигде не плотным множеством в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартной евклидовой метрикой.
7. Доказать, что всякая полуплоскость не является всюду плотным и нигде не плотным множеством в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$ со стандартной евклидовой метрикой.
8. Пусть X – метрическое пространство, $E \subset X$. Доказать, что множество E является всюду плотным в X тогда и только тогда, когда $\overline{E} = X$, т.е. $\forall x \in X$ $\exists \{ y_n \} \subset E:\ y_n \to x$ при $n \to \infty$.

9. Доказать, что множество многочленов на отрезке $\left[a,b\right]$ является всюду плотным в пространстве $C\left[a,b\right]$.

Указание: воспользоваться аппроксимационной теоремой Вейерштрасса.

10. Доказать, что множество, состоящее из последовательностей вида $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$ (такие последовательности называются финитными) для всех $n\in\mathbb{N}$ является всюду плотным в пространствах l_p и c_0.

Указание: показать, что $\forall x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_p(c_0)$ $x_n\to x$ *при* $n\to\infty$.

11. Доказать, что множество, состоящее из линейных комбинаций векторов $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0...)$ является всюду плотным в пространствах l_p и c_0.

Указание: воспользоваться предыдущей задачей

12. При каком условии на последовательность $\left\{a_k\right\}\in\mathbb{R}$, $a_k>0$ будет ограниченным множеством параллелепипед $\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:\left|\xi_k\right|<a_k\right\}$?

13. При каком условии на последовательность $\left\{a_k\right\}\in\mathbb{R}$, $a_k>0$ будет ограниченным множеством эллипсоид $\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k{}^2}{a_k{}^2}<1\right\}$?

14. Привести пример полного метрического пространства и последовательности вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств в нем с пустым пересечением.

Указание: воспользоваться задачей 11 к п. 1.2.

15. Привести пример полного метрического пространства и последовательности вложенных друг в друга непустых ограниченных замкнутых множеств в нем с пустым пересечением.

Указание: $\forall n\in\mathbb{N}$ *рассмотреть множества* $F_n=\left\{t^n,t^{n+1},t^{n+2},...\right\}\subset C\left[0,1\right]$.

16. Показать что пересечение последовательности вложенных друг в друга непустых ограниченных открытых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, в полном метрическом пространстве может быть пусто.

Указание: для всех $n\in\mathbb{N}$ *рассмотреть множества вида* $\left(0,\frac{1}{n}\right)\subset\mathbb{R}$.

17. Доказать, что множество $A=\left\{nt:n\in\mathbb{N}\right\}$ нигде не плотно в пространстве $C\left[0,1\right]$.

18. Доказать, что множество $A=\left\{x(t)\in L_2\left(\mathbb{R}\right):tx(t)\in L_2\left(\mathbb{R}\right)\right\}$ всюду плотно в $L_2\left(\mathbb{R}\right)$ (определение $L_2\left(\mathbb{R}\right)$ аналогично определению $L_2\left[a,b\right]$ с поправкой на то, что интеграл берётся по всей числовой прямой).

Указание: воспользоваться задачей 8. Выбрать $x_n(t)=\begin{cases}x(t), & t\in\left[-n,n\right]\\ 0, & t\notin\left[-n,n\right]\end{cases}$.

19. Доказать, что множество $M=\left\{x\in l_2:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k=0\right\}$ всюду плотно в l_2.

Указание: если $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$, *то можно подобрать номер* n *такой, что* $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$, *тогда* $y=\left(\xi_1,...,\xi_n,\underbrace{-\frac{s}{m},...,-\frac{s}{m}}_{m},0,0,...\right)\in l_2\bigcap M$, *где* $s=\xi_1+...+\xi_n$. *Показать, что* $\|x-y\|<\varepsilon$ *при достаточно большом* m.

20. Доказать, что множество $M=\left\{x\in l_1:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k=0\right\}$ нигде не плотно в l_1.

Указание: показать, что множество замкнуто, т.е. его дополнение открыто. Затем показать, что в любом открытом шаре $B(a,\varepsilon)$ *найдётся точка из этого дополнения. Это может быть либо точка* $a=(a_1,a_2,a_3,...)$, *если* $a\notin M$, *либо точка* $x=\left(a_1+\frac{\varepsilon}{2},a_2,a_3,...\right)\in B(a,\varepsilon)$ *в противном случае.*

21. Доказать, что в метрическом пространстве X для любого шара $B(a,r)$ диаметр удовлетворяет следующим условиям $0\le d(B(a,r))\le 2r$. Привести пример метрического пространства, в котором $d(B(a,1))=\frac{1}{2}$.

Указание: например, это может быть пространство, в котором расстояния между различными точками совпадают.

22. Доказать, что пространство c_0 нигде не плотно в пространстве c.

Указание: показать, что для всякого $x_0\in c_0$ *и для всякого* $\varepsilon>0$ *шар* $B(x_0,\varepsilon)\subset c$ *не принадлежит* c_0. *Учесть, что, начиная с некоторого номера* k_0, $\left|\xi_k^0\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ *и рассмотреть* $x=(\xi_k)\in c\setminus c_0$, $\xi_k=\begin{cases}\xi_k^0, & k\le k_0\\ \frac{\varepsilon}{4}, & k>k_0\end{cases}$. *Показать, что* $x\in B(x_0,\varepsilon)$. *Воспользоваться замкнутостью* c_0.

23. Пусть N – множество всех многочленов с нулевым свободным членом, а $M=\{x\in C[0,1]:x(0)=0\}$. Доказать, что N всюду плотно в множестве M.

Указание: воспользоваться аппроксимационной теоремой Вейерштрасса. Рассмотреть сдвинутые многочлены $p(t)-p(0)$.

24. Рассмотрим множества $A_n=\left\{x=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}\in c_0:\rho(x,0)\le 1,\ \xi_k\in\left[\frac{1}{2},1\right],k=\overline{1,n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что A_n замкнуты, ограничены, непусты и вложены друг в друга, но при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$.

Указание: при проверке пустоты пересечения предположить противное.

25. Доказать, что объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств само не более чем счетно.

1.5. Пополнение метрических пространств. Сепарабельные пространства

Определение: два метрических пространства X и Y называются изометричными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее расстояния, т.е., если любым двум точкам $x_1, x_2 \in X$ соответствуют точки $y_1, y_2 \in Y$, то $\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(y_1, y_2)$.

Замечание: с точки зрения тех вопросов, которые связаны только с расстоянием между элементами (сходимость, полнота и т.д.), два изометричных пространства считаются идентичными.

Замечание: понятие изометричности двух множеств, расположенных в некоторых метрических пространствах, вводится аналогично.

Определение: пусть X_0 – неполное метрическое пространство, а X – полное метрическое пространство, в котором существует подмножество X', лежащее всюду плотно в X и изометричное пространству X_0. Пространство X называется пополнением пространства X_0.

Теорема (о пополнении): если X_0 – неполное метрическое пространство, то существует его пополнение X, которое определяется однозначно с точностью до изометрии.

Замечание: простое доказательство этой теоремы будет дано в п. 2.5 раздела 2 второй части. Существует также конструктивное доказательство, которое мы здесь не приводим [см. 7].

Определение: пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Замечание: если X – метрическое пространство, то его сепарабельность означает, что в нем существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется элемент $x_0 \in \{x_n\}$ такой, что $\forall x \in X \quad \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Теорема (о сепарабельности подмножества): всякое бесконечное подмножество M сепарабельного пространства X сепарабельно.

Доказательство: пусть счетное множество $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ всюду плотно в X. Обозначим $d_n = \inf\limits_{y \in M} \rho(x_n, y)$, тогда, по определению точной нижней грани $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \exists y_{nm} \in M: \ \rho(x_n, y_{nm}) < d_n + \dfrac{1}{m}$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{m} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\forall y \in M$ $\exists x_n: \ \rho(x_n, y) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (в силу всюду плотности). Тогда $\rho(x_n, y_{nm}) < d_n + \dfrac{1}{m} < d_n + \dfrac{\varepsilon}{3} \le$ $\le \rho(x_n, y) + \dfrac{\varepsilon}{3} < \dfrac{2\varepsilon}{3}$. Отсюда $\rho(y, y_{nm}) \le \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{nm}) < \varepsilon$, откуда следует, что множество $\{y_{nm}\}$ – всюду плотно в M. Поскольку оно определяется двумя натуральными параметрами, то оно не более чем счетно.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Показать, что пространство $C[-1,1]$ является пополнением пространства P заданных на $[-1,1]$ алгебраических многочленов $p(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ с метрикой $\rho(p,q)=\max\limits_{t\in[-1,1]}|p(t)-q(t)|$.

Решение: рассмотрим последовательность многочленов $p_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$, $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что при $n\to\infty$ $p_n(t)\to\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}=e^t\notin P$, следовательно, P не является полным пространством (сходящаяся последовательность всегда фундаментальна, но ее предел пространству P не принадлежит). В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, любую непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью приблизить многочленом, т.е., множество P всюду плотно в полном пространстве $C[-1,1]$. Значит, $C[-1,1]$ – пополнение множества P.

2. Пространство $l_p^{\,0}$, состоит из финитных последовательностей, т.е. последовательностей вида $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_1},0,0,...)$, $k_1\in\mathbb{N}$. Пусть $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_{k_2},0,0,...)$, при $k_2\ge k_1$ и $\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{k_1}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum\limits_{i=k_1+1}^{k_2}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Найти пополнение $l_p^{\,0}$.

Решение: очевидно, что $l_p^{\,0}\subset l_p$. Кроме того, из задачи 10 к п. 1.4 следует, что множество $l_p^{\,0}$ лежит всюду плотно в l_p. Если покажем, что $l_p^{\,0}$ не полно, то, поскольку l_p – полное пространство, то оно и будет пополнением для $l_p^{\,0}$.

Рассмотрим последовательность $x_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2^n},0,0,...\right)\in l_p^{\,0}$. Пусть $n>m$, тогда $\rho(x_n,x_m)=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|^p+\sum\limits_{i=m+1}^{n}\left|\xi_i^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}}$. Поскольку $p\ge 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2^p)^i}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, значит, в силу критерия Коши для рядов $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>m>N$ $\sum\limits_{i=m+1}^{n}\frac{1}{(2^p)^i}<\varepsilon^p$, откуда получаем, что $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $l_p^{\,0}$.

Предположим, что $\{x_n\}$ сходится к $x_0=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{k_0},0,0,...)\in l_p^{\,0}$. Тогда, $\rho(x_n,x_0)\to 0$, но при больших n

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\sum_{i=1}^{k_0} \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|^p + \sum_{i=k_0+1}^{n} \left| \xi_i^{(n)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{k_0} \left| \frac{1}{2^i} - \xi_i \right|^p + \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда получаем, что $\sum_{i=1}^{k_0} \left| \frac{1}{2^i} - \xi_i \right|^p + \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}} = -\sum_{i=1}^{k_0} \left| \frac{1}{2^i} - \xi_i \right|^p$, или $\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{ip}} = -\sum_{i=1}^{k_0} \left| \frac{1}{2^i} - \xi_i \right|^p$. Если $\xi_i \neq \frac{1}{2^i}$, то это равенство невозможно, поскольку ряд $\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{ip}}$ состоит из положительных слагаемых. Случай $\xi_i = \frac{1}{2^i}$ также невозможен, поскольку $\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{ip}} > 0$. Противоречие. Таким образом, пространство $l_p^{\,0}$ не полно.

3. Доказать, что пространство $C[0,1]$ сепарабельно.

Решение: рассмотрим в $C[0,1]$ множество многочленов с рациональными коэффициентами. Поскольку множество рациональных чисел счетно, а множество степеней многочленов представляет собой множество натуральных чисел, то множество таких многочленов является счетным. Покажем, что множество таких многочленов всюду плотно в $C[0,1]$.

В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса $\forall \varepsilon > 0$ существует многочлен $p(t)$ такой, что $\forall x(t) \in C[0,1]$ $\rho(x, p) < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, очевидно, найдется многочлен $p_0(t)$ с рациональными коэффициентами такой, что $\rho(p, p_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ (поскольку множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных чисел). Таким образом, $\rho(x, p_0) \le \rho(x, p) + \rho(p, p_0) < \varepsilon$, т.е. множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $C[0,1]$.

4. Доказать, что пространство l_∞ не сепарабельно.

Решение: рассмотрим множество $E_{0,1} \subset l_\infty$ последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, координаты которых равны 0 или 1. Это множество мощности континуум, поскольку, как известно из теории множеств, между точками множества $E_{0,1}$ и точками отрезка $[0,1]$ существует взаимно-однозначное соответствие. Ясно, что $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| = 1$.

Рассмотрим множество шаров радиуса $\frac{1}{3}$ с центрами в точках множества $E_{0,1}$. Ясно, что таких шаров – несчетное множество, а поскольку расстояние между их центрами равно 1, то шары не пересекаются.

Предположим, что в l_∞ есть всюду плотное множество E. Тогда, по определению, любой шар из l_∞ должен содержать хотя бы одну точку из E. Поскольку мы нашли несчетное число непересекающихся шаров, лежащих в l_∞, и содержащих каждый точки множества E, то E не может быть счетным. Таким образом, l_∞ – не сепарабельно.

5. Доказать, что пространство s всех числовых последовательностей с метрикой $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ является сепарабельным метрическим пространством.

Решение: пусть M – множество элементов $(r_1,r_2,...,r_n,0,0,...)$, где r_i – произвольные рациональные числа, n – произвольное натуральное число. Ясно, что M – счетное множество. Покажем, что оно всюду плотно в s. Для этого возьмем произвольный элемент $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in s$ и произвольное $\varepsilon>0$.

Пусть n таково, что $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}<\frac{\varepsilon}{2}$ (остаток всякого сходящегося ряда можно сделать сколь угодно малым). Выберем элемент $x_0=(r_1,r_2,...,r_n,0,0,...)$ таким образом, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ (это можно сделать в силу всюду плотности множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$). Тогда:

$$\rho(x,x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left|\xi_k-\xi_k^{(0)}\right|}{1+\left|\xi_k-\xi_k^{(0)}\right|}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-r_k|}{1+|\xi_k-r_k|}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}<$$

$$<\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, M всюду плотно в s.

6. Является ли метрическое пространство $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$ полным? Если нет, то найти его пополнение.

Решение: функция $f(x)=e^x$ определена всюду на $\mathbb{R}$, монотонна и имеет множество значений $M=(0,+\infty)$. Таким образом, $f(x)$ биективно отображает $\mathbb{R}$ на M, причем $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|=|\tilde{x}-\tilde{y}|=\rho_1(\tilde{x},\tilde{y})$, где $\tilde{x},\tilde{y}$ – образы точек x и y при отображении f, $\rho_1(\tilde{x},\tilde{y})=|\tilde{x}-\tilde{y}|$ – стандартная метрика в пространстве $M=(0,+\infty)$. Таким образом, пространства $(\mathbb{R},\rho)$ и (M,ρ_1) изометричны. При изометрии свойство полноты сохраняется (см. задачу 11).

Поскольку числовая прямая с обычной метрикой полна, а M – ее незамкнутое подмножество, то пространство (M,ρ_1) неполно. Пополнением (M,ρ_1) является замкнутый луч $[0,+\infty)$ с метрикой ρ_1 (см. задачу 12). Пополнением исходного пространства $(\mathbb{R},\rho)$ будет пространство $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\rho)$, если считать, что $f(-\infty)=0$. При этом $\rho(x,-\infty)=e^x$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что пространство l_p сепарабельно.

2. Доказать, что пространство c_0 сепарабельно.

3. Доказать, что пространство $C_0(-\infty,+\infty)$ тех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, для которых $\lim\limits_{|t|\to+\infty} x(t)=0$ с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t)-y(t)|$ сепарабельно.

4. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ сепарабельно.

5. Доказать, что пространство $L_p[a,b]$ сепарабельно.

Указание: учесть, что множество $C[a,b]$ является всюду плотным в $L_p[a,b]$ (этот факт будет доказан в разделе 2).

6. Проверить выполнение аксиом метрики для пространства s из примера 5. Доказать полноту этого пространства.

7. Доказать, что пространство s всех числовых последовательностей с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{n}\dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ не является сепарабельным метрическим пространством.

8. Выяснить, сходятся ли в пространстве s из примера 5 последовательности $x_n=(1,2,...,n,0,0,...)$, $x_n=(\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...)$ и $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}}_{n},0,0,...\right)$.

9. Доказать, что пространство c сепарабельно.

Указание: доказать, что линейная комбинация векторов $e_0=(1,1,...,1,...)$ и $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,...)$ с рациональными коэффициентами образует счетное всюду плотное множество в c.

10. Доказать, что метрическое пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует несчетное множество попарно непересекающихся шаров ненулевого радиуса.

11. Доказать, что, если одно из двух изометричных метрических пространств полно, то и второе пространство полно.

12. Пусть X – полное метрическое пространство, $M\subset X$ – подпространство, не являющееся полным. Доказать, что пополнением M в X будет $\overline{M}$.

13. Является ли полным метрическое пространство $\mathbb{R}$, в котором метрика задана равенством $\rho(x,y)=|\text{th}x-\text{th}y+x-y|$? Если пространство неполно, то найти его пополнение.

14. Является ли полным метрическое пространство $\mathbb{R}$, в котором метрика задана равенством $\rho(x,y)=|\text{arctg}x-\text{arctg}y|$? Если пространство неполно, то найти его пополнение.

1.6. Компактные множества

Определение: множество в метрическом пространстве называется компактным, если из любого покрытия этого множества открытыми множествами можно выбрать конечное число множеств, по-прежнему его покрывающих.

Теорема (свойства компактных множеств):

1. Компактное множество всегда замкнуто.
2. Компактное множество всегда ограничено.

Замечание: эти факты, установленные пространства $\mathbb{R}^n$ без изменений переносятся на случай произвольного метрического пространства.

Теорема (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$***):*** множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Замечание: в произвольном метрическом пространстве замкнутое и ограниченное множество может не быть компактным.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $K \subset X$ – множество, $\varepsilon > 0$. Множество, состоящее из конечного числа точек $a_1, a_2, ..., a_n \in X$, называется конечной ε-сетью для K, если $\forall x \in K$ расстояние от этого x до одной из указанных точек меньше, чем ε, т.е. $\forall x \in K$ $\exists a_i$ $(i = \overline{1,n})$: $\rho(x, a_i) < \varepsilon$.

Теорема (о существовании конечной ε***-сети):*** пусть X – метрическое пространство, $K \subset X$ – компактное множество, тогда $\forall \varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для K.

Доказательство: возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Нужно найти конечное число точек $a_1, a_2, ..., a_n \in X$ таких, что $\forall x \in K$ $\exists a_i$ $(i = \overline{1,n})$: $\rho(x, a_i) < \varepsilon$.

Рассмотрим систему всех открытых шаров радиуса ε. Ясно, что, поскольку каждая точка принадлежит шару с центром в этой точке, то система таких шаров покрывает все пространство X, а значит, тем более покрывает все множество K. Таким образом, получили покрытие компакта открытыми множествами. По определению компакта можно найти конечное число шаров, по-прежнему покрывающих K. Центры этих шаров обозначим $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда, если мы возьмем любую точку $x \in K$, то она попадет хотя бы в один из этих шаров, т.е., в шар с центром в точке a_i радиуса ε. По определению открытого шара $\rho(x, a_i) < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: множество K в метрическом пространстве X называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для K.

Замечание: всякое вполне ограниченное множество ограничено (задача 4).

Замечание: в пространстве $\mathbb{R}^n$ вполне ограниченность совпадает с обычной ограниченностью (задача 5).

Теорема (критерий Хаусдорфа): пусть X – полное метрическое пространство, K – подмножество в X. K является компактным тогда и только тогда, когда:

1. K замкнуто;
2. K вполне ограничено.

Доказательство: пусть K – компактно, тогда п. 1 следует из того, что компакт всегда замкнут, а п. 2 следует из предыдущей теоремы.

Обратно: дано, что X – полное метрическое пространство, K – замкнутое и вполне ограниченное подмножество в X. По теореме о полноте замкнутого подпространства K – полное подпространство.

По определению компакта надо доказать, что из любого покрытия K открытыми множествами можно выделить конечное число открытых множеств, по-прежнему покрывающих K. Возьмем систему открытых множеств $\{u_\alpha\}$, покрывающих K. Допустим, что из этой системы нельзя выбрать конечного числа множеств, по-прежнему покрывающих K.

Возьмем $\varepsilon_1 = 1$. По условию K вполне ограничено, значит, для него можно построить конечную 1-сеть $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. расстояние от любой точки $x \in K$ до одной из этих точек меньше 1. Это означает, что любая точка множества K содержится хотя бы в одном из открытых шаров радиуса 1 с центром в одной из точек $x_1, x_2, ..., x_n$. Значит, поскольку открытый шар содержится в замкнутом шаре того же радиуса, любая точка множества K содержится хотя бы в одном из замкнутых шаров радиуса 1 с центром в одной из точек $x_1, x_2, ..., x_n$. Итак, K целиком лежит в объединении таких замкнутых шаров. Если каждый из этих шаров можно покрыть конечным числом множеств из системы $\{u_\alpha\}$, то, поскольку шаров конечное число, K также окажется покрыто конечным числом множеств системы $\{u_\alpha\}$, что противоречит предположению.

Обозначим $K_1 = \{x \in K : \rho(x, x_i) \le 1\}$ – шар, который нельзя покрыть конечным числом множеств системы $\{u_\alpha\}$. Его радиус $\varepsilon_1 = 1$, он замкнут, значит, сам образует полное пространство (как замкнутое подпространство полного пространства). При этом ясно, что $K_1 \subset K$.

Возьмем $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Поскольку K вполне ограничено, то для него можно построить конечную $\frac{1}{2}$-сеть $y_1, y_2, ..., y_m$. Рассуждая аналогично, получаем, что множество K целиком лежит в объединении замкнутых шаров с центрами в точках этой $\frac{1}{2}$-сети и радиуса $\frac{1}{2}$. Поскольку $K_1 \subset K$, то какое-то количество построенных шаров целиком покрывает и множество K_1. Если каждый из таких шаров можно покрыть конечным числом множеств из системы $\{u_\alpha\}$, то, поскольку этих шаров конечное число, K_1 также окажется покрыт конечным числом множеств системы $\{u_\alpha\}$, что противоречит построению шара K_1.

Обозначим $K_2 = \left\{x \in K_1 : \rho(x, y_i) \le \frac{1}{2}\right\}$ – замкнутый шар радиуса $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, лежащий в шаре K_1, такой, что его нельзя покрыть конечным числом множеств системы $\{u_\alpha\}$.

Аналогично, найдем шар $K_3 \subset K_2$ радиуса $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$, который является замкнутым и который нельзя покрыть конечным числом множеств системы $\{u_\alpha\}$. И т.д.

Получили последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, лежащих в полном метрическом пространстве. По теореме о вложенных шарах, они имеют общую точку c.

Система $\{u_\alpha\}$ покрывала K, следовательно, c принадлежит хотя бы одному множеству $u_\alpha \in \{u_\alpha\}$. Множество u_α открыто, значит c лежит в нем вместе с некоторой окрестностью, радиус которой обозначим δ.

Радиусы построенных шаров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ...$ стремятся к нулю, значит, какой-то из них станет меньше, чем $\frac{\delta}{2}$. Тогда диаметр этого шара будет меньше δ, и, поскольку он содержит точку c, то он целиком будет лежать в δ-окрестности точки c. Поскольку δ-окрестность точки c целиком лежит в множестве u_α, то получили, что указанный шар покрыт одним множеством u_α из исходной системы $\{u_\alpha\}$. С другой стороны, по построению, его нельзя покрыть конечным числом множеств из системы $\{u_\alpha\}$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (достаточное условие компактности): пусть X – полное метрическое пространство, $K \subset X$. Для компактности K достаточно, чтобы оно было замкнутым и $\forall \varepsilon > 0$ в X для K существовала компактная ε-сеть.

Доказательство: пусть N – компактная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для K, т.е., $\forall x \in K$ $\exists y \in N$: $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу критерия Хаусдорфа, поскольку N – компактно, то для N существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть N_0, т.е. $\forall y \in N$ $\exists z \in N_0$: $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что N_0 будет конечной ε-сетью для K. Действительно, $\forall x \in K$ $\exists z \in N_0$: $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, где $y \in N$. Таким образом, K замкнуто и вполне ограничено, следовательно, компактно в силу критерия Хаусдорфа.

Теорема доказана.

Теорема (о сепарабельности компакта): компактное пространство X сепарабельно.

Доказательство: рассмотрим последовательность $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ и для каждого элемента ε_k построим в X конечную ε_k-сеть (поскольку X компактно, то, в силу критерия Хаусдорфа, это можно сделать $\forall \varepsilon = \varepsilon_k > 0$). Обозначим эти ε_k-сети через $N_k = \{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$. Ясно, что если взять $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, то множество $N \subset X$ является счетным (т.к. это счетное объединение конечных ε_k-сетей, т.е. все его элементы можно занумеровать).

Далее, возьмем $\forall x \in X$, тогда, по определению конечной ε_k-сети, для $\varepsilon_k > 0$ $\exists x_i^{(k)} \in N_k$: $\rho(x, x_i^{(k)}) < \varepsilon_k$. Ясно, что $x_i^{(k)} \in N$, т.е. любой элемент пространства X оказался приближен элементом множества N с любой точностью $\varepsilon = \varepsilon_k > 0$. Тем самым, множество N всюду плотно в X. Итак, нашли в пространстве X счетное всюду плотное множество, тем самым, X – сепарабельно.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $K \subset X$. Множество K называется секвенциально компактным, если у любой последовательности его элементов существует подпоследовательность, имеющая предел (принадлежащий K).

Теорема (о секвенциальной компактности): пусть X – полное метрическое пространство, $K \subset X$. Множество K компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Доказательство: пусть K компактно. Надо доказать, что у любой последовательности его элементов есть подпоследовательность, имеющая предел.

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – любая последовательность элементов множества K. Покажем, что у нее найдется предельная точка, т.е. точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много членов этой последовательности.

Допустим, что такой точки нет, т.е. у любой точки из множества K есть окрестность, в которой содержится конечное число членов нашей последовательности. Система всех таких окрестностей покрывает весь компакт K, поскольку каждая точка K своей окрестности принадлежит. Окрестность – открытое множество, а K – компакт, значит, можно выбрать конечное число таких окрестностей, по-прежнему покрывающих K. Итак, получили конечное число окрестностей, в каждой из которых конечное число членов последовательности. Тем самым, последовательность конечна, что противоречит тому, что у нее бесконечное число членов.

Итак, последовательность имеет предельную точку, т.е. у нее существует подпоследовательность, которая сходится к этой предельной точке. Поскольку K – компактно, то, в силу критерия Хаусдорфа, K замкнуто, следовательно, найденная предельная точка принадлежит K.

Обратно: пусть K – секвенциально компактно. Надо доказать, что K компактно, т.е., в силу критерия Хаусдорфа, достаточно доказать, что K замкнуто и вполне ограничено.

а) Замкнутость: допустим, что K – не замкнуто, т.е. у него найдется предельная точка $a \in X$, которая не принадлежит K. Поскольку она предельная для K, то, в силу критерия предельной точки, существует последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots \in K$, предел которой равен a. Поскольку последовательность стремится к a, то любая ее подпоследовательность тем более стремится к a. В силу единственности предела, никакого другого предела у данной подпоследовательности быть не может. Окончательно, $a \notin K$, другого предела у подпоследовательности быть не может, поэтому в K нашли последовательность, никакая подпоследовательность которой не сходится в K. Противоречие с определением секвенциальной компактности.

б) Вполне ограниченность: допустим, что K не является вполне ограниченным множеством, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, при котором в X нет конечной ε-сети для K.

Возьмем произвольную точку $x_1 \in X$. Поскольку для K нет конечной ε-сети, то эта точка ε-сетью не является, поэтому найдется точка $x_2 \in K$ такая, что $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Рассмотрим множество x_1, x_2. Оно также не является конечной ε-сетью, поскольку конечной ε-сети для множества K вообще нет, следовательно, $\exists x_3 \in K$: $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Аналогично, точки x_1, x_2, x_3 не образуют конечную ε-сеть для K, значит, найдется точка $x_4 \in K$, от которой расстояние до каждой из этих трех точек больше, либо равно ε. И т.д.

Полученная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ такова, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, следовательно, эта последовательность не может быть фундаментальной, как и любая ее подпоследовательность. Поскольку всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, то никакая подпоследовательность последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не может быть сходящейся. С другой стороны, по условию, K секвенциально компактно, т.е. у последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ должна быть подпоследовательность, имеющая предел. Противоречие.

Теорема доказана.

Замечание: понятие секвенциальной компактности таким образом можно считать вторым определением компактности (в полном пространстве).

Примеры решения задач

1. Для отрезка $[0,1]$ построить конечную ε-сеть, если $\varepsilon = \dfrac{1}{8}$.

Решение: по определению конечная ε-сеть – это конечный набор точек таких, что расстояние от любой точки отрезка $[0,1]$ до одной из точек указанной ε-сети меньше, чем ε. Ясно, что $\dfrac{1}{8}$-сеть для отрезка $[0,1]$ будет состоять из точек $0, \dfrac{1}{8}, \dfrac{2}{8}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{4}{8}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{6}{8}, \dfrac{7}{8}, 1$.

2. Доказать, что параллелепипед $\Pi = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2 : |\xi_n| \leq \dfrac{1}{2^n} \right\}$ является компактным множеством в l_2.

Решение: в силу критерия Хаусдорфа достаточно показать, что Π – замкнут и вполне ограничен. Замкнутость Π следует из задачи 41 к п. 1.3, поэтому здесь не обосновывается. Кроме того, заметим, что параллелепипед Π – ограниченное множество, поскольку $\forall x \in \Pi$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1}{3}$.

Покажем, что Π – вполне ограниченное множество, т.е., что $\forall \varepsilon > 0$ в l_2 для него существует конечная ε-сеть.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем и зафиксируем номер n таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Каждой точке $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \Pi$ поставим в соответствие точку $x_0 = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...) \in \Pi_0$. Ясно, что множество $\Pi_0 \subset \Pi$ вполне ограничено, как всякое ограниченное множество в n-мерном евклидовом пространстве (которое в данном случае совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ – см. задачу 5), следовательно, для Π_0 (в указанном n-мерном пространстве) существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, которую обозначим N. Таким образом, $\forall x_0 \in \Pi_0$ $\exists a \in N$: $\rho(x_0, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим: $\rho(x, x_0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \xi_k - \xi_k^{(0)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \xi_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \left(\dfrac{\frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3 \cdot 4^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $\forall x \in \Pi$, (т.е. и $\forall x_0 \in \Pi_0$) $\exists a \in N$: $\rho(x, a) \le \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Следовательно, множество N образует конечную ε-сеть для Π, т.е. параллелепипед Π – вполне ограничен, а значит, компактен.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим отрезок $[0,1]$ и на нем точки $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$. При каких $\varepsilon > 0$ множество $\{a_1, a_2, a_3\}$ будет ε-сетью для $[0,1]$?

2. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$. При каком $\varepsilon > 0$ множество $\mathbb{Z}$ будет ε-сетью для $\mathbb{R}$ (не конечной)?

3. Для отрезка $[1,2]$ построить конечную ε-сеть, если $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

4. Доказать, что всякое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным, т.е. $\forall x \in X$ и для фиксированного элемента $a \in X$ $\exists c > 0$: $\rho(x, a) \le c$.

Указание: найти конечную 1-сеть и воспользоваться неравенством треугольника.

5. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ вполне ограниченность любого множества эквивалентна его ограниченности.

Указание: заключить множество в достаточно большой куб и разбить его на кубики с ребром ε. Показать, что вершины этих кубиков образуют конечную $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{2}$-сеть в исходном кубе.

6. Доказать, что единичная сфера $S=\{x\in l_2:\rho(x,0)=1\}$ является замкнутым, ограниченным, но не вполне ограниченным множеством в пространстве l_2.

Указание: рассмотреть элементы $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0,...)$, принадлежащие этой сфере найти расстояние между двумя такими различными точками и показать, что при $\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{2}$ для S не может быть конечной ε-сети.

7. Пусть $(\mathbb{N},\rho)$ – метрическое пространство с метрикой $\rho(m,n)=\begin{cases}1, & m\neq n\\ 0, & m=n\end{cases}$. Доказать, что это пространство не является вполне ограниченным (т.е. найти ε, при котором для него нет конечной ε-сети). Доказать полноту этого пространства, его ограниченность, не компактность, не секвенциальную компактность. Найти покрытие этого пространства открытыми множествами, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

8. Проверить, что шар $\{x(t)\in C[0,2\pi]:|x(t)|\le 1\}$ не является вполне ограниченным множеством в $C[0,2\pi]$.

Указание: рассмотреть последовательность функций $x_n(t)=\sin nt$ и показать, что $\rho(x_n,x_m)\ge 1$ при $n\neq m$.

9. Является ли множество $A=\{0\}\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ компактным?

Указание: использовать критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.

10. Доказать, что параллелепипед $\Pi=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:|\xi_n|\le\frac{1}{n}\right\}$ является компактным множеством в l_2.

11. Является ли параллелепипед $\Pi=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:|\xi_n|<\frac{1}{e^n}\right\}$ компактным множеством в l_2?

12. Используя критерий Хаусдорфа, доказать, что всякое замкнутое подмножество компактного множества само является компактным множеством.

13. Является ли множество $\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_n\cdot n^3}{\sin n}\right)^2\le 1\right\}$ компактным в l_2?

Указание: обосновать, что для координат элементов этого множества справедливо соотношение $|\xi_n| \le \frac{1}{n^3}$. *Воспользоваться предыдущей задачей.*

14. Является ли множество $\left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_n| > \frac{1}{n^5} \right\}$ компактным в l_2?

15. Является ли множество $\left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_n \cdot e^n}{2} \right)^2 \le 1 \right\}$ компактным в l_2?

16. Доказать ***критерий компактности в*** c_0: множество $K = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...)\} \in c_0$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено (т.е. $\forall x \in K$ $\exists c > 0$: $\rho(x,0) \le c$) и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge N$ $\forall x \in K$ $|\xi_n| < \varepsilon$.

17. Доказать ***критерий компактности в*** l_2: множество $K = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...)\} \in l_2$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall x \in K$ $\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon$.

Это утверждение переносится на случай произвольного пространства l_p *(* $p \ge 1$ *) с условием* $\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon$. *Здесь используется то, что в любом конечномерном пространстве справедлив тот же критерий компактности, что и в* $\mathbb{R}^n$ *(это следует из полноты и изоморфности всех конечномерных пространств пространству* $\mathbb{R}^n$ *– см. раздел 2).*

18. Доказать ***критерий компактности в*** c: множество $K = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...)\} \in c$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \ge N$ $\forall x \in K$ $|\xi_n - \xi_m| < \varepsilon$.

Указание: вначале показать, что критерием компактности будет $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$*:* $\forall n \ge N$ $\forall x \in K$ $\left| \xi_n - \lim_{n \to \infty} \xi_n \right| < \varepsilon$.

19. Является ли компактным в l_3 множество $\left\{ x \in l_3 : \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\xi_k|^3 \le 1 \right\}$?

Указание: $|\xi_k|^3 = k^{\frac{4}{3}} |\xi_k|^2 \cdot k^{-\frac{4}{3}} |\xi_k|$. *Применить неравенство Гельдера.*

20. Является ли компактным в l_2 множество $\left\{ x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\xi_k|^4 \le 1 \right\}$?

21. Является ли компактным в l_3 множество $\left\{ x \in l_3 : \sum_{k=1}^{\infty} k |\xi_k|^5 \le 1 \right\}$?

22. Является ли компактным в l_3 множество $\left\{ x \in l_3 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^3 \ln(k+1) \le 1 \right\}$?

1.7. Непрерывные отображения метрических пространств. Сжимающие отображения

Определение: пусть даны два метрических пространства X и Y и функция $y = f(x)$, определенная на некотором множестве $M \subset X$ со значениями в пространстве Y. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$: $\forall x \in M$ из $\rho_X(x, x_0) < \delta$ следует, что $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Если функция непрерывна в каждой точке множества M, то она называется непрерывной на множестве M.

Замечание: можно переписать данное определение в терминах окрестностей: $\forall B(f(x_0), \varepsilon) \;\; \exists B(x_0, \delta) \bigcap M$: $\forall x \in B(x_0, \delta) \bigcap M \;\; f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Кроме того, можно доказать, что данное определение непрерывности эквивалентно следующему: функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in M$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ из условия $x_n \underset{n \to \infty}{\to} x_0$ следует, что $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} f(x_0)$.

Теорема (критерий глобальной непрерывности): пусть $f : X \to Y$. Функция f непрерывна на всем пространстве X тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.

Доказательство: пусть f непрерывна в X, $U \subset Y$ – открытое множество, V – прообраз U. Надо доказать, что V открыто, т.е. любая его точка лежит в нем вместе с окрестностью. Берем $\forall a \in V$, тогда $f(a) \in U$. Т.к. U открыто, то найдется окрестность $B(f(a), \varepsilon) \subset U$. Т.к. f непрерывна, то при отображении f в $B(f(a), \varepsilon)$ целиком переходит некоторая окрестность $B(a, \delta)$. Значит $B(a, \delta)$ лежит в прообразе U, т.е. в множестве V. Итак, нашли окрестность точки a, целиком лежащую в V, т.е. V открыто.

Обратно: пусть прообраз любого открытого множества открыт. Надо доказать, что f непрерывна $\forall a \in X$, т.е. $\forall B(f(a), \varepsilon) \;\; \exists B(a, \delta)$: $\forall x \in B(a, \delta)$ $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Поскольку $a \xrightarrow{f} f(a) \in B(f(a), \varepsilon)$, то a лежит в прообразе $B(f(a), \varepsilon)$. Окрестность $B(f(a), \varepsilon)$ – открытое множество, значит, ее прообраз открыт по условию, поэтому точка a лежит в нем вместе с некоторой окрестностью. Итак, нашли окрестность $B(a, \delta)$, лежащую в прообразе $B(f(a), \varepsilon)$, поэтому $B(a, \delta)$ при отображении f переходит в $B(f(a), \varepsilon)$, т.е. f непрерывна.

Теорема доказана.

Теорема (об образе компакта): при непрерывном отображении образ компактного множества компактен.

Доказательство: пусть $f : K \to Y$, K – компакт, V – образ K. Надо доказать, что V – компакт. Рассмотрим систему открытых множеств $\{u_\alpha\}$, покрывающих V. Т.к. V – образ K, то система прообразов этих множеств покрывает K (если бы какая-то точка $x_0 \in K$ не покрывалась ни одним прообразом, то $f(x_0) \in V$ не покрывалась бы ни одним из множеств системы $\{u_\alpha\}$). Эти пробразы открыты по предыдущей теореме, K – компакт, значит можно выбрать конечное число прообразов, которые по-прежнему покрывают K, тогда полученное конечное число множеств $\{u_\alpha\}$ покрывает образ K, т.е. V. Итак, V покрыт конечным числом множеств из нашей системы, т.е. V – компакт.

Теорема доказана.

Теорема Вейерштрасса: пусть K – компактное множество в метрическом пространстве X, $f: K \to \mathbb{R}$ – непрерывное отображение. Тогда:

1. f ограничено на K, т.е. $\forall x \in K \;\; \exists c > 0: \; |f(x)| \le c$.
2. f достигает на K своего наибольшего и наименьшего значения.

Теорема Кантора: пусть K – компактное множество в метрическом пространстве X, $f: K \to Y$ – непрерывное отображение, тогда f равномерно непрерывно на K, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \; \forall x, y \in K$ из $\rho_X(x, y) < \delta$ следует, что $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Определение: пусть даны два метрических пространства X и Y, и существует взаимно-однозначное отображение пространства X на пространство Y. Если это отображение взаимно непрерывно, то пространства X и Y называются гомеоморфными.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $f: X \to X$. Отображение f называется сжимающим, если $\exists q < 1: \; \forall x, y \in X \;\; \rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y)$.

Определение: пусть X – метрическое пространство, $f: X \to X$, $a \in X$. Точка a называется неподвижной точкой отображения f, если $f(a) = a$.

Теорема (принцип сжимающих отображений): если X – полное метрическое пространство, а $f: X \to X$ – сжимающее отображение, то f имеет – и причем ровно одну – неподвижную точку.

Доказательство: пусть f – сжимающее отображение, т.е. $\exists q < 1$: $\forall x, y \in X$ справедливо неравенство $\rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим последовательность $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$,..., $x_n = f(x_{n-1})$,.... Обозначим $l = \rho(x_0, x_1)$, тогда

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_0), f(x_1)) \le q\rho(x_0, x_1) = ql,$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \le q\rho(x_1, x_2) \le q^2 l,$$
$$\rho(x_3, x_4) = \rho(f(x_2), f(x_3)) \le q\rho(x_2, x_3) \le q^3 l,$$
$$\ldots$$

Таким образом, выбирая $m > n$, получаем, что:

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \le$$
$$\le l(q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{m-1}) = lq^n(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1-n}) \le$$
$$\le lq^n(1 + q + q^2 + \ldots) = lq^n \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Поскольку $q < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{lq^n}{1-q} = 0$, т.е., $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n > N \;\; \dfrac{lq^n}{1-q} < \varepsilon$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m > n > N\ \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, т.е. построенная последовательность фундаментальна. По условию пространство X полно, значит, эта последовательность имеет предел в X, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, поскольку $\{x_{n+1}\}$ – это та же самая последовательность, что и $\{x_n\}$, только без первого члена. По построению $x_{n+1} = f(x_n)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, в силу непрерывности отображения f (см. задачу 11), получаем, что $a = f(a)$, т.е. a – неподвижная точка отображения f.

Покажем, что двух неподвижных точек быть не может. От противного: допустим, что их две, $a \neq b$. Поскольку они обе неподвижные, то $a = f(a)$ и $b = f(b)$. Т.к. отображение сжимающее, то $\rho(f(a), f(b)) \le q\rho(a,b)$ при $q < 1$, откуда $\rho(a,b) \le q\rho(a,b)$. Поскольку $a \neq b$, то $\rho(a,b) \neq 0$, тогда $1 \le q$, что противоречит условию $q < 1$.

Теорема доказана.

Замечание: если в неравенстве $\rho(x_n, x_m) \le lq^n \cdot \dfrac{1}{1-q}$ перейти к пределу при $m \to \infty$, то получим $\rho(x_n, a) \le lq^n \cdot \dfrac{1}{1-q} = \rho(x_0, x_1) \cdot q^n \cdot \dfrac{1}{1-q} = \rho(x_0, f(x_0)) \cdot q^n \cdot \dfrac{1}{1-q}$. Полученное неравенство дает погрешность приближения неподвижной точки, если оборвать построение последовательности $\{x_n\}$ на n-м шаге.

Замечание: построение последовательных приближений $\{x_n\}$, сходящихся к неподвижной точке a, можно производить, исходя из любого элемента $x_0 \in X$. Выбор x_0 будет сказываться только на быстроте сходимости последовательности $\{x_n\}$ к своему пределу a.

Теорема (о существовании и единственности решения системы линейных алгебраических уравнений): пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ расстояние определено по формуле $\rho(x, y) = \max\limits_i |\xi_i - \eta_i|$, где $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$. Тогда система уравнений $\xi_i - \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = b_i\ (i = \overline{1,n})$ имеет единственное решение, если матрица $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ такова, что $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$.

Доказательство: определенное таким образом пространство $\mathbb{R}^n$ является полным в силу критерия Коши (см. задачу 12). Рассмотрим отображение $y = Ax$, заданное с помощью равенств $\eta_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\xi_j + b_i\ (i = \overline{1,n})$. Тогда ясно, что $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\rho(y_1, y_2) = \rho(Ax_1, Ax_2) = \max\limits_i \left| \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\xi_j^{(1)} + b_i - \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\xi_j^{(2)} - b_i \right| =$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j^{(2)} \right| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right) \right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \left| \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right| \le$$

$\le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max\limits_j \left| \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \rho(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2) \cdot \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$. Теперь, если обозначим $q = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$, то при $q < 1$ отображение A является сжимающим, и, значит, в силу принципа сжимающих отображений, оно имеет единственную неподвижную точку. Таким образом, уравнение $x = Ax$ имеет единственное решение при условии $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$. Осталось заметить, что это уравнение эквивалентно системе $\xi_i - \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} \xi_j = b_i$ при $i = \overline{1,n}$.

Теорема доказана.

Теорема (о существовании и единственности решения интегрального уравнения Фредгольма II рода): пусть $K(t,s)$ – действительная функция, определенная и измеримая в квадрате $a \le t, s \le b$ такая, что $\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(t,s)dtds < +\infty$ и пусть $f(t) \in L_2[a,b]$. Тогда интегральное уравнение $x(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ имеет единственное решение $x(t) \in L_2[a,b]$ при $|\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(t,s)dtds}}$.

Доказательство: пространство $L_2[a,b]$ – полно. Рассмотрим в нем отображение $Ax(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$. Используя неравенства Минковского и Гельдера для интегралов, можно показать, что при $x(t) \in L_2[a,b]$, в условиях нашей теоремы, $Ax(t) \in L_2[a,b]$.

Тогда $\rho^2(Ax, Ay) = \int\limits_a^b |Ax(t) - Ay(t)|^2 dt = \int\limits_a^b \left| \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\big(x(s) - y(s)\big)ds \right|^2 dt \le$ $\le |\lambda|^2 \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s) - y(s)| ds \right)^2 dt$. Воспользуемся неравенством Гельдера для интегралов: $\left(\int\limits_a^b |f(t)| \cdot |g(t)| dt \right)^2 \le \int\limits_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int\limits_a^b |g(t)|^2 dt$. Тогда получаем, что:

$$\rho^2(Ax,Ay)\le|\lambda|^2\int_a^b\left(\int_a^b|K(t,s)|^2\,ds\cdot\int_a^b|x(s)-y(s)|^2\,ds\right)dt=$$

$$=|\lambda|^2\int_a^b\left(\int_a^b K^2(t,s)ds\cdot\rho^2(x,y)\right)dt=\rho^2(x,y)\cdot|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dsdt\,.$$

Таким образом, $\rho(Ax,Ay)\le\rho(x,y)\cdot|\lambda|\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dsdt}$ и, если обозначим $q=|\lambda|\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dsdt}$, то при $q<1$ отображение A будет сжимающим, поэтому, в силу принципа сжимающих отображений, оно будет иметь единственную неподвижную точку. Итак, уравнение $x=Ax$ имеет единственное решение при условии $|\lambda|<\dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds}}$. Осталось заметить, что это уравнение эквивалентно уравнению $x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds$.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Показать, что отображение $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Af(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt+\dfrac{5}{6}x$ является сжимающим и найти его неподвижную точку $f^*(x)$.

Решение: возьмем $f_1(x),f_2(x)\in C[0,1]$, тогда

$$\rho(Af_1,Af_2)=\sup_{x\in[0,1]}|Af_1(x)-Af_2(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{2}\int_0^1 xtf_1(t)dt+\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xtf_2(t)dt-\frac{5}{6}x\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 xtf_1(t)dt-\int_0^1 xtf_2(t)dt\right|=\frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 xt(f_1(t)-f_2(t))dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|x|\cdot\int_0^1|t|\cdot|f_1(t)-f_2(t)|dt=\frac{1}{2}\int_0^1|t|\cdot|f_1(t)-f_2(t)|dt\cdot\sup_{x\in[0,1]}|x|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1|t|\cdot|f_1(t)-f_2(t)|dt\le\frac{1}{2}\int_0^1|t|\cdot\sup_{t\in[0,1]}|f_1(t)-f_2(t)|dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1|t|\cdot\rho(f_1,f_2)dt=\rho(f_1,f_2)\cdot\frac{1}{2}\int_0^1|t|dt=\frac{1}{2}\rho(f_1,f_2)\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\rho(f_1,f_2)\,.$$

Таким образом, $q=\dfrac{1}{2}<1$ и по определению отображение A – сжимающее.

Найдем его неподвижную точку, построив последовательные приближения: пусть $f_0(x)=0$, тогда $f_1(x)=Af_0(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 xtf_0(t)dt+\frac{5}{6}x=\frac{5}{6}x$. Далее,

$$f_2(x)=Af_1(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 xtf_1(t)dt+\frac{5}{6}x=\frac{1}{2}\int_0^1 xt\cdot\frac{5}{6}tdt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x,$$

$$f_3(x)=Af_2(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 xtf_2(t)dt+\frac{5}{6}x=\frac{1}{2}\int_0^1 xt\cdot\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)tdt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x,$$

$$\ldots$$

$$f_n(x)=Af_{n-1}(x)=\left(\frac{5}{6^n}+\frac{5}{6^{n-1}}+\ldots+\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x,$$

$$\ldots$$

Согласно принципу сжимающих отображений $f^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, откуда, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что $f^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{5}{6^k}\cdot x=x\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5}{6^k}=x\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=x$.

Заметим, что этот пример можно решить другим способом, если установить, что решение уравнения $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt+\frac{5}{6}x$ обязательно должно иметь вид $f(x)=cx$. Подставляя этот вид в уравнение, находим, что $c=1$.

2. Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений $x_i=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i$ $(i=1,2,\ldots)$. Проверить, что при выполнении условий $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|<+\infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sup\limits_m|a_{im}|=\alpha<1$ она имеет единственное решение $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots)$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^*|<+\infty$.

Решение: рассмотрим в пространстве l_1 отображение $Ax=y=(y_i)_{i=1}^{\infty}$, где $y_i=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i$ $(i=1,2,\ldots)$. Тогда $\forall x,z\in l_1$:

$$\rho(Ax,Az)=\sum_{i=1}^{\infty}|(Ax)_i-(Az)_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i-\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}z_m-a_i\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}(x_m-z_m)\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{im}|\cdot|x_m-z_m|\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|\cdot|x_m-z_m|=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|\sum_{m=1}^{\infty}|x_m-z_m|=\sum_{i=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|\cdot\rho(x,z).$$

Таким образом, при $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_m |a_{im}| < 1$ отображение A является сжимающим. Условие $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty$ необходимо для того, чтобы отображение A действовало из l_1 на все l_1 (это условие означает, что вектор $(a_i) \in l_1$).

Поскольку l_1 – полно, то в силу принципа сжимающих отображений A имеет единственную неподвижную точку $x^* = (x_1^*, x_2^*, ...)$ такую, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*| < +\infty$ (т.е. $x^* \in l_1$). Осталось заметить, что уравнение $x = Ax$ для поиска неподвижной точки эквивалентно системе $x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i$ ($i = 1, 2, ...$).

3. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ цепных дробей 2, $2 + \frac{1}{2}$, $2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$,... является сходящейся и найти ее предел.

Решение: заметим, что $x_1 = 2$, $x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$ ($n \ge 2$), тогда ясно, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \ge 2$. Кроме того, поскольку при $n \ge 2$ $x_{n-1} \ge 2$, то $0 < \frac{1}{x_{n-1}} \le \frac{1}{2}$, следовательно, $x_n \le 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ при $n \ge 2$. Очевидно, что $x_1 = 2 \le \frac{5}{2}$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$. Рассмотрим отображение $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[2, \frac{5}{2}\right]$. Поскольку $\frac{2}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$, то $\frac{12}{5} \le 2 + \frac{1}{x} \le \frac{5}{2}$, т.е. $2 + \frac{1}{x} \in \left[\frac{12}{5}, \frac{5}{2}\right] \subset \left[2, \frac{5}{2}\right]$, и f отображает отрезок $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ в себя. Далее, $\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|2 + \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - x|}{|x| \cdot |y|} \le$ $\le \frac{1}{4}|y - x| = \frac{1}{4}\rho(x, y)$. Итак, $q = \frac{1}{4} < 1$, т.е. отображение f является сжимающим, а значит (в силу полноты рассматриваемого пространства), имеет единственную неподвижную точку $x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$, где $x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем уравнение $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, решая которое, находим, что $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

4. Пусть функция $\varphi(s, u)$ двух вещественных переменных определена в полосе $\Pi = \left\{(s, u) \in \mathbb{R}^2 : a \le s \le b, -\infty < u < +\infty\right\}$, непрерывна в Π и имеет на Π

непрерывную производную по u, причем $0 < m \leq \varphi_u'(s,u) \leq M < +\infty$. Доказать, что существует единственная непрерывная на $[a,b]$ функция $u = x^*(s)$, для которой $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$ ($s \in [a,b]$).

Решение: для всех $s \in [a,b]$ рассмотрим в пространстве $C[a,b]$ отображение $Ax = y$, где $y(s) = x(s) - \dfrac{1}{M+m}\varphi(s, x(s))$. Из условия задачи ясно, что $A: C[a,b] \to C[a,b]$. Далее,

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = \sup_{s\in[a,b]} |Ax_1(s) - Ax_2(s)| =$$

$$= \sup_{s\in[a,b]} \left| x_1(s) - \frac{1}{M+m}\varphi(s, x_1(s)) - x_2(s) + \frac{1}{M+m}\varphi(s, x_2(s)) \right| =$$

$$= \sup_{s\in[a,b]} \left| x_1(s) - x_2(s) - \frac{1}{M+m}\bigl(\varphi(s, x_1(s)) - \varphi(s, x_2(s))\bigr) \right|.$$

По теореме Лагранжа $\varphi(s, x_1(s)) - \varphi(s, x_2(s)) = \varphi_u'(s, \xi(s))(x_1(s) - x_2(s))$ для всех $s \in [a,b]$, где $x_1(s) < \xi(s) < x_2(s)$. Тогда

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = \sup_{s\in[a,b]} \left| x_1(s) - x_2(s) - \frac{1}{M+m}\varphi_u'(s, \xi(s))(x_1(s) - x_2(s)) \right| =$$

$$= \sup_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| \cdot \left| 1 - \frac{1}{M+m}\varphi_u'(s, \xi(s)) \right| =$$

$$= \sup_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| \cdot \left(1 - \frac{1}{M+m}\varphi_u'(s, \xi(s)) \right) \leq$$

$$\leq \sup_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| \cdot \left(1 - \frac{m}{M+m} \right) = \frac{M}{M+m} \cdot \sup_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| = \frac{M}{M+m} \cdot \rho(x_1, x_2).$$

Таким образом, $q = \dfrac{M}{M+m} < 1$ и отображение A – сжимающее. Пространство $C[a,b]$ полное, следовательно, по принципу сжимающих отображений, существует единственная неподвижная точка $x^*(s) \in C[a,b]$, т.е. решение уравнения $x^*(s) = x^*(s) - \dfrac{1}{M+m}\varphi(s, x^*(s))$, откуда $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$.

5. Пусть в полном метрическом пространстве X заданы два сжимающих отображения A и B, причем $\rho(Ax, Ay) \leq q_A \rho(x,y)$, а $\rho(Bx, By) \leq q_B \rho(x,y)$. Доказать, что, если $\forall x \in X \;\; \rho(Ax, Bx) < \varepsilon$, то неподвижные точки отображений A и B находятся на расстоянии, не превосходящем $\dfrac{\varepsilon}{1-q}$, где $q = \max\{q_A, q_B\} < 1$.

Решение: пусть x^* – неподвижная точка для отображения A. Неподвижную точку y^* отображения B построим как предел последовательности $y_k = B^k x^* = \underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{k} x^* = B(B(B\ldots(Bx)\ldots))$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Ясно, что $\rho(x^*, y_1) = \rho(x^*, Bx^*)$, тогда

$$\rho(y_1, y_2) = \rho(Bx^*, B^2x^*) = \rho(Bx^*, B(Bx^*)) \le q_B \rho(x^*, Bx^*),$$

$$\rho(y_2, y_3) = \rho(B(Bx^*), B(B^2x^*)) \le q_B \rho(Bx^*, B^2x^*) \le q_B{}^2 \rho(x^*, Bx^*),$$

$$\ldots$$

Таким образом, получаем, что

$$\rho(x^*, y_k) \le \rho(x^*, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3) + \ldots + \rho(y_{k-1}, y_k) \le$$

$$\le \rho(x^*, Bx^*)(1 + q_B + q_B{}^2 + \ldots + q_B{}^{k-1}) \le \rho(x^*, Bx^*)(1 + q_B + q_B{}^2 + \ldots) = \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - q_B}.$$

При $k \to \infty$, учитывая, что $y_k \to y^*$, получаем, что

$$\rho(x^*, y^*) \le \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - q_B} = \frac{\rho(Ax^*, Bx^*)}{1 - q_B} < \frac{\varepsilon}{1 - q_B} \le \frac{\varepsilon}{1 - q}.$$

6. Доказать, что если отображение $A : X \to X$ полного метрического пространства X в себя таково, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ его степень (n-я итерация) A^n является сжимающим отображением, то A имеет и притом единственную неподвижную точку.

Решение: пусть существует $0 < q < 1$ такое, что $\rho(A^n x, A^n y) \le q\rho(x, y)$. Тогда, в силу принципа сжимающих отображений A^n имеет единственную неподвижную точку x^*, т.е. $A^n x^* = x^*$. Покажем, что x^* также является единственным решением уравнения $Ax = x$. Допустим, что $Ax^* \ne x^*$, тогда $\rho(x^*, Ax^*) \ne 0$.

Далее, $\rho(x^*, Ax^*) = \rho(A^n x^*, A(A^n x^*)) = \rho(A^n x^*, A^{n+1} x^*) = \rho(A^n x^*, A^n(Ax^*)) \le$ $\le q\rho(x^*, Ax^*)$, откуда получаем, что $1 \le q$, что противоречит условию $0 < q < 1$, значит, предположение $Ax^* \ne x^*$ неверно, т.е. $Ax^* = x^*$.

Пусть теперь $x^{**} \ne x^*$ – другая неподвижная точка для A, т.е. $\rho(x^*, x^{**}) \ne 0$. Тогда (см. задачу 52) x^{**} является неподвижной и для A^n. Следовательно, $\rho(x^*, x^{**}) = \rho(A^n x^*, A^n x^{**})) \le q\rho(x^*, x^{**})$, откуда, получаем, что $1 \le q$, а это противоречит условию $0 < q < 1$. Значит, предположение $x^{**} \ne x^*$ неверно, т.е. $x^* = x^{**}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ – произвольное ограниченное множество и пусть $M = \sup\limits_{x \in E} x$, $m = \inf\limits_{x \in E} x$. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E$: $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ и $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

2. В условиях задачи 1 доказать, что $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \in E$: $x_n \to M$, $y_n \to m$ при $n \to \infty$. Провести доказательство теоремы Вейерштрасса, используя теоремы об образе компакта и критерий компактности.

3. Показать, что отрезок и окружность не гомеоморфны.

4. Обязательно ли при непрерывном отображении $f : X \to Y$:

а) образ открытого множества является открытым множеством;

б) образ замкнутого множества является замкнутым множеством?

Указание: рассмотреть функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Пусть A – фиксированное подмножество метрического пространства X. Доказать, что функция $f:X\to\mathbb{R}$, $f(x)=\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$ непрерывна.

Указание: используя неравенство четырехугольника (см. задачи к п. 1.1), показать, что расстояние $\rho(x,y)$ *– непрерывная функция от своих аргументов, т.е. если* $x_n\to x$, $y_n\to y$, *то* $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.

6. Пусть M – компактное множество в метрическом пространстве X и $x\in X$. Доказать, что существует точка $a\in M$ такая, что $\rho(x,M)=\rho(x,a)$.

7. Провести доказательство теоремы Кантора о равномерной непрерывности.

8. Установить, какие из следующих отображений являются сжимающими на вещественной прямой $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой (в последующих задачах, если не указано обратное, метрика также принимается стандартной):

а) $f(x)=2x+3$; б) $f(x)=\dfrac{1}{3}x+5$; в) $f(x)=x+6$; г) $f(x)=-x+2$.

9. Является ли сжимающим отображение $f(x)=x^2$, если оно задано в метрическом пространстве:

а) $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$; б) $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$.

10. Найти неподвижные точки для отображений из задач 8 и 9.

11. Доказать, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

12. Доказать, что пространство, определенное в теореме о существовании и единственности решения системы линейных алгебраических уравнений, является полным метрическим пространством.

13. Является ли сжимающим отображение $Ax=\sqrt{x}:X\to X$, если:

а) $X=[0,+\infty)$; б) $X=[1,+\infty)$; в) $X=(1,+\infty)$?

Указание: в п.п. а) и в) использовать принцип сжимающих отображений, в п. б) проверить по определению.

14. Является ли сжимающим отображение $Ax=x^2$, действующее на множестве:

а) $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$; б) $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$?

Указание: в п. б) показать, что условие $A:X\to X$ *не выполняется.*

15. Является ли сжимающим отображение $Ax=x^3$, действующее на шаре $B(0,r)$ при $r<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

16. Является ли сжимающим отображение $Ax=e^x$, действующее на числовой прямой $\mathbb{R}$?

Указание: воспользоваться принципом сжимающих отображений.

17. Является ли сжимающим отображение $Ax = \operatorname{arctg} x$, действующее на числовой прямой $\mathbb{R}$? А на отрезке $[1,2]$?

18. Является ли сжимающим отображение $Ax = \dfrac{1}{1-x^2}$, действующее на числовой прямой $\mathbb{R}$?

Указание: показать, что условие $A: X \to X$ не выполняется.

19. Является ли сжимающим отображение $Ax = \dfrac{1}{1+x^2}$, действующее на числовой прямой $\mathbb{R}$?

Указание: воспользоваться теоремой Лагранжа. Для оценки производной решить задачу на экстремум.

20. Является ли сжимающим отображение $Ax = \operatorname{tg} x$, действующее на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$?

Указание: показать, что не выполняется условие $A: X \to X$.

21. Является ли сжимающим на $[0,+\infty)$ отображение:

а) $Ax = \max\left\{\dfrac{x}{2}, \sqrt{x}\right\}$; б) $Ax = \min\left\{\dfrac{x}{2}, \sqrt{x}\right\}$?

22. Является ли сжимающим отображение $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое матрицей $A = \begin{pmatrix} 10 & 55 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$?

23. Является ли сжимающим отображение $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое матрицей $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$?

24. Проверить, что отображение $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ является сжимающим на отрезке $[1,2]$.

25. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ определено расстояние $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2}$, где $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$. Доказать, что система $\xi_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i$ $(i = \overline{1,n})$ имеет единственное решение, если матрица $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ такова, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1$.

Указание: воспользоваться неравенством Коши-Буняковского (то же самое, что и неравенство Гельдера для случая $p = q = 2$).

26. Начиная с какого приближения x_n точность приближенного решения уравнения $3x-\cos x+\sin x+\operatorname{arctg} x=0$ не превосходит 0,01?

27. Начиная с какого приближения x_n точность приближенного решения уравнения $2x-\cos x=0$ не превосходит 0,01?

28. Пусть f – дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция, причем $0\le f(x)\le 1$, $0\le f'(x)\le \frac{1}{2}$. Будет ли уравнение $f(x)-x=0$ иметь решение?

29. Пусть $k(x,t,z)$ – непрерывная функция своих аргументов при $a\le x\le b$, $a\le t\le b$ и $|z|\le c$, причем в этой области $|k(x,t,z_1)-k(x,t,z_2)|\le \mu|z_1-z_2|$ ($\mu=\text{const}$) и $|k(x,t,z)|\le d$ ($d=\text{const}$). Доказать, что при условиях $|\lambda|d(b-a)<c$ и $|\lambda|\mu(b-a)<1$ нелинейное интегральное уравнение $\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b k(x,t,\varphi(t))dt$ имеет единственное решение $\varphi(t)\in C[a,b]$ такое, что $|\varphi(t)|\le c$.

30. При каких λ применим принцип сжимающих отображений для решения уравнения Фредгольма $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 t^2 s x(s)ds+t$ в пространстве $C[0,1]$?

31. При каких λ применим принцип сжимающих отображений для решения уравнения Фредгольма $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 \cos\big(\pi(t-s)\big)x(s)ds+1$ в пространстве $C[0,1]$?

32. Используя принцип сжимающих отображений найти в пространстве $C[0,1]$ решение интегрального уравнения $x(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds+1$.

33. Найти условие на $K(\tau,t)$, достаточное для того, чтобы отображение $Af(t)=\int\limits_0^e K(\tau,t)f(\tau)d\tau$ было сжимающим в пространстве $C[0,e]$.

34. Найти условие на $K(\tau,t)$, достаточное для того, чтобы отображение $Af(t)=\int\limits_0^1 K(\tau,t)f(\tau)d\tau$ было сжимающим в пространстве $C[0,1]$.

35. Используя принцип сжимающих отображений найти в пространстве $C[0,1]$ решение интегрального уравнения $x(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)ds+1$.

36. Показать, что отображение $A:C[0,1]\to C[0,1]$ такое, что $Ax(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)d\tau+1$ является сжимающим и найти его неподвижную точку $x^*(t)$.

37. Отображение $A:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ задано равенством $Ax=\sqrt{1+x^2}$. Доказать, что $|Ax-Ay|<|x-y|$, но A не имеет неподвижной точки.

38. Отображение f переводит каждую точку x полупрямой $(1,+\infty)$ в $x+\dfrac{1}{x}$. Является ли оно сжимающим? Имеет ли оно неподвижную точку?

39. Является ли сжимающим отображение $f:[a,b]\to[a,b]$, если f дифференцируема на $[a,b]$ и $|f'(t)|<\dfrac{1}{2}$ для любого t из отрезка $[a,b]$?

40. Пусть $A: x=(\xi_1,\xi_2,...)\to y=(1,\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,...)$ – отображение пространства l_∞, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$ – фиксированная последовательность, для которой $\omega=\sup\limits_k|\alpha_k|<+\infty$. Доказать, что A является сжимающим отображением тогда и только тогда, когда $\omega<1$.

41. Показать, что в принципе сжимающих отображений условие $\rho(Ax,Ay)\le q\rho(x,y)$ ($q<1$) нельзя заменить более слабым: $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$.

42. Пусть $f\in C[a,b]$. Показать, что уравнение $x+\dfrac{1}{2}\sin x+f(t)=0$ имеет в пространстве $C[a,b]$ единственное непрерывное решение $x^*=x^*(t)$.

Указание: для каждого фиксированного $t\in[a,b]$ рассмотреть отображение $h_t(x)=-\dfrac{1}{2}\sin x-f(t)$, переводящее некоторый отрезок в себя, и показать, что оно является сжимающим. Показать, что $\left|x^*(t_1)-x^*(t_2)\right|\le 2\left|f(t_1)-f(t_2)\right|$.

43. Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений $x_i=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i$ ($i=1,2,...$). Проверить, что при $\sup\limits_i\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_{im}|=\alpha<1$ и $\sup\limits_i|a_i|<+\infty$ она имеет единственное решение $x^*=(x_1^*,x_2^*,...)$ такое, что $\sup\limits_i|x_i^*|<+\infty$.

Указание: рассмотреть в пространстве l_∞ отображение $Ax=y=(y_i)_{i=1}^{\infty}$, где $y_i=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i$ ($i=1,2,...$).

44. Рассмотрим систему уравнений $\xi_i=\lambda\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k+b_i$ ($i=1,2,...$), в которой $(b_1,b_2,...)\in l_\infty$. Доказать, что эта система имеет единственное решение в пространстве l_∞, если $\sup\limits_i\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|=c<+\infty$ и $|\lambda|c<1$.

45. Рассмотрим систему уравнений $\xi_i=\lambda\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k+b_i$ ($i=1,2,...$), в которой $(b_1,b_2,...)\in l_2$. Доказать, что эта система имеет единственное решение в пространстве l_2, если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^2=c<+\infty$ и $|\lambda|c<1$.

Указание: воспользоваться неравенством Коши-Буняковского для рядов.

46. Рассмотрим уравнение $2te^t = 1$, $t \in \mathbb{R}$. Доказать, что это уравнение имеет единственное решение. Привести его к виду, удобному для составления итераций. Определить число итераций, необходимых для того, чтобы точность приближенного решения уравнения составляла 0,01.

47. Доказать, что при $0 \le a \le 1$ итерации $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n^{\ 2} - a\right)$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходятся к $\sqrt{a}$.

48. Преобразовать систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ таким образом, чтобы ее можно было решать итерационным методом. Исследовать характер приближения итераций к точному решению.

49. Преобразовать систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ таким образом, чтобы ее можно было решать итерационным методом. Исследовать характер приближения итераций к точному решению.

50. Пусть $F(x,y)$ – функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка в окрестности точки (0,0) и такая, что $F(0,0) = 0$, $F_y{}'(0,0) \ne 0$. С помощью принципа сжимающих отображений доказать, что при всех достаточно малых $|x|$ уравнение $F(x,y) = 0$ имеет единственное решение $y = f(x)$ такое, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ и $f(0) = 0$.

Указание: рассмотреть семейство отображений $g_x(y) = y - \dfrac{F(x,y)}{F_y'(0,0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *зависящих от* x, *как от параметра. Используя определение непрерывности функции* $F_y'(x,y)$ *в точке* $(0,0)$, *найти такое* $\sigma > 0$, *что при каждом фиксированном* x $|x| < \sigma$ *и при* y_1, y_2: $|y_1| < \sigma, |y_2| < \sigma$ *выполняется неравенство из определения сжимающего отображения с* $q = \dfrac{1}{2}$. *Наконец, показать, что для всякого* $0 < \varepsilon < \sigma$ *найдется* $\delta \in (0,\sigma)$ *такое, что* $\forall x$ $|x| < \delta$ $\forall y$: $|y| \le \varepsilon$ $|g_x(y)| \le \varepsilon$ *(подобрать нужное* $\delta \in (0,\sigma)$ *так, чтобы выполнялось условие* $|g_x(0)| \le \dfrac{1}{2}\varepsilon$, *используя непрерывность функции* $F(x,0)$ *и условие* $F(0,0) = 0$ *).*

51. Доказать, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция и $0 < c < f'(x) < d < +\infty$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение.

Указание: рассмотреть отображение $A : x \to x - \dfrac{1}{d} f(x)$.

52. Доказать, что если отображение A имеет неподвижную точку, то эта же точка будет неподвижной для отображения A^n $(n = 1,2,3,...)$.

53. Показать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ уравнения $\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt = \varphi(x)$ имеют в пространстве $C[0,\alpha]$ (α – параметр) только тривиальные решения.

Указание: рассмотреть отображение $A: C[0,\alpha] \to C[0,\alpha]$*, действующее по формуле* $A\varphi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$. *Показать, что* $A^n\varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt$. *Получить условие на параметр* α*, при котором отображение* A^n *является сжимающим. Затем воспользоваться примером 6.*

54. Пусть функция f определена и непрерывна в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$, содержащей точку (x_0, y_0) и удовлетворяет в G условию Липшица по y: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le M|y_1 - y_2|$. Доказать, что на множестве $\{x: |x - x_0| \le d\}$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши $y'(x) = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Указание: использовать интегральное представление задачи Коши.

55. Проверить по определению равномерную непрерывность отображения

$$F: C[-1,1] \to L_1[-1,1],\ F(x(t)) = (2t-5)x(t) - 3\int\limits_{-1}^{1} 2^{t-s}\sin x(s)ds.$$

Указание: представить отображение в виде суммы двух и показать равномерную непрерывность каждого слагаемого.

56. Доказать, что непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

Указание: показать, что отображение $g(x) = f(x) - x$*, где* $f:[a,b] \to [a,b]$ *меняет знак на отрезке* $[a,b]$.

57. Доказать, что бесконечная система линейных уравнений ($m = 1,2,\ldots$) $23 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{5^{k+m}} - \frac{2}{m} = \xi_m$ имеет единственное решение в пространстве l_2.

58. Доказать, что уравнение $x(t) = t^2 + \int\limits_0^3 \sin\left(s + \frac{t}{10}x(s)\right)ds$ имеет единственное непрерывное решение на отрезке $[0,3]$.

59. Является ли сжимающим отображение $A(x(t)) = \int\limits_0^1 e^{-t|x(s)|}ds$ в пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$?

Указание: в $C[0,1]$ *не является. Рассмотреть функции* $x_n(t) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $y(t) = 0$ *и проверить, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho(A(x_n), A(y))}{\rho(x_n, y)} \ge 1$. *Можно при этом учесть, что*

$\rho(A(x_n),A(y)) \ge |A(x_n(1)) - A(y(1))|$. *В* $L_2[0,1]$ *– является (применить теорему Лагранжа:* $e^{-tu_1} - e^{-tu_2} = -te^{-t\xi}(u_1 - u_2)$ *).*

60. Является ли сжимающим отображение $A(x(t)) = \int\limits_0^2 t \sin x(s) ds$ в пространстве $C[0,2]$?

Указание: не является.

61. Решить в пространстве $C[0,1]$ уравнение $x(t) = \lambda \int\limits_0^t x(s) ds + t^2, \lambda \ne 0$.

62. Доказать существование и единственность решения бесконечной системы уравнений $\xi_n + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(\operatorname{arctg}\xi_m + 1)}{m^5 + \sqrt[4]{n} + 10} = 1$ на единичном шаре в пространстве l_∞.

63. Доказать, что уравнение $f(x) + \int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{f^2(t) + \ln(1 + x + t) + 2} = \ln(1 + x)$ имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

64. Доказать, что уравнение $3x(t) + t = \int\limits_0^t \operatorname{arctg} x(s) ds$ имеет в пространстве $C[0,1]$ единственное решение.

65. Пусть $a > 0$, $x_1 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{a}{2x_{n-1}}$, $n \ge 2$. Найти предел последовательности x_n.

Указание: рассмотреть в полном пространстве $X = \left[\sqrt{a}, +\infty\right)$ *отображение* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$ *и показать, что оно сжимающее.*

66. Доказать, что уравнение $x(t) = t + \varepsilon x(t^k)$, где $\varepsilon \in (0,1)$, $k > 1$ имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Линейные пространства

Определение: пусть E – множество элементов некоторой природы. Оно называется линейным (векторным) пространством, если удовлетворяет следующим свойствам:

I. E – абелева группа относительно групповой операции сложения, т.е. $\forall x, y \in E$ определена сумма $x + y \in E$, причем операция сложения удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $x + y = y + x$ – коммутативность;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ – ассоциативность;
3. существует единственный элемент $0 \in E$ такой, что $x + 0 = 0 + x = x$;
4. $\forall x \in E$ существует единственный элемент $(-x) \in E$ такой, что $x + (-x) = 0$.

II. Определено умножение элементов $x, y, ... \in E$ на вещественные (комплексные) числа $\lambda, \mu, ...$, причем $\lambda x \in E$ и выполнены аксиомы:

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ – ассоциативность;
2. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ и $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ – дистрибутивность;
3. существует единственный элемент $1 \in E$ такой, что $1 \cdot x = x$.

Замечание: элемент 0 называется нулевым элементом или нулем множества E, элемент $(-x)$ называется противоположным элементу x, элемент 1 называется единичным элементом или единицей множества E.

Определение: два линейных пространства E и E' называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее алгебраические операции, т.е., если $x, y \in E$, $x', y' \in E'$ и если $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$ и $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.

Определение: элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства E называются линейно независимыми, если из равенства $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Если хотя бы одно из чисел λ_i $(i = \overline{1, n})$ не равно нулю, но при этом $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, то элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются линейно зависимыми.

Замечание: пусть, например, $\lambda_n \neq 0$, тогда

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - ... - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1},$$

т.е. в случае линейной зависимости хотя бы один из элементов представляет собой линейную комбинацию остальных.

Определение: бесконечная система элементов $x_1, x_2, ...$ линейного пространства E называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение: пусть E – линейное пространство, $L \subset E$ – непустое подмножество. L называется линейным многообразием, если из условия $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ следует, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \in L$.

Определение: линейной оболочкой конечной или бесконечной системы элементов $x_1, x_2, \ldots$ линейного пространства E называется множество всевозможных линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ при разных n.

Определение: если в линейном многообразии L существует n линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а любые $n+1$ элементов из L уже линейно зависимы, то число n называется числом измерений L, а сама совокупность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется базисом в L. Само многообразие L при этом называется конечномерным.

Определение: если в линейном пространстве E (линейном многообразии L) для любого числа n существует n линейно независимых элементов, то пространство E (линейное многообразие L) называется бесконечномерным.

Определение: пусть E – линейное пространство, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ – принадлежащие ему линейные многообразия. Если $\forall x \in E$ можно единственным образом представить в виде $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_i \in L_i$ ($i = \overline{1,n}$), то E называется прямой суммой многообразий и обозначается $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n = \sum_{k=1}^{n} \oplus L_k$.

Теорема (о разложении в прямую сумму): пусть E – линейное пространство, $L_1, L_2 \in E$ – линейные многообразия. Тогда, если $E = L_1 \oplus L_2$, то $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$. Обратно: если $\forall x \in E$ может быть представлен в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$, то $E = L_1 \oplus L_2$.

Доказательство: из условия $E = L_1 \oplus L_2$ и определения прямой суммы следует, что $\forall x \in E$ можно единственным способом представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Пусть $y \in L_1 \bigcap L_2$, тогда $y \in L_1$ и $y \in L_2$, значит, в силу линейности многообразий L_1 и L_2, $x_1 - y \in L_1$, $x_2 + y \in L_2$. Далее, очевидно, что $x = (x_1 - y) + (x_2 + y)$, т.е. элемент x оказался разложен двумя способами. Поскольку разложение должно быть единственным, то $x_1 = x_1 - y$ и $x_2 = x_2 + y$, откуда $y = 0$.

Обратно: пусть $\forall x \in E$ $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$. Осталось установить единственность такого разложения. Допустим, что это не так, т.е. существует еще одно разложение $x = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, где $\tilde{x}_1 \in L_1$, $\tilde{x}_2 \in L_2$, причем $x_1 \neq \tilde{x}_1$ и $x_2 \neq \tilde{x}_2$. Тогда ясно, что $x_1 + x_2 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, откуда $x_1 - \tilde{x}_1 = x_2 - \tilde{x}_2$. В силу линейности многообразий L_1 и L_2, $x_1 - \tilde{x}_1 \in L_1$ и $x_2 - \tilde{x}_2 \in L_2$, значит, $x_1 - \tilde{x}_1 \in L_1 \bigcap L_2$ и $x_2 - \tilde{x}_2 \in L_1 \bigcap L_2$. Поскольку $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$, то $x_1 - \tilde{x}_1 = 0$ и $x_2 - \tilde{x}_2 = 0$, т.е. $x_1 = \tilde{x}_1$ и $x_2 = \tilde{x}_2$. Противоречие.

Теорема доказана.

Определение: пусть E – линейное пространство, элемент $x \in E$, $x \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Множество элементов вида $y = tx$ называется прямой, определяемой данным элементом x.

Определение: пусть E – линейное пространство, точки $x, y \in E$. Отрезком, соединяющим точки x и y, называется множество точек вида $tx+(1-t)y$, где $t \in [0,1]$. Отрезок без граничных точек x и y называется открытым отрезком.

Определение: пусть E – линейное пространство, множество $M \subset E$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.

Определение: пусть E – линейное пространство, $M \subset E$ – его подмножество. Ядром $J(M)$ множества M называется совокупность таких его точек x, что $\forall y \in E \ \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$: из условия $0 < |\mu| < \varepsilon$ следует, что $x + \mu y \in M$.

Определение: выпуклое множество, ядро которого непусто, называется выпуклым телом.

Определение: выпуклой оболочкой множества M называется минимальное выпуклое множество, содержащее M.

Замечание: таким минимальным выпуклым множеством является пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M (по крайней мере, одно выпуклое множество, содержащее M, существует – это все пространство E).

Определение: пусть E – линейное пространство, $M \subset E$ – его подмножество. Если $x \in M$, a – фиксированный элемент пространства E, то множество элементов вида $x+a$ называется сдвигом множества M и обозначается $M+a$.

Теорема (о выпуклости сдвига): сдвиг выпуклого множества тоже является выпуклым множеством.

Доказательство: пусть E – линейное пространство, $M \subset E$ – выпуклое множество, $a \in E$, $M+a$ – сдвиг множества M. Надо проверить, что $\forall x, y \in M+a$ и для $t \in [0,1]$ $tx+(1-t)y \in M+a$. Т.к. $x \in M+a$, то по определению сдвига $x = x_1 + a$, где $x_1 \in M$. Аналогично, $y = y_1 + a$, где $y_1 \in M$. Поскольку M – выпукло, то при $t \in [0,1]$ $tx_1 + (1-t)y_1 \in M$. Тогда $tx+(1-t)y = t(x_1+a)+(1-t)(y_1+a) = tx_1+(1-t)y_1+a \in M+a$.

Теорема доказана.

Определение: пусть E – линейное пространство. Множество $M \in E$ называется уравновешенным, если $\forall x \in M$ и для всякого числа α, такого, что $|\alpha| \le 1$ элемент $\alpha x \in M$.

Определение: множество в линейном пространстве называется абсолютно выпуклым, если оно выпукло и уравновешено.

Примеры решения задач

1. Доказать, что два вещественных или комплексных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Решение: пусть E_1 и E_2 – изоморфные линейные пространства, т.е. если $x_1, x_2 \in E_1$, $y_1, y_2 \in E_2$ и $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, то $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$ и $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1$. Это означает, что существует отображение $\varphi: E_1 \to E_2$, которое является взаимно однозначным, и, при этом, $\varphi(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2=\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)$, если $\varphi(x_1)=y_1$, $\varphi(x_2)=y_2$, т.е. φ является линейным отображением.

Предположим, что E_1 имеет размерность n, т.е. его базис состоит из n векторов $e_1,e_2,...,e_n$, тогда, если $x\in E_1$, то $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n$. Значит $\varphi(x)=\alpha_1\varphi(e_1)+\alpha_2\varphi(e_2)+...+\alpha_n\varphi(e_n)=y\in E_2$. В силу взаимной однозначности отображения φ, каждому $x\in E_1$ ставится в соответствие ровно один элемент $y\in E_2$, являющийся линейной комбинацией векторов $\varphi(e_1),\varphi(e_2),...,\varphi(e_n)$, которых всего n штук, поэтому размерность пространства E_2 не может быть больше, чем n. Покажем, что и меньше n она быть не может.

От противного: допустим, что среди векторов $\varphi(e_1),\varphi(e_2),...,\varphi(e_n)$ есть линейно зависимые, т.е. хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных: $\varphi(e_n)=\mu_1\varphi(e_1)+\mu_2\varphi(e_2)+...+\mu_{n-1}\varphi(e_{n-1})=\varphi(\mu_1 e_1+\mu_2 e_2+...+\mu_{n-1}e_{n-1})$. Тогда $\varphi(e_n)-\varphi(\mu_1 e_1+\mu_2 e_2+...+\mu_{n-1}e_{n-1})=0$, откуда $\varphi(e_n-\mu_1 e_1-\mu_2 e_2-...-\mu_{n-1}e_{n-1})=0$. В силу изоморфности отображения φ отсюда следует, что $e_n-\mu_1 e_1-\mu_2 e_2-...-\mu_{n-1}e_{n-1}=0$ (см. задачу 2), т.е. $e_n=\mu_1 e_1+\mu_2 e_2+...+\mu_{n-1}e_{n-1}$, а это противоречит линейной независимости векторов $e_1,e_2,...,e_n$. Итак, меньше, чем n размерность пространства E_2 быть не может, значит, она равна n.

Обратно: пусть пространства E_1 и E_2 имеют одинаковую размерность n. Покажем, что они оба изоморфны пространству $\mathbb{R}^n$ (либо, аналогично, $\mathbb{C}^n$).

Пусть $e_1,e_2,...,e_n$ – базис в E_1, т.е., если $x\in E_1$, то $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n$ и вектору $x\in E_1$ поставлен в соответствие набор $(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$. Взаимная однозначность такого представления очевидна (см. задачу 4). Сохранение линейных операций при таком соответствии также очевидно, т.е. построен изоморфизм $\varphi_1:E_1\to\mathbb{R}^n$. Аналогично строится изоморфизм $\varphi_2:E_2\to\mathbb{R}^n$. Но тогда отображение $\varphi_2^{-1}(\varphi_1)$ осуществляет изоморфизм между E_1 и E_2 (что также проверяется очевидным образом).

2. Показать, что в пространстве $C[0,\pi]$ функции 1, $\cos t$, $\cos^2 t$ линейно независимы.

Решение: надо показать, что равенство $c_1\cdot 1+c_2\cos t+c_3\cos^2 t=0$ возможно $\forall t\in[0,\pi]$ тогда и только тогда, когда $c_1=c_2=c_3=0$. Для этого надо показать, что какие бы три произвольные значения t мы последовательно ни подставляли в равенство $c_1\cdot 1+c_2\cos t+c_3\cos^2 t=0$, получающаяся система линейных уравнений будет иметь только тривиальное решение. Критерием наличия у однородной системы линейных уравнений только тривиального решения является неравенство нулю ее определителя. В данном случае определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix}1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1\\ 1 & \cos t_2 & \cos^2 t_2\\ 1 & \cos t_3 & \cos^2 t_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1\\ 0 & \cos t_2-\cos t_1 & \cos^2 t_2-\cos^2 t_1\\ 0 & \cos t_3-\cos t_1 & \cos^2 t_3-\cos^2 t_1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\cos t_2-\cos t_1 & \cos^2 t_2-\cos^2 t_1\\ \cos t_3-\cos t_1 & \cos^2 t_3-\cos^2 t_1\end{vmatrix}=(\cos t_2-\cos t_1)(\cos^2 t_3-\cos^2 t_1)-$$
$$-(\cos^2 t_2-\cos^2 t_1)(\cos t_3-\cos t_1)=$$
$$=(\cos t_2-\cos t_1)(\cos t_3-\cos t_1)(\cos t_3+\cos t_1-\cos t_2-\cos t_1)=$$
$$=(\cos t_2-\cos t_1)(\cos t_3-\cos t_1)(\cos t_3-\cos t_2)\neq 0,$$

поскольку на отрезке $[0,\pi]$ функция $\cos t$ монотонно убывает и, значит, ни одна из разностей в скобках нулю не равна.

3. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество многочленов степени k?

Решение: обозначим это множество $M=\left\{x(t)\in C[0,1]: x(t)=\sum_{i=0}^{k}a_it^i,\, a_k\neq 0\right\}$.

Пусть $x(t),y(t)\in M$, т.е. $x(t)=\sum_{i=0}^{k}a_it^i, a_k\neq 0$ и $y(t)=\sum_{i=0}^{k}b_it^i, b_k\neq 0$, $\lambda\in[0,1]$. Надо выяснить, будет ли отрезок $\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)$ многочленом степени k. Имеем, $\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)=\lambda\sum_{i=0}^{k}a_it^i+(1-\lambda)\sum_{i=0}^{k}b_it^i=\sum_{i=0}^{k}(\lambda a_i+(1-\lambda)b_i)t^i$, поэтому отрезок $\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)$ также является многочленом.

Осталось определить, будет ли его степень обязательно равна k, т.е. что коэффициент $\lambda a_k+(1-\lambda)b_k\neq 0$. Ясно, что это верно не всегда, например, если взять $\lambda=\frac{1}{2}$ и $a_k=-b_k\neq 0$, то получим, что $\lambda a_k+(1-\lambda)b_k=0$, т.е. степень многочлена будет меньше, чем k. Итак, $\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)\notin M$, т.е. M – не выпуклое множество.

4. Показать, что эллипсоид $M=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n^2\leq 1\right\}$ – есть выпуклое в l_2 множество, но не выпуклое тело.

Решение: возьмем $x,y\in M$, т.е. $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2:\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n^2\leq 1$ и $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_2:\sum_{n=1}^{\infty}n^2\eta_n^2\leq 1$.

Пусть $z=tx+(1-t)y=\left(t\xi_1+(1-t)\eta_1, t\xi_2+(1-t)\eta_2,....\right)$ при $t\in[0,1]$. Покажем, что $z\in M$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(t\xi_n+(1-t)\eta_n\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2t^2\xi_n{}^2+2n^2t\xi_n(1-t)\eta_n+n^2(1-t)^2\eta_n{}^2\right)=$$

$$=t^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n{}^2+2t(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n\eta_n+(1-t)^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2\eta_n{}^2\leq t^2+2t(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n\eta_n+(1-t)^2.$$

В силу неравенства Гельдера при $p=q=2$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n\eta_n \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2|\xi_n||\eta_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|n\xi_n|\cdot|n\eta_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|n\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|n\eta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 1.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(t\xi_n+(1-t)\eta_n\right)^2 \le t^2+2t(1-t)+(1-t)^2=1$. Итак, эллипсоид – выпуклое множество. Покажем, что он – не выпуклое тело, т.е. его ядро – пусто. Напомним, что ядром множества M называется множество

$$J(M)=\left\{x\in M : \forall y\in l_2\ \exists\varepsilon=\varepsilon(y)>0,\ 0<|\mu|<\varepsilon,\ x+\mu y\in M\right\}.$$

Надо показать, что $J(M)=\varnothing$. От противного, допустим, что $\exists x\in J(M)$, т.е. $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n^2 \le 1$. Заметим, что, поскольку слагаемые этого ряда неотрицательны и в сумме не превосходят 1, то каждое из них тем более не должно превосходить 1, т.е. $\forall n\ \ n^2\xi_n^2\le 1$, откуда $|\xi_n|\le \dfrac{1}{n}$.

Возьмем $y=\left(1,\dfrac{1}{2^{\frac{2}{3}}},\dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}}},...\right)\in l_2$. По определению ядра, из $0<|\mu|<\varepsilon$ следует, что $x+\mu y\in M$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\xi_n+\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2\le 1$, откуда $\forall n\ \ n^2\left(\xi_n+\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2\le 1$ или $\left|\xi_n+\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right|\le\dfrac{1}{n}$. Т.к. $\left|\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}\right|=\left|\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}+\xi_n-\xi_n\right|\le\left|\dfrac{\mu}{n^{\frac{2}{3}}}+\xi_n\right|+|\xi_n|\le\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{n}$, то $|\mu|\le\dfrac{2n^{\frac{2}{3}}}{n}=\dfrac{2}{n^{\frac{1}{3}}}$ $\forall n$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $|\mu|\le 0$, откуда следует, что $|\mu|=0$. Это противоречит условию $0<|\mu|<\varepsilon$. Значит, ядро множества M – пусто.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что всякое линейное пространство E является выпуклым множеством.

2. Доказать, что для любого линейного отображения $\varphi: E_1\to E_2$ справедливо равенство $\varphi(0)=0$.

Указание: $0=x-x$.

3. Показать, что все основные метрические пространства, введенные ранее (l_p, l_∞, c, c_0, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$), являются линейными.

4. Доказать, что в конечномерном линейном пространстве представление любого вектора в виде линейной комбинации базисных векторов единственно. Провести обоснование всех выводов, сделанных во второй части примера 1.

5. Показать, что в пространстве $C[0,\pi]$ функции 1, $\cos 2t$, $\cos^2 t$ линейно зависимы.

6. Найти значение α, при котором векторы $(1,2,3)$, $(1,1,0)$ и $(\alpha,1,1)$ линейно зависимы.

7. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество многочленов степени $\le k$?

8. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^1 |x(t)|dt \le 1$?

9. Доказать, что если M – выпуклое множество, то его ядро $J(M)$ также выпукло.

10. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, для которых $\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le 1$?

11. Доказать, что параллелепипед $\Pi = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_n| < \dfrac{1}{2^n}, \forall n \right\}$ в l_2 есть выпуклое и уравновешенное множество, но не выпуклое тело.

12. Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств – выпуклое множество.

13. Пусть $A \subset E$ – выпуклое множество, λ – число. Доказать, что множество $\lambda A = \{ y \in E : y = \lambda x, x \in A \}$ является выпуклым.

14. Выпуклой оболочкой множества M в линейном пространстве E называется множество N всех выпуклых комбинаций элементов из M, т.е. множество всех сумм $t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n$, где $x_i \in M$, $t_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^n t_i = 1$, а n произвольно. Доказать, что выпуклая оболочка N является выпуклым множеством.

15. Доказать, что если множества M и N линейного пространства E выпуклы, то множество $M \pm N = \{ z \in E : z = x \pm y, x \in M, y \in N \}$ также выпукло.

16. Доказать, что единичный шар $S = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \le 1 \right\}$ в l_2 есть выпуклое и уравновешенное множество, а также выпуклое тело.

17. Доказать, что эллипсоид (пример 4) – уравновешенное множество.

18. Доказать, что в пространстве $C[a,b]$ система $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$ линейно независима для любого конечного $n \in \mathbb{N}$.

Указание: предположить противное и воспользоваться тем, что любой многочлен степени n имеет не более n действительных корней.

19. Доказать, что система функций $\{ e^{ax} : \ a \in \mathbb{R} \}$ несчетна и линейно независима. Доказать, используя это утверждение, что пространство $C[0,1]$ бесконечномерно.

Указание: использовать свойства определителя Вронского.

20. Будет ли выпуклым множество $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{\frac{1}{3}} \le 1 \right\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$?

Указание: подобрать точки $x, y \in M$ *и* $t \in [0,1]$ *так, что* $tx + (1-t)y \notin M$.

21. В пространстве l_1 найти всюду плотное выпуклое множество, не совпадающее с l_1.

22. Будет ли множество $M = \{ x \in C[a,b] : x(t) \le x_0(t) \}$, где $x_0(t) \in C[a,b]$ – фиксированная функция, выпуклым в пространстве $C[a,b]$.

23. Доказать, что треугольник в трехмерном евклидовом пространстве является выпуклым множеством и не является выпуклым телом.

2.2. Нормированные пространства

Определение: пусть E – линейное пространство, $x \in E$. Нормой элемента x называется функция $\|x\|: E \to \mathbb{R}$ со свойствами (аксиомами нормы):

1. $\|x\| \ge 0$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, где λ – действительное (комплексное) число;
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ – аксиома треугольника.

Линейное пространство E, на котором введена норма, называется линейным нормированным пространством.

Замечание: всякое нормированное пространство становится метрическим, если в нем ввести расстояние по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Справедливость аксиом метрического пространства следует из аксиом нормы (см. задачу 1). Таким образом, нормированные пространства обладают всеми свойствами, установленными ранее для метрических пространств. Однако не каждое метрическое пространство может быть нормированным с нормой, согласованной с метрикой.

Определение: линейное нормированное пространство называется банаховым, если оно полно (относительно сходимости по метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$, определяемой его нормой).

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \in E$ – последовательность. Эта последовательность называется сходящейся в пространстве E (сходящейся по норме пространства E) к элементу $x \in E$, если $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. При этом обозначают $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Теорема (о норме разности): пусть E – линейное пространство, $x, y \in E$. Тогда $\|x - y\| \ge \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$.

Доказательство: очевидно $\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. Аналогично $\|y\| = \|y - x + x\| \le \|y - x\| + \|x\|$, откуда $\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|$. Учитывая, что $\|x - y\| = \|y - x\|$, получаем требуемое.

Теорема доказана.

Теорема (простейшие свойства сходимости в нормированных пространствах): пусть E – линейное нормированное пространство, $\{x_n\}, \{y_n\}, x, y \in E$, $\{\lambda_n\}, \lambda$ – действительные (комплексные) числа, тогда:

1. если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, то $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x\|$;
2. если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y$, то $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} x + y$;
3. если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$, то $\lambda_n x_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda x$;
4. если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то $\lambda_n x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$;

5. если $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $\lambda_n x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство: 1. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, т.е. $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \ \ \|x_n - x\| < \varepsilon$. По теореме о норме разности $\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \le \|x_n - x\| < \varepsilon$, откуда, по определению предела числовой последовательности, $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x\|$.

2. Поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_1 \ \ \|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_2 \ \ \|y_n - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \varepsilon$, значит, $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} x + y$.

3. $0 \le \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \le \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|$. Поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, то $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и, аналогично, поскольку $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$, то $|\lambda_n - \lambda| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Кроме того, в силу необходимого условия существования предела числовой последовательности $\{\lambda_n\}$ – ограничена. Переходя в неравенстве к пределу при $n \to \infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, откуда $\lambda_n x_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda x$.

4, 5. См. задачу 5.

Теорема доказана.

Теорема (об изоморфности конечномерных пространств): все конечномерные действительные линейные нормированные пространства данного числа измерений n изоморфны евклидову n-мерному пространству $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, изоморфны друг другу. Этот изоморфизм взаимно непрерывен.

Доказательство: пусть E – n-мерное линейное нормированное пространство и $x_1, x_2, ..., x_n$ – его базис, тогда $\forall x \in E$: $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_n x_n$. Поставим элементу $x \in E$ в соответствие элемент $\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. найдем отображение $\overline{x} = \varphi(x)$. Ясно, что такое соответствие взаимно однозначно (по определению базиса конечномерного пространства). Кроме того, при таком соответствии, очевидно, сохраняются алгебраические операции, т.е. оно изоморфно. Осталось показать, что введенное соответствие взаимно непрерывно, т.е., что из непрерывности φ по норме пространства $\mathbb{R}^n$ следует непрерывность $x = \varphi^{-1}(\overline{x})$ по норме пространства E и наоборот.

Заметим, что $\forall x \in E$:

$$\|x\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right\|_E \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|x_i\| \le \left| \begin{array}{l} \text{неравенство} \\ \text{Гельдера при} \\ p = q = 2 \end{array} \right| \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\beta} = \beta \|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^n},$$

откуда, очевидно, что $\|x - y\|_E \le \beta \|\overline{x} - \overline{y}\|_{\mathbb{R}^n}$ при $x, y \in E$, $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ и β, не зависящем от x и y. Таким образом, из непрерывности по норме пространства $\mathbb{R}^n$

следует непрерывность по норме пространства E. Осталось получить противоположное неравенство. Для этого рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ единичную сферу $S=\left\{\overline{x}\in\mathbb{R}^n:\overline{x}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1\right\}$ и на ней рассмотрим функцию $f(\overline{x})=f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\|x\|_E=\|\xi_1x_1+\xi_2x_2+...+\xi_nx_n\|_E$. Поскольку на S все ξ_i не могут одновременно обратиться в 0, а вектора $x_1,x_2,...,x_n$ линейно независимы, то при $\overline{x}\in S$ $f(\overline{x})>0$. Далее, $\left|f(\overline{x})-f(\overline{y})\right|=\left|\|x\|_E-\|y\|_E\right|\le\|x-y\|_E\le\beta\|\overline{x}-\overline{y}\|$, значит f равномерно непрерывна на S, т.е. тем более непрерывна. Поскольку $S\in\mathbb{R}^n$ – замкнутое и ограниченное множество, то это компакт и по теореме Вейерштрасса f достигает на S своего наименьшего значения $\alpha>0$. Итак, $\forall\overline{x}\in S$ $f(\overline{x})=\|x\|_E\ge\alpha$. Берем теперь $\forall\overline{x}\in\mathbb{R}^n$, тогда

$$f(\overline{x})=\|\xi_1x_1+\xi_2x_2+...+\xi_nx_n\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\left\|\frac{\xi_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}x_1+\frac{\xi_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}x_2+...+\frac{\xi_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}x_n\right\|_E=$$

$$=\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}_{\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^n}}\cdot\|\eta_1x_1+\eta_2x_2+...+\eta_nx_n\|_E=\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^n}\cdot f(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n).$$

Поскольку $\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}},\frac{\xi_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}},...,\frac{\xi_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}\right)=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\in S$, то $f(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\ge\alpha$.

Таким образом, $f(\overline{x})\ge\alpha\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}_n}$, откуда $f(\overline{x}-\overline{y})=\|x-y\|_E\ge\alpha\|\overline{x}-\overline{y}\|_{\mathbb{R}_n}$.

Теорема доказана.

Замечание: если пространство E комплексное, то оно изоморфно n-мерному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^{2n}$). Доказательство – аналогичное.

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, на котором заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Норма $\|x\|_2$ называется подчиненной норме $\|x\|_1$, если $\forall x\in E$ $\exists c>0$: $\|x\|_2\le c\|x\|_1$.

Теорема (о подчиненных нормах): пусть E – линейное нормированное пространство, на котором заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Пусть последовательность $\{x_n\}\in E$ сходится по норме $\|x\|_1$. Тогда, если $\|x\|_2$ подчинена $\|x\|_1$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится и по норме $\|x\|_2$, причем к тому же пределу.

Доказательство: пусть $\{x_n\}\in E$ сходится к $x\in E$ по норме $\|x\|_1$, т.е. $\|x_n-x\|_1\to 0$. По определению подчиненных норм $\exists c>0$: $\|x\|_2\le c\|x\|_1$, откуда

$0 \le \|x_n - x\|_2 \le c\|x_n - x\|_1$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\|x_n - x\|_2 \to 0$, что и означает сходимость последовательности $\{x_n\}$ по норме $\|x\|_2$ к тому же самому пределу $x \in E$.

Теорема доказана.

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, на котором заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Эти нормы называются эквивалентными, если $\forall x \in E \ \exists c_1, c_2 > 0$: $c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$.

Замечание: если две нормы эквивалентны, то сходимость по любой из них влечет сходимость по другой (см. задачу 6).

Теорема (об эквивалентных нормах): пусть E – линейное нормированное пространство, на котором заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$, по отношению к каждой из которых пространство E – банахово. Если хотя бы одна из норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны.

Замечание: доказательство этой теоремы будет приведено в п. 3.1 раздела 3 второй части.

Примеры решения задач

1. Является ли нормой функция $\varphi(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $\varphi(x) = |\mathrm{arctg} x|$?

Решение: покажем, что свойство $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$ не выполнено. Действительно, если $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \dfrac{1}{3}$, то $|\mathrm{arctg}\lambda x| = \dfrac{\pi}{6}$. С другой стороны, $|\lambda||\mathrm{arctg} x| = \dfrac{\pi}{9}$. Тем самым, данная функция не является нормой.

2. Показать, что функция $\varphi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, не является нормой при $0 < p < 1$ и $n \ge 2$.

Решение: легко проверить, что первые три аксиомы нормы выполняются. Проверим аксиому треугольника, т.е., что $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$. Возьмем $x = \left(\dfrac{1}{2}, 0, ..., 0\right) \in \mathbb{R}^n$ и $y = \left(0, \dfrac{1}{2}, ..., 0\right) \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что $x \ne y$, тогда $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi(y) = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi(x) + \varphi(y) = 1$. С другой стороны, $x + y = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, ..., 0\right)$, тогда

$$\varphi(x+y) = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2^{\frac{p-1}{p}}} = 2^{\frac{1-p}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1} > 1,$$ поскольку $0 < p < 1$,

а значит, $\dfrac{1}{p} - 1 > 0$. Итак, аксиома треугольника не выполняется.

3. Являются ли нормами на множествах определения следующие функции:

а) $C[a,b] \ni x \to \max\limits_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)|$;

б) $C^{(1)}[a,b] \ni x \to |x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$;

в) $C^{(1)}[a,b] \ni x \to |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$?

Решение: а) Первая, третья и четвертая аксиомы нормы, очевидно, выполняются. Проверим вторую. Пусть $\|x\| = 0$, тогда $\max\limits_{a \le t \le \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0$, значит, $\forall t \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ $|x(t)| = 0$, откуда $x(t) = 0$ $\forall t \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$. Однако, это не означает, что $x(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$. Итак, вторая аксиома нормы не выполняется.

б) Выполнение первой, третьей и четвертой аксиом нормы очевидно. Проверим вторую. Пусть $x(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$, тогда $|x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)| = 0$. Обратно: пусть $|x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)| = 0$, тогда очевидно, что $|x(a)| = 0$ и $\max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)| = 0$. Следовательно, $x(a) = 0$ и $x'(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$. Значит, $x(t) = c = \text{const}$ $\forall t \in [a,b]$, а поскольку $x(a) = 0$, то $x(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$. Итак, все аксиомы нормы выполняются.

в) Выполнение первой, третьей и четвертой аксиом нормы очевидно. Проверим вторую. Пусть $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)| = 0$. Это означает, что $x(b) = x(a)$ и $x'(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$, откуда $x(t) = c = \text{const}$ $\forall t \in [a,b]$. Взяв $t = a$, получим, что $c = x(a)$. Значит, $x(t) = x(a) = x(b)$ $\forall t \in [a,b]$. При этом, как только $x(a) \ne 0$, так и $x(t) \ne 0$ $\forall t \in [a,b]$ и аксиома не выполняется.

4. Проверить, что нормы $\|x\|_1 = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$ не эквивалентны в пространстве $C[0,1]$.

Решение: если две нормы на одном и том же линейном нормированном пространстве эквивалентны, то из сходимости последовательности по одной из этих норм вытекает ее сходимость по другой норме. Рассмотрим последовательность $x_n(t) = t^n$. Она сходится поточечно к функции $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$ Ясно, что равномерно эта последовательность может сходиться только к той же самой функции.

Покажем, что сходимость по норме $\|x\|_1$ эквивалентна равномерной сходимости. Действительно, если $x_n \to x$ по норме $\|x\|_1$, то $\|x_n - x\|_1 \to 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\|x_n - x\|_1 = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, откуда $\forall t \in [0,1]$ $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, а это и есть определение равномерной сходимости. Все рассуждения с легкостью проводятся и в обратную сторону.

По теореме о непрерывности предельной функции, если $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ и все $x_n(t)$ непрерывны, то непрерывна и предельная функция $x(t)$. Поскольку $x(t)$ получилась разрывной, то она не может быть пределом по норме $\|x\|_1$.

Однако по норме $\|x\|_2$ данная последовательность сходится к нулю, т.к. $\|x_n - x\|_2 = \left(\int_0^1 |t^n - 0|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Здесь мы учли, что интеграл по интервалу $(0,1)$ равен интегралу по отрезку $[0,1]$, т.е. граничные точки отрезка интегрирования на значение интеграла не влияют.

5. Показать, что в неравенстве треугольника $\|x-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\|$ достигается равенство при условии, что точки x, y, z принадлежат одному отрезку, причем z лежит между x и y.

Решение: поскольку x и y – крайние точки отрезка, то уравнение отрезка имеет вид $tx + (1-t)y$, $t \in [0,1]$, причем значение $t = 0$ отвечает концу y, а значение $t = 1$ – концу x. Поскольку точка z принадлежит тому же отрезку, то $z = t_1 x + (1-t_1)y$, $t_1 \in (0,1)$. Тогда $x - z = x - t_1 x - (1-t_1)y = (1-t_1)(x-y)$, $z - y = = t_1 x + (1-t_1)y - y = t_1(x-y)$. Отсюда $\|x-z\| + \|z-y\| = (1-t_1)\|x-y\| + t_1\|x-y\| = \|x-y\|$.

6. Доказать, что, если в нормированном пространстве даны два шара $S[a,r]$ и $S[b,R]$, причем $S[a,r] \subset S[b,R]$, то $r \le R$ и при этом $\|a-b\| \le R - r$. Верно ли это для произвольного метрического пространства?

Решение: покажем, что в нормированном пространстве диаметр шара $S[a,r]$ равен $d(S[a,r]) = \sup\limits_{x,y \in S[a,r]} \|x-y\| = 2r$. Действительно, поскольку $\|x-y\| \le$ $\le \|x-a\| + \|a-y\| \le 2r$ при $x, y \in S[a,r]$, то $d(S[a,r]) \le 2r$. Если подберем точки $x, y \in S[a,r]$ так, что $\|x-y\| = 2r$, то требуемое будет доказано. Рассмотрим любой вектор $z \ne 0$ и выберем $x = \dfrac{z}{\|z\|} r + a$, $y = -\dfrac{z}{\|z\|} r + a$, тогда $\|x-a\| = \left\|\dfrac{z}{\|z\|} r\right\| = r$, $\|y-a\| = \left\|-\dfrac{z}{\|z\|} r\right\| = r$, а $\|x-y\| = \left\|\dfrac{z}{\|z\|} r + a - \left(-\dfrac{z}{\|z\|} r + a\right)\right\| = 2r$.

Пусть теперь $S[a,r] \subset S[b,R]$, тогда $\sup\limits_{x,y \in S[a,r]} \|x-y\| \le \sup\limits_{x,y \in S[b,R]} \|x-y\|$, откуда $2r \le 2R$, т.е. $r \le R$.

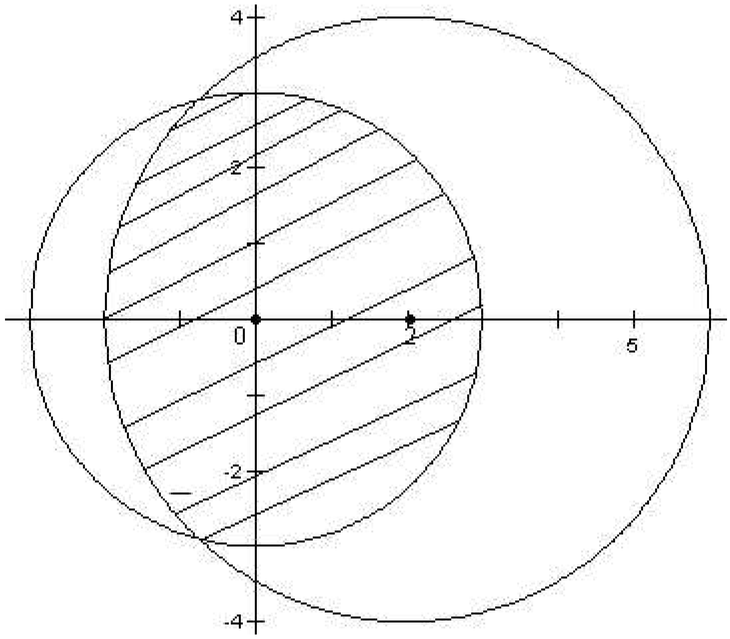
В произвольном метрическом пространстве равенство $d(S[a,r]) = 2r$ может не иметь места. Поэтому в произвольном метрическом пространстве из условия $S[a,r] \subset S[b,R]$ может следовать, что $r > R$. Приведем пример.

Пусть $X = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} \le 9\right\}$ – круг на плоскости с обычной евклидовой метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$, т.е. X – метрическое пространство. Однако, X не является нормированным, поскольку не является линейным пространством и, значит, аксиомы нормы в нем выполняться не могут. Для установления нелинейности пространства X возьмем две его точки $x=(3,0)$ и $y=(2,2)$ и заметим, что $x+y=(5,2)\notin X$.

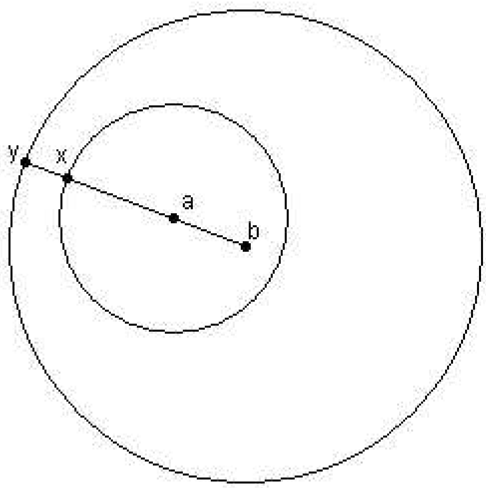
Пусть $S[b,R]=X$. В качестве второго шара возьмем

$$S[a,r]=S[b,R]\bigcap\left\{x=(\xi_1,\xi_2)\in X:(\xi_1-2)^2+\xi_2^{\,2}\le 16\right\}.$$

Ясно, что $S[a,r]\subset S[b,R]$, и при этом $r=4$, $R=3$. На рисунке заштрихованная область представляет собой шар $S[a,r]=\left\{x\in X:\rho(a,x)\le 4\right\}$.



Докажем, что из условия $S[a,r]\subset S[b,R]$ следует, что $\|a-b\|\le R-r$. Можно считать, что $a\ne b$ (в противном случае утверждение тривиально). Проведем через точки a и b луч $b+t(a-b)$, $t\ge 0$ (т.е. начало – в точке b).



Тогда он пересечет границу шара $S[b,R]$ в некоторой точке y (см. задачу 18), поэтому $\|y-b\|=R$. Поскольку точки a,b,y лежат на одной прямой, то, в силу примера 5, $\|y-b\|=\|y-a\|+\|a-b\|$.

Кроме того, луч пересекает границу шара $S[a,r]$ не более чем в двух точках (см. задачу 18), причем одна из точек пересечения x принадлежит отрезку с концами y и a (поскольку шары вложенные и $r\le R$), т.е. $\|x-a\|=r$, $\|y-a\|=\|y-x\|+\|x-a\|$. Тогда $R=\|y-x\|+r+\|a-b\|$, откуда получаем, что $\|a-b\|=R-r-\|y-x\|\le R-r$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что метрика $\rho(x,y)$, заданная на линейном нормированном пространстве E, порождена нормой $\|x-y\|$ тогда и только тогда, когда $\forall x,y,z\in E$ $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$ и $\forall x\in E$ $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ $\rho(\lambda x,0)=|\lambda|\rho(x,0)$.

2. Доказать, что, если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, то последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена.

3. Доказать, что в линейном нормированном пространстве всякая фундаментальная последовательность ограничена.

4. Доказать, что в линейном нормированном пространстве E открытый шар $S(a,r)=\{x\in E:\|x-a\|<r\}$ и замкнутый шар $S[a,r]=\{x\in E:\|x-a\|\le r\}$ являются выпуклыми множествами.

5. Доказать свойства 4 и 5 теоремы о простейших свойствах сходимости в нормированных пространствах.

6. Доказать, что если две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны, то сходимость по одной из них влечет сходимость по другой.

7. Является ли нормой функция $\varphi(x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=|\xi_1|+|\xi_2|$, где $x=(\xi_1,\xi_2)$? Если является, то что представляет собой единичный шар в $\mathbb{R}^2$ относительно введенной нормы?

8. Показать, что функция $\varphi(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\varphi(x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, где $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, является нормой при $p\ge 1$.

9. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$?

10. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|$?

11. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $\int\limits_a^b|x(t)|dt+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|$?

12. Проверить, что нормы $\|x\|_1=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$ и $\|x\|_2=\int\limits_a^b|x(t)|dt$ не эквивалентны в пространстве $C[a,b]$.

13. Можно ли в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $\left(\int\limits_0^1 p(t)|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$, где $p(t)>0$ на $[0,1]$ и $p(t)$ – непрерывна?

14. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $\max_{a\le t\le b}|x''(t)|+\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$?

15. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $|x(a)|+|x'(a)|+\max_{a\le t\le b}|x''(t)|$?

16. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ величину $|x(a)|+|x(b)|+\max_{a\le t\le b}|x''(t)|$?

17. Доказать эквивалентность в пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций следующих норм: $\|x\|_1=\max_{a\le t\le b}|x(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|$ и $\|x\|_2=|x(a)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|$.

Указание: использовать интегральное представление функции $x(t)$.

18. а) Найти явный вид точек x и y, о которых говорилось в примере 6. Рассмотреть также вариант, когда центр b не лежит внутри шара $S[a,r]$.

б) Решить задачу из примера 6 для случая открытых шаров.

Указание: б) при доказательстве свойства диаметров выбрать достаточно малое ε *и подобрать точки* $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in S[a,r]$ *так, что* $\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| = 2r-\frac{\varepsilon}{2}$.

19. Доказать, что в банаховом пространстве любая последовательность непустых замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

Указание: воспользоваться примером 6 и показать, что числовая последовательность радиусов шаров фундаментальна.

20. Доказать, что в конечномерном линейном нормированном пространстве все нормы эквивалентны.

21. Доказать, что в конечномерном линейном нормированном пространстве сходимость по координатам влечет сходимость и по норме.

22. Пусть X – линейное нормированное пространство, $x_1,x_2\in X$. Доказать, что функции $\sup\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$, $\|x_1\|+\|x_2\|$ и $\left(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ определяют эквивалентные нормы на пространстве $X\times X$.

23. Доказать, что всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым.

24. Доказать, что аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна выпуклости замкнутого единичного шара с центром в начале координат.

2.3. Ряды в линейных нормированных пространствах

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, $x_1, x_2, ... \in E$. Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется рядом, составленным из элементов пространства E.

Определение: выражение $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ называется частичной суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Определение: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется сходящимся в E, если в E сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$. Суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ называется элемент $x \in E$ такой, что $x = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Теорема (критерий Коши): пусть E – линейное нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходился необходимо, а если E – банахово, то и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall m \ge n > N \;\; \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$.

Доказательство: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в E, тогда его последовательность частичных сумм имеет предел в E, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$. Поскольку любая сходящаяся последовательность фундаментальна, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall m \ge n > N$ $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$, откуда $\left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$.

Обратно: пусть E – банахово и $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall m \ge n > N \;\; \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$, т.е. $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$. Это означает, что $\{S_n\}$ фундаментальна, а поскольку в банаховом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится по определению.

Теорема доказана.

Теорема (мажорантный признак Вейерштрасса): пусть E – банахово пространство, $\forall n > N \in \mathbb{N} \;\; \|x_n\| \le a_n$ и числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ также сходится.

Доказательство: поскольку E – банахово пространство, то, в силу предыдущей теоремы, достаточно доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall m\geq n>N$ $\left\|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right\|<\varepsilon$. Поскольку $\left\|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right\|\leq\sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\|\leq\sum_{k=n+1}^{m}a_k$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ является числовым и по условию сходится, то для него в силу критерия Коши для числовых рядов $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall m\geq n>N$ $\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|<\varepsilon$. По условию такие a_k, очевидно, неотрицательны, тогда $\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|=\sum_{k=n+1}^{m}a_k<\varepsilon$, откуда $\left\|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right\|<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$.

Теорема (критерий полноты линейного пространства в терминах рядов): пусть E – линейное нормированное пространство. Оно является банаховым тогда и только тогда, когда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$.

Доказательство: необходимость предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 2).

Достаточность: дано, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$. Надо доказать, что E – банахово, т.е., что любая фундаментальная последовательность в нем имеет предел. Пусть $a_1,a_2,a_3,...\in E$ – фундаментальная последовательность, т.е., по определению фундаментальности, $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}:\ \forall m,n>N\ \ \|a_n-a_m\|<\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon=1$, тогда $\exists N_1\in\mathbb{N}:\ \forall m,n>N_1\ \ \|a_n-a_m\|<1$.

Пусть $\varepsilon=\frac{1}{2}$, тогда $\exists N_2>N_1:\ \forall m,n>N_2\ \ \|a_n-a_m\|<\frac{1}{2}$.

....

Пусть $\varepsilon=\frac{1}{2^{k-1}}$, тогда $\exists N_k>N_{k-1}:\ \forall m,n>N_k\ \ \|a_n-a_m\|<\frac{1}{2^{k-1}}$.

....

Рассмотрим последовательность $a_{N_1},a_{N_2},...$. По построению при $k=1,2,...$ $\left\|a_{N_{k+1}}-a_{N_k}\right\|<\frac{1}{2^{k-2}}=\frac{4}{2^k}$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|a_{N_{k+1}}-a_{N_k}\right\|$ сходится.

Поскольку по условию всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{N_{k+1}}-a_{N_k}\right)$ – сходится и последовательность его частичных сумм имеет предел. Т.к. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{N_{k+1}}-a_{N_k}\right)=a_{N_2}-a_{N_1}+a_{N_3}-a_{N_2}+\ldots+a_{N_{n+1}}-a_{N_n}=a_{N_{n+1}}-a_{N_1}$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_{N_{n+1}}$, т.е. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_{N_n}$.

Итак, у исходной последовательности $\{a_n\}$ нашли подпоследовательность, имеющую предел. Пусть $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_{N_n}$. Покажем, что $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, т.е., что $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $\|a_n-A\|<\varepsilon$.

Поскольку $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_{N_n}$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in\mathbb{N}$: $\forall n>N_1$ $\|a_{N_n}-A\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\{a_n\}$ фундаментальна, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2\in\mathbb{N}$: $\forall m,n>N_2$ $\|a_n-a_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$, и, в частности, при $m=N_n$: $\|a_n-a_{N_n}\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, взяв $N=\max\{N_1,N_2\}$, получим, что $\forall n>N$ $\|a_n-A\|=\|a_n-a_{N_n}+a_{N_n}-A\|\le\|a_n-a_{N_n}\|+\|a_{N_n}-A\|<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть E – линейное нормированное пространство. Доказать, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ сходится, то $x_k\to 0$ при $k\to\infty$.

2. Доказать, что в банаховом пространстве всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

3. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в линейном нормированном пространстве, $\{x_{n_k}\}$ – ее сходящаяся подпоследовательность. Доказать, что $\{x_n\}$ также сходится, причем к тому же самому пределу.

4. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{k+1}-x_k\|$ сходится. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна.

Указание: применить критерий Коши.

5. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – фундаментальные последовательности в линейном нормированном пространстве. Доказать, что последовательность $\lambda_n=\|x_n-y_n\|$ – сходится.

2.4. Пространства l_p $(1 \le p \le \infty)$, c, c_0 и $C[a,b]$

Определение: пусть $p \ge 1$. Пространством l_p называется множество последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ и при этом $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Замечание: легко проверить, что l_p – действительно линейное нормированное пространство (см. задачу 1).

Теорема (о полноте l_p): l_p – банахово пространство.

Замечание: в этом пункте для удобства координаты элементов последовательностей будем выносить в верхний индекс.

Доказательство: по определению полноты надо доказать, что любая фундаментальная в l_p последовательность сходится. Пусть $\{x_n\} \in l_p$ – фундаментальная последовательность, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m > N$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Поскольку $x_n \in l_p$, то элемент x_n сам является последовательностью $x_n = (x_n^{\ 1}, x_n^{\ 2}, ...)$ и, аналогично, $x_m = (x_m^{\ 1}, x_m^{\ 2}, ...)$. Тогда по определению нормы в l_p $\|x_n - x_m\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{\ i} - x_m^{\ i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{\ i} - x_m^{\ i}|^p < \varepsilon^p$. Поскольку слагаемые ряда неотрицательны, то каждое из них тем более меньше ε^p, т.е. $\forall i$ $|x_n^{\ i} - x_m^{\ i}|^p < \varepsilon^p$, т.е. $\forall i$ $|x_n^{\ i} - x_m^{\ i}| < \varepsilon$. Итак, получили, что для каждого фиксированного i последовательность, составленная из координат с номером i – фундаментальна. Если i – фиксировано, то это уже числовая последовательность, значит, она имеет предел, т.к. для нее справедлив критерий Коши. Следовательно, $\forall i$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n^{\ i} = x^i$. Составим вектор $x = (x^1, x^2, ...)$ и покажем, что он является пределом нашей последовательности, т.е.:

а) $x \in l_p$;

б) $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{l_p} x$.

а) Поскольку фундаментальная последовательность всегда ограничена, то $\exists c > 0$: $\|x_n\| \le c$, т.е. $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{\ i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le c$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{\ i}|^p \le c^p$, значит, тем более, $\sum_{i=1}^{N} |x_n^{\ i}|^p \le c^p$. Но это уже конечная сумма, поэтому предел суммы равен сумме пределов, и, значит, можно перейти к пределу при $n \to \infty$, учитывая, что $x_n^{\ i} \to x^i$: $\sum_{i=1}^{N} |x^i|^p \le c^p$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p$ ограничены сверху. Поскольку этот ряд является рядом с неотрицательными слагаемыми, то в силу критерия Вейерштрасса он сходится, значит, $x \in l_p$.

б) Надо доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n>N\ \ \|x_n-x\|<\varepsilon$. Перепишем условие фундаментальности в виде $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n,m>N\ \ \|x_n-x_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_n{}^i-x_m{}^i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_n{}^i-x_m{}^i\right|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ и, тем более, $\sum_{i=1}^{N}\left|x_n{}^i-x_m{}^i\right|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Снова сумма конечна и можно переходить к пределу при $m\to\infty$, учитывая, что $x_m{}^i\to x^i$: $\sum_{i=1}^{N}\left|x_n{}^i-x^i\right|^p\le\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим, что $\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_n{}^i-x^i\right|^p\le\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Тогда $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_n{}^i-x^i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, откуда $\|x_n-x\|<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: пространством l_∞ называется пространство ограниченных последовательностей $x=(x_1,x_2,x_3,...)$ с нормой $\|x\|=\sup_i|x_i|$.

Замечание: легко проверить, что l_∞ – действительно линейное нормированное пространство (см. задачу 2).

Теорема (о полноте l_∞): l_∞ – банахово пространство.

Доказательство: по определению полноты надо доказать, что любая фундаментальная в l_∞ последовательность сходится. Пусть $\{x_n\}\in l_\infty$ – фундаментальная последовательность, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n,m>N\ \ \|x_n-x_m\|<\varepsilon$. Ясно, что $x_n=(x_n{}^1,x_n{}^2,...)$ и $x_m=(x_m{}^1,x_m{}^2,...)$. Тогда по определению нормы в l_∞ $\|x_n-x_m\|=\sup_i\left|x_n{}^i-x_m{}^i\right|<\varepsilon$, откуда $\forall i\ \ \left|x_n{}^i-x_m{}^i\right|<\varepsilon$. Итак, получили, что для каждого фиксированного i последовательность, составленная из координат с номером i – фундаментальна. Если i – фиксировано, то это уже числовая последовательность, значит, она имеет предел, т.к. для нее справедлив критерий Коши. Таким образом, $\forall i\ \ \exists\lim_{n\to\infty}x_n{}^i=x^i$. Рассмотрим элемент $x=(x^1,x^2,...)$ и покажем, что он является пределом нашей последовательности, т.е.:

а) $x\in l_\infty$;

б) $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{l_\infty}x$.

а) Поскольку фундаментальная последовательность всегда ограничена, то $\exists c>0$: $\|x_n\|\le c$, т.е. $\sup_i\left|x_n{}^i\right|\le c$, откуда $\forall i\ \ \left|x_n{}^i\right|\le c$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, учитывая, что $x_n{}^i\to x^i$, получаем, что $\forall i\ \ \left|x^i\right|\le c$, значит, последовательность x ограничена, т.е. $x\in l_\infty$.

б) Надо доказать, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n>N\ \ \|x_n-x\|<\varepsilon$. Перепишем условие фундаментальности в виде $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n,m>N\ \|x_n-x_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$\sup\limits_i \left| x_n{}^i - x_m{}^i \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\forall i$ $\left| x_n{}^i - x_m{}^i \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, с учетом того, что $x_m{}^i \to x^i$, получаем: $\forall i$ $\left| x_n{}^i - x^i \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку это неравенство верно $\forall i$, то возьмем в нем точную верхнюю грань по всем i, тогда $\sup\limits_i \left| x_n{}^i - x^i \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, откуда $\| x_n - x \| < \varepsilon$

Теорема доказана.

Определение: пространством c называется множество сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ с нормой $\| x \| = \sup\limits_i |x_i|$.

Определение: пространством c_0 называется множество последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$, предел которых равен нулю, с нормой $\| x \| = \sup\limits_i |x_i|$.

Замечание: легко проверить, что c и c_0 – действительно линейные нормированные пространства (см. задачу 3).

Теорема (о полноте c и c_0): c и c_0 – банаховы пространства.

Доказательство: поскольку l_∞ – полно и справедливо вложение $c_0 \subset c \subset l_\infty$ (см. задачу 4), то по теореме о полноте замкнутого подмножества полного пространства достаточно доказать, что c и c_0 – замкнуты, т.е. содержат все свои предельные точки. Итак, надо доказать, что:

а) Если $x_n \in c$ и $x_n \to x$ (т.е. x – предельная точка), то $x \in c$.

б) Если $x_n \in c_0$ и $x_n \to x$, то $x \in c_0$.

Проверим, что если $x_n \xrightarrow{l_\infty} x$, то числовая последовательность координат $x_n{}^i \underset{n \to \infty}{\overset{i}{\rightrightarrows}} x^i$, т.е. по определению равномерной сходимости, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\forall i$ $\left| x_n{}^i - x^i \right| < \varepsilon$. Действительно, если $x_n \xrightarrow{l_\infty} x$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\| x_n - x \| < \varepsilon$, т.е. $\sup\limits_i \left| x_n{}^i - x^i \right| < \varepsilon$, откуда $\forall i$ $\left| x_n{}^i - x^i \right| < \varepsilon$. Поскольку в c и c_0 норма та же самая, что и в l_∞, то это же утверждение верно и для этих пространств.

Применим теорему о коммутативности двух предельных переходов к нашему случаю: если $x_n{}^i \underset{n \to \infty}{\overset{i}{\rightrightarrows}} x^i$ и $\forall n$ $x_n{}^i \underset{i \to \infty}{\to} a_n$, то $\exists \lim\limits_{i \to \infty} x^i$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ и эти пределы между собой равны.

Тем самым первое условие теоремы о коммутативности предельных переходов выполнено, поскольку доказали, что $x_n{}^i \underset{n \to \infty}{\overset{i}{\rightrightarrows}} x^i$.

а) Поскольку $x_n \in c$, а c состоит из сходящихся последовательностей, то $\exists \lim\limits_{i \to \infty} x_n{}^i$, т.е. второе условие теоремы о коммутативности предельных переходов выполнено, значит, в силу этой теоремы, $\exists \lim\limits_{i \to \infty} x^i$, что и означает, что $x \in c$.

б) Поскольку $x_n \in c_0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} x_n{}^i = 0$, т.е. $a_n = 0$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и тогда $\lim\limits_{i\to\infty} x^i = 0$, поэтому $x \in c_0$.

Теорема доказана.

Определение: пространством $C[a,b]$ называется множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Замечание: легко проверить, что $C[a,b]$ – действительно линейное нормированное пространство (см. задачу 5).

Теорема (о полноте $C[a,b]$): $C[a,b]$ – банахово.

Доказательство: надо доказать, что любая фундаментальная последовательность элементов $C[a,b]$ имеет в нем предел. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n,m > N \ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$, значит, $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, откуда $\forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Получили, что $\{f_n\}$ – равномерно фундаментальна, значит в силу критерия Коши для функциональных последовательностей $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$. По теореме о непрерывности предельной функции, поскольку все f_n непрерывны, то $f(x)$ – также непрерывна на $[a,b]$, т.е. $f(x) \in C[a,b]$.

Перепишем условие фундаментальности в виде $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n,m > N$ $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, учитывая, что $f_m(x) \underset{m\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$, тогда $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, значит $\|f_n - f\| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \ \|f_n - f\| < \varepsilon$, т.е. $f_n \overset{C[a,b]}{\to} f$.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, которая бы принадлежала каждой из рассматриваемых пар пространств и:

а) сходилась в l_∞, но не сходилась в l_1;

б) сходилась в l_∞, но не сходилась в l_2;

Решение: а) Пусть $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$. Тогда из покоординатной сходимости видно, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} (0,0,...,0,...) = x_0$. Далее, $\|x_n - x_0\|_{l_\infty} = \sup\limits_i |x_n{}^i - x_0{}^i| = \dfrac{1}{n} \to 0$, значит, $x_n \xrightarrow{l_\infty} x_0$. Аналогично, $\|x_n - x_0\|_{l_1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_n{}^i - x_0{}^i| = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot n = 1 \not\to 0$, значит, $\{x_n\}$ не сходится в l_1.

б) Пусть $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, ... \right)$, тогда из покоординатной сходимости видно, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} (0,0,...,0,...) = x_0$. Далее, $\|x_n - x_0\|_{l_\infty} = \sup\limits_i |x_n{}^i - x_0{}^i| = \dfrac{1}{n} \to 0$, значит, $x_n \xrightarrow{l_\infty} x_0$. Аналогично, $\|x_n - x_0\|_{l_2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_n{}^i - x_0{}^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n^2} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \cdot n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \not\to 0$, значит, последовательность x_n расходится в l_2.

2. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве E последовательность $\{x_n\}$, если:

а) $E = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{0,...,0}_{n-1}, \dfrac{1}{n^\sigma}, \dfrac{1}{n^{\sigma+1}}, ... \right)$, $\sigma > 1$;

б) $E = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, ... \right)$;

в) $E = C^{(1)}[0,1]$, $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$.

Решение: а) Покоординатно $x_n \underset{n\to\infty}{\to} (0,0,...,0,...) = x_0$. Тогда

$$\|x_n - x_0\|_{l_1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_n{}^i - x_0{}^i| = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^\sigma}.$$

Поскольку $\sigma > 1$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^\sigma}$ сходится. Выражение $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \dfrac{1}{i^\sigma}$ представляет собой остаток этого ряда, следовательно, по теореме об остатке сходящегося ряда $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \dfrac{1}{i^\sigma} \to 0$ при $n \to \infty$, значит, $\|x_n - x_0\|_{l_1} \to 0$, т.е. $x_n \xrightarrow{l_1} x_0$.

б) Покажем, что последовательность $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, 0, ... \right)$ не является фундаментальной в пространстве l_2. Поскольку всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, то $\{x_n\}$ сходиться в l_2 не будет.

Итак, надо показать, что $\exists\varepsilon>0$: $\forall N\in\mathbb{N}\ \exists n,m>N\ \|x_n-x_m\|_{l_2}>\varepsilon$. Возьмем $m=n+1$, тогда $\|x_n-x_m\|_{l_2}=\|x_n-x_{n+1}\|_{l_2}=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+1^2+1^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+2}>\sqrt{2}$, значит, достаточно взять $\varepsilon=\sqrt{2}$.

в) Ясно, что $\forall t\in[0,1]\ \ x_n(t)\to 0=x_0(t)$ при $n\to\infty$. Поскольку $C^{(1)}[0,1]$ – это множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$, то

$$\|x-x_0\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|+\sup_{t\in[0,1]}|x'(t)|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right|+\sup_{t\in[0,1]}\left|t^n-t^{n+1}\right|.$$

Рассмотрим функцию $x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$ и найдем ее наибольшее значение: $x_n'(t)=t^n-t^{n+1}=t^n(1-t)=0$, откуда находим критические точки $t=0$ и $t=1$, совпадающие с концами отрезка. Тогда $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\to 0$.

Рассмотрим функцию $y_n(t)=t^n-t^{n+1}$ и найдем ее наибольшее значение: $y_n'(t)=nt^{n-1}-(n+1)t^n=t^{n-1}(n-(n+1)t)$, откуда находим критические точки $t=0$ и $t=\frac{n}{n+1}$. Тогда $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n-t^{n+1}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n^n(n+1)-n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\to 0$.

Итак, $\|x_n-x_0\|\to 0$ при $n\to\infty$, значит, последовательность сходится в рассматриваемом пространстве.

3. Будет ли полным пространство l_1 относительно нормы $\|x\|_1=\sup\limits_k|\xi_k|$, где $x=(\xi_k)\in l_1$?

Решение: пространство l_1 полно относительно нормы $\|x\|_2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|$. Кроме того, очевидно, что $\sup\limits_k|\xi_k|\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|$, т.е. $\|x\|_1\le\|x\|_2$, значит, норма $\|x\|_1$ подчинена норме $\|x\|_2$. По теореме об эквивалентных нормах, если бы пространство l_1 было полно относительно обеих норм, то эти нормы должны были бы быть эквивалентны, т.е. из сходимости последовательности по любой из них следовала бы сходимость по другой. Рассмотрим последовательность $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\dots\right)$. Ясно, что из покоординатной сходимости следует, что $x_n\underset{n\to\infty}{\to}(0,0,\dots,0,\dots)=x_0$.

Поскольку $\|x_n - x_0\|_1 = \sup\limits_k \left|\xi_k{}^n - \xi_k{}^0\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$, то $\{x_n\}$ сходится по норме $\|x\|_1$. Однако, $\|x_n - x_0\|_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k{}^n - \xi_k{}^0\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot n = 1 \not\to 0$ и, значит, по норме $\|x\|_2$ последовательность не сходится. Тем самым нормы не могут быть эквивалентны, а пространство не может быть полным относительно нормы $\|x\|_1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что при $p \ge 1$ l_p является линейным нормированным пространством.

2. Проверить, что l_∞ является линейным нормированным пространством.

3. Проверить, что c и c_0 являются линейными нормированными пространствами.

4. Доказать справедливость следующих вложений: $l_p \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$.

5. Проверить, что $C[a,b]$ является линейным нормированным пространством.

6. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим последовательность множеств $M_n = S(0,2) \cap \left\{ x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0,\, x(t) \ge 1 \right\}$ при $t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$. Доказать, что M_n – непустые, ограниченные, замкнутые, выпуклые множества такие, что $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \varnothing$.

Указание: нарисовать несколько таких множеств и их пересечение.

7. Рассмотрим множество последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| < +\infty$. Определим норму в этом пространстве формулой $\|x\| = \sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. Доказать полноту этого пространства.

8. В пространстве $C^{(k)}[a,b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций определим норму элемента $x(t)$: $\|x\| = \max\limits_{0 \le j \le k} \left\{ \sup\limits_{t \in [a,b]} p_j(t) \left| x^{(j)}(t) \right| \right\}$, где $p_j \in C[a,b]$ ($j = 0,1,\ldots,k$) – положительные функции. Показать, что все аксиомы нормы выполняются и что в этом случае $C^{(k)}[a,b]$ является банаховым.

9. В пространстве $C^{(k)}[a,b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций определим норму элемента $x(t)$: $\|x\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} \sum\limits_{j=0}^{k} p_j(t) \left| x^{(j)}(t) \right|$, где $p_j \in C[a,b]$ ($j = 0,1,\ldots,k$) – положительные функции. Показать, что все ак-

сиомы нормы выполняются и что в этом случае $C^{(k)}\left[a,b\right]$ является банаховым.

10. Пусть E – пространство всех непрерывных 2π–периодических комплекснозначных функций, определенных на $\mathbb{R}$, с нормой $\|x\|=\sup\limits_{t\in R}|x(t)|$. Показать, что E – банахово пространство.

11. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=nte^{-nt}$.

12. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=\sqrt{n}e^{-nt}$.

13. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=n\sin\dfrac{t}{n}$.

14. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=\sqrt{n}\sin\dfrac{t}{n}$.

15. Исследовать на сходимость в пространстве $C^{(1)}\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=nte^{-nt}$.

16. Исследовать на сходимость в пространстве $C^{(1)}\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=\sqrt{n}e^{-nt}$.

17. Исследовать на сходимость в пространстве $C^{(1)}\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=n\sin\dfrac{t}{n}$.

18. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве $C\left[0,1\right]$ последовательность $x_n(t)=\sin t-\sin\dfrac{t}{n}$.

19. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве l_1 последовательность $x_n=\left(\underbrace{0,\ldots 0}_{n},\dfrac{1}{n},0,\ldots\right)$.

20. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве l_2 последовательность $x_n=\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}},0,\ldots\right)$.

21. Выяснить, сходится ли в нормированном пространстве $C\left[0,1\right]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}-\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$.

22. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[0,1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=\dfrac{\sin nt}{n^2t}$.

23. Исследовать на сходимость в пространстве $C\left[\frac{1}{2},1\right]$ следующую последовательность: $f_n(t)=e^{\frac{t}{n}}$.

24. Исследовать на сходимость в пространстве $C[0,1]$ следующую последовательность: $f_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{t}{k}$.

25. Доказать, что элемент $x=\left(1,\frac{1}{\ln 2},\frac{1}{\ln 3},...,\frac{1}{\ln n},...\right)\in c_0$ не принадлежит l_p ни при каком $p\geq 1$.

Указание: воспользоваться интегральным признаком сходимости ряда, либо признаком разрежения Коши.

26. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, которая бы принадлежала каждой из рассматриваемых пар пространств и:

а) сходилась в l_2, но не сходилась в l_1;

б) сходилась в c_0, но не сходилась в l_1;

в) сходилась в c_0, но не сходилась в l_2.

27. Доказать, что $\|x\|_{l_\infty}=\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_{l_p}$.

28. При каких значениях p и q имеет место вложение $l_p\subset l_q$?

Указание: показать, что при $q>p$.

29. Являются ли открытыми или замкнутыми в пространстве c множества $A=\{(\xi_1,\xi_2,...)\in c:\xi_{2n}\geq 0\}$ и $B=\{(\xi_1,\xi_2,...)\in c:\xi_{2n}<0\}$?

30. Является ли открытым или замкнутым в пространстве l_∞ множество последовательностей, все координаты которых положительны? Тот же вопрос для пространства l_2.

31. Показать, что множество $\left\{(\xi_1,\xi_2,...)\in l_1:\sqrt{\xi_2^2+\xi_3^2+...}\leq\xi_1\right\}$ замкнуто в l_1.

Указание: рассмотреть точку $x=(x_1,x_2,...)$ из дополнения к данному множеству, т.е. $\sqrt{x_2^2+x_3^2+...}>x_1$ и точку $y=(y_1,y_2,...)\in l_1$ такую, что $\|x-y\|<\varepsilon$. Показать, что $\|y\|<2\|x\|$ при $\varepsilon<\|x\|\neq 0$, $\|x+y\|\leq 3\|x\|$, откуда вывести $\left|x_1{}^2-y_1{}^2\right|<3\|x\|\varepsilon$. Показать, что $\left|x_2^2-y_2^2+x_3^2-y_3^2+...\right|<3\|x\|\varepsilon$, откуда получить, что $(y_2^2+y_3^2+...)-y_1^2>(x_2^2+x_3^2+...)-x_1^2-6\|x\|\varepsilon>0$ при выборе достаточно малого ε.

2.5. Линейные подпространства и плотные множества

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, $L \subset E$ – линейное многообразие. Если L – замкнуто, то оно называется подпространством.

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, $L \subset E$ – его подпространство. Расстоянием от точки $x \in E$ до подпространства L называется число $\rho(x,L) = \inf\limits_{u \in L} \|x-u\|$.

Замечание: напомним, что число c называется минорантой множества X, если $\forall x \in X \quad c \le x$. Точной нижней гранью множества X называется его наибольшая миноранта. Справедливо свойство: если $c = \inf X$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X$: $c \le x < c + \varepsilon$. Беря $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, \ldots$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, \ldots$, найдем такие элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \in X$ соответственно, что $c \le x_n < c + \frac{1}{n}$, откуда $0 \le x_n - c < \frac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $x_n - c \to 0$, т.е. $x_n \to c$. Итак, если $c = \inf X$, то $\exists \{x_n\} \subset X$: $x_n \to c$ (элементы x_n необязательно различны).

Замечание: известно, что, если множество ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань. Поскольку $\forall u \in L \ \|x-u\| \ge 0$, то $\rho(x,L)$ действительно существует.

Определение: пусть E – линейное нормированное пространство, $L \subset E$ – его подпространство. Если существует элемент $u^* \in L$ такой, что $\rho(x,L) = \|x-u^*\|$, то u^* называется элементом наилучшего приближения x элементами подпространства L.

Теорема (о существовании элемента наилучшего приближения): пусть L – конечномерное подпространство линейного нормированного пространства E. Тогда $\forall x \in E \ \exists u^* \in L$: $\rho(x,L) = \|x-u^*\|$.

Доказательство: если $x \in L$, то доказательство очевидно (см. задачу 2). Пусть $x \notin L$, тогда $\rho(x,L) = d > 0$. Поскольку L конечномерно, то в нем существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тогда $\forall u \in L \quad u = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$. Ясно, что элемент $(\xi_k)_{k=1}^{n}$ можно рассматривать, как элемент пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Поскольку L конечномерно, то норма $\|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^n}$ эквивалентна норме $\|u\|$ (см. задачу 20 из п. 2.2), тогда $\exists \alpha > 0$ и $\exists \beta > 0$: $\alpha \|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^n} \le \|u\| \le \beta \|\bar{u}\|_{\mathbb{R}^n}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ функцию $f(\bar{u}) = \|x-u\|$. Поскольку $\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\left| f(\bar{u}_1) - f(\bar{u}_2) \right| = \left| \, \|x-u_1\| - \|x-u_2\| \, \right| \le \|u_1 - u_2\| \le \beta \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{\mathbb{R}^n},$$

то f равномерно непрерывна, а значит и непрерывна в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что $\inf\limits_{u\in L}\|x-u\|$ может достигаться только при $u\in L$, которым соответствует шар $\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}\le r$, где $r=\dfrac{d+1+\|x\|}{\alpha}$. Действительно, пусть $\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}>r$, тогда $\|x-u\|\ge\|u\|-\|x\|\ge\alpha\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}-\|x\|>\alpha r-\|x\|=\alpha\cdot\dfrac{d+1+\|x\|}{\alpha}-\|x\|=d+1$, т.е. $d+1$ – тоже миноранта для множества $\|x-u\|$, причем $d+1>d$, а это противоречие с тем, что d – наибольшая миноранта. Тем самым вне шара $\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}\le r$ точная нижняя грань функции $f(\overline{u})=\|x-u\|$ достигаться не может. Поскольку шар $\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}\le r$ – ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, то он является компактом. Поскольку f непрерывна на этом шаре, то по теореме Вейерштрасса f принимает на нем свое наименьшее значение, т.е. $\exists\overline{u}^*\in\mathbb{R}^n$:

$$\|x-u^*\|=f\left(\overline{u}^*\right)=\inf_{\|\overline{u}\|_{\mathbb{R}^n}\le r}f(\overline{u})=\inf_{u\in L}\|x-u\|=\rho(x,L).$$

Теорема доказана.

Определение: нормированное пространство E называется строго нормированным, если в нем равенство $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ возможно только при $y=\lambda x$, где $\lambda>0$.

Теорема (о единственности элемента наилучшего приближения): в строго нормированном пространстве E для каждого $x\in E$ и каждого подпространства L может существовать не более одного элемента наилучшего приближения x к элементам L.

Доказательство: допустим, что таких элементов два, т.е. $u_1^*\in L$ и $u_2^*\in L$ таковы, что $\|x-u_1^*\|=\|x-u_2^*\|=\inf\limits_{u\in L}\|x-u\|=d$. Если $d=0$, то $\|x-u_1^*\|=\|x-u_2^*\|=0$, откуда $x-u_1^*=0$ и $x-u_2^*=0$, т.е. $u_1^*=u_2^*$. Пусть $d>0$. По определению точной нижней грани $\forall u\in L$ $\|x-u\|\ge d$. Поскольку $\dfrac{u_1^*+u_2^*}{2}\in L$, то $\left\|x-\dfrac{u_1^*+u_2^*}{2}\right\|\ge d$.

С другой стороны $\left\|x-\dfrac{u_1^*+u_2^*}{2}\right\|=\left\|\dfrac{x-u_1^*}{2}+\dfrac{x-u_2^*}{2}\right\|\le\dfrac{1}{2}\|x-u_1^*\|+\dfrac{1}{2}\|x-u_2^*\|=d$.

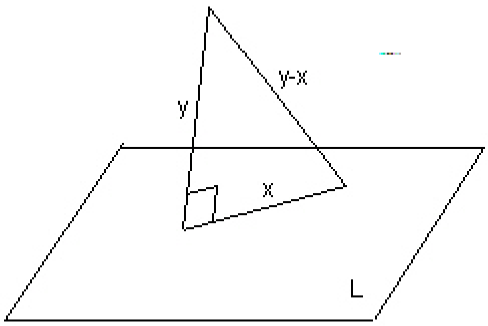
Таким образом, $\left\|x-\dfrac{u_1^*+u_2^*}{2}\right\|=d$. Отсюда следует, что $\|(x-u_1^*)+(x-u_2^*)\|=$ $=2d=\|x-u_1^*\|+\|x-u_2^*\|$. Поскольку E – строго нормированное, то $\exists\lambda>0$: $x-u_2^*=\lambda(x-u_1^*)$. Если $\lambda=1$, то $u_2^*=u_1^*$. Если же $\lambda\ne1$, то $x=\dfrac{u_2^*-\lambda u_1^*}{1-\lambda}\in L$, а это невозможно, поскольку $d>0$ (см. задачу 2).

Теорема доказана.

Теорема Рисса (о почти перпендикуляре): пусть L – подпространство линейного нормированного пространства E, не совпадающее с E, тогда $\forall\varepsilon>0$

$\exists y \in E: \ \|y\| = 1$ и $\forall x \in L \ \|x - y\| > 1 - \varepsilon$.

Замечание: в трехмерном пространстве ситуацию, описанную в теореме, можно представить следующим образом (см. рис.): если $y \perp L$, $|y| = 1$, то $\forall x \in L$ $|y - x| > |y| = 1$, поскольку длина любой наклонной больше длины перпендикуляра. В произвольных линейных нормированных пространствах нет понятия перпендикулярности, поэтому утверждение является более слабым.



Доказательство: берем $\forall y_0 \in E$ и $y_0 \notin L$ и обозначим $d = \inf\limits_{x \in L} \|y_0 - x\|$. Поскольку $y_0 \notin L$, то $d > 0$. По определению точной нижней грани $\forall x \in L$ $\|y_0 - x\| \geq d$. С другой стороны $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_0 \in L: \ \|y_0 - x_0\| < d + d\varepsilon$. Таким образом, $d \leq \|y_0 - x_0\| < d + d\varepsilon$. Обозначим $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. Поскольку $y_0 \notin L$, а $x_0 \in L$, то $y \notin L$. Очевидно, что $\|y\| = \left\| \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} \right\| = 1$. Рассмотрим $\forall x \in L$ и обозначим $\xi = x_0 + \|y_0 - x_0\| x \in L$. Тогда

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \big\| \, y_0 - x_0 - x \|y_0 - x_0\| \, \big\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - \xi\| >$$

$$> \frac{1}{d + d\varepsilon} \|y_0 - \xi\| \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение: линейное многообразие L, лежащее в линейном нормированном пространстве E, называется всюду плотным в E, если $\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in L: \ \|x - y\| < \varepsilon$.

Замечание: если L всюду плотно в E, то, выбирая $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}$,..., $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$,..., найдем такие элементы $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... \in E$, что $\|x - y_n\| < \dfrac{1}{n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\|x - y_n\| \to 0$, т.е. $y_n \to x$. Таким образом, если L всюду плотно в E, то $\forall x \in E \ \ \exists \{y_n\} \in L: \ y_n \to x$. Это означает, что в этом случае $\overline{L} = E$. Верно и обратное утверждение (причем его доказательство тривиально).

Замечание: всюду в дальнейшем, если не приводится никаких дополнительных уточнений, подпространством будем называть именно замкнутое линейное многообразие.

Примеры решения задач

1. Пусть $L=\left\{x=(\xi_k)\in E:\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k=0,\xi_k\in\mathbb{R}\right\}$. Образует ли L подпространство в пространстве E, если:

а) $E=l_1$;

б) $E=l_p$ ($p>1$)?

Решение: а) Возьмем $x=(\xi_k)\in L$ и $y=(\eta_k)\in L$. Проверим, что L – линейное многообразие, т.е., что $\alpha x+\beta y=(\alpha\xi_k+\beta\eta_k)\in L$.

Действительно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha\xi_k+\beta\eta_k)=\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k+\beta\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k=0$. Проверим замкнутость L: пусть $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_k^{(n)},...)\in L$ и $x_n\underset{n\to\infty}{\overset{l_1}{\to}}x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},...,\xi_k^{(0)},...)$. Надо проверить, что $x_0\in L$. Т.к. $x_n\underset{n\to\infty}{\overset{l_1}{\to}}x_0$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $\|x_n-x_0\|<\varepsilon$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|<\varepsilon$.

Далее, $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(0)}\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\xi_k^{(0)}-\xi_k^{(n)}\right)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\right|\le\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}}+\underbrace{\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\right|}_{\overset{\|}{0}}<\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(0)}\right|=0$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(0)}=0$, значит $x_0\in L$. Итак, L – замкнутое линейное многообразие в l_1, а значит подпространство.

б) То, что L – линейное многообразие, проверяется аналогично а). Возьмем последовательность $x_n=\left(\underbrace{1,-\frac{1}{n},...,-\frac{1}{n}}_{n},0,0,...\right)\in L$. Ясно, что покоординатно $x_n\to(1,0,0,...)=x_0$. Тогда $\|x_n-x_0\|^p=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|^p=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{n^p}\cdot n=\frac{1}{n^{p-1}}\to0$ при $n\to\infty$, значит, $x_n\underset{n\to\infty}{\overset{l_p}{\to}}x_0$. Однако, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(0)}=1\ne0$, т.е. $x_0\notin L$ и значит L – незамкнуто, т.е. не является подпространством в l_p.

2. Образует ли в $C[-1,1]$ подпространство множество непрерывно дифференцируемых функций?

Решение: то, что множество непрерывно дифференцируемых функций является линейным многообразием, очевидно. Далее, пусть $f_n(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причем $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{C[-1,1]}{\to}}f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$:

$\forall n > N \ \sup\limits_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, откуда $\forall x\in[-1,1]\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, т.е. $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$. По теореме о непрерывности предельной функции $f(x)$ будет непрерывна, как равномерный предел непрерывных функций. Пусть $f_n(x)=\sqrt[n]{1+(x+1)^n}$, тогда (см. задачу 10) $f_n(x)\rightrightarrows\begin{cases}1, & x\in[-1,0],\\ x+1, & x\in[0,1].\end{cases}$ Ясно, что предельная функция не дифференцируема в точке $x=0$, поскольку имеет в точке $x=0$ “излом” (в этой точке производная имеет скачок). Тем самым множество непрерывно дифференцируемых функций не является замкнутым, а значит, не образует подпространство.

3. Образует ли в $C[a,b]$ подпространство множество $P[a,b]$ всех многочленов на отрезке $[a,b]$?

Решение: очевидно, что $P[a,b]$ – линейное многообразие. Рассмотрим многочлен $p_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$. Очевидно, что $p_n(x)\overset{C[-1,1]}{\underset{n\to\infty}{\to}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$, но $e^x\notin P[a,b]$, т.е. $P[a,b]$ – незамкнутое множество, и значит не подпространство.

4. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t^2$, до подпространства многочленов степени ≤ 1.

Решение: поскольку подпространство $L=\{u(t):u(t)=at+b\}$ двумерно, то для него существует хотя бы элемент наилучшего приближения u^*, поэтому $\rho(x_0,L)=\|x_0-u^*\|=\inf\limits_{u\in L}\|x_0-u\|=\inf\limits_{a,b}\|t^2-at-b\|=\inf\limits_{a,b}\sup\limits_{t\in[0,1]}|t^2-at-b|$. Очевидно, что $f(t)=t^2-at-b=\left(t-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-b$. Пусть вершина параболы $\dfrac{a}{2}\in[0,1]$, тогда длина хотя бы одного из отрезков $\left[0,\dfrac{a}{2}\right]$ или $\left[\dfrac{a}{2},1\right]$ не меньше $\dfrac{1}{2}$. На каждом из них функция $f(t)$ монотонна. Пусть $\dfrac{a}{2}\ge\dfrac{1}{2}$, тогда колебание на первом отрезке равно $\sup\limits_{t_1,t_2\in\left[0,\frac{a}{2}\right]}|f(t_1)-f(t_2)|=\left|f(0)-f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right|=\dfrac{a^2}{4}\ge\dfrac{1}{4}$, откуда $\sup\limits_{t_1,t_2\in[0,1]}|f(t_1)-f(t_2)|\ge\dfrac{1}{4}$ тем более. С другой стороны, $\sup\limits_{t_1,t_2\in[0,1]}|f(t_1)-f(t_2)|\le\sup\limits_{t_1\in[0,1]}|f(t_1)|+\sup\limits_{t_2\in[0,1]}|f(t_2)|=$ $=2\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$, откуда $\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|\ge\dfrac{1}{8}$. Аналогично получается и в случае $1-\dfrac{a}{2}\ge\dfrac{1}{2}$.

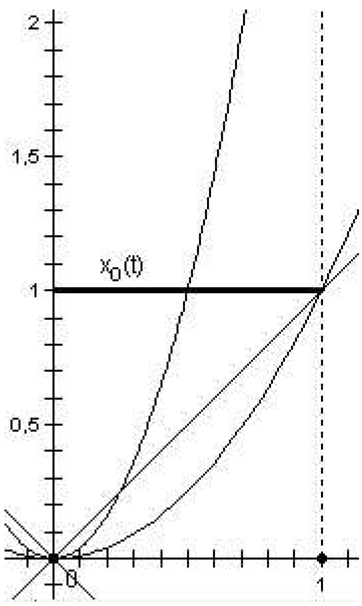
Подберем a и b такими, чтобы $\sup\limits_{t\in[0,1]}|t^2-at-b|=\dfrac{1}{8}$. Поскольку $0\le a\le 2$, то выберем $a=1$ и $f(t)$ представляет собой параболу с вершиной в точке $\dfrac{1}{2}$, поэтому $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^2-at-b\right|=\max\left\{|b|,\left|\frac{1}{4}+b\right|\right\}=\frac{1}{8}$, например, при $b=-\frac{1}{8}$. Пусть теперь $\frac{a}{2}\notin[0,1]$, тогда функция $f(t)$ монотонна на отрезке $[0,1]$, поэтому $\sup\limits_{t_1,t_2\in[0,1]}\left|f(t_1)-f(t_2)\right|=\left|f(0)-f(1)\right|=|a-1|\geq 1$ при $a\leq 0$, либо при $a\geq 2$, т.е. в данном случае $\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|f(t)\right|\geq\frac{1}{2}$, что превышает полученную выше оценку. Таким образом, окончательно, $u^*(t)=t-\frac{1}{8}$ и $\rho(x_0,L)=\frac{1}{8}$.

5. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим подпространство

$$L=\left\{x(t)\in C[0,1]:x(0)=0\right\}.$$

Пусть $x_0(t)=1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x_0 элементами L.

Решение: по определению $\left\|x_0-u^*\right\|=\inf\limits_{u\in L}\left\|x_0-u\right\|$, где u^* – элемент наилучшего приближения. Рассматриваемая ситуация изображена на рисунке.



Поскольку $u^*\in L$, то ясно, что $u^*(0)=0$. Кроме того, поскольку все $u\in L$ выходят из начала координат, а $\left\|x_0-u\right\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|x_0(t)-u(t)\right|$, то $\left\|x_0-u\right\|\geq 1$ (если $\left\|x_0-u\right\|<1$, то и $\left|x_0(0)-u(0)\right|<1$ – противоречие).
Наименьшее из всех возможных значений $\left\|x_0-u\right\|\geq 1$, очевидно, есть $\left\|x_0-u\right\|=1$. Поскольку $u^*(0)=0$, то $\left\|x_0-u^*\right\|=1$ тогда и только тогда, когда $u^*(t)$ не выходит за границы единичного шара с центром в точке $x_0(t)=1$, т.е. когда $0\leq u^*(t)\leq 2$.
Итак, множество элементов наилучшего приближения имеет вид: $\left\{u^*(t)\in C[0,1]:u^*(0)=0,0\leq u^*(t)\leq 2\ \forall t\in[0,1]\right\}$.

6. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=\sin t$, до подпространства $L=\{1,t\}$ – линейной оболочки элементов 1 и t.

Решение: требуется найти элемент наилучшего приближения функции $x_0(t)=\sin t$ линейной функцией. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(t)=\sin t-t\sin 1$. Ясно, что $f(0)=f(1)=0$ и исходная задача эквивалентна задаче наилучшего приближения функции $f(t)$ линейной функцией. Поскольку

$f'(t)=\cos t-\sin 1=0$ при $\cos t=\sin 1$ или $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin 1$, то на отрезке $[0,1]$ $f(t)$ имеет точку экстремума $t_0=\frac{\pi}{2}-1$. Легко видеть, что это точка максимума. Таким образом, величина $\|f(t)-x(t)\|$ при всевозможных $x(t)=at+b$ минимальна, если $x(t)=\frac{f(t_0)}{2}$. Это минимальное значение равно $\frac{f(t_0)}{2}$. Действительно, если $|x(0)-f(0)|\geq\frac{f(t_0)}{2}$, то и $\|f(t)-x(t)\|\geq\frac{f(t_0)}{2}$. То же самое верно при подстановке $t=1$. Если же $|x(0)-f(0)|\leq\frac{f(t_0)}{2}$ и $|x(1)-f(1)|\leq\frac{f(t_0)}{2}$, то $|x(t_0)-f(t_0)|\geq f(t_0)-\frac{f(t_0)}{2}=\frac{f(t_0)}{2}$ и $\|f(t)-x(t)\|\geq\frac{f(t_0)}{2}$. Элементом наилучшего приближения для $x_0(t)=\sin t$ будет $x^*(t)=t\sin 1+\frac{1}{2}\left(\cos 1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin 1\right)$, а искомое расстояние равно $\frac{1}{2}\left(\cos 1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin 1\right)$.

Заметим, что задачу из примера 4 можно было решить аналогичным способом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если $c=\inf X$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in X:\ c\leq x<c+\varepsilon$. Доказать, что если $c=\sup X$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in X:\ c-\varepsilon<x\leq c$. Доказать также, что если $c=\sup X$, то $\exists\{x_n\}\subset X:\ x_n\to c$ при $n\to\infty$.

2. Доказать, что если L – подпространство нормированного пространства, то $x\in L\Leftrightarrow\rho(x,L)=0$.

Указание: при доказательстве достаточности найти последовательность, сходящуюся к $\rho(x,L)=0$ *и воспользоваться замкнутостью* L.

3. Образует ли в $C[-1,1]$ подпространство множество монотонных функций?

Указание: привести пример, когда сумма двух монотонных функций не является монотонной функцией.

4. Доказать, что всякое линейное многообразие в конечномерном линейном нормированном пространстве является подпространством.

Указание: воспользоваться теоремой о пределе суммы конечного числа слагаемых.

5. Образует ли в $C[-1,1]$ подпространство множество функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1}x(t)dt=0$?

6. Образует ли в $C[-1,1]$ подпространство множество функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0)=0$?

7. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество четных функций?

8. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество многочленов степени $\le k$?

9. Показать, что множество $P[a,b]$ всех многочленов на отрезке $[a,b]$ является всюду плотным в $C[a,b]$.

10. Показать, что последовательность $f_n(x)=\sqrt[n]{1+(x+1)^n}$ сходится в $C[-1,1]$ к функции $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0],\\ x+1, & x\in[0,1].\end{cases}$

11. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t$, до подпространства многочленов нулевой степени.

12. Доказать, что $C[0,1]$ не является строго нормированным.

Указание: рассмотреть функции $x(t)=t(1-t)$ *и* $y(t)=\dfrac{1}{4}\sin\pi t$.

13. Доказать, что множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|x\|=\int\limits_0^1|x(t)|dt$ образует сепарабельное пространство.

Указание: показать, что $\|x\|\le\|x\|_{C[0,1]}$ *и что счетное всюду плотное множество образуют многочлены с рациональными коэффициентами.*

14. В пространствах $L_2[0,1]$ и $L_1[-2,0]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t^2$, до подпространства многочленов степени ≤ 1.

Указание: в случае $L_1[-2,0]$ *сперва минимизировать интеграл по отрезку* $[-1,1]$ *от функции* $|t^2-c|$. *При этом показать, что наименьшее значение интегралом будет приниматься при* $c\in[-1,1]$. *Затем перейти к отрезку* $[-2,0]$ *при помощи линейной замены переменной.*

15. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=\sin t$, до подпространства $L=\{1\}$ – линейной оболочки элемента 1.

16. В пространстве $C[2,4]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t^2$, до подпространства многочленов степени ≤ 1.

17. В пространстве $C[2,4]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=e^t$, до подпространства $L=\{t\}$ – линейной оболочки элемента t.

Указание: рассмотреть случаи, когда точка экстремума функции $f(t)=e^t-at$ *принадлежит отрезку* $[2,4]$ *и когда не принадлежит. В первом* *случае показать, что при* $f(4) > f(2)$ *и* $\left|a - \ln a\right| = \left|e^4 - 4a\right|$ *достигается минимальное значение нормы. Сравнить это значение с остальными вариантами.*

18. В пространстве $L_2\left[0,1\right]$ найти расстояние от элемента $x_0(t) = e^t$, до подпространства многочленов степени ≤ 2.

19. Привести пример, когда векторов в подпространстве нормированного пространства, ближайших к данному вектору, больше, чем один.

Указание: в пространстве l_∞ *рассмотреть последовательность* $(1,0,0,...)$ *и подпространство* $\left\{(0,a_2,a_3,a_4,...) \in l_\infty\right\}$. *Показать, что любой вектор этого подпространства, для которого* $\left|a_i\right| \le 1$ *при* $i = 2,3,4,...$, *является ближайшим.*

20. Образует ли в $C\left[-1,1\right]$ подпространство множество функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(t)}{t} dt = 0$?

Указание: не образует.

21. Будет ли множество $M = \left\{x \in l_2^n : \xi_k \ge 0, 1 \le k \le n\right\}$ подпространством в пространстве l_2^n?

Указание: l_2^n *– множество векторов* $x = (\xi_k)_{k=1}^n$ *с нормой* $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_1|^2}$.

22. Будет ли множество $M = \left\{x \in l_2 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k} = c\right\}$ подпространством в l_2?

Указание: рассмотреть случаи $c = 0$ *и* $c \ne 0$.

23. Найти расстояние от элемента $x_0(t) = 1$ до подпространства M функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[-1,1\right]$ непрерывных на отрезке $\left[-1,1\right]$ функций с нормой $\|x\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \left|x(t)\right|^2 dt}$. Достигается ли это расстояние на элементе наилучшего приближения? Если нет, то найти последовательность $\left\{x_n\right\} \subset M$ такую, что $\left\|x_n - x\right\| \to \rho(x, M)$.

24. В пространстве l_1^2 найти расстояние от элемента $x_0 = (1,0)$, до подпространства $M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in l_1^2 : \xi_1 = 0\right\}$.

Указание: $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$.

25. В пространстве l_1^2 найти расстояние от элемента $x_0 = (1,0)$, до подпространства $M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in l_1^2 : \xi_1 = \xi_2\right\}$.

26. Будет ли множество $M = \left\{x \in L_2\left[-1,1\right] : \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}} x(t) dt = 0\right\}$ подпространством в пространствах $L_1\left[-1,1\right]$ и $L_2\left[-1,1\right]$?

Указание: для доказательства замкнутости в $L_2\left[-1,1\right]$ *применить неравенство Гельдера для интегралов. Чтобы показать незамкнутость в* $L_1\left[-1,1\right]$, *рассмотреть последовательность* $x_n(t)=\begin{cases}-\left|t\right|^{-3/4}, t\in\left[-1,\dfrac{1}{n}\right) \\ 0, \qquad t\in\left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right] \\ \left|t\right|^{-3/4}, \quad t\in\left(\dfrac{1}{n},1\right]\end{cases}.$

2.6. Предкомпактные множества

Определение: множество в нормированном (метрическом) пространстве называется предкомпактным, если его замыкание компактно.

Замечание: множество в банаховом пространстве компактно точно тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено. Тем самым, учитывая, что замыкание всегда замкнуто, получаем, что множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено. Отметим, что из компактности множества всегда следует его предкомпактность. Обратное в общем случае неверно.

Теорема (о некомпактности шара): в бесконечномерном банаховом пространстве единичный шар с центром в начале координат не является предкомпактным множеством.

Доказательство: рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых векторов в нашем пространстве. Такая последовательность действительно существует, поскольку пространство бесконечномерно. Обозначим L_n – конечномерное подпространство, образованное векторами $x_1, x_2, ..., x_n$, тогда ясно, что $L_n \neq L_{n+1}$, $L_n \subset L_{n+1}$. В силу теоремы Рисса о почти перпендикуляре для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\exists y_n \in L_n$: $\|y_n\| = 1$ и $\forall x \in L_{n-1}$ $\|x - y_n\| > 1 - \varepsilon = \dfrac{1}{2}$, при $n = 2,3,...$. Получили последовательность $\{y_n\}$, принадлежащую замыканию единичного шара. Выберем $m > n$, тогда, поскольку $L_n \subset L_{n+1} \subset ... \subset L_{m-1}$, то $y_n \in L_{m-1}$ и $\|y_m - y_n\| > \dfrac{1}{2}$. Таким образом, последовательность $\{y_n\}$ не может быть фундаментальной, как и всякая ее подпоследовательность, а потому никакая ее подпоследовательность не может быть сходящейся. Тем самым, замыкание нашего шара не является секвенциально компактным, т.е. не является компактным, а сам шар не предкомпактен.

Теорема доказана.

Замечание: любой шар в бесконечномерном банаховом пространстве не предкомпактен (задача 22), а значит и некомпактен.

Теорема (о нигде не плотности предкомпактного множества): в бесконечномерном банаховом пространстве X любое предкомпактное множество нигде не плотно.

Доказательство: пусть M – предкомпактное множество. Допустим, что оно не является нигде не плотным, т.е. найдется открытый шар $S(a,r)$, лежащий в пространстве X такой, что любой открытый шар, содержащийся в $S(a,r)$, содержит точку из M. Докажем, что $S(a,r) \subset \bar{M}$, где $\bar{M}$ – замыкание множества M. Пусть $x_0 \in S(a,r)$. Рассмотрим шары $S(x_0, r_n)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $r_n = \dfrac{r - \|x_0 - a\|}{n}$.

Если $x \in S(x_0, r_n)$, т.е. $\|x - x_0\| < r_n$, то

$$\|x-a\| \le \|x-x_0\| + \|x_0-a\| < r_n + \|x_0-a\| = \frac{r-\|x_0-a\|}{n} + \|x_0-a\| =$$
$$= \frac{r-\|x_0-a\| + n\|x_0-a\|}{n} = \frac{r+(n-1)\|x_0-a\|}{n} < \frac{r+(n-1)r}{n} = r .$$

Таким образом, $x \in S(a,r)$, т.е. $S(x_0,r_n) \subset S(a,r)$ и по предположению получаем, что каждый шар $S(x_0,r_n)$ содержит точку из множества M. Обозначим каждую такую общую точку через x_n. Ясно, что, поскольку $x_n \in S(x_0,r_n)$ и при $n \to \infty$ $r_n \to 0$, то $x_n \to x_0$. Поскольку $x_n \in M$, то $x_0 \in \bar{M}$. Итак, доказали, что $S(a,r) \subset \bar{M}$, а, следовательно, и $\bar{S}(a,r) \subset \bar{M}$ ($\bar{M}$ замкнуто и поэтому содержит все предельные точки шара $S(a,r)$). По определению предкомпактности $\bar{M}$ компактно, поэтому шар $\bar{S}(a,r)$ является замкнутым подмножеством компакта, следовательно, он компактен. Противоречие с предыдущей теоремой.

Теорема доказана.

Замечание: нигде не плотность компактного множества в бесконечномерном банаховом пространстве доказывается полностью аналогично.

Определение: пусть $\forall\alpha$ $\{f_\alpha(x)\} \in C[a,b]$ – некоторое множество функций. Это множество называется равностепенно непрерывным, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\forall\alpha$ $|x_1 - x_2| < \delta$ $|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)| < \varepsilon$.

Определение: множество $\{f_\alpha(x)\} \in C[a,b]$ называется равномерно ограниченным, если $\exists c > 0$: $\forall\alpha, x$ $|f_\alpha(x)| \le c$.

Теорема Арцела-Асколи: множество $\{f_\alpha(x)\} \in C[a,b]$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда:

1. $\{f_\alpha(x)\}$ равномерно ограничено;
2. $\{f_\alpha(x)\}$ равностепенно непрерывно.

Доказательство: пусть $\{f_\alpha(x)\}$ предкомпактно.

1. Раз множество $\{f_\alpha(x)\}$ предкомпактно, то его замыкание компактно. Компактное множество всегда ограничено, т.е. замыкание нашего множества ограничено. Следовательно, само множество тем более ограничено, т.е. $\forall\alpha$ $\|f_\alpha(x)\| \le c$, откуда $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_\alpha(x)| \le c$, значит, $\forall\alpha, x$ $|f_\alpha(x)| \le c$, что и означает равномерную ограниченность.

2. Надо доказать, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\forall\alpha$ $|x_1 - x_2| < \delta$ $|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)| < \varepsilon$. Поскольку $\{f_\alpha(x)\}$ предкомпактно, то оно вполне ограничено, значит по определению вполне ограниченности, $\forall\varepsilon > 0$ для f_α есть конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $f_1, f_2, ..., f_n$. По определению $\frac{\varepsilon}{3}$-сети это означает, что $\forall f_\alpha$ $\exists k = \overline{1,n}$: $\|f_\alpha - f_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$, откуда $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_\alpha(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, в частности, $\forall x \in [a,b]$ $|f_\alpha(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

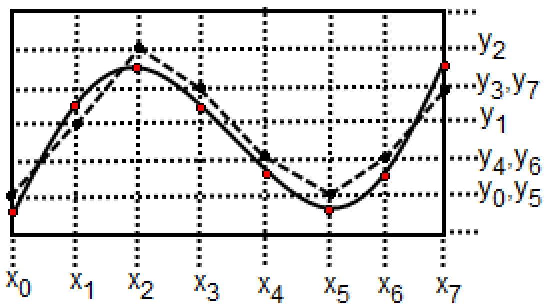
Функция f_1 непрерывна на отрезке, значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна, т.е. для $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $|x_1 - x_2| < \delta_1$ $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично, f_2 равномерно непрерывна, т.е. для $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $|x_1 - x_2| < \delta_2$ $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. И т.д. На n-м шаге для $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_n > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $|x_1 - x_2| < \delta_n$ $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$, значит, если $|x_1 - x_2| < \delta \le \delta_k$, то $\forall k = \overline{1,n}$: $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)| = |f_\alpha(x_1) - f_k(x_1) + f_k(x_1) - f_k(x_2) + f_k(x_2) - f_\alpha(x_2)| \le$$
$$\le |f_\alpha(x_1) - f_k(x_1)| + |f_k(x_1) - f_k(x_2)| + |f_k(x_2) - f_\alpha(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Обратно: пусть $\{f_\alpha(x)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Надо доказать, что оно предкомпактно, т.е. в силу критерия Хаусдорфа достаточно доказать, что оно вполне ограничено в пространстве $C[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ нужно для f_α построить конечную ε-сеть, т.е. найти набор функций $f_1, f_2, ..., f_n$ таких, что $\forall f_\alpha$ $\exists k = \overline{1,n}$: $\|f_\alpha - f_k\| < \varepsilon$.

Поскольку $\{f_\alpha(x)\}$ равномерно ограничено, то оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. $\exists c_1, c_2$: $\forall \alpha, x$ $c_1 \le f_\alpha(x) \le c_2$. Поскольку $\{f_\alpha(x)\}$ равностепенно непрерывно, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\forall \alpha$ $|x_1 - x_2| < \delta$ $|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Графики всех функций f_α лежат в прямоугольнике. Разобьем $[a,b]$ на равные части так, чтобы длина каждой части была меньше δ. Отрезок $[c_1, c_2]$ разобьем на равные части так, чтобы длина каждой части была меньше $\frac{\varepsilon}{3}$.



Будем рассматривать всевозможные функции, графиками которых являются ломаные линии, проходящие через узлы получившейся сетки. Ясно, что, поскольку узлов в сетке конечное число, то таких функций тоже будет конечное число. Их и обозначим через $f_1, f_2, ..., f_n$ и покажем, что они и будут нужной нам ε-сетью. Возьмем $\forall f_\alpha$. Обозначим точки разбиения отрезка $[a,b]$ через $x_0, x_1, x_2, ..., x_l$, а точки разбиения отрезка $[c_1, c_2]$ – через $y_0, y_1, y_2, ..., y_l$. Для каждого α и каждого x_i обозначим через $y_i = f_k(x_i)$ точку, ближайшую к $f_\alpha(x_i)$. Тогда ясно, что $|f_\alpha(x_i) - y_i| < \frac{\varepsilon}{3}$. При этом $\forall x \in [a,b]$ будем выбирать номер i так, чтобы точка x_i была ближайшей к точке x, тогда $|x_i - x| < \delta$ и по построению $|f_k(x_i) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Осталось проверить, что для так составленной функции $f_k(x)$ $\|f_\alpha - f_k\| < \varepsilon$, т.е. $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_\alpha(x) - f_k(x)| < \varepsilon$, т.е. $\forall x \in [a,b]$ $|f_\alpha(x) - f_k(x)| < \varepsilon$.

Действительно, $|f_\alpha(x) - f_k(x)| = |f_\alpha(x) - f_\alpha(x_i) + f_\alpha(x_i) - f_k(x_i) + f_k(x_i) - f_k(x)| \le$
$\le |f_\alpha(x) - f_\alpha(x_i)| + |f_\alpha(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Замечание: можно распространить доказанную теорему на случай пространства $C(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество (см. [7]).

Замечание: ясно, что для замкнутых множеств понятия компактности и предкомпактности совпадают.

Примеры решения задач

1. Доказать, что множество M непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, для которых $|x'(t)| \le 1$ при $t \in [0,1]$ и $x(0) = a$, предкомпактно в $C[0,1]$.

Решение: представим произвольную функцию $x(t) \in M$ в виде $x(t) = a + \int\limits_0^t x'(\tau)d\tau$. Тогда равномерная ограниченность таких функций следует из $|x(t)| = \left| a + \int\limits_0^t x'(\tau)d\tau \right| \le |a| + \left| \int\limits_0^t x'(\tau)d\tau \right| \le |a| + \int\limits_0^t |x'(\tau)| d\tau \le |a| + \int\limits_0^t 1 d\tau = |a| + t \le |a| + 1$.

Для проверки равностепенной непрерывности надо $\forall \varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, чтобы $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ из $|t_1 - t_2| < \delta$ следовало $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$. Пусть $t_1 < t_2$, тогда $|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int\limits_0^{t_1} x'(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_2} x'(\tau)d\tau \right| = \left| \int\limits_0^{t_1} x'(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_1} x'(\tau)d\tau - \int\limits_{t_1}^{t_2} x'(\tau)d\tau \right| =$
$= \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} x'(\tau)d\tau \right| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |x'(\tau)| d\tau \le \int\limits_{t_1}^{t_2} 1 d\tau = t_2 - t_1 < \varepsilon$ при выборе $\delta = \varepsilon$.

2. Пусть M – множество непрерывных на $[0,1]$ функций, для которых $|x(t)| \le 1$ при $t \in [0,1]$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$. Является ли оно компактным в $C[0,1]$?

Решение: рассмотрим функцию $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ такую, что $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$ $\forall x \in C[0,1]$. Легко проверить, что f непрерывна в $C[0,1]$, и, в частности, на множестве M. Кроме того, $f(x) \ge 0$. Предположим, что M – компактно, тогда по теореме Вейерштрасса f принимает на M свое наименьшее значение, т.е.

$\exists x_0(t)\in M$: $\inf\limits_{x\in M} f(x)=f(x_0)$. Тогда $\exists\{x_n(t)\}\subset M$: $f(x_n)\to f(x_0)$ при $n\to\infty$. Поскольку $f(x_n)\ge 0$, то и $f(x_0)\ge 0$. С другой стороны, $\forall x\in M$ $f(x_0)\le f(x)$, в частности, возьмем $x_n(t)=t^n\in M$ и получим $f(x_0)\le f(x_n)=\int\limits_0^1 t^{2n}dt=\dfrac{1}{2n+1}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $f(x_0)\le 0$. Из полученных неравенств следует, что $f(x_0)=0$, откуда $\int\limits_0^1 x_0^{\,2}(t)dt=0$. Значит, поскольку $x_0(t)$ непрерывна, то $x_0(t)=0$. Ясно, что $0\notin M$, т.е. получили противоречие, следовательно, множество M некомпактно.

3. Предкомпактно ли множество $x_\alpha(t)=\sin\alpha t$, $\alpha\in[1,2]$ в пространстве $C[0,1]$?

Решение: поскольку $\forall\alpha,t$ $|x_\alpha(t)|=|\sin\alpha t|\le 1$, то множество $x_\alpha(t)$ равномерно ограничено. Для проверки равностепенной непрерывности надо $\forall\varepsilon>0$ найти такое $\delta>0$, чтобы $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ $\forall\alpha$ из $|t_1-t_2|<\delta$ следовало $|x_\alpha(t_1)-x_\alpha(t_2)|<\varepsilon$.

Применяя теорему Лагранжа, при ξ, лежащем между t_1 и t_2, находим, что $|x_\alpha(t_1)-x_\alpha(t_2)|=|\sin\alpha t_1-\sin\alpha t_2|=|\alpha\cos\alpha\xi|\cdot|t_1-t_2|\le\alpha|t_1-t_2|\le 2\cdot|t_1-t_2|<\varepsilon$, откуда $|t_1-t_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. достаточно взять $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, множество $x_\alpha(t)$ предкомпактно.

4. Предкомпактно ли множество $x_n(t)=\sin nt$, $n\in\mathbb{N}$ в пространстве $C[0,1]$?

Решение: предположим, что множество предкомпактно, тогда по теореме Арцела-Асколи оно равностепенно непрерывно, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|t_1-t_2|<\delta$ $|x_n(t_1)-x_n(t_2)|<\varepsilon$. В частности, можно взять $t_1=0$ и $t_2=\dfrac{1}{n}$, тогда $|t_1-t_2|=\dfrac{1}{n}$, значит, начиная с некоторого n для любого $\delta>0$ $\dfrac{1}{n}<\delta$, т.е. $|t_1-t_2|<\delta$. Тогда $|x_n(t_1)-x_n(t_2)|=|\sin nt_1-\sin nt_2|=|\sin 1|=\sin 1$. Выбирая $\varepsilon<\sin 1$, получим противоречие с определением равностепенной непрерывности, значит множество не предкомпактно.

5. Предкомпактно ли множество $x_n(t)=t^n$, $n\in\mathbb{N}$ в пространстве $C[0,1]$?

Решение: предположим, что множество предкомпактно, тогда по теореме Арцела-Асколи оно равностепенно непрерывно, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|t_1-t_2|<\delta$ $|x_n(t_1)-x_n(t_2)|<\varepsilon$. В частности, можно взять $t_1=1$ и $t_2=1-\dfrac{1}{n}$, тогда $|t_1-t_2|=\dfrac{1}{n}$, значит, начиная с некоторого n для любого $\delta>0$ $\dfrac{1}{n}<\delta$, т.е. $|t_1-t_2|<\delta$. Тогда $|x_n(t_1)-x_n(t_2)|=|t_1^{\,n}-t_2^{\,n}|=\left|1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right|\to 1-\dfrac{1}{e}$ при $n\to\infty$.

Тем самым, начиная с некоторого n, $|x_n(t_1)-x_n(t_2)|>\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ и при выборе $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ получим противоречие с определением равностепенной непрерывности, значит множество не предкомпактно.

6. Доказать, что $C^{(1)}[a,b]$ можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных в $C[a,b]$ множеств.

Решение: пусть $S[0,n]$ – замкнутый шар радиуса n с центром в точке $x_0(t)\equiv 0$ в пространстве $C^{(1)}[a,b]$, т.е.

$$S[0,n]=\left\{x(t)\in C^{(1)}[a,b]: \|x\|_{C^{(1)}[a,b]}=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|+\sup_{t\in[a,b]}|x'(t)|\le n, \quad n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Легко доказать, что $C^{(1)}[a,b]=\bigcup_n S[0,n]$ (см. задачу 13). Для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим $S[0,n]$ уже как множество в $C[a,b]$. Это можно сделать, поскольку $C^{(1)}[a,b]\subset C[a,b]$. Если покажем, что при каждом $n\in\mathbb{N}$ множество $S[0,n]$ нигде не плотно в $C[a,b]$, то задача будет решена.

В силу нигде не плотности предкомпактного множества достаточно доказать, что $S[0,n]$ – предкомпактное множество в $C[a,b]$ для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$. По теореме Арцела-Асколи достаточно проверить равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность. Пусть $x\in S[0,n]\subset C^{(1)}[a,b]$. Заметим, что $\|x\|_{C[a,b]}=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|\le \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|+\sup_{t\in[a,b]}|x'(t)|=\|x\|_{C^{(1)}[a,b]}\le n$, т.е. множество $S[0,n]$ равномерно ограничено в $C[a,b]$ (см. доказательство теоремы Арцела-Асколи). Далее, возьмем $\forall\varepsilon>0$ и $\forall t_1,t_2\in[a,b]$, такие, что $|t_1-t_2|<\delta$. Тогда $\forall x\in S[0,n]\subset C^{(1)}[a,b]$ по теореме Лагранжа, получаем, что при ξ, лежащем между t_1 и t_2, $|x(t_1)-x(t_2)|=|x'(\xi)|\cdot|t_1-t_2|<\sup_{t\in[a,b]}|x'(t)|\cdot\delta\le n\delta=\varepsilon$, и, при $\delta=\frac{\varepsilon}{n}$, получаем, что для $S[0,n]$ выполнено определение равностепенной непрерывности в $C[a,b]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть M – множество непрерывных на $[0,1]$ функций, для которых $|x(t)|\le 1$ при $t\in[0,1]$. Доказать, что M не является предкомпактным множеством в пространстве $C[0,1]$.

Указание: привести пример не предкомпактного множества $x_n(t)$, удовлетворяющего условию задачи.

2. Предкомпактно ли множество $x_\alpha(t)=\cos\alpha t$, $\alpha\in[2,3]$ в пространстве $C[0,1]$?

3. Пусть M – равномерно ограниченное множество функций $x(t)$ в пространстве $C[a,b]$. Доказать, что множество функций вида $\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ предкомпактно в $C[a,b]$.

4. Предкомпактно ли множество $x_\alpha(t)=e^{t+\alpha}$, $\alpha\in[3,10]$ в пространстве $C[0,1]$?

5. Предкомпактно ли множество $x_\alpha(t)=\mathrm{arctg}\,\alpha t$, $\alpha\in\mathbb{R}$ в пространстве $C[0,1]$?

6. Пусть M – ограниченное множество функций $x(t)$ в пространстве $C[a,b]$, которые удовлетворяют условию Липшица с общей постоянной. Доказать, что M предкомпактно в $C[a,b]$.

Указание: условие Липшица имеет вид: $\forall t_1,t_2\in[a,b]\ \ |x(t_1)-x(t_2)|\le c|t_1-t_2|$.

7. Предкомпактно ли в $C[0,1]$ множество $M=\{e^{\alpha t}:\alpha\in[-2,0]\}$?

8. Предкомпактно ли в $C[0,1]$ множество $M=\{(at)^n:|a|>1,n\in\mathbb{N}\}$?

9. Доказать, что совокупность функций вида $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3}e^{-nx}$, где $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность такая, что $\forall n\in\mathbb{N}\ \ |a_n|<1$, образует предкомпактное множество в пространстве $C[a,b]$.

10. Доказать, что совокупность функций вида $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x+n^2}$, где $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – произвольная последовательность такая, что $\forall n\in\mathbb{N}\ \ |a_n|<1$, образует предкомпактное множество в пространстве $C[a,b]$.

11. Доказать предкомпактность в $C[a,b]$ множества всех тех функций, для которых $\forall x\in[a,b]\ \ [f'(x)]^2+f^2(x)<1$.

Указание: воспользоваться тем, что $[f'(x)]^2<1$ *и* $f^2(x)<1$.

12. Предкомпактно ли множество $M=\{x(t)\in C[0,1]:x(0)=x(1),|x'(t)|\le 1\}$ в пространстве $C[0,1]$?

13. Доказать, что $C^{(1)}[a,b]=\bigcup\limits_n S[0,n]$ (см. пример 6).

14. Предкомпактно ли множество $M=\{t^{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\}$ в пространстве $C[0,1]$?

15. При каких a и b множество $M=\{t^n:\ \ n\in\mathbb{N}\}$ будет предкомпактным в пространстве $C[a,b]$? Как это согласуется с примером 5?

Указание: при $-1<a<b<1$. *При проверке равностепенной непрерывности воспользоваться теоремой Лагранжа и получить условие, при котором производные функций множества* M *равномерно ограничены. Использовать предел* $\lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon^n = 0$ *при* $|\varepsilon|<1$.

16. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sqrt{t}\cos at:\quad a\in[0,1]\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

Указание: воспользоваться равномерной непрерывностью функции $f(t)=\sqrt{t}$ *на отрезке* $[0,1]$.

17. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\cos(at+b):\quad a\in[0,2], b\in\mathbb{R}\right\}$ в пространстве $C[0,2\pi]$?

18. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sin(t^2+n):\quad n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

19. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\cos\sqrt{nt}:\quad n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

20. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\cos\left(\sqrt{n}+t\right)+\sin(n+t):\quad n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

21. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\cos\sqrt{nt}-\cos\sqrt{n+1}t:\quad n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

Указание: показать, что производные равномерно ограничены.

22. Доказать, что в бесконечномерном банаховом пространстве шар с центром в начале координат радиуса R не является предкомпактным множеством. Доказать то же самое для шара с центром в произвольной точке пространства.

Указание: предположить противное, найти для шара с центром в начале координат конечную $R\varepsilon$*-сеть и показать, что в таком случае найдется конечная* ε*-сеть и для сжатого в* R *раз единичного шара. В случае шара с произвольным центром выполнить перенос центра в начало координат.*

23. Используя пример 6 и теорему Бэра показать, что множество $C^{(1)}[a,b]$ не может быть подпространством в $C[a,b]$.

24. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\ln(2+t^{\alpha}):\alpha\in(0,2]\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

Указание: найти последовательность $\{x_n\}\subset M$, *из которой нельзя выделить сходящуюся в* $C[0,1]$ *подпоследовательность.*

25. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\operatorname{arctg}\alpha\left(t-\dfrac{1}{2}\right):\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ в пространстве $C[0,1]$?

26. Предкомпактно ли множество $M=\left\{e^{t-\alpha}:\alpha\in\left[0,+\infty\right)\right\}$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

27. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sin\alpha t:\alpha\in\left[a,b\right)\right\}$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

28. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sin(t+\alpha):\alpha\in\left[a,b\right)\right\}$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

29. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sin(t+n):n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

30. Предкомпактно ли множество $M=\left\{n\left(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{t}\right):n\in\mathbb{N}\right\}$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

Указание: показать, что множество не является равномерно ограниченным.

31. Предкомпактно ли множество $M=\left\{x\in C^{(2)}\left[a,b\right]:\left|x(t)\right|\le c_0,\left|x'(t)\right|\le c_1,\left|x''(t)\right|\le c_2\right\}$ в пространстве $C\left[a,b\right]$?

32. Предкомпактно ли множество $M=\left\{x\in C^{(2)}\left[a,b\right]:\left|x(t)\right|\le c_0,\left|x''(t)\right|\le c_2\right\}$ в пространстве $C\left[a,b\right]$?

Указание: см. указание к задаче 34. Показать, что первые производные равномерно ограничены.

33. Предкомпактно ли множество $M=\left\{x\in C^{(2)}\left[a,b\right]:\left|x'(t)\right|\le c_1,\left|x''(t)\right|\le c_2\right\}$ в пространстве $C\left[a,b\right]$?

Указание: подобрать пример не равномерно ограниченного множества $x_n(t)$, принадлежащего M.

34. Пусть $M=\left\{x\in C^{(1)}\left[a,b\right]:\left|x'(t)\right|\le c_0\right\}$. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве $C\left[a,b\right]$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $c_1>0$ такая, что для всех $x(t)\in M$ $\left|\int_a^b x(t)dt\right|\le c_1$.

Указание: при доказательстве равномерной ограниченности воспользоваться теоремой о среднем, согласно которой $\int_a^b x(\tau)d\tau=x(\xi)(b-a)$ и представить $x(t)=\int_\xi^t x'(\tau)d\tau+x(\xi)$.

35. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sin(\sqrt{t}+a):a\in\mathbb{R}\right\}$ в $C\left[0,1\right]$?

36. Предкомпактно ли множество $M=\left\{\sqrt{t}\cos\frac{a}{t}: a\in[0,1]\right\}$ в $C[0,1]$?

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=\sqrt{t}\cos\frac{a_n}{t}\in M$ *и показать, что из неё можно выделить сходящуюся в* M *подпоследовательность* $x_{n_k}(t)=\sqrt{t}\cos\frac{a_{n_k}}{t}$. *См. указание к задаче 43, п.1.3 раздела I.*

37. Является ли предкомпактным в пространстве $C[0,1]$ множество $M=\left\{x(t)\in C[0,1]: a\geq 1, \forall t\in[0,1], x(t)=\sqrt{t}\cos(at)\right\}$.

Указание: найти последовательность элементов M*, из которой нельзя выделить сходящуюся в* $C[0,1]$ *подпоследовательность.*

38. Предкомпактно ли в $C[0,1]$ множество функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $t^4\leq f(t)\leq t^3$?

Указание: рассмотреть $f_n(t)=t^4\cos^2 nt+t^3\sin^2 nt$.

39. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что $\int\limits_a^b\left(|x(t)|^2+|x'(t)|^2\right)dt\leq c$ является предкомпактным в пространстве $C[a,b]$.

Указание: представить $x(t)=x(a)+\int\limits_a^t x'(\tau)d\tau$. *Для оценки величины* $|x(a)|$ *предварительно проинтегрировать указанное представление по отрезку* $[a,b]$. *Использовать неравенство Коши-Буняковского для интегралов.*

40. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что $\int\limits_a^b|x'(t)|^p\,dt\leq 1$, $1<p<\infty$, $|x(0)|\leq 1$ является предкомпактным в пространстве $C[a,b]$.

41. Используя теорему об изоморфности конечномерных пространств доказать, что подмножество конечномерного пространства предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

42. Являются ли множества $M=\left\{\cos^2(at^2): a\in\mathbb{R}\right\}$, $N=\left\{\left|\sin(at^2)\right|: a\in\mathbb{R}\right\}$ и $L=\left\{\frac{a^3}{(a+t+1)^2}: a\in[0,2]\right\}$ предкомпактными в $C[0,1]$?

43. Являются ли множества $M=\left\{t^{2n}-t^n: n\in\mathbb{N}\right\}$, $N=\left\{t^{n+1}-t^n: n\in\mathbb{N}\right\}$ и $L=\left\{\sqrt{1-t^n}: n\in\mathbb{N}\right\}$ предкомпактными в $C[0,1]$?

44. Доказать, что множество M в пространстве $C^{(n)}[a,b]$, $n=1,2,...$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено, а множество $M_n=\left\{x^{(n)}(t):x(t)\in M\right\}$ равностепенно непрерывно.

45. Верно ли, что множество M предкомпактно в пространстве $C^{(n)}[a,b]$, $n=1,2,...$ тогда и только тогда, когда множество M_n из предыдущей задачи предкомпактно в $C[a,b]$?

46. При каких $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ множество $M=\left\{x\in l_p:\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\left|\xi_n\right|^{\beta}\le 1\right\}$ предкомпактно в пространствах l_p, $1\le p<\infty$?

47. Пусть $M=\left\{x\in l_1:\xi_n=\int\limits_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos nt\,dt,\ y\in C^{(1)}[-\pi,\pi],\left\|y\right\|_{C^{(1)}}\le 1\right\}$. Является ли множество M предкомпактным?

48. Является ли множество $M=\left\{x\in l_1:\xi_n=\int\limits_{0}^{1}\frac{y(t)}{n^2+t^2}dt,\ y\in C[0,1],\left\|y\right\|_{C}\le 1\right\}$ предкомпактным?

49. Является ли замкнутым, ограниченным и предкомпактным множество $M=\left\{x\in C\left[0,1\right]:\exists a\in\left[1,+\infty\right),\forall t\in\left(0,1\right]\ x(t)=e^{-\frac{a}{t}}\right\}$?

2.7. Пространства $L_p(E,d\mu)$, $1\le p\le\infty$

Определение: пусть $1\le p<\infty$. Пространством $L_p(E,d\mu)$ называется множество классов $[f]$ измеримых функций, таких, что $\forall f\in[f]$ $\int\limits_E |f|^p\,d\mu<+\infty$ с нормой $\|f\|=\left(\int\limits_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Замечание: поскольку значение интеграла Лебега не зависит от того, какой представитель класса $[f]$ стоит под знаком интеграла, то под знаком нормы и интеграла квадратные скобки можно опускать.

Теорема (о пространстве $L_p(E,d\mu)$): $L_p(E,d\mu)$ действительно является линейным нормированным пространством.

Доказательство: 1. Проверим линейность, т.е.:

а) Если $[f]\in L_p(E,d\mu)$, то $[\lambda f]\in L_p(E,d\mu)$, $\lambda\in\mathbb{R}$;

б) Если $[f],[g]\in L_p(E,d\mu)$, то $[f+g]\in L_p(E,d\mu)$.

а) Поскольку $\int\limits_E |f|^p\,d\mu<+\infty$, то $\int\limits_E |\lambda f|^p\,d\mu=|\lambda|^p\int\limits_E |f|^p\,d\mu<+\infty$.

б) Поскольку $[f],[g]\in L_p(E,d\mu)$, то $\int\limits_E |f|^p\,d\mu<+\infty$ и $\int\limits_E |g|^p\,d\mu<+\infty$, тогда из неравенства Минковского следует, что $\int\limits_E |f+g|^p\,d\mu<+\infty$.

2. Проверим аксиомы нормы, т.е.:

а) $\|f\|\ge 0$;

б) $\|f\|=0\Leftrightarrow[f]=[0]$;

в) $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$;

г) $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$.

Все эти свойства вытекают из определения нормы в $L_p(E,d\mu)$ и неравенства Минковского. Неочевидным является лишь следствие $\|f\|=0\Rightarrow[f]=[0]$.

Если $\|f\|=0$, то $\int\limits_E |f|^p d\mu=0$ откуда, по теореме о функциях с нулевым интегралом, $f\overset{п.в.}{=}0$, значит, по определению класса, $[f]=[0]$.

Теорема доказана.

Замечание: в дальнейшем, (кроме особо оговоренных случаев) будем писать $L_p(E,d\mu)=L_p$ и говорить “функция $f\in L_p$” вместо “класс $[f]\in L_p$”.

Определение: если $1\le p<\infty$ и $f_n(x)\xrightarrow{L_p}f(x)$, т.е. $\|f_n-f\|\to 0$, то такая сходимость называется сходимостью в среднем в степени p.

Теорема (о связи видов сходимостей): 1. Равномерная сходимость последовательности измеримых функций $f_n(x)$ влечет за собой любую другую сходимость (в некоторых случаях необходимо выполнение условия $\mu(E)<+\infty$).

2. Если $\mu(E)<+\infty$ и $p>q\geq 1$, то сходимость в среднем в степени p влечет за собой сходимость в среднем в степени q.

3. Если $\mu(E)\leq +\infty$, то сходимость в среднем в степени p влечет за собой сходимость по мере.

Доказательство: 1. То, что из равномерной сходимости следует поточечная, известно из курса математического анализа. Если последовательность сходится поточечно, то она, очевидно, сходится и почти всюду. То, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем в степени p при $\mu(E)<+\infty$, предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 7).

Пусть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N\ \ \forall x\in E\ \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Отсюда $\forall n>N\ \ \{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}=\varnothing$, т.е. $\forall n>N\ \ \mu\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}=0$, поэтому $\forall\varepsilon>0\ \lim\limits_{n\to\infty}\mu\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}=0$, т.е. $f_n(x)$ сходится по мере.

2. Предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 15).

3. Пусть $f_n(x)\xrightarrow{L_p} f(x)$, т.е. $\int\limits_E |f_n(x)-f(x)|^p\,d\mu\underset{n\to\infty}{\to}0$. В силу обобщённого неравенства Чебышева $\forall\sigma>0\ \ \mu\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\geq\sigma\}\leq\dfrac{1}{\sigma^p}\int\limits_E |f_n(x)-f(x)|^p\,d\mu$, тогда, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что и требовалось.

Теорема доказана.

Замечание: поскольку из условия $f_n(x)\xrightarrow{L_p} f(x)$ следует $f_n(x)\xrightarrow{\mu} f(x)$, а из $f_n(x)\xrightarrow{\mu} f(x)$ следует $f_{n_k}(x)\xrightarrow{п.в.} f(x)$, то, если $f_n(x)\xrightarrow{L_p} f(x)$, то $\exists f_{n_k}(x)\xrightarrow{п.в.} f(x)$. Тем самым, если $f_n(x)\xrightarrow{п.в.} f(x)$ то в среднем последовательность $f_n(x)$ может сходиться только к функции $f(x)$.

Определение: пусть f – измеримая функция на измеримом множестве E, $c\in\mathbb{R}$. Число c называется почти всюду мажорантой (минорантой) для f, если неравенство $f(x)\leq c$ ($f(x)\geq c$) выполняется почти всюду на E.

Определение: точная нижняя грань множества почти всюду мажорант функции называется ее существенной точной верхней гранью и обозначается $\operatorname*{esssup}\limits_{x\in E} f(x)$. Точная верхняя грань множества почти всюду минорант функции называется ее существенной точной нижней гранью и обозначается $\operatorname*{essinf}\limits_{x\in E} f(x)$.

Замечание: $\operatorname*{esssup}\limits_{x\in E} f(x)$ и $\operatorname*{essinf}\limits_{x\in E} f(x)$ не изменятся, если функцию изменить на множестве нулевой меры, т.е. эти понятия корректно определены для классов почти всюду совпадающих функций.

Замечание: таким образом, $\operatorname*{esssup}_{x\in E} f(x) = \inf\left\{a\in\mathbb{R} : \mu(x\in E : f(x) > a) = 0\right\}$.

Теорема (о достижимости $\operatorname*{esssup}_{x\in E} f(x)$***):*** если $\operatorname*{esssup}_{x\in E} f(x) = A$, то A – наименьшая из почти всюду мажорант функции f на множестве E.

Доказательство: по свойству точной нижней грани найдется последовательность $a_n \in \left\{a\in\mathbb{R} : \mu(x\in E : f(x) > a) = 0\right\}$ такая, что $a_n \to A$. По определению почти всюду мажоранты для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует множество M_n нулевой меры такое, что $\forall x\notin M_n \quad f(x)\le a_n$. Если $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, то, в силу счетной полуаддитивности меры Лебега, $\mu(M) = 0$ и $\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\notin M \quad f(x)\le a_n$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим $\forall x\notin M \quad f(x)\le A$, т.е. A – почти всюду мажоранта f.

Теорема доказана.

Определение: функция называется существенно ограниченной сверху (снизу), если у нее существует хотя бы одна п.в. мажоранта (п.в. миноранта). Функция называется существенно ограниченной, если она существенно ограничена и сверху, и снизу.

Теорема (о существовании $\operatorname*{esssup}_{x\in E} f(x)$***):*** пусть f – измеримая на множестве E функция, существенно ограниченная на нем сверху, тогда f имеет на E существенную точную верхнюю грань.

Доказательство: поскольку f существенно ограничена сверху, то у нее есть п.в. мажоранта M. По определению $f(x) \overset{п.в.}{\le} M$, т.е. $\mu\left\{x\in E : f(x) > M\right\} = 0$, а $\mu\left\{x\in E : f(x)\le M\right\} \ne 0$. Пусть X – множество п.в. мажорант f. Поскольку f имеет п.в. мажоранту, то X непусто. Покажем, что X ограничено снизу. От противного: допустим, что X снизу не ограничено, тогда $\forall c\in\mathbb{R} \;\; \exists y\in X : \; y < c$. Поскольку $f(x) \overset{п.в.}{\le} y$, то $f(x) \overset{п.в.}{<} c$ на множестве E, т.е. $\mu\left\{x\in E : f(x)\ge c\right\} = 0$. Пусть $E_1 = \left\{x\in E : f(x)\ge 0\right\}$, тогда $\mu(E_1) = 0$. Если $E_2 = \left\{x\in E : f(x)\ge -1\right\}$, то $\mu(E_2) = 0$ и т.д. Очевидно, что $E\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ откуда $\mu(E)\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = 0$. Итак, $\mu(E) = 0$. Поскольку $\left\{x\in E : f(x)\le M\right\}\subset E$, то $\mu\left\{x\in E : f(x)\le M\right\} = 0$. Противоречие. Таким образом, множество X имеет точную нижнюю грань, которая и будет существенной точной верхней гранью для f.

Теорема доказана.

Теорема (свойства $\operatorname*{esssup}_{x\in E} f(x)$***):*** 1. Если функции f и g существенно ограничены сверху на E, то их сумма $f+g$ также существенно ограничена сверху на E и при этом $\operatorname{esssup}(f+g)\le \operatorname{esssup} f + \operatorname{esssup} g$.

2. Если f существенно ограничена сверху на E и $\lambda\ge 0$, то λf также существенно ограничена сверху на E и при этом $\operatorname{esssup}\lambda f = \lambda \operatorname{esssup} f$.

3. Если функция g существенно ограничена сверху на E и $f \overset{п.в.}{\leq} g$ на E, то $\operatorname{esssup} f \leq \operatorname{esssup} g$.

Доказательство: 1. Пусть f и g существенно ограничены сверху, M_1 – п.в. мажоранта f, M_2 – п.в. мажоранта g, тогда $f(x) \overset{п.в.}{\leq} M_1$ и $g(x) \overset{п.в.}{\leq} M_2$. Складывая, получаем, что $f(x)+g(x) \overset{п.в.}{\leq} M_1+M_2$. Значит, M_1+M_2 – п.в. мажоранта для $f(x)+g(x)$, т.е. $f(x)+g(x)$ существенно ограничена сверху, и наименьшая п.в. мажоранта эту не превосходит, т.е. $\operatorname{esssup}(f+g) \leq M_1+M_2$.

2. Пусть $M = \operatorname{esssup} f$, тогда $f(x) \overset{п.в.}{\leq} M$, $\lambda f \overset{п.в.}{\leq} \lambda M$, т.е. λM – п.в. мажоранта для λf и $\operatorname{esssup} \lambda f \leq \lambda M$. Пусть есть еще одна п.в. мажоранта для λf $M_1 < \lambda M$. Тогда $\lambda f \overset{п.в.}{\leq} M_1$, откуда $f \overset{п.в.}{\leq} \dfrac{M_1}{\lambda}$, т.е. $\dfrac{M_1}{\lambda}$ – п.в. мажоранта для f. При этом $M \leq \dfrac{M_1}{\lambda}$, откуда $\lambda M \leq M_1$ – противоречие.

3. Предлагается доказать самостоятельно (задача 1).

Теорема доказана.

Определение: пространством $L_\infty(E, d\mu) = L_\infty$ называется множество классов почти всюду совпадающих измеримых функций, которые существенно ограничены и норма определяется равенством $\|f\| = \operatorname*{esssup}_{x\in E} |f(x)|$.

Теорема (о пространстве L_∞): L_∞ – есть линейное нормированное пространство и $\|f\|$ действительно является нормой.

Доказательство: 1. Свойства линейности следуют из пунктов 1 и 2 предыдущей теоремы.

2. Аксиомы нормы, за исключением следствия $\|f\| = 0 \Rightarrow [f] = [0]$, очевидны из определения нормы и предыдущей теоремы. Пусть $\operatorname{esssup}|f| = 0$, т.е. 0 является п.в. мажорантой для f, т.е. $|f| \overset{п.в.}{\leq} 0$. Отсюда $|f| \overset{п.в.}{=} 0$ и $f \overset{п.в.}{=} 0$.

Теорема доказана.

Замечание: в дальнейших примерах и задачах там, где не оговорено явно, рассматриваются пространства L_p для конечного p.

Примеры решения задач

1. Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ сходится поточечно к функции $x(t) = 0$ для любого $t \geq 0$, но не сходится в пространстве $L_2[0,1]$.

Решение: $\forall t \in [0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 t}{e^{nt}} = 0$, в силу сравнения скоростей роста степенной и показательной функций, значит, $x_n(t) \to 0 = x(t)$ поточечно.

Проверим сходимость в пространстве $L_2[0,1]$, т.е. по норме этого пространства: $\|x_n(t)-x(t)\| = \sqrt{\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 n^4 t^2 e^{-2nt} dt} = n^2\sqrt{\int_0^1 t^2 e^{-2nt} dt} =$

$$= n^2\sqrt{-\frac{1}{2n}\int_0^1 t^2 de^{-2nt}} = n^2\sqrt{-\frac{1}{2n}\left(t^2e^{-2nt}\Big|_0^1 - \int_0^1 2te^{-2nt}dt\right)} = n^2\sqrt{-\frac{1}{2n}\left(e^{-2n} + \frac{1}{2n}\int_0^1 2tde^{-2nt}\right)} =$$

$$= n^2\sqrt{-\frac{e^{-2n}}{2n} - \frac{1}{4n^2}\left(2te^{-2nt}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^{-2nt}dt\right)} = n^2\sqrt{-\frac{e^{-2n}}{2n} - \frac{1}{4n^2}\left(2e^{-2n} + \frac{2}{2n}e^{-2nt}\Big|_0^1\right)} =$$

$$= n^2\sqrt{-\frac{e^{-2n}}{2n} - \frac{1}{4n^2}\left(2e^{-2n} + \frac{1}{n}e^{-2n} - \frac{1}{n}\right)} = n^2\sqrt{-\frac{e^{-2n}}{2n} - \frac{e^{-2n}}{2n^2} - \frac{e^{-2n}}{4n^3} + \frac{1}{4n^3}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{n^3e^{-2n}}{2} - \frac{n^2e^{-2n}}{2} - \frac{ne^{-2n}}{4} + \frac{n}{4}} = \sqrt{-\frac{n^3}{2e^{2n}} - \frac{n^2}{2e^{2n}} - \frac{n}{4e^{2n}} + \frac{n}{4}} \to +\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, $x_n(t) = n^2te^{-nt}$ не сходится в $L_2[0,1]$.

2. Определить, при каких значениях $p \ge 1$ последовательность $f_n(x) = n^2e^{-nx^2}$ сходится в пространстве $L_p(\mathbb{R}, dx)$.

Решение: при $x=0$ $f_n(x) = n^2 \to +\infty$. При $x \ne 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{nx^2}} = 0$. Таким образом, поточечно $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\end{cases}$. Значит, $f_n(x) \xrightarrow{п.в.} 0$, поскольку $f_n(x)$ не сходится к нулю только в одной точке. Таким образом, последовательность $f_n(x)$ может сходиться в $L_p(\mathbb{R}, dx)$ только к нулю. Используя интеграл Эйлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, сосчитаем:

$$\|f_n(x)-f(x)\|^p = \int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty} n^{2p}e^{-npx^2}dx = \frac{n^{2p}}{\sqrt{np}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt = \frac{n^{2p}\sqrt{\pi}}{\sqrt{np}}.$$

Таким образом, $\|f_n(x)-f(x)\|^p = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}n^{\frac{1}{2}-2p}} \to 0$ при $\dfrac{1}{2} - 2p > 0$, т.е. при $p < \dfrac{1}{4}$, что противоречит условию $p \ge 1$. Значит, последовательность не сходится ни в каком пространстве $L_p(\mathbb{R}, dx)$ при $p \ge 1$.

3. Пусть $\mu(E) < +\infty$. Доказать, что при $p > q \ge 1$ $L_\infty \subset L_p \subset L_q$.

Решение: пусть $f \in L_\infty$, т.е. $|f| \overset{п.в.}{\le} M$, тогда $\int_E |f|^p d\mu \le \int_E M^p d\mu = M^p\mu(E) < +\infty$, т.е. $f \in L_p$ (при $p \ge 1$). Далее, пусть $f \in L_p$, $p > 1$, т.е. $\int_E |f|^p d\mu < +\infty$. Обозначим $p'=\dfrac{p}{q}>1$ и найдем q' такое, что $\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}=1$. Применим неравенство Гельдера: $\int\limits_E |f|^q d\mu=\int\limits_E |f|^q\cdot 1d\mu\le\left(\int\limits_E |f|^{qp'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_E 1^{q'}d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}=\left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}(\mu(E))^{\frac{1}{q'}}<+\infty$, следовательно, $f\in L_q$.

4. Пусть $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$, $f\in L_p$, $g\in L_q$, $h\in L_r$. Доказать, что $f\cdot g\cdot h\in L_1$ и $\|f\cdot g\cdot h\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r$.

Решение: пусть $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{s}$, тогда $\dfrac{1}{q/s}+\dfrac{1}{r/s}=1$. Кроме того, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{s}=1$. Тогда в силу неравенства Гельдера (в виде норм):

$$\|f\cdot g\cdot h\|_1\le\|f\|_p\|gh\|_s\le\|f\|_p\|g\|_{sq/s}\|h\|_{sr/s}=\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

5. Показать, что функция $y=\left(x\ln^2\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ принадлежит пространству $L_1\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, но не принадлежит ни одному из пространств $L_p\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ при $p>1$.

Решение: рассматриваемая функция не определена только в нуле, поэтому она определена почти всюду на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Чтобы убедиться, что $y\in L_1\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, надо доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|\left(x\ln^2\dfrac{1}{x}\right)^{-1}\right|dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x\ln^2\frac{1}{x}}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$ конечен. Действительно, $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\dfrac{1}{\ln x}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\ln 2}$. Для того чтобы показать, что $y\notin L_p\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ при $p>1$, надо показать, что интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|\left(x\ln^2\dfrac{1}{x}\right)^{-1}\right|^p dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^p\ln^{2p}x}dx$ расходится. Заметим, что этот интеграл является несобственным с единственной особенностью в точке 0, причем подынтегральная функция неотрицательна. Поэтому удобно исследовать этот интеграл, сравнивая его с какой-либо функцией в окрестности точки 0.

Поскольку $p>1$, то $\exists\varepsilon>0$: $p-\varepsilon>1$. Далее, применяя правило Лопиталя, имеем $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\varepsilon}\ln^{2p}x=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln^{2p}x}{\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\right)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2p\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\ln^{2p-1}x}{-\varepsilon\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon+1}}\right)}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2p\ln^{2p-1}x}{-\varepsilon\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\right)}$. Через $2p-1$

шагов получим, что нужный нам предел равен 0, т.е. $\forall \varepsilon_1 > 0\ \ \exists \delta > 0: \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $0 < x < \delta \quad x^\varepsilon \ln^{2p} x < \varepsilon_1$, откуда $\frac{1}{x^\varepsilon \ln^{2p} x} > \frac{1}{\varepsilon_1}$. Выберем $\varepsilon_1 = 1$, тогда $\forall x \in (0, \delta)$ $\frac{1}{x^\varepsilon \ln^{2p} x} > 1$ и получим, что $\frac{1}{x^p \ln^{2p} x} = \frac{1}{x^{p-\varepsilon} x^\varepsilon \ln^{2p} x} > \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{1}{x^{p-\varepsilon}} dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{1}{x^p \ln^{2p} x} dx$ также расходится в силу признака сравнения.

6. Пусть $f \in L_p\big((0,+\infty), dx\big)$, $1 < p < 2$. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin xy}{\sqrt{x}} dx$, $y \in \mathbb{R}$ является абсолютно сходящимся.

Решение: в силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(x)| \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\right| dx \le \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $f \in L_p\big((0,+\infty), dx\big)$, то осталось показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\right|^q dx$ сходится на $(0,+\infty)$, т.е. что $\frac{\sin xy}{\sqrt{x}} \in L_q\big((0,+\infty), dx\big)$, где q таково, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Заметим, что $\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\right|^q \le \frac{1}{x^{\frac{q}{2}}}$. Кроме того, поскольку $1 < p < 2$, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$, откуда $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{q} < 1$, значит, $q > 2$. Значит, $\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{q}{2}}} dx$ сходится и по признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\right|^q dx$.

7. Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \frac{|\mathrm{arctg} x|^\beta}{(1+x^2)^\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L_p\big(\mathbb{R}, dx\big)$ при $p \ge 1$.

Решение: ясно, что необходимо исследовать на абсолютную сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{|\mathrm{arctg} x|^\beta}{(1+x^2)^\alpha}\right|^p dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathrm{arctg} x|^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{arctg} x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} dx$. Особыми точками для этого интеграла являются точки $x = 0$ (если $\beta < 0$) и $x = +\infty$.

При $x \to 0$ и $\beta < 0$ $\mathrm{arctg} x \sim x$, значит, $\frac{(\mathrm{arctg} x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}} \sim x^{\beta p} = \frac{1}{x^{-\beta p}}$. Поскольку интеграл $\int\limits_0^{\delta}\frac{1}{x^{-\beta p}}dx$ при малых δ сходится только при $-\beta p<1$, то исходный интеграл сходится в окрестности точки 0 по признаку сравнения при $-\frac{1}{p}<\beta<0$.

При $\beta\geq 0$ в окрестности точки 0 интеграл сходится, поскольку подынтегральная функция непрерывна в этой окрестности. Итак, при всех $\beta>-\frac{1}{p}$ интеграл сходится в окрестности точки $x=0$.

При $x\to+\infty$ $\operatorname{arctg}x\sim\frac{\pi}{2}$, $1+x^2\sim x^2$, тогда $\frac{(\operatorname{arctg}x)^{\beta p}}{(1+x^2)^{\alpha p}}\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta p}\cdot\frac{1}{x^{2\alpha p}}$. Поскольку интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha p}}dx$ сходится только при $2\alpha p>1$, то исходный интеграл сходится в окрестности $+\infty$ по признаку сравнения при $\alpha>\frac{1}{2p}$.

Итак, $f\in L_p\left(\mathbb{R},dx\right)$ при $\alpha>\frac{1}{2p}$ и $\beta>-\frac{1}{p}$.

8. Определить, для каких значений $\alpha\in\mathbb{R}$ функция $f(x,y)=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$, $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ принадлежит пространству $L_p\left(\mathbb{R}^2,dxdy\right)$ при $p\geq 1$.

Решение: снова надо исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha p}}$. Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, учитывая, что $r\geq 0$ и $\varphi\in\left[0,2\pi\right]$. Якобиан перехода: $\begin{vmatrix}x_r' & x_{\varphi}'\\ y_r' & y_{\varphi}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha p}}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rd\varphi dr}{(1+r^2)^{\alpha p}}=2\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{rdr}{(1+r^2)^{\alpha p}}$. Получили интеграл с единственной особенностью в точке $x=+\infty$. При $r\to+\infty$ $1+r^2\sim r^2$, т.е. $\frac{r}{(1+r^2)^{\alpha p}}\sim\frac{r}{r^{2\alpha p}}=\frac{1}{r^{2\alpha p-1}}$. Поскольку интеграл $\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{r^{2\alpha p-1}}dr$ сходится только при условии $2\alpha p-1>1$, то исходный интеграл сходится только при $\alpha>\frac{1}{p}$.

9. Определить, для каких $p\geq 1$ последовательность $f_n(x)=\sqrt{n}\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}(x)$, $n\in\mathbb{N}$, где $\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}(x)$ – характеристическая функция промежутка $\left[0,\frac{1}{n}\right)$, сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

Решение: напомним, что характеристическая функция множества E определяется следующим образом: $\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$, т.е. $\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right)\\ 0, & x\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right)\end{cases}$.

Тогда $f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n}, & x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right)\\ 0, & x\in(-\infty,0)\cup\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right)\end{cases}$. При $n\to\infty$ получаем, что $f_n(x)\to\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\end{cases}$, и, таким образом, $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} f(x)=0$ на множестве $\mathbb{R}$. Значит, последовательность $f_n(x)$ может сходиться в $L_p(\mathbb{R},dx)$ только к нулю. Тогда $\|f_n-f\|_{L_p}=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{n}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\left(\sqrt{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=$

$=\left(\dfrac{1}{n^{1-\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{p}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\underset{n\to\infty}{\to}0$ только при $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}>0$, т.е. при $p<2$. Итак, в $L_p(\mathbb{R})$ рассматриваемая последовательность сходится только при $1\le p<2$.

10. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Рассмотрим последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}\in L_p(X,d\mu)$, $x\in X$, $p\ge 1$ и функцию $\varphi(x)\in L_p(X,d\mu)$, для которых выполнены условия:

а) $|f_n(x)|\le\varphi(x)$ почти всюду на X для всех $n\in\mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ почти всюду на X.

Доказать, что $f(x)\in L_p(X,d\mu)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ в $L_p(X,d\mu)$.

Решение: поскольку $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x)|\overset{п.в.}{\le}\varphi(x)$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $|f(x)|\overset{п.в.}{\le}\varphi(x)$. Тогда $|f(x)|^p\overset{п.в.}{\le}(\varphi(x))^p$, следовательно, $\int\limits_X|f(x)|^p d\mu\le\int\limits_X(\varphi(x))^p d\mu$. Поскольку $\varphi(x)\in L_p(X,d\mu)$, то и $f(x)\in L_p(X,d\mu)$. Таким образом, все функции $f_n(x)-f(x)$ также принадлежат $L_p(X,d\mu)$, следовательно, все функции $|f_n(x)-f(x)|^p$ являются суммируемыми.

Рассмотрим вспомогательные функции $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|^p$. Тогда, согласно условию б) $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=0$ почти всюду на X. Для $\{g_n(x)\}$ выполнено первое условие теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Оценим функции $g_n(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|^p$. Если в некоторой точке $x\in X$ $\left|f_n(x)\right|\le\left|f(x)\right|$, то

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|^p\le\left(\left|f_n(x)\right|+\left|f(x)\right|\right)^p\le\left(2\left|f(x)\right|\right)^p=2^p\left|f(x)\right|^p\le 2^p\left(\left|f_n(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right).$$

С другой стороны, если в некоторой точке $x\in X$ $\left|f(x)\right|\le\left|f_n(x)\right|$, то

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|^p\le\left(\left|f_n(x)\right|+\left|f(x)\right|\right)^p\le\left(2\left|f_n(x)\right|\right)^p=2^p\left|f_n(x)\right|^p\le 2^p\left(\left|f_n(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right).$$

Итак, в любой точке множества X $\left|f_n(x)-f(x)\right|^p\le 2^p\left(\left|f_n(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right)$, в частности, $g_n(x)\overset{п.в.}{\le} 2^p\left(\left|f_n(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right)$. Тогда, в силу условия а) получаем, что $g_n(x)\overset{п.в.}{\le} 2^p\left(\left|\varphi(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right)$. Поскольку функции $\left|\varphi(x)\right|^p$ и $\left|f(x)\right|^p$ суммируемы, то $2^p\left(\left|\varphi(x)\right|^p+\left|f(x)\right|^p\right)=\left|2\varphi(x)\right|^p+\left|2f(x)\right|^p$ – также суммируема и выполнено второе условие теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Тогда, по этой теореме, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n(x)d\mu=\int\limits_X\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)d\mu=\int\limits_X 0d\mu=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X\left|f_n(x)-f(x)\right|^p d\mu=0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f_n-f\right\|_{L_p}=0$, а это и требовалось доказать.

11. Исследовать на сходимость в пространствах $L_p[0,1]$, $1\le p<\infty$ последовательность $x_n(t)=\begin{cases}1,\ 0\le t<\dfrac{1}{n}\\ t^{-\frac{1}{\pi}},\ \dfrac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$.

Решение: ясно, что поточечно данная последовательность сходится к функции $x(t)=\begin{cases}1,\ t=0\\ t^{-\frac{1}{\pi}},\ 0<t\le 1\end{cases}$, т.е. $x_n(t)\xrightarrow{п.в.}t^{-\frac{1}{\pi}}$. При этом, $t^{-\frac{1}{\pi}}\in L_p[0,1]$ тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{t^{\frac{p}{\pi}}}dt$, т.е. при $\frac{p}{\pi}<1$, $p<\pi$. Далее, очевидно, что $\left|x_n(t)-t^{-\frac{1}{\pi}}\right|^p\le t^{-\frac{p}{\pi}}$, причем $t^{-\frac{p}{\pi}}$ – суммируема и $\left|x_n(t)-t^{-\frac{1}{\pi}}\right|^p\xrightarrow{п.в.}0$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b\left|x_n(t)-t^{-\frac{1}{\pi}}\right|^p dt=0$, поэтому $\left\|x_n-t^{-\frac{1}{\pi}}\right\|^p\to 0$, т.е. последовательность сходится в $L_p[0,1]$ при $1\le p<\pi$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать свойство 3 теоремы о свойствах существенных точных верхних граней.

2. Пусть $X=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{п.в.}0$. Применить теорему Егорова к последовательности $f_n(x)=x^n$ на отрезке $[0,1]$, т.е. найти множество Егорова.

3. Рассмотрим на $[0,1]$ функцию Дирихле $D(t)=\begin{cases}1, \text{ если } t \text{ рационально,}\\ 0, \text{если } t \text{ иррационально.}\end{cases}$.

Доказать, что $D(t)\overset{п.в.}{=}0$. Доказать, что функция Дирихле не интегрируема по Риману на $[0,1]$, но интегрируема по Лебегу на $[0,1]$ и найти ее интеграл Лебега. Является ли число $c=\dfrac{1}{2}$ почти всюду мажорантой или минорантой для функции Дирихле на отрезке $[0,1]$? Доказать, что $\operatorname*{esssup}\limits_{t\in[0,1]} D(t)=\operatorname*{essinf}\limits_{t\in[0,1]} D(t)=0$.

4. Для функций $f(x)=\begin{cases}5, x=1\\ -4, x=-1\\ 2, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\end{cases}$ и $g(x)=\begin{cases}x^3, x\in\mathbb{Q}\\ \operatorname{arctg} x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ найти существенные точные верхнюю и нижнюю грани на $\mathbb{R}$. Сравнить их с точными верхней и нижней гранями. Как связаны точная верхняя и нижняя грани произвольной функции с существенными точными верхней и нижней гранями?

5. Пусть $1\le p<q<\infty$. Доказать, что $\left(\int\limits_a^b \dfrac{|x(t)|^p}{b-a}dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_a^b \dfrac{|x(t)|^q}{b-a}dt\right)^{\frac{1}{q}}$, $x\in L_q[a,b]$.

6. Доказать, что если $x(t), y(t)\in L_2[a,b]$, то $x(t)\cdot y(t)\in L_1[a,b]$.

7. Доказать, что всякая последовательность $x_n(t)$, сходящаяся в пространстве $C[a,b]$, будет сходящейся и в пространстве $L_p[a,b]$ при $p\ge 1$.

8. Привести пример последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций $x_n(t)$, сходящейся в пространствах $L_1[0,1]$ и $L_2[0,1]$, но не сходящейся в пространстве $C[0,1]$.

9. Привести пример функции $x(t)\in L_2[0,1]$ такой, что $x^2(t)\notin L_2[0,1]$.

10. Привести пример функции $x(t)\in L_1[0,1]$ такой, что $x(t)\notin L_2[0,1]$.

11. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность $f_n(t)=nte^{-nt}$.

12. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность $f_n(t)=\sqrt{n}e^{-nt}$.

13. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность $f_n(t) = n\sin\frac{t}{n}$.

14. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность $f_n(t) = \sqrt{n}\sin\frac{t}{n}$.

15. Пусть $\mu(E) < +\infty$. Доказать, что при $p > q \geq 1$ из сходимости последовательности $f_n(x)$ в L_p следует ее сходимость в L_q причем к тому же самому пределу.

16. Найти норму функции $f(x) = x^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0,1]$ ($1 \leq p \leq \infty$), которым эта функция принадлежит.

17. Пусть $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. При каких $p \geq 1$ функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}_+)$?

Указание: $x^\alpha + x^\beta = x^\alpha(1 + x^{\beta-\alpha})$.

18. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$.

19. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$.

20. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$.

21. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x) = \dfrac{e^x \ln x}{x^2(1-x)^4}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$.

22. Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \dfrac{|x|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ при $p \geq 1$.

23. Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+|x|^\alpha\right)}{(1+x^4)^\beta}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ при $p \geq 1$.

24. Определить, для каких значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = |1-x|^{\alpha} |1+x|^{\beta}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ при $p \geq 1$.

25. Определить, для каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \dfrac{|1-x|^{\beta} \ln(1+|x|)}{|x|^{\alpha} (1+x^4)^{\beta}}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$ при $p \geq 1$.

26. Пусть $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{3}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ принадлежит пространству $L_p(A, dxdy)$.

27. Пусть $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Определить, для каких $p \geq 1$ функция $f(x,y) = \begin{cases} (|x|+|y|)^{-\frac{1}{2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$ принадлежит пространству $L_p(A, dxdy)$.

28. Определить, для каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция f принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^2, dxdy)$ при $p \geq 1$, если $f(x,y) = \begin{cases} |1-x^2-y^2|^{-\alpha}, & x^2+y^2 \neq 1, \\ 0, & x^2+y^2 = 1. \end{cases}$

29. Исследовать на сходимость в пространстве $L_1[0,1]$ последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{n}}, & \text{если } t \text{ иррационально} \\ 0, & \text{если } t \text{ рационально} \end{cases}.$$

30. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{nt}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

31. Исследовать на сходимость в пространстве $L_2[0,1]$ последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

32. Доказать, что последовательность $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ на множестве $X = [0,1]$ с обычной мерой Лебега сходится к функции $f_0(x) \equiv 0$ почти всюду, по мере и в среднем в любой степени $p \geq 1$, но не сходится равномерно.

33. Пусть $X=\left[0,1\right]$ с обычной мерой Лебега, $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\ln n}, & 0\le x\le \dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$ и $f_0(x)\equiv 0$. Доказать, что f_n сходится к f_0 в среднем, но не сходится в среднем в степени p при $p>1$.

34. Пусть $X=\left[0,1\right]$ с обычной мерой Лебега, $f_n(x)=\begin{cases}n, & 0\le x\le \dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$ и $f_0(x)\equiv 0$. Доказать, что f_n сходится к f_0 по мере, но не сходится в среднем.

35. Определить, для каких $p\ge 1$ функция $f(x)=\dfrac{\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{1-x}}$ принадлежит пространству $L_p\left[0,1\right]$.

36. Определить, для каких $p\ge 1$ функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[5]{1-x}}}$ принадлежит пространству $L_p\left[0,1\right]$.

37. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=\sqrt{n}\,\chi_{\left[0,\frac{1}{n^2}\right]}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

38. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=n^{-2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

39. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=n^{-2}e^{-\frac{x}{n^2}}\chi_{[0,+\infty)}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

40. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=n^{-2}e^{-\frac{x}{n^2}}\chi_{[0,+\infty)}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

41. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=\sqrt{\left|n-n^2x\right|}\,\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

42. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\chi_{[n,+\infty)}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

43. Определить, для каких значений $p\ge 1$ последовательность функций $f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}+1}\chi_{[n,2n]}(x)$ сходится в пространстве $L_p\left(\mathbb{R}\right)$.

44. Определить, для каких значений $p \ge 1$ последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|+1}} \chi_{[-n^2, n^2]}(x)$ сходится в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

45. Пусть $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, а $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ в $L_1(\mathbb{R})$, но эта же последовательность не сходится в $L_2(\mathbb{R})$.

46. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Доказать, что если функции $f, g \in L_p(X, d\mu)$ при $p \ge 2$, то $f \cdot g \in L_{\frac{p}{2}}(X, d\mu)$.

47. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Доказать, что если последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$ сходится в $L_p(X, d\mu)$ при $p \ge 1$ к функции $f(x) \in L_p(X, d\mu)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p} = \|f\|_{L_p}$.

48. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Доказать, что если последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$ сходится в $L_p(X, d\mu)$ при $p > 1$ к функции $f(x) \in L_p(X, d\mu)$ и $g \in L_{\frac{p}{p-1}}(X, d\mu)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)g(x)d\mu$.

49. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Доказать, что если последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$ сходится в $L_p(X, d\mu)$ при $p > 1$ к функции $f(x) \in L_p(X, d\mu)$, а последовательность $\left(g_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$ сходится в пространстве $L_{\frac{p}{p-1}}(X, d\mu)$ к функции $g(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(X, d\mu)$, то справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)g_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)g(x)d\mu$.

50. Доказать, что если $f \in L_p\left([0,+\infty), dx\right)$, $p > 1$, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\dfrac{\sin xy}{x}dx$ равномерно сходится относительно y на произвольном конечном интервале $a < y < b$.

51. Пусть X – измеримое множество с мерой μ. Доказать, что если последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$ сходится в $L_p(X, d\mu)$ при $p \ge 1$ к функциям $f(x)$ и $g(x)$ из $L_p(X, d\mu)$, то $f \overset{п.в.}{=} g$ на X.

52. Доказать, что если интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ существует для произвольной функции $f \in L_2\left([a,b], dx\right)$, то $g \in L_2\left([a,b], dx\right)$.

53. Показать, что функции $f_1(x) = e^{-x^4 \sin^2 x}$ и $f_2(x) = x^2 e^{-x^8 \sin^2 x}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}, dx)$, но $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) \ne 0$, $k = 1, 2$.

54. Пусть кусочно-гладкая на любом отрезке функция f и ее производная $f\,'$ принадлежат пространству $L_2\left(\mathbb{R},dx\right)$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Указание: представить $f^2(x)=f^2(a)+2\int\limits_a^x f(t)f\,'(t)dt$.

55. Доказать, что пространство $L_\infty\left[a,b\right]$ не сепарабельно.

56. Доказать, что $L_\infty\left[a,b\right]\subset\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}L_p\left[a,b\right]$, причем для всех p, таких, что $1\le p<+\infty$ имеет место неравенство $\left\|f\right\|_p\le(b-a)^{\frac{1}{p}}\left\|f\right\|_\infty$.

57. Доказать, что $\left\|f\right\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\left\|f\right\|_p$.

58. Найти норму функции $f(t)=t^\alpha(1-t)^\beta$ в тех пространствах $L_p\left[0,1\right]$ ($1\le p\le+\infty$), которым эта функция принадлежит.

59. При каких значениях α и p ($1\le p\le+\infty$) сходится к нулю в пространстве $L_p\left[0,1\right]$ последовательность $x_n(t)=n^\alpha e^{-nt}$?

60. При каких значениях α и p ($1\le p\le+\infty$) сходится к нулю в пространстве $L_p\left[0,1\right]$ последовательность $x_n(t)=n^\alpha\sin nt$?

61. При каких значениях α и p ($1\le p\le+\infty$) последовательности из двух предыдущих задач вообще имеют предел в $L_p\left[0,1\right]$?

62. Пусть последовательность $f_n(t)$ сходится в среднем в степени p на отрезке $\left[a,b\right]$ к функции $f(t)$ при $1\le p<\infty$. Доказать, что $\int\limits_a^b f_n(t)dt\underset{n\to\infty}{\to}\int\limits_a^b f(t)dt$.

63. Пусть $f\in L_1\left[a,b\right]$ и $\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)dt=0$ для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Доказать, что $f(t)=0$ почти всюду на $\left[a,b\right]$.

Указание: показать, что для всякого $\left[c,d\right]\subset\left[a,b\right]$ *можно найти последовательность* $\varphi_n(t)=\begin{cases}1,\,t\in\left[c+\dfrac{1}{n},d-\dfrac{1}{n}\right]\\0,\,t\notin\left[c,d\right]\end{cases}$ *непрерывных функций, удовлетворяющих всем условиям задачи и таких, что* $\varphi_n(t)\xrightarrow{п.в.}\chi_{[c,d]}(t)$. *Используя теорему Лебега, доказать, что* $\int\limits_c^d f(t)dt=\int\limits_a^b f(t)\chi_{[c,d]}(t)dt=0$ *и рассмотреть* $\int\limits_a^x f(t)dt=0$ *для всех* $x\in\left[a,b\right]$.

2.8. Полнота пространств $L_p\left(E,d\mu\right)$ при $1\le p\le\infty$

Теорема (о полноте пространства $L_1(E)$***):*** $L_1(E)$ – банахово.

Доказательство: в силу критерия полноты линейного пространства в терминах рядов достаточно доказать, что любой абсолютно сходящийся в L_1 ряд сходится. Пусть $f_n(x)\in L_1$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_E |f_n(x)|d\mu<+\infty$. Поскольку $|f_n(x)|\ge 0$, то выполнены все условия теоремы Б. Леви для рядов, значит, почти всюду сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ сходится почти всюду, как абсолютно сходящийся почти всюду ряд. Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\overset{п.в.}{=}f(x)$. Осталось проверить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ в пространстве L_1, т.е., что $f(x)\in L_1$ и что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в среднем (т.е. по норме L_1).

Поскольку $\int\limits_E|f(x)|d\mu=\int\limits_E\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right|d\mu\le\int\limits_E\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|d\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_E|f_n(x)|d\mu<+\infty$, то $f(x)\in L_1$ (использовали теорему Б. Леви для рядов). Далее, пусть $S_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}f_n(x)$, тогда

$$\|f-S_k\|=\int\limits_E|f(x)-S_k(x)|d\mu=\int\limits_E\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)-\sum\limits_{n=1}^{k}f_n(x)\right|d\mu=\int\limits_E\left|\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}f_n(x)\right|d\mu=\left\|\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}f_n(x)\right\|\le$$

$\le\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\|f_n(x)\|$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|$ сходится, а $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\|f_n(x)\|$ – это его остаток, то по теореме об остатке сходящегося ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\|f_n(x)\|\underset{k\to\infty}{\to}0$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $k\to\infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\|f-S_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Таким образом, $S_k(x)\xrightarrow{L_1}f(x)$.

Теорема доказана.

Замечание: попутно установили, что у любой фундаментальной в $L_1(E)$ последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся почти всюду (см. замечание после теоремы о связи видов сходимостей).

Теорема (о полноте пространства $L_p(E)$***):*** при $p>1$ и $\mu(E)<+\infty$ $L_p(E)$ – банахово.

Доказательство: обозначим $\mu(E)=\rho$. Пусть $f_n(x)\in L_p$ – фундаментальная последовательность. Надо доказать, что она имеет предел в L_p. По опреде-

лению фундаментальности $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall m,n>N$ $\|f_n-f_m\|_p<\dfrac{\varepsilon}{\rho^{\frac{1}{q}}}$. Покажем, что $f_n(x)$ фундаментальна в L_1. Применяя неравенство Гельдера, получаем $\|f_n-f_m\|_1=\int\limits_E|f_n(x)-f_m(x)|d\mu=\int\limits_E|f_n(x)-f_m(x)|\cdot 1d\mu\le\left(\int\limits_E|f_n(x)-f_m(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E 1^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=$
$=\|f_n-f_m\|_p\left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{q}}<\dfrac{\varepsilon}{\rho^{\frac{1}{q}}}\cdot\rho^{\frac{1}{q}}=\varepsilon$. Таким образом, в силу предыдущего замечания, найдется подпоследовательность $f_{n_k}(x)\xrightarrow{п.в.}f(x)$. Ясно, что $f_{n_k}(x)$ фундаментальна в L_p, как подпоследовательность $f_n(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists K\in\mathbb{N}$: $\forall m,k>K$ $\left\|f_{n_k}-f_{n_m}\right\|_p<\varepsilon$, т.е. $\left(\int\limits_E\left|f_{n_k}(x)-f_{n_m}(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$, откуда $\int\limits_E\left|f_{n_k}(x)-f_{n_m}(x)\right|^p d\mu<\varepsilon^p$.
При $m\to\infty$ $\left|f_{n_k}(x)-f_{n_m}(x)\right|^p\xrightarrow{п.в.}\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|^p$. Функции, стоящие под знаком интеграла, неотрицательны, интегралы от них ограничены константой ε^p, кроме того, подынтегральные функции сходятся почти всюду к $\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|^p$. Тогда, по теореме Фату, интеграл от этой предельной функции ограничен той же константой, т.е. $\int\limits_E\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|^p d\mu\le\varepsilon^p$, откуда $\left(\int\limits_E\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le\varepsilon$, т.е. $\left\|f_{n_k}-f\right\|_p\le\varepsilon$. Далее, $\|f\|_p=\left\|f-f_{n_k}+f_{n_k}\right\|_p\le\left\|f-f_{n_k}\right\|_p+\left\|f_{n_k}\right\|_p\le\varepsilon+\left\|f_{n_k}\right\|_p$. Поскольку $f_{n_k}(x)\in L_p$, то $\left\|f_{n_k}\right\|_p<+\infty$, значит, $\|f\|_p<+\infty$, т.е. $f(x)\in L_p$.

Далее, поскольку $\forall\varepsilon>0$ $\exists K\in\mathbb{N}$: $\forall k>K$ $\left\|f_{n_k}-f\right\|_p\le\varepsilon$, то $f_{n_k}(x)\xrightarrow{L_p}f(x)$, т.е. у нашей последовательности нашли подпоследовательность, которая сходится в пространстве L_p. Осталось доказать, что $f_n(x)\xrightarrow{L_p}f(x)$, т.е., что $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $\|f_n-f\|_p<\varepsilon$. Перепишем определение фундаментальности: $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in\mathbb{N}$: $\forall m,n>N_1$ $\|f_n-f_m\|_p<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, поскольку $f_{n_k}(x)\xrightarrow{L_p}f(x)$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2\in\mathbb{N}$: $\forall k>N_2$ $\left\|f_{n_k}-f\right\|_p<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда, выбирая $m=n_k$ и $N=\max\{N_1,N_2\}$, получаем, что $\forall n>N$

$$\|f_n-f\|_p=\left\|f_n-f_{n_k}+f_{n_k}-f\right\|_p\le\left\|f_n-f_{n_k}\right\|_p+\left\|f_{n_k}-f\right\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание: можно показать, что утверждение теоремы верно и для случая $\mu(E)=+\infty$ (см. [5]).

Теорема (о полноте пространства $L_\infty(E)$***):*** $L_\infty(E)$ – банахово.

Доказательство: пусть $f_n(x)\in L_\infty$ – фундаментальная последовательность. Надо доказать, что она имеет предел в L_∞. По определению фундаментальности $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall m,n>N$ $\|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$, т.е. $\operatorname*{esssup}_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. Это означает, что для почти всех $x\in E$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

Обозначим $E_{n,m}$ множество тех $x\in E$, для которых это неравенство справедливо, т.е. $E_{n,m}=\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\}$. Ясно, что мера дополнения к этому множеству равна нулю. Далее, пусть $A=\bigcap\limits_{n,m=N+1}^{\infty}E_{n,m}$. Если $x\in A$, то $x\in\forall E_{n,m}$, т.е. для всех таких x $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. Итак, на множестве A наша последовательность фундаментальна. Дополнение к A – есть объединение дополнений к $E_{n,m}$. Каждое дополнение к $E_{n,m}$ имеет нулевую меру, значит, мера их объединения также равна 0. Поскольку дополнение к A имеет меру 0, а последовательность $f_n(x)$ фундаментальна в A, то $f_n(x)$ фундаментальна почти всюду. При каждом x это уже числовая последовательность, значит, в силу критерия Коши, она сходится почти всюду, т.е. $f_n(x)\xrightarrow{п.в.}f(x)$. Осталось проверить, что $f(x)\in L_\infty$ и что $f_n(x)\xrightarrow{L_\infty}f(x)$.

Т.к. $|f_n(x)|=|f_n(x)-f_m(x)+f_m(x)|\le|f_n(x)-f_m(x)|+|f_m(x)|\overset{п.в.}{<}\varepsilon+|f_m(x)|$, то, фиксируя номер m, поскольку $f_m(x)\in L_\infty$ и, значит, $\exists c>0$: $|f_m(x)|\overset{п.в.}{\le}c$, получим, что $\forall n>N$ $|f_n(x)|\overset{п.в.}{<}\varepsilon+c$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что $|f(x)|\overset{п.в.}{\le}\varepsilon+c$, т.е. $f(x)\in L_\infty$.

Осталось проверить, что $f_n(x)\xrightarrow{L_\infty}f(x)$, т.е., что $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $\|f_n-f\|_\infty<\varepsilon$. Перепишем определение фундаментальности в виде $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall m,n>N$ $\|f_n-f_m\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\operatorname*{esssup}_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $|f_n(x)-f_m(x)|\overset{п.в.}{<}\dfrac{\varepsilon}{2}$. При $m\to\infty$ отсюда следует, что $|f_n(x)-f(x)|\overset{п.в.}{\le}\dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\dfrac{\varepsilon}{2}$ – п.в. мажоранта для $|f_n(x)-f(x)|$, значит, наименьшая из п.в. мажорант эту не превосходит, т.е. $\operatorname*{esssup}_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\|f_n-f\|_\infty\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Теорема доказана.

2.9. Плотные множества в $L_p(E,d\mu)$, $1 \le p < \infty$

Теорема (о плотности L_∞ ***в*** L_p***):*** $\forall p \ge 1$ пространство L_∞ является всюду плотным множеством в пространстве L_p.

Доказательство: пусть $f \in L_p$. По определению всюду плотности надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in L_\infty : \|f - g\|_p < \varepsilon$.

1. Пусть $f \ge 0$. Возьмем $\forall n > \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию $f^n(x)$, которая называется верхней срезкой функции f и определяется следующим образом: $f^n(x) = \min(f(x), n) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le n, \\ n, & f(x) > n. \end{cases}$ Очевидно, $|f^n(x)| \le n$, т.е. $f^n(x)$ ограничена, и, в частности, существенно ограничена, т.е. $f^n(x) \in L_\infty$. Кроме того, очевидно, что $0 \le f - f^n \le f$, откуда $|f - f^n|^p \le |f|^p$. Поскольку $f \in L_p$, то $\int\limits_E |f|^p \, d\mu < +\infty$, значит, $|f|^p$ – суммируемая функция. Далее, ясно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n = f$, т.е. $f^n - f \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, откуда $|f^n - f|^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Для функции $|f^n - f|^p$ выполнены все условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости, если взять в ней в качестве функции g функцию $|f|^p$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_E |f - f^n|^p \, d\mu = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \int\limits_E |f - f^n|^p \, d\mu < \varepsilon^p, \text{ откуда } \left(\int\limits_E |f - f^n|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f - f^n\|_p < \varepsilon .$$

Окончательно, обозначая $f^n(x) = g(x)$, получим требуемое.

2. Пусть f имеет произвольный знак. Рассмотрим две функции $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$ и $f_2(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0, \\ f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$ Ясно, что $f = f_1 + f_2 = f_1 - (-f_2)$. Функции f_1 и $(-f_2)$ неотрицательны, значит, по п. 1 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g_1, g_2 \in L_\infty$: $\|f_1 - g_1\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\|-f_2 - g_2\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $g = g_1 - g_2 \in L_\infty$, тогда

$$\|f - g\|_p = \|f_1 + f_2 - g_1 + g_2\|_p \le \|f_1 - g_1\|_p + \|f_2 + g_2\|_p = \|f_1 - g_1\|_p + \|-f_2 - g_2\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Теорема (о плотности измеримых ступенчатых функций в L_p): множество измеримых функций, принимающих конечное число значений, всюду плотно в пространстве $L_p(E)$, $\mu(E) < +\infty$.

Доказательство: берем $\forall f \in L_p$, $\forall \varepsilon > 0$ и надо найти измеримую функцию h, которая принимает конечное число значений, чтобы $\|f - h\|_p < \varepsilon$. В силу предыдущей теоремы можно найти $g \in L_\infty$: $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через c_1 и c_2 – миноранту и мажоранту функции g (переопределив, если потребуется, функцию g на множестве нулевой меры, можно добиться, чтобы c_1 и c_2 были минорантой и мажорантой g всюду). Выберем число n и разобьем отрезок $[c_1, c_2]$ на n равных частей. Пусть $l = c_2 - c_1$. Рассмотрим следующие измеримые множества: $E_1 = \left\{x \in E : c_1 \le g(x) < c_1 + \frac{l}{n}\right\}$; $E_2 = \left\{x \in E : c_1 + \frac{l}{n} \le g(x) < c_1 + \frac{2l}{n}\right\}$; ….;

$E_n = \left\{x \in E : c_1 + \frac{(n-1)l}{n} \le g(x) \le c_2\right\}$. Пусть $h = \begin{cases} c_1, \text{ на } E_1, \\ c_1 + \frac{l}{n}, \text{ на } E_2, \\ c_1 + \frac{2l}{n}, \text{ на } E_3, \\ \ldots \\ c_1 + \frac{(n-1)l}{n}, \text{ на } E_n. \end{cases}$. Ясно, что h – измеримая ступенчатая функция, принимающая конечное число значений. Далее, ясно, что $0 \le g(x) - h(x) < \frac{l}{n}$ всюду на E. Отсюда следует, что

$$\|g-h\|_p = \left(\int_E |g(x)-h(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{l}{n}\left(\int_E 1 d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

значит, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \quad \|g-h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N$ $\|f-h\|_p = \|f-g+g-h\|_p \le \|f-g\|_p + \|g-h\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: пусть $E = \mathbb{R}^n$, h – измеримая ступенчатая функция. Эта функция называется простой ступенчатой, если существуют непересекающиеся параллелепипеды $B_1, B_2, \ldots, B_k$ и константы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ такие, что $h = c_1$ на B_1, $h = c_2$ на $B_2, \ldots,$ $h = c_k$ на B_k и $h = 0$ вне объединения этих параллелепипедов.

Теорема (о плотности простых ступенчатых функций в L_p): множество простых ступенчатых функций всюду плотно в пространстве $L_p(E)$, где $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) < +\infty$.

Доказательство: пусть $f \in L_p$, тогда в силу предыдущей теоремы $\forall \varepsilon > 0$ существует измеримая ступенчатая функция g такая, что $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Ясно, что, если g удастся приблизить простой ступенчатой функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, то f окажется приближенной простой ступенчатой функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Пусть $g=\begin{cases} c_1, \text{ на } E_1, \\ c_2, \text{ на } E_2, \\ \ldots \\ c_k, \text{ на } E_k \end{cases}$ – измеримая ступенчатая функция. Обозначим $g_1=\begin{cases} 1, \text{ на } E_1, \\ 0, \text{ вне } E_1 \end{cases}$, $g_2=\begin{cases} 1, \text{ на } E_2, \\ 0, \text{ вне } E_2 \end{cases}$,..., $g_k=\begin{cases} 1, \text{ на } E_k, \\ 0, \text{ вне } E_k \end{cases}$. Очевидно $g=c_1g_1+c_2g_2+\ldots+c_kg_k$.

Ясно, что если g_1 приблизим простой ступенчатой функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_1}$, g_2 – простой ступенчатой функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_2}$,..., g_k – простой ступенчатой функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_k}$, то g окажется приближенной простой ступенчатой функцией с точностью $c_1\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_1}+c_2\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_2}+\ldots+c_k\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_k}=k\cdot\frac{\varepsilon}{2k}=\frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, достаточно убедиться, что любую функцию вида $g=\begin{cases} 1, \text{ на } E_1, \\ 0, \text{ вне } E_1 \end{cases}$, где E_1 – измеримое множество конечной меры, можно приблизить в $L_p(E)$ простой ступенчатой функцией с любой точностью. По определению суммируемости по Лебегу $\forall\varepsilon>0$ существует конечное объединение параллелепипедов F (т.е. простейшее множество в $\mathbb{R}^n$) такое, что $\mu(E_1\Delta F)<\varepsilon^p$. Пусть $h=\begin{cases} 1, \text{ на } F, \\ 0, \text{ вне } F. \end{cases}$, тогда h – простая ступенчатая функция и $\|g-h\|_p=\left(\int\limits_E |g-h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Если $x\in E_1$ и $x\in F$, то $g=h=1$, значит, $g-h=0$. Если $x\notin E_1$ и $x\notin F$, то $g=h=0$, значит, $g-h=0$. В случае, когда $x\in E_1$ и $x\notin F$, или $x\notin E_1$ и $x\in F$, т.е. при $x\in E_1\Delta F$, очевидно, что $|g-h|=1$.

Таким образом, $\|g-h\|_p=\left(\int\limits_{E_1\Delta F} 1d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\mu(E_1\Delta F)\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема (о плотности непрерывных функций в L_p): пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, тогда множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L_p(E)$, $\mu(E)<+\infty$.

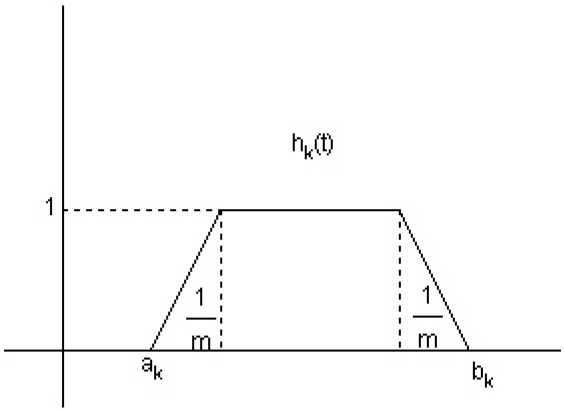
Доказательство: пусть $f\in L_p$. В силу предыдущей теоремы $\forall\varepsilon>0$ существует простая ступенчатая функция g такая, что $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. Ясно, что, если g удастся приблизить непрерывной функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$, то f окажется приближена непрерывной функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Поскольку g – простая ступенчатая функция, то существуют параллелепипеды $B_1, B_2, ..., B_k$ и константы $c_1, c_2, ..., c_k$ такие, что $g=c_1$ на B_1, $g=c_2$ на B_2,..., $g=c_k$ на B_k и $g=0$ вне объединения этих параллелепипедов. Обозначим $g_1=\begin{cases}1, \text{ на } B_1, \\ 0, \text{ вне } B_1\end{cases}$, $g_2=\begin{cases}1, \text{ на } B_2, \\ 0, \text{ вне } B_2\end{cases}$,..., $g_k=\begin{cases}1, \text{ на } B_k, \\ 0, \text{ вне } B_k\end{cases}$. Очевидно, что $g=c_1g_1+c_2g_2+...+c_kg_k$. Тогда если g_1 приблизим непрерывной функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_1}$, g_2 – непрерывной функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_2}$,..., g_k – непрерывной функцией с точностью $\frac{\varepsilon}{2kc_k}$, то g окажется приближенной непрерывной функцией с точностью

$$c_1\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_1}+c_2\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_2}+...+c_k\cdot\frac{\varepsilon}{2kc_k}=k\cdot\frac{\varepsilon}{2k}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, достаточно показать, что любую функцию вида $g=\begin{cases}1, \text{ на } B, \\ 0, \text{ вне } B\end{cases}$, где B – параллелепипед, можно приблизить непрерывной функцией с любой точностью. По определению параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$

$$B=\left\{x=(x^1,x^2,...,x^n): a_1\le x^1\le b_1, a_2\le x^2\le b_2,..., a_n\le x^n\le b_n\right\}.$$

Рассмотрим любой из отрезков $\left[a_k,b_k\right]$. Отступим от концов этого отрезка



внутрь на величину $\frac{1}{m}>0$ и рассмотрим следующую функцию (см. рис.):

$$h_k(t)=\begin{cases}1, & \text{на внутреннем отрезке,}\\ 0, & \text{в концах отрезка,}\\ \text{линейная на оставшихся частях.}\end{cases}$$

Ясно, что при $m\to\infty$ предел этой функции будет равен 1 на $\left(a_k,b_k\right)$ и 0 вне этого интервала.

Рассмотрим функцию $h(x)=h_1(x^1)h_2(x^2)...h_n(x^n)$. Ясно, что это произведение не превосходит 1, неотрицательно и является непрерывной функцией. При $m\to\infty$ предел $h(x)$ равен 1 на параллелепипеде B (исключая границу) и 0 вне его, т.е. $h(x)\underset{m\to\infty}{\to}g(x)$ почти всюду на E. Ясно, что $\left|h(x)-g(x)\right|^p\le 1$, 1 – суммируемая функция, кроме того, $\left|h(x)-g(x)\right|^p \underset{m\to\infty}{\overset{п.в.}{\to}} 0$, и выполнены все условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости, поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\int_E \left|h(x)-g(x)\right|^p d\mu = \int_E \lim_{m\to\infty}\left|h(x)-g(x)\right|^p d\mu = 0,$$

т.е. $\left\|h-g\right\|_p = \left(\int_E \left|h(x)-g(x)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\to} 0$, значит, m можно выбрать таким образом, чтобы $\forall\varepsilon>0$ $\left\|h-g\right\|_p<\varepsilon$. Итак, g с любой точностью приблизили непрерывной функцией h.

Теорема доказана.

Определение: функция f, определенная на множестве $X\subset\mathbb{R}^n$, называется непрерывной в среднем в степени p на X, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall z\in\mathbb{R}^n$ $|z|<\delta$ $\left\|f(x+z)-f(x)\right\|^p_{L_p(X)} = \int_X \left|f(x+z)-f(x)\right|^p d\mu < \varepsilon^p$ (при $x+z\notin X$ считаем $f(x+z)=0$). Здесь $|z|$ – длина вектора z. В частности, при $p=2$ функция называется непрерывной в среднем квадратичном.

Теорема (о непрерывности в среднем квадратичном): пусть X – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, тогда любая функция $f\in L_2(X)$ непрерывна в среднем квадратичном.

Доказательство: надо доказать, что если $f\in L_2(X)$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall z$ $|z|<\delta$ $\left\|f(x+z)-f(x)\right\|_{L_2(X)}<\varepsilon$. Функцию f будем считать продолженной на все $\mathbb{R}^n$ нулем. Обозначим B_0 – замкнутый параллелепипед, содержащий X. По теореме о плотности непрерывных функций в $L_2(B_0)$ $\forall\varepsilon>0$ существует непрерывная на B_0 функция h такая, что $\left\|f-h\right\|_{L_2(B_0)}<\frac{\varepsilon}{4}$. Далее, растянем B_0 (например) в два раза относительно центра и обозначим получившийся замкнутый параллелепипед через B_1. Можно считать, что $|z|\le c$, причем c таково, что при $|z|=c$ $\forall x\in B_0$ $x+z\in B_1$. Функцию h продолжим на B_1 с сохранением непрерывности. Ясно, что $\left\|f(x+z)-f(x)\right\|_{L_2(X)} \le \left\|f(x+z)-f(x)\right\|_{L_2(B_0)}$. Имеем:

$$\left\|f(x+z)-f(x)\right\|_{L_2(B_0)} = \left\|f(x+z)-h(x+z)+h(x+z)-h(x)+h(x)-f(x)\right\|_{L_2(B_0)} \le$$
$$\le \left\|f(x+z)-h(x+z)\right\|_{L_2(B_0)} + \left\|h(x+z)-h(x)\right\|_{L_2(B_0)} + \left\|h(x)-f(x)\right\|_{L_2(B_0)}.$$

Поскольку B_1 – компакт в $\mathbb{R}^n$, то по теореме Кантора h равномерно непрерывна на B_1, т.е. для выбранного $\varepsilon>0$ $\exists\delta_1\in(0,c)$: $\forall x_1,x_2\in B_1$ $|x_1-x_2|<\delta_1$ $\left|h(x_1)-h(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{V}}$, где V – объем B_0. В частности, $\forall x\in B_0$ $\forall z\in\mathbb{R}^n$ $|z|<\delta_1$ $\left|h(x+z)-h(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{V}}$. В силу непрерывности функции $\left|h(x+z)-h(x)\right|$, вместо

интеграла Лебега на B_0 можно рассматривать интеграл Римана. Тогда имеем:
$$\|h(x+z)-h(x)\|^2_{L_2(B_0)} = \int\limits_{B_0} |h(x+z)-h(x)|^2\, dx < \int\limits_{B_0} \frac{\varepsilon^2}{16V} dx = \frac{\varepsilon^2}{16V}\int\limits_{B_0} 1dx = \frac{\varepsilon^2}{16V}\cdot V = \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Таким образом, при $|z|<\delta_1$ $\|f(x+z)-f(x)\|_{L_2(B_0)} < \|f(x+z)-h(x+z)\|_{L_2(B_0)} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Далее, имеем $\|f(x+z)-h(x+z)\|^2_{L_2(B_0)} = \int\limits_{B_0} |f(x+z)-h(x+z)|^2\, d\mu = \begin{vmatrix}\text{замена}\\ x+z=y\end{vmatrix} =$

$= \int\limits_{B_0+z} |f(y)-h(y)|^2\, d\mu_y = \int\limits_{\Delta_0} |f(y)-h(y)|^2\, d\mu_y + \int\limits_{\Delta_1} |f(y)-h(y)|^2\, d\mu_y$, где $\Delta_0 = B_0 \bigcap (B_0+z)$, $\Delta_1 = (B_0+z)\setminus \Delta_0$. Можно считать, что $\Delta_0 \neq \varnothing$, если же $\Delta_0 = \varnothing$, то дальнейшие рассуждения изменятся незначительно, и их предлагается проделать самостоятельно (см. задачу 1). Поскольку $\mu_y(\Delta_1) \underset{z\to 0}{\to} 0$, то, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, $\int\limits_{\Delta_1} |f(y)-h(y)|^2\, d\mu_y = \int\limits_{\Delta_1} |h(y)|^2\, d\mu_y \underset{z\to 0}{\to} 0$, т.е. для рассматриваемого $\varepsilon>0$ $\exists \delta\in(0,\delta_1)$: $\forall z$ $|z|<\delta$ $\int\limits_{\Delta_1} |h(y)|^2\, d\mu_y < \dfrac{3\varepsilon^2}{16}$.

Поскольку $\int\limits_{\Delta_0} |f(y)-h(y)|^2\, d\mu_y < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$, то, окончательно, при $|z|<\delta$ имеем, что $\|f(x+z)-f(x)\|_{L_2(X)} \le \|f(x+z)-f(x)\|_{L_2(B_0)} < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: функция $\omega_1(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется единичным ядром усреднения (ядром усреднения радиуса 1), если:

1. $\omega_1(x) \ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$;
2. $\omega_1(x)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$;
3. при $|x|\ge 1$ $\omega_1(x)=0$;
4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_1(x)dx = 1$.

Определение: пусть $\omega_1(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – единичное ядро усреднения. Ядром усреднения радиуса $\rho>0$ называется функция $\omega_\rho(x) = \dfrac{1}{\rho^n}\omega_1\left(\dfrac{x}{\rho}\right)$.

Замечание: очевидны следующие свойства ядра усреднения радиуса ρ: $\omega_\rho(x)\ge 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$; $\omega_\rho(x)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$; при $|x|\ge\rho$ $\omega_\rho(x)=0$;
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\rho^n}\omega_1\left(\frac{x}{\rho}\right)dx = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\rho}=y,\ x=\rho y \\ dx = dx^1dx^2...dx^n = \rho^n dy^1dy^2...dy^n \end{vmatrix} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_1(y)dy = 1.$$

Определение: пусть функция $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $\omega_\rho(x)$ – ядро усреднения радиуса ρ. Усредненной функцией $f_\rho(x)$, соответствующей данному ядру усреднения, называется функция $f_\rho(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\rho(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\omega_\rho(y)dy$.

Замечание: в силу связи между интегралом Лебега и несобственным интегралом Римана, на $\mathbb{R}^n$ вместо интеграла Лебега будем рассматривать несобственный интеграл Римана. Легко видеть, что функция $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ принадлежит также $L_1(X)$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество. В силу свойств ядра усреднения, первый интеграл можно брать по множеству $B(x,\rho)$ (n-мерный шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса ρ), а второй – по множеству $B(0,\rho)$.

Замечание: в первом интеграле под знаком интеграла стоит бесконечно дифференцируемая по переменной x функция. Если ограничить диапазон изменения переменной x некоторым шаром $B(x_0,\delta)$, при $\delta > 0$, то $\forall x \in B(x_0,\delta)$ $B(x,\rho) \subset B(x_0,\rho+\delta) = B_0$, поэтому $f_\rho(x) = \int\limits_{B_0} f(y)\omega_\rho(x-y)dy$. Поскольку суммируемая функция почти всюду ограничена, то, переопределяя, если необходимо, функцию f на множестве нулевой меры, получим, что f будет ограничена на всем B_0. В этих условиях можно показать, что справедливо правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру, поэтому усредненная функция будет бесконечно дифференцируемой в произвольной точке x_0 (задача 3). В частности, усредненная функция всегда будет непрерывной.

Теорема (о сходимости усредненных функций в L_2): пусть $f \in L_2(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, f_ρ – усредненная функция, тогда $f_\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{L_2} f$.

Доказательство: надо доказать, что $\|f_\rho - f\|_2^2 \underset{\rho\to 0}{\to} 0$, т.е., что

$$\int\limits_X \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\omega_\rho(y)dy - f(x) \right|^2 d\mu \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Будем считать, что $f(x) = 0$, если $x \notin X$. В силу свойств ядра усреднения

$$\int\limits_X \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\omega_\rho(y)dy - f(x) \right|^2 d\mu = \int\limits_X \left| \int\limits_{|y|\le\rho} f(x-y)\omega_\rho(y)dy - f(x) \int\limits_{|y|\le\rho} \omega_\rho(y)dy \right|^2 d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left| \int\limits_{|y|\le\rho} \big(f(x-y) - f(x)\big)\omega_\rho(y)dy \right|^2 d\mu \le \int\limits_X \left(\int\limits_{|y|\le\rho} |f(x-y) - f(x)|\omega_\rho(y)dy \right)^2 d\mu \le$$

$$\le \left| \begin{matrix} \text{неравенство} \\ \text{Гельдера} \\ p=2, q=2 \end{matrix} \right| \le \int\limits_X \left(\left(\int\limits_{|y|\le\rho} |f(x-y) - f(x)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{|y|\le\rho} \omega_\rho{}^2(y)dy \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_{|y|\le\rho} |f(x-y)-f(x)|^2\, dy \right)\left(\int\limits_{|y|\le\rho} \omega_\rho{}^2(y)dy \right) d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left(\int\limits_{|y|\le\rho} |f(x-y)-f(x)|^2\, dy \right)\left(\int\limits_{|y|\le\rho} \frac{1}{\rho^{2n}} \omega_1{}^2\left(\frac{y}{\rho}\right) dy \right) d\mu .$$

Далее, $\int\limits_{|y|\le\rho} \frac{1}{\rho^{2n}} \omega_1{}^2\left(\frac{y}{\rho}\right) dy = \left| \begin{array}{l} \frac{y}{\rho} = z, |z| \le 1 \\ dy = \rho^n dz \end{array} \right| = \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{|z|\le 1} \omega_1{}^2(z)dz = \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{|z|\le 1} \omega_1(z)\omega_1(z)dz$.

Функция $\omega_1(z)$ бесконечно дифференцируема, в частности, непрерывна на замкнутом шаре радиуса 1, который компактен, значит, по теореме Вейерштрасса $\exists c>0$: при $|z|\le 1$ $\omega_1(z)\le c$. Тогда $\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{|z|\le 1} \omega_1(z)\omega_1(z)dz \le \frac{c}{\rho^n} \int\limits_{|z|\le 1} \omega_1(z)dz = \frac{c}{\rho^n}$.

Таким образом, $\|f_\rho - f\|_2^2 \le \frac{c}{\rho^n} \int\limits_X \left(\int\limits_{|y|\le\rho} |f(x-y)-f(x)|^2\, dy \right) d\mu$. Меняя порядок интегрирований, получаем $\|f_\rho - f\|_2^2 \le \frac{c}{\rho^n} \int\limits_{|y|\le\rho} \left(\int\limits_X |f(x-y)-f(x)|^2\, d\mu \right) dy =$ $= \frac{c}{\rho^n} \int\limits_{|y|\le\rho} \|f(x-y)-f(x)\|_2^2\, dy$. По условию $f\in L_2(X)$, значит, она непрерывна в среднем квадратичном, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall y\ |y|<\delta\ \|f(x-y)-f(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{V}\sqrt{c}}$, где V – объем единичного шара в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $\rho<\delta$, то $|y|<\delta$, значит, $\forall\rho<\delta$ $\|f_\rho - f\|_2^2 < \frac{c}{\rho^n} \int\limits_{|y|\le\rho} \frac{\varepsilon^2}{Vc} dy = \frac{c}{\rho^n}\cdot\frac{\varepsilon^2}{Vc} \underbrace{\int\limits_{|y|\le\rho} 1 dy}_{V\rho^n} = \varepsilon^2$.

Теорема доказана.

Замечание: перемена порядка интегрирований законна в силу теоремы Фубини для интеграла Лебега: для такой перестановки достаточно существования интеграла $\int\limits_{|y|\le\rho} \left(\int\limits_X |f(x-y)-f(x)|^2\, d\mu \right) dy$.

Замечание: из доказанной теоремы следует, что множество бесконечно дифференцируемых усредненных функций $\{f_\rho\}$ всюду плотно в пространстве $L_2(X)$, если $X\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченное множество.

2.10. Предкомпактные множества в $L_2(X)$

Определение: пусть $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ – некоторое множество функций. Это множество называется равностепенно непрерывным в среднем квадратичном, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall z\in X\ \ \forall\alpha\ \ \|z\|<\delta\ \ \|f_\alpha(x+z)-f_\alpha(x)\|_2<\varepsilon$.

Теорема (критерий предкомпактности в L_2): пусть X – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, тогда множество $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда:

1. $\{f_\alpha(x)\}$ ограничено в пространстве L_2;
2. $\{f_\alpha(x)\}$ равностепенно непрерывно в среднем квадратичном.

Доказательство: пусть $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ предкомпактно.

1. Выполняется, поскольку предкомпактное множество всегда ограничено.

2. Поскольку множество $\{f_\alpha(x)\}$ предкомпактно, то по критерию Хаусдорфа $\forall\varepsilon>0$ для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $f_1, f_2, ..., f_n \in L_2(X)$, т.е. $\forall\alpha\ \ \exists k=\overline{1,n}\colon \|f_\alpha(x)-f_k(x)\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. Считая, что все f_α и f_k продолжены нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$, можем интегралы брать по всему пространству $\mathbb{R}^n$, тогда:

$$\|f_\alpha(x+z)-f_k(x+z)\|_2=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|f_\alpha(\underbrace{x+z}_{y})-f_k(x+z)\Big|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f_\alpha(y)-f_k(y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}=\|f_\alpha(y)-f_k(y)\|_2<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку каждая из функций $f_1, f_2, ..., f_n \in L_2(X)$ непрерывна в среднем квадратичном, то $\forall k=\overline{1,n}\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_k>0\colon \forall z\ \ |z|<\delta_k\ \ \|f_k(x+z)-f_k(x)\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, выбирая $\delta=\min\{\delta_k\}$, получим, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall z\ \ \forall\alpha$ из $|z|<\delta$ следует $\|f_\alpha(x+z)-f_\alpha(x)\|_2=\|f_\alpha(x+z)-f_k(x+z)+f_k(x+z)-f_k(x)+f_k(x)-f_\alpha(x)\|_2\le$ $\le\|f_\alpha(x+z)-f_k(x+z)\|_2+\|f_k(x+z)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f_\alpha(x)\|<\varepsilon$.

Обратно: пусть $\{f_\alpha(x)\} \subset L_2(X)$ – ограничено и равностепенно непрерывно в среднем квадратичном. Надо доказать, что $\{f_\alpha(x)\}$ предкомпактно, т.е. $\forall\varepsilon>0$ найти для него конечную ε-сеть.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)\in L_2(X)$. Пусть $\rho>0$ и $f_\rho(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)\omega_\rho(x-y)dy$ – усредненные функции. Снова будем считать, что функция $f(x)$ и все $\{f_\alpha(x)\}$ продолжены нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что для всех $x\in\mathbb{R}^n$

$$\left|f_\rho(x)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\rho(x-y)dy\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\omega_\rho(x-y)dy \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho{}^2(x-y)dy\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho{}^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|f\|_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(z)\omega_\rho(z)dz\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \left(\int\limits_{|z|\le\rho} \omega_\rho(z)\omega_\rho(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функция ω_ρ бесконечно дифференцируема, в частности, непрерывна, на шаре радиуса ρ, который замкнут и ограничен, значит, компактен, значит, по теореме Вейерштрасса об ограниченности, $\exists c > 0$: при $|z| \le \rho$ $\omega_\rho(z) \le c$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\left|f_\rho(x)\right| \le c^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \left(\int\limits_{|z|\le\rho} \omega_\rho(z)dz\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(z)dz\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}\|f\|_2$. Таким образом, если $\{f_\alpha(x)\}$ ограничены в L_2 какой-то константой, то $\forall\rho > 0$ из полученного неравенства следует, что усредненные функции для всех функций $f_\alpha(x)$ равномерно ограничены (в частности, на X). Применяя это же неравенство к разности $f(x+z) - f(x)$, получим $\left|f_\rho(x+z) - f_\rho(x)\right| \le c^{\frac{1}{2}} \|f(x+z) - f(x)\|_2$.

Поскольку множество $\{f_\alpha(x)\}$ равностепенно непрерывно в среднем квадратичном, то $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$: $\forall z \in \mathbb{R}^n$ $\forall\alpha$ $|z| < \delta$ $\|f_\alpha(x+z) - f_\alpha(x)\|_2 < \frac{\varepsilon}{c^{\frac{1}{2}}}$. Тогда $\left|f_{\alpha\rho}(x+z) - f_{\alpha\rho}(x)\right| < c^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{c^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon$. Таким образом, $\forall\rho > 0$ $\{f_{\alpha\rho}(x)\}$ равностепенно непрерывно на X (поскольку это верно и для тех $|z| < \delta$, для которых $x + z \in X$).

Итак, множество усреднений наших функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, значит, по теореме Арцела-Асколи, оно предкомпактно в пространстве $C(X)$. Тем самым, $\forall\varepsilon > 0$ для $\{f_{\alpha\rho}(x)\}$ в пространстве $C(X)$ можно построить конечную $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{V}}$-сеть $f_1, f_2, ..., f_n$, где V – объем множества X. Значит, $\forall\rho > 0$, $\forall\alpha$ $\exists k = \overline{1,n}$: $\|f_{\alpha\rho} - f_k\|_{C(X)} = \sup\limits_{x\in X}\left|f_{\alpha\rho}(x) - f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{V}}$, т.е. $\forall x \in X$ $\left|f_{\alpha\rho}(x) - f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{V}}$. По теореме о сходимости усредненных функций в L_2 $f_{\alpha\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{L_2} f_\alpha$, т.е. ρ можно подобрать таким образом, чтобы $\|f_{\alpha\rho} - f_\alpha\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\exists k = \overline{1,n}$: $\forall\alpha$ и выбранного ρ $\|f_\alpha - f_k\|_2 = \|f_\alpha - f_{\alpha\rho} + f_{\alpha\rho} - f_k\|_2 \le$

$$\leq \left\|f_\alpha - f_{\alpha\rho}\right\|_2 + \left\|f_{\alpha\rho} - f_k\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_X \left|f_{\alpha\rho}(x) - f_k(x)\right|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_X \frac{\varepsilon^2}{4V} d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} +$$

$+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{V}\underbrace{\int_X 1 d\mu}_{V}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$. Таким образом, $f_1, f_2, ..., f_n$ является конечной ε-сетью для множества $\{f_\alpha(x)\}$ в пространстве L_2.

Теорема доказана.

Замечание: отметим, что доказанное утверждение переносится на случай произвольного пространства $L_p(X)$ с условием равностепенной непрерывности в среднем степени p (см. задачи 4-6).

Примеры решения задач

1. Будут ли нормы $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$ и $\|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$ эквивалентными в пространстве $C^{(1)}[0,1]$?

Решение: очевидно, что $\int\limits_0^1 |x(t)|dt \leq \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|\int\limits_0^1 1dt = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$, значит, поскольку $\|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \leq \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| = \|x\|_1$, то норма $\|x\|_2$ подчинена норме $\|x\|_1$. По теореме об эквивалентных нормах достаточно установить полноту пространства $C^{(1)}[0,1]$ относительно обеих норм.

Пусть $x_n(t) \in C^{(1)}[0,1]$ – фундаментальная по норме $\|x\|_1$ последовательность, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m,n > N\ \ \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$, откуда $\max\limits_{t\in[0,1]}|x_n(t) - x_m(t)| +$ $+\max\limits_{t\in[0,1]}|x_n'(t) - x_m'(t)| < \varepsilon$, т.е. $\forall t \in [0,1]\ \ |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ и $|x_n'(t) - x_m'(t)| < \varepsilon$. Таким образом, последовательности $x_n(t)$ и $x_n'(t)$ равномерно фундаментальны, значит, в силу критерия Коши, они сходятся равномерно, т.е. $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} x(t)$ и $x_n'(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} x'(t)$ (по теореме о дифференцируемости предельной функции производная предела оказалась равна пределу производной). По теореме о непрерывности предельной функции $x(t)$ и $x'(t)$ непрерывны, т.е. $x(t) \in C^{(1)}[0,1]$. Перепишем определение фундаментальности в виде $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m,n > N$ $\|x_n - x_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$, откуда $\forall t \in [0,1]\ \ |x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ и $|x_n'(t) - x_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\forall t \in [0,1]$ $|x_n(t) - x(t)| \le \frac{\varepsilon}{4}$ и $|x_n'(t) - x'(t)| \le \frac{\varepsilon}{4}$, откуда $\|x_n - x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,1]}|x_n(t) - x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x_n'(t) - x'(t)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, а это и означает, что последовательность $x_n(t)$ сходится в $C^{(1)}[0,1]$ по норме $\|x\|_1$.

Пусть теперь $x_n(t) \in C^{(1)}[0,1]$ – фундаментальная по норме $\|x\|_2$ последовательность, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m,n > N$ $\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$, откуда получаем, что $\int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt + \max\limits_{t\in[0,1]}|x_n'(t) - x_m'(t)| < \varepsilon$. Следовательно, $\forall t \in [0,1]$ $|x_n'(t) - x_m'(t)| < \varepsilon$, и $\int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt < \varepsilon$. Таким образом, в силу критерия Коши $x_n'(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(t)$, а последовательность $x_n(t)$ является фундаментальной в $L_1[0,1]$. Поскольку $L_1[0,1]$ – банахово, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} x(t)$. По теореме о связи видов сходимостей $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} x(t)$, откуда, по теореме о связи сходимостей по мере и почти всюду следует, что $\exists x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{п.в.} x(t)$.

Пусть $t_0 \in [0,1]$ – какая-то точка, в которой $x_{n_k}(t_0) \underset{k\to\infty}{\to} x(t_0)$. Рассмотрим последовательность $x'_{n_k}(t)$ и проинтегрируем ее в пределах от t_0 до t: $\int\limits_{t_0}^{t} x'_{n_k}(\tau)d\tau = x_{n_k}(\tau)\Big|_{t_0}^{t} = x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_0)$. Поскольку $x_n'(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(t)$, то $x'_{n_k}(t) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(t)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Римана, получаем, что $\forall t \in [0,1]$ $\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t) - x(t_0)$ откуда $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau$. Поскольку $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{п.в.} x(t)$, то $x(t) \overset{п.в.}{=} x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau$.

Поскольку $x(t) \in L_1[0,1]$, то $x(t)$ – это класс функций, равных почти всюду функции $x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau$. Поскольку $x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau$ – непрерывно дифференцируема, то $x(t)$ непрерывно дифференцируема почти всюду.

Ясно, что функцию $x(t)$ можно доопределить на множестве нулевой меры так, чтобы равенство $x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau$ было верно всюду. При этом с точки зрения пространства $L_1[0,1]$ функция $x(t)$ осталась прежней. Однако, теперь

$x(t) \in C^{(1)}[0,1]$ и, кроме того, $\forall t \in [0,1]$ $x'(t) = \varphi(t)$. Перейдем в неравенствах $|x_n'(t) - x_m'(t)| < \varepsilon$, и $\int\limits_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt < \varepsilon$ к пределу при $m \to \infty$ и получим $\forall t \in [0,1]$ $|x_n'(t) - x'(t)| < \varepsilon$ и $\int\limits_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt < \varepsilon$, откуда $\int\limits_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt + \max\limits_{t \in [0,1]} |x_n'(t) - x'(t)| < 2\varepsilon$, т.е. последовательность $x_n(t)$ сходится в $C^{(1)}[0,1]$ по норме $\|x\|_2$.

2. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_n(t) = \sin n\pi t$ при $n \in \mathbb{N}$?

Решение: предположим, что множество предкомпактно, тогда в силу критерия предкомпактности оно равностепенно непрерывно в среднем квадратичном, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall z$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z| < \delta$ $\|\sin n\pi(t+z) - \sin n\pi t\|_2 < \varepsilon$, т.е.

$$\left(\int\limits_0^1 \left(\sin n\pi(t+z) - \sin n\pi t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon .$$

Пусть $z = \dfrac{1}{n}$, тогда $|z| = \dfrac{1}{n} < \delta$, начиная с некоторого номера, значит,

$$\left(\int\limits_0^1 \left(\sin n\pi(t+z) - \sin n\pi t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sin(n\pi t + \pi) - \sin n\pi t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(4\int\limits_0^1 \sin^2 n\pi t dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} .$$

Выбирая $\varepsilon < \sqrt{2}$, получим противоречие определению равностепенной непрерывности в среднем квадратичном. Значит, множество не является предкомпактным.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если X – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то любая функция $f \in L_p(X)$ непрерывна в среднем в степени p при $p > 1$ и $p \neq 2$ (рассмотреть также возможный случай $\Delta_0 = \varnothing$, см. доказательство теоремы о непрерывности в среднем квадратичном).

2. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на $[a,b]$ функций норма $\|x\|_1 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ эквивалентна норме $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b v(t) |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, где $v(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и $v(t) \geq \alpha > 0$ на $[a,b]$.

3. Доказать, что усредненные функции бесконечно дифференцируемы в любой точке своей области определения.

4. Пусть $p > 1$ и $p \neq 2$, $f \in L_p(X)$, X – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, f_ρ – усредненная функция. Доказать, что $f_\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{L_p} f$.

5. Доказать, что множество бесконечно дифференцируемых функций является всюду плотным в пространствах $C(X)$ и $L_p(X)$, где X – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, при $p>1$ и $p\neq 2$.

6. Пусть X – компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что множество $\{f_\alpha(x)\}\in L_p(X)$ при $p>1$ и $p\neq 2$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда:

1. $\{f_\alpha(x)\}$ ограничено в пространстве L_p;
2. $\{f_\alpha(x)\}$ равностепенно непрерывно в среднем в степени p.

Указание: множество функций $\{f_\alpha(x)\}\in L_p(X)$ *называется равностепенно непрерывным в среднем в степени* p*, если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$*:* $\forall z\ \ \forall\alpha\ \ |z|<\delta$ $\left\|f_\alpha(x+z)-f_\alpha(x)\right\|_p<\varepsilon$.

7. Доказать, что функция $\omega_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{при } |t|<1,\\ 0 & \text{при } |t|\geq 1\end{cases}$, где $c=\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{1}{1-\tau^2}}d\tau$, $(-\infty,+\infty)$ является единичным ядром усреднения.

8. Доказать, что для ядра усреднения $\omega_\rho(t)=\dfrac{1}{\rho}\omega_1\left(\dfrac{t}{\rho}\right)$ (см. предыдущую задачу) справедливо неравенство: $\left|\dfrac{d^k\omega_\rho(t)}{dx^k}\right|\leq c_k\rho^{-1-k}$, где c_k – некоторые постоянные, не зависящие от ρ, $k=0,1,2,\ldots$

9. Доказать, что $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_a^b\left|f(x+h)-f(x)\right|^p dx=0$, если $f\in L_p\big((\alpha,\beta),dx\big)$ и $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$.

10. Пусть $f\in L_p\big(\mathbb{R},dx\big)$. Доказать, что $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x+h)-f(x)\right|^p dx=0$.

11. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=\sin\alpha t$ при $\alpha\in[1,2]$?

12. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=\cos\alpha t$ при $\alpha\in[1,2]$?

13. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=e^{t+\alpha}$ при $\alpha\in[3,10]$?

14. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_n(t)=t^n$ при $n\in\mathbb{N}$?

Указание: показать, что у любой последовательности элементов множества можно найти сходящуюся в $L_p[0,1]$ *подпоследовательность.*

15. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_n(t)=(\alpha t)^n$ при $n\in\mathbb{N}$?

16. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_n(t)=\sin(t+n)$ при $n\in\mathbb{N}$?

17. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=e^{t-\alpha}$ при $\alpha\in[0,+\infty)$?

18. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=\operatorname{arctg}\alpha\left(t-\frac{1}{2}\right)$ при $\alpha\in\mathbb{R}$?

Указание: показать, что у любой последовательности элементов множества можно найти сходящуюся в $L_p[0,1]$ подпоследовательность.

19. Предкомпактно ли в $L_p[0,1]$ множество $x_n(t)=n\left(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{t}\right)$ при $n\in\mathbb{N}$?

Указание: показать, что у любой последовательности элементов множества можно найти сходящуюся в $L_p[0,1]$ при $1\le p<\frac{3}{2}$ подпоследовательность. Проверить, что $0\le n\left(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{t}\right)\le\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ и вывести отсюда оценку $\left|n_k\left(\sqrt[3]{t+\frac{1}{n_k}}-\sqrt[3]{t}\right)-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right|\le\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, после чего воспользоваться теоремой Лебега об ограниченной сходимости.

20. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_\alpha(t)=t^\alpha$ при $\alpha>-\frac{1}{2}$?

Указание: найти в множестве последовательность, из которой нельзя выбрать сходящуюся в $L_2[0,1]$ подпоследовательность.

21. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x_n(t)=\ln^n t$ при $n\in\mathbb{N}$?

Указание: показать, что подпоследовательность с четными номерами не может сходиться почти всюду.

22. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $x(t)=\int\limits_0^t y(\tau)d\tau$, при $\int\limits_0^1|y(\tau)|^2d\tau\le 1$?

23. Предкомпактно ли в $L_2[0,1]$ множество $t^2\le x(t)\le t$?

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=t^2+(t-t^2)\sin^2 nt$ и показать, что любая ее подпоследовательность не имеет предела в $L_2[0,1]$.

24. Доказать, что в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ всюду плотное множество образуют непрерывные финитные функции. Доказать, что $L_2(\mathbb{R})$ сепарабельно.

Указание: используя теорему Лебега показать, что при достаточно большом N $\left\|f-f\chi_{[-N,N]}\right\|<\frac{\varepsilon}{3}$, приблизить $f\chi_{[-N,N]}$ непрерывной функцией g на отрезке $[-N,N]$ (за пределы отрезка продолжить g нулем) и при достаточно малом α приблизить f непрерывной финитной функцией $g_\alpha=\begin{cases} g, |x|\le N\\ 0, |x|>N+\alpha\\ \text{линейная на}\\ \text{оставшихся частях}\end{cases}$.

Дополнение. Базисы в линейных пространствах

Определение: пусть X – произвольное множество. Отношение $\le$ называется отношением линейного порядка, если выполнены условия:

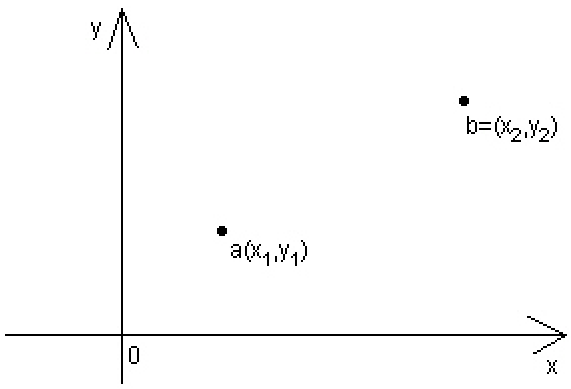
1. $\forall x \in X \quad x \le x$;
2. $\forall x, y, z \in X$ из $x \le y$ и $y \le z$ следует, что $x \le z$;
3. $\forall x, y \in X$ из $x \le y$ и $y \le x$ следует, что $x = y$;
4. $\forall x, y \in X$ либо $x \le y$, либо $y \le x$.

Замечание: ясно, что обычные неравенства этими свойствами обладают.

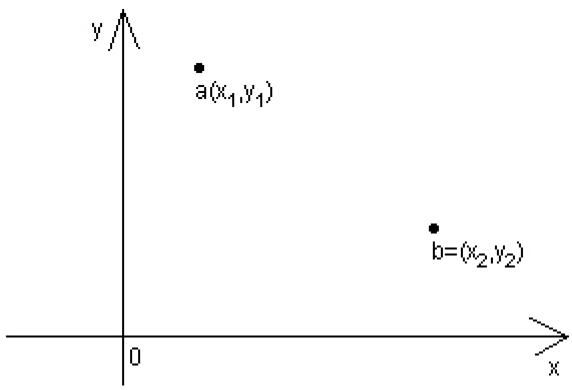
Определение: пусть X – произвольное множество. Отношение $\le$ называется отношением частичного порядка, если выполнены только условия 1-3 предыдущего определения.

Замечание: приведем пример отношения частичного порядка, не являющегося отношением линейного порядка.

Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le x_2 \\ y_1 \le y_2 \end{cases}$ (это отношение называется "выше и правее").



В этом случае неравенство $a \le b$ верно.

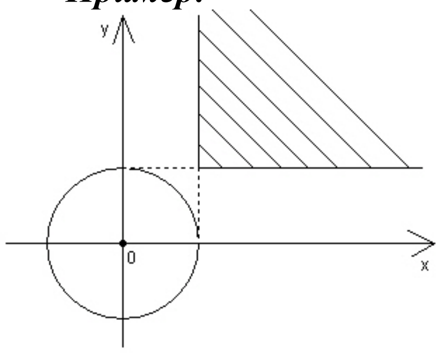


В этом случае ни одно из неравенств $a \le b$ и $b \le a$ не является верным.

Таким образом, не для всех точек $\mathbb{R}^2$ при таком отношении выполняется свойство быть сравнимыми.

Определение: пусть X – частично упорядоченное множество, $E \subset X$ – его подмножество. Элемент $c \in X$ называется мажорантой для E, если $\forall x \in E$ $x \le c$. Элемент $c \in X$ называется минорантой для E, если $\forall x \in E$ $c \le x$.

Пример:



Если $X = \mathbb{R}^2$, E – единичный круг с центром в начале координат и отношение частичного порядка задано "выше и правее", то множество мажорант изображено на рисунке (заштрихованная область).

Определение: мажоранта, принадлежащая множеству, называется его наибольшим элементом. Миноранта, принадлежащая множеству, называется его наименьшим элементом.

Замечание: в предыдущем примере таких элементов нет.

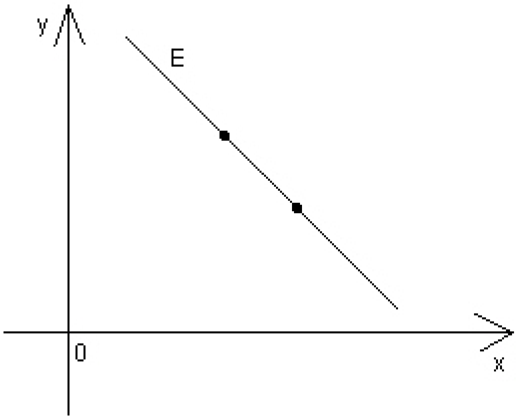
Определение: элемент c называется максимальным элементом множества E, если $c \in E$ и в множестве E нет элементов, больших c. Элемент c называется минимальным элементом множества E, если $c \in E$ и в множестве E нет элементов, меньших c.

Замечание: в предыдущем примере максимальные элементы лежат на четверти окружности, отвечающей диапазону углов $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Их бесконечно много.

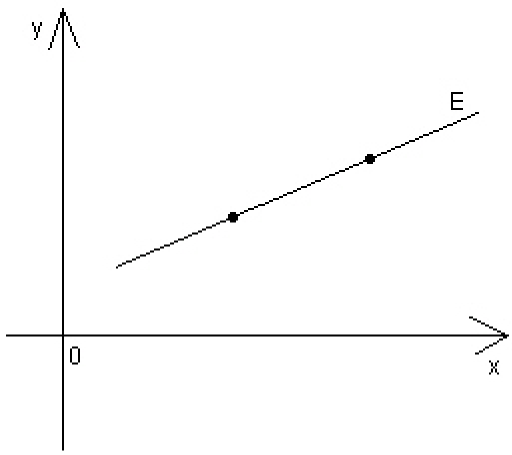
Замечание: таким образом, в частично упорядоченных множествах наибольший элемент и максимальный элемент – необязательно одно и то же.

Определение: пусть X – частично упорядоченное множество, $E \subset X$ – его подмножество. E называется цепью в X, если оно является линейно упорядоченным.

Замечание: $X = \mathbb{R}^2$, E – прямая.



Не цепь



Цепь

Лемма Цорна: пусть X – частично упорядоченное множество. Если любая цепь из X имеет мажоранту, то в X найдется хотя бы один максимальный элемент.

Доказательство леммы опускается.

Определение: пусть X – линейное пространство, $\{e_\alpha\}$ – какая-то система векторов в этом пространстве. Эта система называется базисом Гамеля, если:

1. конечная линейная независимость, т.е. из условия $\sum_{k=1}^{n} c_k e_k = 0$ следует, что $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ для любого конечного числа векторов исходной системы;

2. любой вектор $x \in X$ можно представить в виде конечной линейной комбинации векторов исходной системы, т.е. $\forall x \in X \quad \exists e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, ..., e_{\alpha_n} \quad \exists c_1, c_2, ..., c_n$: $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_{\alpha_k}$.

Определение: пусть X – линейное пространство. Система его векторов $\{e_\alpha\}$ называется базисом Банаха, если выполнены условия:

1. из равенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k = 0$ следует, что $\forall k \in \mathbb{N}\ \ c_k = 0$;

2. $\forall x \in X \ \ x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

Замечание: базис Банаха существует не во всех пространствах.

Теорема (о существовании базиса Гамеля): в любом линейном пространстве существует базис Гамеля.

Доказательство: рассмотрим множество E, элементами которого являются всевозможные системы векторов $\{e_\alpha\}$, обладающие свойством конечной линейной независимости, т.е., из $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k = 0$ следует, что $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

На множестве E введем отношение частичного порядка следующим образом: $\{e_\alpha\} \leq \{e_\beta\}$, если всякий $e_\alpha \in \{e_\alpha\}$ тем более принадлежит $\{e_\beta\}$. Покажем, что в так построенном множестве E всякая цепь имеет мажоранту.

Пусть имеется цепь, т.е. такое множество линейно независимых в конечном числе систем, что из любых двух систем одна содержится в другой. Рассмотрим объединение векторов из всех этих систем. Ясно, что это объединение все эти системы содержит и нужно убедиться, что оно принадлежит множеству E, т.е. само является линейно независимой в конечном числе системой.

Действительно, если мы возьмем n векторов $e_1,...,e_n$ из этого объединения, то каждый из них какой-либо своей системе принадлежит. Поскольку вектора $e_1,...,e_n$ выбираются из цепи, т.е. из набора вложенных друг в друга систем, то все эти вектора принадлежат одной, самой большой из этих систем. Эта самая большая система состоит из линейно независимых в конечном числе векторов, т.к. все системы были такими. Тем самым вектора $e_1,...,e_n$ линейно независимы.

Итак, выполнено условие леммы Цорна, согласно которой в нашем множестве E найдется хотя бы один максимальный элемент, т.е. такая линейно независимая в конечном числе система, больше которой систем уже нет, т.е. при добавлении к ней любого другого вектора она уже перестает быть линейно независимой в конечном числе. Покажем, что она и является нужным нам базисом Гамеля.

Пусть $\{e_\alpha\}$ – максимальная система. Берем любой вектор x и нам его нужно выразить через конечное число векторов из этой системы. Добавим x к этой системе и рассмотрим новую систему $\{x, \{e_\alpha\}\}$. Поскольку $\{e_\alpha\}$ – максимальная линейно независимая в конечном числе система, то новая система уже не является линейно независимой в конечном числе, т.е. из условия $\lambda_0 x + \lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + ... + \lambda_n e_{\alpha_n} = 0$ следует, что не все λ_k равны нулю.

а) Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n e_{\alpha_n} = 0$, причем не все оставшиеся λ_k равны нулю. Это противоречит линейной независимости в конечном числе системы $\{e_\alpha\}$. Итак, данный случай невозможен.

б) Пусть $\lambda_0 \neq 0$, тогда $x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e_{\alpha_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} e_{\alpha_2} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} e_{\alpha_n}$, т.е. любой элемент x представили в виде конечной линейной комбинации элементов системы $\{e_\alpha\}$. Значит, система $\{e_\alpha\}$ является базисом Гамеля.

Теорема доказана.

Упражнение: доказать, что банахово X пространство со счетным базисом Банаха является сепарабельным.

Указание: показать, что множество $\left\{ \sum_{i=1}^{n_k} r_i e_i : r_i \in \mathbb{Q} \right\}$ *– счетное и всюду плотное в* X.

РАЗДЕЛ 3. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Пространства со скалярным произведением

Определение: линейное пространство E с введенным на нем скалярным произведением и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, называется евклидовым.

Замечание: напомним, что скалярным произведением на линейном комплексном пространстве X называется отображение, которое любым элементам $x, y \in X$ ставит в соответствие комплексное число (x, y) со следующими свойствами (аксиомами скалярного произведения):

1. $\forall x \in X \ \ (x,x) \geq 0$;
2. $(x,x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;
3. $\forall x, y \in X \ \ (x, y) = \overline{(y,x)}$;
4. $\forall x, y, z \in X \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ (x + y, z) = (x,z) + (y,z)$, $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского): пусть E – евклидово пространство, тогда $\forall x, y \in E \ \ |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$, причем равенство в нетривиальном случае ($x \neq 0$ и $y \neq 0$) достигается тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство: рассмотрим функцию $\varphi(r) = (x + re^{i\theta} y, x + re^{i\theta} y) \geq 0$, где $r \in \mathbb{R}$, $\theta = \arg(x, y)$, т.е. $(x, y) = |(x, y)| e^{i\theta}$. Используя аксиомы скалярного произведения, получаем $\varphi(r) = \left(x,x\right) + \left(x, re^{i\theta} y\right) + \left(re^{i\theta} y, x\right) + \left(re^{i\theta} y, re^{i\theta} y\right) = \|x\|^2 +$ $+re^{-i\theta}\left(x, y\right) + re^{i\theta}\overline{\left(x, y\right)} + re^{i\theta} re^{-i\theta} \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2|(x, y)| r + r^2 \|y\|^2 \geq 0$. Получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами относительно переменной r, принимающий неотрицательные значения, следовательно, его дискриминант $4|(x, y)|^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, откуда следует неравенство. Допустим, что $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$, т.е. дискриминант обратился в 0, поэтому, при некотором значении r $\varphi(r) = (x + re^{i\theta} y, x + re^{i\theta} y) = 0$, т.е. $x + re^{i\theta} y = 0$, откуда $x = -re^{i\theta} y = \lambda y$.

Если $x = \lambda y$ или $x = 0$, или $y = 0$, то равенство $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ очевидно.

Теорема доказана.

Теорема (свойства нормы в евклидовом пространстве): пусть E – евклидово пространство, тогда число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Доказательство: 1. $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$.

2. $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x,x)} = 0 \ \Leftrightarrow \ (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$.

3. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} (x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

4. $\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x,x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2} \leq$ $\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2} \leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{\left(\|x\| + \|y\|\right)^2} = \|x\| + \|y\|$.

Здесь использовали неравенство Коши-Буняковского, а также свойства $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Re}z\le|z|$.

Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности скалярного произведения): скалярное произведение – есть непрерывная функция по совокупности аргументов.

Доказательство: пусть при $n\to\infty$ $x_n\to x$, $y_n\to y$, тогда числовые последовательности $\|x_n\|$ и $\|y_n\|$ ограничены. Пусть M – их верхняя граница. Кроме того, $\|x_n-x\|\to 0$ и $\|y_n-y\|\to 0$, тогда

$$|(x_n,y_n)-(x,y)|=|(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)|\le|(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)|=$$
$$=|(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)|\le\|x_n\|\cdot\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\cdot\|y\|\le M\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\cdot\|y\|.$$

Переходя в неравенстве к пределу при $n\to\infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $|(x_n,y_n)-(x,y)|\to 0$, что означает, что $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

Теорема доказана.

Определение: пусть E – евклидово пространство и вектора $x,y\in E$. Эти вектора называются ортогональными, если $(x,y)=0$. Обозначение: $x\perp y$.

Замечание: легко видеть, что $\forall x\in E$ $(x,0)=(0,x)=0$ (т.к. $0=x-x$).

Теорема Пифагора: пусть E – евклидово пространство и вектора $x,y\in E$, причем $x\perp y$. Тогда $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Доказательство: $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Теорема доказана.

Замечание: геометрически теорема означает, что квадрат “гипотенузы”, равен сумме квадратов “катетов”.

Теорема (равенство параллелограмма): пусть E – евклидово пространство и вектора $x,y\in E$, тогда $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Доказательство: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)=\|x\|^2+(x,y)+\overline{(x,y)}+$ $+\|y\|^2+\|x\|^2-(x,y)-\overline{(x,y)}+\|y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Теорема доказана.

Замечание: геометрически теорема означает, что сумма квадратов диагоналей “параллелограмма”, равна сумме квадратов всех его сторон. Для того чтобы в нормированном пространстве можно было ввести скалярное произведение, порождающее имеющуюся норму, необходимо и достаточно, чтобы для любых его элементов x и y выполнялось равенство параллелограмма. Это утверждение предлагается доказать самостоятельно (задачи 26, 27).

Определение: углом между векторами x и y действительного евклидова пространства E называется угол $\varphi\in[0,\pi]$ такой, что $\cos\varphi=\dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Определение: пусть E – евклидово пространство, элементы $x_1,x_2,...,x_n\in E$. Определителем Грама этих элементов называется определитель

$$\Gamma(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & ... & (x_1,x_n)\\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & ... & (x_2,x_n)\\ .... & .... & ... & ....\\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & ... & (x_n,x_n)\end{vmatrix}.$$

Теорема (критерий линейной зависимости): пусть E – евклидово пространство, элементы $x_1,x_2,...,x_n\in E$. Эти элементы являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда $\Gamma(x_1,x_2,...,x_n)=0$.

Доказательство: пусть $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n=0$. Умножая скалярно это равенство последовательно на x_1, x_2,…, x_n (справа), получим СЛАУ $G\mathrm{A}=0$, где G – транспонированная матрица Грама, A – столбец из чисел $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Поскольку однородная СЛАУ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, а определитель при транспонировании не меняется, то получаем, что коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ не равны нулю одновременно тогда и только тогда, когда $\Gamma(x_1,x_2,...,x_n)=0$.

Теорема доказана.

Замечание: необходимым и достаточным условием линейной независимости элементов $x_1,x_2,...\in E$ является: $\forall n\in\mathbb{N}\ \Gamma(x_1,x_2,...,x_n)\neq 0$.

Определение: гильбертовым пространством H называется полное евклидово пространство.

Замечание: гильбертово пространство H является полным в смысле метрики $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Примеры гильбертовых пространств: а) Комплексное пространство l_2. Если $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)\in l_2$ и $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n,...)\in l_2$, то скалярное произведение вводится следующим образом: $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta}_i$. Сходимость ряда вытекает из неравенства Гельдера для рядов. Аксиомы скалярного произведения проверяются элементарно. Равенство параллелограмма очевидно.

б) Пространство $L_2[a,b]$. Если $x(t)\in L_2[a,b]$ и $y(t)\in L_2[a,b]$, то скалярное произведение вводится следующим образом: $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$. Сходимость интеграла вытекает из неравенства Гельдера для интегралов. Аксиомы скалярного произведения и равенство параллелограмма очевидны.

Примеры решения задач

1. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)$ – фиксированная последовательность положительных чисел, $l_{2,\alpha}$ – пространство последовательностей $x=(\xi_1,\xi_2,...)$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|^2<+\infty$. Пусть $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_{2,\alpha}$. Доказать, что $l_{2,\alpha}$ со

скалярным произведением $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\overline{\eta}_n$ является гильбертовым пространством.

Решение: по определению гильбертова пространства нужно доказать, что число $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\overline{\eta}_n$ конечно и удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, а также, что $l_{2,\alpha}$ полно по норме $\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|^2}$.

Поскольку $|\xi_n|^2-2|\xi_n|\cdot|\eta_n|+|\eta_n|^2=\left(|\xi_n|-|\eta_n|\right)^2\geq 0$, то $|\xi_n|\cdot|\eta_n|\leq\frac{1}{2}\left(|\xi_n|^2+|\eta_n|^2\right)$. Отсюда следует, что $\alpha_n|\xi_n|\cdot|\eta_n|\leq\frac{\alpha_n}{2}\left(|\xi_n|^2+|\eta_n|^2\right)$ и в силу сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\eta_n|^2$ получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\overline{\eta}_n$ сходится абсолютно.

Выполнение аксиом скалярного произведения очевидно. Осталось доказать полноту $l_{2,\alpha}$, т.е. по определению полноты, что любая фундаментальная последовательность в $l_{2,\alpha}$ имеет предел.

Пусть $\left\{x^{(k)}\right\}=\left(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},...\right)_{k=1}^{\infty}\in l_{2,\alpha}$ – фундаментальная последовательность, $k\in\mathbb{N}$. По определению фундаментальности $\forall\varepsilon>0$ $\exists k_0\in\mathbb{N}$: $\forall l,m>k_0$ $\left\|x^{(l)}-x^{(m)}\right\|^2<\varepsilon^2$. Это означает, что $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left|\xi_n^{(l)}-\xi_n^{(m)}\right|^2<\varepsilon^2$. Поскольку каждое слагаемое неотрицательно и вся сумма меньше, чем ε^2, то каждое слагаемое тем более меньше, чем ε^2, т.е. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\alpha_n\left|\xi_n^{(l)}-\xi_n^{(m)}\right|^2<\varepsilon^2$. Поскольку $\alpha_n>0$ и фиксированы, то $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\xi_n^{(l)}-\xi_n^{(m)}\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_n}}$, т.е. $\forall n\in\mathbb{N}$ последовательность $\left\{\xi_n^{(k)}\right\}$ – фундаментальна, но $\forall n\in\mathbb{N}$ это уже числовая последовательность, значит, для нее справедлив критерий Коши, согласно которому она имеет предел, т.е. $\exists\lim\limits_{k\to\infty}\xi_n^{(k)}=\xi_n$. Составим вектор $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$ и покажем, что $x^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{l_{2,\alpha}}x$. Для этого надо показать, во-первых, что $x\in l_{2,\alpha}$ и, во-вторых, что $\left\|x^{(k)}-x\right\|\underset{k\to\infty}{\to}0$.

Поскольку фундаментальная последовательность всегда ограничена, то $\exists c>0$: $\left\|x^{(k)}\right\|\leq c$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|^2\leq c^2$, значит $\forall N\in\mathbb{N}$ тем более $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}\right|^2\leq c^2$. Поскольку это уже конечная сумма, то можно перейти к пределу при $k\to\infty$ и с учетом того, что $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_n^{(k)}=\xi_n$, получить, что $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n|\xi_n|^2\leq c^2$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n|\xi_n|^2$ сходится в силу критерия Вейерштрасса, значит $x\in l_{2,\alpha}$.

Перепишем теперь условие фундаментальности в виде $\forall\varepsilon>0\ \ \exists k_0\in\mathbb{N}$: $\forall k,m>k_0\ \ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|^2<\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$, значит, тем более, $\forall N\in\mathbb{N}\ \ \sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(m)}\right|^2<\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$. Снова сумма конечна и значит можно перейти к пределу при $m\to\infty$ и, с учетом того, что $\lim\limits_{m\to\infty}\xi_n^{(m)}=\xi_n$, получить $\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n\right|^2\le\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$. Переходя к пределу при $N\to\infty$, получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left|\xi_n^{(k)}-\xi_n\right|^2\le\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$, откуда $\left\|x^{(k)}-x\right\|^2\le\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2<\varepsilon^2$, значит, окончательно получаем, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists k_0\in\mathbb{N}$: $\forall k>k_0\ \ \left\|x^{(k)}-x\right\|<\varepsilon$, т.е. $x^{(k)}\underset{k\to\infty}{\overset{l_{2,\alpha}}{\to}}x$.

2. Доказать, что в нормированных пространствах l_p ($p\ge1$, $p\ne2$) и $C[0,1]$ норма не порождается скалярным произведением.

Решение: рассмотрим в l_p ($p\ge1$, $p\ne2$) два вектора $x=(1,1,0,0,...)$ и $y=(1,-1,0,0,...)$. Проверим, что для этих векторов не выполняется равенство параллелограмма. Ясно, что $x+y=(2,0,0,...)$, $x-y=(0,2,0,0,...)$. Таким образом, $\|x+y\|=\sqrt[p]{2^p+0^p+0^p+...}=2$ и, аналогично, $\|x-y\|=2$.

Тогда $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8$. Далее, $\|x\|=\sqrt[p]{1^p+1^p+0^p+0^p+..}=2^{\frac{1}{p}}$. Аналогично, $\|y\|=\sqrt[p]{1^p+|-1|^p+0^p+0^p+..}=2^{\frac{1}{p}}$. Тогда $2\|x\|^2+2\|y\|^2=2\cdot2^{\frac{2}{p}}+2\cdot2^{\frac{2}{p}}=4\cdot2^{\frac{2}{p}}$. Поскольку $p\ne2$, то равенство $8=4\cdot2^{\frac{2}{p}}$ или $2=2^{\frac{2}{p}}$ – неверно.

Рассмотрим в $C[0,1]$ две непрерывные функции $x(t)\equiv\dfrac{1}{2}$ и $y(t)=\dfrac{1}{2}t$. Проверим, что для этих функций не выполняется равенство параллелограмма.

Ясно, что $\|x\|=\sup\limits_{[0,1]}\left|\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ и $\|y\|=\sup\limits_{[0,1]}\left|\dfrac{1}{2}t\right|=\dfrac{1}{2}$, тогда $2\|x\|^2+2\|y\|^2=1$. Также очевидно, что $\|x+y\|=\sup\limits_{[0,1]}\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t\right|=1$, $\|x-y\|=\sup\limits_{[0,1]}\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t\right|=\dfrac{1}{2}$, значит $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\dfrac{5}{4}>1$, т.е. равенство параллелограмма не выполняется.

3. В действительном линейном пространстве определенных на $(-\infty,+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2e^{-t^2}dt$ сходится, введем скалярное произведение по формуле $(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)e^{-t^2}dt$. Доказать полноту этого пространства.

Решение: обозначим рассматриваемое пространство L, норма в нем определяется по формуле $\|x\|_L = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt}$.

Пусть $x(t), y(t) \in L$. Поскольку $|x(t)| \cdot |y(t)| e^{-t^2} \le \frac{e^{-t^2}}{2}\left(|x(t)|^2 + |y(t)|^2\right)$ (аналогично примеру 1), то, в силу сходимости интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 e^{-t^2} dt$, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt$ сходится абсолютно и удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, т.е. скалярное произведение определено корректно. Далее можно провести доказательство полноты по аналогии с теоремой о полноте пространства L_p при $p > 1$. Укажем еще другой способ.

Поскольку функция e^{-t^2} неотрицательна и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, т.е. e^{-t^2} суммируема на $(-\infty, +\infty)$, то функция $\mu(A) = \int\limits_A e^{-t^2} dt$ определена для всех измеримых подмножеств $A \subset (-\infty, +\infty)$, неотрицательна и $\sigma-$аддитивна, т.е. является мерой. Тогда, если $d\mu = e^{-t^2} dt$, то очевидно, что пространство L представляет собой пространство $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, причем, поскольку $\mu(\mathbb{R}) = \int\limits_{\mathbb{R}} 1 d\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, то $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ является полным пространством, как всякое пространство $L_p(E, d\mu)$ при условии, что число $\mu(E)$ – конечно. Следовательно, L также полно.

4. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$, $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$, $(x_n, y_n) \to 1$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Решение: $0 \le \|x_n - y_n\| = \sqrt{(x_n - y_n, x_n - y_n)} = \sqrt{(x_n, x_n) - (x_n, y_n) - \overline{(x_n, y_n)} + (y_n, y_n)} =$ $= \sqrt{\|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x_n, y_n) + \|y_n\|^2} \le \sqrt{2 - 2\operatorname{Re}(x_n, y_n)}$. Переходим в неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и, учитывая, что $(x_n, y_n) \to 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x_n, y_n) \to 1, \operatorname{Im}(x_n, y_n) \to 0$, получаем, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить аксиомы скалярного произведения в примерах гильбертовых пространств, приведенных в теоретической части.

2. Доказать, что в гильбертовом пространстве для любых элементов x, y, z справедливо тождество Аполлония: $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$.

3. Доказать справедливость в гильбертовом пространстве поляризационного тождества: $4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2$.

4. Доказать, что в нормированном пространстве c_0 норма не порождается скалярным произведением.

Указание: рассмотреть последовательности $x_n=\left(1,\frac{1}{2},0,0,...\right)$ *и* $y_n=\left(1,\frac{1}{4},0,0,...\right)$.

5. Доказать, что в нормированном пространстве l_∞ норма не порождается скалярным произведением.

Указание: рассмотреть последовательности $x_n=(1,1,1,...)$ *и* $y_n=(1,0,0,...)$.

6. Доказать, что в гильбертовом пространстве справедлива теорема Пифагора (обобщенный вариант): если $(x_k,x_l)=0$ при $k\neq l$ и $x=\sum_{k=1}^{n}x_k$, то $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$.

7. Доказать, что в гильбертовом пространстве для любых элементов x, y, z и t справедливо неравенство Птоломея: $\|x-z\|\cdot\|y-t\|\leq\|x-y\|\cdot\|z-t\|+\|y-z\|\cdot\|x-t\|$.

8. Определяет ли в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение функция $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, если:

а) $\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(\xi_k+\eta_k)$;

б) $\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{n}k\xi_k\eta_k$,

где $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ и $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$.

9. Доказать, что функция $(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k\bar{\eta}_k$, $0<\alpha_k\leq 1$ $(\forall k\in\mathbb{N})$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)$, $y=(\eta_1,\eta_2,...)$ определяет скалярное произведение в l_2. Будет ли полученное пространство гильбертовым?

Указание: при проверке полноты взять $\alpha_k=\frac{1}{k^2}$, *воспользоваться теоремой об эквивалентных нормах в банаховых пространствах и рассмотреть последовательность* $x_k=\left(\underset{k}{1,...,1},0,...,0,....\right)$.

10. В действительном линейном пространстве определенных на $[0,+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что интеграл $\int_0^{+\infty}|x(t)|^2e^{-t}dt$ сходится, введем скалярное произведение по формуле $(x,y)=\int_0^{+\infty}x(t)y(t)e^{-t}dt$. Доказать полноту этого пространства.

11. Пусть в нормированном пространстве E справедливо равенство ромба: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4$ при любых $x,y\in E$ таких, что $\|x\|=\|y\|=1$. Доказать, что в E можно ввести скалярное произведение, порождающее имеющуюся норму.

12. Показать, что в гильбертовом пространстве сумма векторов и произведение вектора на число непрерывны, т.е. если при $n\to\infty$ $x_n\to x$, $y_n\to y$ (по норме), и $\lambda_n\to\lambda$ (как числовая последовательность), то $x_n+y_n\to x+y$ и $\lambda_n x_n\to\lambda x$.

13. Пусть H – гильбертово пространство, $\{x_n\},\{y_n\}\subset H$, $\|x_n\|=1$, $\|y_n\|=1$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать справедливость утверждений:

а) $(x_n,y_n)\to 1\Rightarrow\|x_n-y_n\|\to 0$;

б) $\|x_n+y_n\|\to 2\Rightarrow\|x_n-y_n\|\to 0$.

14. Пусть H – гильбертово пространство, $x,y\in H$. Доказать, что равенство $\|x\|+\|y\|=\|x+y\|$ выполняется тогда и только тогда, когда или $\|x\|=0$, или $y=\lambda x$ при некотором $\lambda\ge 0$.

15. Найти угол φ между элементами $x(t)=\sin t$ и $y(t)=t$ в пространстве $L_2[0,\pi]$.

16. Найти углы треугольника, образованного в пространстве $L_2[-1,1]$ элементами $x_1(t)=0$, $x_2(t)=1$ и $x_3(t)=t$.

17. Доказать, что функция $(x,y)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt+\int\limits_a^b x'(t)y'(t)dt$ определяет скалярное произведение в (действительном) пространстве $C^{(1)}[a,b]$.

18. Определить, являются ли в пространстве $L_2[0,\pi]$ элементы $x_1(t)=1$, $x_2(t)=\cos 2t$, $x_3(t)=\sin^2 t$ линейно независимыми.

19. Определить, являются ли в пространстве $L_2[-1,1]$ элементы $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$ и $x_4(t)=t^3$ линейно независимыми.

20. Определить, являются ли в комплексном пространстве $L_2[a,b]$ элементы $x_n(t)=\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}e^{2\pi in\frac{t-a}{b-a}}$, при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ линейно независимыми.

21. Доказать, что пространство $L_p[0,1]$ не является гильбертовым ни для каких $p\ne 2$.

Указание: рассмотреть вектора $x(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$ *и* $y(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 1, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

22. Доказать, что в действительном гильбертовом пространстве H элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2$. Верно ли это для комплексного гильбертова пространства?

23. Доказать, что в комплексном гильбертовом пространстве H элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\lambda x\|^2+\|\mu y\|^2=\|\lambda x+\mu y\|^2$, для всех $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

24. Пусть H – комплексное гильбертово пространство и $\forall x_1,x_2\in H$ справедливо равенство $\mathrm{Re}(x_1,x_2)=\|x_1\|^2=\|x_2\|^2$. Доказать, что $x_1=x_2$.

25. Доказать, что для того, чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L\subset H$ (т.е. ортогонален всем векторам из L), необходимо и достаточно, чтобы $\forall y\in L$ выполнялось неравенство $\|x\|\le\|x-y\|$.

26. Пусть некоторая норма удовлетворяет равенству параллелограмма. Доказать, что она порождается скалярным произведением, корректно определенным с помощью поляризационного тождества (см. задачу 3).

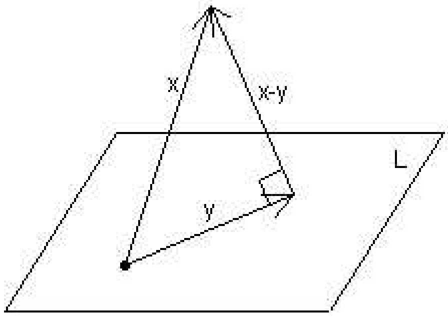
Указание: применить равенство параллелограмма к векторам $x+i^k z$ *и* $y+i^k z$ *при* $k=0,1,2,3$ *и получить, что* $(x,z)+(y,z)=\frac{1}{2}(x+y,2z)$. *Показать, что* $(0,x)=0$, $(x,2z)=2(x,z)$, $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, *откуда получить, что* $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ *сперва для натуральных* λ, *затем для чисел вида* $\frac{1}{n}$, *для отрицательных чисел, рациональных чисел, и, с учетом непрерывности нормы (см. п. 2.2. раздела 2), для всех действительных чисел. Проверить, что* $(ix,y)=i(x,y)$ *и все остальные аксиомы скалярного произведения.*

27. Доказать утверждение предыдущей задачи для действительного евклидова пространства, если $(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.

3.2. Проекции векторов в гильбертовых пространствах

Теорема (о кратчайшем расстоянии от точки до подпространства): пусть H – гильбертово пространство, L – его линейное многообразие, $x \notin L$, $y \in L$ – вектор, расстояние до которого от x – наименьшее среди всех расстояний от x до всех векторов из L. Тогда вектор $x - y$ ортогонален всем векторам из L.

Доказательство: геометрически описанную ситуацию можно изобразить как показано на рисунке.



Рассмотрим $\forall z \in L$ и $\forall t \in \mathbb{R}$ функцию $\varphi(t) = \left\| x - (y + te^{i\theta} z) \right\|^2$, где $\theta = \arg(x - y, z)$. Ясно, что $\varphi(t)$ – это квадрат расстояния от вектора x до вектора $y + te^{i\theta} z$ и, поскольку кратчайшее расстояние до вектора x имеет вектор y, то эта функция принимает минимальное значение при $t = 0$, т.е. $t = 0$ – точка минимума функции $\varphi(t) = \left\| x - (y + te^{i\theta} z) \right\|^2$, значит $\varphi'(0) = 0$. Учитывая, что $(x - y, z) = \left|(x - y, z)\right| e^{i\theta}$ и, проводя преобразования $\varphi(t)$, получим $\varphi(t) = (x - y - te^{i\theta} z, x - y - te^{i\theta} z) = \left\| x - y \right\|^2 - 2t\left|(x - y, z)\right| + t^2 \left\| z \right\|^2$. Далее, $\varphi'(t) = -2\left|(x - y, z)\right| + 2t\left\| z \right\|^2$, откуда $\varphi'(0) = -2\left|(x - y, z)\right| = 0$, значит $(x - y, z) = 0$, что и означает, что $(x - y) \perp z$. Поскольку z – произвольный вектор из L, то получаем, что вектор $x - y$ ортогонален всем векторам из L.

Теорема доказана.

Определение: пусть H – гильбертово пространство, L – его линейное многообразие, $x \notin L$, $y \in L$ – вектор, такой, что $x - y$ ортогонален всем векторам из L. Вектор $y \in L$ (если он существует) называется проекцией элемента $x \notin L$ на многообразие L.

Теорема (о существовании проекции): пусть H – гильбертово пространство, L – его подпространство, $x \notin L$, $x \in H$, тогда $\exists y_0 \in L$ такой, что вектор $x - y_0$ ортогонален всем векторам из L. Такой вектор y_0 – единственен.

Замечание: условие замкнутости L здесь существенно. Для незамкнутого подпространства перпендикуляра может не существовать.

Доказательство: в силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что $\exists y_0 \in L$, до которого расстояние от x – наименьшее. Обозначим $d = \inf\limits_{y \in L} \left\| x - y \right\|$. По свойству точной нижней грани найдется последовательность $\{ y_n \} \subset L$ такая, что $\left\| x - y_n \right\| \underset{n \to \infty}{\to} d$. Если мы покажем, что y_n имеет предел (т.е. $y_n \to y_0$), то, во-первых, y_0 будет предельной точкой для L, а поскольку L замкнуто по условию, то $y_0 \in L$; во-вторых, поскольку $y_n \to y_0$, то $\|x-y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|x-y_0\|$, а, с другой стороны, $\|x-y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} d$, значит, $\|x-y_0\| = d$, но $d = \inf\limits_{y\in L}\|x-y\|$, значит, получим, что y_0 – тот самый вектор, расстояние до которого от x кратчайшее.

Итак, теорема будет доказана, если $y_n \to y_0$. Пространство H – гильбертово, значит по определению полное, L – его замкнутое подпространство, значит тоже полно по теореме о полноте замкнутого подпространства. Значит в L всякая фундаментальная последовательность имеет предел и осталось доказать, что $\{y_n\}$ – фундаментальна, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n,m>N\ \|y_n-y_m\|<\varepsilon$.

Рассмотрим векторы $x-y_n$ и $x-y_m$ и применим к ним равенство параллелограмма: $\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2+\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2$. Далее, $\|2x-(y_n+y_m)\|^2+\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2$, откуда получаем, что $\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2-4\left\|x-\dfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$.

Очевидно, что $\dfrac{y_n+y_m}{2}\in L$, а поскольку d – кратчайшее расстояние от элемента из L до x, то $\left\|x-\dfrac{y_n+y_m}{2}\right\|\ge d$, откуда $\|y_n-y_m\|^2 \le 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2-4d^2$.

Поскольку $\|x-y_n\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} d^2$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N\ \left|\|x-y_n\|^2-d^2\right|<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$, откуда $\|x-y_n\|^2<\dfrac{\varepsilon^2}{4}+d^2$. Аналогично, $\forall m>N\ \|x-y_m\|^2<\dfrac{\varepsilon^2}{4}+d^2$. Окончательно:

$$\|y_n-y_m\|^2 < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+d^2\right)+2\left(\frac{\varepsilon^2}{4}+d^2\right)-4d^2=\varepsilon^2.$$

Докажем единственность y_0. Допустим, что $\exists y_1\in L\colon \forall z\in L\ \ x-y_1\perp z$, и, кроме того, $x-y_0\perp z$. По определению ортогональности $(x-y_1,z)=0$ и $(x-y_0,z)=0$. Вычитая эти равенства и пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем $0=(x-y_1,z)-(x-y_0,z)=(x-y_1-(x-y_0),z)=(y_0-y_1,z)$. Поскольку $y_0-y_1\in L$, а z – произвольный элемент из L, то, выбирая $z=y_0-y_1$, получаем $(y_0-y_1,y_0-y_1)=0$. Отсюда следует, что $y_0-y_1=0$, т.е. $y_0=y_1$.

Теорема доказана.

3.3. Ортогональные дополнения и их свойства

Определение: пусть H – гильбертово пространство, L – его линейное многообразие. Ортогональным дополнением к L называется множество тех векторов из H, которые ортогональны всем векторам из L (т.е. $L^{\perp} = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in L\}$).

Теорема (об ортогональном дополнении): ортогональное дополнение всегда является подпространством.

Доказательство: проверим линейность, т.е. что если $x_1, x_2 \in L^{\perp}$, то $x_1 + x_2 \in L^{\perp}$ и если $x \in L^{\perp}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\lambda x \in L^{\perp}$. Пусть $x_1, x_2 \in L^{\perp}$, тогда $\forall y \in L$ $(x_1, y) = 0$ и $(x_2, y) = 0$. Складывая, получаем, что $(x_1 + x_2, y) = 0 \quad \forall y \in L$, т.е. $x_1 + x_2 \in L^{\perp}$. Пусть $x \in L^{\perp}$, тогда $\forall y \in L \quad (x, y) = 0$, значит $\lambda(x, y) = 0$, т.е. $(\lambda x, y) = 0 \ \ \forall y \in L$, откуда $\lambda x \in L^{\perp}$.

Проверим замкнутость, т.е., что $L^{\perp}$ содержит все свои предельные точки. Допустим, что x – предельная точка для $L^{\perp}$. Это означает, что $\exists \{x_n\} \subset L^{\perp}$: $x_n \to x$. Поскольку $\forall n \ \ x_n \in L^{\perp}$, то $\forall y \in L \ \ (x_n, y) = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\forall y \in L \ \ (x, y) = 0$, значит $x \in L^{\perp}$.

Теорема доказана.

Теорема (о разложении гильбертова пространства в прямую сумму): пусть H – гильбертово пространство, L – его подпространство, тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство: надо доказать, что $H = L + L^{\perp}$, т.е. $\forall x \in H$ справедливо представление $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$, и что эта сумма – прямая, т.е., по теореме о разложении в прямую сумму, что $L \bigcap L^{\perp} = \{0\}$. Берем $\forall x \in H$. По теореме о существовании проекции $\exists y \in L$: $x - y \perp L$, тогда $x = y + (x - y)$. Осталось обозначить $x_1 = y \in L$ и $x_2 = (x - y) \in L^{\perp}$. Допустим, что $z \in L \bigcap L^{\perp}$, значит $z \in L$ и $z \in L^{\perp}$, тогда $(z, z) = 0$, откуда $z = 0$.

Теорема доказана.

Замечание: в силу теорем о существовании проекции и разложении гильбертова пространства в прямую сумму, если H – гильбертово пространство и L – его подпространство, то $\forall x \in H$ допускает единственное представление в виде $x = u + v$, где $u \in L$ – проекция x на L, $v \in L^{\perp}$. При этом $\rho(x, L) = \|x - u\| = \|v\|$.

Теорема (о всюду плотности линейного многообразия): пусть H – гильбертово пространство, L – линейное многообразие в нем, тогда $\overline{L} = H \ \Leftrightarrow$ $L^{\perp} = \{0\}$.

Замечание: напомним, что условие $\overline{L} = H$ означает всюду плотность L в H.

Доказательство: пусть $\overline{L}=H$. Допустим, что $z_0 \in L^{\perp}$. По определению всюду плотности $\forall x \in H \;\; \exists \{y_n\} \subset L$: $y_n \to x$. Возьмем $x = z_0$, тогда $y_n \to z_0$. По теореме о непрерывности скалярного произведения $(y_n, z_0) \to (z_0, z_0)$. С другой стороны $(y_n, z_0) = 0$, значит $(z_0, z_0) = 0$, т.е. $z_0 = 0$.

Обратно: пусть $L^{\perp} = \{0\}$, т.е. если $\forall y \in L \;\; (x, y) = 0$, то $x = 0$. Допустим, что $\overline{L} \neq H$, тогда $\exists x_0 \in H$: $x_0 \notin \overline{L}$. Т.к. $\overline{L}$ – подпространство, то по предыдущей теореме $x_0 = y_0 + z_0$, где $y_0 \in \overline{L}$, $z_0 \in \overline{L}^{\perp}$. Поскольку $x_0 \notin \overline{L}$, то $z_0 \neq 0$. Заметим, что $(z_0, y) = 0 \;\; \forall y \in \overline{L}$ и, в частности, для $y \in L$, тогда по условию $z_0 = 0$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (о втором ортогональном дополнении): пусть H – гильбертово пространство, L – его линейное многообразие, тогда:

1) $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \supset L$,

2) Если L – подпространство, то $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$.

Доказательство: 1) Пусть $x \in L$. Надо доказать, что $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$ тем более, т.е., что $\forall y \in L^{\perp} \;\; (y, x) = 0$, но, поскольку $x \in L$, а $y \in L^{\perp}$, то это действительно верно.

2) В силу п. 1) достаточно доказать, что в этом случае $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \subset L$, т.е., что, если $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$, то, тем более, $x \in L$. Т.к. L замкнуто, то $H = L \oplus L^{\perp}$. По теореме об ортогональном дополнении $L^{\perp}$ замкнуто, поэтому $H = L^{\perp} \oplus \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$.

Пусть $x \in H$, тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$. В силу п. 1) $x_1 \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$ тем более. Итак, с одной стороны, $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$, $x_2 \in L^{\perp}$, а с другой стороны, $x = x + 0$, где $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$, $0 \in L^{\perp}$. Элемент x представлен двумя способами, а поскольку сумма прямая, то представление x однозначно. Значит, $x_1 = x$ и $x_2 = 0$, а поскольку $x_1 \in L$, то и $x \in L$.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. В гильбертовом пространстве H введем угол между векторами x и y по формуле $\varphi(x, y) = \arccos \dfrac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Доказать, что если L – подпространство H, $x \in L$ и u – проекция y на L, то $\varphi(x, u) \leq \varphi(x, y)$.

Решение: надо доказать, что $\arccos\frac{|(x,u)|}{\|x\|\cdot\|u\|}\le\arccos\frac{|(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$. Так как $\arccos x$ – убывающая функция, то надо доказать, что $\frac{|(x,u)|}{\|x\|\cdot\|u\|}\ge\frac{|(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$ или, что $\frac{|(x,u)|}{\|u\|}\ge\frac{|(x,y)|}{\|y\|}$. Поскольку L – замкнуто, а u – проекция y на L, то по теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму $y=u+v$, где $v\in L^{\perp}$. При этом, поскольку $u\in L$, а $v\in L^{\perp}$, то $(u,v)=0$, тогда по теореме Пифагора $\|y\|^2=\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$. Поскольку $x\in L$, то $(x,v)=0$.

Итак, осталось доказать, что $\frac{|(x,u)|}{\|u\|}\ge\frac{|(x,u+v)|}{\|y\|}$, т.е. $\frac{|(x,u)|}{\|u\|}\ge\frac{|(x,u)+(x,v)|}{\|y\|}$, т.е., что $\frac{|(x,u)|}{\|u\|}\ge\frac{|(x,u)|}{\|y\|}$, т.е. $\frac{1}{\|u\|}\ge\frac{1}{\|y\|}$, и, наконец, что $\|y\|\ge\|u\|$. Но это уже очевидно следует из равенства $\|y\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

2. а) Описать ортогональное дополнение в пространстве $L_2[0,1]$ к подпространству $L=\left\{x(t)\in L_2[0,1]:\int\limits_0^1 x(t)dt=0\right\}$. Найти расстояние от элемента $x_0(t)=t^2$ до L.

б) Описать ортогональное дополнение в пространстве l_2 к подпространству $L=\{x\in l_2:\xi_1-2\xi_3+3\xi_4=0\}$. Найти ортогональную проекцию на L элемента $x_0=\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, а также расстояние от x_0 до L и $L^{\perp}$.

Решение: а) покажем, что $L^{\perp}$ одномерно, т.е., что, если $e(t)\in L^{\perp}$, $e(t)\ne 0$, то любой элемент $y(t)\in L^{\perp}$ можно представить в виде $y(t)=\lambda e(t)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, т.е. покажем, что $\forall y(t)\in L^{\perp}$ $\exists\lambda\in\mathbb{C}$: $y(t)-\lambda e(t)=0$. Поскольку $L^{\perp}$ – подпространство, то ясно, что $y(t)-\lambda e(t)\in L^{\perp}$. Поскольку L – подпространство, то по теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму, если $y(t)-\lambda e(t)\in L$, то $y(t)-\lambda e(t)=0$. Из условия $y(t)-\lambda e(t)\in L$ следует, что $\int\limits_0^1(y(t)-\lambda e(t))dt=0$, откуда получаем, что $\lambda=\frac{\int\limits_0^1 y(t)dt}{\int\limits_0^1 e(t)dt}$. При этом $\int\limits_0^1 e(t)dt\ne 0$, иначе имели бы $e(t)\in L$, а, поскольку $e(t)\in L^{\perp}$, то $e(t)=0$ – противоречие. Итак, одномерность $L^{\perp}$ доказана, поэтому достаточно найти какой-то один элемент $e(t)\in L^{\perp}$, т.е. такой, что $\forall x(t)\in L\ \ (x,e)=0$, т.е. $\int\limits_0^1 x(t)\overline{e(t)}dt=0$. Очевидно, что этому условию удовлетворяет элемент $e(t)\overset{п.в}{=}1$, поэтому $L^{\perp}=\left\{y(t)\in L_2[0,1]: y(t)=\lambda e(t), \lambda\in\mathbb{C}, e(t)\overset{п.в}{=}1\right\}$.

Рассмотрим разложение $x_0(t)=x(t)+y(t)$, $x\in L$, $y\in L^{\perp}$. Поскольку $y(t)=\lambda e(t)$, то, в силу единственности такого разложения, получаем, что $x(t)=x_0(t)-\lambda e(t)=t^2-\lambda e(t)$, т.е. $\int\limits_0^1 (t^2-\lambda e(t))dt=0$, откуда $\lambda=\dfrac{1}{3}$. Наконец, $\rho(x_0,L)=\|y\|=\sqrt{\int\limits_0^1 \dfrac{1}{9}e^2(t)dt}=\dfrac{1}{3}$.

б) Аналогично п. а) покажем, что $L^{\perp}$ одномерно, т.е., что $\forall y\in L^{\perp}\ \ \exists\lambda\in\mathbb{C}$: $y-\lambda e=0$ при фиксированном $e\in L^{\perp}$, $e\neq 0$. Если найдем λ из условия $y-\lambda e\in L$, то получим, что $y-\lambda e=0$.

Имеем: $\eta_1-\lambda e_1-2(\eta_3-\lambda e_3)+3(\eta_4-\lambda e_4)=0$, откуда $\lambda=\dfrac{\eta_1-2\eta_3+3\eta_4}{e_1-2e_3+3e_4}$, причем аналогично п. а) показывается, что знаменатель не обращается в 0. Далее, $\forall x\in L\ \ (x,e)=0$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{e}_k=0$, поэтому достаточно взять $e=(1,0,-2,3,0,0,0,...)$. Итак, $L^{\perp}=\{y\in l_2 : y=\lambda e, \lambda\in\mathbb{C}, e=(1,0,-2,3,0,0,0,...)\}$. Пусть теперь $x_0=x+y$, $x\in L$, $y\in L^{\perp}$, тогда

$$x=x_0-\lambda e=\left(-\frac{1}{3}-\lambda,\left(-\frac{1}{3}\right)^2,\left(-\frac{1}{3}\right)^3+2\lambda,\left(-\frac{1}{3}\right)^4-3\lambda,\left(-\frac{1}{3}\right)^5,\left(-\frac{1}{3}\right)^6,...\right).$$

Таким образом, $-\dfrac{1}{3}-\lambda-2\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3+2\lambda\right)+3\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4-3\lambda\right)=0$, откуда $\lambda=-\dfrac{1}{63}$.

Тогда проекция x_0 на L – есть $x=x_0+\dfrac{1}{63}e$, расстояние от x_0 до L – есть $\rho(x_0,L)=\|y\|=\|\lambda e\|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{63}\right)^2+\left(\dfrac{2}{63}\right)^2+\left(\dfrac{3}{63}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{63}$, расстояние от x_0 до $L^{\perp}$ – есть $\rho(x_0,L^{\perp})=\|x\|=\sqrt{\|x_0\|^2-\|y\|^2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}-\dfrac{14}{3969}}=\dfrac{1}{18}\sqrt{\dfrac{551}{14}}$. Здесь использовали теорему Пифагора $\|x_0\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ и то, что $\|x_0\|=\sqrt{\dfrac{1}{8}}$.

3. В пространстве $L_2[0,1]$ найти ортогональное дополнение к множеству $P[0,1]$ всех многочленов, рассматриваемых на отрезке $[0,1]$.

Решение: очевидно, что множество $P[0,1]$ образует линейное многообразие в $L_2[0,1]$ (т.к. линейная комбинация многочленов – снова многочлен). При этом, по теореме о плотности непрерывных функций в L_p, множество непрерывных функций всюду плотно в $L_2[0,1]$. В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, множество многочленов всюду плотно в множестве непрерывных функций, значит всюду плотно и в $L_2[0,1]$. По теореме о всюду плотности линейного многообразия $P[0,1]^{\perp}=\{0\}$.

4. Пусть L – $n-$мерное подпространство гильбертова пространства H с базисом $h_1,h_2,...,h_n$, $x\in H$ – произвольный элемент. Доказать, что

$$\rho^2(x,L)=\frac{\Gamma(x,h_1,h_2,...,h_n)}{\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)}.$$

Решение: поскольку L – замкнуто, то, по теореме о существовании проекции, у элемента $x\in H$ существует проекция $y\in L$. Поскольку $h_1,h_2,...,h_n$ – базис в L, то $y=\lambda_1h_1+\lambda_2h_2+...+\lambda_nh_n$, где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – некоторые числа. Кроме того, поскольку $h_1,h_2,...,h_n$ – линейно независимы, то $\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)\neq 0$.

В силу свойств ортогональной проекции, если $x-y=z$, то $z\perp L$, в частности, $z\perp h_k$, $k=1,2,...,n$. Следовательно, для всех $k=1,2,...,n$ получаем систему уравнений: $0=(z,h_k)=(x-y,h_k)=(x,h_k)-\lambda_1(h_1,h_k)-\lambda_2(h_2,h_k)-...-\lambda_n(h_n,h_k)$, откуда $\lambda_1(h_1,h_k)+\lambda_2(h_2,h_k)+...+\lambda_n(h_n,h_k)=(x,h_k)$, $k=1,2,...,n$.

Считая неизвестными $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, находим, что определитель матрицы этой системы равен:

$$\begin{vmatrix} (h_1,h_1) & (h_2,h_1) & ... & (h_n,h_1) \\ (h_1,h_2) & (h_2,h_2) & ... & (h_n,h_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (h_1,h_n) & (h_2,h_n) & ... & (h_n,h_n) \end{vmatrix}=\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)\neq 0.$$

Пользуясь правилом Крамера, получаем:

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix} (x,h_1) & (h_2,h_1) & ... & (h_n,h_1) \\ (x,h_2) & (h_2,h_2) & ... & (h_n,h_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (x,h_n) & (h_2,h_n) & ... & (h_n,h_n) \end{vmatrix}}{\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)},\ \lambda_2=\frac{\begin{vmatrix} (h_1,h_1) & (x,h_1) & ... & (h_n,h_1) \\ (h_1,h_2) & (x,h_2) & ... & (h_n,h_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (h_1,h_n) & (x,h_n) & ... & (h_n,h_n) \end{vmatrix}}{\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)},...$$

Далее, $\rho^2(x,L)=\|z\|^2=(z,z)=(z,x-y)=(z,x)-\underset{0}{\underset{\parallel}{(z,y)}}=(z,x)=(x-y,x)$, тогда $\rho^2(x,L)=(x,x)-\lambda_1(h_1,x)-\lambda_2(h_2,x)-...-\lambda_n(h_n,x)$.

Подставим в это равенство найденные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$$\rho^2(x,L) = (x,x) - \frac{(h_1,x)\cdot\begin{vmatrix} (x,h_1) & (h_2,h_1) & ... & (h_n,h_1) \\ (x,h_2) & (h_2,h_2) & ... & (h_n,h_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (x,h_n) & (h_2,h_n) & ... & (h_n,h_n) \end{vmatrix}}{\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)} - ... - \frac{(h_n,x)\cdot\begin{vmatrix} (h_1,h_1) & (h_2,h_1) & ... & (x,h_1) \\ (h_1,h_2) & (h_2,h_2) & ... & (x,h_2) \\ .... & .... & ... & .... \\ (h_1,h_n) & (h_2,h_n) & ... & (x,h_n) \end{vmatrix}}{\Gamma(h_1,h_2,...,h_n)}$$

.

Приводя к общему знаменателю правую часть полученного равенства, видим, что в числителе будет стоять определитель Грама $\Gamma(x,h_1,h_2,...,h_n)$, разложенный по первому столбцу.

5. Пусть L – одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, $a \in L$, $a \neq 0$. Доказать, что $\forall x \in H \;\; \rho(x,L^{\perp}) = \dfrac{|(x,a)|}{\|a\|}$.

Решение: по определению расстояния $\rho(x,L^{\perp}) = \inf\limits_{y\in L^{\perp}}\|x-y\|$. В силу неравенства Коши-Буняковского $|(a,x-y)| \le \|a\|\cdot\|x-y\|$. С другой стороны, поскольку $a \in L$, $y \in L^{\perp}$ то $|(a,x-y)| = |(a,x)-(a,y)| = |(a,x)|$, откуда $|(a,x)| \le \|a\|\cdot\|x-y\|$ и $\forall y \in L^{\perp} \;\; \|x-y\| \ge \dfrac{|(a,x)|}{\|a\|}$. Следовательно, $\inf\limits_{y\in L^{\perp}}\|x-y\| \ge \dfrac{|(a,x)|}{\|a\|}$. Если покажем, что существует элемент $y^* \in L^{\perp}$ такой, что $\|x-y^*\| = \dfrac{|(a,x)|}{\|a\|}$, то это и будет означать, что $\inf\limits_{y\in L^{\perp}}\|x-y\| = \dfrac{|(a,x)|}{\|a\|}$, т.е., что $\rho(x,L^{\perp}) = \dfrac{|(x,a)|}{\|a\|}$. Возьмем $x^* = \dfrac{a}{\|a\|}$, тогда $\|x^*\| = 1$. Пусть $y^* = x - \dfrac{(x,a)}{\left(x^*,a\right)}x^*$, тогда $\|x-y^*\| = \left\|\dfrac{(x,a)}{\left(x^*,a\right)}x^*\right\| = \dfrac{|(x,a)|}{\left|\left(x^*,a\right)\right|}\|x^*\| = \dfrac{|(x,a)|}{\left|\left(\dfrac{a}{\|a\|},a\right)\right|} = \dfrac{|(x,a)|}{\|a\|}$. Осталось убедиться, что $y^* \in L^{\perp}$, т.е. для точки $a \in L$ (в силу одномерности L) $\left(y^*,a\right) = 0$.

Действительно, $\left(y^*,a\right) = \left(x - \dfrac{(x,a)}{\left(x^*,a\right)}x^*, a\right) = \left(x,a\right) - \dfrac{(x,a)}{\left(x^*,a\right)}\left(x^*,a\right) = 0$.

6. Пусть K – замкнутое выпуклое ограниченное множество в гильбертовом пространстве H. Доказать, что в K существует единственный элемент с наименьшей нормой.

Решение: пусть $\delta = \inf\limits_{x\in K}\|x\|$, т.е. $\delta \le \|x\|$. Покажем, что $\exists x^* \in K : \|x^*\| = \delta$. По свойству точной нижней грани $\exists\{x_n\}\in K$: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\delta$. Поскольку K – выпуклое, множество, то $\forall x_n,x_m\in K$ отрезок $\dfrac{x_n+x_m}{2}\in K$, т.е. $\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|\geq\delta$. С другой стороны $\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|\leq\dfrac{\|x_n\|}{2}+\dfrac{\|x_m\|}{2}$, т.е. имеем $\delta\leq\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|\leq\dfrac{\|x_n\|}{2}+\dfrac{\|x_m\|}{2}$. Переходя к пределу при $n,m\to\infty$, по теореме о двух милиционерах, находим, что $\lim\limits_{n,m\to\infty}\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|=\delta$. Далее, для $x_n,x_m\in K$ запишем равенство параллелограмма:

$$\|x_n+x_m\|^2+\|x_n-x_m\|^2=2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2,$$

откуда $\|x_n-x_m\|^2=2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-4\left\|\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|^2$. Переходя к пределу при $n,m\to\infty$, получаем, что $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|^2=0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна. Поскольку H – гильбертово, значит, оно полно, значит $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$, причем $x^*\in K$, т.к. K – замкнуто. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x^*\|$, откуда $\|x^*\|=\delta$.

Осталось проверить единственность такого элемента. Допустим, что $\exists x^*,x^{**}\in K$: $\|x^*\|=\|x^{**}\|=\delta$. Тогда, т.к. $\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\in K$, то $\left\|\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\right\|\geq\delta$. С другой стороны, $\left\|\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\right\|\leq\dfrac{\|x^*\|}{2}+\dfrac{\|x^{**}\|}{2}=\delta$, значит $\left\|\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\right\|=\delta$, поэтому $\left\|\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\right\|=\dfrac{\|x^*\|}{2}+\dfrac{\|x^{**}\|}{2}$. Это означает (см. задачу 14 к п. 3.1), что или $x^*=0$, или $x^{**}=\lambda x^*$ при $\lambda\geq 0$.

Если $x^*=0$, то $x^{**}=0$.

Если $x^{**}=\lambda x^*$, то $\delta=\left\|\dfrac{x^*+x^{**}}{2}\right\|=\left\|\dfrac{x^*+\lambda x^*}{2}\right\|=\dfrac{1+\lambda}{2}\|x^*\|=\dfrac{1+\lambda}{2}\cdot\delta$, откуда $\lambda=1$, т.е. $x^{**}=x^*$ или $\delta=0$, т.е. $x^{**}=x^*=0$.

7. Доказать, что в гильбертовом пространстве H любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

Решение: пусть $M_1\supset M_2\supset M_3\supset\ldots$ – указанная последовательность множеств. В силу предыдущего примера, в каждом множестве M_n существует единственный элемент a_n с наименьшей нормой, т.е. $\inf\limits_{x\in M_n}\|x\|=\|a_n\|$. Поскольку каждое следующее множество вложено в предыдущее, то, в силу свойств точных нижних граней, $\|a_n\|\leq\|a_{n+1}\|$, т.е. последовательность $\{\|a_n\|\}$ монотонно возрастает. При этом, последовательность $\{\|a_n\|\}$ ограничена сверху, поскольку все $a_n\in M_1$, а M_1 – ограничено. В силу критерия Вейерштрасса, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n\|=\delta$.

Далее, при $n<m$ $M_n \supset M_m$, значит, $a_m \in M_n$ и, кроме этого, $a_n \in M_n$. Поскольку M_n – выпукло, то $\frac{a_n + a_m}{2} \in M_n$, т.е. $\left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\| \geq \|a_n\|$. С другой стороны, поскольку $\|a_n\| \leq \|a_m\|$, то $\left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\| \leq \frac{\|a_n\|}{2} + \frac{\|a_m\|}{2} \leq \|a_m\|$. Итак, $\|a_n\| \leq \left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\| \leq \|a_m\|$, поэтому, переходя к пределу при $n,m \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\| = \delta$. Используя равенство параллелограмма, получаем $\|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n\|^2 + 2\|a_m\|^2 - 4\left\|\frac{a_n + a_m}{2}\right\|^2$. Переходя к пределу при $n,m \to \infty$, находим, что $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|a_n - a_m\|^2 = 0$, т.е. последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальна, и значит, в силу полноты H, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Далее, возьмем произвольное множество M_k. Поскольку все множества вложены, то, начиная с некоторого номера, все $a_n \in M_k$. Поскольку предел $\{a_n\}$ равен a, то a – предельная точка множества M_k. Поскольку M_k – замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки, т.е. $a \in M_k$. Поскольку M_k – произвольно, то a принадлежит всем нашим множествам, т.е. $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, значит $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n \neq \varnothing$.

8. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \ldots\right) \in l_2$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в l_2.

Решение: пусть L – линейная оболочка данной последовательности. По теореме о всюду плотности линейного многообразия надо доказать, что $L^{\perp} = \{0\}$. Пусть $x = (\xi_0, \xi_1, \ldots) \in l_2$, $x \perp L$, т.е. $0 = (x, x_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k z_n^k$, где $z_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в круге $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцию $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$. Этот ряд сходится равномерно на произвольном компакте, лежащем в K (т.е. при $|z| \leq q < 1$, т.е. равномерно строго внутри K), в силу неравенства $\left|\xi_k z^k\right| \leq \frac{1}{2}\left(|\xi_k|^2 + |z|^{2k}\right)$, следовательно, по теореме Вейерштрасса (из курса ТФКП) его сумма регулярна в K. При этом $f(z_n) = 0$, $z_n \to 0 \in K$. По теореме единственности (из курса ТФКП) $f(z) \equiv 0$ в K, откуда следует, что $x = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пространстве l_2 описать ортогональное дополнение к подпространству $L=\left\{x\in l_2, x=\left(\xi_1,\xi_2,...\right): \sum_{k=1}^{n}\xi_k=0\right\}$. Найти расстояние $\rho_n\left(x_0,L\right)$ от элемента $x_0=(1,0,0,...)$ до L. Чему равен предел $\lim_{n\to\infty}\rho_n\left(x_0,L\right)$?

2. Доказать, что, если H – гильбертово пространство, L – его подпространство, то $L^{\perp}=L^{\perp\perp\perp}$.

Указание: воспользоваться теоремами об ортогональном дополнении и втором ортогональном дополнении.

3. В пространстве $L_2\left[0,1\right]$ найти ортогональное дополнение к множеству $\left\{x(t)\in P\left[0,1\right]: x(0)=0\right\}$, где $P\left[0,1\right]$ определено в примере 3.

Указание: $x(t)=tP(t)$, *где* $P(t)$ *– произвольный многочлен. Показать, что условие* $(f(t),x(t))=0$ *влечет* $f(t)\overset{п.в.}{=}0.$

4. В пространстве $L_2\left[0,1\right]$ найти ортогональное дополнение к множеству $\left\{x(t)=y(t^2),\ t\in\left[0,1\right]: y\in P\left[0,1\right]\right\}$, где $P\left[0,1\right]$ определено в примере 3.

Указание: выполнить замену переменной в интеграле.

5. В пространстве $L_2\left[0,1\right]$ найти ортогональное дополнение к множеству $\left\{x(t)\in P\left[0,1\right]\right\}$ многочленов с нулевой суммой коэффициентов, где $P\left[0,1\right]$ определено в примере 3.

Указание: $x(t)=(t-1)P(t)$, *где* $P(t)$ *– произвольный многочлен.*

6. Пусть $L\subset H$ – линейное многообразие. Доказать, что $L^{\perp}=\bar{L}^{\perp}$.

Указание: показать, что $L^{\perp}\subset\bar{L}^{\perp}$ *(используя непрерывность скалярного произведения) и* $L^{\perp}\supset\bar{L}^{\perp}$.

7. Пусть M и N – некоторые множества в гильбертовом пространстве H, причем $M\subset N$. Доказать, что $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

8. В пространстве l_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.

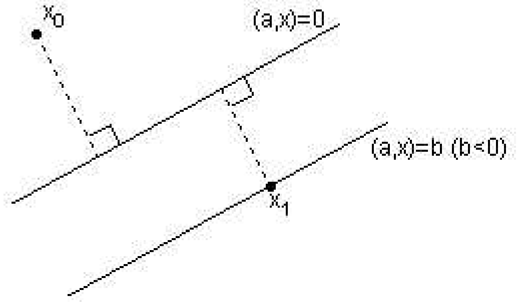
Указание: рассмотреть $x_n=\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1},1+\frac{1}{n},0,0,...\right)\in l_2.$

9. Пусть M – замкнутое выпуклое множество в действительном гильбертовом пространстве H, $x\in H$. Доказать, что элемент $y\in M$ удовлетворяет условию $\rho(x,M)=\|x-y\|$ тогда и только тогда, когда $\forall z\in M$ справедливо неравенство $(x-y,y-z)\geq 0$.

Указание: при доказательстве необходимости воспользоваться выпуклостью и тем, что $y,z\in M$*. При доказательстве достаточности доказать, что* $\forall z\in M\ \|x-z\|^2\geq\|x-y\|^2$.

10. В гильбертовом пространстве H найти расстояние от точки $x_0 \in H$ до гиперплоскости $L = \{x \in H : (a, x) = b, b \in \mathbb{R}\}$, где $a \in H$ – фиксированный элемент.

Указание:



Вначале найти расстояние от точки x_0 *до гиперплоскости* $(a, x) = 0$ *(для этого установить, что ортогональный элемент может быть получен в виде* $y = \lambda a$ *и найти число* λ*). Затем воспользоваться иллюстрацией.*

11. В пространстве $L_2[0,1]$ найти ортогональное дополнение к множеству функций, равных нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

12. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение к множеству $L = \left\{x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0\right\}$.

13. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение к множеству $L = \{x \in l_2 : \xi_2 - \xi_3 - \xi_5 = 0, \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 0\}$.

14. Найти ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ на подпространство $L = \{x \in l_2 : \xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0\}$, а также расстояния $\rho(x_0, L)$ и $\rho(x_0, L^{\perp})$.

15. В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональную проекцию элемента $x \in L_2[-1,1]$ на подпространства четных и нечетных функций.

16. Найти в пространстве l_2 ортогональное дополнение к множеству $L = \{x \in l_2 : \xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \xi_7 = ... = 0, \xi_1 + \xi_4 - \xi_5 = 0\}$ и расстояние до L от точки $x = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 0, 0, ...)$.

3.4. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

Определение: пусть H – гильбертово пространство, $e_1, e_2, e_3, \dots$ – система векторов из этого пространства. Эта система называется ортонормированной, если:

1. $\forall i \neq j \quad (e_i, e_j) = 0$;
2. $\forall i \quad \|e_i\| = 1$.

Замечание: в случае, если выполняется только условие 1, такая система называется ортогональной.

Замечание: всякая ортонормированная система является линейно независимой. Действительно, если $\alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \dots + \alpha_n e_{i_n} = 0$, то, умножая это равенство скалярно на e_{i_k}, $k = \overline{1,n}$, получим $\alpha_k \left(e_{i_k}, e_{i_k} \right) = 0$, откуда $\alpha_k = 0$.

Определение: пусть H – гильбертово пространство, $e_1, e_2, e_3, \dots$ – ортонормированная система векторов из H, элемент $x \in H$. Числа $c_k = (x, e_k)$ называются коэффициентами Фурье вектора x по данной ортонормированной системе, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ называется рядом Фурье вектора x по данной системе.

Теорема (неравенство Бесселя): пусть H – гильбертово пространство, $e_1, e_2, e_3, \dots$ – ортонормированная система векторов, $x \in H$ – вектор, c_k – его коэффициенты Фурье, тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$.

Доказательство: рассмотрим вектор $a = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ и вектор $h_n = x - a$. Пусть $i = \overline{1,n}$, тогда $(h_n, e_i) = (x - a, e_i) = (x, e_i) - (a, e_i) = (x, e_i) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k, e_i \right) = c_i - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \left(e_k, e_i \right)$.

При $i \neq k$ $\left(e_k, e_i \right) = 0$, т.е. из суммы останется только одно слагаемое с номером i, т.е. $(h_n, e_i) = c_i - c_i \left(e_i, e_i \right) = c_i - c_i \|e_i\|^2 = 0$. Таким образом, вектор h_n ортогонален всем векторам e_i. Поскольку a является линейной комбинацией e_i, то h_n также ортогонален и вектору a. Итак, $x = a + h_n$, $a \perp h_n$, поэтому по теореме Пифагора $\|x\|^2 = \|a\|^2 + \|h_n\|^2$, откуда $\|a\|^2 \le \|x\|^2$. Поскольку система $e_1, e_2, e_3, \dots$ – ортонормированная, то, в силу обобщенной теоремы Пифагора (см. задачу 6, п. 3.1) $\|a\|^2 = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|c_k e_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ ограничены сверху. Поскольку этот ряд является рядом с неотрицательными слагаемыми, то, в силу критерия

Вейерштрасса, он сходится. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$.

Теорема доказана.

Теорема (о сходимости ряда Фурье): в гильбертовом пространстве ряд Фурье вектора x всегда сходится.

Доказательство: пусть $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – ряд Фурье вектора $x \in H$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ – его частичная сумма. По определению сходимости ряда надо доказать, что $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$. По условию пространство гильбертово, и, значит, полное, т.е. в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Поэтому достаточно доказать, что $\{S_n\}$ фундаментальна, т.е., что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n > m > N$ $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$.

Имеем: $\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k - \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2$. Поскольку, в силу неравенства Бесселя, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, то, в силу критерия Коши сходимости числовых рядов, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \;\; \forall n > m > N \;\; \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 < \varepsilon^2$, тогда $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема (о сумме ряда Фурье): пусть H – гильбертово пространство, $e_1, e_2, e_3, \ldots$ – ортонормированная система векторов, L – подпространство, являющееся замыканием линейной оболочки данных векторов. Пусть $x \in H$ – вектор, тогда сумма его ряда Фурье по системе $e_1, e_2, e_3, \ldots$ равна проекции этого вектора на подпространство L.

Доказательство: обозначим $S = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ – сумму ряда Фурье вектора $x \in H$. Поскольку S является пределом линейных комбинаций элементов $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, то это предельная точка для множества таких линейных комбинаций и, значит, она принадлежит замыканию множества линейных комбинаций, т.е. $S \in L$. Тогда по определению проекции осталось проверить, что $(x - S) \perp L$, а для этого достаточно проверить, что $\forall i \;\; (x - S) \perp e_i$, т.е., что $(x - S, e_i) = 0$ (см. задачу 6 п. 3.3). Действительно,

$$(x - S, e_i) = \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_i \right) = (x, e_i) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_i) = c_i - c_i (e_i, e_i) = c_i - c_i = 0.$$

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Проверить ортогональность в действительном пространстве $L_2[a,b]$ системы функций $x_n(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n$, $n=0,1,2,\ldots$.

Решение: возьмем $m>n$ и посчитаем скалярное произведение $\left(x_n(t),x_m(t)\right)$:

$$\left(x_n(t),x_m(t)\right)=\int_a^b\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\frac{d^m}{dt^m}\left((t-a)(t-b)\right)^m dt=$$

$$=\int_a^b\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n d\left(\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left((t-a)(t-b)\right)^m\right)=$$

$$=\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left((t-a)(t-b)\right)^m\Bigg|_a^b-$$

$$-\int_a^b\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left((t-a)(t-b)\right)^m d\left(\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\right).$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}\left((t-a)(t-b)\right)^m=m\left((t-a)(t-b)\right)^{m-1}(2t-(a+b))$,

$\frac{d^2}{dt^2}\left((t-a)(t-b)\right)^m=m(m-1)\left((t-a)(t-b)\right)^{m-2}(2t-(a+b))^2+2m\left((t-a)(t-b)\right)^{m-1},\ldots$

Видим, что после дифференцирования во всех слагаемых присутствует множитель $(t-a)(t-b)$, причем производная $m-1$ порядка также содержит этот множитель во всех слагаемых, наименьшая степень этого множителя – первая. Итак, $\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left((t-a)(t-b)\right)^m\Bigg|_a^b=0$. Во втором интеграле получаем, $d\left(\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\right)=\frac{d\left(\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)(t-b)\right)^n\right)}{dt}\cdot dt=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left((t-a)(t-b)\right)^n dt$.

К полученному интегралу снова применим аналогичное интегрирование по частям, что приведет к интегралу $\int_a^b\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}}\left((t-a)(t-b)\right)^n\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}\left((t-a)(t-b)\right)^m dt$ и т.д. Через m шагов получим интеграл $\int_a^b\left((t-a)(t-b)\right)^m\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\left((t-a)(t-b)\right)^n dt$.

Поскольку $m>n$, то $n+m>n+n=2n$, поэтому $\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\left((t-a)(t-b)\right)^n=0$, т.к. степень многочлена под знаком производной равна $2n$, а порядок производной больше, чем $2n$. Таким образом, $\left(x_n(t),x_m(t)\right)=0$.

2. Пусть H – гильбертово пространство, элемент $x \in H$. Построить его проекцию на $n-$мерное подпространство $L \subset H$.

Решение: поскольку $L \subset H$ – конечномерно, то в нем существует ортонормированный базис $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$, причем $\forall y \in L$ выражается линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$, значит, L является линейной оболочкой элементов $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$. Поскольку всякое конечномерное пространство – банахово (см. задачу 23 п. 2.2), то, в частности, L замкнуто. По теореме о сумме ряда Фурье, проекция элемента x на L равна сумме его ряда Фурье по данной ортонормированной системе. Поскольку в данном случае система конечна, то ряд Фурье становится конечной суммой $\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$.

3. Доказать, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве H единичный шар содержит бесконечно много непересекающихся шаров радиуса $\frac{1}{4}$.

Решение: пусть $B = \{x \in H : \|x\| \le 1\}$ – единичный шар, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в H, $B_k = \left\{x \in H : \left\|x - \frac{1}{2}e_k\right\| \le \frac{1}{4}\right\}$ – шары с центрами в точках $\frac{1}{2}e_k$ и радиусами $\frac{1}{4}$. Покажем, что $B_k \subset B$. Если $x \in B_k$, то

$$\|x\| = \left\|x - \frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}e_k\right\| \le \left\|x - \frac{1}{2}e_k\right\| + \left\|\frac{1}{2}e_k\right\| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\|e_k\| = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1,$$

откуда следует, что $\forall x \in B_k$ тем более $x \in B$, значит $\forall k \;\; B_k \subset B$. Далее, заметим, что, при $k \ne m$ $\|e_k - e_m\| = \sqrt{(e_k - e_m, e_k - e_m)} = \sqrt{\|e_k\|^2 - (e_k, e_m) - \overline{(e_k, e_m)} + \|e_m\|^2} = \sqrt{2}$ и покажем, что $B_k \cap B_m = \varnothing$. Пусть $x \in B_k$, $y \in B_m$, тогда

$$\left\|\frac{e_k}{2} - \frac{e_m}{2}\right\| = \left\|\frac{e_k}{2} - x + x - y + y - \frac{e_m}{2}\right\| \le \left\|\frac{e_k}{2} - x\right\| + \|x - y\| + \left\|y - \frac{e_m}{2}\right\| \le \frac{1}{4} + \|x - y\| + \frac{1}{4}.$$

Отсюда $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{1}{2} + \|x - y\|$, т.е. $\|x - y\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$. Поскольку точки x и y выбирались произвольно, то шары общих точек не имеют, т.е. не пересекаются.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$. Доказать, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$ сходятся или расходятся в H одновременно.

2. Проверить ортогональность в гильбертовом пространстве l_2 системы векторов $x_n = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, 1, 0, ...)$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Пусть в гильбертовом пространстве H введено скалярное произведение $(x,y)=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}x(t)\overline{y(t)}dt$, где $x,y\in H$. Доказать, что $\left(e^{i\lambda t},e^{i\mu t}\right)=\begin{cases}1, & \text{при } \lambda=\mu,\\ 0, & \text{при } \lambda\neq\mu.\end{cases}$

4. Проверить ортогональность в действительном пространстве $L_2[0,2\pi]$ системы векторов $\{1,\cos nt,\sin nt\}$, $n\in\mathbb{N}$.

5. Проверить ортогональность в действительном пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ системы векторов $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt\right\}$, $n\in\mathbb{N}$.

6. Проверить ортогональность в действительном пространстве $L_2[0,\pi]$ системы векторов $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Проверить, что, кроме того, система является ортонормированной.

7. Проверить, что система функций $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна в действительном пространстве $L_2[0,\pi]$,

8. Проверить ортогональность в $L_2[a,b]$ системы $x_n(t)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{2\pi in\frac{t-a}{b-a}}$, $n\in\mathbb{Z}$.

9. Проверить ортогональность в $L_2[0,1]$ системы $x_n(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sin\mu_n}\sin\mu_n t$, где (μ_n) – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu=\mu$. Пространство действительное.

10. Проверить ортогональность в $L_2[0,+\infty)$ системы $x_n(t)=e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^ne^{-t}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$.

11. Проверить, что система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}, n\in\mathbb{N}$ является ортонормированной в действительном пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

12. Пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e_k$ сходится в H тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|e_k\|^2$.

13. Проверить, что система функций Радемахера $x_n(t)=\begin{cases}(-1)^k, t\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right),\\ 0, \quad t=\frac{k}{2^n}\end{cases}$,

где $n=0,1,2,\ldots$, $k=0,1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$.

14. Найти коэффициенты Фурье разложения элемента $x(t) = \operatorname{sgn}(2t-1)$ по системе векторов $e_k(t) = e^{2\pi ikt}$ в пространстве $L_2\left[0,1\right]$.

15. Найти коэффициенты Фурье разложения элемента $x(t) = e^{\lambda t}$ по системе векторов $e_k(t) = e^{2\pi ikt}$ в пространстве $L_2\left[0,1\right]$.

16. Разложить функцию $f(x) = 5x^2$ в ряд Фурье в пространстве $L_2\left[0,\pi\right]$ по системе функций $\left\{\sin kx : k \in \mathbb{N}\right\}$.

17. Разложить функцию $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Фурье в пространстве $L_2\left[0,\pi\right]$ по системе функций $\left\{\cos kx : k \in \mathbb{N}\right\}$.

3.5. Базисы в гильбертовых пространствах

Определение: пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Эта система называется полной, если любой вектор $x \in H$ можно с любой точностью приблизить конечной линейной комбинацией векторов этой системы, т.е. $\forall x \in H \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n : \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon$.

Определение: ортонормированная система в гильбертовом пространстве H называется замкнутой, если $\forall x \in H \ \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, где c_k – коэффициенты Фурье вектора x. Данное равенство называется равенством Парсеваля.

Определение: пусть H – гильбертово пространство, $e_1, e_2, e_3, ...$ – ортонормированная система векторов из этого пространства. Эта система называется базисом (Гильберта), если $\forall x \in H \ \ x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, c_k – коэффициенты Фурье вектора x.

Теорема (критерий базиса): пусть H – гильбертово пространство, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в нем. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ является базисом;
2. система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ замкнута;
3. система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ полна.

Доказательство: $1 \Rightarrow 2$: дано, что $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – базис, а надо доказать, что $\forall x \in H \ \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$. По определению базиса $\forall x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, тогда (см. доказательство неравенства Бесселя) $\|x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + h_n \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 + \|h_n\|^2$, где $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e_k$ – остаток ряда Фурье вектора x, причем $\|h_n\| \to 0$ в силу сходимости ряда. По теореме Пифагора $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$.

Переходя к пределу в равенстве $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|h_n\|^2$, получаем, что и требовалось.

$2 \Rightarrow 3$: дано, что $\forall x \in H \ \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$. Надо доказать, что система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ –

полна. Покажем, что $\forall\varepsilon>0\ \left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|<\varepsilon$, это и будет означать, что элемент x с любой точностью можно приблизить конечной линейной комбинацией элементов $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$, значит, будет выполнено определение полноты. Для $c_k\in\mathbb{C}$ имеем: $\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|^2=\left(x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k, x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)=(x,x)-\left(x,\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k, x\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k,\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)=$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{c}_k\left(x,e_k\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k\left(e_k,x\right)+\left\|\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{c}_k c_k-\sum_{k=1}^{n}c_k\overline{\left(x,e_k\right)}+\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2=$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k\overline{c}_k+\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

По определению предела $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n>N\ \left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|<\varepsilon$.

$3\Rightarrow1$: дано, что система $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$ полна. Надо доказать, что она является базисом. Возьмем $\forall x\in H$. По теореме о сумме ряда Фурье, сумма ряда Фурье вектора x равна проекции x на замыкание линейной оболочки векторов $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$. Если покажем, что это замыкание совпадает со всем пространством H, то, поскольку x уже в нем лежит, то проекция x ему и будет равна ($x-x=0\perp H$). Достаточно доказать, что любая точка пространства H является предельной для линейных комбинаций элементов $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$, т.е., что в любой ε-окрестности любой точки x найдется такая линейная комбинация, т.е., что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n:\ \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|<\varepsilon$. Это верно в силу полноты системы $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$.

Теорема доказана.

Замечание: $\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k-\alpha_k\right)e_k\right\|^2=\left\|h_n+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k-\alpha_k\right)e_k\right\|^2=\left\|h_n\right\|^2+$ $+\sum_{k=1}^{n}\left|c_k-\alpha_k\right|^2\geq\left\|h_n\right\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|^2$. Таким образом, многочлен Фурье $\sum_{k=1}^{n}c_k e_k$ приближает элемент $x\in H$ в пространстве H наилучшим образом среди всевозможных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$.

Теорема (о существовании базиса в гильбертовом пространстве): в сепарабельном гильбертовом пространстве H всегда существует ортонормированный базис.

Доказательство: напомним, что пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Счетность означает, что его элементы можно занумеровать. Обозначим это множество $E=\left\{x_1,x_2,x_3,...\right\}$. Всюду плотность означает, что любой элемент из H можно с любой точностью приблизить элементом из E, а значит и линейной комбинацией таких элементов.

1. Не изменяя линейной оболочки этого множества, превратим его в систему линейно независимых векторов.

Рассмотрим первый вектор x_1. Если $x_1 \neq 0$, то оставим его в множестве, а если $x_1 = 0$, то удалим. Ясно, что при этом линейная оболочка множества E не меняется. Возьмем вектор x_2. Если он через x_1 не выражается, то его оставим в множестве, а если выражается, то удалим. Снова линейная оболочка E не изменилась, но теперь x_1 и x_2 – линейно независимы. Аналогично, возьмем x_3. Если он через два предыдущих выражается, то удалим его, а если не выражается, то оставим. Линейная оболочка E не изменилась, но теперь x_1, x_2 и x_3 – линейно независимы. И т.д. Получили систему линейно независимых векторов. Сама она может уже не быть всюду плотной, но ее линейная оболочка попрежнему всюду плотна, поскольку она не изменилась.

2. Не изменяя линейной оболочки, превратим систему в ортонормированную, с помощью процесса ортогонализации.

Возьмем $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$, тогда $\|e_1\| = 1$. Пусть $h_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1 \neq 0$ (в силу линейной независимости x_1 и x_2), тогда $(h_2, e_1) = (x_2 - (x_2, e_1)e_1, e_1) = (x_2, e_1) - (x_2, e_1)(e_1, e_1) = 0$, т.е. h_2 ортогонален e_1. Если $e_2 = \dfrac{h_2}{\|h_2\|}$, то $\|e_2\| = 1$ и $e_2 \perp e_1$. Линейная оболочка E не изменилась, поскольку e_2 – это линейная комбинация x_2 и e_1. Аналогично, пусть $h_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2 \neq 0$. Проверим, что h_3 ортогонален и e_1, и e_2:

$$(h_3, e_1) = (x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2, e_1) = (x_3, e_1) - (x_3, e_1)(e_1, e_1) - (x_3, e_2)(e_2, e_1) = 0,$$

$$(h_3, e_2) = (x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2, e_2) = (x_3, e_2) - (x_3, e_1)(e_1, e_2) - (x_3, e_2)(e_2, e_2) = 0.$$

Тогда, если $e_3 = \dfrac{h_3}{\|h_3\|}$, то $\|e_3\| = 1$ и $e_3 \perp e_1$, $e_3 \perp e_2$. Линейная оболочка E не изменилась, поскольку e_3 – это линейная комбинация x_3, e_1 и e_2. И т.д.

3. Получили ортонормированную систему $e_1, e_2, e_3, \ldots$, ее линейная оболочка осталась та же самая, что и была, т.е. является всюду плотным в H множеством. Значит, любой вектор из H с любой точностью можно приблизить элементом этой линейной оболочки, т.е. линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, e_3, \ldots$. Тем самым, система полна и поэтому является базисом.

Теорема доказана.

Теорема Рисса-Фишера: пусть H – гильбертово пространство, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в нем и числа $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ таковы, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Тогда существует вектор $x \in H$ такой, что $c_k = (x, e_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$.

Доказательство: пусть $x_n=\sum_{k=1}^{n}c_k e_k$, тогда (при $m>n$) $\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}c_k e_k\right\|^2=$ $=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ сходится, то, в силу критерия Коши для числовых рядов, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в H. В силу полноты H $x_n\to x$. Далее, $(x,e_i)=(x_n,e_i)+(x-x_n,e_i)$ при фиксированном i, а при $n\ge i$ $(x_n,e_i)=\sum_{k=1}^{n}c_k(e_k,e_i)=c_i$, $|(x-x_n,e_i)|\le\|x-x_n\|\|e_i\|=\|x-x_n\|\to 0$. Тогда, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что $(x,e_i)=c_i$. Наконец, поскольку $\|x-x_n\|\to 0$, то $\left(x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k, x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\to 0$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|x\|^2$.

Теорема доказана.

Теорема (критерий замкнутости): для того, чтобы ортонормированная система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы в H не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $(e_k)_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство: пусть система $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – замкнута, тогда, если вектор $x\in H$ ортогонален всем $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, то $c_k=(x,e_k)=0$, откуда $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=0$, т.е. $x=0$.

Обратно: пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – не замкнута, тогда $\exists y\in H$: $\|y\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$, $c_k=(y,e_k)$. По теореме Рисса-Фишера $\exists x\in H$: $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$, $c_k=(x,e_k)$. Тогда $\|x\|^2<\|y\|^2$, откуда $x\ne y$, т.е. $x-y\ne 0$. При этом, поскольку $0=(x,e_k)-(y,e_k)=(x-y,e_k)$, то вектор $x-y$ ортогонален всем векторам e_k.

Теорема доказана.

Теорема (об изоморфизме): всякое сепарабельное гильбертово пространство изометрично и изоморфно пространству l_2.

Доказательство: рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H и пусть $e_1,e_2,e_3,...$ – базис в нем. По определению базиса $\forall x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k$, $c_k=(x,e_k)$. Кроме того, в силу равенства Парсеваля, $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|x\|^2$, поэтому последовательность $(c_1,c_2,...)$ можно рассматривать, как некоторый элемент $\tilde{x}\in l_2$. Обратно: по теореме Рисса-Фишера, любому элементу $\tilde{x}=(c_1,c_2,...)\in l_2$ отвечает некоторый $x \in H$, причем $c_k = (x, e_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$. Таким образом, получили взаимно-однозначное изометричное соответствие между H и l_2. Ясно, что если элементам $x, y \in H$ соответствуют элементы $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_2$, то элементам $x \pm y, \lambda x \in H$ будут соответствовать элементы $\tilde{x} \pm \tilde{y}, \lambda \tilde{x} \in l_2$. Таким образом, соответствие между H и l_2 сохраняет алгебраические операции (значит, является изоморфизмом).

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. В пространстве $l_{2,\alpha}$, определенном в первом примере п. 3.1, построить ортонормированный базис, если $\alpha_n = n$.

Решение: напомним, что $l_{2,\alpha}$ – гильбертово пространство последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\xi_k|^2 < +\infty$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ – фиксированная последовательность положительных чисел. Скалярное произведение в $l_{2,\alpha}$ определяется формулой $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \overline{\eta}_k$. Покажем, что система векторов $e_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0,}_{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ... \right)$ образует ортонормированный базис при $\alpha_n = n$.

Действительно, $\|e_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left| e_k^{(n)} \right|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \left| e_k^{(n)} \right|^2 = n \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 = 1$. Далее, пусть $n \neq m$, тогда $(e_n, e_m) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k^{(n)} e_k^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k e_k^{(n)} e_k^{(m)} = 0$, поскольку ненулевые элементы в e_n и e_m стоят на разных местах. Итак, система (e_n) – ортонормирована. Осталось показать, что система является базисом, т.е. по определению базиса $\forall x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

Возьмем $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_{2,\alpha}$, тогда $c_n = (x, e_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k e_k^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \xi_k e_k^{(n)} = n \xi_n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xi_n$.

Отсюда $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k = \sqrt{1} \xi_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, 0, 0, ... \right) + \sqrt{2} \xi_2 \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ... \right) + ... + \sqrt{n} \xi_n \cdot \left(0, ..., 0, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0 ... \right) =$

$= (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$. Тогда $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|(0, ..., 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...)\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k |\xi_k|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} k |\xi_k|^2 \underset{n \to \infty}{\to} 0$, как остаток сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\xi_k|^2$. Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \right) = 0$ и $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

2. Для функции e^t найти многочлен второй степени $P(t)$ такой, что норма $\left\|e^t - P(t)\right\|$ минимальна в $L_2\left[-1,1\right]$.

Решение: при заданном n в гильбертовом пространстве от элемента x наименее всего уклоняется его n-я частичная сумма ряда Фурье, т.е. искомый многочлен совпадает с многочленом Фурье второй степени функции e^t, т.е. $P(t) = c_0 e_0(t) + c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t)$, где $e_0(t), e_1(t), e_2(t)$ – элементы ортонормированной системы в $L_2\left[-1,1\right]$, $c_k = (e^t, e_k(t))$ ($k = 0,1,2$) – коэффициенты Фурье функции e^t.

Для того, что бы найти элементы $e_0(t), e_1(t), e_2(t)$, применим процесс ортогонализации, описанный в доказательстве теоремы о существовании базиса в гильбертовом пространстве, к линейно независимым функциям $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ (поскольку степень искомого многочлена $n = 2$).

Поскольку $\|x_0\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} 1dt} = \sqrt{2}$, то $e_0(t) = \dfrac{x_0}{\|x_0\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Далее, $h_1 = x_1 - (x_1, e_0)e_0$.

Т.к. $(x_1, e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} tdt = 0$, то $h_1(t) = t$, откуда $\|h_1\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} t^2 dt} = \sqrt{\left.\dfrac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $e_1(t) = \dfrac{h_1}{\|h_1\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}t$.

Далее, $h_2 = x_2 - (x_2, e_0)e_0 - (x_2, e_1)e_1$. Т.к. $(x_2, e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ и $(x_2, e_1) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt = 0$, то $h_2(t) = t^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = t^2 - \dfrac{1}{3}$.

Т.к. $\|h_2\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\dfrac{8}{45}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$, то $e_2(t) = \dfrac{h_2}{\|h_2\|} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$.

Осталось посчитать коэффициенты Фурье:

$$c_0 = (e^t, e_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} e^t dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{2}e}.$$

$$c_1 = (e^t, e_1(t)) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} te^t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} tde^t = \left.\sqrt{\frac{3}{2}} te^t \right|_{-1}^{1} - \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{-1}^{1} e^t dt =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}e + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{e} - \sqrt{\frac{3}{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{6}}{e}.$$

$$c_2 = (e^t, e_2(t)) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) e^t dt = \left.\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)e^t \right|_{-1}^{1} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} te^t dt =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{e} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{e} = \frac{\sqrt{5}(e^2 - 7)}{\sqrt{2}e}.$$

Тогда искомый многочлен имеет вид:

$$P(t)=c_0e_0(t)+c_1e_1(t)+c_2e_2(t)=\frac{e^2-1}{\sqrt{2}e}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{e}\sqrt{\frac{3}{2}}t+\frac{\sqrt{5}(e^2-7)}{\sqrt{2}e}\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{e^2-1}{2e}+\frac{3}{e}t+\frac{15(e^2-7)}{4e}t^2-\frac{5(e^2-7)}{4e}=\frac{15(e^2-7)}{4e}t^2+\frac{3}{e}t+\frac{33-3e^2}{4e}.$$

3. Для функции e^t найти многочлен второй степени $P(t)$ такой, что норма $\left\|e^t-P(t)\right\|$ минимальна в $L_2\left[-1,1\right]$ с заданной весовой функцией $p(t)=\ln(1+t^2)$.

Решить задачу численно при помощи Excel, выбрав шаг равным $0{,}1$. Найти величину отклонения $\left\|e^t-P(t)\right\|$ и построить графики функции e^t и многочлена $P(t)$.

Решение: алгоритм решения остается таким же, как и в предыдущем примере. Введение весовой функции означает, что во все подынтегральные функции добавляется множитель $p(t)=\ln(1+t^2)$.

Заполняем столбцы A, B и C: столбец A заполняем единицами, столбец B заполняем значениями, начиная с -1, до 1 через шаг 0,1. В ячейку C2 вводим формулу =B2^2 и протягиваем до нужного нам значения. Тем самым, в первых трех столбцах получили значения функций $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, вычисленные через шаг 0,1.

В ячейку D2 вводим формулу =LN(1+C2) и протягиваем. Получаем значения весовой функции, вычисленные через шаг. В ячейку B25 вводим значение шага, т.е. число 0,1. Инициализация закончена. В столбце E будем вычислять норму $\|x_0\|=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}x_0^{\,2}(t)p(t)dt}$. Для вычисления интегралов будем использовать формулы прямоугольников: $\int\limits_a^b f(t)dt=f(t_0)\cdot\Delta t+f(t_1)\cdot\Delta t+...+f(t_{n-1})\cdot\Delta t$. В соответствии с формулой прямоугольников в ячейку E2 вводим формулу =(A2)^2*D2*$B$25, протягиваем ее до **предпоследней** рабочей ячейки, т.е. до ячейки E21. В ячейке E22 вычисляем сумму значений ячеек E2-E21, в ячейке E23 – квадратный корень из значения ячейки E22. Это и будет искомая норма $\|x_0\|$. Желательно выделить ее цветом.

В ячейку F2 вводим формулу =A2/$E$23 и протягиваем до ячейки F21. Мы получили набор значений функции $e_0(t)=\frac{x_0}{\|x_0\|}$, вычисленных через шаг, только без значения в точке $t=1$.

В ячейку G2 вводим формулу =B2*F2*D2*$B$25 и протягиваем ее до ячейки G21. В ячейке G22 вычисляем сумму получившихся значений и получаем значение скалярного произведения (x_1,e_0). В ячейку H2 вводим формулу =B2-$G$22*F2 и протягиваем до ячейки H21 – получаем значения функции $h_1=x_1-(x_1,e_0)e_0$, вычисленные через шаг, но без последнего значения. В ячейке

I2 вычисляем квадраты этих значений. В ячейку J2 вводим формулу =I2*D2*$B$25, протягиваем ее до J21, в J22 вычисляем сумму этих значений, в J23 – квадратный корень из этой суммы. Мы получили значение $\|h_1\|$. Ячейку желательно выделить цветом. В ячейке K2 вычисляем значения $e_1(t)=\dfrac{h_1}{\|h_1\|}$, вводя формулу =H2/$J$23.

Действия по вычислению $h_2 = x_2-(x_2,e_0)e_0-(x_2,e_1)e_1$ и $e_2(t)=\dfrac{h_2}{\|h_2\|}$ – аналогичны. В ячейку R2 вводим формулу =EXP(B2) и протягиваем – это значения функции e^t, вычисленные через шаг. В соседних ячейках вычисляем скалярные произведения $c_0=(e^t,e_0(t))$, $c_1=(e^t,e_1(t))$ и $c_2=(e^t,e_2(t))$. Далее, вычисляем значения многочлена $P(t)=c_0e_0(t)+c_1e_1(t)+c_2e_2(t)$ через шаг, строим графики функции e^t и многочлена $P(t)$ и вычисляем норму разности $\|e^t-P(t)\|$. Все результаты вычислений и графики приведены в дополнении.

4. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=t^3$ в пространстве $L_2\left([-1,1],\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$. Полученные многочлены называются многочленами Чебышева.

Решение: воспользуемся процессом ортогонализации, описанным в теореме о существовании базиса в гильбертовом пространстве. Скалярное произведение в $L_2\left([-1,1],\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ определяется формулой $(x,y)=\int\limits_{-1}^{1}x(t)\,y(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, тогда $\|x_0\|=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\arcsin t\big|_{-1}^{1}}=\sqrt{\pi}$. Значит, $e_0=\dfrac{x_0}{\|x_0\|}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Далее, $h_1=x_1-(x_1,e_0)e_0$,

$(x_1,e_0)=\int\limits_{-1}^{1}t\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}d(1-t^2)=-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-t^2}\Bigg|_{-1}^{1}=0$, откуда $h_1(t)=t$,

$$\|h_1\|=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\pi-\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\sin y,\ y=\arcsin t\\ y_н=-\dfrac{\pi}{2},\ y_в=\dfrac{\pi}{2}\\ dt=\cos y dy\end{matrix}\right|=\sqrt{\pi-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 y dy}=\sqrt{\pi-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2y)dy}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ e_1=\frac{h_1}{\|h_1\|}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}t.$$

Далее, $h_2=x_2-(x_2,e_0)e_0-(x_2,e_1)e_1$.

$$(x_2,e_0)=\int\limits_{-1}^{1}t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$(x_2,e_1)=\int_{-1}^{1}t^2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt^2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt^2-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt^2=-2\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{1-t^2}\Big|_{-1}^{1}-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt^2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_{-1}^{1}=0\,.$$

Тогда $h_2(t)=t^2-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}=t^2-\dfrac{1}{2}$, а

$$\|h_2\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}=$$

$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\pi}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{\pi}{4}}\,.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 y\,dy=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2y)^2dy=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2y\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4y)dy=\frac{3\pi}{8}\,.$$

Значит $\|h_2\|=\sqrt{\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{8}}$, откуда $e_2=\dfrac{h_2}{\|h_2\|}=\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(2t^2-1\right)$.

Далее, $h_3=x_3-(x_3,e_0)e_0-(x_3,e_1)e_1-(x_3,e_2)e_2$.

$$(x_3,e_0)=\int_{-1}^{1}t^3\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=0\,.$$

$$(x_3,e_1)=\int_{-1}^{1}t^3\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\,.$$

$$(x_3,e_2)=\int_{-1}^{1}t^3\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2t^2-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 y\,dy=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 y\,d\cos y=$$

$$=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 y)^2d\cos y=0\,.$$

Тогда $h_3(t)=t^3-\frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}t=t^3-\frac{3}{4}t$.

$$\|h_3\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{\left(t^3-\frac{3}{4}t\right)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{9}{16}\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}=$$

$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{9\pi}{16}+\frac{9\pi}{32}}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}dt-\frac{9\pi}{32}}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 ydy=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2y)^3dy=\frac{\pi}{8}-\frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2ydy+$$

$$+\frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2ydy-\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2ydy=\frac{\pi}{8}+\frac{3}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4y)dy-\frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2yd\sin 2y=$$

$$\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2y)d\sin 2y=\frac{5\pi}{16}.$$

Значит $\|h_3\|=\sqrt{\frac{5\pi}{16}-\frac{9\pi}{32}}=\sqrt{\frac{\pi}{32}}$, откуда $e_3=\frac{h_3}{\|h_3\|}=\sqrt{\frac{32}{\pi}}\left(t^3-\frac{3}{4}t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(4t^3-3t\right)$.

5. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ найти $M^{\perp}$, если $M=\left\{L\left(e^{-int}\right),\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, и $M=\left\{L\left(e^{-int}\right),\ n\geq 0\right\}$, где $L(N)$ обозначает линейную оболочку множества N.

Решение: пусть $M=\left\{L\left(e^{-int}\right),\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Ясно, что M – линейное многообразие. Из теории тригонометрических рядов Фурье известно, что система функций $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}\right), n\in\mathbb{Z}$ является полной в пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций. Значит, по определению полноты, любую такую непрерывную функцию можно с любой точностью приблизить линейной комбинацией элементов этой системы. Таким образом, множество M – всюду плотно с пространстве $C[-\pi,\pi]$. Пространство $C[-\pi,\pi]$, в свою очередь, всюду плотно в $L_2[-\pi,\pi]$, значит M всюду плотно в $L_2[-\pi,\pi]$ и по теореме о всюду плотности линейного многообразия, $M^{\perp}=\{0\}$.

Поскольку система $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}\right), n\in\mathbb{Z}$ ортонормирована в $L_2[-\pi,\pi]$ и M всюду плотно в $L_2[-\pi,\pi]$, то система $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}\right), n\in\mathbb{Z}$ полна в $L_2[-\pi,\pi]$, т.е.

представляет собой ортонормированный базис в $L_2[-\pi,\pi]$ в силу критерия базиса.

Пусть теперь $M=\left\{L\left(e^{-int}\right), n\geq 0\right\}$. Рассмотрим $x\in M^{\perp}$, тогда $x=0+x$, где $0\in\bar{M}$. С другой стороны, поскольку $e_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}\right), n\in\mathbb{Z}$ – базис в $L_2[-\pi,\pi]$, то $x=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e_n(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n e_n(t)+\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}c_n e_n(t)$, причем $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n e_n(t)\in\bar{M}$. По теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму $x=\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}c_n e_n(t)$, т.е. $x\in\overline{\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}}$. Таким образом, $M^{\perp}\subset\overline{\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}}$.

Обратно: пусть $x\in\overline{\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}}$. Если $x\in\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}$, то $\forall y\in M$ легко проверить, что $(x,y)=0$, т.е. $x\in M^{\perp}$. Если $x_k\in\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}$, $x_k\to x$, то $\forall y\in M$ $(x_k,y)=0$, и, в силу непрерывности скалярного произведения, $(x,y)=0$, т.е. $x\in M^{\perp}$. Окончательно, $M^{\perp}=\overline{\left\{L\left(e^{-int}\right), n<0\right\}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пространстве $l_{2,\alpha}$ построить ортонормированный базис, если $\alpha_n=n^2$.

2. В пространстве $l_{2,\alpha}$ построить ортонормированный базис, если $\alpha_n=e^{-n}$.

3. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=t^3$ в пространстве $L_2[0,1]$.

4. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=t^3$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Полученные многочлены называются многочленами Лежандра.

5. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=t^3$ в пространстве $L_2\left([0,+\infty), e^{-t}dt\right)$. Полученные многочлены называются многочленами Чебышева-Лагерра.

6. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_2(t)=t^2$, $x_3(t)=t^3$ в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty), e^{-t^2}dt\right)$. Полученные многочлены называются многочленами Чебышева-Эрмита.

7. Для функции t^3 найти многочлены $p_n(t)$ степени $0,1,2$ такие, что норма $\left\|t^3-p_n(t)\right\|$ минимальна в $L_2[-1,1]$.

8. Пусть $H_p[0,1]$ – гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на $[0,1]$, скалярное произведение в котором $(x,y)=\int\limits_0^1 x(t)y(t)p(t)dt$. Для функции $x(t)=\ln(1+t^2)$ найти элемент наилучшего приближения x^* элементами подпространства L многочленов степени $n=3$ при заданной весовой функции $p(t)=1+t^2$. Решить задачу численно при помощи Excel, выбрав шаг равным $0{,}05$. Найти величину отклонения $\rho(x,L)=\|x(t)-x^*(t)\|_{H_p}$ и построить графики функции $x(t)$ и элемента наилучшего приближения $x^*(t)$.

9. Пусть $H_p[0,1]$ – гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на $[0,1]$, скалярное произведение в котором $(x,y)=\int\limits_0^1 x(t)y(t)p(t)dt$. Для функции $x(t)=\sin 4\pi t$ найти элемент наилучшего приближения x^* элементами подпространства L многочленов степени $n=3$ при заданной весовой функции $p(t)=1+e^t$. Решить задачу численно при помощи Excel, выбрав шаг равным $0{,}05$, найти величину отклонения $\rho(x,L)=\|x(t)-x^*(t)\|_{H_p}$ и построить графики функции $x(t)$ и элемента наилучшего приближения $x^*(t)$.

10. Пусть $H_p[0,1]$ – гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом на $[0,1]$, скалярное произведение в котором $(x,y)=\int\limits_0^1 x(t)y(t)p(t)dt$. Для функции $x(t)=e^{-t^2}$ найти элемент наилучшего приближения x^* элементами подпространства L многочленов степени $n=3$ при заданной весовой функции $p(t)=1+t^2$. Решить задачу численно при помощи Excel, выбрав шаг равным $0{,}05$, найти величину отклонения $\rho(x,L)=\|x(t)-x^*(t)\|_{H_p}$ и построить графики функции $x(t)$ и элемента наилучшего приближения $x^*(t)$.

11. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ найти $M^{\perp}$, если $M=\{L(\sin nt),n\ge 1\}$.

12. В пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ найти $M^{\perp}$, если $M=\{L(\cos nt),n\ge 0\}$.

13. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти $M^{\perp}$, если $M=L(\cos\pi t,t)$.

14. Используя равенство Парсеваля, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

15. Доказать, что множество M четных функций и множество N – нечетных функций образуют подпространства в пространстве $L_2[-1,1]$. Доказать, что $L_2[-1,1]=M\oplus N$.

16. Найти замыкание линейной оболочки множества $\{t^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

Указание: пусть L – указанная линейная оболочка, N – подпространство нечетных функций в $L_2[-1,1]$. Показать, что $\bar{L} \subset N$ и $N \subset \bar{L}$ (для доказательства второго включения обосновать полноту системы, получаемой при ортонормировке системы $\{1,t,t^2,t^3,...\}$ в $L_2[-1,1]$).

17. Найти замыкание линейной оболочки множества $\left\{t^{2k-2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

18. Проверить, что замыкание линейной оболочки системы $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ – есть множество четных функций в действительном пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

19. Проверить, что замыкание линейной оболочки системы $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ – есть множество нечетных функций в действительном пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

20. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти элемент наилучшего приближения для функции $x(t)=1+t^{-1/3}$ подпространством $M=L(t,t^2,t^3)$. Вычислить расстояние от $x(t)$ до M.

21. Найти ортогональную проекцию элемента $x_0=\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}\in l_2$ на подпространство L – линейную оболочку векторов $x_1=(1,0,-1,0,0,...)$, $x_2=(0,1,0,-1,0,0,...)$, $x_3=(0,0,1,0,-1,0,0,...)$, а также найти $\rho(x_0,L)$ и $\rho(x_0,L^{\perp})$.

22. Найти расстояние от элемента $x_0=(1,0,0,...)\in l_2$ до подпространства $L=\left\{x\in l_2, x=(\xi_1,\xi_2,...):\sum_{k=1}^{5}\xi_k=0\right\}$.

Указание: найти ортонормированный базис этого подпространства.

23. Доказать полноту в пространстве $L_2[0,\pi]$ тригонометрических систем $\{\sin kx : k\in\mathbb{N}\}$ и $\{\cos kx : k\in\mathbb{N}\}$.

Указание: показать, что любая функция $f(x)\in L_2[0,\pi]$ раскладывается в ряды Фурье по этим системам, сходящиеся к $f(x)$ в среднем квадратичном. Для этого выполнить нечетное или четное продолжения.

24. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=e^t$ до подпространства $M=\left\{x\in L_2[-1,1]: x(t)=\sum_{k=1}^{10}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right\}$.

25. В пространстве $L_2[0,1]$ найти проекции элемента $x(t)=t^3$ на подпространства многочленов степени $m\le n$, $n=0,1,2$.

26. Пусть $e_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в $L_2[a,b]$. Доказать, что $u_{m,n}(s,t)=e_m(s)e_n(t)$, $m,n\in\mathbb{N}$ образуют ортонормированный базис в $L_2([a,b]\times[a,b])$.

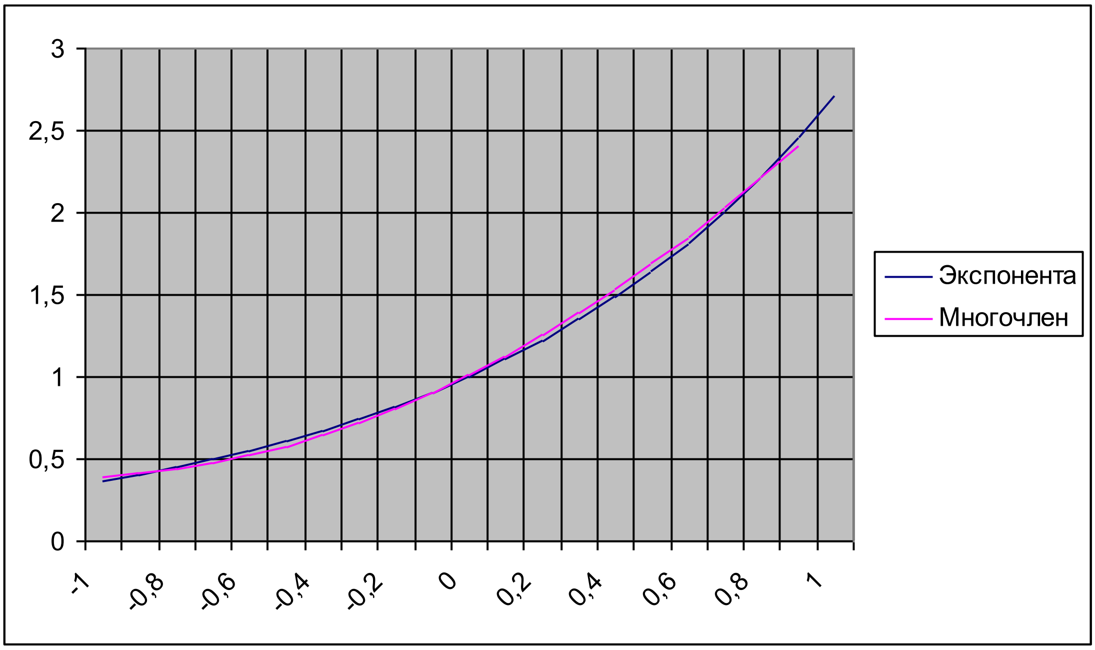
Дополнение

Результаты численного решения примера 3 п. 3.5

x0=1	x1=t	x2=t^2	p(t)	||x0||	e0	(x1,e0)	h1=x1-(x1,e0)*e0	h1^2
1	-1	1	0,693147	0,069315	1,374184	-0,09525	-0,869107356	0,755348
1	-0,9	0,81	0,593327	0,059333	1,374184	-0,07338	-0,769107356	0,591526
1	-0,8	0,64	0,494696	0,04947	1,374184	-0,05438	-0,669107356	0,447705
1	-0,7	0,49	0,398776	0,039878	1,374184	-0,03836	-0,569107356	0,323883
1	-0,6	0,36	0,307485	0,030748	1,374184	-0,02535	-0,469107356	0,220062
1	-0,5	0,25	0,223144	0,022314	1,374184	-0,01533	-0,369107356	0,13624
1	-0,4	0,16	0,14842	0,014842	1,374184	-0,00816	-0,269107356	0,072419
1	-0,3	0,09	0,086178	0,008618	1,374184	-0,00355	-0,169107356	0,028597
1	-0,2	0,04	0,039221	0,003922	1,374184	-0,00108	-0,069107356	0,004776
1	-0,1	0,01	0,00995	0,000995	1,374184	-0,00014	0,030892644	0,000954
1	0	0	0	0	1,374184	0	0,130892644	0,017133
1	0,1	0,01	0,00995	0,000995	1,374184	0,000137	0,230892644	0,053311
1	0,2	0,04	0,039221	0,003922	1,374184	0,001078	0,330892644	0,10949
1	0,3	0,09	0,086178	0,008618	1,374184	0,003553	0,430892644	0,185668
1	0,4	0,16	0,14842	0,014842	1,374184	0,008158	0,530892644	0,281847
1	0,5	0,25	0,223144	0,022314	1,374184	0,015332	0,630892644	0,398026
1	0,6	0,36	0,307485	0,030748	1,374184	0,025352	0,730892644	0,534204
1	0,7	0,49	0,398776	0,039878	1,374184	0,038359	0,830892644	0,690383
1	0,8	0,64	0,494696	0,04947	1,374184	0,054384	0,930892644	0,866561
1	0,9	0,81	0,593327	0,059333	1,374184	0,073381	1,030892644	1,06274
1	1	1	0,693147	0,529554		-0,09525		
				0,727705				
Δt=	0,1							

||h1||	e1	(x2,e0)	(x2,e1)	h2=x-(x2,e0)e0-(x2,e1)e1	h2^2	||h2||	e2
0,052357	-1,59024	0,095251	-0,11023	0,334351504	0,111791	0,007749	1,742232
0,035097	-1,40726	0,066043	-0,06763	0,154070704	0,023738	0,001408	0,802828
0,022148	-1,22429	0,043507	-0,03876	-0,006210097	3,86E-05	1,91E-06	-0,03236
0,012916	-1,04131	0,026852	-0,02035	-0,146490898	0,02146	0,000856	-0,76333
0,006767	-0,85834	0,015211	-0,0095	-0,266771698	0,071167	0,002188	-1,39009
0,00304	-0,67537	0,007666	-0,00377	-0,367052499	0,134728	0,003006	-1,91263
0,001075	-0,49239	0,003263	-0,00117	-0,4473333	0,200107	0,00297	-2,33096
0,000246	-0,30942	0,001066	-0,00024	-0,5076141	0,257672	0,002221	-2,64507
1,87E-05	-0,12645	0,000216	-2E-05	-0,547894901	0,300189	0,001177	-2,85496
9,5E-07	0,056525	1,37E-05	5,62E-07	-0,568175701	0,322824	0,000321	-2,96064
0	0,239499	0	0	-0,568456502	0,323143	0	-2,9621
5,3E-05	0,422472	1,37E-05	4,2E-06	-0,548737303	0,301113	0,0003	-2,85935
0,000429	0,605445	0,000216	9,5E-05	-0,509018103	0,259099	0,001016	-2,65238
0,0016	0,788419	0,001066	0,000611	-0,449298904	0,20187	0,00174	-2,3412
0,004183	0,971392	0,003263	0,002307	-0,369579705	0,136589	0,002027	-1,9258
0,008882	1,154366	0,007666	0,00644	-0,269860505	0,072825	0,001625	-1,40618
0,016426	1,337339	0,015211	0,014804	-0,150141306	0,022542	0,000693	-0,78235
0,027531	1,520312	0,026852	0,029707	-0,010422107	0,000109	4,33E-06	-0,05431
0,042868	1,703286	0,043507	0,053927	0,149297093	0,02229	0,001103	0,777954
0,063055	1,886259	0,066043	0,090653	0,329016292	0,108252	0,006423	1,714431
0,298692		0,422926	-0,05312			0,036829	
0,546528						0,19191	

e^t	c0=(e^t,e0)	c1=(e^t,e1)	c2=(e^t,e2)	МНОГОЧЛЕН	||e^t-МНОГОЧЛЕН||
0,367879	0,0350409	-0,0405501	0,04442597	0,39589949	5,44206E-05
0,40657	0,0331493	-0,0339472	0,01936653	0,411574893	1,48642E-06
0,449329	0,0305455	-0,0272136	-0,0007193	0,437348262	7,10073E-06
0,496585	0,0272125	-0,0206208	-0,015116	0,473219596	2,17714E-05
0,548812	0,0231895	-0,0144846	-0,0234579	0,519188896	2,6982E-05
0,606531	0,0185987	-0,0091407	-0,0258862	0,575256162	2,18255E-05
0,67032	0,0136716	-0,0048988	-0,0231904	0,641421393	1,2395E-05
0,740818	0,0087731	-0,0019754	-0,0168866	0,71768459	4,61193E-06
0,818731	0,0044127	-0,000406	-0,0091676	0,804045753	8,45792E-07
0,904837	0,0012372	5,089E-05	-0,0026656	0,900504882	1,86776E-08
1	0	0	0	1,007061977	0
1,105171	0,0015112	0,0004646	-0,0031444	1,123717037	3,4225E-07
1,221403	0,0065829	0,0029003	-0,012706	1,250470063	3,31379E-06
1,349859	0,0159856	0,0091715	-0,0272346	1,387321054	1,20943E-05
1,491825	0,0304267	0,0215082	-0,0426404	1,534270012	2,67394E-05
1,648721	0,0505564	0,0424693	-0,0517337	1,691316935	4,0487E-05
1,822119	0,0769919	0,0749276	-0,0438332	1,858461823	4,06131E-05
2,013753	0,110352	0,1220866	-0,0043611	2,035704678	1,92166E-05
2,225541	0,1512931	0,1875261	0,08565017	2,223045498	3,08056E-07
2,459603	0,2005413	0,2752709	0,25019529	2,420484284	9,07958E-05
2,718282	0,8400722	0,5831388	0,09689496		0,000385368
					0,019630802



ЧАСТЬ II. ОПЕРАТОРЫ

РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.1. Понятие линейного ограниченного оператора, его норма

Определение: пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Отображение $A: X \to Y$ называется линейным оператором, если выполнены свойства линейности:

1. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in X$;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x) \ \ \forall x \in X$ и для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ (или $\lambda \in \mathbb{R}$).

Замечание: область определения оператора A будем обозначать $D(A)$, а множество значений (образ оператора) – $R(A)$ ($\operatorname{Im} A$). Если множество $D(A)$ не указано явно, то всегда будем считать, что $D(A) = X$. При этом условие $R(A) = Y$ необязательно выполнено.

Замечание: если $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то любой линейный оператор представляется в виде умножения на матрицу и поэтому, по аналогии с умножением матриц, скобки у аргумента линейного оператора принято не писать, т.е., если это не вызывает недоразумений, будем писать Ax вместо $A(x)$.

Замечание: для любого линейного оператора $A0 = A(x - x) = Ax - Ax = 0$.

Определение: оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in D(A)$, если при $x_n \to x_0$ ($x_n \in D(A)$, $n \to \infty$) $Ax_n \to Ax_0$. Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$, если он непрерывен в каждой точке $D(A)$.

Замечание: по аналогии с математическим анализом, определение непрерывности оператора в точке $x_0 \in D(A)$ можно записать в эквивалентном виде: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x \in D(A) \ \ \|x - x_0\|_X < \delta \ \ \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Определение: множество тех $x \in D(A)$, для которых $Ax = 0$ называется ядром линейного оператора A и обозначается $\ker A$.

Определение: пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор. A называется ограниченным, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\forall x \in X \ \ \|Ax\|_Y \le M \|x\|_X$.

Замечание: если A – ограниченный оператор, то он любое ограниченное множество $M \in X$ переводит в ограниченное множество $AM \in Y$ (см. задачу 3).

Замечание: если A – ограниченный оператор, то $\exists M > 0: \ \forall x \in X \ \ x \ne 0$ $\dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \le M$, т.е. множество таких дробей имеет точную верхнюю грань.

Определение: пусть $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Нормой оператора A называется число $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$.

Замечание: таким образом, норма оператора – это наименьшее из чисел $M > 0$, для которых $\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X \quad \forall x \in X$. По определению нормы оператора $\forall x \in X \quad x \ne 0 \quad \|A\| \ge \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$, откуда $\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X$. Заметим, что последнее неравенство верно уже и при $x = 0$. В дальнейшем индексы у норм будем опускать. Из математического анализа известно свойство точной верхней грани: если $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ x\ne 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X \setminus \{0\}$: $\dfrac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > \|A\| - \varepsilon$, откуда $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

Теорема (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейных операторов): пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор, причем $D(A) = X$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. A ограничен;
2. A непрерывен на всем пространстве X;
3. A непрерывен в точке $x = 0$.

Доказательство: $1 \Rightarrow 2$. Пусть A ограничен, т.е. $\exists M > 0$: $\forall x \in X$ $\|Ax\| \le M\|x\|$. Зафиксируем $x_0 \in X$, тогда $\forall x \in X \quad \|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \le$ $\le M\|x - x_0\|$. Далее, $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, тогда из условия $\|x - x_0\| < \delta$ будет следовать, что $\|Ax - Ax_0\| \le M\|x - x_0\| < M \cdot \delta = \varepsilon$, т.е. A – непрерывен в произвольной фиксированной точке $x_0 \in X$, а значит, непрерывен на всем пространстве X.

$2 \Rightarrow 3$. Очевидно.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть A непрерывен в нуле, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: $\forall x \in X \quad \|x\| < \delta$ $\|Ax\| < \varepsilon$. Поскольку $\forall x \ne 0 \quad \left\| \dfrac{x}{\|x\|} \cdot \dfrac{\delta}{2} \right\| = \dfrac{\delta}{2} \cdot \dfrac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, то $\left\| A\left(\dfrac{x}{\|x\|} \cdot \dfrac{\delta}{2} \right) \right\| < \varepsilon$, откуда $\dfrac{\delta}{2\|x\|}\|Ax\| < \varepsilon$, т.е. $\|Ax\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$. Обозначая $M = \dfrac{2\varepsilon}{\delta} > 0$, получим, что $\|Ax\| < M \cdot \|x\|$. Если $x = 0$, то $\|Ax\| = M \cdot \|x\|$, поэтому $\forall x \in X \quad \|Ax\| \le M \cdot \|x\|$.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – линейное нормированное пространство. Линейным ограниченным функционалом φ называется линейный ограниченный оператор $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (или $\varphi : X \to \mathbb{C}$).

Замечание: таким образом, функционал – это частный случай оператора при $Y = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Действие функционала φ на элемент x (т.е. запись $\varphi(x)$) иногда обозначают $< x, \varphi >$.

Определение: нормой линейного ограниченного функционала называется число $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$.

Замечание: всюду далее по умолчанию рассматриваются функционалы $\varphi: X \to \mathbb{R}$. Случаи $\varphi: X \to \mathbb{C}$ будут оговариваться особо.

Определение: гиперплоскостью в линейном пространстве X называется совокупность точек этого пространства, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x) = C$, где φ – линейный функционал на X, $C = \text{const}$.

Примеры решения задач

1. Какие из следующих функционалов являются линейными и непрерывными:

а) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$;

б) $f: L_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\sin^2 t dt$;

в) $f: L \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k$, где L – линейное подпространство элементов $x = (\xi_k) \in l_2$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k$, а норма стандартна?

Решение: а) Пусть $x_1, x_2 \in C[0,1]$, тогда

$$f(x_1 + x_2) = \int\limits_0^1 \left(x_1(t) + x_2(t)\right)^2 dt = \int\limits_0^1 \left(x_1^{\,2}(t) + x_2^{\,2}(t) + 2x_1(t)x_2(t)\right)dt =$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + 2\int\limits_0^1 x_1(t)x_2(t)dt.$$

Ясно, что при условии $\int\limits_0^1 x_1(t)x_2(t)dt \neq 0$ получаем $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$ и определение линейности функционала не выполняется.

Проверим его непрерывность, т.е., что если $x_n, x_0 \in C[0,1]$ и $x_n \xrightarrow{C[0,1]} x_0$, то $f(x_n) \to f(x_0)$, т.е., что $\int\limits_0^1 x_n^{\,2}(t)dt \to \int\limits_0^1 x_0^{\,2}(t)dt$. Если покажем, что $x_n^{\,2}(t) \rightrightarrows x_0^{\,2}(t)$, то по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Римана это и будет означать, что $\int\limits_0^1 x_n^{\,2}(t)dt \to \int\limits_0^1 x_0^{\,2}(t)dt$. Поскольку равномерная сходимость эквивалентна сходимости по норме пространства $C[0,1]$, то достаточно установить, что $x_n^{\,2} \xrightarrow{C[0,1]} x_0^{\,2}$, т.е., что $\left\|x_n^{\,2} - x_0^{\,2}\right\| \to 0$. Поскольку $x_n \xrightarrow{C[0,1]} x_0$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. $\exists c > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq c$. Тогда

$$\left\|x_n{}^2-x_0{}^2\right\|=\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n{}^2(t)-x_0{}^2(t)\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|(x_n(t)-x_0(t))(x_n(t)+x_0(t))\right|=$$
$$=\sup_{t\in[0,1]}\left|(x_n(t)-x_0(t))x_n(t)+(x_n(t)-x_0(t))x_0(t)\right|\le\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n(t)-x_0(t)\right|\left|x_n(t)\right|+$$
$$+\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n(t)-x_0(t)\right|\left|x_0(t)\right|\le\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n(t)\right|\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n(t)-x_0(t)\right|+\sup_{t\in[0,1]}\left|x_0(t)\right|\sup_{t\in[0,1]}\left|x_n(t)-x_0(t)\right|=$$
$$=\|x_n\|\cdot\|x_n-x_0\|+\|x_0\|\cdot\|x_n-x_0\|\le c\|x_n-x_0\|+\|x_0\|\cdot\|x_n-x_0\|.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, учитывая, что $\|x_n-x_0\|\to 0$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\left\|x_n{}^2-x_0{}^2\right\|\to 0$.

Итак, функционал f непрерывен.

б) Проверим линейность: пусть $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $x_1,x_2\in L_2[0,1]$, тогда

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\int_0^1(\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t))\sin^2tdt=\alpha_1\int_0^1x_1(t)\sin^2tdt+$$
$$+\alpha_2\int_0^1x_2(t)\sin^2tdt=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

Таким образом, функционал f линеен. В силу теоремы об эквивалентности непрерывности и ограниченности линейного оператора, для установления его непрерывности достаточно установить его ограниченность. Поскольку

$$|f(x)|=\left|\int_0^1x(t)\sin^2tdt\right|\le\int_0^1|x(t)|\sin^2tdt\le\left(\int_0^1|x(t)|^2dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1\sin^4tdt\right)^{\frac12}=$$
$$=\|x\|\cdot\left(\int_0^1\sin^4tdt\right)^{\frac12}=\|x\|,$$

то функционал f ограничен с константой $M=\left(\int_0^1\sin^4tdt\right)^{\frac12}=1$.

в) Проверим линейность: пусть $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $x_1=(\xi_k^{(1)}),x_2=(\xi_k^{(2)})\in L$, тогда

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_1\xi_k^{(1)}+\alpha_2\xi_k^{(2)}\right)\sin k=\alpha_1\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(1)}\sin k+\alpha_2\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(2)}\sin k=$$
$$=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2),$$

т.е. функционал f линеен., поэтому достаточно проверить ограниченность.

Рассмотрим $\forall n\in\mathbb{N}$ элемент $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\left(\dfrac{\sin 1}{1},\dfrac{\sin 2}{2^\alpha},...,\dfrac{\sin n}{n^\alpha},0,0,...\right)$, где $\alpha=\dfrac12+\sigma$, $0<\sigma<\dfrac12$, $c=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{2\alpha}}$ (поскольку $2\alpha>1$, то c действительно конечное положительное число). Проверим, что такой элемент $x_n\in L$.

Действительно, $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\sin k=\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k^\alpha}\sin k=\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k}{k^\alpha}\le\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}<\infty$, поскольку сумма получилась конечной. Таким образом, $x_n\in L$.

Далее, $\|x_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2=\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k}{k^{2\alpha}}\le\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2\alpha}}\le\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}}=\frac{1}{c}\cdot c=1$, значит, последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

При этом, $|f(x_n)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\sin k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{\sin k}{k^\alpha}\sin k\right|=\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k}{k^\alpha}\underset{n\to\infty}{\to}+\infty$, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^\alpha}$ является при $\alpha<1$ расходящимся. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ не ограничена. Итак, функционал f перевел ограниченную последовательность в неограниченную, следовательно, он неограничен.

2. Найти норму оператора $A:\mathbb{R}^n\to l_2$, если

$$A(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\left(\frac{\xi_1}{1},...,\frac{\xi_n}{1},\frac{\xi_1}{2},...,\frac{\xi_n}{2},...,\frac{\xi_1}{k},...,\frac{\xi_n}{k},...\right),$$

где $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$.

Решение:

$$\|A\|=\sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\frac{\xi_1^2}{1^2}+...+\frac{\xi_n^2}{1^2}+\frac{\xi_1^2}{2^2}+...+\frac{\xi_n^2}{2^2}+...+\frac{\xi_1^2}{k^2}+...+\frac{\xi_n^2}{k^2}+...}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}}=$$

$$=\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_1^2+...+\xi_n^2}{k^2}}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}}=\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то $\|A\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$.

3. Найти норму функционала $A:l_1\to\mathbb{R}$, если $Ax=\sum_{k=1}^{\infty}(1-(-1)^k)\frac{k-1}{k}\xi_k$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_1$.

Решение: $\|A\|=\sup_{x\ne0}\frac{|Ax|}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty}(1-(-1)^k)\frac{k-1}{k}\xi_k\right|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}\le\sup_{x\ne0}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left|1-(-1)^k\right|\cdot\left|\frac{k-1}{k}\right|\cdot|\xi_k|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}\le$

$$\le \sup_{x\ne 0}\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}=2$$. С другой стороны, для некоторого $x_0\ne 0$:

$$\|A\|=\sup_{x\ne 0}\frac{|Ax|}{\|x\|}\ge\frac{|Ax_0|}{\|x_0\|}=\frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty}(1-(-1)^k)\frac{k-1}{k}\xi_k^{(0)}\right|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(0)}|}=\left|\begin{matrix}x_0=(0,...,0,\underset{2n+1}{1},0,0,...)\\ x_0\in l_1\end{matrix}\right|=$$

$$=\left|(1-(-1)^{2n+1})\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1}\right|=2\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $\|A\|\ge 2$. Из полученных неравенств следует, что $\|A\|=2$.

4. Найти норму функционала $f:C[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int_0^{\pi}x(\sin t)dt$.

Решение: $\|f\|=\sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{x\ne 0}\frac{\left|\int_0^{\pi}x(\sin t)dt\right|}{\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|}\le\sup_{x\ne 0}\frac{\int_0^{\pi}|x(\sin t)|dt}{\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|}$. Поскольку $\forall t\in[0,1]$ $|x(t)|\le\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|=\|x\|$, а при $t\in[0,\pi]$ $\sin t\in[0,1]$, то $\forall t\in[0,\pi]$ $|x(\sin t)|\le\|x\|$, откуда: $\|f\|\le\sup_{x\ne 0}\frac{\int_0^{\pi}\|x\|dt}{\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|}=\sup_{x\ne 0}\frac{\|x\|\int_0^{\pi}1dt}{\|x\|}=\int_0^{\pi}1dt=\pi$. С другой стороны, для некоторого $x_0\ne 0$ $\|f\|=\sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\ge\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{\left|\int_0^{\pi}x_0(\sin t)dt\right|}{\sup_{t\in[0,1]}|x_0(t)|}=\left|\begin{matrix}x_0(t)\equiv 1\\ x_0(t)\in C[0,1]\end{matrix}\right|=\left|\int_0^{\pi}1dt\right|=\pi$. Из полученных неравенств следует, что $\|f\|=\pi$.

5. Найти норму функционала $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)=3\xi_1+4\xi_2$, если:

а) $A:l_1\to\mathbb{R}$,

б) $A:l_\infty\to\mathbb{R}$,

в) $A:l_2\to\mathbb{R}$,

где $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)$.

Решение: а) $\|A\|=\sup_{x\ne 0}\frac{|Ax|}{\|x\|}=\sup_{x\ne 0}\frac{|3\xi_1+4\xi_2|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}\le\sup_{x\ne 0}\frac{3|\xi_1|+4|\xi_2|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}\le\sup_{x\ne 0}\frac{4|\xi_1|+4|\xi_2|}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|}=$

$= 4\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|\xi_1|+|\xi_2|}{|\xi_1|+|\xi_2|+|\xi_3|+...}\leq 4$. С другой стороны, для некоторого $x_0 \neq 0$:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{\|x\|} \geq \frac{|Ax_0|}{\|x_0\|} = \frac{\left|3\xi_1^{(0)} + 4\xi_2^{(0)}\right|}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(0)}\right|} = \left|\begin{matrix} x_0 = (0,1,0,0,....) \\ x_0 \in l_1 \end{matrix}\right| = 4.$$

Из этих двух неравенств заключаем, что $\|A\| = 4$.

б) $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|3\xi_1 + 4\xi_2|}{\sup\limits_i|\xi_i|} \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{3|\xi_1| + 4|\xi_2|}{\sup\limits_i|\xi_i|} = \sup\limits_{x\neq 0}\left(3\cdot\dfrac{|\xi_1|}{\sup\limits_i|\xi_i|} + 4\cdot\dfrac{|\xi_2|}{\sup\limits_i|\xi_i|}\right) \leq$

$\leq 3 + 4 = 7$. С другой стороны, для некоторого $x_0 \neq 0$:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{\|x\|} \geq \frac{|Ax_0|}{\|x_0\|} = \frac{\left|3\xi_1^{(0)} + 4\xi_2^{(0)}\right|}{\sup\limits_i\left|\xi_i^{(0)}\right|} = \left|\begin{matrix} x_0 = (1,1,0,0,...) \\ x_0 \in l_\infty \end{matrix}\right| = 3 + 4 = 7.$$

Из этих двух неравенств заключаем, что $\|A\| = 7$.

в) $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|3\xi_1 + 4\xi_2|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|3\xi_1| + |4\xi_2|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \left|\begin{matrix}\text{неравенство} \\ \text{Гельдера при} \\ p = q = 2\end{matrix}\right| \leq$

$\leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\left(3^2 + 4^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 5\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + ...\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 5$. С другой стороны,

для некоторого $x_0 \neq 0$ $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax|}{\|x\|} \geq \dfrac{|Ax_0|}{\|x_0\|} = \dfrac{\left|3\xi_1^{(0)} + 4\xi_2^{(0)}\right|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(0)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \left|\begin{matrix} x_0 = (3,4,0,0,...) \\ x_0 \in l_2 \end{matrix}\right| = \dfrac{25}{\sqrt{25}} = 5.$

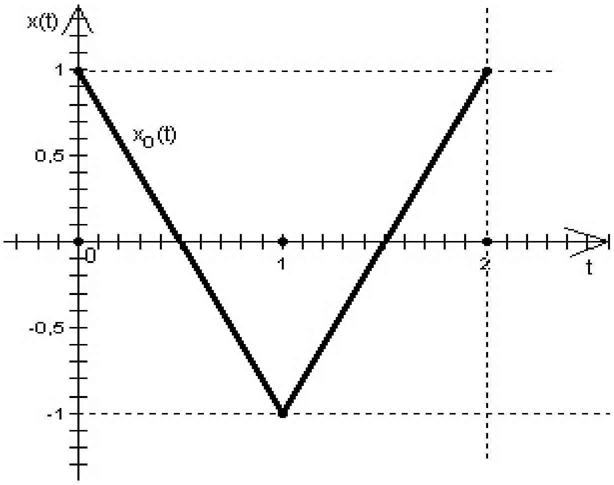
Из этих двух неравенств заключаем, что $\|A\| = 5$.

6. Найти норму функционала $Ax(t) = x(0) - 2x(1) + x(2)$, $A : C[0,2] \to \mathbb{R}$.

Решение: $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax(t)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|x(0) - 2x(1) + x(2)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x(t)|} \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|x(0)| + 2|x(1)| + |x(2)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x(t)|} =$

$= \sup\limits_{x\neq 0}\left(\dfrac{|x(0)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x(t)|} + 2\dfrac{|x(1)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x(t)|} + \dfrac{|x(2)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x(t)|}\right) \leq 1 + 2 + 1 = 4$. С другой стороны, для

некоторого $x_0 \neq 0$ $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax(t)|}{\|x\|} \geq \dfrac{|Ax_0(t)|}{\|x_0\|} = \dfrac{|x_0(0) - 2x_0(1) + x_0(2)|}{\sup\limits_{t\in[0,2]}|x_0(t)|}$.



Выберем непрерывную на отрезке $[0,2]$ функцию $x_0(t)$ так, чтобы $x_0(0)=1$, $x_0(1)=-1$, $x_0(2)=1$ и при этом $\sup\limits_{t\in[0,2]}|x_0(t)|=1$ (например, как на рисунке). Тогда $\|A\|\ge\dfrac{|1-2\cdot(-1)+1|}{1}=4$. Из этих двух неравенств заключаем, что $\|A\|=4$.

7. Найти норму оператора $A:C[0,1]\to C[0,1]$, если $Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}x(\tau)d\tau$.

Решение: $\|A\|=\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}x(\tau)d\tau\right|}{\|x\|}\le\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}|x(\tau)|d\tau}{\|x\|}$. Поскольку $\forall\tau\in[0,1]$ справедлива оценка $|x(\tau)|\le\sup\limits_{\tau\in[0,1]}|x(\tau)|=\|x\|$, то

$$\|A\|\le\sup_{x\ne0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}\|x\|d\tau}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\|x\|\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}d\tau}{\|x\|}=\sup_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}d\tau=$$

$$=\sup_{t\in[0,1]}\left(-\frac{1}{2}e^{3t-2}+\frac{1}{2}e^{3t}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\sup_{t\in[0,1]}e^{3t}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)e^3=\frac{1}{2}\left(e^3-e\right).$$

С другой стороны, для некоторого $x_0\ne0$:

$$\|A\|=\sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ge\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}=\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}x_0(\tau)d\tau\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0(t)|}=\left|\begin{matrix}x_0(t)\equiv1\\ x_0(t)\in C[0,1]\end{matrix}\right|=$$

$$=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}d\tau\right|=\sup_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 e^{3t-2\tau}d\tau=\frac{1}{2}\left(e^3-e\right).$$

Из этих двух неравенств заключаем, что $\|A\|=\dfrac{1}{2}\left(e^3-e\right)$.

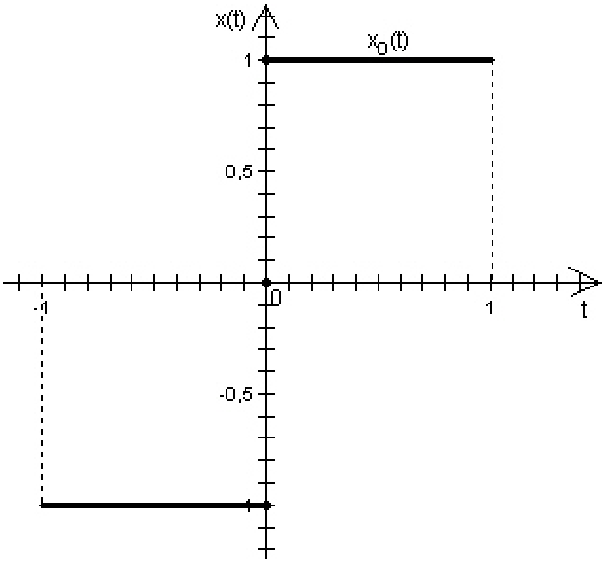
8. Вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_{-1}^1 tx(t)dt$.

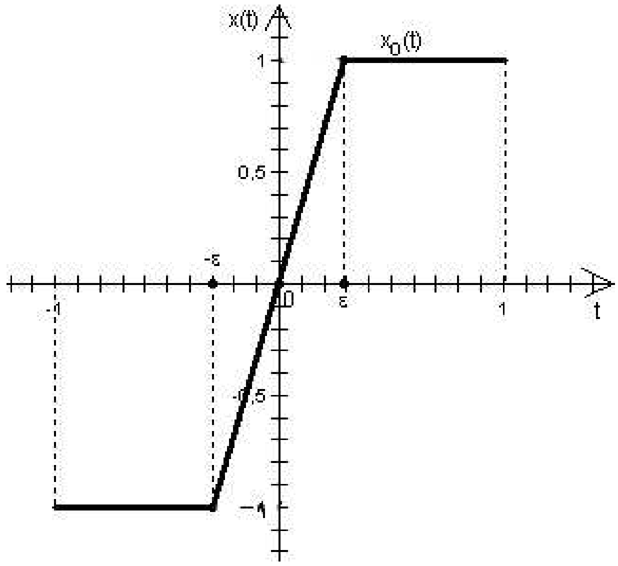
Решение: $\|f\|=\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\left|\int\limits_{-1}^1 tx(t)dt\right|}{\|x\|}\le\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\int\limits_{-1}^1|t||x(t)|dt}{\|x\|}\le\sup\limits_{x\ne0}\dfrac{\|x\|\int\limits_{-1}^1|t|dt}{\|x\|}=\int\limits_{-1}^1|t|dt=$

$$=\int_{-1}^{0}-tdt+\int_{0}^{1}tdt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$ С другой стороны, для некоторого $x_0\neq 0$

$$\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geq\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{\left|\int_{-1}^{1}tx_0(t)dt\right|}{\sup_{t\in[-1,1]}|x_0(t)|}.$$ Для получения неравенства $\|f\|\geq 1$ хотелось бы выбрать $x_0(t)=\begin{cases}-1, & -1\leq t<0,\\ 1, & 0<t\leq 1\end{cases}$ (см. рисунок слева), однако, такую функцию брать нельзя, поскольку она не является непрерывной, т.е. не принадлежит $C[-1,1]$.

Выберем в качестве $x_0(t)$ функцию, “близкую” к нужной, но являющуюся непрерывной, как, например, на рисунке справа. Ясно, что $\|x_0\|=1$.





$$\|f\|\geq\left|\int_{-1}^{-\varepsilon}-tdt+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}t\cdot x_0(t)dt+\int_{\varepsilon}^{1}tdt\right|=\left|-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}t\cdot x_0(t)dt+\frac{t^2}{2}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right|=\left|1-\varepsilon^2+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}t\cdot x_0(t)dt\right|.$$

Найдем уравнение прямой $x_0(t)$ на отрезке $[-\varepsilon,\varepsilon]$, зная, что она проходит через две точки $(0,0)$ и $(\varepsilon,1)$: $\frac{t-t_1}{t_2-t_1}=\frac{x_0(t)-x_0(t_1)}{x_0(t_2)-x_0(t_1)}$, откуда $x_0(t)=\frac{t}{\varepsilon}$. Тогда $\|f\|\geq\left|1-\varepsilon^2+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{t^2}{\varepsilon}dt\right|=\left|1-\varepsilon^2+\frac{t^3}{3\varepsilon}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\right|=\left|1-\varepsilon^2+\frac{2}{3}\cdot\varepsilon^2\right|=\left|1-\frac{1}{3}\cdot\varepsilon^2\right|$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем, что $\|f\|\geq 1$ и тогда, окончательно, из двух неравенств следует, что $\|f\|=1$.

9. Вычислить норму функционала $Ax(t)=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\cdot x(t^2)dt$, $A:L_2[0,1]\to\mathbb{R}$.

Решение: поскольку на отрезке $\left[0,1/2\right]$ функция t^2 монотонно возрастает, то можно в интеграле сделать замену переменной $t^2=\tau$. Тогда функционал перепишется в виде $Ax(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\cdot x(\tau)d\tau$.

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|Ax(\tau)|}{\|x\|}=\sup_{x\neq 0}\frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\cdot x(\tau)d\tau\right|}{\|x\|}\leq\frac{1}{2}\sup_{x\neq 0}\frac{\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\cdot|x(\tau)|d\tau}{\|x\|}\leq\left|\begin{array}{l}\text{неравенство}\\ \text{Гельдера при}\\ p=q=2\end{array}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sup_{x\neq 0}\frac{\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{4}}|x(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}{\|x\|}\leq\frac{1}{2}\sup_{x\neq 0}\frac{\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{1}|x(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}{\|x\|}=$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{x\neq 0}\frac{\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|}{\|x\|}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\tau}\Big|_0^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, для некоторого $x_0\neq 0$:

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|Ax(\tau)|}{\|x\|}\geq\frac{|Ax_0(\tau)|}{\|x_0\|}=\frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}\cdot x_0(\tau)d\tau\right|}{\sqrt{\int_0^1|x_0(\tau)|^2d\tau}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x_0(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[4]{\tau}}, & \tau\in\left[0,\frac{1}{4}\right],\\ 0, & \tau\in\left(\frac{1}{4},1\right]\end{cases}\\ x_0(\tau)\in L_2\left[0,1\right]\end{array}\right|=\frac{\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau\right|}{\sqrt{\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau}}=\frac{1}{2}.$$

Из двух неравенств следует, что $\|A\|=\frac{1}{2}$.

10. Вычислить норму функционала $Ax(t)=\int_0^{\frac{1}{2}}t^2\cdot x(t)dt$, если $A:L_1\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$.

Решение: $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax(t)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2\cdot x(t)dt\right|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2\cdot |x(t)|dt}{\|x\|} \le \left| t^2 \le \max\limits_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} t^2 = \dfrac{1}{4}\right| \le$

$$\le \sup_{x\neq 0}\frac{\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|dt}{\|x\|} \le \frac{1}{4}\sup_{x\neq 0}\frac{\int\limits_0^{1}|x(t)|dt}{\|x\|} = \frac{1}{4}\sup_{x\neq 0}\frac{\|x\|}{\|x\|} = \frac{1}{4}.$$

С другой стороны, для некоторого $x_0 \neq 0$:

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax(t)|}{\|x\|} \ge \frac{|Ax_0(t)|}{\|x_0\|} = \frac{\left|\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2\cdot x_0(t)dt\right|}{\int\limits_0^1 |x_0(t)|dt}.$$

I способ: выберем $x_0(t) = \begin{cases}(n+3)\cdot 2^{n+1}\cdot t^n, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$. Поясним, чем в данном случае можно руководствоваться: во-первых, как и в предыдущем примере, мы постарались, чтобы пределы интегрирования в числителе и знаменателе совпали. Во-вторых, функция $x_0(t)$ подобрана с таким расчетом, чтобы интеграл в числителе всегда был равен нужному нам значению $\dfrac{1}{4}$. Ясно, что при этом $x_0(t)\in L_1[0,1]$ для всякого $n\in\mathbb{N}$.

Поскольку $\int\limits_0^1 |x_0(t)|dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}(n+3)\cdot 2^{n+1}\cdot t^n dt = \dfrac{n+3}{n+1}$, то $\|A\| \ge \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{n+1}{n+3}\underset{n\to\infty}{\to}\dfrac{1}{4}$. Из полученных неравенств следует, что $\|A\| = \dfrac{1}{4}$.

II способ: в качестве $x_0(t)$ возьмем неотрицательную суммируемую на отрезке $[0,1]$ функцию, сосредоточенную в окрестности точки максимума функции t^2 на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$: $x_0(t) = \begin{cases}x_0(t), & t\in\left[\dfrac{1}{2}-\varepsilon,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$. Здесь $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$.

Тогда имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \cdot x_0(t)dt = \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^2 \cdot x_0(t)dt \ge \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x_0(t)dt = \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 \int_0^1 x_0(t)dt = \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 \|x_0\|.$$

Таким образом, $\|A\| \ge \dfrac{\left|\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \cdot x_0(t)dt\right|}{\|x_0\|} \ge \left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)^2$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $\|A\| \ge \dfrac{1}{4}$. Окончательно находим, что $\|A\| = \dfrac{1}{4}$.

11. Оценить сверху норму оператора $Ax(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+\tau)x(\tau)d\tau$, если $A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$.

Решение: $\|A\| = \sup\limits_{x\ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x\ne 0} \dfrac{\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |\sin(t+\tau)||x(\tau)|d\tau\right)^2 dt}}{\|x\|} \le \left|\begin{array}{l}\text{неравенство}\\ \text{Гельдера при}\\ p=q=2\end{array}\right| \le$

$$\le \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\left(\int_0^{2\pi} |\sin(t+\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |x(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 dt}}{\|x\|} =$$

$$= \sup_{x\ne 0} \frac{\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |\sin(t+\tau)|^2 d\tau \cdot \|x\|^2\right)dt}}{\|x\|} = \sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |\sin(t+\tau)|^2 d\tau\right)dt} = \pi\sqrt{2}.$$

Эта оценка является избыточной. Численные расчеты показывают, что $\|A\| \le \pi$, а достигается значение $\|A\| = \pi$ на элементе $x_0(t) = \sin t$.

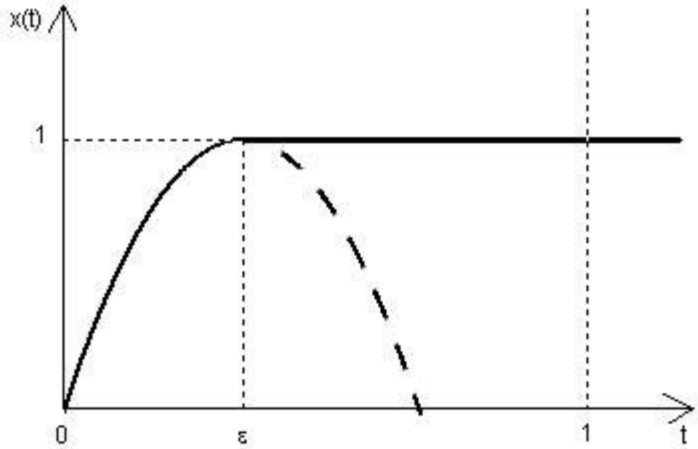
12. Найти норму функционала $f(x) = x'(0)$, если $f: C^{(1)}[0,1] \to \mathbb{R}$.

Решение: напомним, что пространство $C^{(1)}[0,1]$ – это множество непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$. Тогда

$$\|f\| = \sup_{x\ne 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0}\frac{|x'(0)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|} \le \left| |x'(0)| \le \sup_{t\in[0,1]}|x'(t)| \right| \le$$

$$\le \sup_{x\ne 0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|} \le \sup_{x\ne 0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|} = 1.$$

С другой стороны, для некоторого элемента $x_0(t) \in C^{(1)}\left[0,1\right]$ и $x_0(t) \neq 0$, получаем, что $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|x'(0)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|} \geq \dfrac{|x_0'(0)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0'(t)|}$. В качестве $x_0(t)$ выберем непрерывную функцию вида $x_0(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c, & t \in \left[0,\varepsilon\right] \\ 1, & t \in \left(\varepsilon,1\right] \end{cases}$, график которой изображен на рисунке сплошной линией ($0 < \varepsilon < 1$ – произвольно).



Важным является то, что вершина параболической части графика совпадает с точкой $(\varepsilon,1)$. Поясним, чем в данном случае можно руководствоваться. Во-первых, как обычно, стараемся выбирать функцию $x_0(t)$ так, чтобы $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0(t)| = 1$.

Во-вторых, учитываем, что для выполнения условия непрерывной дифференцируемости, производная функции $x_0(t)$ не должна иметь скачков ни в одной точке отрезка $\left[0,1\right]$, т.е. график функции $x_0(t)$ не должен иметь точек "излома". Наконец, если воспользоваться представлением о производной в точке, как об угловом коэффициенте касательной к графику функции в этой точке, то можно заметить, что $|x_0'(0)| = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0'(t)|$.

Найдем уравнение параболической части, зная ее вершину $(\varepsilon,1)$ и нули $(0,0)$ и $(2\varepsilon,0)$. Подставляя в общее уравнение параболы $x(t) = at^2 + bt + c$ последовательно эти три точки, и решая полученную систему уравнений, найдем коэффициенты $a = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, $b = \dfrac{2}{\varepsilon}$, $c = 0$.

Таким образом, $x_0(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varepsilon^2}t^2 + \dfrac{2}{\varepsilon}t, & t \in \left[0,\varepsilon\right] \\ 1, & t \in \left(\varepsilon,1\right] \end{cases}$. Ясно, что эта функция непрерывна во всех точках отрезка $\left[0,1\right]$ и дифференцируема во всех точках, поскольку $x_0'(t) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\varepsilon^2}t + \dfrac{2}{\varepsilon}, & t \in \left[0,\varepsilon\right] \\ 0, & t \in \left(\varepsilon,1\right] \end{cases}$ и при $t = \varepsilon$ производная не терпит разрыва, т.е. $x_0(t) \in C^{(1)}\left[0,1\right]$. Далее, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0(t)| = 1$, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_0'(t)| = \sup\limits_{t\in[0,\varepsilon]}\left|-\dfrac{2}{\varepsilon^2}t + \dfrac{2}{\varepsilon}\right| = \dfrac{2}{\varepsilon}$ и

$x_0'(0)=\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\|f\| \ge \dfrac{\frac{2}{\varepsilon}}{1+\frac{2}{\varepsilon}} = \dfrac{2}{\varepsilon+2}$. Наконец, при $\varepsilon \to 0$ получаем, что $\|f\| \ge 1$ и, окончательно, $\|f\| = 1$.

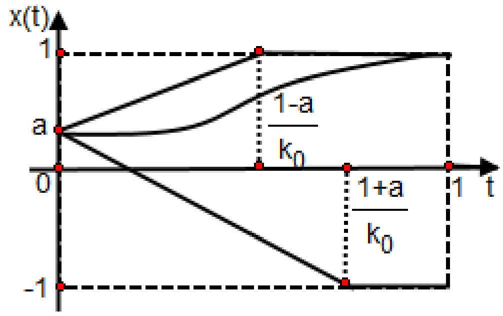
Также можно было выбирать $x_0(t)=\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2}, & t \notin [0,\varepsilon] \\ t-\dfrac{1}{2\varepsilon}t^2, t\in[0,\varepsilon] \end{cases}$ или $x_n(t)=\dfrac{1}{n}\sin nt$. Последняя функция построена из следующих соображений: производная в нуле и максимум производной на отрезке равны единице, а значения функции малы.

13. Пусть $0 \not\equiv f : X \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал и $M=\{x\in X : f(x)=1\}$. Доказать, что $\dfrac{1}{\|f\|}=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$.

Решение: поскольку f – линейный ограниченный функционал, то $\forall x\in X$ по определению нормы функционала $|f(x)| \le \|f\|\cdot\|x\|$. Следовательно, $\forall x\in M$ $1\le \|f\|\cdot\|x\|$, откуда $\dfrac{1}{\|f\|}\le\|x\|$, тем самым, $\dfrac{1}{\|f\|}\le\inf\limits_{x\in M}\|x\|$. В силу определения нормы функционала, для всякого $0<\varepsilon<\|f\|$ $\exists x_\varepsilon\in X : |f(x_\varepsilon)|>(\|f\|-\varepsilon)\cdot\|x_\varepsilon\|$. Пусть $x=\dfrac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}$, тогда $|f(x_\varepsilon)|>(\|f\|-\varepsilon)\cdot\|x\cdot f(x_\varepsilon)\|=(\|f\|-\varepsilon)\cdot\|x\|\cdot|f(x_\varepsilon)|$, откуда $\|x\|<\dfrac{1}{\|f\|-\varepsilon}$. При этом, поскольку $f(x)=f\left(\dfrac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}\right)=\dfrac{1}{f(x_\varepsilon)}f(x_\varepsilon)=1$, то такие $x\in M$, следовательно, $\inf\limits_{x\in M}\|x\|<\dfrac{1}{\|f\|-\varepsilon}$. Поскольку $\varepsilon>0$ – произвольно, то при $\varepsilon\to 0$ получаем, что $\inf\limits_{x\in M}\|x\|\le\dfrac{1}{\|f\|}$. Таким образом, $\dfrac{1}{\|f\|}=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$. Заметим, что $\inf\limits_{x\in M}\|x\|$ – это радиус минимального шара в пространстве X с центром в нуле, касающегося гиперплоскости M (геометрический смысл нормы функционала).

14. Найти норму функционала $f(x)=-2x(0)+\int\limits_0^1 x(t)dt$, $f : C^{(1)}[0,1]\to\mathbb{R}$.

Решение: будем рассматривать только ненулевые функции $x(t)\in C^{(1)}[0,1]$, для которых $\|x\|_C=1$ (легко видеть, что значения нормы любого линейного функционала на элементах x и $\dfrac{x}{\|x\|_C}$ одинаковы). Возьмем такую произвольную функцию $x(t)$ и пусть для нее $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|=k_0$. Ясно, что $\forall t\in[0,1]$ $|x'(t)|\le k_0$, откуда $\forall t\in[0,1]$ $-k_0\le x'(t)\le k_0$. Проинтегрируем это неравенство в пределах $[0,t]$, тогда получим, что $-k_0t+x(0)\le x(t)\le k_0t+x(0)$. Обозначим $x(0)=a\in[-1,1]$, тогда $\forall t\in[0,1]$ $-k_0t+a\le x(t)\le k_0t+a$. Кроме того, $\forall t\in[0,1]$ $-1\le x(t)\le 1$, поэтому, если функции k_0t+a и $-k_0t+a$ принимают значения, соответственно 1 и -1, в пределах отрезка $[0,1]$, то $\forall t\in[0,1]$ $\underline{x}(t)\le x(t)\le \overline{x}(t)$, где "предельные" для $x(t)$ функции – есть $\overline{x}(t)=\begin{cases}k_0t+a,\, t\in\left[0,\dfrac{1-a}{k_0}\right]\\ 1,\ t\in\left[\dfrac{1-a}{k_0},1\right]\end{cases}$ и $\underline{x}(t)=\begin{cases}-k_0t+a,\, t\in\left[0,\dfrac{1+a}{k_0}\right]\\ -1,\ t\in\left[\dfrac{1+a}{k_0},1\right]\end{cases}$.



При этом $\dfrac{1-a}{k_0}\le 1$ и $\dfrac{1+a}{k_0}\le 1$, и, складывая, получаем, что $\dfrac{2}{k_0}\le 2$, $k_0\ge 1$. Если же, например, первое из неравенств не выполнено, то $\overline{x}(t)=k_0t+a$ всюду на $[0,1]$.

Имеем: $-2\overline{x}(0)+\int\limits_0^1\underline{x}(t)dt\le -2x(0)+\int\limits_0^1 x(t)dt\le -2\underline{x}(0)+\int\limits_0^1\overline{x}(t)dt$. Далее, получаем $-2\underline{x}(0)+\int\limits_0^1\overline{x}(t)dt=-2a+\int\limits_0^{\frac{1-a}{k_0}}(k_0t+a)dt+\int\limits_{\frac{1-a}{k_0}}^1 dt=1-2a-\dfrac{(a-1)^2}{2k_0}$, и, аналогично, $-2\overline{x}(0)+\int\limits_0^1\underline{x}(t)dt=-1-2a+\dfrac{(a+1)^2}{2k_0}$. Найдем максимальное и минимальное значения полученных функций по $a\in[-1,1]$. Приравнивая их производные к нулю, получаем, что для первой функции $a=1-2k_0$, а для второй $a=2k_0-1$. В обоих случаях при $a\in[-1,1]$ получаем, что должно быть $0\le k_0\le 1$, поэтому внутренних экстремумов эти функции не имеют и своих максимального и минимального значений достигают на концах отрезка $[-1,1]$. Используя условие $k_0\ge 1$, получаем, что для первой функции максимальное значение равно $3-\dfrac{2}{k_0}$, а для второй минимальное значение равно $-3+\dfrac{2}{k_0}$. Таким образом, поскольку $\|x\|_{C^{(1)}}=1+k_0$, то $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}\le\dfrac{3-\frac{2}{k_0}}{1+k_0}$. Функция $\dfrac{3-\frac{2}{k_0}}{1+k_0}$ имеет точку максимума $k_0=\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}\ge 1$ и максимальное значение $7-2\sqrt{10}\approx 0{,}675$.

Пусть теперь $\frac{1-a}{k_0} \ge 1$ и $\frac{1+a}{k_0} \ge 1$, тогда $0 \le k_0 \le 1$, $\overline{x}(t) = k_0 t + a$, $\underline{x}(t) = -k_0 t + a$ всюду на отрезке $[0,1]$. Отсюда $-1-\frac{k_0}{2} \le -a-\frac{k_0}{2} \le f(x) \le -a+\frac{k_0}{2} \le 1+\frac{k_0}{2}$, поэтому $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \frac{1+\frac{k_0}{2}}{1+k_0} \le 1$, причем максимальное значение достигается при $k_0 = 0$.

Пусть $\frac{1-a}{k_0} \ge 1$, $\frac{1+a}{k_0} \le 1$, тогда $\frac{a-1}{k_0} \le -1$, и, складывая, получаем, что $a \le 0$. Тогда $-1-2a+\frac{(a+1)^2}{2k_0} \le f(x) \le 1+\frac{k_0}{2}$. Точка $a = 2k_0 - 1$ является точкой внутреннего минимума функции $-1-2a+\frac{(a+1)^2}{2k_0}$ при условии $-1 \le 2k_0 - 1 \le 0$, т.е. $0 \le k_0 \le \frac{1}{2}$. Тогда минимальное значение этой функции – есть $1-2k_0$. При этом $0 \le 1-2k_0 \le 1$, а $1+\frac{k_0}{2} \ge 1$, поэтому $|f(x)| \le 1+\frac{k_0}{2}$, $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \frac{1+\frac{k_0}{2}}{1+k_0} \le 1$.

Если же $k_0 \ge \frac{1}{2}$, то функция $-1-2a+\frac{(a+1)^2}{2k_0}$ внутренних экстремумов не имеет и достигает минимума в точке $a = 0$, поэтому $-1+\frac{1}{2k_0} \le f(x) \le 1+\frac{k_0}{2}$, $|f(x)| \le 1+\frac{k_0}{2}$, поскольку при $k_0 \ge \frac{1}{2}$ $\left|-1+\frac{1}{2k_0}\right| \le 1+\frac{k_0}{2}$. Отсюда $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \frac{1+\frac{k_0}{2}}{1+k_0} \le \frac{5}{6}$.

В случае $\frac{1-a}{k_0} \le 1$, $\frac{1+a}{k_0} \ge 1$ рассуждения аналогичны. Таким образом, для произвольной функции $x(t) \in C^{(1)}[0,1]$ получили $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1$, причем достигается это значение при $x(t) \equiv 1$, поэтому, окончательно, $\|f\| = 1$.

Данную задачу можно было решить другим способом (см. задачу 66).

15. Найти норму оператора $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ (оператор неопределенного интегрирования) в пространстве $L_2[0,1]$.

Решение: на интервале (0,1) справедливо неравенство $\cos\frac{\pi\tau}{2} > 0$. Применяя неравенство Гельдера и выполняя перестановку интегралов, получаем:

$$\|Ax\|^2=\int_0^1\left|\int_0^t x(\tau)d\tau\right|^2 dt\le\int_0^1\left(\int_0^t|x(\tau)|d\tau\right)^2 dt=\int_0^1\left(\int_0^t\sqrt{\cos\frac{\pi\tau}{2}}\frac{|x(\tau)|}{\sqrt{\cos\frac{\pi\tau}{2}}}d\tau\right)^2 dt\le$$

$$\le\int_0^1\left(\int_0^t\cos\frac{\pi\tau}{2}d\tau\int_0^t\frac{|x(\tau)|^2}{\cos\frac{\pi\tau}{2}}d\tau\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\sin\frac{\pi t}{2}\int_0^t\frac{|x(\tau)|^2}{\cos\frac{\pi\tau}{2}}d\tau\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\int_\tau^1\sin\frac{\pi t}{2}dt\right)\frac{|x(\tau)|^2}{\cos\frac{\pi\tau}{2}}d\tau=\frac{4}{\pi^2}\int_0^1|x(\tau)|^2d\tau=\frac{4}{\pi^2}\|x\|^2.$$

Таким образом, $\|A\|\le\frac{2}{\pi}$. Равенство достигается на элементе $x(t)=\cos\frac{\pi t}{2}$. Следовательно, $\|A\|=\frac{2}{\pi}$. Заметим, что стандартный способ оценивания сверху в данном случае дает завышенную оценку. Более универсальный способ вычисления норм интегральных операторов в пространстве L_2 дает спектральная теория.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $A:X\to Y$ – линейный оператор. Доказать, что множество значений $R(A)$ и ядро оператора $\ker A=\{x\in D(A):Ax=0\}$ являются линейными многообразиями.

2. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $A:X\to Y$ – линейный оператор, причем $D(A)=X$. Доказать, что если A непрерывен, то его ядро $\ker A$ замкнуто, а значит, является подпространством.

3. Доказать, что если A – ограниченный оператор, то он любое ограниченное множество $M\in X$ переводит в ограниченное множество $AM\in Y$.

4. Доказать, что если $A:X\to Y$ – линейный ограниченный оператор, то его норму можно вычислить по формулам $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y=\sup\limits_{\|x\|_X\le1}\|Ax\|_Y$.

Указание: $M\subset N\Rightarrow\sup M\le\sup N$ *и* $\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$.

5. Используя геометрический смысл нормы функционала (см. пример 13), вычислить норму функционала $f(x)=3\xi_1-4\xi_2$, заданного на пространстве $l_\infty^2=\left\{x=(\xi_1,\xi_2):\|x\|=\max\left(|\xi_1|,|\xi_2|\right)\right\}$.

6. Используя геометрический смысл нормы функционала (см. пример 13), вычислить норму функционала $f(x)=3\xi_1-4\xi_2$, заданного на пространстве $l_2^2=\left\{x=(\xi_1,\xi_2):\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2}\right\}$.

7. Найти норму функционала $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)=3\xi_1+4\xi_2$, если $A:l_3\to\mathbb{R}$, где $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in l_3$.

8. Вычислить норму функционала $A:C\left[-1,1\right]\to\mathbb{R}$, если при фиксированном $\varepsilon\in\left(0,1\right)$ $Ax(t)=\dfrac{x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)}{\varepsilon^2}$.

9. Вычислить норму оператора $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)=\left(0,\xi_1,0,0,...\right)$, если $A:l_1\to l_1$, где $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in l_1$.

10. Вычислить норму функционала $f(x)=\int\limits_0^\pi \cos t x(t)dt-x(0)+x(\pi)$, если $f:C\left[0,\pi\right]\to\mathbb{R}$.

11. Проверить, что для оператора из примера 11 $\|A\|=\pi$ на элементе $x_0(t)=\sin t$. Убедиться на нескольких конкретных примерах, что $\|A\|\le\pi$.

12. Оценить сверху норму оператора $Ax(t)=\int\limits_0^{2\pi}\cos(2t+3\tau)x(\tau)d\tau$, если $A:L_2\left[0,2\pi\right]\to L_2\left[0,2\pi\right]$.

13. На пространстве $L_2\left(0,1\right)$ задан функционал $f(x)=\int\limits_0^1\sin\frac{1}{t}\cdot x(t)dt$. Проверить, на всем ли пространстве определен этот функционал. Проверить его линейность и ограниченность. Если функционал ограничен, то найти его норму.

Указание: для ответа на первый вопрос применить неравенство Гельдера.

14. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^\pi x(1+\cos t)dt$ в пространстве $C\left[0,2\right]$.

15. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^\pi \sin 2t\cdot x(t)dt-x(0)+x(\pi)$ в пространстве $C\left[0,\pi\right]$.

16. На пространстве $L_2\left(0,1\right)$ задан функционал $f(x)=\int\limits_0^1\cos\frac{1}{t}\cdot x(t)dt$. Проверить, на всем ли пространстве определен этот функционал. Проверить его линейность и ограниченность. Если функционал ограничен, то найти его норму.

17. На пространстве $C\left[0,\pi\right]$ задан функционал $f(x)=\int\limits_0^\pi x(1+e^{-t})dt$. Проверить, на всем ли пространстве определен этот функционал. Проверить его линейность и ограниченность. Если функционал ограничен, то найти его норму.

18. На пространстве $C\left[0,2\right]$ задан функционал $f(x)=\int\limits_0^2(t^2-1)\cdot x(t)dt+x(0)-x(2)$. Проверить его линейность и ограниченность. Если функционал ограничен, то найти его норму.

19. На пространстве $L_2(0,1)$ задан функционал $f(x)=\int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{t}}\cdot x(t)dt$. Проверить, на всем ли пространстве определен этот функционал. Проверить его линейность и ограниченность. Если функционал ограничен, то найти его норму.

20. В пространстве $C[-1,1]$ найти норму функционала $f(x)=\frac{1}{3}\left[x(-1)+x(1)\right]$.

21. В пространстве $C[0,2]$ найти норму функционала $f(x)=2\left[x(1)-x(2)\right]$.

22. В пространстве $C[-1,1]$ найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x(t_k)$, где $t_k\in[-1,1]$ – фиксированные числа.

23. В пространстве $C[-1,1]$ найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}x(t)dt-x(0)$.

24. В пространстве $C[0,1]$ найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)dt$.

25. В пространстве $C[-1,1]$ найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}x(t)dt-\int\limits_0^1 x(t)dt$.

26. Проверить ограниченность в $C[0,1]$ функционала $f(x)=\int\limits_0^1 x\left(\sqrt{t}\right)dt$. Если функционал ограничен, то найти его норму.

27. Проверить ограниченность в $C[0,1]$ функционала $f(x)=\int\limits_0^1 x\left(t^2\right)dt$. Если функционал ограничен, то найти его норму.

28. Вычислить норму функционала $f:C^{(1)}[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_0^1 tx(t)dt$. Получить оценку сверху двумя способами.

Указание: второй способ – интегрирование по частям. Ответ: $\|f\|=\frac{1}{2}$.

29. Вычислить норму функционала $f:L_1[-1,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$.

30. Вычислить норму функционала $f:L_2[-1,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$.

31. Вычислить норму функционала $f:L_2[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}x(t)dt$.

32. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$ в пространстве l_2, где $x=\left(\xi_1,\xi_2,...\right)\in l_2$.

33. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$ в пространстве l_1, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_1$.

34. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^{k-1}}$ в пространстве c_0, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c_0$.

35. В пространстве $C[0,1]$ найти норму функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t dt$.

36. В пространстве $C[0,1]$ найти норму функционала $f(x)=-x\left(\frac{1}{2}\right)+\int_0^1 x(t)dt$.

37. Вычислить норму функционала $f:C[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}x(t)dt$.

38. Вычислить норму линейного оператора $A:C[0,1]\to C[0,1]$, если $Ax(t)=\int_0^1 \sin(\pi(t-s))x(s)ds$.

39. Вычислить норму оператора $A:C[0,1]\to C[0,1]$, если $Ax(t)=\int_0^t x(s)ds$.

40. Вычислить норму линейного оператора $A:L_1[0,1]\to L_1[0,1]$, $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$.

41. Вычислить норму линейного оператора $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, если $Ax(t)=\int_{-1}^{t} x(s)ds-\int_0^1 s\cdot x(s)ds$.

42. Вычислить норму оператора $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, если $Ax(t)=t\int_0^1 x(s)ds$.

Указание: доказать, что, если $Ax(t)=y(t)f(x):X\to Y$, *где* $y(t)\in X$, $f(x)$ *– линейный ограниченный функционал на пространстве* X, *то* $\|A\|=\|y\|\cdot\|f\|$. *Использовать определения нормы оператора и функционала.*

43. Будет ли ограниченным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, областью определения которого является линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций, если $Ax(t)=\frac{dx(t)}{dt}$.

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=\sin nt\in C[0,1]$, *где* $n\in\mathbb{N}$.

44. Найти норму оператора $Ax(t)=\frac{dx(t)}{dt}$, если $A:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$.

Указание: при оценке снизу выбрать $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin nt$.

45. Является ли функционал $f(x)=\int_0^1 t|x(t)|dt$ линейным и непрерывным в $C[0,1]$?

46. Является ли функционал $f(x)=\|x\|$ линейным и непрерывным в $C[0,1]$?

47. Является ли функционал $f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt$ линейным и непрерывным в $L_2[0,1]$?

48. Найти норму функционала $f(x)=\int_{-1}^1 x(t)dt+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$ в пространстве $C[-1,1]$ ($n\in\mathbb{N}$ фиксировано).

49. Найти норму функционала $f(x)=\int_{-1}^1 x(t)dt-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$ в пространстве $C[-1,1]$ ($n\in\mathbb{N}$ фиксировано).

50. Найти норму функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\operatorname{sign}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$ в пространстве $C[0,1]$.

51. Найти норму функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\operatorname{sign}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$ в пространстве $L_2[0,1]$.

52. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{k(k+1)}}$ в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$.

53. Показать, что оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$ является линейным и непрерывным и найти его норму, если $Ax(t)=\int_0^1 t^\alpha\tau^\beta x(\tau)d\tau$, $\alpha\ge 0, \beta>-1$.

54. Найти норму оператора правого сдвига $Ax=(0,\xi_1,\xi_2,...)$, если $A:l_2\to l_2$ и $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$.

55. Найти норму оператора левого сдвига $Ax=(\xi_2,\xi_3,...)$, если $A:l_2\to l_2$ и $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$.

56. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi_k$ в пространстве l_1, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_1$.

57. Найти норму функционала $f(x)=\xi_k$, где k – фиксировано в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$.

58. Найти норму функционала $f(x)=\xi_k-\xi_{k-1}$, где k – фиксировано в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$.

59. Найти норму функционала $f(x)=x(0)-x(-1)-x(1)$ в $C[-1,1]$.

60. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x(t)dt$ в пространстве $L_2[0,1]$.

61. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\cos\pi t dt$ в пространстве $C[0,1]$.

62. В пространстве $C[0,1]$ найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)dt-x(0)$.

63. Вычислить норму функционала $f:L_1[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}t^3x(t)dt$.

64. Найти норму оператора $A:C[0,1]\to C^{(1)}[0,1]$, если $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$.

65. Найти норму функционала $f(x)=x'(0)$, если $f:C^{(1)}[-1,1]\to\mathbb{R}$.

66. Найти норму функционала $f(x)=-2x(0)+\int\limits_0^1 x(t)dt$, $f:C^{(1)}[0,1]\to\mathbb{R}$.

Указание: представить $f(x)=-x(0)+\int\limits_0^1 x'(t)(1-t)dt$.

67. Оценить сверху норму оператора $Ax(t)=\int\limits_0^t e^t x(\tau)d\tau$, $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$.

68. Найти норму функционала $f:C^{(1)}[0,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\dfrac{x(1)}{3}-\dfrac{x(0)}{3}$.

Указание: $x(1)-x(0)=\int\limits_0^1 x'(t)dt$, $\|x'\|_C\geq|x(1)-x(0)|$, $\|x\|_C\geq\dfrac{|x(1)-x(0)|}{2}$. *При получении оценки снизу выбрать* $x(t)=2t-1$. *Ответ:* $\|f\|=\dfrac{2}{9}$.

69. Вычислить норму функционала $f:C^{(1)}[-1,1]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_{-1}^1 tx(t)dt$.

За норму в этом пространстве принять $\|x\|=\max\left\{\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|,\max\limits_{t\in[-1,1]}|x'(t)|\right\}$.

Указание: представить $f(x)=\int\limits_{-1}^1 x'(t)\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{t^2}{2}\right)dt$. *Ответ:* $\|f\|=\dfrac{2}{3}$.

70. Вычислить норму функционала $f: C^{(1)}\left[-1,1\right]\to\mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$. За норму в этом пространстве принять $\|x\|=\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[-1,1]}|x'(t)|$.

Указание: см. пример 14. Ответ: $\|f\|\approx 0{,}35$.

71. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} e^{-t}x(t)dt - x(-1): C^{(1)}\left[-1,1\right]\to\mathbb{R}$. За норму в этом пространстве принять $\|x\|=\max\left\{\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|, \max\limits_{t\in[-1,1]}|x'(t)|\right\}$.

Указание: воспользоваться формулой из задачи 4 и примером 14.

72. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} e^{-t}x(t)dt - x(-1): C^{(1)}\left[-1,1\right]\to\mathbb{R}$. За норму в этом пространстве принять $\|x\|=\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[-1,1]}|x'(t)|$.

73. Вычислить норму оператора $A:\left(x_1,x_2,...,x_k,...\right)\to\left(\frac{x_1}{2},\frac{2x_2}{3},...,\frac{kx_k}{k+1},...\right)$, $A: l_2\to l_2$ (диагональный оператор).

74. Установить ограниченность функционала $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$ над пространством $C\left[-1,1\right]$

Указание: доказать, что линейная комбинация линейных ограниченных функционалов, а также сходящийся по норме ряд, составленный из линейных ограниченных функционалов, представляют собой линейные ограниченные функционалы.

75. Является ли ограниченным функционал $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1} x(t^n)dt$ в пространстве $C\left[0,1\right]$?

76. Найти норму оператора $A: L_2\left[0,1\right]\to L_2\left[0,1\right]$, если $Ax(t)=t^2\int\limits_{0}^{1} x(t)dt$.

77. Найти норму оператора $A: C\left[0,1\right]\to C\left[0,1\right]$, если $Ax(t)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} t^k x(t_k)$, где $t_k\in\left[0,1\right]$ – фиксированные точки.

78. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 s\cos s x(s)ds$ в $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $L_1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $L_p\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

79. Рассмотрим линейные функционалы $f_\varepsilon(x)=\dfrac{x(\varepsilon)-x(-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ и $f_0(x)=x'(0)$, где $x(t)\in C^{(1)}\left[-1,1\right]$, $0<\varepsilon<1$. Доказать, что $\left\|f_\varepsilon\right\|\underset{\varepsilon\to0}{\to}\left\|f_0\right\|$.

Указание: показать, что $\left\|f_\varepsilon\right\|=\dfrac{1}{1+\varepsilon}$*. При получении оценки снизу выбрать* $x_{n\varepsilon}(t)=\begin{cases}t, & t\in\left[0,\varepsilon\right)\\ \varepsilon+(t-\varepsilon)-\dfrac{n}{2}(t-\varepsilon)^2, & t\in\left[\varepsilon,\varepsilon+\dfrac{1}{n}\right]\\ \varepsilon+\dfrac{1}{2n}, & t\in\left(\varepsilon+\dfrac{1}{n},1\right]\end{cases}$*, которая продолжается на множество* $t<0$ *нечетным образом.*

80. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^3(s^3-9s)x(s)ds$ в $C\left[0,3\right]$ и $L_1\left[0,3\right]$.

81. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^3(s^3-9s)x(s)ds$ в $C\left[-1,3\right]$ и $L_1\left[-1,3\right]$.

82. Найти норму функционала $f(x)=2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}x(s)ds-\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x(s)ds$ в $C\left[0,1\right]$ и $L_1\left[0,1\right]$.

83. Найти норму функционала $f(x)=\alpha x(0)+\beta\int\limits_0^1 x(t)dt$ в пространстве $C\left[0,1\right]$.

84. Найти норму функционала $f(x)=2\int\limits_0^{\frac{1}{3}}x(s)ds-\int\limits_{\frac{2}{3}}^1 x(s)ds$ в $C\left[0,1\right]$ и $L_1\left[0,1\right]$.

85. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}\xi_n$ в пространствах c_0 и l_∞.

86. Найти норму оператора $Ax(t)=\int\limits_1^2(2t+s)x(s)ds$, если $A:C\left[1,2\right]\to C\left[0,1\right]$, $A:L_1\left[1,2\right]\to C\left[0,1\right]$ и $A:L_1\left[1,2\right]\to L_1\left[0,1\right]$.

87. Найти норму оператора $Ax(t)=\int\limits_1^2(2t-s)x(s)ds$, если $A:C\left[1,2\right]\to C\left[0,1\right]$, $A:L_1\left[1,2\right]\to C\left[0,1\right]$ и $A:L_1\left[1,2\right]\to L_1\left[0,1\right]$.

88. Найти норму оператора $Ax(t)=\int\limits_0^t(t-s)x(s)ds$, если $A:C\left[0,\pi\right]\to C\left[0,\pi\right]$.

89. Найти норму оператора $Ax(t)=x\left(\frac{t^2}{2}\right)$, если $A:C[0,2]\to C[0,2]$ и $A:C[0,2]\to L_1[0,2]$.

90. Найти норму оператора $Ax=(\xi_2,\xi_3,\xi_1+\xi_2,\xi_4,\xi_5,...)$, если $A:l_1\to l_1$, и $A:l_\infty\to l_\infty$.

91. Найти норму оператора $Ax=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, если $A:l_p\to l_p$.

92. Найти норму оператора $Ax=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, если $A:l_p\to l_p$.

93. Найти норму оператора $Ax=\left(ne^{-\frac{n}{3}}\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, если $A:l_1\to l_1$.

94. Найти норму оператора $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$, если $A:L_p[a,b]\to L_p[a,b]$ и $\varphi(t)=\begin{cases}5\cos t,\, t\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ -3\sin t,\, t\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

95. Пусть H_1,H_2 – гильбертовы пространства, $A:H_1\to H_2$ – ограниченный оператор. Доказать, что $\|A\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|=1,x\in H_1\\ \|y\|=1,y\in H_2}}|(Ax,y)|$.

Указание: воспользоваться неравенством Коши-Буняковского и тем, что $\|Ax\|=\left(Ax,\frac{Ax}{\|Ax\|}\right)$.

96. Найти множество значений (образ) оператора $A:C[1,2]\to C[1,2]$, если $Ax(t)=x(t)-tx(1)$.

97. Найти множество значений (образ) оператора $A:C[0,2]\to C[0,1]$, если $Ax(t)=(1+t^2)x(2t)$.

99. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$ в пространстве $L_\infty[-1,1]$.

100. Найти норму функционала $f(x)=x'(1)-x'(-1)$ в пространстве $C^{(1)}[-1,1]$. Норму в пространстве принять стандартной (сумма максимумов).

Указание: $\|f\|=2$.

101. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}x(t)dt+x'(0)$ в пространстве $C^{(1)}[-1,1]$. Норму в пространстве принять стандартной (сумма максимумов).

Указание: $\|f\|=2$.

1.2. Пространство линейных ограниченных операторов

Определение: пусть $A, B : X \to Y$ – линейные ограниченные операторы, тогда их суммой называется оператор $A + B : X \to Y$ такой, что $\forall x \in X$ $(A+B)x = Ax + Bx$.

Определение: пусть $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, α – действительное или комплексное число, тогда произведением оператора A на число α называется оператор $\alpha A : X \to Y$ такой, что $\forall x \in X$ $(\alpha A)x = \alpha Ax$.

Теорема (свойства нормы оператора): число $\|A\|$ действительно определяет обычную норму, т.е.:

1. $\|A\| \ge 0$;
2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$, где 0 – нулевой оператор, т.е. $\forall x \in X$ $0x = 0$;
3. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;
4. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

Доказательство: отметим, что $\|Ax\|_Y$ и $\|x\|_X$ – это обычные нормы и для них аксиомы нормы выполняются.

1. Очевидно, т.к. дробь $\dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$ неотрицательна.

2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad x \ne 0 \quad \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad x \ne 0$ $\|Ax\|_Y = 0 \Leftrightarrow \forall x \ne 0\ Ax = 0$. Но, поскольку $A0 = 0$, то $A = 0$.

3. Очевидно, поскольку $|\lambda|$ выйдет из числителя дроби и за знак $\sup$.

4. Очевидно, т.к. к числителю применяется неравенство треугольника, верное для нормы в пространстве Y, а точная верхняя грань суммы не превосходит суммы точных верхних граней.

Теорема доказана.

Замечание: поскольку линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен, а сумма и произведение на число непрерывных функций всегда непрерывны, то сумма и произведение на число ограниченных операторов будут ограниченными операторами. Таким образом, множество линейных ограниченных операторов является линейным пространством. Поскольку норма в нем определена корректно, то оно является еще и нормированным. Пространство линейных ограниченных операторов обозначается $L(X,Y)$ или $L(X \to Y)$.

Теорема (о полноте пространства линейных ограниченных операторов): пусть X, Y – линейные нормированные пространства, тогда если пространство Y полно, то пространство $L(X,Y)$ также полно.

Доказательство: надо доказать, что $L(X,Y)$ полно, т.е. что любая фундаментальная последовательность элементов этого пространства имеет предел.

Пусть $A_n \in L(X,Y)$ – фундаментальная последовательность операторов, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n,m > N \ \ \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Возьмем $\forall x \in X$ и рассмотрим последовательность $\{A_n x\} \in Y$. Покажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве Y. Для этого перепишем исходное определение фундаментальности $\{A_n\}$ в виде $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n,m > N \ \ \|A_n - A_m\| < \dfrac{\varepsilon}{\|x\|}$ $(\forall x \neq 0)$.

Тогда $\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \dfrac{\varepsilon}{\|x\|} \cdot \|x\| = \varepsilon$. Таким образом последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в Y при рассматриваемом x. По условию пространство Y полно, значит эта последовательность имеет предел в пространстве Y. Обозначим его $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$, $Ax \in Y$. Осталось проверить, что A является линейным ограниченным оператором и что $A_n \overset{L(X,Y)}{\to} A$.

1. Линейность:

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(A_n x + A_n y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + Ay.$$

С множителем λ проверка аналогичная.

2. Ограниченность: пусть $n,m > N$, тогда

$$\|A_n x\| = \|A_n x - A_m x + A_m x\| \leq \|A_n x - A_m x\| + \|A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| + \|A_m x\| \leq$$
$$\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| + \|A_m\| \cdot \|x\| < \left(\varepsilon + \|A_m\|\right) \cdot \|x\|.$$

Фиксируя m получим в скобках константу $c > 0$, т.е. $\|A_n x\| < c\|x\|$. Поскольку $A_n x \to Ax$, то $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ и, переходя в неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\|Ax\| \leq c\|x\|$, т.е. A – ограничен.

3. Надо доказать, что $A_n \overset{L(X,Y)}{\to} A$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ \|A_n - A\|_{L(X,Y)} < \varepsilon$.

В силу фундаментальности $\forall n,m > N \ \ \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, учитывая, что $A_m x \to Ax$, получим, что $\|A_n x - Ax\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot \|x\|$. Тогда $\forall x \neq 0 \ \ \dfrac{\|A_n x - Ax\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, значит, $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|(A_n - A)x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ и, окончательно, $\|A_n - A\|_{L(X,Y)} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Замечание: из доказанной теоремы следует, что пространство линейных ограниченных функционалов всегда является полным (даже если пространство X не полно).

Определение: пространство линейных ограниченных функционалов, определенных на пространстве X, называется сопряженным пространству X и обозначается X^*.

Определение: пусть $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$, тогда сложная функция $B(A(x))$ называется произведением операторов и обозначается $BA(x)$.

Теорема (об ограниченности произведения): пусть X, Y, Z – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$ – линейные ограниченные операторы, тогда их произведение $BA: X \to Z$ также является линейным ограниченным оператором и справедливо неравенство $\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$.

Доказательство: линейность очевидна.

$$\|BA\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|BAx\|_Z}{\|x\|_X} = \sup_{x \ne 0} \frac{\|BAx\|_Z}{\|Ax\|_Y} \cdot \underbrace{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}}_{\le \|A\|} \le \|A\| \cdot \sup_{x \ne 0} \frac{\|BAx\|_Z}{\|Ax\|_Y} =$$

$$= \|A\| \cdot \sup_{\substack{y \ne 0 \\ y = Ax}} \frac{\|By\|_Z}{\|y\|_Y} \le \|A\| \cdot \sup_{\substack{y \ne 0 \\ y \in Y}} \frac{\|By\|_Z}{\|y\|_Y} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Из этого неравенства, в частности, следует и ограниченность произведения.

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим операторы $A, B: C[0,1] \to C[0,1]$, такие, что $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ и $Bx(t) = tx(t)$. Показать, что $\|AB\| < \|A\| \cdot \|B\|$.

2. Проверить, что операторы $A, B: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, где $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ и $Bx(t) = tx(t)$ линейны и непрерывны, но не перестановочны, т.е. $AB \ne BA$.

3. Найти n-ю степень оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$, задаваемого формулой $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$, $t \in [0,1]$.

Указание: применить интегрирование по частям.

4. Доказать, что оператор $Ax(t) = tx(t)$, $A: C\left[0, \frac{1}{2}\right] \to C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ линеен и ограничен. Найти $A^k x(t)$, $\|A\|$, $\|A^k\|$.

1.3. Последовательности операторов

Определение: последовательность операторов $\{A_n\}\subset L(X,Y)$ называется равномерно сходящейся к оператору $A\in L(X,Y)$, если $\|A_n-A\|\to 0$ при $n\to\infty$. Обозначение: $A_n\rightrightarrows A$ при $n\to\infty$.

Замечание: такую сходимость называют еще сходимостью по норме в пространстве $L(X,Y)$.

Определение: последовательность операторов $\{A_n\}\subset L(X,Y)$ называется поточечно сходящейся к оператору $A\in L(X,Y)$, если $\forall x\in X\ \ \|A_nx-Ax\|\to 0$ при $n\to\infty$. Обозначение: $A_n\to A$ при $n\to\infty$.

Замечание: поточечную сходимость еще называют сильной сходимостью.

Теорема (о связи равномерной и поточечной сходимостей): пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $\{A_n\},A:X\to Y$ – линейные ограниченные операторы, тогда из условия $A_n\rightrightarrows A$ следует, что $A_n\to A$.

Доказательство: предлагается проделать самостоятельно (см. задачу 1).

Замечание: из поточечной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов может не следовать ее равномерная сходимость.

Теорема (о сходимости произведения операторов): если $\{A_n\},A\in L(X,X)$, $\{B_n\},B\in L(X,X)$ и $A_n\rightrightarrows A$, $B_n\rightrightarrows B$, то $A_nB_n\rightrightarrows AB$.

Доказательство: поскольку $A_n\rightrightarrows A$ и $B_n\rightrightarrows B$, то $\|A_n-A\|\to 0$ и $\|B_n-B\|\to 0$. Кроме того, поскольку $\|A_n-A\|\ge\big|\,\|A_n\|-\|A\|\,\big|$, то $\|A_n\|-\|A\|\to 0$, т.е. $\|A_n\|\to\|A\|$, и, значит, числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена. Далее,

$$\|A_nB_n-AB\|=\|A_nB_n-A_nB+A_nB-AB\|\le\|A_nB_n-A_nB\|+\|A_nB-AB\|=$$
$$=\|A_n(B_n-B)\|+\|(A_n-A)B\|\le\|A_n\|\cdot\|B_n-B\|+\|A_n-A\|\cdot\|B\|.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\|A_nB_n-AB\|\to 0$, откуда $A_nB_n\rightrightarrows AB$.

Теорема доказана.

Теорема (принцип равномерной ограниченности): пусть X,Y – линейные нормированные пространства, причем X – банахово. Пусть задана последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}:X\to Y$ и пусть $\forall x\in X$ последовательность $\{A_nx\}$ ограничена в пространстве Y (константой, которая может зависеть от x), тогда $\exists c>0$: $\|A_n\|\le c$.

Замечание: теорема остается справедливой, если вместо ограниченности последовательности $\{A_nx\}$ в каждой точке $x\in X$ потребовать поточечную сходимость последовательности A_n, либо фундаментальность последовательности $\{A_nx\}$ в каждой точке x.

Доказательство: 1. Докажем, что можно найти хотя бы один замкнутый шар B и константу M, что множество $\{A_n x\}$ на этом шаре ограничено этой константой, т.е. $\forall x \in B \ \ \forall n$: $\|A_n x\| \le M$. От противного: допустим, что это не так, т.е. $\forall c$ и $\forall B \ \exists x \in B \ \exists n$: $\|A_n x\| > c$.

Возьмем $c_1 = 1$ и шар B_1. Тогда можно найти точку $x_1 \in B_1$ и число n_1 такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. Операторы A_n ограничены, и поэтому непрерывны по теореме об эквивалентности непрерывности и ограниченности линейного оператора. Тогда по теореме об устойчивости строгого неравенства (из математического анализа), неравенство $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ сохранится в некоторой окрестности точки x_1. Окрестность – это открытый шар. Уменьшив радиус, можно выбрать в ней замкнутый шар, и можно считать, что его радиус меньше $\frac{1}{2}$. Обозначим его B_2, тогда его радиус $R_2 < \frac{1}{2}$ и $\forall x \in B_2 \ \|A_{n_1} x\| > 1$. Далее, возьмем $c_2 = 2$ и шар B_2, тогда $\exists x_2 \in B_2 \ \exists n_2 > n_1$ (конечное число операторов $\{A_n\}_{n=1}^{n_1}$ можно отбросить): $\|A_{n_2} x_2\| > 2$. Аналогично, неравенство сохранится в некоторой окрестности точки x_2 (открытом шаре). Уменьшим его радиус так, чтобы шар стал замкнутым, а радиус стал меньше $\frac{1}{3}$ и при этом, чтобы он целиком лежал в B_2. Обозначим этот шар B_3, тогда $B_3 \subset B_2$, $R_3 < \frac{1}{3}$ и $\forall x \in B_3 \ \|A_{n_2} x\| > 2$. Аналогично, найдем замкнутый шар $B_4 \subset B_3$, радиуса $R_4 < \frac{1}{4}$ такой, что $\forall x \in B_4 \ \|A_{n_3} x\| > 3$. И т.д. По построению получили последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Эти шары лежат в полном пространстве X, значит по теореме о вложенных шарах, они имеют единственную общую точку. Обозначим ее x. Поскольку она принадлежит всем шарам, то в ней выполнены все неравенства $\|A_{n_1} x\| > 1$, $\|A_{n_2} x\| > 2$, $\|A_{n_3} x\| > 3$,..., т.е. последовательность $\{A_n x\}$ получилась для этой точки x неограниченной, а по условию она ограничена $\forall x$. Противоречие.

2. Обозначим a – центр найденного шара B, R – его радиус. В силу п. 1 $\forall x \in B \ \|A_n x\| \le M$ для всех n. Далее, $\forall \xi \in X \setminus \{0\}$ очевидно $x = a + \frac{\xi}{\|\xi\|} R \in B$, поэтому $\|A_n \xi\| = \left\| A_n \left(\frac{x-a}{R} \|\xi\| \right) \right\| = \left\| \frac{1}{R} A_n x - \frac{1}{R} A_n a \right\| \|\xi\| \le \frac{1}{R} \left(\|A_n x\| + \|A_n a\| \right) \|\xi\| \le \frac{2M}{R} \|\xi\| = c \|\xi\|$, откуда $\|A_n\| = \sup\limits_{\xi \ne 0} \frac{\|A_n \xi\|}{\|\xi\|} \le c$.

Теорема доказана.

Теорема Банаха-Штейнгауза: пусть X – банахово пространство. Для того чтобы последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}: X \to Y$ поточечно сходилась к линейному ограниченному оператору $A: X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы:

1. Последовательность $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;

2. $A_n x \to Ax$ для любого $x \in M$, где M – множество, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в X.

Доказательство: пусть $\{A_n\}: X \to Y$ сходится к $A: X \to Y$ поточечно, тогда:

1. Следует из принципа равномерной ограниченности (см. замечание к нему).

2. Очевидно.

Обратно: пусть выполнены условия 1 и 2, $c = \sup\limits_n \|A_n\|$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|A_n\| \le c$, $L(M)$ – линейная оболочка множества M. Поскольку $\{A_n\}, A$ – линейны, то в силу п. 2 $\forall x \in L(M)$ $A_n x \to Ax$, т.е. $\forall x \in L(M)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\|A_n x - Ax\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $L(M)$ – всюду плотно в X, то $\forall \xi \in X$ $\xi \notin L(M)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in L(M)$: $\|\xi - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(c + \|A\|\right)}$.

Тогда $\|A_n\xi - A\xi\| = \|A_n\xi - A_n x + A_n x - Ax + Ax - A\xi\| \le \|A_n\xi - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| + {}$ $+ \|Ax - A\xi\| \le \|A_n\| \cdot \|\xi - x\| + \|A_n x - Ax\| + \|A\| \cdot \|x - \xi\| = \|\xi - x\|\left(\|A_n\| + \|A\|\right) + \|A_n x - Ax\| <$ $< \dfrac{\varepsilon}{2\left(c + \|A\|\right)}\left(c + \|A\|\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, откуда $\forall \xi \in X$ $\|A_n\xi - A\xi\| \to 0$, т.е. $A_n\xi \to A\xi$.

Теорема доказана.

Теорема (о поточечном пределе последовательности операторов): пусть X – банахово пространство, $\{A_n\}: X \to Y$ – последовательность линейных ограниченных операторов. Пусть эта последовательность поточечно сходится к некоторой функции $A(x)$, тогда A – также линейный ограниченный оператор.

Доказательство: по условию $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$.

1. Линейность.

а) $A(x + y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x + y) = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n x + A_n y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x + \lim\limits_{n\to\infty} A_n y = A(x) + A(y)$.

б) $A(\lambda x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda A_n(x) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = \lambda A(x)$.

2. Ограниченность. Поскольку $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$, то, в частности, этот предел существует и, значит, $\forall x \in X$ последовательность $\{A_n(x)\}$ ограничена. Тем самым выполнены условия принципа равномерной ограниченности, согласно которому $\exists c > 0$: $\|A_n\| \le c$. Тогда, поскольку любая норма – непрерыв-

ная функция, то $\|A(x)\| = \left\|\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)\right\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n(x)\| \le \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|\cdot\|x\| \le c\|x\|$, и, таким образом, A ограничен.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

(исследование последовательностей операторов на сходимость)

1. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(l_2, l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x = \left(\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_2}{n}, \ldots, \frac{\xi_k}{n}, \ldots\right)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

Решение: при $n \to \infty$, покоординатно $A_n x \to (0,0,\ldots) = 0x$. Проверим, будет ли эта сходимость равномерной:

$$\|A_n - 0\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|A_n x - 0x\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne 0}\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^2}{n^2}}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}} = \frac{1}{n}\sup_{x\ne 0}\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}} = \frac{1}{n} \to 0,$$

таким образом, указанная последовательность операторов сходится к нулевому оператору равномерно, а значит и поточечно.

2. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(l_2, l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0\ldots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$.

Решение: при $n \to \infty$, покоординатно $A_n x \to (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots) = Ix$, где I – тождественный оператор (т.е. $\forall x \;\; Ix = x$). Проверим, будет ли эта сходимость равномерной: $\|A_n - I\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{\|A_n x - Ix\|}{\|x\|} \ge \frac{\|A_n x_n - Ix_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2}} = \left| x_n = (0,\ldots,0,\underset{n+1}{1},0,\ldots)\right| = 1$,

значит, последовательность $\{A_n\}$ не сходится к I равномерно. Выясним, сходится ли $\{A_n\}$ к I поточечно. Берем $\forall x \in l_2$, тогда $\|A_n x - Ix\| = \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2} \to 0$, как остаток сходящегося ряда. Значит, $A_n \to I$.

3. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t) = t^n(1-t)x(t)$, где $\{A_n\} \subset L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$, на равномерную и поточечную сходимость.

Решение: поскольку $\forall x(t) \in C[0,1] \;\; A_n x(t) \to 0 = 0x(t)$, то проверим равномерную сходимость: $\|A_n - 0\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{\|A_n x - 0x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n(1-t)x(t)\right|}{\|x\|} \le$

$\le \sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|x\|\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)}{\|x\|}=\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)$. Найдем $\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)$. Для этого обозначим $f(t)=t^n(1-t)$ и заметим, что в концах отрезка данная функция принимает нулевые значения, т.е. наибольшее ее значение достигается в критической точке.

Поскольку $f'(t)=nt^{n-1}(1-t)-t^n=t^{n-1}(n-nt-t)=0$, то $t=\dfrac{n}{n+1}\in[0,1]$, тогда $\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ и $\|A_n-0\|\le\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\to 0$, т.е. последовательность операторов сходится равномерно и поточечно.

4. Исследовать последовательность операторов $A_nx(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau$, где $\{A_n\}\subset L\big(C[0,1],C[0,1]\big)$, на равномерную и поточечную сходимость.

Замечание: значения $x\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n>N\in\mathbb{N}$ получаются продолжением функции $x(t)$ непрерывным образом (та же зависимость $x(t)$, что и на $[0,1]$).

Решение: пусть $F(t)$ – первообразная для $x(t)$, тогда $A_nx(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau=$

$$=nF(\tau)\Big|_t^{t+\frac{1}{n}}=\frac{F\left(t+\frac{1}{n}\right)-F(t)}{\frac{1}{n}}=\begin{vmatrix}\frac{1}{n}=m\\ m\to 0\end{vmatrix}=\frac{F(t+m)-F(t)}{m}\underset{m\to 0}{\to}F'(t)=x(t)=Ix(t).$$ Исследуем поточечную сходимость $\{A_n\}$ к I.

Легко видеть, что $\|A_n\|\le 1$ и $A_n(1)=1=I(1)$, $A_n(t^{k-1})\underset{n\to\infty}{\overset{C[0,1]}{\to}}t^{k-1}=I(t^{k-1})$, $k>1$. Поскольку, в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, линейные комбинации функций $\{1,t,t^2,...\}$ всюду плотны в $C[0,1]$, то, по теореме Банаха-Штейнгауза, последовательность $A_nx(t)$ сходится к единичному оператору поточечно. Проверим равномерную сходимость:

$$\|A_n-I\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\|A_nx-Ix\|}{\|x\|}\ge\frac{\|A_nx_n-Ix_n\|}{\|x_n\|}=\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}x_n(\tau)d\tau-x_n(t)\right|}{\|x_n\|}=$$

$$=\begin{vmatrix}x_n(t)=t^{n-1},\ (n\ge 2)\\ \|x_n\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^{n-1}\right|=1\end{vmatrix}=\sup_{t\in[0,1]}\left|n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}\tau^{n-1}d\tau-t^{n-1}\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\tau^n\Big|_t^{t+\frac{1}{n}}-t^{n-1}\right|=$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left|\left(t+\frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1}\right| = \sup_{t\in[0,1]}\left|t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1}\right| =$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n}\right| \geq \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2}\right| = \frac{n-1}{2n} > \frac{1}{3} \text{ при } n > 3,$$

значит, равномерно данная последовательность не сходится.

5. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t) = t^n x(t)$, где $\{A_n\} \subset L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$, на равномерную и поточечную сходимость.

Решение: для произвольной фиксированной функции $x_0(t) \in C[0,1]$ $t^n x_0(t) \to \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ x_0(1), & t = 1 \end{cases}$, поэтому при $x_0(1) \neq 0$ получаем, что последовательность функций $t^n x_0(t)$ сходится отрезке $[0,1]$ поточечно к разрывной функции, поэтому равномерно на отрезке $[0,1]$ сходиться не может.

Если $A_n x(t) \to Ax(t)$, то, в частности $\|A_n x_0(t) - Ax_0(t)\| \to 0$, откуда получаем, что $A_n x_0(t) \overset{t\in[0,1]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} Ax_0(t)$ – противоречие. Таким образом, последовательность операторов не может поточечно (и равномерно) сходиться в $L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$.

6. Пусть X – банахово пространство, $A \in L(X,X)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}$) – сходящийся на всем $\mathbb{R}$ степенной ряд. Доказать, что последовательность $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ имеет при $n \to \infty$ предел $\varphi(A) \in L(X,X)$. При каком условии на числовую последовательность $\{\lambda_k\}$ выполняется оценка $\|\varphi(A)\| \leq \varphi\big(\|A\|\big)$?

Решение: заметим, что $A^0 = I$, и, кроме того, по теореме об ограниченности произведения $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Зададим оператор $\varphi(A)$ формальным соотношением $\varphi(A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x \quad \forall x \in X$. Необходимо установить корректность этой формулы, т.е., что ряд, стоящий справа, сходится в пространстве X.

Согласно критерию полноты линейного пространства в терминах рядов, в банаховом пространстве всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, поэтому достаточно проверить абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$.

Поскольку $\|\lambda_k A^k\| \leq |\lambda_k| \cdot \|A\|^k$, а степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ сходится на $\mathbb{R}$, то он сходится и абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \cdot \|A\|^k$, поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ сходится абсолютно. Таким образом, указанный ряд сходится в пространстве X, и оператор $\varphi(A)x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x$ действительно задан корректно. Т.к. $A\in L(X,X)$, то A – линеен и ограничен, откуда очевидным образом устанавливается, что оператор $\varphi(A)$ также линеен. Далее, $\forall x\in X$

$$\|\varphi(A)x\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\left\|A^k\right\|\cdot\|x\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\cdot\|x\|=c\|x\|,$$

таким образом, $\varphi(A)$ ограничен. Итак, $\varphi(A)\in L(X,X)$.

Покажем, что $S_n(A)\rightrightarrows\varphi(A)$ при $n\to\infty$ в $L(X,X)$:

$$\|S_n(A)-\varphi(A)\|=\sup_{x\ne0}\frac{\|S_n(A)x-\varphi(A)x\|}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k A^k x-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}=$$

$$=\sup_{x\ne0}\frac{\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}\le\sup_{x\ne0}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\|x\|}{\|x\|}=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

как остаток сходящегося ряда. Далее,

$$\|\varphi(A)\|=\sup_{x\ne0}\frac{\|\varphi(A)x\|}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}\le\sup_{x\ne0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\|x\|}{\|x\|}=\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k,$$

откуда $\varphi\left(\|A\|\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\|A\|^k=\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\ge\|\varphi(A)\|$ при $\lambda_k\ge0\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Примеры решения задач

(принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейнгауза)

1. Доказать, что если последовательность $\beta=(\beta_n)$, такова, что $\alpha\cdot\beta\in l_1$ для всех $\alpha=(\alpha_n)\in l_p$, то $\beta\in l_q$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Решение: пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...)\in l_p$ – произвольный вектор. Зафиксируем номер $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим в l_p функционал $f_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k$, который, очевидно, является линейным. Применим неравенства Гельдера: $|f_n(\alpha)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|\le$ $\le\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|\alpha\|_{l_p}$, поэтому функционал f_n ограничен в l_p. Таким образом, $\|f_n\|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. С другой стороны, найдется элемент $\gamma \neq 0$ такой, что $\|f_n\| = \sup\limits_{\alpha \neq 0} \dfrac{|f_n(\alpha)|}{\|\alpha\|_{l_p}} \geq \dfrac{|f_n(\gamma)|}{\|\gamma\|_{l_p}}$.

Возьмем $\gamma = \left(|\beta_1|^{q-1} \operatorname{sign}\beta_1, |\beta_2|^{q-1} \operatorname{sign}\beta_2, ..., |\beta_n|^{q-1} \operatorname{sign}\beta_n, 0, 0, ...\right)$.

Тогда $\|\gamma\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left| |\beta_k|^{q-1} \operatorname{sign}\beta_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left| \begin{matrix} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ (q-1)p = q \end{matrix} \right| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$.

Кроме того, $|f_n(\gamma)| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \beta_k \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^{q-1} \operatorname{sgn}\beta_k \cdot \beta_k \right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q$, откуда получаем, что $\|f_n\| \geq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Таким образом, $\|f_n\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

Далее, поскольку по условию $\alpha \cdot \beta \in l_1$, то для любой точки α и для любого n $|f_n(\alpha)| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k \beta_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k| < +\infty$, т.е. последовательность $\{f_n(\alpha)\}$ ограничена в каждой точке α. В силу принципа равномерной ограниченности последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена. Поскольку $\|f_n\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$, то получаем, что все частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q$ ограничены сверху. В силу критерия Вейерштрасса, этот ряд сходится, что и означает, что $\beta \in l_q$.

2. Пусть задан числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – его частичная сумма, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ – некоторая неубывающая последовательность положительных чисел и $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$. Показать, что формулой $\omega_n = \dfrac{1}{P_n} \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1} S_k$ определяется регулярный метод суммирования тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = 0$.

Решение: метод суммирования называется регулярным, если ряд, имея в обычном смысле сумму, равную a, имеет обобщенную сумму, также равную a. Другими словами, если $S_n \to a$, то и $\omega_n \to a$.

Рассмотрим пространство c и в нем функционалы $f_n(x) = \dfrac{1}{P_n} \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \xi_k$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1} = P_n$, а функционалы f_n линейны. Поскольку $\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\xi_k\right| \le \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\left|\xi_k\right| \le$ $\le \sup\limits_{1\le k\le n}\left|\xi_k\right| \cdot \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left|\xi_k\right| = \|x\|_c$, то функционалы f_n ограничены. Таким образом, $\|f_n\| \le 1$ и последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена. Выполнено условие 1 теоремы Банаха-Штейнгауза.

Далее, найдется вектор $x_0 \in c$, $x_0 \ne 0$ такой, что

$$\|f_n\| = \sup_{x\ne 0}\frac{|f_n(x)|}{\|x\|_c} \ge \frac{|f_n(x_0)|}{\|x_0\|_c} = \frac{\left|\frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\xi_k^{(0)}\right|}{\sup\limits_{k}\left|\xi_k^{(0)}\right|} = \left|x_0 = (1,1,1,...)\right| = 1,$$

откуда, $\|f_n\| = 1$. Поскольку $\left|f(x)\right| = \left|\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\xi_n\right| \le \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|\xi_n\right| = \|x\|_c$, то f также линеен и ограничен.

Рассмотрим векторы $e_k = (0,0,...,0,\underset{k}{1},0,...) \in c$. Ясно, что $f_n(e_k) = \frac{p_{n-k+1}}{P_n}$ при $k \le n$. Поскольку условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n} = 0$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}}{P_n} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n} = 0$ эквивалентно условию $f_n(e_k) \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, очевидно, что $f(e_k) = 0$, и, тем самым, $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_n(e_k) \to f(e_k)$ при $n \to \infty$. Кроме этого, $f_n(x_0) = \frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1} = 1 \to 1 = f(x_0)$. Из задачи 19 следует, что любой элемент $x \in c$ является пределом линейных комбинаций элементов $x_0, e_1, e_2, ...$, т.е. указанные линейные комбинации всюду плотны в c. Таким образом, выполнено условие 2 теоремы Банаха-Штейнгауза. Следовательно, условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n} = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\forall x \in c$ $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a < +\infty$. Рассмотрим вектор $\overline{x} = (S_1, S_2, ..., S_n, ...) \in c$. Поскольку $f_n(\overline{x}) = \frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-k+1}S_k$ и $\forall x \in c$ $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$, то $\omega_n = f_n(\overline{x}) \to f(\overline{x}) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$. Таким образом, метод суммирования является регулярным.

3. Пусть $a_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Показать, что существует последовательность $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой выполнены условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n$ расходится.

Решение: в пространстве c_0 последовательностей, сходящихся к нулю, рассмотрим функционалы $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\xi_k$, $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c_0$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, функционалы линейны. Далее, $\left|f_n(x)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\left|\xi_k\right|\le\sup\limits_k\left|\xi_k\right|\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\left\|x\right\|_{c_0}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, значит f_n ограничены и при этом $\left\|f_n\right\|\le\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. С другой стороны, возьмем при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ элемент $x_0=(\underbrace{1,1,...,1}_{n},0,0,...)$, тогда получим, что

$$\left\|f_n\right\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\left|f_n(x)\right|}{\left\|x\right\|_{c_0}}\ge\frac{\left|f_n(x_0)\right|}{\left\|x_0\right\|_{c_0}}=\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\xi_k^{(0)}\right|}{\sup\limits_k\left|\xi_k^{(0)}\right|}=\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

откуда $\left\|f_n\right\|=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Таким образом, поскольку $a_n\ge 0$, то $\sup\limits_n\left\|f_n\right\|=\sup\limits_n\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k=+\infty$, и, в силу принципа фиксации особенности (см. задачу 2), делаем вывод, что существует элемент $\overline{x}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n,...)\in c_0$ такой, что последовательность $f_n(\overline{x})=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varepsilon_k$ не является ограниченной, а значит и сходящейся, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varepsilon_k$ расходится. Кроме того, поскольку $\overline{x}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n,...)\in c_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что из равномерной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов следует ее поточечная сходимость.

2. Используя принцип равномерной ограниченности, доказать, что справедлив следующий ***принцип фиксации особенности***: если $\sup\limits_n\left\|A_n\right\|=+\infty$, то $\exists x_0\in X:\ \sup\limits_n\left\|A_n x_0\right\|=+\infty$.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_n x(t)=\dfrac{\cos t}{\sqrt{n}}x(t)$, $A_n: C[0,\pi]\to C[0,\pi]$.

4. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_n x=\left(\xi_1,\dfrac{\xi_2}{2},...,\dfrac{\xi_n}{n},0,0,...\right)$, $A_n: l_2\to l_2$.

5. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\} \subset L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$, $A_n x(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$ на равномерную и поточечную сходимость.

Указание: используя теорему Банаха-Штейнгауза, обосновать поточечную сходимость. Для обоснования отсутствия равномерной сходимости рассмотреть последовательность непрерывных функций, равных 0 на отрезке $\left[0, \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}}}\right]$, *1 на отрезке* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *и линейных на оставшейся части. Воспользоваться оценкой* $\|A_n x_n - I x_n\| \geq \left|A_n x_n\left(\frac{1}{2}\right) - I x_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$.

6. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(l_2, l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x = \big(0, 0, \ldots, 0, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\big)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

7. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\} \subset L(l_2, l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x = \big(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\big)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

8. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t) = \int\limits_0^1 \sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{1}{n}}\, x(\tau) d\tau$, где $\{A_n\} \subset L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$, на равномерную и поточечную сходимость.

Указание: воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграла Римана.

9. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t) = \int\limits_0^1 t^n \tau^n x(\tau) d\tau$, где $\{A_n\} \subset L\big(L_2[0,1], L_2[0,1]\big)$, на равномерную и поточечную сходимость.

Указание: воспользоваться теоремой Лебега об ограниченной сходимости.

10. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ такой, что $Ax(t) = \int\limits_0^t e^s x(s) ds$ и последовательность операторов $\{A_n\} : C[0,1] \to C[0,1]$ такую, что $A_n x(t) = \int\limits_0^t \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} x(s) ds$. Сходится ли последовательность $\{A_n\}$ к оператору A и если сходится, то каков характер сходимости?

Указание: воспользоваться теоремой о предельном переходе под знаком интеграла Римана.

11. Пусть $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ – фиксированная последовательность функций из пространства $C[a,b]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим оператор A_n соотношением

$A_n x(t) = p_n(t) x(t)$, где $x(t) \in C[a,b]$. При каких условиях на функции p_n последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится равномерно? Поточечно?

12. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого оператора $A \in L(X,X)$ определен оператор $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \in L(X,X)$.

13. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого оператора $A \in L(X,X)$ определен оператор $\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} \in L(X,X)$.

14. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого оператора $A \in L(X,X)$ определен оператор $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in L(X,X)$. Доказать, что $\left\| e^A \right\| \le e^{\|A\|}$. Чему равно e^I?

15. Пусть X,Y – банаховы пространства, $\{A_n\} \subset L(X,Y)$, $A_n \to A \in L(X,Y)$. Доказать, что если $x_n \to x$ ($x_n, x \in X$), то $A_n x_n \to Ax$.

Указание: воспользоваться принципом равномерной ограниченности.

16. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций с нормой $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Показать, что последовательность $x_n(t) = \sqrt[n]{1+(2t)^n} \in E$ фундаментальна в E, но не сходится в E.

Указание: показать, что последовательность сходится в $C[0,1]$, т.е. является в $C[0,1]$ фундаментальной, однако, не сходится в E.

17. Рассмотрим операторы $A_n : E \to C[0,1]$, $n \ge 1$ (пространство E определено в предыдущей задаче), $A_n x(t) = n\left[x\left(t + \frac{1}{n}\right) - x(t) \right]$, $t \in [0,1]$. При этом, если $t + \frac{1}{n} > 1$, то $x\left(t + \frac{1}{n}\right) = x(1)$. Доказать, что:

а) последовательность $\{A_n\}$ сходится поточечно и найти ее предел;

б) последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена.

Как согласуются эти утверждения с принципом равномерной ограниченности?

Указания: а) показать, что последовательность поточечно сходится к оператору $Ax(t) = x'(t)$; б) рассмотреть последовательность $x_n(t) = t^n$.

18. Доказать, что для того, чтобы интеграл $\int_0^1 x(t) y(t) dt$ существовал для всех $x(t) \in L_p[0,1]$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы $y(t) \in L_q[0,1]$, где числа p и q связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

19. Рассмотрим в пространстве c векторы $e_0=(1,1,...,1,...)$, $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,...)$. Возьмем любой вектор $x=(\xi_k)\in c$ и обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$. Проверить, что $x=\xi_0 e_0+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi_0)e_k$.

Указание: показать, что $x_n\xrightarrow{c}x$, *где* $x_n=\left(\xi_1,...,\xi_n,\xi_0,\xi_0,...\right)\in c$.

20. Пусть задан числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ – его частичная сумма, $\left(\alpha_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ некоторая бесконечная матрица. Доказать теорему Теплица-Сильвермена: для того, чтобы матрица $\left(\alpha_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ определяла регулярный метод суммирования (т.е. существовал предел последовательности $\omega_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{nk}S_k$), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0\ \ \forall k\in\mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}=1$;

в) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{nk}\right|=M<+\infty$.

Указание: рассмотреть в пространстве c *функционалы* $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k$ *и* $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$, *где* $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c$, $n\in\mathbb{N}$. *Доказать их линейность и ограниченность, найти* $\|f_n\|$, *рассмотреть последовательности* $x_0=(1,1,1,...)\in c$ *и* $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,...)\in c\ \ \forall k\in\mathbb{N}$. *Затем найти* $f_n(x_0)$, $f_n(x_k)$, $f(x_0)$, $f(x_k)$ *и использовать теорему Банаха-Штейнгауза.*

21. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_{nk}x(t_{n,k})$, где $n\in\mathbb{N}$, $a\le t_{n,1}<t_{n,2}<...<t_{n,n}\le b$. Доказать, что утверждение $\forall x\in C\left[a,b\right]\ \ f_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\int\limits_a^b x(t)dt$ справедливо тогда и только тогда, когда:

а) $\sup\limits_{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|A_{nk}\right|<+\infty$;

б) $f_n(p)\underset{n\to\infty}{\to}\int\limits_a^b p(t)dt$ для всякого многочлена p.

Доказать, что условие а) следует из условия б), если $A_{nk}\ge 0$ при всех n,k.

Указание: воспользоваться аппроксимационной теоремой Вейерштрасса. Учесть, что функция $p(t)\equiv 1$ *– многочлен.*

22. Показать, что если $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то существует такая последовательность $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ расходится.

Указание: в пространстве l_1 *рассмотреть функционалы* $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$, $n \in \mathbb{N}$.

23. Доказать, что последовательность операторов умножения на функцию $A_n(x) = \dfrac{nt}{n+1} x(t)$ в пространстве $C[0,1]$ сходится по норме к оператору $A_n(x) = tx(t)$.

24. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_n x = \left(\dfrac{\xi_n}{n}, \dfrac{\xi_{n+1}}{n+1}, ..., \dfrac{\xi_{2n}}{2n}, 0, 0, ... \right)$, $A_n : c_0 \to l_1$.

Указание: не сходится равномерно. Рассмотреть $x_n = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{2n}, 0, 0, ...)$.

25. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \int_0^2 \dfrac{n}{n^2 t^2 + 1} x(t) dt$, $f_n : C[0,2] \to \mathbb{R}$.

Указание: используя теорему Банаха-Штейнгауза и аппроксимационную теорему Вейерштрасса, показать, что $f_n(x) \to \dfrac{\pi}{2} x(0)$ *(при* $k \geq 1$ *представить* $t^k = t^{k-1} \cdot t$*). Рассмотреть последовательность* $x_n(t) = \begin{cases} 1 - n^2 t, 0 \leq t < \dfrac{1}{n^2} \\ 0, \ \dfrac{1}{n^2} \leq t \leq 2 \end{cases}$.

26. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ntx(t) dt$, $f_n : L_2[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Указание: сходится поточечно.

27. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = x\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $f_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$.

Указание: сходится поточечно.

28. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \int_0^1 \left(t^n - t^{n+1}\right) x(t) dt$, $f_n : L_p[0,1] \to \mathbb{R}$.

Указание: сходится равномерно.

29. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $f_n(x)=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{arctg} ntx(t)dt$, $f_n : C[-1,1]\to\mathbb{R}$.

Указание: сходится равномерно.

30. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_nx(t)=\begin{cases} x(t),\ 0\le t\le 1-\dfrac{1}{n} \\ 0,\ 1-\dfrac{1}{n}<t\le 2 \end{cases}$, $A_n : L_1[0,2]\to L_1[0,2]$.

31. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_nx=(\underbrace{0,0,...,0}_{n},\xi_1,\xi_2,...)$, $A_n : l_p\to l_p$, $1\le p\le\infty$.

32. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность операторов $A_nx=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$, $A_n : c_0\to c_0$, $A_n : c\to c$.

33. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность $A_nx(t)=n\left[x\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(t+\dfrac{1}{n}\right)\right)-x\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)t\right)\right]$, $A_n : C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$.

Указание: показать, что последовательность сходится поточечно, но не равномерно к оператору $Ax(t)=x'(t)$.

34. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность $A_n : C[0,1]\to C[0,1]$, если $A_n=A^n$, $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$.

1.4. Дополнительные задачи и утверждения

1. Найти норму оператора $Ax(t)=\int\limits_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$, если $A:C[0,1]\to C[0,1]$ и $k(t,\tau)\in C([0,1]\times[0,1])$.

Решение: $\|A\|=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|}{\|x\|}\le\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 |k(t,\tau)|\cdot|x(\tau)|d\tau}{\|x\|}\le$

$\le\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 |k(t,\tau)|\cdot\|x\|d\tau}{\|x\|}=\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1|k(t,\tau)|d\tau$.

Осталось найти функцию $x_n(\tau)\in C[0,1]$, для которой справедливо неравенство противоположного знака. В качестве $x_n(\tau)$ возьмем непрерывную функцию, такую, что $\sup\limits_{\tau\in[0,1]}|x_n(\tau)|=1$, т.е. $\|x_n\|=1$.

Далее, поскольку $k(t,\tau)\in C([0,1]\times[0,1])$, то функция $\int\limits_0^1|k(t,\tau)|d\tau$ – непрерывна по $t\in[0,1]$, и, значит, по теореме Вейерштрасса, достигает на этом отрезке своего наибольшего значения, т.е. $\exists t_0\in[0,1]$: $\int\limits_0^1|k(t_0,\tau)|d\tau=\sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1|k(t,\tau)|d\tau$. Обозначим $z(\tau)=\operatorname{sign}k(t_0,\tau)$ и будем считать, что $x_n(\tau)=z(\tau)$ всюду, за исключением точек некоторого множества E_n (на множестве E_n $x_n(\tau)$ задаем произвольно, сохраняя непрерывность). Поскольку $\sup\limits_{\tau\in[0,1]}|x_n(\tau)|=1$, и на множестве E_n $x_n(\tau)\neq z(\tau)$, то на множестве E_n $|x_n(\tau)-z(\tau)|\le|x_n(\tau)|+|z(\tau)|\le 2$. Тогда

$$\left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)z(\tau)d\tau-\int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau\right|=\left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)(z(\tau)-x_n(\tau))d\tau\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^1|k(t,\tau)|\cdot|z(\tau)-x_n(\tau)|d\tau\le\sup_{t,\tau}|k(t,\tau)|\cdot\int\limits_0^1|z(\tau)-x_n(\tau)|d\tau=$$

$$=\sup_{t,\tau}|k(t,\tau)|\cdot\left(\int\limits_{E_n}\underbrace{|z(\tau)-x_n(\tau)|}_{\wedge\backslash\ 2}d\tau+\int\limits_{[0,1]\backslash E_n}\underbrace{|z(\tau)-x_n(\tau)|}_{\|\ 0}d\tau\right)\le$$

$$\le 2\sup_{t,\tau}|k(t,\tau)|\cdot\int\limits_{E_n}1d\tau=2\sup_{t,\tau}|k(t,\tau)|\cdot\mu(E_n).$$

Выберем E_n таким образом, чтобы $\mu(E_n) \le \dfrac{1}{2n\sup\limits_{t,\tau}|k(t,\tau)|}$, тогда $\forall t \in [0,1]$ $\left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)z(\tau)d\tau - \int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau\right| \le \dfrac{1}{n}$, откуда $\int\limits_0^1 k(t,\tau)z(\tau)d\tau - \int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau \le \dfrac{1}{n}$ $\forall t \in [0,1]$, т.е. $\int\limits_0^1 k(t,\tau)z(\tau)d\tau \le \dfrac{1}{n} + \int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau \le \dfrac{1}{n} + \left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau\right| \le \dfrac{1}{n} +$ $+\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 k(t,\tau)x_n(\tau)d\tau\right| = \dfrac{1}{n} + \|Ax_n\| \le \dfrac{1}{n} + \|A\|\cdot\|x_n\| = \dfrac{1}{n} + \|A\|$. В частности, при $t = t_0$ $\int\limits_0^1 k(t_0,\tau)z(\tau)d\tau \le \dfrac{1}{n} + \|A\|$, откуда

$$\|A\| \ge \int\limits_0^1 k(t_0,\tau)z(\tau)d\tau - \frac{1}{n} = \int\limits_0^1 k(t_0,\tau)\operatorname{sign} k(t_0,\tau)d\tau - \frac{1}{n} = \int\limits_0^1 |k(t_0,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\|A\| \ge \int\limits_0^1 |k(t_0,\tau)|d\tau = \sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 |k(t,\tau)|d\tau$.

Из получившихся неравенств заключаем, что $\|A\| = \sup\limits_{t\in[0,1]}\int\limits_0^1 |k(t,\tau)|d\tau$.

2. Пусть $k(t,\tau) \in C([a,b]\times[a,b])$, $0 < \alpha < 1$. Доказать, что оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = \int\limits_a^b \dfrac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}x(\tau)d\tau$, ограничен.

Решение: поскольку $k(t,\tau) \in C([a,b]\times[a,b])$, то, по теореме Вейерштрасса на этом прямоугольнике $|k(t,\tau)|$ достигает своего наибольшего значения $\max\limits_{t,\tau}|k(t,\tau)| > 0$. Кроме того, $|x(\tau)| \le \sup\limits_{\tau\in[a,b]}|x(\tau)| = \|x\|$. Тогда $\forall x(t) \in C[a,b]$

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[a,b]}\left|\int\limits_a^b \frac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}x(\tau)d\tau\right| \le \sup_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b \frac{|k(t,\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}|x(\tau)|d\tau \le \max_{t,\tau}|k(t,\tau)|\sup_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b \frac{1}{|t-\tau|^\alpha}d\tau\cdot\|x\|.$$

Для установления ограниченности оператора осталось проверить, что $\max\limits_{t,\tau}|k(t,\tau)|\sup\limits_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b \dfrac{1}{|t-\tau|^\alpha}d\tau = \text{const}$. Поскольку $0 < \alpha < 1$, то $f(t) = \int\limits_a^b \dfrac{1}{|t-\tau|^\alpha}d\tau =$ $= \int\limits_a^t \dfrac{1}{(t-\tau)^\alpha}d\tau + \int\limits_t^b \dfrac{1}{(\tau-t)^\alpha}d\tau = -\dfrac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t + \dfrac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_t^b = \dfrac{1}{1-\alpha}((t-a)^{1-\alpha} + (b-t)^{1-\alpha})$ и $f(t)$ непрерывна при $t \in [a,b]$. Поскольку $f'(t) = (t-a)^{-\alpha} - (b-t)^{-\alpha} = 0$ при $t - a = b - t$, то $t = \dfrac{a+b}{2}$ – критическая точка.

Далее, $f''(t) = -\alpha(t-a)^{-\alpha-1} - \alpha(b-t)^{-\alpha-1}$ и $f''\left(\frac{a+b}{2}\right) = -2\alpha \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{-\alpha-1} < 0$, т.е. $t = \frac{a+b}{2}$ – точка максимума. Итак, $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b \frac{1}{|t-\tau|^\alpha} d\tau = \max\left\{ f(a), f(b), f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$, причем $f(a) = f(b) = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot 2 \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{1-\alpha} = \frac{2^\alpha (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Таким образом, $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b \frac{1}{|t-\tau|^\alpha} d\tau = \frac{2^\alpha (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, и $\max\limits_{t,\tau} |k(t,\tau)| \sup\limits_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b \frac{1}{|t-\tau|^\alpha} d\tau = \text{const}$.

3. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, переводящий элемент $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$ в элемент $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, ...) \in l_2$, где $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. При каком условии на последовательность $\{\lambda_n\}$ область определения $D(A)$ оператора A совпадает со всем пространством l_2? При каком условии на последовательность $\{\lambda_n\}$ оператор A ограничен и какова при этом его норма?

Решение: поскольку $A: l_2 \to l_2$, то, чтобы $D(A) = l_2$, необходимо, чтобы $\forall x \in l_2\ Ax \in l_2$, т.е., чтобы $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty |\lambda_k \xi_k|^2 < +\infty$. Возможны два случая.

а) Последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, т.е. $\exists c > 0$: $\sup\limits_n |\lambda_n| = c < +\infty$, откуда $\forall n \in \mathbb{N}\ |\lambda_n| \le c$. Тогда очевидно, что $\forall x \in l_2\ \|Ax\|^2 \le c^2 \sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 = c^2 \|x\|^2 < +\infty$. Таким образом, в этом случае, $D(A) = l_2$, кроме того, оператор A ограничен и сразу получаем, что $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le c = \sup\limits_n |\lambda_n|$. Установим противоположное неравенство:
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^\infty |\lambda_k \xi_k^{(0)}|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k^{(0)}|^2}} = \left| x_0 = (0,0,...,\underset{n}{1},0,0,...) \right| = |\lambda_n|.$$

Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}\ \|A\| \ge |\lambda_n|$, следовательно, $\|A\| \ge \sup\limits_n |\lambda_n|$. Итак, в этом случае $\|A\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$.

б) Последовательность $\{\lambda_n\}$ неограничена, т.е. $\sup\limits_n |\lambda_n| = +\infty$. В этом случае $D(A)$ состоит из тех векторов $x \in l_2$, для которых $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty |\lambda_k \xi_k|^2 < +\infty$. При этом $D(A) \neq l_2$. Чтобы это доказать, возьмем элемент $x = \left(1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \frac{1}{3^{1+\alpha}}, ..., \frac{1}{n^{1+\alpha}}, ...\right)$, где $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ и пусть $\lambda_n = n$. Ясно, что $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+2\alpha}} < +\infty$, поскольку $2 + 2\alpha > 1$. Однако, $\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} = +\infty$, поскольку $2\alpha \le 1$. В этом случае оператор неограничен, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|A\| \ge \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k \xi_k^{(0)}\right|^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k^{(0)}\right|^2}} = \left| x_0 = (0,0,\ldots,\underset{n}{1},0,0,\ldots) \right| = |\lambda_n|$, откуда $\|A\| \ge \sup_n |\lambda_n| = +\infty$.

4. Пусть X – банахово пространство, L, M – его подпространства, причем $X = L \oplus M$. Доказать, что операторы $P_1 : X \to L$ и $P_2 : X \to M$, определяемые равенствами $P_1 x = x_1$ и $P_2 x = x_2$ (где $x = x_1 + x_2$, $x \in X$, $x_1 \in L$, $x_2 \in M$), являются линейными ограниченными операторами со свойствами: $P_i^2 = P_i$ $(i = 1,2)$, $P_1 + P_2 = I$ (I – тождественный оператор, т.е. $\forall x \in X$ $Ix = x$), $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$. Такие операторы называются операторами проектирования.

Решение: линейность операторов очевидна. Пусть $\|x\|$ – норма в пространстве X, относительно которой это пространство является банаховым. Введем на X новую норму $\|x\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$.

Поскольку $x = x_1 + x_2$, то $\|x\| = \|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\| = \|x\|_1$. Таким образом, норма $\|x\|$ подчинена норме $\|x\|_1$. Покажем, что пространство X банахово относительно нормы $\|x\|_1$. Рассмотрим последовательность $x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$, фундаментальную по норме $\|x\|_1$. Тогда, во-первых, последовательность фундаментальна и по норме $\|x\|$, а, во-вторых, последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ и $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ фундаментальны по норме $\|x\|$. Поскольку X – банахово относительно нормы $\|x\|$, то $x_1^{(n)} \to x_1$ и $x_2^{(n)} \to x_2$ по норме $\|x\|$. Поскольку $\left\{x_1^{(n)}\right\} \in L$, $\left\{x_2^{(n)}\right\} \in M$ и L, M замкнуты, то $x_1 \in L$ и $x_2 \in M$. Таким образом, $x^{(n)} \to x_1 + x_2 = x \in X$ как по норме $\|x\|_1$, так и по норме $\|x\|$. Значит, X – банахово по норме $\|x\|_1$. По теореме об эквивалентных нормах заключаем, что $\exists c > 0$: $\|x\|_1 \le c\|x\|$.

Таким образом, $\|P_i x\| = \|x_i\| \le \|x\|_1 \le c\|x\|$, где $i = 1,2$, т.е. операторы P_1, P_2 – ограничены. Поскольку $\forall x \in X$ $P_1^2 x = P_1(P_1 x) = P_1 x_1$ и $x_1 = x_1 + 0$, где $x_1 \in X$, $x_1 \in L$, $0 \in M$, то $P_1 x_1 = x_1$. Аналогично, $\forall x \in X$ $P_2^2 x = x_2$. Значит, $P_i^2 = P_i$, где $i = 1,2$. Далее, $\forall x \in X$ $P_1 x + P_2 x = x_1 + x_2 = x = Ix$, значит, $P_1 + P_2 = I$. Наконец, $\forall x \in X$ $P_1 P_2 x = P_1 x_2$. Поскольку $x_2 = 0 + x_2$, где $x_2 \in X$, $0 \in L$, $x_2 \in M$, то $P_1 x_2 = 0 = 0x$, откуда $P_1 P_2 = 0$ и, аналогично, $P_2 P_1 = 0$.

5. Банахово пространство $C[-1,1]$ разложить в прямую сумму двух подпространств L,M так, чтобы $\|P_i\|=1$, где $i=1,2$, а операторы проектирования определены в предыдущей задаче.

Решение: пусть L – множество всех четных функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$, M – множество всех нечетных функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$. Очевидно, что L и M – линейные многообразия в $C[-1,1]$.

Пусть $\{x_n(t)\}\in L$ и $x_n(t)\to x(t)$ при $n\to\infty$ по норме пространства $C[-1,1]$, т.е., равномерно. Поскольку $x_n(-t)=x_n(t)$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $x(-t)=x(t)$, т.е. $x(t)\in L$, и, значит, L – замкнуто. Таким образом, L – подпространство в $C[-1,1]$. Аналогично доказывается, что M – подпространство в $C[-1,1]$. Ясно, что $C[-1,1]=L\oplus M$, поскольку $\forall x(t)\in C[-1,1]$ можно однозначно представить в виде $x(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]+\frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]$, где $\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]\in L$ и $\frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]\in M$.

Рассмотрим операторы $P_1x(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]$ и $P_2x(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]$. Очевидно, что $\|P_1x\|=\left\|\frac{1}{2}(x+x)\right\|\le\frac{1}{2}(\|x\|+\|x\|)=\|x\|$ и $\|P_2x\|=\left\|\frac{1}{2}(x-x)\right\|\le\frac{1}{2}(\|x\|+\|x\|)=\|x\|$. Таким образом, при $i=1,2$ $\|P_i\|=\sup\limits_{x\ne0}\frac{\|P_ix\|}{\|x\|}\le1$.

Поскольку $\|P_i\|=\sup\limits_{x\ne0}\frac{\|P_ix\|}{\|x\|}\ge\frac{\|P_ix_0\|}{\|x_0\|}=\left|\begin{matrix} i=1: x_0(t)=1 \\ i=2: x_0(t)=t\end{matrix}\right|=1$, то $\|P_i\|=1$.

6. Пусть X – банахово пространство, $A\in L(X,X)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}A^i$ сходится в $L(X,X)$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального k выполняется неравенство $\|A^k\|<1$.

Решение: необходимость предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 18).

Достаточность: пусть $\exists k\in\mathbb{N}$: $\|A^k\|<1$. Надо доказать, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}A^i$ сходится в $L(X,X)$. Поскольку $L(X,X)$ – банахово пространство, то в нем справедлив критерий Коши, поэтому достаточно доказать, что $\left\|\sum\limits_{i=M}^{N}A^i\right\|\underset{M,N\to\infty}{\to}0$.

Будем рассматривать $N>M>k$ и подберем такие $m,n\in\mathbb{N}$, что $mk\le M<(m+1)k<nk-1$, $N\le nk-1$. Тогда $\left\|\sum\limits_{i=M}^{N}A^i\right\|\le\sum\limits_{i=M}^{N}\|A^i\|\le\sum\limits_{i=mk}^{nk-1}\|A^i\|=\|A^{mk}\|+$

$$+\left\|A^{mk+1}\right\|+\left\|A^{mk+2}\right\|+\ldots+\left\|A^{mk+k-1}\right\|+\left\|A^{mk+k}\right\|+\left\|A^{mk+k+1}\right\|+\left\|A^{mk+k+2}\right\|+\ldots+\left\|A^{mk+2k-1}\right\|+$$

$$+\left\|A^{mk+2k}\right\|+\ldots+\left\|A^{nk-k}\right\|+\left\|A^{nk-k+1}\right\|+\left\|A^{nk-k+2}\right\|+\ldots+\left\|A^{nk-2}\right\|+\left\|A^{nk-1}\right\|\le\left\|A^k\right\|^m+\left\|A^k\right\|^{m+1}+\left\|A^k\right\|^{m+2}+$$

$$+\ldots+\left\|A^k\right\|^{n-1}+\|A\|\left(\left\|A^k\right\|^m+\left\|A^k\right\|^{m+1}+\ldots+\left\|A^k\right\|^{n-1}\right)+\|A\|^2\left(\left\|A^k\right\|^m+\left\|A^k\right\|^{m+1}+\ldots+\left\|A^k\right\|^{n-1}\right)+\ldots+$$

$$+\|A\|^{k-1}\left(\left\|A^k\right\|^m+\left\|A^k\right\|^{m+1}+\ldots+\left\|A^k\right\|^{n-1}\right)=\left(\left\|A^k\right\|^m+\left\|A^k\right\|^{m+1}+\ldots+\left\|A^k\right\|^{n-1}\right)\left(1+\|A\|+\|A\|^2+\ldots+\|A\|^{k-1}\right)=$$

$$=\frac{\left\|A^k\right\|^m\left(1-\left\|A^k\right\|^{n-m}\right)}{1-\left\|A^k\right\|}\left(1+\|A\|+\|A\|^2+\ldots+\|A\|^{k-1}\right)\le\frac{\left\|A^k\right\|^m}{1-\left\|A^k\right\|}\left(1+\|A\|+\|A\|^2+\ldots+\|A\|^{k-1}\right).$$

Отсюда получаем, что $\left\|\sum_{i=M}^{N}A^i\right\|\underset{M,N\to\infty}{\to}0$ (поскольку при $M,N\to\infty$ также и $m,n\to\infty$).

7. Доказать, что пространство $L(X,X)$, где $X=L_2[0,1]$ не сепарабельно.

Решение: рассмотрим оператор $A_\lambda:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, определяемый соотношением $A_\lambda x(t)=\begin{cases}x(t), & 0\le t\le\lambda\\ 0, & \lambda<t\le 1\end{cases}$. Здесь $\lambda\in(0,1)$. Очевидно, что $\forall\lambda\in(0,1)$ оператор A_λ линеен.

Поскольку $\|A_\lambda x\|=\sqrt{\int_0^1|A_\lambda x(t)|^2\,dt}=\sqrt{\int_0^\lambda|x(t)|^2\,dt}\le\sqrt{\int_0^1|x(t)|^2\,dt}=\|x\|$, то $\forall\lambda\in(0,1)$ оператор A_λ ограничен. Таким образом, $A_\lambda\in L\left(L_2[0,1],L_2[0,1]\right)$.

Заметим, что множество $M=\{A_\lambda,\ \lambda\in(0,1)\}\subset L\left(L_2[0,1],L_2[0,1]\right)$ – несчетно, поскольку оно эквивалентно несчетному множеству точек интервала $(0,1)$ (т.е. между M и $(0,1)$ установлено взаимно однозначное соответствие).

Возьмем точки $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ такие, что $\lambda_1<\lambda_2$. Тогда

$$A_{\lambda_2}x(t)-A_{\lambda_1}x(t)=\left(A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1}\right)x(t)=\begin{cases}x(t), & \lambda_1\le t\le\lambda_2\\ 0, & t\in[0,1]\setminus[\lambda_1,\lambda_2]\end{cases}.$$

Найдем норму оператора $A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1}$:

$$\left\|A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1}\right\|=\sup_{x\ne0}\frac{\left\|\left(A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1}\right)x\right\|}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\int_0^1\left|\left(A_{\lambda_2}-A_{\lambda_1}\right)x(t)\right|^2dt}}{\|x\|}=$$

$$=\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}|x(t)|^2\,dt}}{\|x\|}\le\sup_{x\ne0}\frac{\sqrt{\int_0^1|x(t)|^2\,dt}}{\|x\|}=\sup_{x\ne0}\frac{\|x\|}{\|x\|}=1.$$

С другой стороны, $\left\| A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1} \right\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\left\| \left(A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1} \right) x \right\|}{\|x\|} \geq \dfrac{\left\| \left(A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1} \right) x_0 \right\|}{\|x_0\|} = \dfrac{\sqrt{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} |x_0(t)|^2 \, dt}}{\sqrt{\int\limits_0^1 |x_0(t)|^2 \, dt}} =$

$$= \left| x_0(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}, & \lambda_1 \leq t \leq \lambda_2 \\ 0, & t \in [0,1] \setminus [\lambda_1, \lambda_2] \end{cases} \right| = \dfrac{\sqrt{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} dt}}{\sqrt{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} dt}} = 1.$$

Таким образом, при $\lambda_1 < \lambda_2$ $\left\| A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1} \right\| = 1$, т.е. расстояние между элементами множества M равно единице.

Обозначим $B\left(A_\lambda, \dfrac{1}{3} \right) = \left\{ A \in L\left(L_2[0,1], L_2[0,1] \right) : \|A - A_\lambda\| < \dfrac{1}{3} \right\}$ – открытый шар, описанный около каждого элемента $A_\lambda \in M$. Поскольку множество M – несчетно, то множество таких шаров также несчетно. Кроме того, эти шары не пересекаются, поскольку расстояние между их центрами равно единице.

По определению пространство является сепарабельным, если в нем есть счетное всюду плотное множество. Допустим, что в пространстве $L\left(L_2[0,1], L_2[0,1] \right)$ есть всюду плотное множество E. Тогда по определению всюду плотности, в любом шаре из $L\left(L_2[0,1], L_2[0,1] \right)$ должна лежать хотя бы одна точка из E. Поскольку мы нашли несчетное множество шаров, лежащих в $L\left(L_2[0,1], L_2[0,1] \right)$, которые не пересекаются, то множество E не может быть счетным, поскольку оно содержит элементы, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из построенных шаров.

8. Проверить, что формула $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$, где $t_1, \ldots, t_n$ – некоторая система точек отрезка $[a,b]$, а $c_k \in \mathbb{R}$, определяет линейный непрерывный в пространстве $C[a,b]$ функционал и найти его норму.

Решение: поскольку $f(\lambda x + \mu y) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \left(\lambda x(t_k) + \mu y(t_k) \right) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x(t_k) + {}$ $+ \mu \sum\limits_{k=1}^{n} c_k y(t_k) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, то функционал f линеен.

Поскольку $|f(x)| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x(t_k) \right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| \cdot |x(t_k)| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)| = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|x\|$, то функционал f ограничен. Кроме того, $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$. С другой стороны, при

$x_0 \neq 0$ $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_0(t_k)\right|}{\sup\limits_{t\in[a,b]} |x_0(t)|}$. Пусть $x_0(t) \in C[a,b]$ – кусочно-линейная функция, такая, что $x_0(t_k) = \operatorname{sign} c_k$, $x_0(t)$ – линейна на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ и постоянна на отрезках $[a, t_1]$ и $[t_n, b]$. Тогда $\|x_0\| = 1$ и $\|f\| \geq \left|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} c_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$, таким образом, $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$.

9. Доказать, что отображение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$, определяемое последовательностью $\{\lambda_k\}$, тогда и только тогда переводит сходящиеся ряды в сходящиеся, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| < +\infty$.

Решение: 1. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$ сходятся. Надо доказать, что при этом сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$. В силу критерия Коши $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$. Поскольку $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$, то $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right| = |\lambda_{m+1} - \lambda_{n+1}| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$, т.е. последовательность $\{\lambda_k\}$ фундаментальна, а потому имеет предел. Далее, обозначим $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, тогда $\sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k a_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k (A_k - A_{k-1}) = \lambda_n A_n - \lambda_2 A_1 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) A_k$. Поскольку $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) A_k\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |\lambda_k - \lambda_{k+1}||A_k| \leq c \sum\limits_{k=n+1}^{m} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$, то получаем, что ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) A_k$ сходится. Но тогда сходится и ряд $\sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k a_k$.

2. Покажем, что, если из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$, то последовательность $\{\lambda_k\}$ – ограничена. Допустим, что это не так, т.е. $\sup\limits_{k} |\lambda_k| = +\infty$. В пространстве l_1 рассмотрим линейные функционалы

$f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Имеем, $|f_n(x)| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k||\xi_k| \leq \sup\limits_{k=1..n} |\lambda_k| \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| \leq \sup\limits_{k=1..n} |\lambda_k| \cdot \|x\|$, значит, f_n ограничены и при этом $\|f_n\| \leq \sup\limits_{k=1..n} |\lambda_k|$. С другой стороны, при каждом фиксированном

$n \in \mathbb{N}$ возьмем элемент $x_i = (0,...0,\underset{i}{\operatorname{sign}}\lambda_i,0,...)$, где $i=\overline{1,n}$, тогда получим, что $\|f_n\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|f_n(x)|}{\|x\|} \geq \dfrac{|f_n(x_i)|}{\|x_i\|} = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^{(i)}\right|}{\|x_i\|} = |\lambda_i|$, $i=\overline{1,n}$. Отсюда $\|f_n\| \geq \sup\limits_{i=1..n}|\lambda_i|$, т.е. $\|f_n\| = \sup\limits_{k=1..n}|\lambda_k|$ и $\sup\limits_{n}\|f_n\| = \sup\limits_{n}\sup\limits_{k=1..n}|\lambda_k| = \sup\limits_{k=1..\infty}|\lambda_k| = +\infty$.

В силу принципа фиксации особенности, найдется $\bar{x} = (a_1, a_2, ...) \in l_1$ такой, что последовательность $|f_n(\bar{x})| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k a_k\right|$ не является ограниченной, а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k$ расходится. Осталось заметить, что условие $\bar{x} \in l_1$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. Противоречие.

3. Покажем, что, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – расходящийся ряд с неотрицательными членами и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{S_k} = +\infty$. Действительно, $\dfrac{a_k}{S_k} = \dfrac{S_k - S_{k-1}}{S_k} = 1 - \dfrac{S_{k-1}}{S_k}$. Если $\dfrac{S_{k-1}}{S_k} \not\to 1$, то утверждение доказано. Пусть $\dfrac{S_{k-1}}{S_k} \to 1$, тогда $-\ln\dfrac{S_{k-1}}{S_k} \sim 1 - \dfrac{S_{k-1}}{S_k}$. Далее, $-\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\dfrac{S_{k-1}}{S_k} = -\ln\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{S_{k-1}}{S_k} = -\ln\dfrac{S_1}{S_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, поэтому и в данном случае утверждение доказано.

4. Пусть из сходимости любого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ следует сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k$. Предположим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = +\infty$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$, тогда, в силу п. 3, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|}{S_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ расходится. Здесь $\alpha_k = \dfrac{\operatorname{sign}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{S_k} \to 0$. Далее, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \alpha_n\lambda_{n+1} - \alpha_1\lambda_1 + \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k\left(\alpha_{k-1} - \alpha_k\right)$. Поскольку, в силу п. 2 последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, а $\alpha_n \to 0$, то из полученного равенства и расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\lambda_k\left(\alpha_{k-1} - \alpha_k\right)$. При этом ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_{k-1} - \alpha_k\right)$ сходится. Противоречие.

5. Приведем другой способ доказательства утверждения п. 4. Пусть из схо-

димости любого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$. Предположим, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = +\infty$. Обозначим $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to A$, $S_n = A_n - A \to 0$, тогда получаем, что $\sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(S_k - S_{k-1}\right) = \lambda_n S_n - \lambda_2 S_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) S_k$, причем, поскольку последовательность $\{\lambda_n\}$ необходимо ограничена, то $\lambda_n S_n \to 0$.

Рассмотрим линейные функционалы $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \xi_k$, заданные на пространстве c_0, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$. Т.к. $|\varphi_n(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| |\xi_k| \le \|x\| \cdot \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$, то $\|\varphi_n\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$, т.е. функционалы φ_n ограничены. С другой стороны, возьмем элемент $x_0 = (\operatorname{sign}\left(\lambda_1 - \lambda_2\right), \operatorname{sign}\left(\lambda_2 - \lambda_3\right), ..., \operatorname{sign}\left(\lambda_n - \lambda_{n+1}\right), 0, 0, ...)$, тогда получим, что $\|\varphi_n\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{|\varphi_n(x)|}{\|x\|} \ge \frac{|\varphi_n(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \operatorname{sign}(\lambda_k - \lambda_{k+1})\right|}{\|x_0\|} = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|$, поэтому $\|\varphi_n\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \to \infty$.

В силу принципа фиксации особенности, найдется $\overline{x} = (\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, ...) \in c_0$ такой, что последовательность $\left|\varphi_n\left(\overline{x}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \overline{\xi}_k\right|$ не является ограниченной, а значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \overline{\xi}_k$ расходится. Осталось заметить, что, каково бы ни было значение A, по частичным суммам $A_n = \overline{\xi}_n + A$ восстанавливается сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Поскольку при этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ расходится, то получили противоречие.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X, Y – линейные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор, $B \subset R(A)$ – выпуклое множество, $M = \left\{x \in D(A) : Ax \in B\right\}$. Будет ли множество M выпуклым?

2. Пусть X, Y – линейные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор и система элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in D(A)$ линейно независима. Верно ли, что система элементов $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n$ линейно независима.

Указание: вообще говоря, нет.

3. Пусть $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ – числовая матрица, для которой $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_{jk}\right|^2<+\infty$. Доказать, что оператор $A:l_2\to l_2$, $Ax=y$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$, $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_2$, и $\eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\xi_k$, $j\in\mathbb{N}$ является линейным и непрерывным.

4. Доказать линейность и непрерывность оператора $A:C[a,b]\to C[a,b]$, заданного формулой $Ax(t)=\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau$, где $k(t,\tau)\in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Найти его норму.

5. Доказать линейность и непрерывность оператора $A:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$, заданного формулой из задачи 4, где $k(t,\tau)\in L_2\big([a,b]\times[a,b]\big)$. Доказать, что $\|A\|\le\left(\int_a^b\int_a^b\left|k(t,\tau)\right|^2dtd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. Пусть $a(t)\in C[0,1]$ – фиксированная функция и $Ax(t)=a(t)x(t)$. Доказать, что $A:L_p[0,1]\to L_p[0,1]$ при $p\ge 1$ – линейный непрерывный оператор и найти его норму.

7. Найти норму тождественного оператора, действующего:

а) из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$;

б) из $L_p[a,b]$ в $L_q[a,b]$, $p\ge q$.

Указание: тождественный оператор $I:X\to X$ задается равенством $Ix=x$, где $x\in X$.

8. Для каких $\alpha>0$ оператор $Ax(t)=x(t^{\alpha})$ линеен и непрерывен в $C[0,1]$? Найти его норму.

9. Для каких $\alpha>0$ оператор $Ax(t)=x(t^{\alpha})$ линеен и непрерывен в $L_2[0,1]$? Найти его норму.

10. Для каких α,β оператор $Ax(t)=t^{\beta}x(t^{\alpha})$ линеен и непрерывен в $L_2[0,1]$? Найти его норму.

11. Пусть $p,q\in L_2[a,b]$. Доказать, что оператор $A:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$, действие которого задается формулой $Ax(t)=\int_a^b p(t)q(\tau)x(\tau)d\tau$, $t\in[a,b]$, является линейным и непрерывным. Найти норму оператора A.

12. Для каких функций $a(t)$ оператор $Ax(t)=a(t)x(t)$ непрерывен в $C[0,1]$? Найти норму оператора A.

13. Пусть X – линейное нормированное пространство, $A:X\to X$ – линейный ограниченный оператор с $D(A)=X$. Верно ли, что $X=R(A)+\ker A$?

Указание: рассмотреть оператор $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, действующий по формуле* $A(\xi_1,\xi_2)=(\xi_2,0)$.

14. Пусть $\alpha \ge 0$ – фиксировано, C_α – банахово пространство непрерывных на $[0,+\infty)$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} e^{\alpha t}|x(t)|<+\infty$, с нормой $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} e^{\alpha t}|x(t)|$. Найти норму оператора $Ax(t)=\int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}x(s)ds$, где $A:C_\alpha \to C_\gamma$, $\beta>\alpha>\gamma\ge 0$.

Указание: при получении оценки снизу взять $x_0(t)=e^{-\alpha t}$.

15. Пусть $C[0,+\infty)$ – пространство непрерывных на полупрямой $[0,+\infty)$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|<+\infty$, с нормой $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|$. Доказать, что оператор $Ax(t)=tx(t)$, $A:C[0,+\infty)\to C[0,+\infty)$, неограничен.

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=\dfrac{n}{n+t}$, $n\in\mathbb{N}$.

16. Найти область определения оператора A из предыдущей задачи.

Указание: проверить, что $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |tx(t)|<+\infty \Leftrightarrow \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |(t+1)x(t)|<+\infty$ *для всех функций* $x(t)\in C[0,+\infty)$.

17. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $A:X\to Y$ – линейный оператор, ядро которого является подпространством в X. Следует ли отсюда, что A – ограниченный оператор?

Указание: рассмотреть оператор $Ax(t)=x'(t):L\to C[0,1]$*, где* L *множество непрерывно дифференцируемых на* $[0,1]$ *функций с обычной нормой пространства* $C[0,1]$.

18. Пусть X – банахово пространство, $A\in L(X,X)$. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ сходится в $L(X,X)$ то $\forall\varepsilon>0$ найдется число $k\in\mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство $\|A^k\|<\varepsilon$.

19. Проверить выполнение свойств проекционных операторов для операторов, найденных в примере 5.

20. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\xi_k}{2^k}$ в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)$.

21. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\xi_{k+1}}{2^k}$ в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)$.

22. Проверить линейность, непрерывность и найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k+\xi_{k+1}}{2^k}$ в пространстве l_2, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)$.

Указание: $f(x)=\frac{\xi_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\xi_{k+1}=\frac{\xi_1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{2^k}\xi_k$.

23. Доказать, что, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ сходится для любой последовательности $b_k\to 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ – сходится.

24. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ сходился для любой последовательности $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\le c$ ($\forall n\in\mathbb{N}$, c – некоторая положительная постоянная), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|<+\infty$.

Доказать это утверждение.

Указание: необходимость условия а) установить, подобрав такие последовательности $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *и* $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, *для которых* $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\le c$, *но ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ *расходится при* $\lim\limits_{k\to\infty}b_k\ne 0$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|<+\infty$. *Необходимость условия б) можно проверить любым из двух способов, описанных в примере 9 (функционалы берутся на пространстве* l_∞*).*

25. Для того чтобы последовательность $x_n(t)=\int_a^b k_n(t,\tau)x(\tau)d\tau$, $n\in\mathbb{N}$ (представление $x(t)$ сингулярными интегралами с суммируемыми ядрами $k_n(t,\tau)$) сходилась к $x(t)$ в пространстве $L_1[a,b]$, какова бы ни была суммируемая функция $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\int_a^b\left|\int_a^b k_n(t,\tau)x(\tau)d\tau-x(t)\right|dt\underset{n\to\infty}{\to}0$ для всякого $x(t)\in\Delta$, где Δ – множество, всюду плотное в $L_1[a,b]$;

б) $\sup\limits_{\tau\in[a,b]}\int_a^b|k_n(t,\tau)|dt\le M$.

Доказать это утверждение.

Указание: рассмотреть операторы $A_n x(t) = y(t)$, $y(t) = \int_a^b k_n(t,\tau)x(\tau)d\tau$. *При оценке сверху нормы оператора* A_n *поменять порядок интегрирований.*

26. Используя результат задачи 11, вычислить норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 e^t x(\tau)d\tau$.

27. Пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Доказать, что если последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена, то равенства $Ae_k = \lambda_k e_k$ определяют линейный ограниченный оператор $A: H \to H$, причем $\|A\| = \sup_k |\lambda_k|$.

Указание: определить $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k$, *установить линейность и показать единственность линейного оператора со свойством* $Ae_k = \lambda_k e_k$. *Для оценки нормы оператора сверху воспользоваться теоремой Пифагора и равенством Парсеваля.*

28. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, причем X – конечномерно. Доказать, что любой линейный оператор $A: X \to Y$ ограничен.

Указание: разложить элемент $x \in X$ *по базису и показать, что* $\|Ax\|_Y \le c\|\tilde{x}\|_{\infty}$, *где* $\tilde{x}$ *– вектор, составленный из координат вектора* x *в данном базисе. Воспользоваться эквивалентностью всех норм в конечномерном пространстве.*

29. Пусть X – конечномерное нормированное пространство. Доказать, что пространство X^* – также конечномерно (причем имеет ту же размерность, что и X).

Указание: рассмотреть функционалы $e^i \in X^*$ *такие, что* $e^i(x) = \alpha_i$, *если* $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, $\{e_k\}$ *– базис в* X. *Показать, что система* $\{e^i\}_{i=1}^{n}$ *линейно независима в* X^* *(используя то, что, если* $\sum_{i=1}^{n} a_i e^i = 0$, *то, в частности* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e^i\right)(e_k) = 0$*). Показать, что любой функционал* $f \in X^*$ *можно представить в виде* $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e^i$ *(проверив, что в любой точке* $x \in X$ *левая и правая части равенства совпадают).*

1.5. Образы шаров в банаховых пространствах

Теорема (о плотном образе шара): пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный сюръективный оператор. Тогда образ любого шара с центром в начале координат является всюду плотным множеством хотя бы в одном шаре с центром в начале координат.

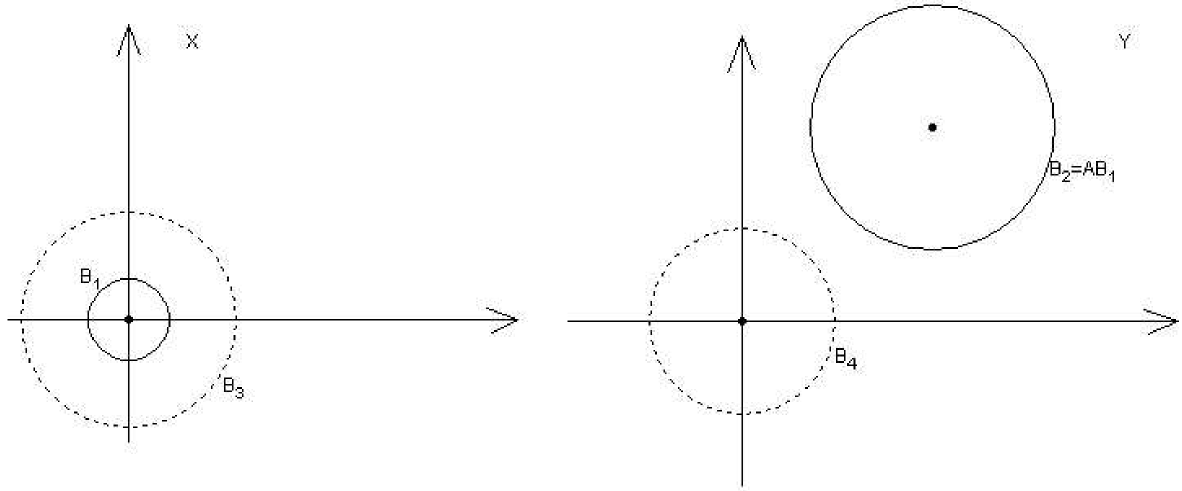
Доказательство: 1. Покажем, что образ хотя бы одного шара с центром в начале координат является всюду плотным множеством хотя бы в одном шаре.

От противного: допустим, что для любого шара с центром в начале координат его образ не всюду плотен ни в одном шаре. Обозначим через z этот образ, который не плотен ни в одном шаре, т.е., если возьмем любой шар, то z в нем не будет всюду плотным множеством. Значит, в этом шаре можно найти окрестность, в которой нет точек из z, т.е. z является нигде не плотным множеством. Итак, показали, что образ любого шара является нигде не плотным множеством в любом шаре.

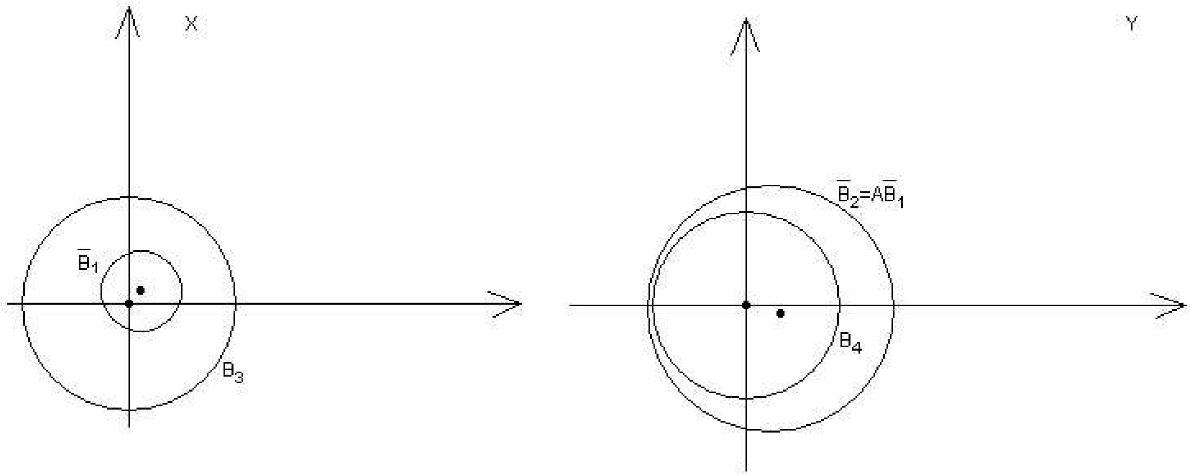
Рассмотрим B_1 – шар с центром в начале координат радиуса 1, B_2 – шар с центром в начале координат радиуса 2,... Ясно, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = X$. Поскольку A сюръективен, т.е. X отображает на все Y, то объединение образов этих шаров даст все пространство Y. Образы этих шаров – нигде не плотные множества ни в одном шаре. Таким образом, пространство Y оказалось представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, а поскольку по условию Y полное, то по теореме Бэра его нельзя представить в таком виде. Противоречие.

2. Покажем, что образ хотя бы одного шара с центром в начале координат является всюду плотным множеством в некотором шаре с центром в начале координат.

Пусть B_1 и B_2 – те шары, существование которых доказано в п.1. Образ шара B_1 всюду плотен в шаре B_2, но B_2 может не иметь центра в начале координат. Надо найти шары B_3 и B_4 с центрами в начале координат так, чтобы образ шара B_3 был всюду плотен в B_4 (см. рис.).

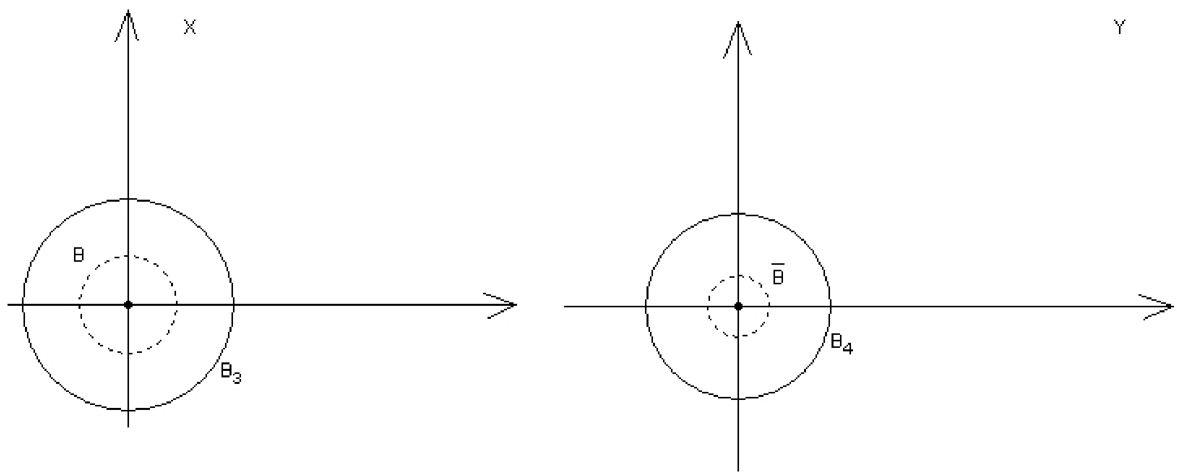


Рассмотрим точку $y_0 \in B_2$, прообразом которой является точка $x_0 \in B_1$, т.е. $Ax_0 = y_0$ (такие точки существуют, поскольку $\overline{AB}_1 = B_2$). Сдвинем шар B_1 на вектор $-x_0$, тогда точка x_0 перейдет в начало координат. Соответственно, шар B_2 сдвинется на вектор $-Ax_0 = -y_0$ и y_0 перейдет в начало координат. Обозначим эти сдвинутые шары соответственно $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$. Ясно, что при сдвиге всюду плотность не изменилась, значит, по-прежнему образ $\overline{B}_1$ является всюду плотным множеством в $\overline{B}_2$ (см. рис.).



Через B_4 обозначим шар, лежащий в шаре $\overline{B}_2$, но уже с центром в начале координат. Раз образ шара $\overline{B}_1$ был плотен в $\overline{B}_2$, то в меньшем множестве он тем более всюду плотен. Итак, образ шара $\overline{B}_1$ всюду плотен в B_4. Через B_3 обозначим шар с центром в начале координат, который содержит шар $\overline{B}_1$. Раз мы шар увеличили, то его образ тем более увеличился, поэтому тем более является всюду плотным в шаре B_4.

3. Пусть B – любой шар с центром в начале координат в пространстве X. Надо доказать, что его образ всюду плотен в некотором шаре с центром в начале координат.



В силу п.2 найдены шары $B_3 \in X$ и $B_4 \in Y$ с центрами в начале координат, такие, что образ шара B_3 всюду плотен в шаре B_4.

Сделаем сжатие шара B_3 таким образом, чтобы он попал внутрь шара B. Ясно, что его образ сожмется в такое же число раз, и сжатый в это же количество раз шар B_4 обозначим за $\overline{B}$. Тогда образ сжатого шара B_3 всюду плотен в $\overline{B}$, а поскольку сжатый шар B_3 содержится в шаре B, то образ шара B тем более будет всюду плотен в $\overline{B}$.

Теорема доказана.

Теорема (принцип открытости): пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный сюръективный оператор. Тогда образ единичного шара с центром в начале координат содержит хотя бы один шар с центром в начале координат.

Доказательство: рассмотрим в пространстве X шар B_1 радиуса $\frac{1}{2}$, шар B_2 радиуса $\frac{1}{4}$, шар B_3 радиуса $\frac{1}{8}$,..., шар B_n радиуса $\frac{1}{2^n}$,... – все с центрами в начале координат.

В силу предыдущей теоремы образ каждого из этих шаров всюду плотен хотя бы в одном шаре с центром в начале координат. Обозначим их радиусы $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, т.е. образ шара B_1 всюду плотен в B_{ρ_1}, образ шара B_2 всюду плотен в B_{ρ_2},... Ясно, что если радиус какого-либо из полученных шаров уменьшить, то всюду плотность в меньшем множестве сохранится, поэтому можно считать, что радиусы ρ_n стремятся к нулю.

Покажем, что образ единичного шара будет содержать B_{ρ_1}, т.е., что B_{ρ_1} – и есть нужный нам шар. Возьмем $\forall y \in B_{\rho_1}$ и надо доказать, что $\exists x$: $\|x\| \le 1$ и $Ax = y$. Поскольку $y \in B_{\rho_1}$, а образ B_1 всюду плотен в B_{ρ_1}, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1 \in B_1$: $\|y - Ax_1\| < \varepsilon$. В частности, беря $\varepsilon = \rho_2$, получим, что $\|y - Ax_1\| < \rho_2$, тогда вектор $y - Ax_1 \in B_{\rho_2}$. Образ B_2 всюду плотен в B_{ρ_2}, значит, аналогично, $\exists x_2 \in B_2$: $\|(y - Ax_1) - Ax_2\| < \rho_3$, и, значит, $y - Ax_1 - Ax_2 \in B_{\rho_3}$. Аналогично, поскольку образ B_3 всюду плотен в B_{ρ_3}, получаем, что $\exists x_3 \in B_3$: $\|(y - Ax_1 - Ax_2) - Ax_3\| < \rho_4$ и т.д. На n-м шаге получим, что $\exists x_n \in B_n$: $\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k \right\| < \rho_{n+1}$.

Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Поскольку X по условию полно, то, в силу критерия полноты пространства в терминах рядов, достаточно показать, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Поскольку $x_1 \in B_1$, то $\|x_1\| \le \frac{1}{2}$. Поскольку $x_2 \in B_2$, то $\|x_2\| \le \frac{1}{4}$, и т.д. Таким образом, $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, значит, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ сходится по признаку сравнения.

Пусть $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$, тогда $\|x\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, т.е. вектор x принадлежит единичному шару. Осталось проверить, что $Ax=y$, т.е., что $A\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right)=y$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}Ax_k=y$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}Ax_k=y$, т.е. $\left\|\sum_{k=1}^{n}Ax_k-y\right\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Поскольку $0\le\left\|y-\sum_{k=1}^{n}Ax_k\right\|<\rho_{n+1}$, а $\rho_n\to 0$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, по теореме о двух милиционерах, получаем, что $\left\|\sum_{k=1}^{n}Ax_k-y\right\|\to 0$.

Теорема доказана.

Замечание: в этих теоремах предполагается, что $D(A)=X$, иначе говорить об образах любых шаров не имело бы смысла.

РАЗДЕЛ 2. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Функционалы в гильбертовых пространствах

Теорема Рисса (об общем виде функционала на гильбертовом пространстве): пусть H – действительное гильбертово пространство и $\varphi \in H^*$ – линейный ограниченный функционал, тогда существует единственный элемент $y \in H$ такой, что $\forall x \in H \ \ \varphi(x) = (x, y)$ и при этом $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Доказательство: обозначим $L = \ker\varphi = \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$ – ядро функционала φ. Поскольку φ линеен, то его ядро – линейное многообразие. Поскольку φ ограничен, то он непрерывен, и, значит, его ядро – замкнуто.

Итак, L – замкнутое линейное подпространство, значит по теореме о разложении в прямую сумму $H = L \oplus L^\perp$. Покажем, что $L^\perp$ одномерно, т.е. возьмем $e \in L^\perp$, $e \neq 0$ и покажем, что $\forall y \in L^\perp$ имеет вид $y = \lambda e$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Для этого требуется подобрать число λ так, чтобы $y - \lambda e = 0$. Поскольку $L \bigcap L^\perp = \{0\}$, а $y - \lambda e \in L^\perp$, то, подобрав λ так, чтобы $y - \lambda e \in L$, получим, что $y - \lambda e = 0$.

Поскольку подбираем $y - \lambda e \in L$, то должно выполняться соотношение $\varphi(y - \lambda e) = 0$, откуда $\varphi(y) - \lambda\varphi(e) = 0$, тогда $\lambda = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(e)}$ и надо убедиться, что $\varphi(e) \neq 0$. Действительно, если $\varphi(e) = 0$, то $e \in L$, а поскольку $e \in L^\perp$, то $e = 0$, что противоречит выбору $e \neq 0$.

Одномерность $L^\perp$ доказана. Возьмем $y \in L^\perp$ и пусть $\forall x \in H \ \ x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$. Надо доказать, что $\varphi(x) = (x, y)$, т.е. $\varphi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, y)$, т.е. $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = (x_1, y) + (x_2, y)$. Поскольку $x_1 \in L$, то $\varphi(x_1) = 0$. Поскольку $x_1 \in L$, а $y \in L^\perp$, то $(x_1, y) = 0$. Тем самым, осталось найти $y \in L^\perp$ так, чтобы $\forall x_2 \in L^\perp$ $\varphi(x_2) = (x_2, y)$.

Поскольку $L^\perp$ одномерно, то если это равенство будет верно для какого-то одного элемента $x_2 \in L^\perp$, то оно будет верно и для всех остальных элементов из $L^\perp$, поскольку остальные элементы получаются из x_2 умножением на число.

Возьмем фиксированный элемент $x_2 \in L^\perp$ и будем искать $y = \alpha x_2$. Надо доказать, что $\varphi(x_2) = (x_2, y)$, т.е. что $\varphi(x_2) = (x_2, \alpha x_2) = \alpha(x_2, x_2)$, значит равенство $\varphi(x_2) = (x_2, y)$ будет иметь место при $\alpha = \dfrac{\varphi(x_2)}{(x_2, x_2)}$. Итак, существование нужного элемента $y \in H$ доказано.

Покажем, что такой элемент y – единственный. Допустим, что $\exists y_1, y_2 \in H$ такие, что $\forall x \in H \ \ \varphi(x) = (x, y_1)$ и $\varphi(x) = (x, y_2)$. Вычитая эти равенства, получаем, что $0 = (x, y_1 - y_2)$. Возьмем $x = y_1 - y_2$, тогда $(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$, значит $y_1 = y_2$.

Докажем, что $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что $\|\varphi\|_{H^*} = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_H} = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|(x,y)|}{\|x\|_H} \leq \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|x\|_H \|y\|_H}{\|x\|_H} = \|y\|_H$. Если найдем элемент $x_0 \in H$, для которого $\|\varphi\|_{H^*} = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|(x,y)|}{\|x\|_H} \geq \dfrac{|(x_0,y)|}{\|x_0\|_H} = \|y\|_H$, то это и будет означать, что $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$. Выберем $x_0 = y \neq 0$, тогда $\|\varphi\|_{H^*} \geq \dfrac{|(y,y)|}{\|y\|_H} = \dfrac{\|y\|_H^2}{\|y\|_H} = \|y\|_H$.

Теорема доказана.

Замечание: доказательство теоремы с небольшими изменениями (какими?) проходит и в комплексном гильбертовом пространстве.

Теорема (о пространстве, сопряженном к гильбертову): действительное гильбертово пространство H изометрично и изоморфно своему сопряженному H^*.

Доказательство: по определению изометрии и изоморфизма пространств нужно доказать, что $\exists I : H^* \to H$, которое является изометричным изоморфизмом, т.е.:

1. I – линейное отображение;
2. I сохраняет норму, т.е. $\forall \varphi \in H^*$ $\|I\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*}$;
3. I – биективное отображение.

В силу теоремы Рисса $\forall \varphi \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что $\forall x \in H$ $\varphi(x) = (x,y)$ и при этом $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$. Тогда $\forall \varphi \in H^*$ определим $I\varphi = y$, где y – тот самый элемент, о котором утверждается в теореме Рисса.

1. Пусть $I\varphi_1 = y_1$, $I\varphi_2 = y_2$, $I(\varphi_1 + \varphi_2) = y$. Покажем, что $y = y_1 + y_2$. Поскольку $I\varphi_1 = y_1$, то $\varphi_1(x) = (x, y_1)$, и, аналогично, $\varphi_2(x) = (x, y_2)$ и $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = (x, y)$. Но $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = (x, y_1) + (x, y_2) = (x, y_1 + y_2)$ тогда, поскольку x – произвольный элемент, то $y = y_1 + y_2$. Доказательство второго свойства линейности – аналогичное.

2. Поскольку $I\varphi = y$, а по теореме Рисса $\|\varphi\|_{H^*} = \|y\|_H$, то $\|\varphi\|_{H^*} = \|I\varphi\|_H$.

3. Надо доказать инъективность и сюръективность. Инъективность: пусть $\varphi_1 \neq \varphi_2$, тогда $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^*} \neq 0$, значит, в силу п. 2 $\|I(\varphi_1 - \varphi_2)\|_H \neq 0$, т.е. $\|I\varphi_1 - I\varphi_2\|_H \neq 0$, откуда $I\varphi_1 \neq I\varphi_2$. Сюръективность: надо проверить, что $\forall y \in H$ $\exists \varphi \in H^*$: $I\varphi = y$. Определим $\varphi(x) = (x, y)$ для любого $y \in H$. В силу свойств скалярного произведения, оно линейно по аргументу x, тем самым, φ – линеен. Т.к. $|\varphi(x)| = |(x,y)| \leq \|x\|_H \|y\|_H = c\|x\|_H$, то φ – ограничен. Таким образом, $\varphi \in H^*$. Поскольку $\varphi(x) = (x, y)$, то по определению $I\varphi = y$.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, в действительном гильбертовом пространстве также определено изометричное и изоморфное отображение $I_1 : H \to H^*$, ставящее в соответствие любому элементу $y \in H$ единственный функционал $\varphi \in H^*$ по правилу $\varphi(x) = (x, y)$.

Замечание: легко проверяется, что в комплексном гильбертовом пространстве биекции I и I_1 остаются изометричными, но перестают быть линейными, поскольку, $I_1(\alpha y) = \bar{\alpha} I_1(y)$, $I(\alpha\varphi) = \bar{\alpha} I(\varphi)$. Такие отображения называются антилинейными.

Теорема (об общем виде функционала в $L_2(E)$***):*** пусть множество E имеет конечную меру Лебега, тогда:

1. $\forall y \in L_2(E)\ \exists \varphi_y \in L_2(E)^* : \forall x \in L_2(E)\ \varphi_y(x) = \int\limits_E x(t) y(t) d\mu$.

2. $\forall \varphi \in L_2(E)^*\ \exists y \in L_2(E) : \forall x \in L_2(E)\ \varphi(x) = \varphi_y(x) = \int\limits_E x(t) y(t) d\mu$. Такой элемент y единственен и $L_2(E)$ изометрично и изоморфно $L_2(E)^*$.

Доказательство: 1. По предыдущей теореме существует изометрическая биекция $I_1 : L_2(E) \to L_2(E)^*$, сопоставляющая каждому $y \in L_2(E)$ функционал $f_y \in L_2(E)^*$ по правилу $f_y(x) = (x, y) = \int\limits_E x(t)\overline{y(t)} d\mu$, причем $\|f_y\| = \|y\|$. Но тогда, поскольку каждому $y \in L_2(E)$ сопоставляется ровно один $\bar{y} \in L_2(E)$, то определен функционал $\varphi_y(x) = f_{\bar{y}}(x)$, который линеен и ограничен. Получили отображение $I_2 : L_2(E) \to L_2(E)^*$, такое, что $I_2(y) = f_{\bar{y}} = \varphi_y$. Ясно, что I_2 линейно. Поскольку $\|\varphi_y\| = \|f_{\bar{y}}\| = \|\bar{y}\| = \|y\|$, то I_2 изометрично, и, следовательно, инъективно.

2. Достаточно доказать сюръективность построенного в п. 1 отображения I_2. По теореме Рисса всякий элемент $\varphi \in L_2(E)^*$ – есть $f_y(x) = \int\limits_E x(t)\overline{y(t)} d\mu$ для некоторого (единственного) элемента $y \in L_2(E)$. Но тогда для этого y определен функционал $\varphi_y(x) = \int\limits_E x(t) y(t) d\mu \in L_2(E)^*$, поэтому $\varphi = \varphi_{\bar{y}} = I_2(y)$, т.е. отображение I_2 сюръективно, следовательно, I_2 – изоморфизм.

Теорема доказана.

2.2. Функционалы в нормированных пространствах

Теорема (об общем виде функционалов на пространстве l_1): 1. $\forall y \in l_\infty$ $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i \in l_1^*$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_1$, и при этом $\|\varphi\|_{l_1^*} = \|y\|_{l_\infty}$;

2. $\forall \varphi \in l_1^*$ $\exists y \in l_\infty$: $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_1$ $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$.

Доказательство: 1. Пусть $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$. Надо доказать линейность и ограниченность данного функционала, а также равенство норм.

а) Линейность: $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_1 \xi_i^{(1)} + \lambda_2 \xi_i^{(2)}) y_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(1)} y_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(2)} y_i =$ $= \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)$.

б) Ограниченность: $|\varphi(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| |y_i|$. Поскольку l_∞ – это пространство ограниченных последовательностей и $\|y\|_{l_\infty} = \sup_i |y_i|$, то $\forall i \in \mathbb{N}$ $|y_i| \le \|y\|_{l_\infty}$. Таким образом, $|\varphi(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \cdot \|y\|_{l_\infty} = \|y\|_{l_\infty} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|y\|_{l_\infty} \cdot \|x\|_{l_1}$. Следовательно, функционал φ ограничен.

в) Равенство норм: разделим полученное в предыдущем пункте неравенство на $\|x\|_{l_1}$ и возьмем по всем $x \ne 0$ точную верхнюю грань: $\sup_{x \ne 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{l_1}} \le \|y\|_{l_\infty}$, откуда $\|\varphi\|_{l_1^*} \le \|y\|_{l_\infty}$. Установим неравенство противоположного знака:

$$\|\varphi\|_{l_1^*} = \sup_{x \ne 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{l_1}} \ge \frac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|_{l_1}} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(0)} y_i \right|}{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_i^{(0)} \right|}.$$

Возьмем $x_0 = (0, 0, \ldots, \underset{i}{\pm 1}, 0, 0, \ldots)$, причем знак ± 1 будем выбирать совпадающим со знаком y_i. Тогда при подстановке такого x_0 в обеих суммах останется одно слагаемое с номером i, причем в числителе в этом слагаемом y_i умножится на свой знак, т.е. даст $|y_i|$, а в знаменателе останется 1. Итак, $\|\varphi\|_{l_1^*} \ge |y_i|$. Поскольку i – любое, то $\|\varphi\|_{l_1^*} \ge \sup_i |y_i| = \|y\|_{l_\infty}$. Таким образом, $\|\varphi\|_{l_1^*} = \|y\|_{l_\infty}$.

2. Пусть $\varphi \in l_1^*$. Надо найти такое $y \in l_\infty$, что $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$. Возьмем $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, 0, \ldots)$ и обозначим $\varphi(e_i) = y_i$. Поскольку функционал φ линеен

и ограничен, то он ограниченное множество векторов $\{e_i\}$ переводит в ограниченное множество векторов $\{\varphi(e_i)\}$. Таким образом, множество $\{y_i\}$ ограничено, поэтому вектор $y=\left(y_i\right)_{i=1}^{\infty}\in l_\infty$. Рассмотрим далее последовательность $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$, тогда $x_n=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+...+\xi_n e_n$ и, значит

$$\varphi(x_n)=\xi_1\varphi(e_1)+\xi_2\varphi(e_2)+...+\xi_n\varphi(e_n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i .$$

Пусть $x=(\xi_1,\xi_2,...)$. Тогда $\|x-x_n\|_{l_1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i-\xi_i^{(n)}\right|=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|-\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|$.

По определению пространства l_1 ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|$ сходится, а $\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|$ – это частичная сумма этого ряда. По определению суммы ряда, к ней стремятся все частичные суммы, значит при $n\to\infty$ $\|x-x_n\|_{l_1}\to 0$, откуда $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{l_1}{\to}} x$.

В равенстве $\varphi(x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i y_i$ перейдем к пределу при $n\to\infty$, тогда, поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{l_1}{\to}} x$, а φ – непрерывен, то $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ и значит $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, пространство l_1^* изометрично и изоморфно пространству l_∞.

Теорема (об общем виде функционалов на пространстве c_0): 1. $\forall y\in l_1$ $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i\in {c_0}^*$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c_0$, и при этом $\|\varphi\|_{{c_0}^*}=\|y\|_{l_1}$;

2. $\forall\varphi\in {c_0}^*$ $\exists y\in l_1$: $\forall x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c_0$ $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$.

Доказательство: 1. а) Линейность доказывается аналогично предыдущей теореме.

б) Ограниченность: поскольку $y\in l_1$, то $\|y\|_{l_1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|$. Кроме того, $x\in c_0$, поэтому $\|x\|_{c_0}=\sup\limits_i|\xi_i|$, откуда $\forall i\in\mathbb{N}$ $|\xi_i|\le\|x\|_{c_0}$. Таким образом, получаем, что

$$|\varphi(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i||y_i|\le\|x\|_{c_0}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|=\|y\|_{l_1}\cdot\|x\|_{c_0} .$$

Итак, функционал φ ограничен.

в) Равенство норм: разделим полученное неравенство на $\|x\|_{c_0}$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $x\ne 0$: $\sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{c_0}}\le\|y\|_{l_1}$, откуда $\|\varphi\|_{{c_0}^*}\le\|y\|_{l_1}$. Далее,

$\|\varphi\|_{c_0^*}=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{c_0}}\geq\dfrac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|_{c_0}}=\dfrac{\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(0)}y_i\right|}{\sup\limits_i\left|\xi_i^{(0)}\right|}$. Возьмем $x_0=(\underbrace{\pm 1,\pm 1,...,\pm 1}_{n},0,0,...)$, тогда, поскольку $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i^{(0)}=0$, то $x_0\in c_0$. Знаки выберем совпадающими со знаками соответствующих y_i, тогда $\|\varphi\|_{c_0^*}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|$. При $n\to\infty$ $\|\varphi\|_{c_0^*}\geq\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|=\|y\|_{l_1}$. Таким образом, $\|\varphi\|_{c_0^*}=\|y\|_{l_1}$.

2. Пусть $\varphi\in c_0^{\ *}$, т.е. φ – линейный и ограниченный, а значит, непрерывный функционал. Надо найти $y\in l_1$, чтобы $\forall x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c_0$ $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$.

Возьмем $e_i=(0,0,...,0,\underset{i}{1},0,0,...)$ и обозначим $\varphi(e_i)=y_i$. Рассмотрим последовательность $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$, тогда $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ и значит $\varphi(x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i y_i$. Пусть $x=(\xi_1,\xi_2,...)$. Тогда $\|x-x_n\|_{c_0}=\sup\limits_i\left|\xi_i-\xi_i^{(n)}\right|$, откуда $\|x-x_n\|_{c_0}=\sup\left\{|\xi_{n+1}|,|\xi_{n+2}|,...\right\}$.

Поскольку $x\in c_0$, то $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=0$, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $|\xi_n|<\varepsilon$. Таким образом, начиная с некоторого номера, $\sup\left\{|\xi_{n+1}|,|\xi_{n+2}|,...\right\}<\varepsilon$, откуда $\|x-x_n\|_{c_0}<\varepsilon$, т.е. $x_n\underset{n\to\infty}{\overset{c_0}{\to}}x$.

Перейдем в равенстве $\varphi(x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i y_i$ к пределу при $n\to\infty$, учитывая, что $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ и получим, что $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$. Осталось доказать, что построенный элемент $y=(y_i)_{i=1}^{\infty}$ действительно принадлежит пространству l_1.

Рассмотрим вектор $x_0=\left(\operatorname{sign}y_1,\operatorname{sign}y_2,...,\operatorname{sign}y_n,0,0,...\right)\in c_0$ при произвольном фиксированном $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что $\|x_0\|_{c_0}=1$. Кроме того, $\varphi(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|$, а, поскольку $|\varphi(x_0)|\leq\|\varphi\|\cdot\|x_0\|_{c_0}=\|\varphi\|$, то получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|\leq\|\varphi\|$. Поскольку n произвольно, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|$ с неотрицательными членами ограничены сверху. В силу критерия Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|y_i|$ сходится, т.е. $y\in l_1$.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, пространство c_0^* изометрично и изоморфно пространству l_1.

Теорема (об общем виде функционалов на пространстве l_p): 1. Пусть $p>1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, тогда $\forall y\in l_q$ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i\in l_p^*$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_p$ и при этом $\|\varphi\|_{l_p^*}=\|y\|_{l_q}$;

2. $\forall\varphi\in l_p^*$ $\exists y\in l_q$: $\forall x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_p$ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$.

Доказательство: 1. Снова линейность очевидна, поэтому проверим ограниченность и установим равенство норм.

$$|\varphi(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|y\|_{l_q}\cdot\|x\|_{l_p},$$

значит, φ ограничен. Разделим полученное неравенство на $\|x\|_{l_p}$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $x\ne 0$: $\sup\limits_{x\ne0}\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{l_p}}\le\|y\|_{l_q}$, откуда $\|\varphi\|_{l_p^*}\le\|y\|_{l_q}$. Далее, $\|\varphi\|_{l_p^*}=\sup\limits_{x\ne0}\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{l_p}}\ge\frac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|_{l_p}}=\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(0)}y_i\right|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$. Возьмем $\xi_i^{(0)}=\pm|y_i|^{q-1}$. Знак выбирается совпадающим со знаком y_i, тогда, т.к. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\left|\xi_i^{(0)}\right|^p=|y_i|^{p(q-1)}=|y_i|^q$. Поскольку $y\in l_q$, то отсюда следует, что $x_0\in l_p$. Кроме того, $\xi_i^{(0)}y_i=\pm y_i\cdot|y_i|^{q-1}=$ $=|y_i|\cdot|y_i|^{q-1}=|y_i|^q$. Отсюда $\|\varphi\|_{l_p^*}\ge\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|y\|_{l_q}$. Окончательно, $\|\varphi\|_{l_p^*}=\|y\|_{l_q}$.

2. Пусть $\varphi\in l_p^*$. Надо найти такое $y\in l_q$, что $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$. Возьмем $e_i=(0,0,...,0,\underset{i}{1},0,0,...)$ и обозначим $\varphi(e_i)=y_i$. Пусть $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$, тогда $x_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ и значит $\varphi(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i$. Пусть теперь $x=(\xi_1,\xi_2,...)$, тогда $\|x-x_n\|_{l_p}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i-\xi_i^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. По определению пространства l_p ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p$

сходится, а $\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p$ – это остаток данного ряда. По теореме об остатке сходящегося ряда $\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p \to 0$ при $n\to\infty$. Итак, при $n\to\infty$ $\|x-x_n\|_{l_p}\to 0$, откуда $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{l_p} x$. В равенстве $\varphi(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i$ перейдем к пределу при $n\to\infty$, тогда, поскольку $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{l_p} x$, а φ – непрерывен, то $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ и значит $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$.

Принадлежность элемента $y=(y_i)_{i=1}^{\infty}$ пространству l_q предлагается установить самостоятельно (задача 10).

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, пространство l_p^* изометрично и изоморфно пространству l_q.

Замечание: теоремы доказаны в предположении, что функционалы заданы в действительных пространствах. Если пространства комплексные, то все доказательства проходят с очевидными изменениями на этапе оценки нормы функционала снизу (вместо $\operatorname{sign} y_i$ надо брать $\dfrac{\overline{y_i}}{|y_i|}$).

Теорема (о частном виде функционалов на пространстве c): 1. $\forall y\in l_1$ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i \in c^*$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c$;

2. $\exists\varphi\in c^*$, который нельзя представить в виде $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$ для некоторого $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c$ и для всех $y\in l_1$.

Замечание: точно такой же частный вид имеет и функционал $\varphi\in l_\infty^*$.

Доказательство: 1. Линейность очевидна. Проверим ограниченность: $\forall x\in c$ $|\varphi(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i||y_i|\le\sup_i|\xi_i|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|=\|y\|_{l_1}\cdot\|x\|_c$, значит, φ ограничен.

2. Поскольку c – пространство последовательностей, имеющих предел, то определим функционал φ следующим образом: $\varphi(x)=\lim_{i\to\infty}\xi_i$, $\forall x\in c$. Линейность φ очевидна в силу линейности предела. Далее, $|\varphi(x)|=\left|\lim_{i\to\infty}\xi_i\right|=\lim_{i\to\infty}|\xi_i|\le$ $\le\lim_{i\to\infty}\sup_i|\xi_i|=\|x\|_c$ значит φ ограничен. Таким образом, $\varphi\in c^*$. Допустим теперь, что φ можно представить в указанном виде $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$, где $y=(y_i)_{i=1}^{\infty}\in l_1$. Возьмем $x=(1,0,0,...)$, тогда $\varphi(x)=\lim_{i\to\infty}\xi_i=0$, откуда $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i=0$, а с другой сто-

роны, $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i = y_1$. Таким образом, $y_1 = 0$. Аналогично, взяв $x = (0,1,0,...)$, получим, что $y_2 = 0$. И т.д. Итак, $\forall i \in \mathbb{N}\ \ y_i = 0$, т.е. $\forall x \in c\ \ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i = 0$. С другой стороны, при $x = (1,1,...,1,...)$ $\varphi(x) = \lim_{i\to\infty}\xi_i = 1$. Противоречие.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, в пространствах c_0^*, l_1^*, l_p^* сохраняется свойство конечномерных пространств, элементы которых могут быть представлены линейной комбинацией "базисных" векторов. Линейные комбинации "базисных" векторов в указанных пространствах образуют всюду плотные множества. Для пространств c^* и l_∞^* это свойство неверно. Общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве c^* см. далее в примере 4.

Теорема (об интегральных функционалах на $L_1(E)$): пусть E – измеримое множество, g – измеримая функция, $f \in L_1$, $\varphi(f) = \int_E f(x)g(x)d\mu$. Тогда $\varphi \in L_1^*$ тогда и только тогда, когда $g \in L_\infty$ и при этом $\|\varphi\|_{L_1^*} = \|g\|_{L_\infty}$.

Доказательство: 1. Пусть $g \in L_\infty$. Покажем, что $\varphi \in L_1^*$ и $\|\varphi\|_{L_1^*} \le \|g\|_{L_\infty}$.

Поскольку $g(x) \in L_\infty$, то $|g(x)| \overset{п.в.}{\le} c$, тогда $|f(x)g(x)| \overset{п.в.}{\le} c|f(x)|$. Таким образом, $|\varphi(f)| = \left|\int_E f(x)g(x)d\mu\right| \le \int_E |f(x)g(x)|d\mu \le c\int_E |f(x)|d\mu = c\|f\|_{L_1}$. Итак, функционал φ определен $\forall f \in L_1$ и ограничен. В силу свойств линейности интеграла Лебега, функционал φ – линеен. Таким образом, $\varphi \in L_1^*$.

Далее, поскольку $\|g\|_{L_\infty} = \operatorname*{esssup}_E |g(x)|$, а $|g(x)| \le \operatorname*{esssup}_E |g(x)|$ для почти всех $x \in E$, то возьмем $c = \operatorname*{esssup}_E |g(x)| = \|g\|_{L_\infty}$ и получим, что $|\varphi(f)| \le \|g\|_{L_\infty} \cdot \|f\|_{L_1}$. Разделим это неравенство на $\|f\|_{L_1}$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $f \ne 0$, тогда $\sup_{f\ne 0}\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{L_1}} \le \|g\|_{L_\infty}$, откуда $\|\varphi\|_{L_1^*} \le \|g\|_{L_\infty}$.

2. Докажем, что если $\varphi \in L_1^*$, то $g \in L_\infty$ и $\|\varphi\|_{L_1^*} \ge \|g\|_{L_\infty}$. Таким образом, достаточно доказать, что $\operatorname*{esssup}_E |g(x)| \le \|\varphi\|_{L_1^*}$. Обозначим $M = \operatorname*{esssup}_E |g(x)|$.

Для некоторого $f_0 \ne 0$ получаем, что:

$$\|\varphi\|_{L_1^*} = \sup_{f\ne 0}\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{L_1}} \ge \frac{|\varphi(f_0)|}{\|f_0\|_{L_1}} = \frac{\left|\int_E f_0(x)g(x)d\mu\right|}{\int_E |f_0(x)|d\mu}.$$

Далее, возьмем $\forall\varepsilon>0$, тогда $M-\varepsilon<M$ и поэтому $M-\varepsilon$ не является почти всюду мажорантой для функции g, значит, неравенство $|g(x)|\le M-\varepsilon$ не может почти всюду выполняться, и значит, существует множество A ненулевой меры, на котором $|g(x)|>M-\varepsilon$. Рассмотрим произвольную функцию $\tilde{f}\in L_1(E)$ и выберем f_0 так, чтобы вне множества A она была равна нулю, а на множестве A $f_0=|\tilde{f}|\dfrac{\overline{g}}{|g|}\in L_1$, тогда

$$\|\varphi\|_{L_1^*}\ge\frac{\left|\int\limits_E f_0(x)g(x)d\mu\right|}{\int\limits_E|f_0(x)|d\mu}=\frac{\left|\int\limits_A f_0(x)g(x)d\mu\right|}{\int\limits_A|f_0(x)|d\mu}=\frac{\int\limits_A|\tilde{f}(x)|\cdot|g(x)|d\mu}{\int\limits_A|\tilde{f}(x)|d\mu}>(M-\varepsilon)\frac{\int\limits_A|\tilde{f}(x)|d\mu}{\int\limits_A|\tilde{f}(x)|d\mu}=M-\varepsilon.$$

При $\varepsilon\to0$ получаем, что $\|\varphi\|_{L_1^*}\ge M=\|g\|_{L_\infty}$.

Теорема доказана.

Теорема (об общем виде функционала на $L_1(E)$): если множество E измеримо, то $\forall\varphi\in L_1^*\ \exists g\in L_\infty:\ \forall f\in L_1\ \ \varphi(f)=\int\limits_E f\cdot g d\mu$.

Замечание: доказательство этой теоремы см., напр., в [3].

Теорема (о пространстве, сопряженном к $L_1(E)$): пространство L_1^* изометрично и изоморфно пространству L_∞.

Доказательство: $\forall g\in L_\infty$ поставим в соответствие $\varphi\in L_1^*$ такой, что $\varphi=I(g)$ и $\varphi(f)=\int\limits_E f(x)g(x)d\mu$. Отображение I, очевидно, линейно и сохраняет норму по теореме об интегральных функционалах на L_1, т.е. изометрично. По теореме об общем виде функционала на L_1, I – сюръективно. Если $\varphi_1\ne\varphi_2$, то $\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_1^*}\ne0$. Поскольку $\|\varphi\|_{L_1^*}=\|g\|_{L_\infty}$, то $\|g_1-g_2\|_{L_\infty}\ne0$, откуда $g_1\ne g_2$, значит I – инъективно. Таким образом, I – изоморфизм.

Теорема доказана.

Теорема (об общем виде функционалов на $L_p(E)$): пусть $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ и множество E измеримо, тогда:

1. $\forall g\in L_q(E)\ \ \varphi(f)=\int\limits_E f(x)g(x)d\mu\in L_p(E)^*$, где $f\in L_p(E)$. При этом $\|\varphi\|_{L_p^*}=\|g\|_{L_q}$;
2. $\forall\varphi\in L_p(E)^*\ \exists g\in L_q(E):\ \forall f\in L_p(E)\ \ \varphi(f)=\int\limits_E f(x)g(x)d\mu$.

Доказательство: 1. Ясно, что $\varphi(f)=\int\limits_E f(x)g(x)d\mu$ линеен, а, поскольку

$$|\varphi(f)|=\left|\int\limits_E f(x)g(x)d\mu\right|\le\left(\int\limits_E|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_E|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\|g\|_{L_q}\cdot\|f\|_{L_p},\quad\text{то}\quad\varphi\in L_p^*.$$

Разделим полученное неравенство на $\|f\|_{L_p}$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $f \neq 0$: $\sup\limits_{f\neq 0}\dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{L_p}} \leq \|g\|_{L_q}$, откуда $\|\varphi\|_{L_p^*} \leq \|g\|_{L_q}$. Далее, для некоторого $f_0 \neq 0$ получаем $\|\varphi\|_{L_p^*} = \sup\limits_{f\neq 0}\dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{L_p}} \geq \dfrac{|\varphi(f_0)|}{\|f_0\|_{L_p}} = \dfrac{\left|\int\limits_E f_0(x)g(x)d\mu\right|}{\left(\int\limits_E |f_0(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}$. Пусть $f_0 = |g|^{q-1}\dfrac{\overline{g}}{|g|}$, тогда $|f_0|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$, а $f_0 \cdot g = |g|^{q-1}\cdot|g| = |g|^q$, поэтому $\|\varphi\|_{L_p^*} \geq \dfrac{\int\limits_E |g(x)|^q d\mu}{\left(\int\limits_E |g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} =$

$= \left(\int\limits_E |g(x)|^q d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_E |g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{L_q}$. Таким образом, $\|\varphi\|_{L_p^*} = \|g\|_{L_q}$.

2. Без доказательства (см. [3,7]).

Теорема условно доказана.

Замечание: аналогично случаю $p=1$ показывается, что при $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ пространство $L_p(E)^*$ изометрично и изоморфно пространству $L_q(E)$.

Примеры решения задач

1. Пусть $\mathbb{R}_p^n$ – линейное пространство n-мерных вещественных векторов $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ с нормой $\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\leq p<+\infty \\ \max\limits_k |\xi_k|, & p=+\infty \end{cases}$. Найти общий вид линейного непрерывного функционала в $\mathbb{R}_p^n$ при $1<p<+\infty$ и вычислить его норму.

Решение: покажем, что при $1<p<+\infty$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ $\forall y=(\eta_1,...,\eta_n)\in\mathbb{R}_q^n$ всякий функционал $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k\eta_k \in (\mathbb{R}_p^n)^*$, где $x=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}_p^n$.

Линейность φ очевидна. Проверим его ограниченность:

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{k=1}^n \xi_k\eta_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_q \cdot \|x\|_p,$$

следовательно, φ ограничен, а значит, непрерывен.

Найдем норму этого функционала. Для этого разделим полученное неравенство на $\|x\|_p$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $x \neq 0$, тогда получим, что $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_p} \leq \|y\|_q$, откуда $\|\varphi\| \leq \|y\|_q$. С другой стороны, найдется $x_0 \neq 0$ такой, что $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_p} \geq \dfrac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|_p} = \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} \eta_k\right|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\xi_k^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$. Возьмем $\xi_k^{(0)} = |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sign} \eta_k$ при $k = \overline{1,n}$, тогда $\left|\xi_k^{(0)}\right|^p = |\eta_k|^{p(q-1)} = |\eta_k|^q$ и $\xi_k^{(0)} \eta_k = |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sign} \eta_k \cdot \eta_k = |\eta_k|^{q-1} \cdot |\eta_k| = |\eta_k|^q$, откуда $\|\varphi\| \geq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_q$. Таким образом, $\|\varphi\| = \|y\|_q$.

Осталось показать, что для всякого функционала $\varphi \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ найдется $y = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}_q^n$ такой, что для всех $x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}_p^n$ $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$. Поскольку $x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}_p^n$, а вектора $e_k = (0, ..., 0, \underset{k}{1}, 0, ..., 0)$ при $k = \overline{1,n}$ образуют базис в $\mathbb{R}_p^n$, то $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$.

Тогда $\varphi(x) = \xi_1 \varphi(e_1) + \xi_2 \varphi(e_2) + ... + \xi_n \varphi(e_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \varphi(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$ при $\eta_k = \varphi(e_k)$. Итак, нашли нужный элемент $y = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}_q^n$.

2. Найти общий вид и вычислить норму линейного оператора $A : \mathbb{R}_1^m \to \mathbb{R}_1^n$.

Решение: покажем, что для любой числовой действительной матрицы $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,m}$ оператор $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}_1^m, \mathbb{R}_1^n)$, где $x = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}_1^m$.

Перемножая матрицы, получаем, что

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1m}\xi_m \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2m}\xi_m \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nm}\xi_m \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^{n}.$$

Линейность оператора A очевидна. Проверим его ограниченность:

$$\|A(x)\|_1=\left\|\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^n\right\|_1=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j\right|\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m|a_{ij}|\cdot|\xi_j|\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\max_{1\le j\le m}|a_{ij}|\cdot|\xi_j|=$$

$$=\sum_{i=1}^n\max_{1\le j\le m}|a_{ij}|\cdot\sum_{j=1}^m|\xi_j|=\sum_{i=1}^n\max_{1\le j\le m}|a_{ij}|\cdot\|x\|_1.$$

Таким образом, оператор A – ограничен. Разделим полученное неравенство на $\|x\|_1$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $x\ne 0$. Тогда получим, что $\sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|A(x)\|_1}{\|x\|_1}\le\sum\limits_{i=1}^n\max\limits_{1\le j\le m}|a_{ij}|$, откуда $\|A\|\le\sum\limits_{i=1}^n\max\limits_{1\le j\le m}|a_{ij}|$. С другой стороны,

$\|A\|=\sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|A(x)\|_1}{\|x\|_1}\ge\dfrac{\|A(x_0)\|_1}{\|x_0\|_1}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n\left|\sum\limits_{j=1}^m a_{ij}\xi_j^{(0)}\right|}{\sum\limits_{j=1}^m\left|\xi_j^{(0)}\right|}$. Возьмем $x_0=(0,0,...,\underset{k}{\operatorname{sign}}\,a_{ik},0,...,0)$, при $k=\overline{1,m}$ тогда $\sum\limits_{j=1}^m\left|\xi_j^{(0)}\right|=1$, $\sum\limits_{j=1}^m a_{ij}\xi_j^{(0)}=a_{ik}\operatorname{sign}a_{ik}=|a_{ik}|$. Таким образом, при любом $k=\overline{1,m}$ $\|A\|\ge\sum\limits_{i=1}^n|a_{ik}|$, значит, поскольку k – любое, то, переобозначив k через j, получаем, что $\|A\|\ge\sum\limits_{i=1}^n\max\limits_{1\le j\le m}|a_{ij}|$. Таким образом, $\|A\|=\sum\limits_{i=1}^n\max\limits_{1\le j\le m}|a_{ij}|$.

Осталось показать, что для всякого линейного ограниченного оператора $A\in L(\mathbb{R}_1^m,\mathbb{R}_1^n)$ найдется матрица $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,m}\in\mathbb{R}$, такая, что $A(x)=\left(\sum\limits_{j=1}^m a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^n$ для всех $x=(\xi_1,...,\xi_m)\in\mathbb{R}_1^m$. Поскольку $x=(\xi_1,...,\xi_m)\in\mathbb{R}_1^m$, а вектора $e_k=(0,...,0,\underset{k}{1},0,...,0)$ при $k=\overline{1,m}$ образуют базис в $\mathbb{R}_1^m$, то $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_me_m$. Тогда:

$$A(x)=\xi_1A(e_1)+\xi_2A(e_2)+...+\xi_mA(e_m)=\begin{pmatrix}A(e_1) & A(e_2) & \cdots & A(e_m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}.$$

Поскольку $A:\mathbb{R}_1^m\to\mathbb{R}_1^n$, то при $k=\overline{1,m}$ каждый элемент $A(e_k)$ – это вектор-столбец, состоящий из n элементов, всего таких столбцов m штук. Таким образом, нашли матрицу $\begin{pmatrix}A(e_1) & A(e_2) & \cdots & A(e_m)\end{pmatrix}$ размера $n\times m$, состоящую из действительных чисел, которая задает оператор A.

3. Пусть $p>1$ фиксировано. При каких $\alpha\in\mathbb{R}$ функционал $f_\alpha(x)=\int\limits_0^1\dfrac{x(t)}{t^\alpha}dt$ принадлежит $L_p^*[0,1]$?

Решение: по теореме об общем виде функционала на L_p имеем, что $L_p^*[0,1] \cong L_q[0,1]$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. При этом $f_\alpha \in L_p^*[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{t^\alpha} \in L_q[0,1]$, т.е., когда сходится интеграл $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha q}}dt$. Указанный интеграл сходится, если $\alpha q < 1$. Знак $\cong$ используется здесь и далее для обозначения изометричного изоморфизма.

4. Доказать, что $c^* \cong l_1$.

Решение: рассмотрим в пространстве c векторы $e_0 = (1,1,1,\ldots)$ и $e_k = (0,0,\ldots,\underset{k}{1},0,0,\ldots)$ при $k=1,2,3,\ldots$. Пусть $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in c$, $\xi_0 = \lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$ (этот предел существует по определению пространства c). Рассмотрим вектора $x_n = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\xi_0,\xi_0,\xi_0,\ldots)\in c$ и заметим, что $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k + \xi_0\left(e_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} e_k\right)$.

Пусть $\varphi \in c^*$, тогда, поскольку это линейный ограниченный функционал, то $\varphi(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\varphi(e_k) + \xi_0\left(\varphi(e_0) - \sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(e_k)\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k + \xi_0\left(\eta_0 - \sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\right)$. Рассмотрим вектор $x_0 = (\operatorname{sign}\eta_1, \operatorname{sign}\eta_2,\ldots,\operatorname{sign}\eta_i,0,0,\ldots)\in c$ (здесь $i\in\mathbb{N}$ – произвольный фиксированный номер). Тогда $\|x_0\|_c = \sup\limits_k\left|\xi_k^{(0)}\right| = 1$, $\xi_0^{(0)} = \lim\limits_{k\to\infty}\xi_k^{(0)} = 0$ и значит, $\varphi(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{i}|\eta_k|$. С другой стороны, $|\varphi(x_0)| \le \|\varphi\|\cdot\|x_0\| = \|\varphi\|$ и, таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{i}|\eta_k| \le \|\varphi\|$. Поскольку i – произвольный номер, то при $i\to\infty$ получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k| \le \|\varphi\| < +\infty$, т.е. $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}\in l_1$.

Далее, $\|x_n - x\|_c = \sup\{|\xi_0 - \xi_{n+1}|, |\xi_0 - \xi_{n+2}|,\ldots\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, поскольку $|\xi_0 - \xi_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, откуда $x_n \overset{c}{\to} x$. В силу непрерывности функционала $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$, но, с другой стороны, $\varphi(x_n) \to \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k + \xi_0\left(\eta_0 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k\right)$. Заметим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$ сходится абсолютно в силу неравенств $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k| \le \sup\limits_k|\xi_k|\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k| = \|x\|_c\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k| < +\infty$.

Таким образом, $\varphi(x) = \xi_0\tilde{\eta}_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$, где $\xi_0 = \lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$, $\tilde{\eta}_0 = \text{const}$. Вторую часть утверждения предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 12).

Заметим, что рассуждения проводились для случая, когда функционал действует в действительном пространстве. В случае комплексного пространства те же рассуждения проходят с очевидными изменениями при выборе вектора x_0.

Задачи для самостоятельного решения

1. В условиях примера 1 найти общий вид линейного непрерывного функционала в $\mathbb{R}_p^n$ при $p=1$ и вычислить его норму.

Указание: $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$, *где* $x=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}_1^n$, $y=(\eta_1,...,\eta_n)\in\mathbb{R}_\infty^n$.

2. В условиях примера 1 найти общий вид линейного непрерывного функционала в $\mathbb{R}_p^n$ при $p=+\infty$ и вычислить его норму.

Указание: $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$, *где* $x=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}_\infty^n$, $y=(\eta_1,...,\eta_n)\in\mathbb{R}_1^n$.

3. В условиях примера 1 найти общий вид и вычислить норму линейного оператора $A:\mathbb{R}_\infty^m\to\mathbb{R}_\infty^n$.

Указание: для всех $x=(\xi_1,...,\xi_m)\in\mathbb{R}_\infty^m$ $A(x)=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^{n}$ *и* $\|A\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|$.

4. В условиях примера 1 найти общий вид и вычислить норму линейного оператора $A:\mathbb{R}_1^m\to\mathbb{R}_\infty^n$.

Указание: для всех $x=(\xi_1,...,\xi_m)\in\mathbb{R}_1^m$ $A(x)=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^{n}$ *и* $\|A\|=\max_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}|a_{ij}|$.

5. В условиях примера 1 найти общий вид и вычислить норму линейного оператора $A:\mathbb{R}_\infty^m\to\mathbb{R}_1^n$.

Указание: для всех $x=(\xi_1,...,\xi_m)\in\mathbb{R}_\infty^m$ $A(x)=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^{n}$ *и* $\|A\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|$.

6. Пользуясь теоремой об интегральных функционалах на L_p, посчитать норму функционала из примера 3.

7. Пусть $p>1$ фиксировано. При каких $\alpha\in\mathbb{R}$ функционал $f_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k^\alpha}$ принадлежит l_p^* для всех $x=(\xi_1,\xi_2...)\in l_p$? Найти его норму (использовать теорему об общем виде функционала на l_p).

8. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всех $x=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ $\|x\|=\sup_{1\le k\le n}|\xi_k|$. Доказать, что в сопряженном пространстве $\|f\|=\sum_{k=1}^{n}|f_k|$, где $f=(f_1,...,f_n)\in\mathbb{R}^n$.

Указание: $\left(\mathbb{R}_\infty^n\right)^*\cong\mathbb{R}_1^n$.

9. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всех $x=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ $\|x\|=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|$. Доказать, что в сопряженном пространстве $\|f\|=\sup_{1\le k\le n}|f_k|$, где $f=(f_1,...,f_n)\in\mathbb{R}^n$.

Указание: $\left(\mathbb{R}_1^n\right)^*\cong\mathbb{R}_\infty^n$.

10. Завершить доказательство теоремы об общем виде функционалов на пространстве l_p.

11. Определим в пространстве $C[-1,1]$ линейный непрерывный функционал $\delta(x)=x(0)$. Существует ли такая функция $g(t)\in C[-1,1]$, что $\forall x(t)\in C[-1,1]$ $\delta(x)=\int_{-1}^{1}x(t)g(t)dt$?

Указание: рассмотреть функцию $x(t)=t^2g(t)$. Воспользоваться теоремой о функциях с нулевым интегралом.

12. Доказать, что $\forall(\eta_k)_{k=1}^{\infty}\in l_1$ $\varphi(x)=\xi_0\tilde{\eta}_0+\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k\in c^*$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in c$, $\xi_0=\lim_{k\to\infty}\xi_k$, $\tilde{\eta}_0=\mathrm{const}$, и при этом $\|\varphi\|_{c^*}=|\tilde{\eta}_0|+\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|$.

Указание: при получении оценки снизу зафиксировать номер $m\in\mathbb{N}$, взять $x_0=(\operatorname{sign}\eta_1,\operatorname{sign}\eta_2,...,\operatorname{sign}\eta_m,\operatorname{sign}\tilde{\eta}_0,\operatorname{sign}\tilde{\eta}_0,\operatorname{sign}\tilde{\eta}_0,...)$ и перейти к пределу при $m\to\infty$.

В задачах 13-22 для вычисления норм функционалов использовать соответствующие теоремы текущего пункта.

13. Найти норму в пространстве l_1 функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\xi_k}{k^2+10}$.

14. Найти норму в пространстве $L_2[0,1]$ функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t dt$.

15. Найти норму в пространстве l_1 функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\xi_k$.

16. Найти норму функционала $f(x)=\int_0^1 x(t)\operatorname{sign}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$ в пространстве $L_2[0,1]$.

17. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{k(k+1)}}$ в пространстве l_2.

18. Найти норму функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi_k$ в пространстве l_1.

19. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt$ в пространстве $L_2[0,1]$.

20. Найти норму функционала $f: L_1[0,1] \to \mathbb{R}$, если $f(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^3 x(t)dt$.

21. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k^2}$ в пространствах c и c_0.

22. Найти норму функционала $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k^2}$ в пространстве c.

23. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$ в пространстве l_1.

24. Найти норму функционала $f(x)=\xi_1+\xi_2$ в пространстве l_1.

25. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$ в пространстве l_2.

26. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

27. Найти норму функционала $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x(t)\sin \pi nt dt$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

28. Найти норму функционала $f(x)=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)dt$ в пространстве $L_1[-1,1]$, $\varepsilon\in(0,1]$.

29. Найти норму функционала $f(x)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\xi_k}{k\ln^2 k}$ в пространстве l_∞.

30. Найти норму функционала $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)dt$ в пространстве $L_2[-1,1]$, $\varepsilon\in(0,1]$.

2.3. Продолжение линейных функционалов

Теорема (о продолжении линейного ограниченного функционала на большее множество): пусть X – действительное линейное нормированное пространство, $X_0 \subset X$ – линейное многообразие, $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда этот функционал может быть продолжен на большее линейное многообразие без увеличения нормы, т.е. $\exists X_1 \supset X_0$, $X_1 \neq X_0$, $\exists \varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал, такой, что $\forall x \in X_0$ $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$ и $\|\varphi_1\| \le \|\varphi_0\|$.

Доказательство: пусть X_0 – данное многообразие. Возьмем любой вектор $e \notin X_0$. Через X_1 обозначим линейную оболочку многообразия X_0 и вектора e, т.е. множество векторов вида $X_1 = \{x_0 + \lambda e : x_0 \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Покажем, что каждый элемент X_1 действительно однозначно представим в виде $x_0 + \lambda e$. Допустим, это не так, т.е. имеется два представления $x_0{}^1 + \lambda_1 e$ и $x_0{}^2 + \lambda_2 e$ одного и того же элемента из X_1. Тогда ясно, что $x_0{}^1 + \lambda_1 e = x_0{}^2 + \lambda_2 e$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $x_0{}^1 = x_0{}^2$, т.е. представление в таком виде единственно. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда $e = \dfrac{x_0{}^2 - x_0{}^1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Это равенство невозможно, поскольку $x_0{}^1, x_0{}^2 \in X_0$, а $e \notin X_0$.

Определим функционал φ_1 следующим образом: $\varphi_1(e) = c$ и $\forall x_0 \in X_0$ $\varphi_1(x_0) = \varphi_0(x_0)$, а $\forall x \in X_1$ $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_0 + \lambda e) = \varphi_0(x_0) + \lambda c$. Ясно, что функционал φ_1 линеен, и на исходном множестве X_0 совпадает с φ_0. Осталось проверить, что его норма не увеличилась, т.е., что $\|\varphi_1\| \le \|\varphi_0\|$.

Поскольку $\|\varphi_1\| = \sup\limits_{\substack{x \in X_1 \\ x \neq 0}} \dfrac{|\varphi_1(x)|}{\|x\|}$, то надо проверить, что $\sup\limits_{\substack{x \in X_1 \\ x \neq 0}} \dfrac{|\varphi_1(x)|}{\|x\|} \le \|\varphi_0\|$. Для этого достаточно показать, что $\forall x \in X_1$, $x \neq 0$ $\dfrac{|\varphi_1(x)|}{\|x\|} \le \|\varphi_0\|$ или $|\varphi_1(x)| \le \|\varphi_0\| \cdot \|x\|$, т.е., что $|\varphi_0(x_0) + \lambda c| \le \|\varphi_0\| \cdot \|x_0 + \lambda e\|$, т.е., что $|\lambda| \left| \varphi_0\left(\dfrac{x_0}{\lambda}\right) + c \right| \le |\lambda| \cdot \|\varphi_0\| \cdot \left\| \dfrac{x_0}{\lambda} + e \right\|$.

Обозначим $\dfrac{x_0}{\lambda} = -y$ и получим, что надо доказать, что $|c - \varphi_0(y)| \le \|\varphi_0\| \cdot \|e - y\|$, или, что $\varphi_0(y) - \|\varphi_0\| \cdot \|e - y\| \le c \le \varphi_0(y) + \|\varphi_0\| \cdot \|e - y\|$.

Итак, нужно найти такое c, чтобы $\forall y \in X_0$ выполнялось последнее неравенство. В силу аксиомы полноты, достаточно проверить, что $\forall y_1, y_2 \in X_0$ $\varphi_0(y_1) - \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_1\| \le \varphi_0(y_2) + \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_2\|$, или $\varphi_0(y_1) - \varphi_0(y_2) \le \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_1\| + \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_2\|$, а это очевидно, поскольку

$$|\varphi_0(y_1) - \varphi_0(y_2)| = |\varphi_0(y_1 - y_2)| \le \|\varphi_0\| \cdot \|y_1 - y_2\| \le \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_1\| + \|\varphi_0\| \cdot \|e - y_2\|.$$

Теорема доказана.

Теорема Хана-Банаха (о продолжении линейных ограниченных функционалов): пусть X – действительное линейное нормированное пространство, $X_0 \subset X$ – линейное многообразие, $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда этот функционал можно продолжить на все пространство с сохранением нормы, т.е. $\exists \varphi : X \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал, такой, что $\forall x \in X_0$ $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ и $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

Доказательство: обозначим через E – множество всех продолжений функционала φ_0 без увеличения нормы, т.е. множество пар вида (ψ, L), где L – линейное многообразие, содержащее X_0, а ψ – продолжение функционала φ_0 с X_0 на L, т.е. $\psi : L \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in X_0$ $\psi(x) = \varphi_0(x)$.

Введем на этом множестве отношение частичного порядка (см. дополнение к разделу 2 части I), а именно, будем считать, что $\varphi_1 \le \varphi_2$, если φ_2 – продолжение φ_1. Покажем, что в таком множестве E всякая цепь имеет мажоранту, т.е. выполнено условие леммы Цорна.

Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ – множество функционалов, являющееся цепью, т.е., для любых двух функционалов один является продолжением другого. Надо найти мажоранту, т.е., функционал φ, который является продолжением их всех.

В качестве области определения нужного функционала φ возьмем объединение областей определений всех функционалов φ_α и для всех x из этого объединения определим $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x)$, где φ_α – тот функционал, в область определения которого попал этот x. Поскольку все φ_α линейны и ограничены, то φ тоже линеен и ограничен. Покажем, что $\|\varphi\| \le \|\varphi_0\|$. Поскольку все φ_α – это продолжения φ_0 без увеличения нормы, то $\|\varphi_\alpha\| \le \|\varphi_0\|$.

Тогда $|\varphi(x)| = |\varphi_\alpha(x)| \le \|\varphi_\alpha\| \cdot \|x\| \le \|\varphi_0\| \cdot \|x\|$, откуда $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \le \|\varphi_0\|$. Таким образом, убедились, что всякая цепь имеет мажоранту, поэтому во всем нашем построенном частично упорядоченном множестве E есть хотя бы один максимальный элемент, т.е. есть функционал φ, который дальше продолжить уже нельзя. В силу теоремы о продолжении линейного ограниченного функционала на большее множество, если функционал определен не на всем пространстве, то его продолжить можно. Таким образом, найденный функционал φ определен на всем пространстве. Норма его не увеличилась по сравнению с нормой исходного. С другой стороны, поскольку функционал φ является продолжением функционала φ_0 на все пространство, то ясно, что $\|\varphi\| \ge \|\varphi_0\|$ ($\sup$ по большему множеству больше или равен $\sup$ по меньшему). Окончательно получаем, что $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

Теорема доказана.

Замечание: теорема Хана-Банаха справедлива и в комплексном пространстве (см. [10], а также дополнение к разделу). Следствия из нее докажем уже для комплексных пространств.

Теорема (о вычислении нормы вектора с помощью функционала): пусть X – линейное нормированное пространство, $x \in X$, $x \neq 0$. Тогда $\exists \varphi \in X^*$ такой, что $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Доказательство: берем вектор x и через X_0 обозначим одномерное пространство, образованное этим вектором, т.е. $X_0 = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Определим на этом пространстве функционал $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{C}$ такой, что $\varphi_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Линейность этого функционала проверяется элементарно. Сосчитаем его норму: $\|\varphi_0\| = \sup\limits_{\substack{y \neq 0 \\ y \in X_0}} \frac{|\varphi_0(y)|}{\|y\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|\varphi_0(\lambda x)|}{\|\lambda x\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|x\|}{|\lambda| \cdot \|x\|} = 1$. По теореме Хана-Банаха φ_0 можно продолжить на все пространство, т.е. $\exists \varphi$ – линейный ограниченный функционал, определенный на всем пространстве, который на векторах вида λx совпадает с φ_0 и норма которого не изменилась, т.е. $\|\varphi\| = 1$. Кроме того, $\varphi(x) = \varphi(1 \cdot x) = \varphi_0(1 \cdot x) = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$.

Теорема доказана.

Теорема (о вычислении расстояния с помощью функционала): пусть X – линейное нормированное пространство, $L \subset X$ – линейное многообразие, $x_0 \in X \setminus \overline{L}$ и пусть $d > 0$ – расстояние от x_0 до L. Тогда $\exists \varphi \in X^*$ такой, что $\forall x \in L \;\; \varphi(x) = 0$; $\varphi(x_0) = 1$; $\|\varphi\| = \frac{1}{d}$.

Доказательство: рассмотрим линейную оболочку $\{L, x_0\}$. Ясно, что любой ее элемент однозначно представляется в виде $u = x + tx_0$, где $x \in L$, $t \in \mathbb{C}$ (см. доказательство теоремы о продолжении линейного ограниченного функционала на большее множество). Построим линейный функционал φ_0 так, что, при $u = x + tx_0 \;\; \varphi_0(u) = t$. Ясно, что $\forall x \in L \;\; \varphi_0(x) = 0$ и $\varphi_0(x_0) = 1$ (поскольку $x_0 = 0 + 1 \cdot x_0$). Далее, $|\varphi_0(u)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|u\|}{\|u\|} = \frac{|t| \cdot \|u\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{\|u\|}{\left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|} = \frac{\|u\|}{\left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t} \right) \right\|}$.

Напомним, что под расстоянием от точки x_0 до множества L понимается величина $d = \inf\limits_{x \in L} \|x_0 - x\|$. Таким образом, $\forall x \in L \quad d \leq \|x_0 - x\|$, а, поскольку $-\frac{x}{t} \in L$, то $d \leq \left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t} \right) \right\|$, откуда $|\varphi_0(u)| \leq \frac{\|u\|}{d}$. Итак, $\|\varphi_0\| = \sup\limits_{u \neq 0} \frac{|\varphi_0(u)|}{\|u\|} \leq \frac{1}{d}$.

По свойству точной нижней грани, известному из математического анализа, $\exists \{x_n\} \subset L$: $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_0 - x_n\| = d$. Так как $|\varphi_0(x_0 - x_n)| \leq \|\varphi_0\| \cdot \|x_0 - x_n\|$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n \to \infty} |\varphi_0(x_0 - x_n)| \leq \|\varphi_0\| \cdot d$. С другой стороны, поскольку $x_n \in L$, то $\varphi_0(x_n) = 0$, откуда $|\varphi_0(x_0 - x_n)| = |\varphi_0(x_0) - \varphi_0(x_n)| = |1 - 0| = 1$. Таким образом, $1 \leq \|\varphi_0\| \cdot d$, откуда $\|\varphi_0\| \geq \frac{1}{d}$. Таким образом, $\|\varphi_0\| = \frac{1}{d}$.

По теореме Хана-Банаха, функционал φ_0 можно продолжить на все пространство с сохранением нормы и получить требуемый функционал φ.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Пусть $x_1,...,x_n$ – линейно независимые элементы линейного нормированного пространства X, $c_1,...,c_n$ – некоторые действительные числа. Доказать существование функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x_k) = c_k$ $(k = 1,2,...,n)$.

Решение: покажем, что существуют такие линейные ограниченные функционалы $f_1,...,f_n$, определенные всюду на X, что $f_k(x_m) = \begin{cases} 1, k = m, \\ 0, k \neq m \end{cases}$. Рассмотрим вектор x_1 и обозначим через L_1 линейную оболочку векторов $x_2, x_3,..., x_n$. Поскольку L_1 конечномерно, то оно замкнуто.

Покажем, что $\rho(x_1, L_1) = \inf\limits_{y \in L_1} \|x_1 - y\| > 0$. От противного: допустим, что $\rho(x_1, L_1) = \inf\limits_{y \in L_1} \|x_1 - y\| = 0$. Это означает, что $x_1 \in L_1$ (иначе, как известно из п. 2.5 раздела 2 части I, выполнялось бы неравенство $\rho(x_1, L_1) > 0$) и $\exists y \in L_1$ (возможно, не единственный), такой, что $\rho(x_1, L_1) = \|x_1 - y\| = 0$, откуда $x_1 = y$. Поскольку $y \in L_1$, то $y = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$, поэтому $x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$, а это противоречит линейной независимости элементов $x_1,..., x_n$. Итак, $\rho(x_1, L_1) > 0$. Далее, по теореме о вычислении расстояния с помощью функционала, $\exists f_1 \in X^*$ такой, что $f_1(x_1) = 1$ и $\forall y \in L_1$ $f_1(y) = 0$, и, в частности, $f_1(x_k) = 0$ при $k = 2,3,...,n$ (поскольку все $x_k \in L_1$ при $k = 2,3,...,n$). Аналогично, возьмем элемент x_2 и найдем функционал $f_2 \in X^*$ такой, что $f_2(x_2) = 1$ и $f_2(x_k) = 0$ при $k = 1,3,4,...,n$. И т.д. Рассмотрим функционал $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$, определенный всюду на X. Этот функционал линеен и ограничен, как линейная комбинация линейных и ограниченных функционалов, и при этом:

$$f(x_k) = c_1 f_1(x_k) + c_2 f_2(x_k) + ... + c_k f_k(x_k) + ... + c_n f_n(x_k) = c_k.$$

2. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность элементов линейного нормированного пространства X, $\{c_n\}$ – последовательность действительных чисел, M – положительное число. Доказать, что для существования функционала $f \in X^*$, удовлетворяющего условиям $f(x_n) = c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\|f\| \leq M$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $n \in \mathbb{N}$ и любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ выполнялось неравенство $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$.

Решение: необходимость предлагается доказать самостоятельно (см. задачу 4).

Достаточность: пусть выполняется условие $\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k\right| \le M\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right\|$ и L – множество линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$ (n и λ_k произвольны). Для любого $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \in L$ рассмотрим функционал $f_0(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k$. Линейность этого функционала очевидна.

Проверим его ограниченность: $|f_0(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k\right| \le M\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right\| = M\|x\|$, т.е. f_0 ограничен и, кроме того, $\|f_0\|\le M$. Покажем, что значение $f_0(x)$ определяется элементом x однозначно. Для этого предположим, что есть два представления $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' x_k$. Тогда $\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' c_k\right|\le M\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' x_k\right\|=0$, откуда $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' c_k$. Но тогда $x_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, где все λ_i равны нулю, кроме $\lambda_k=1$, поэтому $f_0(x_k)=c_k$.

По теореме Хана-Банаха f_0 может быть продолжен на все пространство X до функционала f, причем $\|f\|=\|f_0\|\le M$ и $f(x_k)=f_0(x_k)=c_k$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

3. Пусть X – линейное нормированное пространство, $x\in X$. Доказать, что $\|x\|=\sup\limits_{f\in X^*,\,\|f\|=1}|f(x)|$.

Решение: обозначим $c=\sup\limits_{f\in X^*,\,\|f\|=1}|f(x)|$. По свойству линейного ограниченного функционала $\forall x\in X$ $\forall f\in X^*$ $|f(x)|\le\|f\|\cdot\|x\|$. Возьмем в этом неравенстве точную верхнюю грань по всем $f\in X^*$ таким, что $\|f\|=1$: $\sup\limits_{f\in X^*,\,\|f\|=1}|f(x)|\le\|x\|$, откуда $c\le\|x\|$. С другой стороны, поскольку $c=\sup\limits_{f\in X^*,\,\|f\|=1}|f(x)|$, то $\forall f\in X^*$ такого, что $\|f\|=1$ $c\ge|f(x)|$. По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала, для вектора $x\in X$ найдется функционал $f\in X^*$ такой, что $\|f\|=1$ и $f(x)=\|x\|$. Этот функционал и подставим в неравенство $c\ge|f(x)|$, тогда получим, что $c\ge\|x\|$. Окончательно, получаем, что $\|x\|=c$.

4. Доказать, что линейное многообразие L всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f\in X^*$, равный нулю на L, обращается в нуль тождественно.

Решение: пусть всякий линейный функционал $f\in X^*$, равный нулю на L, обращается в нуль тождественно, однако, L не всюду плотно в X, т.е. $\overline{L}\ne X$. Тогда $\forall x\in X$ и $x\notin\overline{L}$ $\rho\left(x,\overline{L}\right)=\inf\limits_{u\in\overline{L}}\|x-u\|>0$. Зафиксируем $x_0\in X$ $x_0\notin\overline{L}$. По теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists f \in X^*$: $\forall x \in L$ $f(x)=0$ и $f(x_0)=1$, т.е. $f \neq 0$. Таким образом, $f(x)=0$ на L, но в то же время f не равен нулю тождественно. Противоречие.

Обратно: пусть $\overline{L}=X$. Тогда по определению всюду плотности $\forall x \in X$ $\exists \{x_n\} \subset L$: $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольный функционал $f \in X^*$, обращающийся в нуль на L. Поскольку f непрерывен, то $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$, а раз $f(x_n)=0$, то и $f(x)=0$. Поскольку x выбирался произвольно, то $f=0$.

5. Пусть X – линейное нормированное пространство. Доказать, что если пространство X^* сепарабельно, то и X сепарабельно. Верно ли обратное утверждение?

Решение: пусть X^* сепарабельно, т.е., по определению, в нем есть счетное всюду плотное множество $M=\{f_1, f_2, ...\}$. По определению нормы функционала $\|f_k\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f_k(x)|$. Из определения точной верхней грани следует, что для $\varepsilon_k = \dfrac{\|f_k\|}{2}$ существует элемент $x_k \in X$ такой, что $\|x_k\|=1$ и $|f_k(x_k)| > \|f_k\| - \varepsilon_k = \dfrac{\|f_k\|}{2}$. Такой элемент x_k найдем для каждого функционала f_k. Поскольку множество f_k счетно, то и множество x_k – также счетно.

Множество линейных комбинаций элементов x_k с рациональными коэффициентами тоже счетно. Обозначим его через L, т.е. L – линейное многообразие. Осталось показать, что L – всюду плотно в X, т.е., что $\overline{L}=X$.

Допустим, что $\overline{L} \neq X$. Тогда по теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists f \in X^*$: $\forall x \in L$ $f(x)=0$, а для $y \in X$, $y \notin \overline{L}$ $f(y)=1$. Таким образом, $f \neq 0$. Поскольку $\forall x \in L$ $f(x)=0$, то $\forall k \in \mathbb{N}$ $f(x_k)=0$. Поскольку M всюду плотно в X^*, то для функционала f $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_i \in M$: $\|f - f_i\| < \varepsilon$.

Далее, имеем $|(f - f_i)(x_i)| = |f(x_i) - f_i(x_i)| = |f_i(x_i)| > \dfrac{\|f_i\|}{2}$, откуда получаем, что $\|f - f_i\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(f - f_i)(x)| \geq |(f - f_i)(x_i)| > \dfrac{\|f_i\|}{2}$, откуда $\|f_i\| < 2\|f - f_i\| < 2\varepsilon$. Значит, $\|f\| = \|f - f_i + f_i\| \leq \|f - f_i\| + \|f_i\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|f\|=0$, откуда $f=0$. Противоречие.

Обратное утверждение неверно, поскольку $l_1^* \cong l_\infty$, пространство l_1 – сепарабельно, а сопряженное к нему пространство l_∞ не сепарабельно.

6. Рассмотрим в $L_1[0,1]$ одномерное подпространство $L = \{\lambda t : \lambda \in \mathbb{R}\}$ и определим на L функционал $f(x) = \lambda$, если $x(t) = \lambda t$. Найти его продолжение на все пространство без увеличения нормы.

Решение: пусть $\varphi : L_1[0,1] \to \mathbb{R}$ – искомое продолжение функционала $f : L \to \mathbb{R}$, т.е. $\forall x(t) = \lambda t$ $\varphi(x) = f(x) = \lambda$ и $\|\varphi\| \le \|f\|$.

Поскольку $\|f\| = \sup\limits_{\substack{y \in L \\ y \ne 0}} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup\limits_{t \ne 0} \frac{|\lambda|}{\|\lambda t\|} = \frac{|\lambda|}{|\lambda| \cdot \|t\|} = \frac{1}{\|t\|} = \frac{1}{\int_0^1 |t| dt} = 2$, то функционал φ будем искать так, чтобы $\|\varphi\| \le 2$. По теореме об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $L_1[0,1]$ $\forall \varphi \in L_1^*$ $\exists g(t) \in L_\infty[0,1]$: $\forall x(t) \in [0,1]$ $\varphi(x) = \int_0^1 x(t) g(t) dt$ и $\|\varphi\| = \|g\|_{L_\infty} \le 2$. При этом при $x(t) = \lambda t$ получаем, что $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 t g(t) dt = f(x) = \lambda$, откуда $\int_0^1 t g(t) dt = 1$. Т.к. $\|g\|_{L_\infty} = \operatorname*{esssup}\limits_{t \in [0,1]} |g(t)| \le 2$, то выберем $g(t) = 2$. При таком выборе действительно $\int_0^1 t g(t) dt = 1$, поэтому, окончательно, $\varphi(x) = 2\int_0^1 x(t) dt$. Ясно, что построенный функционал линеен, ограничен и определен на всем пространстве $L_1[0,1]$.

Заметим, что продолжение функционала может быть неединственным.

7. Пусть $g : X \to \mathbb{C}$ – линейный ограниченный функционал. Доказать, что $\rho(x_0, \ker g) = \frac{|g(x_0)|}{\|g\|}$, $x_0 \notin \ker g$.

Решение: вначале покажем, что любой линейный ограниченный функционал $f \in X^*$ такой, что $\forall x \in \ker g$ $f(x) = 0$, пропорционален g. Ясно, что $\ker g \subset \ker f$. Зафиксируем точку $x_0 \notin \ker g$ и рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Подберем число $\mu \in \mathbb{C}$ так, чтобы $y = x - \mu x_0 \in \ker g$. Поскольку $g(y) = 0$, то $g(x) - \mu g(x_0) = 0$, откуда $\mu = \frac{g(x)}{g(x_0)}$. Таким образом, элемент $x \in X$ представляется в виде $x = \mu x_0 + y$, $\mu \in \mathbb{C}$, $y \in \ker g$. Легко показать, что это представление единственно. Поскольку $x - \mu x_0 \in \ker g \subset \ker f$, то $f(x - \mu x_0) = 0$. Отсюда следует, что $f(x) - \mu f(x_0) = 0$, $f(x) = \mu f(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x) = \lambda g(x)$.

Докажем исходное утверждение. По теореме о вычислении расстояния с помощью функционала для $x_0 \notin \ker g$ существует функционал $f \in X^*$ такой, что $\forall x \in \ker g$ $f(x) = 0$, $f(x_0) = 1$ и $\rho(x_0, \ker g) = \frac{1}{\|f\|}$. В силу доказанного выше $f = \lambda g$, откуда $\|f\| = |\lambda| \|g\|$. Поскольку $f(x_0) = 1 = \lambda g(x_0)$, то $|\lambda| = \frac{1}{|g(x_0)|}$.

8. Пусть H – гильбертово пространство, L – его подпространство, f – линейный ограниченный функционал, заданный на L. Доказать, что существует единственное продолжение f на все пространство H с сохранением нормы.

Решение: т.к. $L \subset H$ и L замкнуто, то L – гильбертово, следовательно, по теореме Рисса, существует однозначно определяемый функционалом f элемент $a \in L$ такой, что $\forall x \in L \ \ f(x) = (x,a)$ и $\|f\| = \|a\|$. Далее, $\forall x \in H$ определим функционал $\varphi \in H^*$ равенством $\varphi(x) = (x,a)$. Покажем, что φ является продолжением f на все пространство H, причем $\|\varphi\| = \|f\|$.

Действительно, при $x \in L \ \ \varphi(x) = (x,a) = f(x)$, т.е. $f = \varphi$ на L, т.е. φ является продолжением f. Кроме того, $|\varphi(x)| = |(x,a)| \le \|x\| \cdot \|a\|$, значит, $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \le \|a\|$. С другой стороны, при $x = a$ находим $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|(x,a)|}{\|x\|} \ge \dfrac{|(a,a)|}{\|a\|} = \|a\|$, значит, $\|\varphi\| = \|a\| = \|f\|$ и норма при продолжении не изменилась. Осталось показать единственность данного продолжения, т.е., что любое другое продолжение имеет норму, большую, чем $\|f\|$.

Пусть ψ – другое продолжение f на все пространство, тогда по теореме Рисса $\exists a_1 \in H$: $\forall x \in H \ \ \psi(x) = (x,a_1)$ и при этом $\|\psi\| = \|a_1\|$. При $x \in L$ имеем, что $\psi(x) = (x,a_1) = f(x) = (x,a) = \varphi(x)$, т.е. $(x,a_1) = (x,a)$, откуда $(x,a_1 - a) = 0$, значит, поскольку $x \in L$, то $a_1 - a \in L^{\perp}$, а, поскольку $a \in L$, то по теореме Пифагора $\|a_1\|^2 = \|a_1 - a + a\|^2 = \|a_1 - a\|^2 + \|a\|^2$. Отсюда следует, что $\|\psi\|^2 = \|a_1 - a\|^2 + \|f\|^2$, т.е., что $\|\psi\|^2 \ge \|f\|^2$, т.е. $\|\psi\| \ge \|f\|$, причем знак равенства при $a_1 \ne a$ не имеет места.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X – линейное нормированное пространство, $x, y \in X$, $x \ne y$. Доказать, что существует функционал $\varphi \in X^*$ такой, что $\varphi(x) \ne \varphi(y)$.

2. Доказать, что в любом линейном нормированном пространстве существует линейный ограниченный функционал, не равный тождественно нулю.

3. Пусть X – линейное нормированное пространство, $x \in X$. Доказать, что если $\forall f \in X^* \ \ f(x) = 0$, то $x = 0$.

4. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность элементов линейного нормированного пространства X, $\{c_n\}$ – последовательность действительных чисел, $M > 0$. Доказать, что если существует функционал $f \in X^*$, удовлетворяющий условиям $f(x_n) = c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\|f\| \le M$ то для всякого $n \in \mathbb{N}$ и любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ выполняется неравенство $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \le M \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$.

Указание: учесть, что элемент $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \in X$ *и рассмотреть* $|f(x)|$, *воспользоваться ограниченностью функционала.*

5. Пусть X – линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$ и для любого $f \in X^*$ такого, что $\|f\|=1$ выполняется неравенство $|f(x_0)|\le 1$. Доказать, что $\|x_0\|\le 1$.

Указание: предположить, что $\|x_0\|>1$ *и воспользоваться примером 3.*

6. Пусть $M=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_1 : \sum_{k=1}^{\infty}\xi_{2k}=0\right\}$, функционал f на множестве M задан формулой $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{2k-1}$. Продолжить функционал f на все пространство l_1 с сохранением нормы.

Указание: показать, что продолжение функционала f *может быть найдено в виде* $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$. *Использовать теорему об общем виде функционалов на пространстве* l_1.

7. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $A\in L(X,X)$. Доказать, что $\|A\|=\sup|f(Ax)|$, где верхняя грань берется по множеству $\left\{x\in X,\, f\in X^* : \|x\|=1, \|f\|=1\right\}$.

Указание: воспользоваться тем, что $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$ *и примером 3.*

8. Пусть $L=\left\{x\in L_2[0,1] : x(t)=0 \text{ почти всюду на } A\right\}$, где A – измеримое по Лебегу множество на $[0,1]$. Построить линейный непрерывный функционал f на $L_2[0,1]$, равный нулю на L, и такой, что $f(x)=1$ при $x(t)=t$, $t\in[0,1]$.

Указание: показать, что $f(x)=\left(\int_A x(t)dt\right)\left(\int_A tdt\right)^{-1}$, *где* $\mu(A)>0$.

9. Пусть X – линейное нормированное пространство. Доказать, что точка $x_0\in X$ является пределом в X линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$ ($\alpha_k\in\mathbb{R}, x_k\in X, n\in\mathbb{N}$) тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал $f\in X^*$, удовлетворяющий условию $f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=0$, удовлетворяет также условию $f(x_0)=0$.

Указание: обозначить $L=\left\{x : x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\}$ *и воспользоваться примером 4.*

10. Используя пример 5 показать, что $l_\infty^* \ncong l_1$.

11. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x=(\xi_1,\xi_2)$ на подпространстве $L=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : 2\xi_1-\xi_2=0\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=\xi_1$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы. Доказать, что такое продолжение единственно.

Указание: использовать тот факт, что в $\mathbb{R}^2$ общий вид линейного непрерывного функционала задается равенством $\varphi(x)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$.

12. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x=(\xi_1,\xi_2)$ на подпространстве $L=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : 2\xi_1-\xi_2=0\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=\xi_2$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы. Доказать, что такое продолжение единственно.

13. Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ одномерное подпространство $L=\left\{\lambda t : \lambda\in\mathbb{R}\right\}$ и определим на L функционал $f(x)=\lambda$, если $x(t)=\lambda t$. Найти его продолжение на все пространство без увеличения нормы.

14. Пусть $X=\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\|=2|\xi_1|+3|\xi_2|$, где $x=(\xi_1,\xi_2)$. На подпространстве $L=\left\{x\in X : \xi_1=0\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=-\xi_2$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

Указание: показать, что общий вид линейного ограниченного функционала в X – есть $\varphi(x)=2\xi_1\eta_1+3\xi_2\eta_2$, причем $\|y\|=\max\left\{|\eta_1|,|\eta_2|\right\}$, $y=(\eta_1,\eta_2)$.

15. В пространстве $\mathbb{R}^2_\infty$ с элементами $x=(\xi_1,\xi_2)$ и нормой $\|x\|=\max\left\{|\xi_1|,|\xi_2|\right\}$ на подпространстве $L=\left\{x\in\mathbb{R}^2_\infty : \xi_1-\xi_2=0\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=\xi_1+3\xi_2$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

Указание: можно воспользоваться геометрической интерпретацией нормы функционала (см. пример 13 п. 1.1). Нужный функционал найти из уравнения гиперплоскости (в данном случае – прямой) $\left\{x\in\mathbb{R}^2_\infty : \varphi(x)=1\right\}$, полученного из условия касания шара $B\left(0,1/\|f\|\right)$ этой гиперплоскости, проходящей через гиперплоскость $\left\{x\in L : f(x)=1\right\}$. Либо можно получить общий вид функционала аналогично предыдущей задаче.

16. Найти расстояние в пространстве $C[-1,1]$ от элемента $x_0(t)=t^2$ до ядра функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)dx$.

17. Найти расстояние в пространстве $C[-1,1]$ от элемента $x_0(t)=t$ до ядра функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dx$.

18. Доказать, что, если $x_0\notin\ker g$ и существует элемент наилучшего приближения $y^*\in\ker g$, для которого $\rho(x_0,\ker g)=\left\|x_0-y^*\right\|$, то $y^*=x_0-\dfrac{g(x_0)}{g(m)}\cdot m$,

где $m\notin\ker g$, $\|m\|=1$ и $g(m)=\|g\|$.

19. Доказать, что, если $x_0\notin\ker g$ и не существует элемента наилучшего приближения $y^*\in\ker g$, но существует минимизирующая последовательность $\left\{y_n^*\right\}\subset\ker g$ такая, что $\rho(x_0,\ker g)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_0-y_n^*\right\|$, то $y_n^*=x_0-\dfrac{g(x_0)}{g(m_n)}\cdot m_n$, где $m_n\notin\ker g$, $\|m_n\|=1$ и $g(m_n)\to\|g\|$.

20. Найти элемент наилучшего приближения или минимизирующую последовательность в задачах 16, 17. Если элемента наилучшего приближения не существует, то обосновать это.

Указание отсутствие элемента наилучшего приближения равносильно отсутствию элемента $m\in C[-1,1]$, такого, что $\|m\|=1$ и $f(m)=\|f\|$. Для доказательства отсутствия элемента наилучшего приближения в задаче 17, рассуждая от противного, показать, что, если $\|m\|=1$ и $f(m)=\|f\|$, то $m(t)=1$ для всех $t\in(0,1)$ и $m(t)=-1$ для всех $t\in(-1,0)$ и непрерывности в нуле быть не может.

21. Доказать, что $\rho(x_0,L)=\dfrac{|g(x_0)-c|}{\|g\|}$, где $L=\left\{x\in X: g(x)=c\right\}$, $g\in X^*$, $x_0\notin L$. Найти формулу элемента наилучшего приближения для этого случая.

Указание: показать, что $\rho(x_0,L)=\rho(x_0-\tilde{x},\ker g)$ при фиксированном $\tilde{x}\in L$.

22. Найти расстояние от точки $x_0=(1,-2,3,0,0,4)$ до гиперплоскости $L=\left\{x\in l_1^6: 2x_1+x_2-3x_6=6\right\}$, а также элемент наилучшего приближения.

23. Пусть X – линейное нормированное пространство, $M\subset X$ – линейное многообразие. Доказать, что $M^{\perp}=\left\{f\in X^*:\forall x\in M\ f(x)=0\right\}$ – подпространство в X^*. Доказать также, что, если $M\subset X$ – подпространство, то $M=\left\{x\in X:\forall f\in M^{\perp}\ f(x)=0\right\}$.

Указание: обозначить $N=\left\{x\in X:\forall f\in M^{\perp}\ f(x)=0\right\}$ и доказать, что $M\subset N$ и $\forall x\notin M\Rightarrow x\notin N$ (для этого использовать теорему о вычислении расстояния с помощью функционала).

24. В пространстве $\mathbb{R}^2_\infty$ с элементами $x=(\xi_1,\xi_2)$ и нормой $\|x\|=\max\left\{|\xi_1|,|\xi_2|\right\}$ на подпространстве $L=\left\{x\in\mathbb{R}^2_\infty:\xi_2=0\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=2\xi_1$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

25. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x=(\xi_1,\xi_2)$ и нормой $\|x\|=\sqrt{8\xi_1^2+\dfrac{1}{4}\xi_2^2}$ на подпространстве $L=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\xi_2=2\xi_1\right\}$ задан линейный функционал $f(x)=-6\xi_1$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

Указание: показать, что общий вид линейного ограниченного функционала – есть $\varphi(x) = 2\sqrt{2}\xi_1\eta_1 + \frac{1}{2}\xi_2\eta_2$, *причем* $\|y\| = \sqrt{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}$, $y = (\eta_1, \eta_2)$.

26. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x = (\xi_1, \xi_2)$ и нормой $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_1 - 2\xi_2|\}$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = 3\xi_1\}$ задан линейный функционал $f(x) = \xi_2$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

Указание: показать, что общий вид линейного ограниченного функционала – есть $\varphi(x) = \xi_1\eta_1 + (\xi_1 - 2\xi_2)\eta_2$, *причем* $\|y\| = |\eta_1| + |\eta_2|$, $y = (\eta_1, \eta_2)$.

27. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x = (\xi_1, \xi_2)$ и нормой $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_1 - 2\xi_2|\}$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = \xi_1\}$ задан линейный функционал $f(x) = \xi_2$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

28. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x = (\xi_1, \xi_2)$ и нормой $\|x\| = |\xi_1 + \xi_2| + |2\xi_1 - 4\xi_2|$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = 0\}$ задан линейный функционал $f(x) = 9\xi_1$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

Указание: показать, что общий вид линейного ограниченного функционала – есть $\varphi(x) = (\xi_1 + \xi_2)\eta_1 + (2\xi_1 - 4\xi_2)\eta_2$, *причем* $\|y\| = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\}$, $y = (\eta_1, \eta_2)$.

29. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x = (\xi_1, \xi_2)$ и нормой $\|x\| = |\xi_1 + \xi_2| + |2\xi_1 - 4\xi_2|$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 - 2\xi_2 = 0\}$ задан линейный функционал $f(x) = 9\xi_1$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

30. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой нормой на подпространстве $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ задан линейный функционал $f(x) = x$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

31. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой нормой на подпространстве $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ задан линейный функционал $f(x) = -x$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

32. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой нормой на подпространстве $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ задан линейный функционал $f(x) = x - y$. Продолжить его на все пространство с сохранением нормы.

33. В пространстве $L_2[0,1]$ на подпространстве многочленов степени не выше первой задан функционал $f(x) = x(1)$. Найти его продолжение на все пространство с сохранением нормы. Доказать единственность такого продолжения.

Указание: $\|f\| = 2$. *Обратить внимание на функцию* $y(t) = 6t - 2$.

34. В пространствах $C[0,3]$ и $L_1[0,3]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=2^t$ до множества $M=\left\{x:\int_0^3 x(t)dt=1\right\}$.

35. В пространствах $C[0,3]$ и $L_1[0,3]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=2^t$ до множества $M=\left\{x:\int_0^2 tx(t)dt-\int_2^3 tx(t)dt=0\right\}$.

36. В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t$ до множества $M=\left\{x(t):\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}x(t)dt=0\right\}$.

37. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=\sin t$ до множества $M=\{x(t):x(0)=x(1)\}$.

38. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=\cos t$ до множества $M=\left\{x(t):x(0)+\int_0^1 x(t)dt=2\right\}$.

39. В пространстве $L_1\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ найти расстояние от элемента $x_0(t)=t+1$ до множества $M=\left\{x(t):\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x(t)\sin t dt>1\right\}$.

Указание: вначале исследовать на внутренний экстремум (т.е. решить задачу $\|x_0-x\|\to\inf$ *без ограничения* $x\in M$ *и проверить, попадает ли найденное решение во множество* M*. Затем рассмотреть задачу на условный экстремум с условием* $x\in\partial M$ *).*

40. В пространстве l_1 найти расстояние от элемента $x_0(t)=\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ до множества $M=\left\{x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\xi_n\le\frac{1}{2}\right\}$.

41. В пространстве c_0 найти расстояние от элемента $x_0(t)=\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ до множества $M=\left\{x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\xi_n=1\right\}$.

2.4. Общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве $C[a,b]$

Определение: функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется функцией с ограниченным изменением, если $\exists c>0$: для любого разбиения отрезка $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ выполнено $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|\le c$.

Замечание: очевидно, что всякая монотонная функция имеет ограниченное изменение, т.к. для нее $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\left|f(b)-f(a)\right|$.

Определение: пусть $f(x)$ – функция с ограниченным изменением. Полным изменением (полной вариацией) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется точная верхняя грань сумм $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|$, которая берется по всем разбиениям отрезка $[a,b]$. Обозначение: $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f(x)=\sup\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|$.

Замечание: из определения следует, что $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f(x)\ge\left|f(b)-f(a)\right|$.

Теорема (свойства полного изменения): 1. Если α – число, то $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b \alpha f=|\alpha|\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f$.

2. Если f и g – функции с ограниченным изменением, то $f+g$ также имеет ограниченное изменение, и, при этом, $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b (f+g)\le\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f+\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g$.

3. Если $a<b<c$, то $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^c f=\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f+\mathop{\mathrm{V}}\limits_b^c f$.

4. Функция $v(x)=\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^x f$ монотонно неубывает на отрезке $[a,b]$.

5. Всякая функция с ограниченным изменением может быть представлена, как разность двух монотонно неубывающих функций.

Доказательство: 1. Очевидно из определения полного изменения.

2. Очевидно из определения полного изменения и свойств точных верхних граней.

3. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,c]$, в котором точка b является одной из точек деления, т.е. $x_r=b$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|=\sum\limits_{k=1}^{r}\left|\Delta f(x_k)\right|+\sum\limits_{k=r+1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|\le\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b f+$ $+\mathop{\mathrm{V}}\limits_b^c f$. Если b не является точкой деления, то добавим ее к этим точкам. Ясно, что, если $b\in\left(x_{k-1},x_k\right)$, то $\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\le\left|f(x_k)-f(b)\right|+\left|f(b)-f(x_{k-1})\right|$. Ос-

тальные слагаемые в сумме $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f(x_k)|$ не изменятся. Тем самым, сумма $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f(x_k)|$ при добавлении к разбиению точки b не уменьшается и $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f(x_k)| \le \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f$.

Ясно, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f$ – мажоранта для сумм $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f(x_k)|$. Поскольку $\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ – наименьшая из таких мажорант, то $\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \le \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f$.

С другой стороны, по определению точной верхней грани, $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения $\{x_i'\}$ и $\{x_j''\}$ отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, что $\sum_i |\Delta f(x_i')| > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum_j |\Delta f(x_j'')| > \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f - \frac{\varepsilon}{2}$. Объединив эти разбиения, получим разбиение отрезка $[a,c]$, для которого $\sum_k |\Delta f(x_k)| = \sum_i |\Delta f(x_i')| + \sum_j |\Delta f(x_j'')| > \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f - \varepsilon$. В силу произвольности ε по определению sup заключаем, что $\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \ge \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{c}{\underset{b}{\mathrm{V}}} f$.

4. Следует из свойства 3 и неотрицательности величины $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$.

5. Пусть f – функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$, $v(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $\varphi = v - f$. Тогда $f = v - \varphi$ и осталось доказать, что φ неубывает. Пусть $x_1 \le x_2$, тогда $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \big(v(x_2) - v(x_1)\big) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \ge 0$, поскольку $|f(x_2) - f(x_1)| \le \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f(x) = v(x_2) - v(x_1)$ (см. свойство 3).

Теорема доказана.

Определение: пусть $f(x)$ и $g(x)$ – ограниченные функции на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и выберем по произвольной точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Интегральной суммой Римана-Стилтьеса называется величина $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta g(x_k)$.

Определение: если существует предел $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$, где $\lambda = \max(x_k - x_{k-1})$ независимо от выбора $\{x_k\}$ и $\{\xi_k\}$, то $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ называется интегралом Римана-Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Замечание: пусть $g(x)$ монотонно возрастает, тогда $\Delta g(x_k) > 0$ и можно ввести суммы Дарбу-Стилтьеса: $\overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta g(x_k)$ и $\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta g(x_k)$, где $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Их свойства полностью повторяют свойства обычных сумм Дарбу. Точно также вводятся верхний и нижний интегралы Дарбу-Стилтьеса $\overline{I} = \inf \overline{S}$, $\underline{I} = \sup \underline{S}$ (грани берутся по всем разбиениям отрезка $[a,b]$). Дословно устанавливается, что интеграл Римана-Стилтьеса существует тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \Delta g(x_k) = 0$, где $\omega_k(f) = M_k - m_k$.

Теорема (об интегрируемости непрерывной функции): пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$, тогда интеграл $I = \int\limits_a^b f(x) dg(x)$ существует.

Доказательство: если $g(x)$ монотонно возрастает, то доказательство полностью копирует аналогичную теорему для интеграла Римана (используя теорему Кантора о равномерной непрерывности). В общем случае, поскольку $g(x)$ имеет ограниченное изменение, то ее можно представить в виде разности двух неубывающих ограниченных функций, т.е. $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Тогда $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta g_1(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta g_2(x_k) = \sigma_1 - \sigma_2$. Поскольку для неубывающих функций $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_1$ и $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_2$, то $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$.

Теорема доказана.

Теорема (об оценке интеграла): пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a,b]$, тогда $\left| \int\limits_a^b f(x) dg(x) \right| \le \max\limits_{[a,b]} |f(x)| \cdot \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$.

Доказательство: $\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| |\Delta g(x_k)| \le \max\limits_{[a,b]} |f(x)| \sum_{k=1}^{n} |\Delta g(x_k)| \le$ $\le \max\limits_{[a,b]} |f(x)| \cdot \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим требуемое.

Теорема доказана.

Теорема (о вычислении интеграла): 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем производную $g'(x)$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Если $g'(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$, причем справа стоит интеграл Римана.

2. Пусть $\rho(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$, $a\le c<b$ и $f(x)$ непрерывна в точке c, тогда $\int\limits_a^b f(x)d\rho(x-c)=f(c)$.

3. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $g(x)$ имеет всюду на $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, производную $g'(x)$, причем $g'(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Если при этом $g(x)$ имеет разрывы первого рода в точках $a=c_0<c_1<...<c_k<...<c_m=b$, то $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+$

$$+\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right].$$

Доказательство: 1. По формуле Ньютона-Лейбница можно представить $g(x)$ в виде $g(x)=g(a)+\int\limits_a^x g'(t)dt$, тогда $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta g(x_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)g'(x)dx$.

С другой стороны $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g'(x)dx$. Отсюда получаем, что $\sigma-\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(\xi_k)-f(x)\right)g'(x)dx$. Ясно, что для $x_{k-1}\le x\le x_k$ $\left|f(\xi_k)-f(x)\right|\le\omega_k(f)$, откуда $\left|\sigma-\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|g'(x)\right|dx$. Поскольку по условию $g'(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\left|g'(x)\right|\le c$, откуда $\left|\sigma-\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx\right|\le c\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k$.

Поскольку существует интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$, то при $\lambda\to 0$ получаем $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k\to 0$, откуда $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$.

В более общей форме утверждение пункта 1 предлагается доказать самостоятельно (задача 11).

2. $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\rho(x_k - c)$. Пусть $x_{i-1} \le c < x_i$, тогда $\Delta\rho(x_i - c) = 1$, а при $k \ne i$ $\Delta\rho(x_k - c) = 0$. Таким образом, $\sigma = f(\xi_i)$. При $\lambda \to 0$ $f(\xi_i) \to f(c)$ и получаем что и требовалось.

3. Предлагается доказать самостоятельно (задача 9).

Теорема доказана.

Замечание: пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $g(x) = 0$ всюду на $[a,b]$, кроме одной точки $\xi \in (a,b)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = 0$. Действительно, если $g(\xi) \ne 0$, то достаточно рассматривать интегральные суммы, в точки деления которых не входит ξ. В силу аддитивности это же будет верно, если $g(x) \ne 0$ в конечном числа точек интервала (a,b). Также известно (см. [5]), что, если $g_1(x) = g_2(x)$ на (a,b), всюду, кроме, быть может, счетного числа точек, то $\int\limits_a^b f(x)dg_1(x) = \int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$ (см. также свойства интеграла, задача 8).

Замечание: аналогично определяется интеграл Римана-Стилтьеса, если $g(x)$ задана на промежутках $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b).

Теорема Рисса (об общем виде функционала на пространстве $C[a,b]$):

1. Для любой функции ограниченного изменения $g(x)$ на отрезке $[a,b]$ функционал $\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)dg(x) \in \left(C[a,b]\right)^*$, и при этом $\|\varphi\|_{(C[a,b])^*} \le \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$;

2. $\forall \varphi \in \left(C[a,b]\right)^*$ существует функция ограниченного изменения $g(x)$ такая, что $g(a) = 0$ и $\forall f(x) \in C[a,b]$ $\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$, причем $\|\varphi\|_{(C[a,b])^*} = \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$.

Доказательство: 1. Пусть $\forall f(x) \in C[a,b]$ $\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$. Линейность этого функционала очевидна из свойств линейности интеграла Стилтьеса. Проверим ограниченность: $|\varphi(f)| = \left|\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| \le \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)| \cdot \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x) = \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x) \cdot \|f\| = c \cdot \|f\|$ (воспользовались теоремой об оценке интеграла Стилтьеса). При $f \ne 0$ поделим полученное неравенство на $\|f\|$: $\dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|} \le \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$, а, поскольку это неравенство справедливо при всех $f \ne 0$, то $\sup\limits_{f\ne 0}\dfrac{|\varphi(f)|}{\|f\|} \le \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$, откуда $\|\varphi\|_{(C[a,b])^*} \le \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g(x)$.

2. Ясно, что $C[a,b]$ – это подпространство пространства всех ограничен-

ных функций с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. По теореме Хана-Банаха продолжим φ на это пространство с сохранением нормы и получим функционал Φ. В частности, Φ определен на семействе функций $h_a(x)\equiv 0$, $h_\tau(x)=\begin{cases}1, a<x\le\tau\\0, \tau<x\le b\end{cases}$. Возьмем $g(\tau)=\Phi(h_\tau)$ и покажем, что g – функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим произвольное разбиение $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ и обозначим $\alpha_k=\mathrm{sign}(g(x_k)-g(x_{k-1}))$, $k=1,2,...,n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n|g(x_k)-g(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(g(x_k)-g(x_{k-1})\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(\Phi(h_{x_k})-\Phi(h_{x_{k-1}})\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k\Phi\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)\right)\le\left|\Phi\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)\right)\right|\le\|\Phi\|\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)\right\|\le\|\Phi\|,$$

поскольку $\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)\right\|=1$ (сумма $\sum_{k=1}^n\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)$ принимает только значения 0,1, или –1).

Поскольку разбиение отрезка было произвольным, то заключаем, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,g(x)\le\|\Phi\|=\|\varphi\|_{(C[a,b])^*}$, следовательно, g – функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$.

Далее, пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда она равномерно непрерывна, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x',x''\in[a,b]\ |x'-x''|<\delta$ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Пусть разбиение отрезка таково, что длина каждой его части меньше δ. Составим ступенчатую функцию $f_\varepsilon(x)=f(x_k)$ при $x_{k-1}<x\le x_k$, $k=1,2,...,n$, $f_\varepsilon(a)=f(a)$. Тогда по построению $\forall x\in[a,b]\ |f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$, откуда $\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon$. Кроме того, ясно, что $f_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^n f(x_k)\left(h_{x_k}(x)-h_{x_{k-1}}(x)\right)$. Отсюда $\Phi(f_\varepsilon(x))=\Phi\left(\sum_{k=1}^n f(x_k)\left(h_{x_k}(x)-h_{x_{k-1}}(x)\right)\right)=\sum_{k=1}^n f(x_k)\Phi\left(h_{x_k}(x)-h_{x_{k-1}}(x)\right)=$
$=\sum_{k=1}^n f(x_k)\left(g(x_k)-g(x_{k-1})\right)$. Получили интегральную сумму Римана-Стилтьеса.

Поскольку интеграл $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует, то $\Phi(f_\varepsilon(x))\underset{\lambda\to 0}{\to}\int_a^b f(x)dg(x)$, т.е. при любом достаточно мелком разбиении $\left|\Phi(f_\varepsilon(x))-\int_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon$.

С другой стороны, $|\Phi(f)-\Phi(f_\varepsilon)|=|\Phi(f-f_\varepsilon)|\le\|\Phi\|\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon\|\Phi\|$, откуда $\left|\Phi(f)-\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right|\le|\Phi(f)-\Phi(f_\varepsilon)|+\left|\Phi(f_\varepsilon)-\int\limits_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon\left(\|\Phi\|+1\right)$. Поскольку ε – произвольно, то $\Phi(f)=\int\limits_a^b f(x)dg(x)$. Наконец, т.к. f непрерывна, то $\Phi(f)=\varphi(f)$.

Теорема доказана.

Замечание: поскольку функция $g(x)$ представляется в виде разности монотонных функций, то она может иметь на интервале (a,b) конечное или счетное число точек разрыва первого рода. При этом если заменить функцию $g(x)$ функцией $\overline{g}(x)$, отличающейся от $g(x)$ только значениями в точках разрыва, то $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)d\overline{g}(x)$. Пусть $\xi\in(a,b)$ – точка разрыва функции $g(x)$, а $\overline{g}(x)=\begin{cases} g(x), x\ne\xi \\ g(\xi+0), x=\xi \end{cases}$. Тогда очевидно, что оценка $\|\varphi\|_{(C[a,b])^*}\le\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,\overline{g}(x)$ остается в силе. При этом $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,\overline{g}(x)\le\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,g(x)$, и равенство возможно только если значение $g(\xi)$ лежало между значениями $g(\xi-0)$ и $g(\xi+0)$ (включительно). В остальных случаях неравенство строгое. Тем самым, верна и оценка $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,\overline{g}(x)\le\|\varphi\|_{(C[a,b])^*}$, откуда $\|\varphi\|_{(C[a,b])^*}=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,\overline{g}(x)$. Таким образом, можно считать, что функция $g(x)$ изначально непрерывна справа во всех точках интервала (a,b).

Замечание: ясно, что, если $g_1(a)=g_2(a)$, $g_1(b)=g_2(b)$ и $g_1(x)=g_2(x)$ всюду на (a,b), за исключением счетного числа точек, то они определяют один и тот же функционал φ. Обратно: если $\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)=\int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$, то можно показать, что $g_1(x)-g_2(x)=\text{const}$ в точках непрерывности функции $g_1(x)-g_2(x)$ (т.е. всюду, кроме, счетного числа точек, см. по этому поводу [5]). Таким образом, каждому линейному ограниченному функционалу в $C[a,b]$ соответствует класс функций с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$. Две функции попадают в один и тот же класс тогда и только тогда, когда их разность постоянна всюду, кроме, быть может, счетного числа точек интервала (a,b). В каждом классе есть ровно одна функция со свойством $g(a)=0$, непрерывная справа всюду на (a,b). Ее и будем использовать для вычисления нормы функционала.

Примеры решения задач

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^2 x^2 dg(x)$, где $g(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<0{,}5\\ 0, & 0{,}5\le x<1{,}5\\ -2, & 1{,}5\le x\le 2\end{cases}$.

Решение: $g'(x)=0$ всюду, за исключением точек $x=0{,}5$ и $x=1{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет скачки, соответственно, 1 и -2, поэтому $\int\limits_0^2 x^2dg(x)=(0{,}5)^2\cdot 1+$ $+(1{,}5)^2\cdot(-2)=-4{,}25$.

2. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$.

Решение: общий вид функционала в $C[-1,1]$ – есть $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)dg(t)$, причем функцию $g(t)$ ограниченного изменения надо подобрать так, чтобы $g(-1)=0$ и она была непрерывна справа во всех точках интервала $(-1,1)$. Поскольку в исходном виде функционала отсутствуют внеинтегральные члены, то $g(t)$ не должна иметь скачков ни в одной точке отрезка. Поскольку должно быть $tdt=dg(t)$, то всем этим требованиям удовлетворяет функция $g(t)=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}$. Тогда $\|f\|=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{1} g(t)$. Для вычисления вариации можно использовать формулу задачи 6, а можно заметить, что $\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{1} g(t)=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{0} g(t)+\mathop{\mathrm{V}}\limits_{0}^{1} g(t)$, причем на каждом из полученных промежутков функция $g(t)$ монотонна, поэтому $\|f\|=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{1} g(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

3. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt-2x(0)$.

Решение: ясно, что $\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt=\int\limits_{-1}^{1} x(t)d\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$, а, поскольку в представлении функционала участвует слагаемое $-2x(0)$, то необходимо, чтобы функция $g(t)$ имела в нуле скачок величиной -2. Таким образом, $g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}, & -1\le t<0\\ \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5}{2}, & 0\le t\le 1\end{cases}$, причем $g(-1)=0$ и $g(t)$ непрерывна справа всюду на интервале $(-1,1)$. Таким образом, $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)dg(t)$ и $\|f\|=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{1} g(t)$. Для вычисления полного изменения рассмотрим разбиение $a=x_0<x_1<...<x_n<y_1<y_2<...<y_m=b$, в котором точки x_i отвечают разбиению полуинтервала $[-1,0)$, а точки y_j – разбиению отрезка $[0,1]$ (при этом, возможно, x_n и y_1 не совпадают с точкой 0). Тогда, если $g_1(t)=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}$, $g_2(t)=\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5}{2}$, то, учитывая монотонность, получим:

$$\begin{aligned}\sum=&|g_1(x_1)-g_1(x_0)|+|g_1(x_2)-g_1(x_1)|+|g_1(x_3)-g_1(x_2)|+...+|g_1(x_n)-g_1(x_{n-1})|+\\ &+|g_2(y_1)-g_1(x_n)|+|g_2(y_2)-g_2(y_1)|+|g_2(y_3)-g_2(y_2)|+...+|g_2(y_m)-g_2(y_{m-1})|=\\ &=g_1(x_0)-g_1(x_1)+g_1(x_1)-g_1(x_2)+g_1(x_2)-g_1(x_3)+...+g_1(x_{n-1})-g_1(x_n)+\\ &+g_1(x_n)-g_2(y_1)+g_2(y_2)-g_2(y_1)+g_2(y_3)-g_2(y_2)+...+g_2(y_m)-g_2(y_{m-1})=\\ &=-g_2(y_1)-g_2(y_1)+g_2(y_m)=-2-2g_2(y_1)\le -2+2\cdot\frac{5}{2}=3,\end{aligned}$$

поскольку $g_2(y_1)\ge g_2(0)=-\dfrac{5}{2}$. С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ будем выбирать $y_1<\sqrt{\varepsilon}$, тогда $\sum=-2-2g_2(y_1)=-2-2\cdot\left(\dfrac{y_1^2}{2}-\dfrac{5}{2}\right)=3-y_1^2>3-\varepsilon$. Таким образом, по определению точной верхней грани, $\mathop{\mathrm{V}}\limits_{-1}^{1} g(t)=\sup\sum=3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что всякая функция ограниченного изменения ограничена и имеет в каждой точке отрезка $[a,b]$ конечные односторонние пределы. Доказать свойства 1 и 2 полного изменения. Доказать, что множество функций с ограниченным изменением образует линейное пространство.

2. Доказать, что всякая функция, представимая в виде разности монотонных, имеет ограниченное изменение.

3. Доказать, что, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ ограниченную производную ($|f'(x)|\le c$), то $f(x)$ является функцией с ограниченным изменением и $\mathop{\mathrm{V}}\limits_{a}^{b} f(x)\le c(b-a)$.

4. Доказать, что в линейном пространстве функций с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ таких, что $f(a)=0$ функция $\|f\|=\mathop{\mathrm{V}}\limits_{a}^{b} f$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

5. Доказать, что в линейном пространстве всех функций с ограниченным

изменением на отрезке $[a,b]$ функция $\|f\| = |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

6. Доказать, что, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \int\limits_a^b |f'(x)|dx$.

Указание: представить интеграл, как предел интегральных сумм, воспользоваться теоремой Лагранжа, расписать определение предела и показать, что из него для произвольных ε вытекает неравенство $\left|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \int\limits_a^b |f'(x)|dx\right| < \varepsilon$.

7. Найти полные изменения функций $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ и $f(x) = \operatorname{sign} x$ на отрезке $[-1,1]$. Чему равно полное изменение ступенчатой функции?

8. Используя определение интеграла Римана-Стилтьеса доказать, что справедливы следующие свойства, аналогичные свойствам интеграла Римана:

а) $\int\limits_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$;

б) $\int\limits_a^b \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) dg(x) = \alpha \int\limits_a^b f_1(x)dg(x) + \beta \int\limits_a^b f_2(x)dg(x)$, если интегралы справа существуют;

в) $\int\limits_a^b f(x)d\left(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)\right) = \alpha \int\limits_a^b f(x)dg_1(x) + \beta \int\limits_a^b f(x)dg_2(x)$, если интегралы справа существуют;

г) $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x)$, $a < c < b$ в предположении, что все три интеграла существуют.

9. Доказать п. 3 теоремы о вычислении интеграла Римана-Стилтьеса.

Указание: пусть $\alpha_k^+ = g(c_k + 0) - g(c_k)$ *(*$k = 0,1,...,m-1$*),* $\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k - 0)$ *(*$k = 1,2,...,m$*),* $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k + 0) - g(c_k - 0)$ *(*$k = 1,2,...,m-1$*). Рассмотреть вспомогательную функцию* $g_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x - c_k) - \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho(c_k - x)$. *Доказать, что функция* $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *(в точках* c_k *установить непрерывность слева и справа). Показать, что* $g_2'(x) = g'(x)$ *всюду, за исключением точек* c_k *и воспользоваться пунктами 1 и 2, а также свойствами интеграла Римана-Стилтьеса.*

10. Вычислить интегралы Римана-Стилтьеса:

а) $\int\limits_0^2 xd\sin x$; $\int\limits_{-1}^1 xd\mathrm{arctg}x$; б) $\int\limits_{-2}^2 xdg(x)$, $g(x)=\begin{cases} x+2, -2\le x<-1 \\ 2, \quad -1\le x<0 \\ x^2+3, 0\le x\le 2 \end{cases}$.

11. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ представляется в виде $g(x)=c+\int\limits_a^x \varphi(t)dt$, причем $\varphi(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$ (справа стоит интеграл Римана).

Указание: аналогично п.1 теоремы о вычислении интеграла Римана-Стилтьеса. Предварительно показать, что так определенная функция $g(x)$ является функцией ограниченного изменения.

12. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а функция $\varphi(x)$ имеет на $[a,b]$ ограниченное изменение. Пусть $\psi(x)=\int\limits_a^x f(t)d\varphi(t)$. Доказать, что $\int\limits_a^b g(x)d\psi(x)=\int\limits_a^b g(x)f(x)d\varphi(x)$.

13. Доказать для интеграла Римана-Стилтьеса формулу интегрирования по частям: $\int\limits_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b g(x)df(x)$. Здесь оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

Указание: пусть, например, существует второй интеграл. Составить интегральную сумму для первого интеграла, прибавить и вычесть $f(x)g(x)\Big|_a^b$ и преобразовать полученное выражение к интегральной сумме второго интеграла. При этом отмеченные точки первой интегральной суммы станут точками разбиения второй, а точки разбиения первой – отмеченными точками второй.

14. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x(1)-x(-1)}{2}+\int\limits_{-1}^1 tx(t)dt$.

15. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(0)-x(-1)-x(1)$.

16. Вычислить норму функционала $f(x)=\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ в пространстве $C[a,b]$, где $y(t)\in C[a,b]$ – фиксированный элемент.

17. Пусть в $C[-1,1]$ определен линейный непрерывный функционал $\delta(x)=x(0)$ (дельта-функция). Представить его в виде интеграла Римана-Стилтьеса. Полученная функция $g(t)$ называется функцией Хевисайда.

18. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x(1)+x(-1)}{2}+\int\limits_{-1}^{1}t^3x(t)dt$.

19. Пусть $L=\{x(t)\in C[0,1]:x(0)=0\}$. Построить линейный непрерывный функционал на $C[0,1]$, равный нулю на L и принимающий на функции $x(t)=t+1$ значение 2.

Указание: $\varphi(x)=2x(0)$.

20. Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ одномерное подпространство $L=\{\lambda t:\lambda\in\mathbb{R}\}$ и определим на L функционал $f(x)=\lambda$, если $x(t)=\lambda t$. Найти его продолжение на все пространство без увеличения нормы.

Указание: $\varphi(x)=x(1)$.

21. Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ одномерное подпространство $L=\{\lambda(1-2t):\lambda\in\mathbb{R}\}$ и определим на L функционал $f(x)=\lambda$, если $x(t)=\lambda(1-2t)$. Найти два его продолжения на все пространство без увеличения нормы.

Указание: $\varphi_1(x)=x(0)$, $\varphi_2(x)=-x(1)$.

22. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}x(t)dt-\int\limits_{0}^{1}x(t)dt$.

23. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f_\varepsilon:C[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x(t)dt$, $\varepsilon\in(0,1]$.

24. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_{0}^{1}x(\sqrt{t})dt$.

25. Представить в виде интеграла Римана-Стилтьеса и вычислить норму функционала $f:C[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_{0}^{1}x(t^2)dt$.

2.5. Слабая и *-слабая сходимости

Определение: пусть X – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset X$ – последовательность его элементов. Пусть $x \in X$. Последовательность $\{x_n\}$ называется слабо сходящейся к вектору x при $n \to \infty$, если для любого линейного ограниченного функционала $\varphi \in X^*$ $\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$. Обозначение: $x_n \rightharpoonup x$.

Теорема (о слабой замкнутости замкнутого шара): пусть X – линейное нормированное пространство, B – замкнутый шар радиуса R с центром в начале координат (т.е. $B = \{x \in X : \|x\| \le R\}$). Тогда этот шар является слабо замкнутым множеством, т.е. из условий $\{x_n\} \in B$, $x_n \rightharpoonup x$ следует, что $x \in B$.

Доказательство: пусть $\{x_n\} \in B$, т.е. $\|x_n\| \le R$ и $x_n \rightharpoonup x$, т.е. $\forall \varphi \in X^*$ $\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$. По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала $\exists \varphi \in X^*$: $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$. Отметим, что $|\varphi(x_n)| \le \|\varphi\| \cdot \|x_n\| = \|x_n\| \le R$. Поскольку $\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$, то по теореме о предельном переходе в нестрогом неравенстве $|\varphi(x)| \le R$, но, поскольку, $\varphi(x) = \|x\|$, то $\|x\| \le R$, что и означает, что $x \in B$.

Теорема доказана.

Теорема (о не слабой замкнутости замкнутой единичной сферы): в пространстве l_2 сфера радиуса 1 с центром в начале координат не является слабо замкнутым множеством.

Доказательство: пусть $S = \{x \in l_2 : \|x\| = 1\}$ – сфера. Нужно построить последовательность $\{x_n\} \in S$, которая слабо сходится к вектору, не принадлежащему S.

Рассмотрим вектора $x_i = (0,0,...0,\underset{i}{1},0,0,...)$. Ясно, что все они лежат на сфере S. Кроме того, ясно, что нулевой вектор на сфере S не лежит. Поэтому если покажем, что $x_i \underset{i\to\infty}{\rightharpoonup} 0$, то теорема будет доказана. Итак, надо проверить, что $\forall \varphi \in l_2^*$ $\varphi(x_i) \underset{i\to\infty}{\to} 0$. По теореме об общем виде функционала в пространстве l_p $\forall \varphi \in l_2^*$ $\exists y \in l_2$: $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k$. Поскольку $y \in l_2$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$ сходится, и, в частности, $y_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Применяя функционал φ к векторам x_i, получим, что $\varphi(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{\,i} y_k = y_i$. Поскольку $y_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$, то $\varphi(x_i) \underset{i\to\infty}{\to} 0$.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, видим, что последовательность, лежащая на сфере, может слабо сходиться к центру этой сферы.

Замечание: обычная сходимость последовательности по норме пространства называется иногда сильной сходимостью.

Теорема (о связи сильной и слабой сходимостей): пусть X – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset X$ – последовательность его элементов. Пусть $x \in X$. Тогда из условия $x_n \to x$ следует, что $x_n \rightharpoonup x$.

Доказательство: пусть $x_n \to x$, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$. Возьмем $\forall \varphi \in X^*$, тогда $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\varphi(x_n - x)| \le \|\varphi\| \cdot \|x_n - x\|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, по теореме о двух милиционерах, $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \to 0$, откуда $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$, т.е. $x_n \rightharpoonup x$.

Теорема доказана.

Теорема (о связи сильной и слабой сходимостей в конечномерном пространстве): в конечномерном пространстве сильная сходимость совпадает со слабой.

Доказательство: в силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что в конечномерном пространстве X из условия $x_n \rightharpoonup x$ следует, что $x_n \to x$.

Поскольку X конечномерно, то $\exists e_1, e_2, ..., e_k \in X$ такие, что $\forall x \in X$ $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k$, где все e_i линейно независимы, α_i – действительные числа. Пусть $x_n = \alpha_1{}^{(n)} e_1 + \alpha_2{}^{(n)} e_2 + ... + \alpha_k{}^{(n)} e_k$. Рассмотрим функционалы $\varphi_i \in X^*$ такие, что $\varphi_i(e_i) = 1$, $\varphi_i(e_j) = 0$ при $i \ne j$. Тогда при $i = \overline{1,k}$ $\varphi_i(x_n) = \alpha_i{}^{(n)}$, $\varphi_i(x) = \alpha_i$. Т.к. $x_n \rightharpoonup x$, то для $\varphi_i \in X^*$ $\varphi_i(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi_i(x)$, откуда $\alpha_i{}^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \alpha_i$. Поскольку в конечномерном пространстве покоординатная сходимость влечет за собой сходимость по норме, то $x_n \to x$.

Теорема доказана.

Теорема (о пределе линейных комбинаций): пусть $x_n \rightharpoonup x$, тогда существует последовательность линейных комбинаций вида $\left\{ \sum_{k=1}^{k_n} c_k{}^n x_k \right\}$, сильно сходящаяся к x.

Доказательство: пусть L – замкнутое линейное многообразие, порожденное элементами $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Допустим, что $x \notin L$, т.е. не является пределом линейных комбинаций из L. По теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists \varphi \in X^*$: $\varphi(x) = 1$ и $\forall n = 1,2,3,...$ $\varphi(x_n) = 0$. Отсюда следует, что $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$, т.е. $x_n \not\rightharpoonup x$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (о слабой непрерывности линейного ограниченного оператора): пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Пусть $\{x_n\}, x \in X$ и $x_n \rightharpoonup x$, тогда $Ax_n \rightharpoonup Ax$, где $\{Ax_n\}, Ax \in Y$.

Доказательство: возьмем любой функционал $\varphi \in Y^*$, тогда $\varphi(Ax_n) = f(x_n)$, где $f \in X^*$. Аналогично, $\varphi(Ax) = f(x)$. Т.к. $x_n \rightharpoonup x$, то $f(x_n) \to f(x)$, т.е. $\varphi(Ax_n) \to \varphi(Ax)$. Поскольку $\varphi \in Y^*$ – произвольный, то $Ax_n \rightharpoonup Ax$.

Теорема доказана.

Замечание: легко обосновывается, что действительно $f \in X^*$ (т.е. введенный таким образом функционал действительно линеен и ограничен).

Определение: пусть X – линейное нормированное пространство, $\{\varphi_n\} \subset X^*$. Последовательность $\{\varphi_n\}$ называется *-слабо сходящейся к функционалу $\varphi \in X^*$, если $\forall x \in X \ \ \varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(x)$. Обозначение: $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$.

Замечание: таким образом, *-слабая сходимость – есть ни что иное, как поточечная сходимость функционалов.

Теорема (критерий *-слабой сходимости): пусть X – линейное нормированное пространство, $\{\varphi_n\} \subset X^*$. Для того, чтобы последовательность $\{\varphi_n\}$ *-слабо сходилась к функционалу $\varphi \in X^*$ необходимо и достаточно, чтобы:

1. последовательность $\{\|\varphi_n\|\}$ была ограничена;
2. $\varphi_n(x) \to \varphi(x) \ \ \forall x \in M$, где M – множество, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в X.

Доказательство: следует из определения *-слабой сходимости и теоремы Банаха-Штейнгауза.

Теорема доказана.

Теорема (о *-слабой секвенциальной компактности шара в сопряженном пространстве): пусть X – сепарабельное линейное нормированное пространство, B – замкнутый шар с центром в начале координат, лежащий в сопряженном пространстве X^*, тогда он является секвенциально *-слабо компактным множеством, т.е. из любой последовательности функционалов $\varphi_n \in B$ можно выбрать подпоследовательность φ_{n_k}, которая *-слабо сходится к элементу этого шара.

Доказательство: поскольку X – сепарабельно, то в нем существует счетное всюду плотное множество $E = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Будем считать, что B – единичный шар, т.е. $B = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \le 1\}$. Поскольку $\varphi_n \in B$, то $\|\varphi_n\| \le 1$. Возьмем $\forall x_k \in E$, тогда $|\varphi_n(x_k)| \le \|\varphi_n\| \cdot \|x_k\| \le \|x_k\|$. Итак, $\forall x_k \in E$ последовательность действительных чисел $(\varphi_1(x_k), \varphi_2(x_k), \varphi_3(x_k), ...)$ ограничена.

Из математического анализа известно, что у любой ограниченной последовательности действительных чисел существует подпоследовательность, имеющая предел (теорема Больцано-Вейерштрасса). В частности, возьмем $x_1 \in E$, значит, из нашей последовательности можно выбрать подпоследовательность $\varphi_1^{\,1}, \varphi_2^{\,1}, \varphi_3^{\,1}, ...$ такую, что последовательность $\left(\varphi_1^{\,1}(x_1), \varphi_2^{\,1}(x_1), \varphi_3^{\,1}(x_1), ...\right)$ имеет предел. Возьмем $x_2 \in E$ и применим это же рассуждение к уже полученной последовательности, т.е. уже из полученной последовательности выберем подпоследовательность $\varphi_1^{\,2}, \varphi_2^{\,2}, \varphi_3^{\,2}, ...$ такую, что имеет предел последовательность $\left(\varphi_1^{\,2}(x_2), \varphi_2^{\,2}(x_2), \varphi_3^{\,2}(x_2), ...\right)$. Отметим, что, поскольку это подпоследовательность предыдущей последовательности, и подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же предел, то предел имеет также и последовательность $\left(\varphi_1^2(x_1),\varphi_2^2(x_1),\varphi_3^2(x_1),...\right)$. Возьмем $x_3\in E$ и уже из полученной последовательности выберем подпоследовательность $\varphi_1^3,\varphi_2^3,\varphi_3^3,...$ такую, что $\left(\varphi_1^3(x_3),\varphi_2^3(x_3),\varphi_3^3(x_3),...\right)$ имеет предел. Поскольку она – подпоследовательность двух предыдущих, то последовательности $\left(\varphi_1^3(x_1),\varphi_2^3(x_1),\varphi_3^3(x_1),...\right)$ и $\left(\varphi_1^3(x_2),\varphi_2^3(x_2),\varphi_3^3(x_2),...\right)$ также имеют предел. И т.д. На k-м шаге получим подпоследовательность исходной последовательности (составленную из элементов всех ранее построенных подпоследовательностей), которая сходится на первых k векторах $x_1,x_2,...,x_k$ из множества E. И т.д.

Сконструируем из всех этих подпоследовательностей одну, а именно, $\left(\varphi_1^1,\varphi_2^2,\varphi_3^3,\varphi_4^4,...\right)$ (диагональная последовательность). Покажем, что эта последовательность сходится $\forall x_k\in E$. Действительно, поскольку она является подпоследовательностью первой последовательности $\varphi_1^1,\varphi_2^1,\varphi_3^1,...$, то на элементе x_1 она сходится. Начиная со второго номера, она является подпоследовательностью второй последовательности $\varphi_1^2,\varphi_2^2,\varphi_3^2,...$, значит, на элементе x_2 она тоже сходится. Аналогично, начиная с третьего номера, она является подпоследовательностью третьей последовательности $\varphi_1^3,\varphi_2^3,\varphi_3^3,...$, значит, на x_3 она сходится и т.д. Итак, на любом элементе $x_k\in E$ диагональная последовательность сходится.

Осталось доказать, что она сходится на любом $x\in X$, что и будет означать ее *-слабую сходимость, т.е. надо доказать, что числовая последовательность $\varphi_n^n(x)$ имеет предел. Для этого, в силу критерия Коши, достаточно проверить фундаментальность, т.е., что $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon\ \forall n,m>N\ \left|\varphi_n^n(x)-\varphi_m^m(x)\right|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n^n(x)-\varphi_m^m(x)\right|&=\left|\varphi_n^n(x)-\varphi_n^n(x_k)+\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)+\varphi_m^m(x_k)-\varphi_m^m(x)\right|\le\\&\le\left|\varphi_n^n(x)-\varphi_n^n(x_k)\right|+\left|\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)\right|+\left|\varphi_m^m(x_k)-\varphi_m^m(x)\right|=\left|\varphi_n^n(x-x_k)\right|+\\&+\left|\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)\right|+\left|\varphi_m^m(x_k-x)\right|\le\left\|\varphi_n^n\right\|\cdot\left\|x-x_k\right\|+\left|\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)\right|+\\&+\left\|\varphi_m^m\right\|\cdot\left\|x_k-x\right\|\le 2\left\|x-x_k\right\|+\left|\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)\right|.\end{aligned}$$

Поскольку E – всюду плотно в X, то в любой окрестности точки $x\in X$ можно найти точку из E. В частности, возьмем $\dfrac{\varepsilon}{3}$-окрестность точки $x\in X$ и точку $x_k\in E$ выберем из этой $\dfrac{\varepsilon}{3}$-окрестности, тогда $\left\|x-x_k\right\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, откуда $\left|\varphi_n^n(x)-\varphi_m^m(x)\right|<\dfrac{2\varepsilon}{3}+\left|\varphi_n^n(x_k)-\varphi_m^m(x_k)\right|$. Построенная нами последовательность φ_n^n сходится на всех элементах множества E, и, в частности, на x_k, значит, на

x_k она фундаментальна, т.е. $\left|\varphi_n{}^n(x_k)-\varphi_m{}^m(x_k)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, начиная с некоторого номера. Таким образом, $\left|\varphi_n{}^n(x)-\varphi_m{}^m(x)\right|<\varepsilon$. Итак, нашли подпоследовательность $\left\{\varphi_n^n\right\}$, которая *-слабо сходится. Поскольку наш шар B *-слабо замкнут (задача 13), то предел этой подпоследовательности принадлежит этому шару.

Теорема доказана.

Замечание: аналогично можно доказать, что всякое ограниченное множество линейных непрерывных функционалов в сепарабельном линейном нормированном пространстве, является *-слабо секвенциально предкомпактным.

Определение: пространство, сопряженное к сопряженному пространству, называется вторым сопряженным пространством и обозначается X^{**}.

Определение: естественным вложением пространства X во второе сопряженное называется отображение $\pi_{X^*}: X \to X^{**}$, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие функционал $\pi_{X^*}x=\psi \in X^{**}$ по правилу: $\forall \varphi \in X^*$ $\psi(\varphi)=\varphi(x)$.

Замечание: далее нижний индекс в обозначении $\pi_{X^*}x$ будем опускать.

Теорема (о естественном вложении пространства во второе сопряженное): 1. $\forall x \in X$ πx действительно принадлежит X^{**};

2. π – линейно;

3. π – ограничено и сохраняет норму, т.е. $\|\pi x\|_{X^{**}}=\|x\|_X$;

4. π – инъективно.

Доказательство: 1. $\forall x \in X$ надо доказать, что $\psi \in X^{**}$, т.е., что ψ линеен и ограничен.

а) Линейность ψ: $\psi(\varphi_1+\varphi_2)=(\varphi_1+\varphi_2)(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\psi(\varphi_1)+\psi(\varphi_2)$. С множителем доказательство аналогичное.

б) Ограниченность ψ: $|\psi(\varphi)|=|\varphi(x)|\le\|\varphi\|\cdot\|x\|$, т.е. ψ ограничен. Разделим полученное неравенство на $\|\varphi\|$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $\varphi\ne 0$, тогда $\sup\limits_{\varphi\ne 0}\dfrac{|\psi(\varphi)|}{\|\varphi\|}\le\|x\|$, откуда $\|\psi\|\le\|x\|$, т.е. $\|\pi x\|\le\|x\|$.

2. $\pi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)(\varphi)=\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)=\lambda_1\pi x_1(\varphi)+\lambda_2\pi x_2(\varphi)$.

3. Из полученного в п.1 неравенства $\|\pi x\|\le\|x\|$ следует ограниченность πx. Осталось установить неравенство противоположного знака.

$$\|\pi x\|=\|\psi\|=\sup_{\varphi\ne 0}\frac{|\psi(\varphi)|}{\|\varphi\|}\ge\frac{|\psi(\varphi_0)|}{\|\varphi_0\|}=\frac{|\varphi_0(x)|}{\|\varphi_0\|}.$$

По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала $\forall x\ne 0$ $\exists\varphi_0\in X^*$: $\|\varphi_0\|=1$ и $\varphi_0(x)=\|x\|$. Тогда $\|\pi x\|\ge\dfrac{\|x\|}{1}=\|x\|$.

4. Пусть $x_1 \neq x_2$, тогда $\|\pi x_1 - \pi x_2\| \overset{2.}{=} \|\pi(x_1 - x_2)\| \overset{3.}{=} \|x_1 - x_2\| \neq 0$, откуда следует, что $\pi x_1 \neq \pi x_2$, т.е. π – инъективно.

Теорема доказана.

Замечание: таким образом, справедливо вложение $\pi(X) \subset X^{**}$, причем $X \cong \pi(X)$, поэтому можно коротко писать $X \subset X^{**}$. Кроме того, поскольку $\tilde{X} = \overline{\pi(X)} \subseteq X^{**}$, то $\tilde{X}$ – банахово пространство, в котором подмножество $\pi(X)$ лежит всюду плотно. В силу изоморфизма $X \cong \pi(X)$ $\tilde{X}$ является пополнением (неполного) пространства X (см. раздел I, часть 1, п. 1.5).

Теорема (о связи равномерной, слабой и *-слабой сходимостей): пусть X – линейное нормированное пространство, X^* – его сопряженное пространство, $\{\varphi_n\}, \varphi \in X^*$, тогда из $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ следует, что $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$, а из $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ следует, что $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$.

Доказательство: 1. Пусть $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, т.е. $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. Рассмотрим $\forall \psi \in X^{**}$, тогда $|\psi(\varphi_n) - \psi(\varphi)| = |\psi(\varphi_n - \varphi)| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi_n - \varphi\|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $|\psi(\varphi_n) - \psi(\varphi)| \to 0$, т.е. $\forall \psi \in X^{**}$ $\psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi)$, откуда следует, что $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$.

2. Пусть $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$, т.е., $\forall \psi \in X^{**}$ $\psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi)$. Надо доказать, что $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$, т.е. $\forall x \in X$ $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Берем $\forall x \in X$ и обозначим $\psi = \pi x$ – естественное вложение пространства X во второе сопряженное. Тогда $\psi \in X^{**}$ и $\psi(\varphi) = \varphi(x)$. Таким образом, из условия $\psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi)$ получаем $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$.

Теорема доказана.

Теорема (об ограниченности слабо сходящейся последовательности): пусть X – линейное нормированное пространство, $x_n \rightharpoonup x$, тогда $\exists c > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq c$.

Доказательство: рассмотрим $\{\pi x_n\} \subset X^{**}$ и $\pi x \in X^{**}$ при $\{x_n\} \subset X$ и $x \in X$ соответственно. По теореме о слабой непрерывности линейного ограниченного оператора $\pi x_n \rightharpoonup \pi x$. По предыдущей теореме слабая сходимость влечет за собой *-слабую, т.е. $\pi x_n \xrightarrow{*} \pi x$, откуда получаем, что $\forall \varphi \in X^*$ $\pi x_n(\varphi) \to \pi x(\varphi)$. Кроме того, X^* – банахово. В силу принципа равномерной ограниченности последовательность $\{\|\pi x_n\|\}$ – ограничена. В силу изометричности естественного вложения ограничена и последовательность $\{\|x_n\|\}$.

Теорема доказана.

Теорема (критерий слабой сходимости): пусть X – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset X$. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ слабо сходилась к элементу $x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы:

1. последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограничена;

2. $\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \Gamma$, где Γ – множество линейных ограниченных функционалов, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в X^*.

Доказательство: необходимость: следует из предыдущей теоремы, критерия *-слабой сходимости и свойств естественного вложения пространства во второе сопряженное, если рассматривать линейные ограниченный функционалы πx_n и πx над X^*. В этом случае *-слабая сходимость будет вытекать из слабой.

Достаточность: доказывается по тому же принципу, что и достаточное условие теоремы Банаха-Штейнгауза.

Теорема доказана.

Определение: множество M банахова пространства X называется секвенциально слабо компактным, если из любой последовательности его элементов можно выделить слабо сходящуюся M в подпоследовательность.

Теорема (об ограниченности слабо компактного множества): всякое секвенциально слабо компактное множество ограничено.

Доказательство: пусть M – секвенциально слабо компактное множество. Предположим, что M не ограничено. Тогда в нем можно найти неограниченную последовательность $\{x_n\} \in M$, такую, что $\|x_n\| > n$. По условию из $\{x_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся, а значит, ограниченную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Но $\|x_{n_k}\| > n_k \to \infty$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (оценка слабого предела): пусть X – линейное нормированное пространство, $x_n \rightharpoonup x$, тогда $\|x\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Доказательство: в силу теоремы об ограниченности слабо сходящейся последовательности, последовательность $\{\|x_n\|\}$ – ограничена, в частности, ограничена снизу, значит, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ действительно существует. Предположим, что $\|x\| > \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, тогда найдется число α такое, что $\|x\| > \alpha > \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Поскольку $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ – это частичный предел последовательности $\{\|x_n\|\}$, то найдется подпоследовательность $\{\|x_{n_i}\|\}$, предел которой равен $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, т.е. $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|x_{n_i}\|$, откуда $\|x\| > \alpha > \lim\limits_{i\to\infty} \|x_{n_i}\|$. По теореме об устойчивости строгого неравенства $\exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall i > N \quad \|x\| > \alpha > \|x_{n_i}\|$. По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала, для $x \in X \setminus \{0\}$ $\exists \varphi \in X^*$: $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\| > \alpha$. С другой стороны, поскольку $|\varphi(x_{n_i})| \le \|\varphi\| \cdot \|x_{n_i}\| = \|x_{n_i}\| < \alpha$, то $\varphi(x_{n_i}) \not\to \varphi(x)$, значит, тем более $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$, т.е., $x_n \not\rightharpoonup x$. Противоречие.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Показать, что из слабой сходимости в бесконечномерном пространстве необязательно следует сильная.

Решение: рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ систему $x_n(t) = \sin n\pi t$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме об общем виде функционала в L_p $\forall \varphi \in L_2^*$ $\exists g(t) \in L_2[0,1]$ такая, что $\varphi(x_n) = \int_0^1 x_n(t) g(t) dt$, т.е. $\varphi(x_n) = \int_0^1 g(t) \sin n\pi t dt$. Таким образом, $\varphi(x_n)$ – это n-й коэффициент Фурье функции $g(t)$ по ортогональной системе функций $\{\sin n\pi t\}$, следовательно, как известно из курса математического анализа (лемма Римана), $\varphi(x_n) \to 0$, значит, $x_n \rightharpoonup 0$. С другой стороны, $x_n \not\to 0$, поскольку $\{x_n\}$ не фундаментальна в пространстве $L_2[0,1]$. Действительно, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 |\sin n\pi t - \sin m\pi t|^2 dt = 1$, и, значит, эта норма не может быть меньше $\forall \varepsilon > 0$.

2. Пусть $0 \in (a,b)$ и δ – функционал на пространстве $C[a,b]$, определяемый соотношением $\delta(x) = x(0)$, а последовательность $(\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ удовлетворяет условиям:

а) $\varphi_n(t) = 0$ при $|t| > \dfrac{1}{n}$ и $\varphi_n(t) \geq 0$;

б) $\int_a^b \varphi_n(t) dt = 1$.

Доказать, что $\forall x \in C[a,b]$ последовательность $f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt$ *-слабо сходится к функционалу δ.

Решение: поскольку $x(t)$ – непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о среднем для интегралов $f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) x(t) dt = x(\xi_n) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) dt = x(\xi_n)$, где $\xi_n \in \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$. При $n \to \infty$ $\xi_n \to 0$, т.е. $\forall x \in C[a,b]$ $f_n(x) \to x(0) = \delta(x)$, откуда $f_n \xrightarrow{*} \delta$.

3. Для того чтобы последовательность $(x_n(t))_{n=1}^{\infty} \subset L_p[0,1]$ ($p > 1$) слабо сходилась к элементу $x_0(t) \in L_p[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограниченной;

б) $\int\limits_0^\tau x_n(t)dt \to \int\limits_0^\tau x_0(t)dt$ для любого $\tau \in [0,1]$.

Доказать это утверждение.

Решение: условие а) совпадает с условием 1 критерия слабой сходимости. Рассмотрим функции $\chi_\tau(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le \tau \\ 0, \tau < t \le 1 \end{cases}$. Ясно, что это простые ступенчатые функции. Из теоремы о плотности простых ступенчатых функций в L_p следует, что линейные комбинации $\chi_\tau(t)$ лежат всюду плотно в L_p.

По теореме об общем виде функционала на $L_p[0,1]$ $\forall y(t) \in L_q[0,1]$ $\varphi(x) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt \in L_p^*$ при всех $x(t) \in L_p[0,1]$. В частности, $\varphi_\tau(x) = \int\limits_0^1 x(t)\chi_\tau(t)dt \in L_p^*$ при $\chi_\tau(t) \in L_q$. Поскольку $L_p^* \cong L_q$ и линейные комбинации функций $\chi_\tau(t)$ лежат всюду плотно в $L_q[0,1]$, то линейные комбинации функционалов φ_τ лежат всюду плотно в L_p^* (в силу изоморфизма линейные комбинации переходят в линейные комбинации, а в силу изометрии сохраняется всюду плотность). Таким образом, п. 2 критерия слабой сходимости принимает вид $\varphi_\tau(x_n) \to \varphi_\tau(x_0)$, что эквивалентно $\int\limits_0^1 x_n(t)\chi_\tau(t)dt \to \int\limits_0^1 x_0(t)\chi_\tau(t)dt$, откуда $\int\limits_0^\tau x_n(t)dt \to \int\limits_0^\tau x_0(t)dt$ для любого $\tau \in [0,1]$.

4. Исследовать на сильную и слабую сходимость в l_2 последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...\right)$.

Решение: вначале исследуем последовательность на слабую сходимость. Возьмем $\forall \varphi \in l_2^*$. Надо проверить, что $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$. По теореме об общем виде функционала на l_p, $\varphi(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)}\eta_k$, где $x_n = \left(\xi_k^{(n)}\right) \in l_2$, $\left(\eta_k\right) \in l_2^* = l_2$. Отсюда $\varphi(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \eta_k \underset{n\to\infty}{\to} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \eta_k = \varphi(x_0)$, $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ...\right) \in l_2$. Поскольку $\left|\varphi(x_n) - \varphi(x_0)\right| =$
$= \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \eta_k\right| \le \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ в силу теоремы об остатке сходящегося ряда, то $x_n \rightharpoonup x_0$. Проверим, что $x_n \to x_0$ сильно, т.е., что $\|x_n - x_0\| \to 0$. Действительно, $\|x_n - x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}\right|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

5. Доказать, что в пространстве l_1 слабая сходимость совпадает с сильной (данное свойство называется свойством Шура).

Решение: надо доказать, что из слабой сходимости в l_1 вытекает сильная. При этом в силу свойств линейности, достаточно доказать, что из условия $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0 = (0,0,0,...)$ следует, что $x_n \overset{l_1}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0 = (0,0,0,...)$ (если $x_n \rightharpoonup x$, то достаточно применить все дальнейшие рассуждения к последовательности $\{y_n\} = \{x_n - x\}$).

Дано, что $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$, т.е. $\forall \varphi \in l_1^* \;\; \varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(0) = 0$. По теореме об общем виде функционала на l_1 получаем, что $\forall y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_\infty \;\; \exists \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i \in l_1^*$ для всех $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1$. Рассмотрим элементы $y_k = (0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0,...) \in l_\infty$, тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i^{(k)} = \xi_k$, откуда $\varphi_k(x_n) = \xi_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Таким образом, показали, что из слабой сходимости последовательности в l_1 следует ее покоординатная сходимость. Предположим теперь, что последовательность $\{x_n\} \subset l_1$ не сходится к нулю сильно, т.е. $\exists C > 0$: $\forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n > N \;\; \|x_n\| \ge C$. Значит у последовательности $\{x_n\}$ можно найти подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\|x_{n_k}\| \ge C$ для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом, поскольку $\{x_{n_k}\} \subset l_1$, То $\|x_{n_k}\| < +\infty$. Далее будем извлекать из последовательности $\{x_{n_k}\}$ подпоследовательность $\{x_{n_{\alpha_k}}\}$, которая не сходится к нулю слабо, что и даст противоречие нашему предположению.

Возьмем $\alpha_1 = 1$, тогда, поскольку $\|x_{n_{\alpha_1}}\| < +\infty$ и $\|x_{n_{\alpha_1}}\| \ge C$, то найдется номер $m_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_1})}\right| < \frac{C}{10}$ и $\sum_{i=1}^{m_1} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_1})}\right| \ge \frac{8C}{10}$. В силу покоординатной сходимости $\xi_i^{(n_k)} \underset{k\to\infty}{\to} 0$ для всех i, следовательно, найдется $\alpha_2 > \alpha_1$ такое, что $\sum_{i=1}^{m_1} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_2})}\right| < \frac{C}{10}$. Но тогда $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_2})}\right| > \frac{9C}{10}$. Таким образом, найдется номер $m_2 > m_1$ такой, что $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_2})}\right| \ge \frac{8C}{10}$, а соответствующий остаток $\sum_{i=m_2+1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_2})}\right| < \frac{C}{10}$.

Продолжая этот процесс неограниченно, построим последовательность $\{x_{n_{\alpha_k}}\}$ и соответствующую ей последовательность номеров $m_1 < m_2 < ...$ такие, что $\sum_{i=1}^{m_{k-1}} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_k})}\right| < \frac{C}{10}$, $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_k})}\right| \ge \frac{8C}{10}$, $\sum_{i=m_k+1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n_{\alpha_k})}\right| < \frac{C}{10}$, $m_0 = 0$.

Определим $c = (c_1, c_2, ...) \in l_\infty$, тогда $\exists \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i \in l_1^*$. Для каждого i найдем k так, чтобы $i \in [m_{k-1}, m_k]$ (это возможно, поскольку по построению числа m_k образуют возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел). Тогда примем $c_i = \operatorname{sign} \xi_i^{(n_{\alpha_k})}$ и получим, что (при $k>1$):

$$\varphi\left(x_{n_{\alpha_k}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i = \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i + \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left|\xi_i^{n_{\alpha_k}}\right| + \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i +$$

$$+ \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \xi_i^{n_{\alpha_k}} c_i \geq \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left|\xi_i^{n_{\alpha_k}}\right| - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \left|\xi_i^{n_{\alpha_k}}\right| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \left|\xi_i^{n_{\alpha_k}}\right| \geq \frac{8C}{10} - \frac{C}{10} - \frac{C}{10} = \frac{3C}{5}.$$

Итак, $\varphi\left(x_{n_{\alpha_k}}\right) \not\to 0$, следовательно, $\varphi(x_n) \not\to 0$, т.е. $x_n \not\rightharpoonup 0$.

6. Пусть H – гильбертово пространство, $x_n \to x$, $y_n \rightharpoonup y$. Доказать, что $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Решение: т.к. $x_n \to x$, то $\|x_n - x\| \to 0$. Поскольку $y_n \rightharpoonup y$, то $\forall \varphi \in H^*$ $\varphi(y_n) \to \varphi(y)$, т.е. $|\varphi(y_n) - \varphi(y)| \to 0$, т.е. $|\varphi(y_n - y)| \to 0$. В силу теоремы о пространстве, сопряженном к гильбертову, для элемента $x \in H$ $\exists \varphi(y) = (y, x)$. Таким образом, $|(y_n - y, x)| \to 0$. Поскольку слабо сходящаяся последовательность всегда ограничена, то $\exists M > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|y_n\| \leq M$.

Далее, $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq$ $\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + |(x, y_n - y)| \leq M \|x_n - x\| + |(y_n - y, x)|$. Осталось перейти в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и получить, что $|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что одна и та же последовательность не может иметь двух разных слабых пределов. Доказать, что, если последовательность слабо сходится, то слабо сходится, причем к тому же самому пределу, любая ее подпоследовательность.

Указание: первое утверждение доказать от противного. Воспользоваться теоремой о вычислении нормы вектора с помощью функционала.

2. Показать, что если $x_n \rightharpoonup x$, то в неравенстве $\|x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ возможно строгое неравенство.

Указание: рассмотреть в $L_2[0,1]$ *систему* $x_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Доказать, что сопряженное пространство X^* является *-слабо полным (т.е. из фундаментальности последовательности в *-слабом смысле следует ее *-слабая сходимость).

Указание: воспользоваться теоремой о полноте пространства линейных ограниченных операторов. Фундаментальность последовательности $\{\varphi_n\} \subset X^*$ *в *-слабом смысле означает, что* $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m > N$ $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$ *или, что* $\forall x \in X$ $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$.

4. Проверить, что в пространстве l_2 сильная и слабая сходимости не совпадают.

Указание: рассмотреть последовательность $e_i = (0,0,...,0,\underset{i}{1},0,0,...)$*, показать, что она не является фундаментальной, затем, воспользоваться теоремой об общем виде функционалов в* l_p *и показать, что она слабо сходится к нулю.*

5. Найти нормы функционалов δ и f_n из примера 2.

6. Для того чтобы последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(\xi_i^{(n)}\right)\right\} \subset l_p$ $(p > 1)$ слабо сходилась к элементу $x_0 = \left(\xi_i^{(0)}\right) \subset l_p$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограниченной;

б) $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$ при $n \to \infty$ для всех i (вообще говоря, неравномерно).

Доказать это утверждение.

Указание: рассмотреть элементы $e_i = (0,0,...,0,\underset{i}{1},0,0,...)$ *и показать, что их линейные комбинации лежат всюду плотно в* $l_q \cong l_p^{\,*}$.

7. Доказать, что последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$ слабо сходится тогда и только тогда, когда:

а) она равномерно ограничена, т.е. $|x_n(t)| \le C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [a,b]$;

б) $\{x_n(t)\}$ сходится в каждой точке $t \in [a,b]$.

Совпадают ли в $C[a,b]$ сильная и слабая сходимости?

Указание: для доказательства необходимости рассмотреть функционалы $\delta_\tau(x) = x(\tau)$ *при всех* $\tau \in [a,b]$. *Для доказательства достаточности использовать теорему Арцела о предельном переходе под знаком интеграла Римана-Стилтьеса: если* $x_n(t)$ *непрерывны на* $[a,b]$, *причем* $|x_n(t)| \le C$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, *причем предельная функция непрерывна, а* $g(t)$ *– функция с ограниченным изменением, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)dg(t) = \int\limits_a^b x(t)dg(t)$.

8. Исследовать на сильную и слабую сходимость в l_2 последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right).$$

Указание: сходится слабо к нулю.

9. Исследовать на сильную и слабую сходимость в l_2 последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{1,1,...,1}_{n-1},\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},...\right).$$

Указание: не сходится слабо. Рассмотреть $y=(\eta_k)=\left(\frac{1}{k}\right)\in l_2^*=l_2$.

10. Исследовать на сильную и слабую сходимость в $L_2[0,1]$ последовательность $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$.

Указание: сходится слабо и сильно. Воспользоваться теоремой об общем виде функционала на L_p *и теоремой Лебега об ограниченной сходимости. Учесть, что любая функция* $g(t)\in L_2[0,1]$ *суммируема.*

11. Исследовать на сильную и слабую сходимость в $L_2[0,1]$ последовательность $x_n(t)=e^{-\sqrt{nt}}$.

Указание: сходится слабо, но не сильно.

12. Исследовать на сильную и слабую сходимость в $L_2[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\begin{cases}2n(1-nt), & t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$.

Указание: не сходится слабо. Рассмотреть $g(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\in L_2[0,1]^*=L_2[0,1]$.

13. Доказать, что в сопряженном пространстве любой замкнутый шар $B\subset X^*$ радиуса R с центром в начале координат является *-слабо замкнутым множеством, т.е. $\forall\{\varphi_n\}\subset B$ из того, что $\varphi_n\xrightarrow{*}\varphi$ следует, что $\varphi\in B$, где $\{\varphi_n\},\varphi:X\to\mathbb{R}$ – линейные ограниченные функционалы.

14. Рассмотрим линейные функционалы $f_\varepsilon(x)=\frac{x(\varepsilon)-x(-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ и $f_0(x)=x'(0)$, где $x(t)\in C^{(1)}[-1,1]$, $0<\varepsilon<1$. Доказать, что $f_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{*}f_0$. Выяснить, имеет ли место сильная сходимость $f_\varepsilon\to f_0$.

Указание: при проверке сильной сходимости рассмотреть $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin nt$ *и доказать, что* $\|f_\varepsilon-f\|\geq 1$.

15. Провести полное доказательство критерия слабой сходимости.

16. Доказать, что множество в банаховом пространстве является слабо ограниченным тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Указание: множество $M\subset X$ *называется слабо ограниченным, если для любого* $\varphi\in X^*$ *и для каждого* $x\in M$ *множество* $\{\varphi(x)\}$ *ограничено. При доказательстве необходимости предположить противное и выделить из множества неограниченную последовательность* $\{x_n\}$*, такую, что* $\|x_n\|>n^2$*. Затем,* $\forall\varphi\in X^*$ *доказать, что* $\varphi\left(\frac{x_n}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

17. Доказать, что всякая слабо фундаментальная последовательность в нормированном пространстве ограничена.

Указание: последовательность $\{x_n\} \subset X$ *называется слабо фундаментальной, если* $\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ *или* $\forall \varphi \in X^* \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n,m > N \ |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| < \varepsilon$.

18. Доказать, что всякая слабо сходящаяся последовательность в нормированном пространстве слабо фундаментальна.

19. Доказать, что всякое слабо замкнутое множество замкнуто. Доказать, что всякое (замкнутое) подпространство является и слабо замкнутым.

20. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$. Доказать, что $\forall 0 < \delta < 1 \ \exists m \in \mathbb{N}: \ \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| \ge (1-\delta)\|x\|$.

Указание: предположить противное и рассмотреть $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...\right) \in l_1$.

21. Исследовать на сильную и слабую сходимость в пространстве l_p ($1 < p < \infty$) последовательность $x_n = \left(\frac{1+n}{1+n}, \frac{1+n}{1+2n}, ..., \frac{1+n}{1+kn}, ...\right)$.

22. Исследовать на сильную и слабую сходимость в пространстве l_p ($1 < p < \infty$) последовательность $x_n = \left(1, 0, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, ..., \frac{1}{(2n-1)^2}, \frac{1}{(2n)^2}, \frac{1}{(2n+1)^2}, ...\right)$.

23. Доказать, что в $\left(C[a,b]\right)^*$ сильная и *-слабая сходимости не совпадают.

Указание: рассмотреть последовательность $a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt\,dt$ *линейных ограниченных функционалов в* $C[a,b]^*$. *Для проверки сходимости по норме воспользоваться теоремой Рисса об общем виде функционала.*

24. Доказать, что в l_1 покоординатная сходимость не влечет слабую.

Указание: рассмотреть $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, ...\right)$ *и доказать, что* $\{x_n\}$ *не сходится слабо. Для этого рассмотреть* $y_k = \left(0, ..., 0, \underset{k}{1}, 0, 0, ...\right) \in l_\infty$ *и показать, что возможно только* $x_n \rightharpoonup 0$. *При* $y = (1, 1, ...) \in l_\infty$ *получить противоречие.*

25. Пусть H – гильбертово пространство, $\|x_n\| \to \|x\|$, $x_n \rightharpoonup x$. Доказать, что $\|x_n - x\| \to 0$.

26. При каких $a > 0$ последовательность $x_n(t) = t^n$ сходится в $C[0,a]$ сильно? Слабо?

27. Исследовать на сильную, слабую и *-слабую сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \xi_n$ в пространствах c_0 и l_p, $1 < p < \infty$.

28. Исследовать на сильную, слабую и *-слабую сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{int}dt$ в пространстве $L_2\left[-\pi;\pi\right]$.

29. Исследовать на сильную, слабую и *-слабую сходимость последовательность функционалов $f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$ в пространстве l_p, $1 < p < \infty$.

30. Исследовать на сильную и слабую сходимость в пространстве $L_2\left[0;1\right]$ последовательность $x_n(t) = e^{i\sqrt{n}t}$.

2.6. Рефлексивные пространства. Двойственность

Определение: линейное нормированное пространство X называется рефлексивным, если $X \cong X^{**}$, причем изоморфизм этот осуществляет естественное вложение $\pi : X \to X^{**}$ пространства X во второе сопряженное.

Замечание: если пространство X рефлексивно, то $X^{**} \subset X$, т.е. $\forall \psi \in X^{**}$ $\exists x \in X :\ \forall \varphi \in X^{*}\ \ \psi(\varphi) = \varphi(x)$ (ко всем прочим свойствам, доказанным в теореме о естественном вложении пространства во второе сопряженное, добавляется свойство сюръективности).

Теорема (о рефлексивности гильбертова пространства): всякое гильбертово пространство H рефлексивно.

Доказательство: по теореме о пространстве, сопряженном к гильбертову, определена антилинейная изометрическая биекция $I : H^{*} \to H$, действующая по правилу $\varphi(x) = (x, I\varphi)$, причем $I(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \bar{\alpha} I\varphi_1 + \bar{\beta} I\varphi_2$.

Покажем, что пространство H^{*} гильбертово. Действительно, H^{*} – банахово, и если определить в H^{*} функцию $(\varphi_1, \varphi_2)_{*} = (I\varphi_2, I\varphi_1)$, то легко проверяется справедливость всех аксиом скалярного произведения. Кроме того, $(\varphi, \varphi)_{*} = (I\varphi, I\varphi) = \|I\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$, поэтому введенное скалярное произведение действительно задает имеющуюся в H^{*} норму. Таким образом, в H^{*} снова справедлива теорема о пространстве сопряженном к гильбертову и определена антилинейная изометрическая биекция $I_{*} : H^{**} \to H^{*}$, действующая по правилу $\psi(\varphi) = (\varphi, I_{*}\psi)_{*}$. Тогда $I(I_{*}) : H^{**} \to H$ линейная изометрическая биекция, следовательно, отображение $(I(I_{*}))^{-1} : H \to H^{**}$ также линейно, биективно и изометрично и осталось доказать, что $(I(I_{*}))^{-1} x = \pi_{H^{*}} x$. Действительно, $\forall \psi \in H^{**}$ возьмем $x = I(I_{*}\psi) \in H$, тогда $\forall \varphi \in H^{*}\ \ \psi(\varphi) = (\varphi, I_{*}\psi)_{*} = (I(I_{*}\psi), I\varphi) = (x, I\varphi) = \varphi(x)$.

Теорема доказана.

Замечание: более подробно об обратных операторах см. в следующем разделе. В нашем случае важно только то, что рассматриваемое обратное отображение существует и это изометрический изоморфизм.

Замечание: если пространство X рефлексивно, то для $\{\varphi_n\}, \varphi \subset X^{*}$ верно, что: $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \Leftrightarrow \forall \psi \in X^{**}\ \psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi) \Leftrightarrow \forall x \in X\ \varphi_n(x) \to \varphi(x)$ (в силу изоморфности естественного вложения). Тем самым, слабая сходимость последовательности функционалов на X^{*} эквивалентна ее *-слабой сходимости.

Замечание: всякое рефлексивное пространство – банахово (задача 1).

Теорема (о рефлексивности подпространства): всякое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

Доказательство: пусть X – рефлексивное пространство, E – его подпространство. Пусть $\pi : X \to X^{**}$, $\pi_1 : E \to E^{**}$ – естественные вложения. Рассмотрим отображение $J : X^{*} \to E^{*}$, $J\varphi = \varphi|_E$, т.е. $\forall x \in E\ \ J\varphi(x) = \varphi(x)$.

Также рассмотрим отображение $F: E^{**} \to X^{**}$, действующее по правилу: $\forall \psi \in E^{**} \ \ \forall \varphi \in X^{*} \ \ F\psi(\varphi) = \psi(J\varphi)$. По условию π – изометричный изоморфизм, поэтому $\pi^{-1}F \subset X$. Покажем, что $\pi^{-1}(FE^{**}) \subset E$. Допустим, что это не так, т.е. $\exists \psi_0 \in E^{**}$: $\pi^{-1}(F\psi_0) = x_0 \notin E$. Тогда по теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists \varphi_0 \in X^{*}$: $\varphi_0(x_0) = 1$, $\varphi_0\big|_E = 0$. Тем самым, $J\varphi_0 = 0 \in E^{*}$, поэтому $0 = \psi_0(J\varphi_0) = F\psi_0(\varphi_0) = \pi x_0(\varphi_0) = \varphi_0(x_0) = 1$. Противоречие.

Покажем, что π_1 сюръективно, откуда и будет следовать рефлексивность E. Надо доказать, что $\forall \psi \in E^{**} \ \exists x \in E$: $\pi_1 x = \psi$. Заметим, что по теореме Хана-Банаха $\forall f \in E^{*} \ \ \exists \varphi \in X^{*}$: $\varphi\big|_E = f$ или $J\varphi = f$. Тогда $\forall f \in E^{*}$ возьмем элемент $x = \pi^{-1}(F\psi) \in E$ и получим: $\pi_1 x(f) = f(x) = J\varphi(x) = \varphi(x) = \pi x(\varphi) = F\psi(\varphi) = \psi(J\varphi) = = \psi(f)$.

Теорема доказана.

Теорема (о рефлексивности сопряженного пространства): если пространство X рефлексивно, то рефлексивно и X^{*}. Обратно: если X – банахово пространство, то из рефлексивности X^{*} следует рефлексивность X.

Доказательство: по определению надо доказать, что $\forall \psi \in X^{***} \ \ \exists x \in X^{*}$: $\forall \varphi \in X^{**} \ \ \psi(\varphi) = \varphi(x)$. Пусть $x = \psi\pi$, где $\pi : X \to X^{**}$ – естественное вложение. Поскольку X рефлексивно, то $\forall \varphi \in X^{**}$ – есть πy для некоторого $y \in X$, причем $\forall x \in X^{*} \ \ \pi y(x) = x(y)$. Тогда $\psi(\varphi) = \psi(\pi y) = x(y) = \pi y(x) = \varphi(x)$.

Обратно: пусть X^{*} рефлексивно. Тогда, по уже доказанному, X^{**} рефлексивно. Поскольку $X \cong \pi X \subset X^{**}$ и X – замкнуто, то X рефлексивно по предыдущей теореме.

Теорема доказана.

Теорема (критерий рефлексивности Банаха): банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда всякая ограниченная последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся в X подпоследовательность.

Теорема (критерий рефлексивности Джеймса): для того, чтобы банахово пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varphi \in X^{*} \ \ \exists x_\varphi \in X$: $\|x_\varphi\| = 1$ и $\varphi(x_\varphi) = \|\varphi\|$.

Замечание: доказательство этих утверждений можно найти в литературе по функциональному анализу (см. напр., [3]). Частично эти утверждения предлагаются в качестве задач для самостоятельного решения (задачи 2, 3, 19).

Определение: пусть X – линейное нормированное пространство, $M \subset X$, $N \subset X^{*}$, тогда множество $M^{\perp} = \left\{\varphi \in X^{*} : \forall x \in M \ \varphi(x) = 0\right\}$ называется аннулятором множества M, а множество ${}^{\perp}N = \left\{x \in X : \forall \varphi \in N \ \varphi(x) = 0\right\}$ называется преданнулятором (общим ядром) множества N.

Замечание: если пространство X рефлексивно, $N \subset X^*$, то по определению $N^\perp = \left\{\psi \in X^{**} : \forall \varphi \in N\ \psi(\varphi) = 0\right\} = \left\{x \in X : \forall \varphi \in N\ \varphi(x) = 0\right\} = {}^\perp N$, поскольку в рефлексивном пространстве элементы $x \in X$ и $\psi \in X^{**}$ можно отождествить с точностью до изометричного изоморфизма.

Теорема (свойства аннуляторов и преданнуляторов): пусть X – линейное нормированное пространство, тогда:

1. для любого множества $M \subset X$ его аннулятор – подпространство в X^*; для любого множества $N \subset X^*$ его преданнулятор – подпространство в X;

2. если $M \subset X$, то $M^\perp = \bar{M}^\perp$; если $N \subset X^*$, то ${}^\perp N = {}^\perp \bar{N}$;

3. $\{0\}^\perp = X^*$, $X^\perp = \{0\}$; ${}^\perp\{0\} = X$, ${}^\perp X^* = \{0\}$;

4. если $M_1 \subset M_2 \subset X$, то $M_2^\perp \subset M_1^\perp \subset X^*$; если $N_1 \subset N_2 \subset X^*$, то ${}^\perp N_2 \subset {}^\perp N_1 \subset X$;

5. если $M \subset X$, то $\bar{M} = {}^\perp(M^\perp)$;

6. если $N \subset X^*$, то $\bar{N} \subset ({}^\perp N)^\perp$, при этом, если пространство X рефлексивно, то $\bar{N} = ({}^\perp N)^\perp$.

Доказательство: свойства 1-4 предлагается доказать самостоятельно (задача 8), используя только определения аннуляторов, преданнуляторов и подпространств. Для доказательства свойства ${}^\perp X^* = \{0\}$ применяется теорема о вычислении нормы вектора с помощью функционала.

5. Пусть $x \in \bar{M}$. Покажем, что $x \in {}^\perp(M^\perp)$, т.е., что $\varphi(x) = 0\ \forall \varphi \in M^\perp$. Но это действительно так по определению $M^\perp$, поскольку, если $\varphi \in M^\perp = \bar{M}^\perp$ (по свойству 2), то $\varphi(x) = 0\ \forall x \in \bar{M}$. Пусть теперь $x \notin \bar{M}$. По теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists \varphi \in X^*$: $\varphi|_{\bar{M}} = 0$, $\varphi(x) = 1$. Отсюда следует, что $\varphi \in M^\perp$, но $\varphi(x) \neq 0$, т.е. $x \notin {}^\perp(M^\perp)$.

6. Предлагается доказать самостоятельно, аналогично свойству 5, учитывая, что в рефлексивном пространстве $\forall \psi \in X^{**}\ \ \exists x \in X:\ \forall \varphi \in X^*\ \ \psi(\varphi) = \varphi(x)$ и элементы $x \in X$ и $\psi \in X^{**}$ можно отождествить (задача 8).

Теорема доказана.

Теорема (критерии всюду плотности): пусть X – линейное нормированное пространство, тогда:

1. линейное многообразие $M \subset X$ всюду плотно в X тогда и только тогда, когда $M^\perp = \{0\}$;

2. если X рефлексивно, то линейное многообразие $N \subset X^*$ всюду плотно в X^* тогда и только тогда, когда ${}^\perp N = \{0\}$.

Доказательство: 1. Пусть M всюду плотно в X, т.е. $\bar{M} = X$. В силу свойств 2 и 3 предыдущей теоремы $M^\perp = \bar{M}^\perp = X^\perp = \{0\}$.

Обратно: пусть $M^{\perp}=\{0\}$. В силу свойств 5 и 3 $\bar{M}={}^{\perp}(M^{\perp})={}^{\perp}\{0\}=X$.

2. Доказывается аналогично п. 1, используя свойства 2,3,6 предыдущей теоремы (задача 9).

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Пусть X – рефлексивное пространство, $\varphi \in X^*$. Доказать, что $\exists x \in X$, $x \neq 0$: $\varphi(x)=\|\varphi\|\cdot\|x\|$.

Решение: если $\varphi=0$, то в качестве искомого элемента x можно взять любой вектор $x\neq 0$. Ясно, что равенство $\varphi(x)=\|\varphi\|\cdot\|x\|$ будет верным.

Далее будем считать, что $\varphi\neq 0$. Берем $\forall\varphi\in X^*$, $\varphi\neq 0$. По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала найдется функционал $\psi\in X^{**}$ такой, что $\psi(\varphi)=\|\varphi\|$ и $\|\psi\|=1$. Отсюда заключаем, что $\psi(\varphi)=\|\psi\|\cdot\|\varphi\|$. Поскольку X – рефлексивно, то $\forall\psi\in X^{**}$ $\exists x\in X$: $\forall\varphi\in X^*$ $\psi(\varphi)=\varphi(x)$ и при этом $\|\psi\|=\|x\|$. Для нашего функционала ψ найдем указанный элемент $x\in X$, причем ясно, что $x\neq 0$ (иначе из равенства $\|\psi\|=\|x\|$ следовало бы, что $\psi=0$, а из равенства $\psi(\varphi)=\|\varphi\|$ следовало бы, что $\varphi=0$, а это противоречие). Тогда имеем цепочку равенств $\varphi(x)=\psi(\varphi)=\|\psi\|\cdot\|\varphi\|=\|\varphi\|\cdot\|x\|$.

2. Доказать, что, если X – рефлексивное пространство, то оно является слабо полным.

Решение: надо доказать, что если X – рефлексивное пространство, то в нем всякая слабо фундаментальная последовательность слабо сходится.

Пусть $\{x_n\}\subset X$ – слабо фундаментальна, т.е. $\forall\varphi\in X^*$ справедливо соотношение $|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)|\underset{n,m\to\infty}{\to}0$. Это означает, что числовая последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ – фундаментальна. В силу критерия Коши для числовых последовательностей $\{\varphi(x_n)\}$ сходится, т.е. $\varphi(x_n)\underset{n\to\infty}{\to}a$. Поскольку сходящаяся последовательность всегда ограничена, то $\forall\varphi\in X^*$ последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ ограничена. Поскольку X – рефлексивное пространство, то X – банахово. Итак, получили, что последовательность $\{x_n\}$ слабо ограничена в банаховом пространстве, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена (см. задачу 16 п. 2.5). В силу критерия рефлексивности Банаха у последовательности $\{x_n\}$ можно найти слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.е. $x_{n_k}\underset{k\to\infty}{\rightharpoonup}x_0\in X$, а значит для наших функционалов φ получаем, что $\varphi\left(x_{n_k}\right)\underset{k\to\infty}{\to}\varphi\left(x_0\right)$. В силу единственности предела и того, что $\varphi(x_n)\underset{n\to\infty}{\to}a$, получаем, что $a=\varphi(x_0)$, откуда следует, что $x_n\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}x_0$.

3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ не является рефлексивным.

Решение: допустим противное. Тогда $\forall \psi \in C^{**}[a,b]$ $\exists x \in C[a,b]$: $\forall \varphi \in C^{*}[a,b]$ $\psi(\varphi) = \varphi(x)$. При этом по теореме об общем виде функционала на $C[a,b]$ функционалу $\varphi \in C^{*}[a,b]$ будет соответствовать функция ограниченного изменения $g(t)$, причем $\varphi(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t)$, откуда $\psi(\varphi) = \psi(g) = \int\limits_a^b x(t)dg(t)$.

Рассмотрим функционал $\psi_{x_0} \in C^{**}[a,b]$: $\psi_{x_0}(g) = g(t_0+0) - g(t_0-0)$, $t_0 \in [a,b]$. Ясно, что он линеен, а также ограничен: $\left|\psi_{x_0}(g)\right| = \left|g(t_0+0) - g(t_0-0)\right| \le \mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b g = \|g\|$. Кроме того, легко видеть, что $\left\|\psi_{x_0}\right\| = 1$, т.е. $\psi_{x_0} \ne 0$, поэтому существует такая непрерывная на $[a,b]$ функция $x_0(t) \not\equiv 0$, что $\psi_{x_0}(g) = \int\limits_a^b x_0(t)dg(t)$. Рассмотрим функцию $g_0(t) = \int\limits_a^t x_0(\tau)d\tau$. Она непрерывна на $[a,b]$, следовательно, $\psi_{x_0}(g_0) = 0$. С другой стороны, $\psi_{x_0}(g_0) = \int\limits_a^b x_0(t)dg_0(t) = \int\limits_a^b x_0^2(t)dt > 0$ – противоречие.

4. Доказать, что пространство $L_p(E, d\mu)$, $1 < p < \infty$ рефлексивно.

Решение: рассмотрим элемент $\psi \in L_p^{**}$. Требуется найти такой вектор $x \in L_p$, что для всякого функционала $\varphi \in L_p^{*}$ $\psi(\varphi) = \varphi(x)$. Рассмотрим отображение $g : L_q(E, d\mu) \to \mathbb{C}$, $g(y) = \psi(f_y)$, где $f_y(x) = \int\limits_E x(t)y(t)d\mu \in L_p^{*}$ – тот функционал, который можно найти для любого элемента $y \in L_q$ по теореме об общем виде функционалов на L_p. Легко проверяется, что g – линейный ограниченный функционал, т.е. $g \in L_q^{*}$. Тогда, снова по теореме об общем виде функционала, примененной к $g \in L_q^{*}$, существует вектор $x(t) \in L_p$ такой, что $g(y) = \int\limits_E y(t)x(t)d\mu$. Таким образом, для всех $y \in L_q$ $g(y) = f_y(x)$, откуда $\psi(f_y) = f_y(x)$. Осталось заметить, что, по теореме об общем виде функционала, любой функционал $\varphi \in L_p^{*}$ – есть f_y для некоторого $y \in L_q$.

Заметим, что для доказательства рефлексивности недостаточно было предъявить цепочку $L_p^{**} \cong L_q^{*} \cong L_p$, поскольку изоморфизм не обязан был осуществляться именно естественным вложением во второе сопряженное.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что всякое рефлексивное пространство является банаховым.

2. Доказать, что, если сепарабельное банахово пространство рефлексивно, то единичный шар в нем секвенциально слабо компактен.

*Указание: использовать теорему о *-слабой секвенциальной компактности шара в сопряженном пространстве (применительно к пространству* X^**). Использовать утверждение примера 5 п. 2.3. Учесть, что, в силу рефлексивности, единичный шар пространства* X *совпадает с единичным шаром пространства* X^{**}.

3. Доказать, что, если пространство X рефлексивно, то $\forall \varphi \in X^* \ \exists x_\varphi \in X$: $\|x_\varphi\| = 1$ и $\varphi(x_\varphi) = \|\varphi\|$.

4. Доказать, что всякое конечномерное пространство рефлексивно.

Указание: используя задачу 29 п. 1.4 показать, что размерности пространств X *и* X^{**} *совпадают. Далее, расписывая элементы* $\psi \in X^{**}$, $\varphi \in X^*$ *и* $x \in X$ *по соответствующим базисам (определяя базисы в* X^* *и* X^{**} *также, как и в указанной выше задаче), проверить, что* $\forall \psi \in X^{**} \ \exists x \in X: \ \forall \varphi \in X^*$ $\psi(\varphi) = \varphi(x)$.

5. Доказать, что пространства c_0, l_1, c, l_∞ нерефлексивны.

Указание: в случае c_0 *рассмотреть функционал* $g \in c_0^{**}$, *переводящий* f_η, $\eta \in l_1$ *в* $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$. *В случае* l_1 *рассмотреть функционал* $g \in l_1^{**}$, *переводящий* f_η, $\eta \in l_\infty$ *в* $\varphi(\eta)$ *– функционал на* l_∞, *равный нулю на* c_0 *и единице на* $(1,1,1,\ldots)$. *В остальных случаях использовать свойства рефлексивности.*

6. Доказать, что пространства L_1 и L_∞ нерефлексивны.

Указание: в случае L_1 *найти функционал, не достигающий нормы на единичном шаре.*

7. Доказать, что пространство l_p, $1 < p < \infty$ рефлексивно.

8. Доказать свойства 1-4, 6 аннуляторов и преданнуляторов. Показать, что, если пространство X рефлексивно, $M \subset X$ – подпространство, то $\left({}^{\perp}M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.

9. Доказать, что, если X – рефлексивное пространство, то линейное многообразие $N \subset X^*$ всюду плотно в X^* тогда и только тогда, когда ${}^{\perp}N = \{0\}$.

10. Для множества $M = \left\{(\ldots,\xi_{-2},\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots) : \xi_{-k} = -\xi_k,\, k \in \mathbb{Z}\right\} \subset l_p(\mathbb{Z})$, $p \ge 1$ найти аннулятор $M^{\perp}$.

Указание: показать, что $M^{\perp} = \left\{(\ldots,\eta_{-2},\eta_{-1},0,\eta_1,\eta_2,\ldots) : \eta_{-k} = \eta_k,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Показать, что любой функционал* $f \in l_p(\mathbb{Z})^*$, *порожденный элементами* $M^{\perp}$, *обнуляется на элементах* M. *Показать, что векторы* e_0, $e_1 - e_{-1}$, $e_2 - e_{-2}, \ldots$ *лежат в* M *и использовать то, что для любого функционала* f, *порожденного произвольным элементом* $(\ldots,\eta_{-2},\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\eta_2,\ldots)$, $f(e_0) = 0$, $f(e_1 - e_{-1}) = 0$, $f(e_2 - e_{-2}) = 0, \ldots$

11. Для множества $M=\{x(t)\in C[-1,1]:\forall t<0\ x(t)=0\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=L(\varphi_0)$, $\varphi_0(x)=x(0)$, *L обозначает линейную оболочку.*

12. Для множества $M=\{x(t)\in C[0,1]:x(0)=0\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=\{0\}$.

13. Для множества $M=\{x(t)\in L_1[-1,1]:\forall t\in[-1,1]\ x(t)=x(-t)\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=\{0\}$.

14. Для множества M всех многочленов в пространстве $C[0,1]$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=L(\varphi_0)$, $\varphi_0(x)=x(0)$, *L обозначает линейную оболочку.*

15. Для множества $M=\{x(t)\in C[0,1]:\forall a>b\ x(a)\geq x(b)\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=\{0\}$.

16. Для множества $M=\left\{x(t)\in L_3[0,1]:\int_0^1 x(t)dt=0\right\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=L(1)$ *в* $L_{\frac{2}{3}}\left[0,1\right]$, *$L$ обозначает линейную оболочку.*

17. Для множества $M=c_0$ в пространстве c найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=\{0\}$.

18. Для множества $M=\{x\in l_1:\xi_1>\xi_2>...\}$ найти $M^{\perp}$.

Указание: $M^{\perp}=\{0\}$.

19. Доказать, что, если банахово пространство X рефлексивно, то всякая ограниченная последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся в X подпоследовательность.

Указание: рассмотреть N – замыкание линейной оболочки элементов последовательности, показать, что N сепарабельно и рефлексивно и воспользоваться задачей 2. Показать, что слабая сходимость на N^* эквивалентна слабой сходимости на X^*.

20. Доказать, что в рефлексивном пространстве последовательность вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

Указание: всякое замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве слабо замкнуто (см. [3], а также дополнение к разделу).

21. Привести пример последовательности вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств в нерефлексивном пространстве, имеющих пустое пересечение.

2.7. Сопряженные операторы

Определение: пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, Y^*, X^* – сопряженные пространства. Оператор $A^*: Y^* \to X^*$ называется сопряженным к оператору A, если $\forall \varphi \in Y^* \ \exists A^*\varphi \in X^*$, и определяется следующим образом: $A^*\varphi(x) = \varphi(Ax)$ (или, в симметричной форме, $< x, A^*\varphi >=< Ax, \varphi >$).

Теорема (о норме сопряженного оператора): пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, Y^*, X^* – сопряженные пространства. Тогда сопряженный оператор $A^*: Y^* \to X^*$ также является линейным ограниченным оператором и $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство: 1. Проверим, что $A^*: Y^* \to X^*$ линеен.

а) Поскольку $\forall x \in X \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(Ax) = \varphi_1(Ax) + \varphi_2(Ax)$ по определению суммы функций, то $A^*(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = A^*\varphi_1(x) + A^*\varphi_2(x)$ по определению сопряженного оператора, откуда $A^*(\varphi_1 + \varphi_2) = A^*\varphi_1 + A^*\varphi_2$.

б) Аналогично п. а) $A^*(\lambda\varphi)(x) = \lambda A^*\varphi(x)$, поскольку $(\lambda\varphi)(Ax) = \lambda\varphi(Ax)$.

2. Проверим ограниченность, т.е., что $\|A^*\varphi\| \le c\|\varphi\|$. Поскольку A – линеен и ограничен, то $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Далее, $\|A^*\varphi\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|A^*\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(Ax)|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|\varphi\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|\varphi\|$, т.е. $c = \|A\|$.

3. Проверим, что $\|A^*\| = \|A\|$. В силу п. 2 $\|A^*\| = \sup\limits_{\varphi \ne 0} \dfrac{\|A^*\varphi\|}{\|\varphi\|} \le \sup\limits_{\varphi \ne 0} \dfrac{\|A\| \cdot \|\varphi\|}{\|\varphi\|} = \|A\|$.

По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала, выберем линейный ограниченный функционал φ так, чтобы $\|\varphi\| = 1$ и $|\varphi(Ax)| = \|Ax\|$, тогда $\|A\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|\varphi(Ax)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|A^*\varphi(x)|}{\|x\|} \le \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|A^*\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A^*\| \cdot \|\varphi\| = \|A^*\|$. Окончательно, $\|A^*\| = \|A\|$.

Теорема доказана.

Теорема (о втором сопряженном операторе): пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, тогда $A^{**}(\pi_{X^*}x) = \pi_{Y^*}Ax$, где $\pi_{X^*}: X \to X^{**}$, $\pi_{Y^*}: Y \to Y^{**}$ – естественные вложения.

Доказательство: по определению естественных вложений и сопряженного оператора $\forall \varphi \in Y^* \quad \forall x \in X \quad \pi_{Y^*}Ax(\varphi) = \varphi(Ax) = A^*\varphi(x) = \pi_{X^*}x(A^*\varphi)$. Далее, чтобы получить определение второго сопряженного оператора, в определении сопряженного оператора $A^*\varphi(x) = \varphi(Ax)$ заменим $A^* \to A^{**}$, $\varphi \to \pi_{X^*}x$, $x \to \varphi$,

$A \to A^*$, тогда $A^{**}\pi_{X^*}x(\varphi) = \pi_{X^*}x(A^*\varphi)$, откуда $\pi_{Y^*}Ax(\varphi) = A^{**}\pi_{X^*}x(\varphi)$.

Теорема доказана.

Замечание: поскольку $\pi_{X^*}X \cong X$, и $\pi_{Y^*}AX \cong AX$, то $A^{**}X = AX$, т.е. A^{**} является продолжением A.

Теорема (о двойственности): пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, тогда:

1. $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$;
2. $\overline{\operatorname{Im} A} = {}^{\perp}(\ker A^*)$;
3. $\ker A = {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)$;
4. $\overline{\operatorname{Im} A^*} \subset (\ker A)^{\perp}$. При этом если X рефлексивно, то $\overline{\operatorname{Im} A^*} = (\ker A)^{\perp}$.

Замечание: напомним, что $\ker A = \{x \in X : Ax = 0\}$ – ядро оператора A, $\operatorname{Im} A = R(A) = \{ y \in Y : y = Ax, x \in X\}$ – образ (множество значений) оператора A.

Доказательство: 1. Пусть $\varphi \in Y^*$, тогда $\varphi \in \ker A^* \Leftrightarrow A^*\varphi(x) = 0 \forall x \in X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi(Ax) = 0 \forall x \in X \Leftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$.

2. Поскольку $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, то, по свойству 5 аннуляторов, получаем, что $\overline{\operatorname{Im} A} = {}^{\perp}((\operatorname{Im} A)^{\perp}) = {}^{\perp}(\ker A^*)$.

3. Пусть $x \in X$, тогда $x \in \ker A \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \varphi(Ax) = 0 \forall \varphi \in Y^*$. Последняя эквивалентность получилась в силу теоремы о вычислении нормы вектора с помощью функционала. Действительно, если $Ax \neq 0$, то $\exists \varphi \in Y^* : \varphi(Ax) \neq 0$. Далее, $\varphi(Ax) = 0 \forall \varphi \in Y^* \Leftrightarrow A^*\varphi(x) = 0 \forall \varphi \in Y^* \Leftrightarrow x \in {}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*)$.

4. В силу свойства 6 преданнулятора $\overline{\operatorname{Im} A^*} \subset ({}^{\perp}(\operatorname{Im} A^*))^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$. Для рефлексивного пространства это вложение превращается в равенство.

Теорема доказана.

Определение: пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $A : H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор. Оператор $A^* : H_2 \to H_1$ называется гильбертовым сопряженным к оператору A, если $\forall x \in H_1 \;\; \forall y \in H_2 \;\; \left(Ax, y\right) = \left(x, A^* y\right)$.

Замечание: это определение в действительном случае является частным случаем общего определения сопряженного оператора. Пусть в комплексном случае $T : H_2^* \to H_1^*$ – оператор, сопряженный к $A : H_1 \to H_2$ в смысле общего определения. В силу теоремы Рисса определены две антилинейные изометрические биекции $I : H_1 \to H_1^*$ и $J : H_2 \to H_2^*$, поэтому существует ограниченный линейный оператор $A^* : H_2 \to H_1$, для которого $IA^* = TJ$, т.е. $A^* = I^{-1}TJ$. Оператор A^* линеен, как композиция двух антилинейных и одного линейного оператора. Далее, $\|A^*\| = \|I^{-1}TJ\| \le \|T\| = \|A\|$, т.е. A^* ограничен. А поскольку $IA^*J^{-1} = T$, то $\|A\| = \|T\| = \|IA^*J^{-1}\| \le \|A^*\|$. Итак, $\|A^*\| = \|A\|$.

По теореме Рисса $\left(Ax,y\right)=Jy(Ax)=TJy(x)=IA^*y(x)=\left(x,A^*y\right)$. Наконец, если для некоторого линейного оператора $B:H_2\to H_1$ для всех $x\in H_1$ и $y\in H_2$ $\left(Ax,y\right)=\left(x,By\right)$, то $\left(x,(A^*-B)y\right)=0$. Выбирая $x=(A^*-B)y$, для всех $y\in H_2$ получаем, что $(A^*-B)y=0$, т.е. $A^*=B$ и гильбертов сопряженный оператор определяется единственным образом. Всюду далее, если речь идет о сопряженных операторах в гильбертовых пространствах, будем иметь ввиду именно гильбертовы сопряженные операторы, если не указано иное.

Замечание (свойства операции сопряжения): 1. Если X,Y – линейные нормированные пространства (в частности, гильбертовы), $A,B:X\to Y$ – линейные ограниченные операторы, то $(A+B)^*=A^*+B^*$.

2. Если X,Y – линейные нормированные пространства, $A:X\to Y$ – линейный ограниченный оператор, $\lambda\in\mathbb{C}$ то $(\lambda A)^*=\lambda A^*$. Если X,Y – гильбертовы, то $(\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*$.

3. Если $A:X\to Y$, $B:Y\to Z$ – линейные ограниченные операторы, то $(BA)^*=A^*B^*$.

4. Если $A:H_1\to H_2$, то $(A^*)^*=A$.

Доказательства этих свойств выводятся из определения (гильбертовых) сопряженных операторов и предлагаются в задачах для самостоятельного решения.

Определение: пусть H – гильбертово пространство. Оператор $A:H\to H$ называется самосопряженным, если $\forall x,y\in H\ \ A=A^*$, т.е. $(Ax,y)=(x,Ay)$.

Определение: пусть X – линейное пространство, $A:X\to X$ – линейный оператор, L – подпространство в X. L называется инвариантным для оператора A, если $\forall x\in L$ элемент $Ax\in L$.

Теорема (об инвариантности ортогонального дополнения): пусть H – гильбертово пространство, $A:H\to H$ – самосопряженный оператор, L – подпространство H. Тогда если L инвариантно для A, то $L^\perp$ также инвариантно для A.

Доказательство: надо доказать, что если $x\in L^\perp$, то $Ax\in L^\perp$, т.е., что $\forall y\in L\ \ (Ax,y)=0$. Поскольку A – самосопряжен, то $(Ax,y)=(x,Ay)$. Т.к. $y\in L$ и L – инвариантно для A, то $Ay\in L$. Поскольку $x\in L^\perp$, то $(x,Ay)=0$.

Теорема доказана.

Определение: пусть H – гильбертово пространство, L – его подпространство, $L^\perp$ – ортогональное дополнение к L, тогда оператор $P:H\to H$ называется проектором на L вдоль $L^\perp$, если $\forall x=x_1+x_2$, где $x_1\in L$, $x_2\in L^\perp$ выполнено равенство $Px=x_1$.

Замечание: поскольку $H=L\oplus L^\perp$, то $\forall x\in H$ в указанном виде x_1+x_2 представить можно, и, значит, проектор корректно определен для всех элементов гильбертова пространства. Отметим, что оператор $P:H\to H$ является проектором на подпространство L тогда и только тогда, когда $\forall x \in L \ \ Px = x$. Кроме того, очевидно, что оператор $I - P : H \to H$ (где I – тождественный оператор) является проектором на $L^{\perp}$.

Теорема (о проекторе): пусть H – гильбертово пространство, L – его подпространство, $L^{\perp}$ – ортогональное дополнение к L, тогда оператор $P : H \to H$ является проектором тогда и только тогда, когда:

1. $P^2 = P$;
2. $P = P^*$.

При этом P является проектором на свой образ вдоль своего ядра.

Доказательство: пусть P – проектор на L вдоль $L^{\perp}$, т.е. если $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$, то $Px = x_1$.

1. $P^2 x = PPx = Px_1$. Ясно, что $x_1 = x_1 + 0$, $x_1 \in L$, $0 \in L^{\perp}$, значит $Px_1 = x_1 = Px$.

2. По определению самосопряженного оператора надо проверить, что $(Px, y) = (x, Py)$. Пусть $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$, $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L$, $y_2 \in L^{\perp}$, тогда $Px = x_1$, $Py = y_1$ и надо проверить, что $(x_1, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1)$, т.е., что $(x_1, y_1) + (x_1, y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_1)$. Это равенство верно, поскольку $(x_1, y_2) = 0$ и $(x_2, y_1) = 0$.

Обратно: пусть выполнены условия 1 и 2. Обозначим за L – образ P. Покажем, что $L^{\perp} = \ker P$, т.е., если $x \in L^{\perp}$, то $Px = 0$ и, наоборот, если $Px = 0$, то $x \in L^{\perp}$. Пусть $x \in L^{\perp}$. Поскольку $Px \in L$, то

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P^* Px) \overset{2.}{=} (x, PPx) = (x, P^2 x) \overset{1.}{=} (x, Px) = 0,$$

значит, $Px = 0$, т.е., если $x \in L^{\perp}$, то $x \in \ker P$.

Теперь покажем, что, если $x \in \ker P$, то $x \in L^{\perp}$, т.е., что любой вектор из ядра P ортогонален образу P. Пусть $x \in \ker P$, $y = Pz$. Надо показать, что $(x, y) = 0$. Действительно, $(x, y) = (x, Pz) = (P^* x, z) \overset{2.}{=} (Px, z) = 0$, поскольку $Px = 0$.

Итак, показали, что $L^{\perp} = \ker P$. Осталось убедиться, что P – проектор, т.е. если $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$, то $Px = x_1$. Имеем, $Px = P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$. Т.к. $x_2 \in L^{\perp}$, $L^{\perp} = \ker P$, то $Px_2 = 0$, значит $Px = Px_1$. Поскольку $x_1 \in L$ (образу P), то $x_1 = Pz$, значит $Px_1 = PPz = P^2 z \overset{1.}{=} Pz = x_1$, т.е. $Px = x_1$.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Найти сопряженный оператор (в смысле общего определения) к оператору $A : l_2 \to l_2$, если $\forall x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 \ \ Ax = \left(2\xi_2 - \xi_3, 2\xi_3 - \xi_4, \frac{\xi_3}{3}, \frac{\xi_4}{4}, ..., \frac{\xi_k}{k}, ... \right)$.

Решение: по определению $A^* : l_2^* \to l_2^*$. По теореме об общем виде функционалов в l_p получаем, что $l_2^* \cong l_2$. Кроме того, по определению сопряженного оператора $\forall\varphi\in l_2^*$ имеем, что $A^*\varphi\in l_2^*$ и $A^*\varphi(x)=\varphi(Ax)$. По теореме об общем виде функционалов в l_p имеем, что $\forall\varphi\in l_2^*$ $\exists y=\left(\eta_k\right)_{k=1}^{\infty}\in l_2$: $\forall x=\left(\xi_k\right)_{k=1}^{\infty}\in l_2$ $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$. В нашем случае получаем, что $\varphi(Ax)=<Ax,\varphi>=(2\xi_2-\xi_3)\cdot\eta_1+$ $+(2\xi_3-\xi_4)\cdot\eta_2+\frac{\xi_3}{3}\cdot\eta_3+\frac{\xi_4}{4}\cdot\eta_4+\ldots+\frac{\xi_k}{k}\cdot\eta_k+\ldots=0\cdot\xi_1+2\eta_1\cdot\xi_2+\left(-\eta_1+2\eta_2+\frac{\eta_3}{3}\right)\cdot\xi_3+$ $+\left(-\eta_2+\frac{\eta_4}{4}\right)\cdot\xi_4+\frac{\eta_5}{5}\cdot\xi_5+\ldots+\frac{\eta_k}{k}\cdot\xi_k+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\cdot(A^*\varphi)_k=<x,A^*\varphi>=A^*\varphi(x)$.

По теореме об общем виде функционала в l_2 $\forall y=(\eta_1,\eta_2,\ldots)\in l_2$ заключаем, что $A^*y=\left(0,2\eta_1,-\eta_1+2\eta_2+\frac{\eta_3}{3},-\eta_2+\frac{\eta_4}{4},\frac{\eta_5}{5},\ldots,\frac{\eta_k}{k},\ldots\right)$.

2. Найти сопряженный оператор к оператору $A:C[0,1]\to C[0,1]$, если:

а) $Ax(t)=\int\limits_t^1 x(\tau)d\tau$; б) $Ax(t)=t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau$.

Решение: а) $A^*:C^*[0,1]\to C^*[0,1]$, причем по теореме об общем виде функционалов в $C[0,1]$ получаем, что $C^*[0,1]\cong V_0[0,1]$, где $V_0[0,1]$ – пространство функций с ограниченным изменением $g(t)$, непрерывных справа всюду на интервале $(0,1)$ и таких, что $g(0)=0$ с нормой $\|g\|=\mathop{\mathrm{V}}\limits_0^1 g(t)$. Для $\varphi\in C^*[0,1]$ имеем:

$$\varphi(Ax)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_t^1 x(\tau)d\tau\right)dg(t)=\int\limits_t^1 x(\tau)d\tau g(t)\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1 g(t)d\left(\int\limits_t^1 x(\tau)d\tau\right)=\int\limits_0^1 x(t)g(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1 x(t)d\left(\int\limits_0^t g(\tau)d\tau\right)=A^*\varphi(x).$$

Последний переход законен, поскольку функция с ограниченным изменением $g(t)$ является интегрируемой (она ограничена и представляется в виде разности двух монотонных). Значит, определена функция $h(t)=\int\limits_0^t g(\tau)d\tau\in V_0[0,1]$, а тогда $\int\limits_0^1 x(t)dh(t)=\int\limits_0^1 x(t)g(t)dt$ (см. задачу 11 п. 2.4). Таким образом, получаем, что $A^*g(t)=\int\limits_0^t g(\tau)d\tau:V_0[0,1]\to V_0[0,1]$.

б) $\varphi(Ax)=\int\limits_0^1 t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau dg(t)=t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau g(t)\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1 g(t)d\left(t\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau\right)=\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau g(1)-$

$$-\int_0^1 g(t)\int_0^1 x(\tau)d\tau dt=\int_0^1 x(\tau)g(1)d\tau-\int_0^1 x(\tau)\int_0^1 g(t)dtd\tau=\int_0^1 x(\tau)d\left(g(1)\tau\right)-\int_0^1 x(\tau)d\left(\tau\int_0^1 g(t)dt\right)=$$

$$=\int_0^1 x(\tau)d\left(g(1)\tau-\tau\int_0^1 g(t)dt\right)=A^*\varphi(x)\text{, т.е. } A^*g(t)=t\left(g(1)-\int_0^1 g(t)dt\right):V_0[0,1]\to V_0[0,1].$$

3. Пусть H – комплексное гильбертово пространство. Доказать, что, если $A:H\to H$ – самосопряженный оператор, то $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}|(Ax,x)|$.

Решение: обозначим $c=\sup\limits_{\|x\|\le 1}|(Ax,x)|$, тогда, в силу неравенства Коши-Буняковского $c\le\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\cdot\|x\|\le\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|A\|\cdot\|x\|^2\le\|A\|$. Далее, при $x\in H$: $\|x\|\le 1$ $c\ge|(Ax,x)|$. Пусть $x\ne 0$, тогда $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=1$, следовательно, $c\ge\left|\left(A\dfrac{x}{\|x\|},\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right|$, откуда для всех $x\ne 0$ $|(Ax,x)|\le c\|x\|^2$.

Рассмотрим тождества $(A(x+y),x+y)=(Ax,x)+(Ax,y)+(Ay,x)+(Ay,y)$ и $(A(x-y),x-y)=(Ax,x)-(Ax,y)-(Ay,x)+(Ay,y)$. Поскольку оператор A самосопряжен, то $(Ax,y)+(Ay,x)=(Ax,y)+(y,Ax)=(Ax,y)+\overline{(Ax,y)}=2\operatorname{Re}(Ax,y)$.

Тогда, вычитая из первого тождества второе, находим

$$(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)=4\operatorname{Re}(Ax,y).$$

В силу неравенства $|(Ax,x)|\le c\|x\|^2$ и равенства параллелограмма, получим:

$$4|\operatorname{Re}(Ax,y)|=|(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)|\le$$

$$\le|(A(x+y),x+y)|+|(A(x-y),x-y)|\le c\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)=2c\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

При $\|x\|\le 1$ и $\|y\|\le 1$ получаем $|\operatorname{Re}(Ax,y)|\le c$. Возьмем $x\in H$ такой, что $\|x\|\le 1$ и $Ax\ne 0$, тогда при $y=\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$ получаем, что $\left|\operatorname{Re}\left(Ax,\dfrac{Ax}{\|Ax\|}\right)\right|\le c$, откуда $\dfrac{|\operatorname{Re}(Ax,Ax)|}{\|Ax\|}=\dfrac{|(Ax,Ax)|}{\|Ax\|}\le c$, т.е. $\|Ax\|\le c$ (при $Ax=0$ это неравенство также очевидно верно). Возьмем в этом неравенстве точную верхнюю грань по всем $\|x\|\le 1$, тогда $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\le c$, откуда (см. задачу 4 п. 1.1) $\|A\|\le c$.

4. Пусть H – гильбертово пространство и $A:H\to H$ – линейный ограниченный оператор. Доказать справедливость равенств:

а) $(R(A))^\perp=\ker A^*$;

б) $(R(A^*))^\perp=\ker A$;

в) $(\ker A)^\perp=\overline{R(A^*)}$;

г) $(\ker A^*)^\perp=\overline{R(A)}$.

Решение: а) Пусть $z \in (R(A))^{\perp}$, т.е. $(z, Ax) = 0$ для всех $x \in H$. Тогда, по определению гильбертова сопряженного оператора $(A^*z, x) = 0$ для всех $x \in H$. Поскольку всем векторам пространства H ортогонален лишь нулевой элемент, то $A^*z = 0$, т.е. $z \in \ker A^*$. Пусть $z \in \ker A^*$, тогда $A^*z = 0$ и для всех $x \in H$ $(A^*z, x) = 0$, откуда $(z, Ax) = 0$, т.е. $z \in (R(A))^{\perp}$. Таким образом, $(R(A))^{\perp} = \ker A^*$.

б) Следует из п. а), если в роли A взять A^* и учесть, что $(A^*)^* = A$.

в) Из свойства непрерывности скалярного произведения следует, что $z \perp L$ тогда и только тогда, когда $z \perp \overline{L}$, где L – линейное многообразие. Поскольку ядро линейного ограниченного оператора представляет собой замкнутое линейное многообразие, то по теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму $H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}$, а с другой стороны, $H = \overline{R(A^*)} \oplus (R(A^*))^{\perp}$. Поскольку, в силу п. б) $(R(A^*))^{\perp} = \ker A$, то, в силу единственности разложения гильбертова пространства в прямую сумму, $(\ker A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$.

г) аналогично в).

5. Найти сопряженный оператор A^* к оператору A, если (все пространства считать комплексными):

а) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ и $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;

б) $A: l_p \to l_p$, $p \geq 1$ и $Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_p$ и $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность;

в) $A: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ и $Ax(t) = a(t)x(t+h)$, где $a(t)$ – ограниченная на $\mathbb{R}$ и измеримая по Лебегу функция, а $h \in \mathbb{R}$.

Решение: а) Оператор A линеен и ограничен, а также определен на всем пространстве $L_2[0,1]$, которое является гильбертовым. Для определения сопряженного оператора $A^*: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ рассмотрим произвольную функцию $y(t) \in L_2[0,1]$, тогда: $(Ax, y) = \int\limits_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}dt = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t x(\tau)d\tau \right) \overline{y(t)}dt = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t x(\tau)\overline{y(t)}d\tau \right) dt$.

Меняя порядок интегрирований, получаем: $(Ax, y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_\tau^1 x(\tau)\overline{y(t)}dt \right) d\tau =$

$$= \int\limits_0^1 x(\tau) \left(\int\limits_\tau^1 \overline{y(t)}dt \right) d\tau = \int\limits_0^1 x(\tau) \overline{\left(\int\limits_\tau^1 y(t)dt \right)} d\tau = \int\limits_0^1 x(\tau)\overline{A^*y(\tau)}d\tau = (x, A^*y).$$

Следовательно, $A^*y(t) = \int\limits_t^1 y(\tau)d\tau$, где $y(t) \in L_2[0,1]$.

б) При $p \geq 1$ оператор является линейным и, поскольку последовательность $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ – ограничена, то оператор ограничен (см. пример 3 п. 1.4). Пусть $p > 1$, $p \neq 2$. Из теоремы об общем виде функционалов в l_p ($p > 1$) следует, что

${l_p}^* \cong l_q$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, причем $\forall x \in l_p$ $\forall \varphi \in {l_p}^*$ $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k$, где $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...)\in l_q={l_p}^*$.
Тогда $\forall x \in l_p$, $\forall \varphi \in {l_p}^* \cong l_q$ $\varphi(Ax)=<Ax,\varphi>=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(A\xi_k)\varphi_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k\varphi_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_k\varphi_k=$
$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k A^*\varphi_k=<x,A^*\varphi>=\left(A^*\varphi\right)(x)$. Таким образом, $A^*\varphi=(\alpha_1\varphi_1,\alpha_2\varphi_2,...)$ при $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...)\in l_q$, $A^*:l_q\to l_q$.

Пусть $p=1$, тогда $l_1^*\cong l_\infty$. Аналогично, получаем $A^*\varphi=(\alpha_1\varphi_1,\alpha_2\varphi_2,...)$ при $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...)\in l_\infty$, $A^*:l_\infty\to l_\infty$.

Если $p=2$, то $(Ax,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k\overline{\eta}_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\overline{\alpha}_k\eta_k}=(x,A^*y)$, поэтому в данном случае $A^*y=(\overline{\alpha}_1\eta_1,\overline{\alpha}_2\eta_2,...)$ при $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_2$, $A^*:l_2\to l_2$.

в) Оператор A линеен и ограничен, его норма $\|A\|\le\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|a(t)|$. Кроме того, он определен на всем пространстве $L_2\left(\mathbb{R}\right)$, которое является гильбертовым. Для определения сопряженного оператора $A^*:L_2\left(\mathbb{R}\right)\to L_2\left(\mathbb{R}\right)$ рассмотрим произвольную функцию $y(t)\in L_2\left(\mathbb{R}\right)$, тогда:

$$(Ax,y)=\int\limits_{\mathbb{R}}Ax(t)\overline{y(t)}dt=\int\limits_{\mathbb{R}}a(t)x(t+h)\overline{y(t)}dt=\begin{vmatrix}t+h=\tau\\ dt=d\tau\end{vmatrix}=\int\limits_{\mathbb{R}}a(\tau-h)x(\tau)\overline{y(\tau-h)}d\tau=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}}x(\tau)a(\tau-h)\overline{y(\tau-h)}d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}}x(\tau)\overline{\overline{a(\tau-h)}y(\tau-h)}d\tau=\int\limits_{\mathbb{R}}x(\tau)\overline{A^*y(\tau)}d\tau=(x,A^*y)\,.$$

Следовательно, для всех $y(t)\in L_2\left(\mathbb{R}\right)$ $A^*y(t)=\overline{a(t-h)}y(t-h)$.

6. В комплексном пространстве l_2 рассмотрим последовательность операторов $A_n:l_2\to l_2$, $n\in\mathbb{N}$, где $A_nx=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},...)$, $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$. Доказать, что все A_n – линейные ограниченные операторы и $\forall x\in l_2$ $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx=0x$. Найти последовательность $\left(A_n^*\right)_{n=1}^{\infty}$. Верно ли, что $\forall x\in l_2$ $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^*x=0x$?

Решение: все операторы $A_n:l_2\to l_2$ линейны и ограничены, причем $\|A_n\|\le1$. Поскольку для всякого $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2$ сходится, то $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2\underset{n\to\infty}{\to}0$, как остаток сходящегося ряда. Таким образом, $\forall x\in l_2$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_nx\|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx=0x$.

Поскольку l_2 – гильбертово, то для произвольного $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_2$ получаем $(A_nx,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(A_n\xi_k)\overline{\eta}_k=\xi_{n+1}\overline{\eta}_1+\xi_{n+2}\overline{\eta}_2+...=\xi_1\cdot\overline{0}+\xi_2\cdot\overline{0}+...+\xi_n\cdot\overline{0}+$

$+\xi_{n+1}\overline{\eta}_1+\xi_{n+2}\overline{\eta}_2+...=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{(A_n{}^*\eta_k)}=(x,A_n{}^*y)$, откуда для всех $y=(\eta_1,\eta_2,...)\in l_2$ получаем, что $A_n{}^*y=(\underbrace{0,0,...,0}_{n},\eta_1,\eta_2,...)$ и $\forall y\in l_2$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n{}^*y\|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|y\|$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}A_n{}^*y\neq 0y$.

7. Доказать, что для однозначного задания сопряженного оператора равенством $A^*\varphi(x)=\varphi(Ax)$ в определении сопряженного оператора необходимо и достаточно, чтобы $\overline{D(A)}=X$, где $D(A)$ – область определения оператора A.

Решение: пусть $\overline{D(A)}\neq X$, тогда по теореме о вычислении расстояния с помощью функционала $\exists\varphi_0\in X^*$, $\varphi_0\neq 0$: $\forall x\in\overline{D(A)}$ $\varphi_0(x)=0$. Но тогда имеется два представления: $A^*\varphi(x)=\varphi(Ax)$ и $A^*(\varphi+\varphi_0)(x)=\varphi(Ax)$.

Пусть теперь $\overline{D(A)}=X$, и при этом $\varphi(Ax)=A^*\varphi_1(x)=A^*\varphi_2(x)$, откуда $\forall x\in D(A)$ $A^*(\varphi_1-\varphi_2)(x)=0$. Поскольку $D(A)$ плотно в X, то из примера 4 п. 2.3 следует, что $A^*(\varphi_1-\varphi_2)=0$, т.е. $A^*\varphi_1=A^*\varphi_2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что, если X,Y – линейные нормированные пространства, $A:X\to Y$ – линейный ограниченный оператор, то:

а) оператор A^* инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}A$ всюду плотен в Y;

б) если $\operatorname{Im}A^*$ всюду плотен в X^*, то A инъективен;

в) если пространство X рефлексивно, то оператор A инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}A^*$ всюду плотен в X^*.

Указание: воспользоваться теоремой о двойственности и критериями всюду плотности.

2. Доказать, что, если нормированные пространства X и Y рефлексивны и $A:X\to Y$ – линейный ограниченный оператор, то $A^{**}=A$.

3. Доказать свойства 1-4 операции сопряжения (приведенные в соответствующем замечании).

4. Доказать, что если $A:H\to H$, то операторы AA^* и A^*A являются самосопряженными.

5. Пусть H – комплексное гильбертово пространство и $A:H\to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что $\forall x\in H$ $(Ax,x)\in\mathbb{R}$.

6. Найти сопряженный к оператору $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, определяемому формулой $Ax(t)=tx(t)$.

7. Найти оператор, сопряженный к оператору вложения $A:l_2\to c_0$, $Ax=x$.

8. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определяемому формулой $Ax(t) = \int_0^1 \cos tx(s)ds$.

9. Найти сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определяемому формулой $Ax(t) = \int_0^1 x(s)ds$.

10. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to l_1$, если $Ax = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

11. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: c_0 \to c_0$, если $Ax = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$.

12. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

13. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to c_0$, если $Ax = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

14. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: c_0 \to c_0$, если $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, ...)$, где последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$.

15. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to c_0$, если $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, ...)$, где последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

16. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to l_1$, если $Ax = (0, 0, \xi_1, \xi_2, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

17. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: c_0 \to c_0$, если $Ax = (0, 0, \xi_1, \xi_2, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$.

18. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (0, 0, \xi_1, \xi_2, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

19. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to c_0$, если $Ax = (0, 0, \xi_1, \xi_2, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

20. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to l_1$, если $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

21. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: c_0 \to c_0$, если $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$.

22. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

23. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to c_0$, если $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

24. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = x(t^{\alpha})$, $\alpha > 0$.

25. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, если $Ax(t) = x(t+h)$, где h – некоторое фиксированное число.

26. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, если $Ax(t) = \dfrac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$.

27. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_p \to l_p$ ($p \geq 1$), если $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_p$.

28. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

29. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \dfrac{t^n}{n!} : c_0 \to L_1[0,1]$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in c_0$.

30. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq \lambda \\ 0, & \lambda < t \leq 1 \end{cases}$.

31. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_1 \to l_1$, если $Ax = (0, 0, ..., 0, \underset{n}{\xi_1}, 0, 0, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_1$.

32. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_n + \xi_1, \xi_{n-1} + \xi_1, ..., \underset{n}{2\xi_1}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

33. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_2, \xi_1, \xi_4, \xi_3, ..., \xi_n, \underset{n}{\xi_{n-1}}, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$.

34. Убедиться, что для операторов из примера 2 $\|A\| = \|A^*\|$.

35. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = \int_0^1 e^{3t-2\tau} x(\tau) d\tau$, если $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

36. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = \int_0^1 \sin(\pi(t-s)) x(s) ds$, если $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

37. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = \int_0^t x(s) ds$, если $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

38. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = x(t^2)$, если $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$.

Указание: разбить интеграл на два и выполнить замену переменной.

39. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t)=tx(t)$, если $A:C[0,1]\to C[0,1]$.

Указание: $A^*g(t)=\int\limits_0^t \tau dg(\tau)$. *См. задачу 12 п. 2.4.*

40. Пусть H – гильбертово пространство и $A:H\to H$ – линейный ограниченный оператор. Доказать, что:

а) $\ker(AA^*)=\ker(A^*)$;

б) $\ker(A^*A)=\ker(A)$;

в) $R(AA^*)=R(A)$;

г) $\|AA^*\|=\|A\|^2$.

Указание: в п. г) воспользоваться самосопряженностью оператора AA^*, *примером 3 и тем, что, если* $f(x)\ge 0$, *то* $\sup f^2(x)=\left(\sup f(x)\right)^2$.

41. Доказать свойства б) и г) из примера 4.

42. В пространстве $L_2[-1,1]$ построить проекцию любой функции на подпространства четных и нечетных функций.

43. Доказать, что оператор $P:H\to H$ является проектором на подпространство L тогда и только тогда, когда $\forall x\in L\ \ Px=x$.

44. Пусть $P:H\to H$ – проектор на подпространство L. Доказать, что оператор $I-P:H\to H$ (где I – тождественный оператор) является проектором на $L^{\perp}$.

45. Пусть H – гильбертово пространство, $P:H\to H$ – проектор. Доказать, что $\|P\|=1$.

Указание: воспользоваться теоремой Пифагора.

46. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t)=e^t x(t)$, если $A:L_5[0,1]\to L_3[0,1]$.

47. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax=(\xi_1-\xi_2,\xi_5+3\xi_3,\xi_6)$, если $A:l_2\to l_2^3$.

48. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t)=\int\limits_0^1 (t+e^s)x(s)ds$, если $A:L_2[0,1]\to L_2[1,3]$.

49. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{t\pm s}x(s)ds$, если $A:L_2[0,1]\to L_2[-1,0]$.

50. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t)=\int\limits_t^3 (4st-5s^2)x(s)ds$, если $A:L_2[-3,3]\to L_2[-3,3]$.

51. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = e^{it}x(t)$, если $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

52. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = x$, если $A: l_2 \to c_0$.

53. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = \int\limits_0^t ts^2 x(s)ds$, если $A: L_3[0,1] \to L_5[0,1]$.

54. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_2 \to l_2$, если $Ax = \left(2\xi_3 - \xi_1, \xi_2 + 4\xi_1, 6\xi_1, \frac{3}{4}\xi_4, \frac{4}{5}\xi_5, ..., \frac{n}{n+1}\xi_{n+1}, ...\right)$.

55. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = (3 + \cos 2t)x(t)$, если $A: L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

56. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = \left(\sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}\xi_l\right)_{k=1}^{m}$, если $A: l_p^n \to l_q^m$.

57. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = \left(\alpha_n\xi_n, \alpha_{n+1}\xi_{n+1}, ...\right)$, если $A: l_1 \to l_4$ и $A: l_1 \to c_0$, а последовательность (α_n) ограничена.

58. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = (0, 0, 0, \xi_4, \xi_5, ...)$, если $A: l_2 \to l_3$.

59. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: l_3^5 \to l_5^3$ и $A: l_2^5 \to l_2^3$, если $Ax = \left(\sum\limits_{l=1}^{5}(2^i k + (2+i)l)\xi_l\right)_{k=1}^{3}$.

60. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax = x$, если $A: l_1 \to l_2$.

61. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = x\left(\sqrt{t}\right)$, если $A: L_3[0,1] \to L_3[0,1]$.

62. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = \cos \pi t \int\limits_1^2 x(s)ds$, если $A: L_4[1,2] \to L_2[2,3]$.

63. Найти оператор, сопряженный к оператору $Ax(t) = e^{it}x(3t-2)$, если $A: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

64. Найти оператор, сопряженный к оператору $A: C[0,1] \to C[0,1]$, если $Ax(t) = \int\limits_0^1 tx(t)dt + tx(0) + t^2x(1)$; $Ax(t) = t^2\int\limits_0^1 x(\tau)d\tau + x(0) + tx(1)$.

Указание: использовать свойство $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Дополнение. Комплексный вариант теоремы Хана-Банаха. Слабая замкнутость выпуклого множества

Теорема Хана-Банаха (комплексный вариант): пусть X – линейное нормированное пространство, X_0 – его линейное многообразие, $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{C}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует линейный ограниченный функционал $\varphi : X \to \mathbb{C}$ такой, что $\varphi\big|_{X_0} = \varphi_0$ и $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

Доказательство: пусть $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \operatorname{Re}\varphi_0(x)$. Ясно, что действительный линейный функционал. Поскольку $|f_0(x)| \le |\varphi_0(x)|$, то $\|f_0\| \le \|\varphi_0\|$, поэтому f_0 ограничен. По теореме Хана-Банаха для действительных функционалов $\exists f : X \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал такой, что $f\big|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.

Пусть теперь $\varphi : X \to \mathbb{C}$, $\varphi(x) = f(x) - if(ix)$. По построению $\varphi(ix) = i\varphi(x)$, поэтому φ – комплексный линейный функционал. Далее, если $x \in X_0$, то

$$\varphi(x) = f(x) - if(ix) = f_0(x) - if_0(ix) = \operatorname{Re}\varphi_0(x) - i\operatorname{Re}\varphi_0(ix) =$$
$$= \operatorname{Re}\varphi_0(x) - i\operatorname{Re}(i\varphi_0(x)) = \operatorname{Re}\varphi_0(x) + i\operatorname{Im}\varphi_0(x) = \varphi_0(x).$$

Таким образом, φ продолжает φ_0. При этом ясно, что $\|\varphi\| \ge \|\varphi_0\|$. Предположим, что $\|\varphi\| > \|\varphi_0\|$, тогда $\exists x_0 \in X \setminus \{0\}$: $\dfrac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|} > \|\varphi_0\|$. Если $\varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y_0 = e^{-i\alpha} x_0$, то получаем: $|f(y_0)| = |\operatorname{Re}\varphi(y_0)| = |\operatorname{Re}\varphi(e^{-i\alpha}x_0)| = \left|\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\varphi(x_0)\right)\right| = \left|\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}|\varphi(x_0)|e^{i\alpha}\right)\right| = |\varphi(x_0)| > \|x_0\|\|\varphi_0\| = \|y_0\|\|\varphi_0\|$. Отсюда $\dfrac{|f(y_0)|}{\|y_0\|} > \|\varphi_0\|$, поэтому $\|f\| > \|\varphi_0\|$. Поскольку $\|f\| = \|f_0\|$, то получили противоречие.

Теорема доказана.

Определение: пусть X – действительное линейное нормированное пространство. Функционал $\varphi \in X^*$ называется строго разделяющим множества $M, N \subset X$, если $\inf\limits_{x \in M} \varphi(x) > \sup\limits_{x \in N} \varphi(x)$.

Теорема (об отделимости выпуклого и компактного множеств): пусть X – действительное линейное нормированное пространство, $M, N \subset X$ – выпуклые множества, $M \cap N = \varnothing$, M компактно, а N замкнуто. Тогда существует нетривиальный функционал $\varphi \in X^*$, строго разделяющий M и N.

Замечание: в частности, утверждение справедливо, если множество M состоит из одной точки.

Теорема (о слабой замкнутости выпуклого множества): пусть X – линейное нормированное пространство, $M \subset X$ – замкнутое выпуклое множество, тогда M – слабо замкнуто.

Доказательство: допустим, что $\exists \{x_n\} \subset M$: $x_n \rightharpoonup x_0 \notin M$.

1. Если X – действительное пространство, то по теореме отделимости найдется функционал $\varphi \in X^*$ такой, что $\varphi(x_0) > \sup\limits_{x \in M} \varphi(x)$. Так как $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$, то $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $\varphi(x_n) > \sup\limits_{x \in M} \varphi(x)$. Это означает, что $x_n \notin M$. Противоречие.

2. Пусть X – комплексное пространство. Рассматривая его, как действительное, найдем линейный ограниченный функционал $\varphi_0 : X \to \mathbb{R}$ такой, что $\varphi_0(x_0) > \sup\limits_{x \in M} \varphi_0(x)$. Далее, возьмем $\varphi \in X^*$, $\varphi(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix)$, тогда получим, что $\varphi_0(x_n) = \mathrm{Re}\,\varphi(x_n) \to \mathrm{Re}\,\varphi(x_0) = \varphi_0(x_0) > \sup\limits_{x \in M} \varphi_0(x)$, т.е. снова $x_n \notin M$.

Теорема доказана.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

3.1. Обратные операторы

Определение: пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $D(A)$ и множеством значений $R(A)$. Пусть существует оператор $A^{-1}: Y \to X$ такой, что $\forall x \in D(A)$ $A^{-1}Ax = x$ и $\forall y \in R(A)$ $AA^{-1}y = y$. Тогда операторы A и A^{-1} называются взаимно обратными.

Определение: пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор. Линейный оператор $B: Y \to X$ называется левым обратным для оператора A, если $BA = I_X$, где I_X – тождественный оператор в пространстве X. Линейный оператор $C: Y \to X$ называется правым обратным для оператора A, если $AC = I_Y$, где I_Y – тождественный оператор в пространстве Y.

Теорема (простейшие свойства обратных операторов): пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор. Тогда:

1. если оператор A имеет левый обратный и правый обратный, то они равны, т.е. $B = C = A^{-1}$;

2. Пусть оператор A отображает $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно, тогда существует обратный оператор A^{-1}, отображающий $R(A)$ взаимно однозначно на $D(A)$.

3. В условиях п. 2 оператор A^{-1} линеен.

4. если существует оператор $A^{-1}: Y \to X$, определенный на всем Y, то $\forall y \in Y$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение;

5. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ (в предположении, что $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ существует);

6. Если A – ограничен, то A^{-1} может не быть ограниченным.

Доказательство: 1. $B = BI_Y = B(AC) = (BA)C = I_X C = C$, откуда $B = C = A^{-1}$.

2. В силу взаимной однозначности $\forall y \in R(A)$ существует единственный прообраз $x \in D(A)$. Ставя в соответствие каждому такому $y \in R(A)$ его прообраз $x \in D(A)$ и получим оператор A^{-1}.

3. Легко доказать, что $R(A)$ – линейное многообразие. Пусть $x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2$, тогда $Ax = AA^{-1}(y_1 + y_2) - AA^{-1}y_1 - AA^{-1}y_2 = (y_1 + y_2) - -y_1 - y_2 = 0$. В силу взаимной однозначности оператора A получаем, что $x = 0$. Таким образом, $A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2$. Доказательство для множителя – аналогичное. Таким образом, A^{-1} линеен.

4. В силу п. 1 $B = C = A^{-1}$. Если оператор A имеет правый обратный C, то $x = Cy$ является решением уравнения $Ax = y$, поскольку, подставляя в уравне-

ние, получаем, что $ACy = y$, т.е. $y = y$. Пусть A имеет левый обратный B, x – решение уравнения $Ax = y$, тогда, применяя оператор B слева к этому уравнению, получаем, что $x = By$. Допустим, что x_1 – другое решение уравнения $Ax = y$, т.е. $Ax_1 = y$, тогда $x_1 = By = x$ и, значит, решение единственно.

5. Пусть $A^{-1} = B$, тогда $\left(A^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}$. Поскольку $BB^{-1} = I$, то $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = I$, откуда $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

6. Рассмотрим оператор A, действующий в $C[0,1]$ и определяемый равенством $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$. Ясно, что он определен на всем пространстве $C[0,1]$ и линеен в силу свойств линейности интеграла.

Область значений $R(A)$ оператора A представляет собой линейное многообразие непрерывно дифференцируемых в $C[0,1]$ функций вида $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$, для которых $y(0) = 0$. Кроме того, оператор ограничен в силу оценок:

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(\tau)d\tau\right| \le \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t |x(\tau)|d\tau \le \|x\|\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t 1d\tau = \|x\|.$$

Покажем, что линейный оператор $A^{-1}x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, действующий в $R(A) = D(A^{-1})$, является обратным к оператору A. Пусть $x(t) \in R(A)$, тогда $AA^{-1}x(t) = \int_0^t x'(\tau)d\tau = x(t) - x(0) = x(t)$, поскольку для $x(t) \in R(A)$ $x(0) = 0$. Если же $x(t) \in C[0,1]$, то $A^{-1}Ax(t) = \left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right)' = x(t)$.

Покажем, что A^{-1} неограничен. Возьмем $x_n(t) = \sin nt \in R(A) = D(A^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|x_n\| = \sup_{t\in[0,1]}|\sin nt| \le 1$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Ясно, что $A^{-1}x_n(t) = n\cos nt$ и $\|A^{-1}x_n\| = \sup_{t\in[0,1]}|n\cos nt| = n\sup_{t\in[0,1]}|\cos nt| = n \to +\infty$, т.е. оператор A^{-1} перевел ограниченную последовательность в неограниченную. Следовательно, он неограничен.

Теорема доказана.

Теорема (критерий инъективности): пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор. Оператор A инъективен тогда и только тогда, когда его ядро $\ker A = \{x \in D(A) : Ax = 0\} = \{0\}$.

Доказательство: пусть оператор A инъективен. Предположим, что $\ker A \ne \{0\}$, тогда возьмем $z \in \ker A$, $z \ne 0$. Пусть $y \in R(A)$ и уравнение $Ax = y$

имеет решение $x^* \in X$. Тогда $A(x^*+z)=Ax^*+Az=Ax^*+0=Ax^*=y$. Поскольку $z\neq 0$, то $x^*+z\neq x^*$. Таким образом, каждый элемент $y\in R(A)$ имеет по меньшей мере два прообраза $x^*\in D(A)$ и $x^*+z\in D(A)$. Это противоречит инъективности оператора A. Значит предположение $\ker A\neq\{0\}$ неверно.

Обратно: пусть $\ker A=\{0\}$. Предположим, что $\exists y\in R(A)$, имеющий два прообраза $x_1,x_2\in D(A)$ такие, что $x_1\neq x_2$, т.е. оператор A не является инъективным. Тогда $Ax_1=y$ и $Ax_2=y$ и, вычитая из первого равенства второе, получаем, что $Ax_1-Ax_2=0$, т.е. $A(x_1-x_2)=0$, значит, $x_1-x_2\in\ker A=\{0\}$, откуда $x_1=x_2$. Противоречие.

Теорема доказана.

Замечание: из доказанной теоремы и простейших свойств обратных операторов следует, что обратный оператор определен и линеен на всем Y, если исходный оператор сюръективен и его ядро состоит только из нулевого вектора.

Определение: пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X\to Y$ – линейный оператор. Оператор A называется непрерывно обратимым, если $R(A)=Y$ и оператор $A^{-1}: Y\to X$ линеен и ограничен.

Теорема (критерий непрерывной обратимости): пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A: X\to Y$ – линейный оператор. Оператор A непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $R(A)=Y$ и $\forall x\in D(A)$ $\exists m>0$: $\|Ax\|\geq m\|x\|$.

Доказательство: пусть оператор A непрерывно обратим, т.е. $R(A)=Y$ и существует обратный оператор $A^{-1}: Y\to X$, который линеен и ограничен. По определению ограниченности оператора, $\forall y\in Y$ $\exists c>0$ $\|A^{-1}y\|\leq c\|y\|$. Пусть $A^{-1}y=x\in D(A)$, тогда $y=Ax$ и тогда $\forall x\in D(A)$ получаем, что $\|x\|\leq c\|Ax\|$, откуда $\|Ax\|\geq\frac{1}{c}\cdot\|x\|=m\|x\|$, причем ясно, что $m>0$.

Обратно: пусть $R(A)=Y$ и $\forall x\in D(A)$ $\exists m>0$: $\|Ax\|\geq m\|x\|$. Надо доказать, что существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}. Покажем, что A взаимно однозначен. Если $Ax=0$, т.е. $x\in\ker A$, то $0=\|Ax\|\geq m\|x\|$, откуда $x=0$. Таким образом, $\ker A=\{0\}$, и по предыдущей теореме A взаимно однозначен и существует обратный линейный оператор A^{-1}. Пусть теперь $Ax=y$, тогда $x=A^{-1}y$ и, поскольку $\forall x\in D(A)$ $\|Ax\|\geq m\|x\|$, то $\forall y\in Y$ $\|AA^{-1}y\|\geq m\|A^{-1}y\|$, откуда $\|A^{-1}y\|\leq\frac{1}{m}\cdot\|y\|$, где $\frac{1}{m}>0$, т.е. оператор A^{-1} ограничен.

Теорема доказана.

Замечание: теорема применима даже в случае, когда $D(A)\neq X$ и оператор A не является ограниченным.

Теорема (об обратимости оператора, близкого к тождественному): пусть X – банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Тогда если $\|A\| < 1$, то существует ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$.

Доказательство: покажем, что $\exists B = (I - A)^{-1}$, причем B линеен и ограничен. Возьмем $B = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$, тогда ясно, что B – линеен. Покажем сначала, что этот ряд сходится.

Пространство X по условию полно, следовательно, по теореме о полноте пространства линейных ограниченных операторов, пространство $L(X, X)$ – также полно. В силу критерия полноты линейного пространства в терминах рядов, достаточно показать, что ряд $B = I + A + A^2 + A^3 + \ldots$ сходится абсолютно, т.е., что сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$. Поскольку $\|A^k\| \le \|A\|^k$, и по условию $\|A\| < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ – это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \dfrac{1}{1 - \|A\|}$, откуда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|}$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ сходится. Попутно установили неравенство $\|B\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|}$ (см. задачу 2), из которого следует, что оператор B ограничен. Осталось проверить, что $B(I - A) = (I - A)B = I$.

Действительно, $B(I - A) = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots)(I - A) = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots) - {}$ $-(A + A^2 + A^3 + \ldots) = I$. Равенство $(I - A)B = I$ проверяется аналогично.

Теорема доказана.

Замечание: в этой теореме, естественно, полагается, что $D(A) = R(A) = X$. Аналогично определяется оператор $(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^n A^n + \ldots$ (задача 3).

Замечание: вид оператора B можно было угадать, рассмотрев числовой ряд $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ и подставив в него формально $x = A$ (см. также задачу 9).

Теорема (об операторе, близком к непрерывно обратимому): пусть X – банахово пространство, $A, \Delta A: X \to X$ – линейные ограниченные операторы, причем A непрерывно обратим, а $\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$ непрерывно обратим и при этом $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \dfrac{\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}$.

Доказательство: пусть $B = A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$. Поскольку по условию $\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, то $\|A^{-1}\Delta A\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, то для оператора $A^{-1}\Delta A$ выполнены все условия предыдущей теоремы (см. замечание) и, следовательно, существует

$(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-A^{-1}\Delta A\right)^k$. Далее (см. задачу 4), $B^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}$, следовательно, B^{-1} существует, линеен и ограничен, т.е. B непрерывно обратим.

Наконец, получим требуемое неравенство:

$$\left\|B^{-1} - A^{-1}\right\| = \left\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} - A^{-1}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} - I\right\| =$$

$$= \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(-A^{-1}\Delta A\right)^k - I\right\| = \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(-A^{-1}\Delta A\right)^k\right\| \le$$

$$\le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\left(-A^{-1}\Delta A\right)^k\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left\|A^{-1}\Delta A\right\|^k \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\|\right)^k =$$

$$= \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\|}{1 - \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\|} = \frac{\left\|A^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|\Delta A\right\|}{1 - \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|\Delta A\right\|}.$$

Теорема доказана.

Теорема Банаха (об обратном операторе): пусть X и Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, причем $D(A) = X$, $R(A) = Y$. Тогда если этот оператор имеет обратный $A^{-1}: Y \to X$, то он также ограничен.

Доказательство: поскольку оператор A сюръективен, то, в силу принципа открытости (см. п. 1.5), образ единичного шара с центром в начале координат содержит некоторый шар с центром в начале координат. Его радиус обозначим через ρ, т.е. если взять $\forall y \in Y$: $\|y\| \le \rho$, то в этот элемент y перейдет некоторый элемент $x \in X$, содержащийся в единичном шаре (т.е. $\exists x \in X$: $\|x\| \le 1$ и $Ax = y$). Поскольку $Ax = y$ и обратный оператор существует, то $x = A^{-1}y$. Таким образом, $\forall y \in Y$ из условия $\|y\| \le \rho$ следует, что $\|x\| = \left\|A^{-1}y\right\| \le 1$. Покажем, что $\forall z \in Y$ $\exists c > 0$: $\left\|A^{-1}z\right\| \le c\|z\|$.

Имеем, $\left\|A^{-1}z\right\| = \left\|A^{-1}\frac{z}{\|z\|} \cdot \rho \cdot \frac{\|z\|}{\rho}\right\| = \frac{\|z\|}{\rho} \cdot \left\|A^{-1}\frac{z}{\|z\|} \cdot \rho\right\| = c \cdot \left\|A^{-1}y\right\| \cdot \|z\|$, где $c = \frac{1}{\rho}$, $y = \frac{z}{\|z\|} \cdot \rho \in Y$. Если покажем, что $\|y\| \le \rho$, то получим, что $\left\|A^{-1}y\right\| \le 1$ и тогда $\left\|A^{-1}z\right\| \le c\|z\|$, т.е., что и требовалось доказать. Действительно, $\|y\| = \left\|\frac{z}{\|z\|} \cdot \rho\right\| = \frac{\rho}{\|z\|} \cdot \|z\| = \rho$.

Теорема доказана.

Замечание: теорема Банаха об обратном операторе неприменима, если $D(A) \ne X$ или $R(A) \ne Y$. Кроме того, теорема Банаха является симметричной (из ограниченности A^{-1} следует ограниченность A).

Замечание: если $D(A) = X$ и $R(A) = Y$, то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор A^{-1} линеен и ограничен, тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо при любой правой части $y \in Y$.

Теорема (об эквивалентных нормах): пусть на некотором линейном пространстве E заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$, по отношению к каждой из которых пространство E – банахово. Если хотя бы одна из норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны.

Доказательство: пусть E_1 – пространство E с нормой $\|x\|_1$, а E_2 – пространство E с нормой $\|x\|_2$. Ясно, что E_1 и E_2 – банаховы. Пусть норма $\|x\|_1$ подчинена норме $\|x\|_2$, т.е. $\exists c_2 > 0$: $\|x\|_1 \le c_2\|x\|_2$. Рассмотрим оператор $A: E_2 \to E_1$, действующий по формуле $Ax = x$ (слева $x \in E$, как элемент пространства E_2, а справа $x \in E$, как элемент пространства E_1). Ясно, что $D(A) = E_2$, A – линеен и отображает E_2 на $R(A) = E_1$ взаимно однозначно. Кроме того, $\|Ax\|_1 \le c_2\|x\|_2$, т.е. оператор A – ограничен. Таким образом, обратный оператор $A^{-1}: E_1 \to E_2$, действующий по формуле $A^{-1}x = x$, существует и, по теореме Банаха об обратном операторе, он также ограничен, т.е. $\|A^{-1}x\|_2 \le \|A^{-1}\| \cdot \|x\|_1$. Поскольку $A^{-1}x = x$, то $\|x\|_2 \le \|A^{-1}\| \cdot \|x\|_1$, откуда $\|x\|_1 \ge \|A^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\|_2 = c_1\|x\|_2$. Окончательно получаем, что $c_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c_2\|x\|_2$. По определению нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Пусть $Ax(t) = x(t) - \lambda\int\limits_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau : C[0,1] \to C[0,1]$, $t \in [0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k(t,\tau) = \psi(t)\gamma(\tau)$, функции $\psi(t)$ и $\gamma(\tau)$ непрерывны на $[0,1]$ и не равны тождественно нулю, $\int\limits_0^1 \psi(\tau)\gamma(\tau)d\tau \ne \dfrac{1}{\lambda}$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

Решение: оператор A определен на всем пространстве $C[0,1]$, а, в силу теоремы о непрерывности интеграла Римана, зависящего от параметра, множеством значений оператора также является все пространство $C[0,1]$. Линейность оператора очевидна в силу линейности интеграла. Проверим его ограниченность, пользуясь тем, что в $C[0,1]$ $|x(t)| \le \|x\|$:

$$\|Ax\| = \sup_{t\in[0,1]}\left|x(t) - \lambda\int\limits_0^1 \psi(t)\gamma(\tau)x(\tau)d\tau\right| \le \sup_{t\in[0,1]}\left(|x(t)| + |\lambda|\int\limits_0^1 |\psi(t)||\gamma(\tau)||x(\tau)|d\tau\right) \le$$

$$\le \|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(1 + |\lambda|\int\limits_0^1 |\psi(t)||\gamma(\tau)|d\tau\right) \le \|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(1 + |\lambda|\cdot\|\psi\|\cdot\|\gamma\|\int\limits_0^1 1d\tau\right) = \left(1 + |\lambda|\cdot\|\psi\|\cdot\|\gamma\|\right)\cdot\|x\|.$$

Таким образом, $A \in L\big(C[0,1], C[0,1]\big)$. Поскольку $C[0,1]$ – банахово пространство, то для установления непрерывной обратимости оператора A достаточно, в силу теоремы Банаха об обратном операторе, показать, что при каждом $y(t)\in C[0,1]$ уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение. Рассмотрим уравнение $x(t)-\lambda\int_0^1\psi(t)\gamma(\tau)x(\tau)d\tau=y(t)$ или $x(t)-\lambda\psi(t)\int_0^1\gamma(\tau)x(\tau)d\tau=y(t)$. Из вида уравнения ясно, что его решение $x(t)=y(t)+c\lambda\psi(t)$, $c=\int_0^1\gamma(\tau)x(\tau)d\tau$. Умножим этот вид на $\gamma(t)$ и проинтегрируем полученное соотношение по τ на отрезке $[0,1]$: $\int_0^1 x(\tau)\gamma(\tau)d\tau=\int_0^1 y(\tau)\gamma(\tau)d\tau+c\lambda\int_0^1\psi(\tau)\gamma(\tau)d\tau$. Пусть $c_0=\int_0^1\psi(\tau)\gamma(\tau)d\tau$, тогда из условия задачи ясно, что $c_0\neq\frac{1}{\lambda}$. Поскольку $c=\int_0^1\gamma(\tau)x(\tau)d\tau$, то получаем равенство: $c=\int_0^1 y(\tau)\gamma(\tau)d\tau+c\lambda c_0$, откуда $c=\frac{1}{1-\lambda c_0}\int_0^1 y(\tau)\gamma(\tau)d\tau$.

Подставляя найденное c в вид решения исходного уравнения, получаем $x(t)=y(t)+\psi(t)\frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 y(\tau)\gamma(\tau)d\tau$ или $x(t)=y(t)+\frac{\lambda}{1-\lambda c_0}\int_0^1 k(t,\tau)y(\tau)d\tau=A^{-1}y(t)$.

Из этой формулы следует, что решение $x(t)$ единственно, поскольку, если $Ax_1=y$, $Ax_2=y$, то $x_1=A^{-1}y=x_2$. Подставляя найденное $x(t)$ в уравнение $Ax=y$, получим тождество $y(t)=y(t)$, т.е. найденное решение существует при любой правой части $y(t)\in C[0,1]$. Таким образом, оператор A непрерывно обратим.

2. Пусть $Ax(t)=x(t)-\lambda\int_0^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau$, $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $t\in[0,1]$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, где $k(t,\tau)=\psi(t)\gamma(\tau)$, функции $\psi(t)$ и $\gamma(\tau)$ непрерывны на $[0,1]$ и не равны тождественно нулю. Доказать, что оператор A непрерывно обратим и найти A^{-1}.

Решение: аналогично предыдущему примеру $A\in L\big(C[0,1],C[0,1]\big)$, поэтому достаточно показать, что уравнение $x(t)-\lambda\int_0^t\psi(t)\gamma(\tau)x(\tau)d\tau=y(t)$, при каждом $y(t)\in C[0,1]$ имеет единственное решение.

Если обозначим $z(t)=\int_0^t\gamma(\tau)x(\tau)d\tau$, то получим, что решение уравнения надо искать в виде $x(t)=y(t)+\lambda\psi(t)z(t)$. Из соотношения $z(t)=\int_0^t\gamma(\tau)x(\tau)d\tau$ ясно, что $z(t)\in C^{(1)}[0,1]$, причем $z'(t)=\gamma(t)x(t)$ и $z(0)=0$. Подставим в полученное дифференциальное уравнение $x(t)=y(t)+\lambda\psi(t)z(t)$, и, обозначая $a_0(t)=\gamma(t)\psi(t)$, получим $z'(t)-\lambda a_0(t)z(t)=\gamma(t)y(t)$. Решение однородного уравнения $z_0(t)=ce^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}$.

Используя метод вариации постоянной, запишем $z(t)=c(t)e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}$, откуда $z'(t)=c'(t)e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}+\lambda c(t)a_0(t)e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}$, и, выполняя подстановку в неоднородное уравнение, получим $c'(t)=e^{-\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}\gamma(t)y(t)$, т.е. $c(t)=\int_a^t e^{-\lambda\int_0^\tau a_0(s)ds}\gamma(\tau)y(\tau)d\tau$, где $a=\text{const}$. Общее решение $z(t)=e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}\cdot\int_a^t e^{-\lambda\int_0^\tau a_0(s)ds}\gamma(\tau)y(\tau)d\tau$. Воспользуемся начальным условием $z(0)=0$ и получим $z(0)=\int_a^0 e^{-\lambda\int_0^\tau a_0(s)ds}\gamma(\tau)y(\tau)d\tau=0$.

Окончательно $z(t)=e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}\cdot\int_0^t e^{-\lambda\int_0^\tau a_0(s)ds}\gamma(\tau)y(\tau)d\tau$, отсюда находим, что $x(t)=y(t)+\lambda\psi(t)e^{\lambda\int_0^t a_0(\tau)d\tau}\cdot\int_0^t e^{-\lambda\int_0^\tau a_0(s)ds}\gamma(\tau)y(\tau)d\tau=A^{-1}y(t)$. Снова легко видеть существование и единственность полученного решения при любой правой части $y(t)\in C[0,1]$, т.е. оператор A непрерывно обратим.

3. Пусть $L\subset C[0,1]$ – линейное многообразие трижды непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$. Доказать непрерывную обратимость оператора $A:C[0,1]\to C[0,1]$ с областью определения $D(A)=L$ и $Ax(t)=x'''(t)+x''(t)$.

Решение: в данном случае теоремой Банаха пользоваться нельзя, поскольку $D(A)\neq C[0,1]$ и оператор A – неограничен, как всякий оператор дифференцирования в пространстве $C[0,1]$.

Для проверки непрерывной обратимости воспользуемся критерием непрерывной обратимости. Возьмем произвольную функцию $y(t)\in C[0,1]$ и рассмотрим уравнение $Ax=y$, т.е. $x'''(t)+x''(t)=y(t)$ с начальными условиями $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

Рассмотрим однородное уравнение $x'''(t)+x''(t)=0$. Его характеристическое уравнение $k^3+k^2=0$ имеет корни $k_1=0$ – кратности 2 и $k_2=1$, т.е. решение этого уравнения записывается в виде $x(t)=c_1t+c_2+c_3e^{-t}$. Для решения неоднородного уравнения используем метод вариации постоянных, т.е. будем искать решение неоднородного уравнения в виде $x(t)=c_1(t)t+c_2(t)+c_3(t)e^{-t}$.

Тогда $x'(t)=c_1'(t)t+c_1(t)+c_2'(t)+c_3'(t)e^{-t}-c_3(t)e^{-t}$. Считаем $c_1'(t)t+c_2'(t)+c_3'(t)e^{-t}=0$. Далее, $x''(t)=c_1'(t)-c_3'(t)e^{-t}+c_3(t)e^{-t}$ и считаем, что $c_1'(t)-c_3'(t)e^{-t}=0$. Наконец, $x'''(t)=c_3'(t)e^{-t}-c_3(t)e^{-t}$. Подставим эти производные в исходное неоднородное уравнение: $c_3'(t)e^{-t}-c_3(t)e^{-t}+c_3(t)e^{-t}=y(t)$. Таким образом, для определения $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ получаем систему: $\begin{cases} c_1'(t)t+c_2'(t)+c_3'(t)e^{-t}=0 \\ c_1'(t)-c_3'(t)e^{-t}=0 \\ c_3'(t)e^{-t}=y(t) \end{cases}$.

Из третьего уравнения системы находим, что $c_3'(t)=e^t y(t)$, тогда из второго уравнения $c_1'(t)=y(t)$, а из первого – $c_2'(t)=-y(t)-ty(t)$.

Тогда $c_3(t)=\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau$, $c_1(t)=\int\limits_b^t y(\tau)d\tau$, $c_2(t)=-\int\limits_c^t(1+\tau)y(\tau)d\tau$. Решение неоднородного уравнения: $x(t)=t\int\limits_b^t y(\tau)d\tau-\int\limits_c^t(1+\tau)y(\tau)d\tau+e^{-t}\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau$. Воспользуемся начальными условиями $x(0)=-\int\limits_c^0(1+\tau)y(\tau)d\tau+\int\limits_a^0 e^\tau y(\tau)d\tau=0$. Далее, $x'(t)=\int\limits_b^t y(\tau)d\tau+ty(t)-(1+t)y(t)-e^{-t}\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau+y(t)=\int\limits_b^t y(\tau)d\tau-e^{-t}\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau$, откуда $x'(0)=\int\limits_b^0 y(\tau)d\tau-\int\limits_a^0 e^\tau y(\tau)d\tau=0$.

Т.к. $x''(t)=y(t)+e^{-t}\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau-y(t)=e^{-t}\int\limits_a^t e^\tau y(\tau)d\tau$, то $x''(0)=\int\limits_a^0 e^\tau y(\tau)d\tau=0$.

Из полученных равенств заключаем $\int\limits_a^0 e^\tau y(\tau)d\tau=\int\limits_b^0 y(\tau)d\tau=\int\limits_c^0(1+\tau)y(\tau)d\tau=0$, откуда $x(t)=t\int\limits_0^t y(\tau)d\tau-\int\limits_0^t(1+\tau)y(\tau)d\tau+e^{-t}\int\limits_0^t e^\tau y(\tau)d\tau=\int\limits_0^t(t-1-\tau+e^{\tau-t})y(\tau)d\tau$. Видим, что для всякой непрерывной функции $y(t)$ решение $x(t)$ существует (что легко проверяется подстановкой в исходное уравнение), т.е. $R(A)=C[0,1]$. Далее, оценим норму полученного решения:

$$\|x\|_{C[0,1]}=\sup_{t\in[0,1]}\left|\int\limits_0^t(t-1-\tau+e^{\tau-t})y(\tau)d\tau\right|\le\sup_{t\in[0,1]}\int\limits_0^t\left|t-1-\tau+e^{\tau-t}\right|\left|y(\tau)\right|d\tau\le$$

$$\le\|y\|_{C[0,1]}\sup_{t\in[0,1]}\int\limits_0^t\left|t-1-\tau+e^{\tau-t}\right|d\tau\le\|y\|_{C[0,1]}\sup_{t\in[0,1]}\int\limits_0^t(t+1+\tau+e^{\tau-t})d\tau=$$

$$=\|y\|_{C[0,1]}\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{3t^2}{2}+t+1-e^{-t}\right)=m\|y\|_{C[0,1]}.$$

Поскольку $Ax=y$, то $\|x\|_{C[0,1]}\le m\|Ax\|_{C[0,1]}$, откуда $\|Ax\|_{C[0,1]}\ge\frac{1}{m}\|x\|_{C[0,1]}$. Для того, чтобы по критерию непрерывной обратимости сделать вывод, что оператор A непрерывно обратим, осталось показать, что $\frac{1}{m}>0$, т.е., что $m>0$. Нетрудно убедиться, что функция $\frac{3t^2}{2}+t+1-e^{-t}$ монотонно возрастает при $t\in[0,1]$, поэтому $m=\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{3t^2}{2}+t+1-e^{-t}\right)=\frac{3}{2}+2-e^{-1}=\frac{7}{2}-\frac{1}{e}=\frac{7e-1}{2e}>0$. Итак, оператор A непрерывно обратим, и действие обратного оператора задается формулой $A^{-1}y(t)=\int_0^t(t-1-\tau+e^{\tau-t})y(\tau)d\tau$, $\forall y(t)\in C[0,1]$.

4. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A:l_2\to l_2$, если:

а) $Ax=(\xi_3,\xi_1,\xi_2,\xi_4,\xi_5,...)$;

б) $Ax=(\xi_1+2\xi_2,\xi_1-\xi_2,\xi_3,\xi_4,...)$;

в) $Ax=(\xi_2-\xi_1,\xi_2+\xi_3,2\xi_2-2\xi_1,\xi_4,\xi_5,...)$,

где $x=(\xi_k)\in l_2$.

Решение: а) Ясно, что $D(A)=R(A)=l_2$, поскольку оператор только меняет координаты местами. Кроме того, A – линеен. Проверим, что A – ограничен:

$$\|Ax\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|A\xi_k|^2=|\xi_3|^2+|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_4|^2+|\xi_5|^2+...=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2=\|x\|^2,$$

откуда следует, что $\|A\|=1$, т.е. $A\in L(l_2,l_2)$, причем l_2 – банахово, следовательно, можно воспользоваться теоремой Банаха об обратном операторе, показав, что уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение для любого $y=(\eta_k)\in l_2$. Перепишем это уравнение в виде $(\xi_3,\xi_1,\xi_2,\xi_4,\xi_5,...)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,...)$. Отсюда следует, что $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,...)=(\eta_2,\eta_3,\eta_1,\eta_4,\eta_5,...)=A^{-1}y$. Ясно, что это решение существует и единственно, следовательно, оператор A непрерывно обратим, и, кроме того, можно непосредственно установить, что $\|A^{-1}\|=1$.

б) Ясно, что $D(A)=R(A)=l_2$, поскольку оператор меняет только конечное число координат. Кроме того, A – линеен. Проверим, что A – ограничен.

$$\|Ax\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|A\xi_k|^2=|\xi_1+2\xi_2|^2+|\xi_1-\xi_2|^2+|\xi_3|^2+|\xi_4|^2+...\le$$

$$\le|\xi_1|^2+4|\xi_1||\xi_2|+4|\xi_2|^2+|\xi_1|^2+2|\xi_1||\xi_2|+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2+|\xi_4|^2+...\le$$

$$\le|\xi_1|^2+2|\xi_1|^2+2|\xi_2|^2+4|\xi_2|^2+|\xi_1|^2+|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+|\xi_2|^2+|\xi_3|^2+|\xi_4|^2+...=$$

$$\le 5|\xi_1|^2+8|\xi_2|^2+|\xi_3|^2+|\xi_4|^2+...\le 8|\xi_1|^2+8|\xi_2|^2+8|\xi_3|^2+8|\xi_4|^2+...=8\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2=8\|x\|^2.$$

При преобразованиях воспользовались неравенством $2|ab|\le|a|^2+|b|^2$. Следовательно, $\|Ax\|\le\sqrt{8}\|x\|$ и оператор A ограничен, т.е. $A\in L(l_2,l_2)$. Аналогично п. а) покажем, что уравнение $Ax=y$ имеет единственное решение для любого $y=(\eta_k)\in l_2$. Рассмотрим уравнение $(\xi_1+2\xi_2,\xi_1-\xi_2,\xi_3,\xi_4,...)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,...)$. Из него следует, что $\xi_1+2\xi_2=\eta_1$, $\xi_1-\xi_2=\eta_2$, $\xi_3=\eta_3$, $\xi_4=\eta_4$,... Таким образом, $\xi_1=\dfrac{\eta_1+2\eta_2}{3}$, $\xi_2=\dfrac{\eta_1-\eta_2}{3}$, $\xi_3=\eta_3$, $\xi_4=\eta_4$,.., т.е. $x=A^{-1}y=\left(\dfrac{\eta_1+2\eta_2}{3},\dfrac{\eta_1-\eta_2}{3},\eta_3,\eta_4,...\right)$ и это решение определяется однозначно и существует. Следовательно, оператор A непрерывно обратим.

в) Ясно, что $D(A)=R(A)=l_2$, A – линеен и ограничен (проверяется аналогично п. б). Рассмотрим ядро этого оператора $\ker A=\{x\in l_2:Ax=0\}$. Из равенства $(\xi_2-\xi_1,\xi_2+\xi_3,2\xi_2-2\xi_1,\xi_4,\xi_5,...)=(0,0,0,0,0,...)$ следует, что $\xi_2-\xi_1=0$, $\xi_2+\xi_3=0$, $2\xi_2-2\xi_1=0$, $\xi_4=0$, $\xi_5=0$,..., откуда следует, что ядро оператора A состоит из векторов, первые три координаты которых связаны между собой соотношениями $\xi_1=\xi_2$ и $\xi_3=-\xi_2$, а остальные координаты равны нулю. Ясно, что как только, например, $\xi_1\ne 0$, получим, что $\ker A\ne\{0\}$ и, в силу критерия инъективности, оператор A не является взаимно однозначным. Покажем, что в таком случае он не может быть непрерывно обратимым.

Допустим, что это не так, тогда по критерию непрерывной обратимости $\forall x\in l_2$ $\exists m>0$: $\|Ax\|\ge m\|x\|$. Пусть $x\in\ker A$, т.е. $Ax=0$, тогда $m\|x\|\le 0$, откуда $\|x\|=0$, т.е. $x=0$, и, следовательно, $\ker A=\{0\}$ – противоречие.

5. Доказать, что если линейный ограниченный оператор A, отображающий банахово пространство E_1 в нормированное пространство E_2 ($D(A)\subset E_1$ – подпространство, $R(A)=E_2$) имеет ограниченный обратный оператор, то $R(A)=E_2$ – банахово пространство.

Решение: пусть $\{y_n\}\subset R(A)$ – фундаментальная последовательность, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n,m>N$ $\|y_n-y_m\|_{E_2}<\varepsilon$. Ясно, что $y_n=Ax_n$, откуда $x_n=A^{-1}y_n\in D(A)\subset E_1$. Поскольку A непрерывно обратим, то по критерию непрерывной обратимости $\forall x\in E_1$ $\exists m>0$: $\|Ax\|_{E_2}\ge m\|x\|_{E_1}$, т.е. $\|A(x_n-x_m)\|_{E_2}\ge m\|x_n-x_m\|_{E_1}$, а, поскольку $\|y_n-y_m\|_{E_2}=\|A(x_n-x_m)\|_{E_2}$, то $m\|x_n-x_m\|_{E_1}\le\|y_n-y_m\|_{E_2}<\varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\}\subset D(A)$ также является фундаментальной. Поскольку E_1 – полно, то $\{x_n\}$ – сходится. Пусть $x_n\to x_0$. Поскольку $D(A)$ – подпространство, т.е. замкнуто, то $x_0\in D(A)$. Поскольку оператор A ограничен, то он непрерывен, следовательно, $y_n=Ax_n\to Ax_0=y_0\in R(A)$. Таким образом, $R(A)=E_2$ – банахово пространство.

6. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $\delta(E_1, E_2)$ – совокупность всех непрерывно обратимых операторов в пространстве $L(E_1, E_2)$. Доказать, что множество $\delta(E_1, E_2)$ открыто в $L(E_1, E_2)$.

Решение: возьмем произвольный оператор $A_0 \in \delta(E_1, E_2)$ и покажем, что открытый шар $B(A_0, r) = \left\{ A \in L(E_1, E_2) : \|A - A_0\| < r, r = \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1} \right\}$ целиком содержится в $\delta(E_1, E_2)$. Это будет означать, что любой элемент из $\delta(E_1, E_2)$ лежит в $\delta(E_1, E_2)$ вместе с некоторой окрестностью и, значит, множество $\delta(E_1, E_2)$ является открытым.

Надо показать, что любой оператор $A \in B(A_0, r)$ является непрерывно обратимым. Поскольку E_1, E_2 – банаховы и $A \in L(E_1, E_2)$, то, в силу теоремы Банаха об обратном операторе, достаточно показать, что для каждого фиксированного $y \in E_2$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Рассмотрим оператор $B : E_1 \to E_1$, действующий по формуле $Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}Ax + x$.

Ясно, что $\rho(Bx_1, Bx_2) = \|Bx_1 - Bx_2\| = \left\|A_0^{-1}y - A_0^{-1}Ax_1 + x_1 - A_0^{-1}y + A_0^{-1}Ax_2 - x_2\right\| =$
$= \left\|A_0^{-1}A(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)\right\| = \left\|A_0^{-1}A(x_2 - x_1) - A_0^{-1}A_0(x_2 - x_1)\right\| = \left\|A_0^{-1}(A - A_0)(x_2 - x_1)\right\| \le$
$\le \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot \|A - A_0\| \cdot \|x_2 - x_1\| = q\rho(x_1, x_2)$, где $q = \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot \|A - A_0\| < \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot r = \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1} = 1$, следовательно, отображение B является сжимающим. Поскольку пространство E_1 – полно, то в силу принципа сжимающих отображений, B имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение $x = Bx$ имеет единственное решение $x^* \in E_1$. Таким образом, $x^* = Bx^* = A_0^{-1}y - A_0^{-1}Ax^* + x^*$, откуда $A_0^{-1}Ax^* = A_0^{-1}y$, и, применяя к этому равенству оператор A_0, получим $Ax^* = y$. По теореме Банаха об обратном операторе, A – непрерывно обратим, что и требовалось доказать.

7. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что существует обратный к оператору $(I + iA)$, определенный на многообразии $R(I + iA)$.

Решение: линейный оператор $(I + iA)$ отображает гильбертово пространство H на многообразие $R(I + iA)$ – множество значений оператора $(I + iA)$. Чтобы доказать существование обратного оператора к $(I + iA)$, надо проверить, что $\ker(I + iA) = \{0\}$. Пусть $x \in H$ и $(I + iA)x = 0$, тогда $iAx = -x$, откуда $Ax = ix$. Значит, поскольку A самосопряжен, то $i(x, x) = (ix, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, ix) =$
$= \bar{i}\,(x, x) = -i(x, x)$. Следовательно, $i\|x\|^2 = -i\|x\|^2$, откуда $\|x\| = 0$, т.е. $x = 0$. Таким образом, $\ker(I + iA) = \{0\}$ и существует оператор $(I + iA)^{-1} : R(I + iA) \to H$.

8. Пусть $A : E_1 \to E_2$ – линейный ограниченный оператор и существует обратный линейный ограниченный оператор $A^{-1} : E_2 \to E_1$. Доказать, что оператор $A^* : E_2^* \to E_1^*$ имеет ограниченный обратный $(A^*)^{-1} : E_1^* \to E_2^*$ и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Решение: поскольку каждый линейный ограниченный оператор имеет сопряженный, который также является линейным и ограниченным, то существуют линейные ограниченные операторы A^* и $(A^{-1})^*$. Надо доказать, что существует ограниченный оператор $(A^*)^{-1}$ и что $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

По определению сопряженного оператора для произвольных $x\in E_1$ и $\varphi\in E_2^*$ $\varphi(Ax)=A^*\varphi(x)$. Если $x=A^{-1}y$, $y\in E_2$, то $\varphi(y)=A^*\varphi(A^{-1}y)=(A^{-1})^*A^*\varphi(y)$. Поскольку $y\in E_2$ – произвольно, то $\varphi=(A^{-1})^*A^*\varphi$ для всех $\varphi\in E_2{}^*$, следовательно, оператор A^* имеет левый обратный, который равен $(A^{-1})^*$.

Аналогично, для произвольных $y\in E_2$ и $\psi\in E_1^*$ $\psi(A^{-1}y)=(A^{-1})^*\psi(y)$ и, поскольку, $y=Ax$, то $\psi(x)=(A^{-1})^*\psi(Ax)=A^*(A^{-1})^*\psi(x)$, откуда для всех $\psi\in E_1^*$ $\psi=A^*(A^{-1})^*\psi$, т.е. оператор A^* имеет правый обратный, совпадающий с $(A^{-1})^*$. Итак, оператор A^* имеет обратный $(A^*)^{-1}$, причем $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ и, поскольку $(A^{-1})^*$ линеен и ограничен, то $(A^*)^{-1}$ также линеен и ограничен.

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя критерий инъективности, проверить, что оператор A из п. 6 теоремы о простейших свойствах линейных ограниченных операторов является взаимно однозначным.

2. Доказать, что в теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному, $\|B\|\le\dfrac{1}{1-\|A\|}$.

3. Пусть X – банахово пространство, $A:X\to X$ – линейный ограниченный оператор. Доказать, что при $\|A\|<1$ оператор $(I+A)$ непрерывно обратим. Указать явный вид обратного оператора и оценку его нормы.

4. Пусть A и B – линейные операторы в линейном пространстве X. Доказать, что если операторы A и B имеют обратные, то оператор AB также имеет обратный, равный $B^{-1}A^{-1}$.

Указание: рассмотреть уравнение $ABx=y$.

5. Пусть A и B – линейные операторы в линейном пространстве X. Доказать, что если операторы A и BA имеют обратные, то существует оператор B^{-1}.

Указание: $B=BA\cdot A^{-1}$.

6. Установить, где в п. 6 теоремы о простейших свойствах обратных операторов не выполняется условие теоремы Банаха об обратном операторе.

7. Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, задаваемый матрицей $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) существует непрерывный обратный оператор A^{-1};

б) $\ker A=\{0\}$;

в) $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n\ne 0$;

г) уравнение $Ax = y$ имеет решение при любом $y \in \mathbb{R}^n$.

8. Пусть E – линейное пространство, $A, B : E \to E$ – линейные операторы, у которых $D(A) = D(B) = E$, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0$ и $BA + A + I = 0$. Доказать, что оператор A^{-1} существует.

Указание: доказать, что $A^{-1} = -I - B$.

9. Пусть E – линейное пространство, $A, B : E \to E$ – линейные операторы, у которых $D(A) = D(B) = E$, и оператор $(I - AB)^{-1}$ существует. Доказать, что оператор $(I - BA)^{-1}$ также существует.

Указание: разложить $(I - AB)^{-1}$ *и* $(I - BA)^{-1}$ *в формальные степенные ряды (считая умножение некоммутативным) и получить* $(I - BA)^{-1} = I + BCA$, *где* $(I - AB)^{-1} = C$. *После чего обосновать это равенство.*

10. Пусть E – линейное нормированное пространство, $A : E \to E$ – линейный ограниченный оператор, и в E существует такая последовательность $\{x_n\} \in D(A)$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что у оператора A не существует ограниченного обратного.

Указание: предположить противное.

11. Пусть E – линейное пространство, $A, B : E \to E$ – линейные операторы, у которых $D(A) = D(B) = E$, и существуют операторы $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$. Следует ли отсюда, что существуют операторы A^{-1} и B^{-1}?

Указание: показать, что $\ker A = \ker B = \{0\}$.

12. Пусть A – оператор в $C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = p(t)x(t)$, $t \in [0,1]$, $p(t) \in C[0,1]$ – заданная функция. Доказать, что оператор A имеет непрерывный обратный тогда и только тогда, когда $\forall t \in [0,1]$ $p(t) \neq 0$.

13. Пусть $A : l_2 \to l_2$ – диагональный оператор, действующий по правилу $A(\xi_1, \xi_2, ...) = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, ...)$, где $\sup\limits_k |\alpha_k| < +\infty$. Доказать, что оператор A имеет непрерывный обратный тогда и только тогда, когда $\inf\limits_k |\alpha_k| > 0$. Найти A^{-1}.

14. Пусть E – пространство дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = 0$ и $x(1) = 0$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{k=0}^{2} \max\limits_{0 \le t \le 1} |x^{(k)}(t)|$. Найти обратный к оператору $A : E \to C[0,1]$, задаваемому формулой $Ax(t) = x''(t) - x(t)$, $t \in [0,1]$.

15. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : l_2 \to l_2$, если $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

16. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

17. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : l_2 \to l_2$, если $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, ...)$, где $x = (\xi_k) \in l_2$.

18. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A:E\to C[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=x'(t)+4x(t)$, где $t\in[0,1]$. Найти A^{-1}.

19. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A:E\to C[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=x'(t)-2tx(t)$, где $t\in[0,1]$. Найти A^{-1}.

20. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A:E\to C[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=x'(t)-3t^2x(t)$, где $t\in[0,1]$. Найти A^{-1}.

21. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A:E\to C[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=(t+1)x'(t)-x(t)$, где $t\in[0,1]$. Найти A^{-1}.

22. Пусть E – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор к оператору $A:E\to C[0,1]$, действующему по формуле $Ax(t)=(t^2+1)x'(t)-2tx(t)$, где $t\in[0,1]$. Найти A^{-1}.

23. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим операторы A и B, определяемые формулами $Ax(t)=(t+1)x(t)$, $Bx(t)=x\left(t^2\right)$, $t\in[0,1]$. Найти $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$.

24. Пусть E – банахово пространство, $A\in L(E,E)$ и $\|I-A\|<1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

25. Рассмотрим оператор $A:C[0,1]\to C^{(2)}[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^t e^{-|s-t|}x(s)ds$. Существует ли оператор A^{-1}?

26. Рассмотрим подпространство $L=\left\{x(t)\in C^{(1)}[0,1]:x(0)=0\right\}$ и оператор $A:L\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=x'(t)+a(t)x(t)$, $a(t)\in C[0,1]$, $t\in[0,1]$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

27. Пусть A и B – операторы в $C[-1,1]$, определяемые формулами $Ax(t)=x(t^2)$, $Bx(t)=x(t^3)$, $t\in[-1,1]$. Доказать, что оператор A не имеет обратного, а оператор B имеет обратный. Найти B^{-1}.

28. Показать, что оператор $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = x'(t)$, $t \in [0,1]$, имеет правый обратный, но не имеет левого обратного оператора.

29. Установить непрерывную обратимость оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующего по формуле $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau$. Найти A^{-1}.

30. Установить непрерывную обратимость оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующего по формуле $Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau$. Найти A^{-1}.

31. Пусть E – линейное пространство, $A: E \to E$ – линейный оператор, удовлетворяющий при некоторых $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1,2,...,n)$ соотношению $I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + ... + \lambda_n A^n = 0$. Доказать, что A^{-1} существует.

Указание: доказать, что $A^{-1} = -\lambda_1 - \lambda_2 A - ... - \lambda_n A^{n-1}$.

32. Доказать, что в теореме Банаха об обратном операторе нельзя отбросить требование полноты ни первого, ни второго из заданных пространств.

Указание: рассмотреть оператор вложения $Ax = x$, *где слева* x *рассматривается, как элемент полного пространства* l_1 *с нормой* $\|x\|_{l_1}$, *а справа – как элемент неполного (доказать это!) пространства* l_1 *с нормой* $\|x\|_{l_\infty}$. *Показать, что этот оператор ограничен, а обратный к нему – нет. Для обоснования необходимости полноты первого пространства использовать симметричность теоремы Банаха.*

33. Пусть H – гильбертово пространство и $A: H \to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что оператор $(I + viA)$ $(v \neq 0, v \in \mathbb{R})$ обратим, т.е. существует линейный оператор $(I + viA)^{-1}: R(I + viA) \to H$, где $R(I + viA)$ – область значений оператора $(I + viA)$.

34. Исследовать на непрерывную обратимость оператор $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, если $Ax(t) = \int_{-1}^{t} (1 + \operatorname{sgn} s) x(s) ds$.

35. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор у оператора $A: l_1 \to l_1$, если $Ax = \left(\xi_1, \xi_2^3, \xi_3^5, ..., \xi_n^{2n-1}, ...\right)$.

36. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор у оператора $A: l_\infty \to l_\infty$, если $Ax = \left(\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2, ...\right)$.

37. Исследовать на непрерывную обратимость оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, если $Ax(t) = \sqrt{t} x(t)$.

38. Исследовать на непрерывную обратимость оператор $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, если $Ax(t) = \sqrt{t} x(t)$.

39. Исследовать на непрерывную обратимость оператор $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, если $Ax(t) = (t^2+1)x(t)$.

40. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор у оператора $A: L_3[0,1] \to L_1[0,1]$, если $Ax(t) = x^3(t)$.

41. Исследовать на непрерывную обратимость оператор $A: D(A) \subset l_2 \to l_1$, если $Ax = \left(n\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $D(A) = \left\{x \in l_2 : Ax \in l_1\right\}$.

42. Пусть линейный оператор $A: E \to E$ нильпотентен, т.е. найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $A^n = 0$. Доказать, что операторы $I + A$ и $I - A$ обратимы. Найти их обратные и оценить их нормы.

43. Пусть дан оператор $A: l_1 \to l_\infty$, $(Ax)_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Доказать, что он не является непрерывно обратимым. Найти его ядро. Доказать, что его образ не является замкнутым множеством.

Указание: для доказательства отсутствия непрерывной обратимости рассмотреть элемент $(1,0,1,0,1,0,...,1,0,0,0,0,...) \in l_\infty$*, в котором 1 встречается* m *раз и показать, что* A^{-1} *переводит его в элемент со сколь угодно большой нормой. Для доказательства незамкнутости образа показать, что его дополнение не открыто. Рассмотреть последовательность* $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$*, показать, что она не лежит в образе, но в любой ее окрестности лежит элемент из образа вида* $(s_1, ..., s_n, \ln 2, \ln 2, ...)$.

3.2. Замкнутые операторы

Определение: пусть X,Y – линейные нормированные пространства, тогда их прямым произведением называется множество $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ с нормой $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Замечание: иногда $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \sqrt{\|x\|_X^{\ 2} + \|y\|_Y^{\ 2}}$.

Теорема (о полноте прямого произведения): пусть X,Y – банаховы пространства, тогда их прямое произведение – также банахово.

Доказательство: рассмотрим последовательность $\{z_n\} \subset X \times Y$, т.е. $z_n = (x_n, y_n)$, где $x_n \in X$, $y_n \in Y$. Пусть $\{z_n\}$ фундаментальна, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n,m > N$ $\|z_n - z_m\|_{X\times Y} < \varepsilon$ или $\|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon$, следовательно, тем более, $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ и $\|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в пространстве X, а последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна в пространстве Y. Поскольку X и Y – полные, то $\exists x \in X$: $x_n \to x$ и $\exists y \in Y$: $y_n \to y$. Обозначим $z = (x,y)$ и покажем, что $z_n \to z$. Это будет означать, что фундаментальная в $X \times Y$ последовательность имеет предел, т.е. $X \times Y$ будет полно. Поскольку $\|z_n - z\|_{X\times Y} = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y$, $\|x_n - x\|_X \to 0$ и $\|y_n - y\|_Y \to 0$, то $\|z_n - z\|_{X\times Y} \to 0$, и $z_n \to z$.

Теорема доказана.

Определение: пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$. Графиком оператора A называется множество $\Gamma_A \subset X \times Y$, которое определяется следующим образом: $\Gamma_A = \{(x,y) : x \in X, y = Ax\}$.

Теорема Банаха (о замкнутом графике): пусть X,Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор, причем $D(A) = X$, тогда, если его график замкнут, то оператор A ограничен.

Доказательство: по предыдущей теореме $X \times Y$ – банахово. График оператора A по условию замкнут, следовательно, Γ_A – также банахово по теореме о полноте замкнутого подпространства. Рассмотрим вспомогательный оператор $B : \Gamma_A \to X$, действующий по правилу $B(x,y) = x$, где $(x,y) \in \Gamma_A \subset X \times Y$. Покажем, что B – биективен.

Проверим сюръективность оператора B. Надо показать, что в любой элемент $x \in X$ при действии оператора B переходит некоторый элемент $(x,y) \in \Gamma_A$. Это очевидно, поскольку элемент (x, Ax) лежит на графике оператора A и переходит в элемент x по построению оператора B.

Проверим инъективность оператора B. Надо показать, что из условия $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ следует, что $x_1 \neq x_2$. Допустим, что это не так, т.е. $x_1 = x_2$, тогда, поскольку оператор A линеен, то $Ax_1 = Ax_2$, откуда $y_1 = y_2$ и, следовательно, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ – противоречие.

Покажем что B ограничен, т.е., что $\exists c>0$: $\|B(x,y)\|_X \le c\|(x,y)\|_{X\times Y}$. Поскольку $\|B(x,y)\|_X = \|x\|_X$, а $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$, то при $c=1$ верно неравенство $\|B(x,y)\|_X \le c\|(x,y)\|_{X\times Y}$, поскольку оно эквивалентно $\|x\|_X \le \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Итак, B – линейный ограниченный биективный оператор, переводящий банахово пространство в банахово пространство. Следовательно, у B существует обратный оператор $B^{-1}: X \to \Gamma_A$ и по теореме Банаха об обратном операторе B^{-1} ограничен, т.е. $\exists m>0$: $\|B^{-1}x\|_{X\times Y} \le m\|x\|_X$. Поскольку $B(x,Ax)=x$, то $(x,Ax)=B^{-1}x$, откуда $\|(x,Ax)\|_{X\times Y} \le m\|x\|_X$, т.е. $\|x\|_X + \|Ax\|_Y \le m\|x\|_X$, следовательно, тем более, $\|Ax\|_Y \le m\|x\|_X$, поэтому оператор A ограничен.

Теорема доказана.

Определение: пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор. Этот оператор называется замкнутым, если его график является замкнутым подмножеством в $X\times Y$.

Замечание: используя определение графика оператора и прямой суммы пространств, оператор $A: X\to Y$ назовем замкнутым, если из условий $\{x_n\}\subset D(A)$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует, что $x\in D(A)$ и $y = Ax$.

Теорема (о замкнутости ограниченного оператора): пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X\to Y$ – линейный ограниченный оператор, $D(A)=X$, тогда A – замкнут.

Доказательство: пусть $\{x_n\}\subset D(A)$, $x_n \to x\in D(A)$ и $Ax_n\to y$. Поскольку A ограничен, следовательно, он непрерывен, т.е. $Ax_n \to Ax$, тогда в силу единственности предела $Ax = y$.

Теорема доказана.

Теорема (о замкнутости обратного оператора): пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X\to Y$ – линейный замкнутый оператор, тогда, если у него существует обратный A^{-1}, то A^{-1} – замкнут.

Доказательство: пусть $\Gamma_A = \{(x,Ax): x\in D(A)\}$, $\Gamma_{A^{-1}} = \{(y,A^{-1}y): y\in D(A^{-1}) = R(A)\}$. Поскольку A замкнут, то его график Γ_A – также замкнут. Заметим, что $\Gamma_{A^{-1}} = \{(Ax,x): x\in D(A)\}$, т.е. график обратного оператора получается из графика оператора A перестановкой x и Ax, и, значит, также является замкнутым подмножеством в $Y\times X$, т.е. A^{-1} замкнут.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Доказать замкнутость оператора $A: C[0,1]\to C[0,1]$ $Ax(t) = x'(t)$ с областью определения $D(A)$ – линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0)=x(1)=0$.

Решение: рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\} \subset D(A)$ и пусть $x_n(t) \xrightarrow{C[0,1]} x(t)$, где $x(t) \in C[0,1]$, а также последовательность $Ax_n(t) = x_n'(t) \xrightarrow{C[0,1]} y(t)$, где $y(t) \in C[0,1]$. Поскольку сходимость по норме пространства $C[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости, то на $[0,1]$ $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ и $x_n'(t) \rightrightarrows y(t)$. Тем самым, выполнены все условия теорем о непрерывности и дифференцируемости предельной функции, согласно которым функция $x(t)$ является непрерывно дифференцируемой на $[0,1]$ и на $[0,1]$ $x'(t) = y(t)$. Поскольку $x_n(0) = x_n(1) = 0$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $x(0) = x(1) = 0$, т.е. $x(t) \in D(A)$ и при этом $y = Ax$, т.е., по определению, оператор A замкнут.

2. Пусть $A: X \to Y$ – линейный оператор, $\overline{D(A)} = X$. Доказать, что сопряженный оператор A^* замкнут.

Решение: из примера 7 п. 2.7 следует, что сопряженный оператор определен. Пусть $f_n \in D(A^*)$ и $f_n \to f_0$, а $A^* f_n \to \varphi_0$ (обе сходимости понимаются в смысле сходимости по норме соответствующем пространстве). Тогда $\forall x \in D(A)$ получаем, что $A^* f_n(x) \to \varphi_0(x)$, откуда $f_n(Ax) \to \varphi_0(x)$. С другой стороны, $f_n(Ax) \to f_0(Ax)$. Таким образом, $f_0(Ax) = \varphi_0(x)$, откуда $A^* f_0(x) = \varphi_0(x)$, т.е. $f_0 \in D(A^*)$ и $A^* f_0 = \varphi_0$ (в силу плотности $D(A)$ в X, см. пример 4 п. 2.3). Таким образом, оператор A^* замкнут.

3. Рассмотрим оператор $A: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий по правилу $Ax(t) = tx(t)$ и имеющий область определения $D(A) = \{x \in L_2(\mathbb{R}) : tx(t) \in L_2(\mathbb{R})\}$. Доказать, что оператор неограничен на $D(A)$ и что $\overline{D(A)} = L_2(\mathbb{R})$. Найти сопряженный оператор A^*. Является ли A замкнутым?

Решение: рассмотрим последовательность $x_n(t) = \frac{1}{t}\chi_{[1,n]}(t) \in D(A)$. Ясно, что $\|x_n\| \le 1$, но при этом $\|Ax_n\| = n \to \infty$, поэтому оператор неограничен. Далее, очевидно, что $D(A)$ содержит множество непрерывных финитных функций, которое всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$ (см. задачу 24 п. 2.10 части I). Тем самым, $\overline{D(A)} = L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, сопряженный оператор A^* определен. Для его нахождения надо описать все пары функций $y(t) \in L_2(\mathbb{R})$ и $A^* y(t) \in L_2(\mathbb{R})$, которые удовлетворяют равенству $(Ax, y) = (x, A^* y)$ при всех $x(t) \in D(A)$. Имеем, $\int\limits_{\mathbb{R}} tx(t)\overline{y(t)}dt = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\overline{A^* y(t)}dt$ или $\int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\overline{\left(ty(t) - A^* y(t)\right)}dt = 0$. Поскольку множество $D(A)$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то $ty(t) - A^* y(t) = 0$. Тем самым, $A^* y(t) = ty(t)$ и $D(A^*) = \{y \in L_2(\mathbb{R}) : ty(t) \in L_2(\mathbb{R})\}$. В силу того, что $A^* = A$, из предыдущего примера заключаем, что оператор A замкнут.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если X, Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор и существует обратный оператор A^{-1}, то A^{-1} – замкнут.

2. Доказать усиленный вариант теоремы Банаха об обратном операторе: пусть X, Y – банаховы пространства, $A: X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, отображающий X на Y взаимно однозначно, тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

Указание: воспользоваться теоремой Банаха о замкнутом графике.

3. Рассмотрим диагональный оператор $A: l_2 \to l_2$, действующий по формуле $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \lambda_3\xi_3, ...)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) \in l_2$. Доказать, что оператор замкнут при условии, что последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена.

4. Показать, что если последовательность $\{\lambda_k\}$ из предыдущей задачи неограничена, то оператор A не является ограниченным и при этом $D(A) \neq l_2$. Найти в этом случае область определения оператора A.

5. При каком условии на последовательность $\{\lambda_k\}$ из задачи 3 оператор A имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве l_2?

6. При каком условии на последовательность $\{\lambda_k\}$ из задачи 3 оператор A замкнут, если считать, что $\{\lambda_k\}$ неограничена?

Указание: воспользоваться предыдущей задачей и теоремой о замкнутости обратного оператора.

7. Пусть $X = Y = C[0, +\infty)$ – банахово пространство функций $x(t)$, непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0, +\infty)} |x(t)|$. Найти область определения оператора $A: X \to Y$, действующего по формуле $Ax(t) = tx(t)$, и доказать, что этот оператор не является ограниченным на своей области определения.

Указание: показать, что областью определения оператора являются функции $x(t)$, удовлетворяющие неравенству $|x(t)| \le \dfrac{c_x}{1+t}$, где постоянная c_x – своя для каждой функции $x(t)$. Рассмотреть последовательность $x_n(t) = \dfrac{n}{n+t}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Показать, что оператор A из предыдущей задачи замкнут.

Указание: используя определение замкнутости показать, что $(1+t)x_n(t) \to x(t) + y(t)$, откуда, используя определение предела, вывести, что $\forall t \in [0, +\infty)$ $x_n(t) \to \dfrac{x(t) + y(t)}{1+t}$.

9. Найти обратный оператор к оператору A из задачи 7, показать, что он неограничен и замкнут.

10. Доказать, что оператор $A:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$, действующий по формуле $Ax(t)=x'(t)$ с областью определения, состоящей из всех непрерывно дифференцируемых на $\left[a,b\right]$ функций, удовлетворяющих условию $x(a)=0$, является замкнутым.

Указание: доказать, что A – непрерывно обратим и воспользоваться теоремами о замкнутости ограниченного оператора и о замкнутости обратного оператора.

11. Доказать, что оператор $A:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$, действующий по формуле $Ax(t)=x'(t)$ с областью определения, состоящей из всех непрерывно дифференцируемых на $\left[a,b\right]$ функций, является замкнутым.

12. В примере 1 рассмотрен оператор дифференцирования, который, как было показано ранее, не является ограниченным, но при этом является замкнутым. Какое условие теоремы Банаха о замкнутом графике для данного оператора не выполняется?

13. Пусть оператор $A:L_2\left[0,1\right]\to L_2\left[0,1\right]$ действует по формуле $Ax(t)=tx(0)$. Область определения оператора – линейное многообразие непрерывных на отрезке $\left[0,1\right]$ функций. Найти область определения сопряженного оператора A^*, сам оператор A^*, а также доказать, что оператор A не является замкнутым.

Указание: $A^*=0$, $D(A^*)=\left\{y\in L_2\left[0,1\right]:\int\limits_0^1 ty(t)dt=0\right\}$. *Из определения сопряженного оператора получить, что функция $A^*y(t)$ ортогональна функциям $x_n(t)=t^n, n\in\mathbb{N}$. Показать, что $A^*y(t)$ ортогональна функции $x(t)=1$, рассмотрев последовательность* $x_n(t)=\begin{cases} nt, 0\le t\le \dfrac{1}{n} \\ 1, \dfrac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$. *Для доказательства не замкнутости рассмотреть последовательность* $x_n(t)=\begin{cases} 1-nt, 0\le t\le \dfrac{1}{n} \\ 0, \dfrac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$.

14. В пространстве l_2 рассмотрим оператор $A:l_2\to l_2$, $Ax=(\xi_1,2\xi_2,3\xi_3,...)$ с областью определения $D(A)=\left\{x\in l_2:\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left|\xi_n\right|^2<+\infty\right\}$. Доказать, что $\overline{D(A)}=l_2$, A – неограниченный линейный оператор на $D(A)$, найти A^* и $D(A^*)$, исследовать замкнутость A.

Указание: для проверки условия $\overline{D(A)}=l_2$ вспомнить, какие плотные множества бывают в l_2.

15. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_1$, $Ax = x$ с областью определения $D(A) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < +\infty \right\}$. Доказать, что $\overline{D(A)} = l_2$, A – неограниченный линейный оператор на $D(A)$, найти A^* и $D(A^*)$, исследовать замкнутость A.

Указание: $A^* : l_\infty \to l_2$, $D(A^*) = \left\{ x \in l_\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < +\infty \right\}$, $A^* x = x$.

16. Рассмотрим оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$ с областью определения $D(A) = \left\{ x \in L_2[0,1] : \int_0^1 x^2(t^2)\,dt < +\infty \right\}$. Доказать, что $\overline{D(A)} = L_2[0,1]$, A – неограниченный линейный оператор на $D(A)$, найти A^* и $D(A^*)$, исследовать замкнутость A.

Указание: $D(A^*) = \left\{ x \in L_2[0,1] : \int_0^1 \frac{x^2(t)}{t}\,dt < +\infty \right\}$, $A^* x(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$.

3.3. Резольвентное множество и спектр оператора

Определение: пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$. Точка λ называется точкой резольвентного множества оператора A, если существует ограниченный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, определенный на всем пространстве X. При этом сам оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ называется резольвентой оператора A и обозначается $R_\lambda(A)$.

Замечание: такие числа λ называются регулярными. Резольвентное множество обозначается $\rho(A)$.

Определение: пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$. Точка λ называется точкой спектра оператора A, если она не является точкой резольвентного множества.

Замечание: таким образом, резольвентное множество – это дополнение к спектру, а спектр – дополнение к резольвентному множеству. Спектр обозначается $\sigma(A)$.

Теорема (свойства спектра и резольвентного множества): пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда:

1. резольвентное множество $\rho(A)$ всегда открыто.
2. спектр $\sigma(A)$ всегда замкнут.
3. спектр $\sigma(A)$ всегда ограничен.

Замечание: таким образом, спектр линейного ограниченного оператора является компактным множеством.

Доказательство: 1. Надо доказать, что любая точка лежит в $\rho(A)$ вместе со своей окрестностью. Допустим, что $\lambda_0 \in \rho(A)$. Найдем число $\delta \in \mathbb{R}$ таким образом, чтобы окрестность $U_\delta(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ целиком лежала в $\rho(A)$. Поскольку $\lambda_0 \in \rho(A)$, то оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1}$ ограничен, а надо доказать, что $\exists \delta \in \mathbb{R}$: $\forall \lambda \in U_\delta(\lambda_0)$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ – также ограничен. Имеем,

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = (A-\lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda) I = (A-\lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I = (A-\lambda_0 I) -$$

$$-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)(A-\lambda_0 I)^{-1} = (A-\lambda_0 I)\left(I - \underbrace{(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}}_{B} \right) = (A-\lambda_0 I)(I-B).$$

Оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1}$ ограничен. По теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному, для ограниченности оператора $(I-B)^{-1}$ достаточно, чтобы $\|B\| < 1$. Тогда будет существовать ограниченный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ (как произведение обратимых ограниченных операторов – см. задачу 4 п. 3.1 и теорему об ограниченности произведения операторов п. 1.2).

Итак, $\|B\| = |\lambda-\lambda_0| \cdot \left\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\| < \delta \left\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\| = 1$ при выборе $\delta = \dfrac{1}{\left\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\right\|}$.

2. Поскольку спектр – это дополнение к резольвентному множеству, а резольвентное множество открыто, то спектр замкнут.

3. Покажем, что спектр оператора A ограничен числом $\|A\|$, т.е. числа $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что $|\lambda| > \|A\|$ спектру не принадлежат (т.е. принадлежат резольвентному множеству).

Итак, надо доказать, что при $|\lambda| > \|A\|$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Заметим, что при $|\lambda| > \|A\|$ имеем $\lambda \neq 0$, тогда $(A - \lambda I) = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$, поэтому достаточно доказать, что оператор $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$ ограничен. По теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному, это действительно так, поскольку $\left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < \frac{|\lambda|}{|\lambda|} = 1$.

Теорема доказана.

Замечание: если оператор A ограничен, то из п. 3 доказанной теоремы следует, что резольвентное множество $\rho(A)$ неограничено, а спектр $\sigma(A)$ целиком лежит в круге $|\lambda| \leq \|A\|$.

Замечание: если $\lambda \in \sigma(A)$, то возможны следующие три случая:

1. оператор $(A - \lambda I)$ не обратим;

2. оператор $(A - \lambda I)$ обратим, но его область значений $R(A - \lambda I) \neq X$;

3. оператор $(A - \lambda I)$ обратим, $R(A - \lambda I) = X$, но обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен.

Отметим, что если $D(A) = X$ и A – ограничен, то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что случай 3 невозможен.

Определение: пусть X – комплексное линейное пространство, тогда собственным значением линейного оператора $A: X \to X$ называется число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\exists x \in X \setminus \{0\}$, для которого $Ax = \lambda x$. Вектор x в этом случае называется собственным вектором оператора A.

Замечание: ясно, что уравнение $Ax = \lambda x$ эквивалентно уравнению $(A - \lambda I)x = 0$ и в этом случае $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, т.е. оператор $(A - \lambda I)$ не обратим.

Определение: совокупность собственных значений оператора A называется его точечным спектром и обозначается $\sigma_p(A)$.

Определение: точка спектра ограниченного оператора $A: X \to X$, не являющаяся его собственным значением, называется точкой непрерывного спектра оператора A, если $R(A - \lambda I) \neq X$, но $\overline{R(A - \lambda I)} = X$, т.е. множество $R(A - \lambda I)$ всюду плотно в X. Совокупность точек непрерывного спектра оператора A обозначается $\sigma_c(A)$.

Замечание: отметим, что $R(A-\lambda I)=D\left((A-\lambda I)^{-1}\right)$.

Определение: точка спектра ограниченного оператора $A: X \to X$, не являющаяся его собственным значением, называется точкой остаточного спектра оператора A, если $\overline{R(A-\lambda I)} \neq X$. Совокупность точек остаточного спектра оператора A обозначается $\sigma_r(A)$.

Замечание: таким образом, спектр ограниченного оператора A обладает свойствами: $\sigma(A)=\sigma_p(A)\bigcup\sigma_c(A)\bigcup\sigma_r(A)$, причем $\sigma_p(A)\bigcap\sigma_c(A)=\varnothing$, $\sigma_c(A)\bigcap\sigma_r(A)=\varnothing$ и $\sigma_p(A)\bigcap\sigma_r(A)=\varnothing$.

Определение: пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда число $r_\sigma(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}$ называется спектральным радиусом оператора A.

Теорема (о спектральном радиусе): пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда его спектральный радиус существует и $\inf\limits_{n\geq 1}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}=r_\sigma(A)\leq\|A\|$.

Доказательство: поскольку последовательность $\left\{\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}\right\}$ – непустое множество, которое ограничено снизу нулем, то $\exists\inf\limits_{n\geq 1}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}=r$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}\geq r$ и по свойству точной нижней грани $\forall\varepsilon>0$ $\exists m\in\mathbb{N}$: $\sqrt[m]{\left\|A^m\right\|}<r+\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\left\|A^m\right\|<\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^m$. Зафиксируем число m. Поскольку всякое натуральное число n можно однозначно представить в виде $n=p_n m+q_n$, где p_n, q_n – натуральные, при этом $0\leq q_n\leq m-1$, то $\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}=\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}}=\left\|A^{p_n m+q_n}\right\|^{\frac{1}{n}}=\left\|A^{p_n m}\cdot A^{q_n}\right\|^{\frac{1}{n}}\leq$
$\leq\left\|A^{p_n m}\right\|^{\frac{1}{n}}\cdot\left\|A^{q_n}\right\|^{\frac{1}{n}}\leq\left\|A^m\right\|^{\frac{p_n}{n}}\cdot\|A\|^{\frac{q_n}{n}}<\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{mp_n}{n}}\cdot\|A\|^{\frac{q_n}{n}}$.

Заметим, что $0\leq\dfrac{q_n}{n}\leq\dfrac{m-1}{n}$, тогда при $n\to\infty$ получаем, что $\dfrac{q_n}{n}\to 0$, а $\dfrac{mp_n}{n}=\dfrac{n-q_n}{n}=1-\dfrac{q_n}{n}\to 1$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{mp_n}{n}}\cdot\|A\|^{\frac{q_n}{n}}=r+\dfrac{\varepsilon}{2}$ и по определению предела для $\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $\left|\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{mp_n}{n}}\cdot\|A\|^{\frac{q_n}{n}}-\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда $\left(r+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{mp_n}{n}}\cdot\|A\|^{\frac{q_n}{n}}<\varepsilon+r$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \ r \le \sqrt[n]{\|A^n\|} < \varepsilon + r$, откуда $0 \le \sqrt[n]{\|A^n\|} - r < \varepsilon$, т.е., по определению предела последовательности получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r$, откуда $r_\sigma(A) = r$. Наконец, $r \le \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$.

Теорема доказана.

Теорема (усиленная обратимость оператора, близкого к тождественному): пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Если $r_\sigma(A) < 1$, то оператор $(I - A)^{-1}$ ограничен, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится абсолютно. Если $r_\sigma(A) > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ расходится.

Доказательство: воспользуемся признаком Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с неотрицательными членами: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$. В силу предыдущей теоремы существует предел $r_\sigma(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$, тогда при $r_\sigma(A) < 1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ сходится, а, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится абсолютно. Если обозначить $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$, то, аналогично теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному, убеждаемся, что S является правым обратным и левым обратным оператором к оператору $(I - A)$. При этом оператор $(I - A)^{-1}$ ограничен, поскольку $\|S\| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \text{const}$.

Пусть $r_\sigma(A) > 1$. Поскольку $r_\sigma(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$ то по теореме об устойчивости строгого неравенства $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall m > N\ \ \sqrt[m]{\|A^m\|} > 1$, откуда $\|A^m\| > 1$. Итак, у последовательности $\left\{\|A^k\|\right\}$ нашли подпоследовательность $\left(\|A^m\|\right)_{m=N}^{\infty}$, которая не может сходиться к нулю, поэтому и сама последовательность $\left\{\|A^k\|\right\}$ не может сходиться к нулю. Таким образом, не выполнено необходимое условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.

Теорема доказана.

Теорема (о резольвентном множестве): пусть X – комплексное банахово пространство, $A: X \to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Доказательство: рассмотрим ряд $-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}A^k$ и пусть $|\lambda|>r_\sigma(A)$, тогда

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left\|\lambda^{-k-1}A^k\right\|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\lambda^{-k-1}\right|\left\|A^k\right\|}=\left|\lambda^{-1}\right|\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\left\|A^k\right\|}{|\lambda|}}=\left|\lambda^{-1}\right|\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{\left\|A^k\right\|}}{|\lambda|^{\frac{1}{k}}}=|\lambda|^{-1}r_\sigma(A)<1.$$

По признаку Коши ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\lambda^{-k-1}A^k\right\|$ сходится, следовательно, ряд $-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}A^k$ сходится абсолютно. Пусть $S(\lambda)=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}A^k$, тогда

$$S(\lambda)(A-\lambda I)=(-\lambda^{-1}-\lambda^{-2}A-\lambda^{-3}A^2-\ldots)(A-\lambda I)=$$
$$=(-\lambda^{-1}A-\lambda^{-2}A^2-\lambda^{-3}A^3-\ldots)+(I+\lambda^{-1}A+\lambda^{-2}A^2+\ldots)=I.$$

Аналогично показывается, что $(A-\lambda I)S(\lambda)=I$, т.е. $S(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$, причем оператор $S(\lambda)$ ограничен, следовательно, оператор $(A-\lambda I)$ непрерывно обратим, т.е. $\lambda\in\rho(A)$.

Теорема доказана.

Замечание: из доказанной теоремы следует, что спектр $\sigma(A)$ линейного ограниченного оператора A целиком содержится в круге $|\lambda|\le r_\sigma(A)$. Используя теорию функций комплексной переменной, можно доказать, что число $r_\sigma(A)$ не может быть меньшим, чем расстояние от начала координат до ближайшей особой точки резольвенты, причем $r_\sigma(A)$ является радиусом наименьшего круга с центром в начале координат, содержащего весь спектр оператора.

Теорема (о спектре): пусть X – комплексное банахово пространство, $A:X\to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда $\sigma(A)\ne\varnothing$.

Доказательство: предположим, что $\sigma(A)=\varnothing$, т.е. любое значение $\lambda\in\mathbb{C}$ является регулярным для оператора A. Определим при всех $\lambda\in\mathbb{C}$ операторнозначную функцию $R(\lambda)=R_\lambda(A)$. Поскольку $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ справедливо тождество Гильберта (см. задачу 14) $R(\lambda)-R(\mu)=(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)$ и операторы $R(\lambda)$ и $R(\mu)$ ограничены, то функция $R(\lambda)$ непрерывна во всем $\mathbb{C}$. Но тогда она дифференцируема в $\mathbb{C}$, поскольку

$$R'(\lambda)=\lim_{h\to0}\frac{R(\lambda+h)-R(\lambda)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(\lambda+h-\lambda)R(\lambda+h)R(\lambda)}{h}=R^2(\lambda).$$

Далее, при $|\lambda|>\|A\|$ $R(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}$, и, по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному, оператор $\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}$ ограничен, поэтому $R(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{\to}0$.

Рассмотрим произвольный функционал $\varphi\in X^*$ и пусть $f(\lambda)=\varphi(R(\lambda)x)$. Ясно, что эта функция непрерывна в $\mathbb{C}$ и дифференцируема в $\mathbb{C}$, поскольку

$$f'(\lambda)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(R(\lambda+h)x)-\varphi(R(\lambda)x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\varphi\left(\frac{R(\lambda+h)x-R(\lambda)x}{h}\right)=\varphi(R^2(\lambda)x).$$

Кроме того, из полученного равенства следует, что $f'(\lambda)$ сама непрерывна, поэтому $f(\lambda)$ – регулярна в $\mathbb{C}$. Поскольку $f(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{\to}0$, то $f(\lambda)$ ограничена в $\overline{\mathbb{C}}$. По теореме Лиувилля $f(\lambda)\equiv\text{const}$, но, поскольку $f(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{\to}0$, то $f(\lambda)\equiv 0$. Отсюда следует, что $\forall\varphi\in X^*$. $\varphi(R(\lambda)x)=0$. По теореме о вычислении нормы вектора с помощью функционала $\forall x\in X\ \ R(\lambda)x=0$, т.е. $R(\lambda)=0$. Это невозможно, поскольку нулевой оператор не может быть ничьим обратным.

Теорема доказана.

Замечание: пусть линейный ограниченный оператор $A:X\to Y$ – непрерывно обратим. Тогда существуют ограниченные операторы $A^*:Y^*\to X^*$ и $(A^{-1})^*:X^*\to Y^*$, причем по определению сопряженного оператора $(A^{-1})^*$ определен на всем пространстве X^*. В силу примера 8 п. 3.1 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$, откуда следует, что оператор A^* имеет ограниченный обратный и $\operatorname{Im}A^*=X^*$, т.е. A^* – непрерывно обратим. Таким образом, $\sigma(A^*)\subset\sigma(A)$.

Теорема (о двойственности спектров): пусть X – комплексное банахово пространство, $A:X\to X$ – линейный ограниченный оператор, тогда:

1. $\sigma_p(A)\subset\sigma_p(A^*)\cup\sigma_r(A^*)$; $\sigma_c(A)\subset\sigma_c(A^*)\cup\sigma_r(A^*)$; $\sigma_r(A)\subset\sigma_p(A^*)$;
2. $\sigma_p(A^*)\subset\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A)$; $\sigma_c(A^*)\subset\sigma_c(A)$; $\sigma_r(A^*)\subset\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)$;
3. если X рефлексивно, то $\sigma_r(A^*)\subset\sigma_p(A)$; $\sigma_c(A^*)=\sigma_c(A)$.

Доказательство: 1. Пусть $T=A-\lambda I$ и $\lambda\in\sigma_p(A)$, тогда $\ker T\neq\{0\}$. По теореме о двойственности $^\perp(\operatorname{Im}T^*)\neq\{0\}$. Допустим, что $\overline{\operatorname{Im}T^*}=X^*$, тогда $^\perp(\operatorname{Im}T^*)={}^\perp X^*=\{0\}$ – противоречие. Тем самым, $\overline{\operatorname{Im}T^*}\neq X^*$, т.е. $\lambda\notin\sigma_c(A^*)$. Если при этом $\lambda\notin\sigma(A^*)$, то, в частности, $\operatorname{Im}T^*=X^*$, откуда следует, что $X^*\subset(\ker T)^\perp$. Поскольку обратное включение очевидно, то $X^*=(\ker T)^\perp$, поэтому $\{0\}={}^\perp X^*={}^\perp((\ker T)^\perp)=\ker T$, откуда $\lambda\notin\sigma_p(A)$ – противоречие. Таким образом, $\lambda\in\sigma_p(A^*)\cup\sigma_r(A^*)$.

Пусть $\lambda\in\sigma_c(A)$, тогда $\overline{\operatorname{Im}T}=X$, поэтому $(\operatorname{Im}T)^\perp=\{0\}=\ker T^*$, откуда $\lambda\notin\sigma_p(A^*)$. Если $\lambda\notin\sigma(A^*)$, то $\operatorname{Im}T^*=X^*$. В этом случае оператор T^* биективен и непрерывно обратим по теореме Банаха. Следовательно, оператор T^{**} – непрерывно обратим, т.е. $\forall x\in X^{**}\ \ \|T^{**}x\|\geq c\|x\|$, $c>0$. Поскольку $T=T^{**}\big|_X$, то $\forall x\in X\ \ \|Tx\|\geq c\|x\|$, откуда следует инъективность и замкнутость образа оператора T (см. пример 5 б). Поскольку $\overline{\mathrm{Im}T} = X$, то $\mathrm{Im}T = X$, что противоречит условию $\lambda \in \sigma_c(A)$. Таким образом, $\lambda \in \sigma_c(A^*) \bigcup \sigma_r(A^*)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$, тогда $\overline{\mathrm{Im}T} \neq X$, $(\mathrm{Im}T)^{\perp} \neq \{0\}$, $\ker T^* \neq \{0\}$ и $\lambda \in \sigma_p(A^*)$.

Попутно всеми этими включениями доказано включение $\sigma(A) \subset \sigma(A^*)$.

2. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A^*)$, тогда $\ker T^* \neq \{0\}$, $(\mathrm{Im}T)^{\perp} \neq \{0\}$, $\overline{\mathrm{Im}T} \neq X$, $\lambda \notin \sigma_c(A)$, поэтому, учитывая, что $\sigma(A^*) \subset \sigma(A)$, получаем, что $\lambda \in \sigma_p(A) \bigcup \sigma_r(A)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A^*)$, тогда $\overline{\mathrm{Im}T^*} = X^*$, $X^* \subset (\ker T)^{\perp}$. Поскольку обратное включение очевидно, то $X^* = (\ker T)^{\perp}$, $\{0\} = {}^{\perp}X^* = {}^{\perp}((\ker T)^{\perp}) = \ker T$, откуда $\lambda \notin \sigma_p(A)$. В силу п. 1, если бы $\lambda \in \sigma_r(A)$, то имели бы $\lambda \in \sigma_p(A^*)$ – противоречие. Таким образом, $\lambda \in \sigma_c(A)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(A^*)$. Если бы $\lambda \in \sigma_r(A)$, то, в силу п. 1 $\lambda \in \sigma_p(A^*)$ – противоречие. Тем самым, $\lambda \in \sigma_p(A) \bigcup \sigma_c(A)$.

3. Пусть $\lambda \in \sigma_r(A^*)$, т.е. $\overline{\mathrm{Im}T^*} \neq X^*$, поэтому ${}^{\perp}\left(\overline{\mathrm{Im}T^*}\right) \neq \{0\}$, $\ker T \neq \{0\}$, $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$, тогда, в силу п. 1 $\lambda \in \sigma_c(A^*) \bigcup \sigma_r(A^*)$. При этом, если бы $\lambda \in \sigma_r(A^*)$, то, по уже доказанному, было бы $\lambda \in \sigma_p(A)$ – противоречие. Таким образом, $\lambda \in \sigma_c(A^*)$. Поскольку включение $\sigma_c(A^*) \subset \sigma_c(A)$ уже было доказано в п. 2, то $\sigma_c(A^*) = \sigma_c(A)$.

Теорема доказана.

Замечание: попутно доказали, что $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Замечание: аналогично можно доказать, что, если $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор, то:

1. $\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}$;
2. если $\lambda \in \sigma_r(A)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$;
3. если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ или $\overline{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$;
4. $\sigma_c(A^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(A)\right\}$.

Сопряженные операторы тут понимаются в смысле гильбертовых сопряженных.

Определение: пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Операторы $A: X \to X$ и $B: Y \to Y$ называются слабо изометрически эквивалентными, если существуют изометрические изоморфизмы $U_1, U_2 : X \to Y$ такие, что $U_1 A = B U_2$. В случае, если $U_1 = U_2$, операторы A и B называются изометрически эквивалентными.

Замечание: очевидно, что, если операторы A и B изометрически эквивалентны, то $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ операторы $A-\lambda I$ и $B-\lambda I$ также изометрически эквивалентны.

Теорема (об инвариантности спектра): пусть X – банахово пространство, линейные ограниченные операторы $A: X\to X$ и $B: Y\to Y$ таковы, что при $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ операторы $T=A-\lambda I$ и $S=B-\mu I$ слабо изометрически эквивалентны, тогда $\lambda\in\sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $\mu\in\sigma(B)$.

Доказательство: 1. Пусть $\lambda\in\sigma_p(A)$, т.е. $\exists x\neq 0$: $Tx=0$. Тогда $U_1Tx=0$, откуда $SU_2x=0$. Поскольку $x\neq 0$, то $y=U_2x\neq 0$, поэтому $\mu\in\sigma_p(B)$. Для доказательства обратного включения рассуждения можно повторить, если учесть, что $TU_2^{-1}=U_1^{-1}S$.

2. Пусть $\lambda\in\sigma_c(A)$, т.е. $\exists T^{-1}$, $\mathrm{Im}T\neq X$ и $\overline{\mathrm{Im}T}=X$. Поскольку $U_1T=SU_2$, то $I=SU_2T^{-1}U_1^{-1}$, $I=U_2T^{-1}U_1^{-1}S$, таким образом, $\exists S^{-1}$. Далее, т.к. $\mathrm{Im}T\neq X$, то $\exists x\in X$: $Tx\notin X$. В силу взаимной однозначности U_1 получаем, что $U_1Tx\notin Y$, откуда $SU_2x\notin Y$. Таким образом, нашли $y=U_2x\in Y$ такой, что $Sy\notin Y$, откуда следует, что $\mathrm{Im}S\neq Y$. Пусть теперь $\overline{\mathrm{Im}T}=X$, т.е. $\forall x\in X$ $\exists Tx_n\in\mathrm{Im}T$ ($x_n\in X$): $Tx_n\to x$. Тогда $U_1Tx_n\to U_1x=y\in Y$, $SU_2x_n\to y$, т.е. $\forall y\in Y$ $\exists y_n=U_2x_n\in Y$: $Sy_n\to y$, поэтому $\overline{\mathrm{Im}S}=Y$ и $\mu\in\sigma_c(B)$. Обратное включение обосновывается также, как и в п. 1.

3. Пусть $\lambda\in\sigma_r(A)$, тогда в силу п.п. 1,2, $\mu\notin\sigma_p(B)$ и $\mu\notin\sigma_c(B)$. Допустим, что $\mu\notin\sigma(B)$, т.е., в частности, $\mathrm{Im}S=Y$. Это означает, что $\forall y\in Y$ $\exists u\in Y$: $Su=y$. Тогда $U_1^{-1}Su=U_1^{-1}y=x\in X$, $TU_2^{-1}u=x$. В силу произвольности y и взаимной однозначности U_1^{-1} вектор $x\in X$ произволен и для него нашли вектор $U_2^{-1}u=v\in X$ такой, что $Tv=x$. Таким образом, $\mathrm{Im}T=X$, что противоречит условию $\lambda\in\sigma_r(A)$. Тогда $\mu\in\sigma_r(B)$. Аналогично $\mu\in\sigma_r(B)\Rightarrow\lambda\in\sigma_r(A)$.

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Пусть X – комплексное линейное нормированное пространство, $A: X\to X$ – линейный ограниченный оператор. Доказать, что, если оператор A^2 имеет собственный вектор, то A также имеет собственный вектор.

Решение: пусть $\lambda\in\mathbb{C}$ – собственное значение оператора A^2, а $x\in X$ – соответствующий ему собственный вектор. Тогда $A^2x=\lambda x$, откуда $(A^2-\lambda I)x=0$, т.е. $(A-\sqrt{\lambda}I)(A+\sqrt{\lambda}I)x=0$. Если $(A+\sqrt{\lambda}I)x=0$, т.е. $Ax=-\sqrt{\lambda}x$, то $x\in X$ – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению $-\sqrt{\lambda}$. Если $y=(A+\sqrt{\lambda}I)x\neq 0$, то $(A-\sqrt{\lambda}I)y=0$, откуда $Ay=\sqrt{\lambda}y$, т.е. $y\in X$ – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению $\sqrt{\lambda}$.

2. В вещественном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найти собственные векторы и собственные значения оператора $Ax(t)=x(-t)$.

Решение: надо описать все те вещественные числа λ, для которых уравнение $Ax=\lambda x$, т.е. $x(-t)=\lambda x(t)$ имеет нетривиальное решение в пространстве $C[-\pi,\pi]$. При $\lambda=1$ этому уравнению удовлетворяет каждая четная функция, а при $\lambda=-1$ – каждая нечетная. Покажем, что других собственных значений оператор A не имеет. Пусть $\lambda_0\neq\pm1$ – другое собственное значение оператора A и $x_0(t)\not\equiv 0$ – соответствующая ему собственная функция. Тогда $x_0(-t)=\lambda_0 x_0(t)$ для всех $t\in[-\pi,\pi]$. Тогда, заменяя t на $-t$, получаем, что $x_0(t)=\lambda_0 x_0(-t)$, где $t\in[-\pi,\pi]$ и, поскольку $x_0(-t)=\lambda_0 x_0(t)$, то для всех $t\in[-\pi,\pi]$ $x_0(t)=\lambda_0{}^2 x_0(t)$. Это равенство невозможно, поскольку $x_0(t)\not\equiv 0$ и $\lambda_0\neq\pm1$.

3. В вещественном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найти собственные векторы и собственные значения оператора $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)x(s)ds$.

Решение: надо описать все те вещественные числа λ, для которых уравнение $Ax=\lambda x$, т.е. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)x(s)ds=\lambda x(t)$ имеет нетривиальное решение в пространстве $C[-\pi,\pi]$. Для этого заметим, что $\sin(t+s)=\sin t\cos s+\cos t\sin s$ и перепишем уравнение в виде $\sin t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos s x(s)ds+\cos t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin s x(s)ds=\lambda x(t)$. Из вида этого уравнения следует, что при $\lambda\neq0$ его решение необходимо искать в виде $x(t)=A\sin t+B\cos t$, где $A,B=\mathrm{const}$. Подставим этот вид решения в исходное уравнение и получим:

$$\sin t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos s(A\sin s+B\cos s)ds+\cos t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin s(A\sin s+B\cos s)ds=\lambda(A\sin t+B\cos t).$$

Далее, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos s\sin s ds=0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 s ds=\pi$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 s ds=\pi$. Таким образом, уравнение приходит к виду $B\pi\sin t+A\pi\cos t=\lambda A\sin t+\lambda B\cos t$. Поскольку функции $\sin t$ и $\cos t$ линейно независимы на $[-\pi,\pi]$, то получаем систему: $\begin{cases}B\pi-\lambda A=0\\ A\pi-\lambda B=0\end{cases}$. Поскольку собственная функция $x(t)=A\sin t+B\cos t$ должна быть отлична от нуля, то числа A и B не должны одновременно обращаться в 0. Следовательно, полученная однородная система должна иметь нетривиальное решение. Это возможно только в том случае, когда ее определитель равен нулю, т.е. $\begin{vmatrix}-\lambda & \pi\\ \pi & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\pi^2=0$, откуда $\lambda=\pm\pi$. При $\lambda_1=\pi$ получаем, что $A=B\neq0$ и собственный вектор исходного оператора в данном случае имеет вид $x(t)=A(\sin t+\cos t)$. При $\lambda_2=-\pi$ получаем, что $A=-B\neq 0$ и собственный вектор исходного оператора имеет вид $x(t)=A(\sin t-\cos t)$.

Проверим, является ли число $\lambda_3=0$ собственным значением оператора A. Для этого рассмотрим уравнение $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)x(s)ds=0$ и выясним, имеет ли оно нетривиальные решения в пространстве $C[-\pi,\pi]$. Перепишем уравнение в виде $\sin t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds+\cos t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0$, тогда, поскольку на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $\sin t$ и $\cos t$ линейно независимы, то это уравнение равносильно двум: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos sx(s)ds=0$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin sx(s)ds=0$. Таким образом, собственными функциями в этом случае будут все те непрерывные на отрезке $[-\pi,\pi]$ ненулевые функции $x(t)$, которые ортогональны (в смысле гильбертова пространства $L_2[-\pi,\pi]$) функциям $\sin t$ и $\cos t$, например, это могут быть функции $x_n(t)=\sin nt$, $n=2,3,\ldots$ или $x_n(t)=\cos nt$, $n=0,2,3,\ldots$

4. Пусть $Ax(t)=x(0)+tx(1)$, $A:C[0,1]\to C[0,1]$. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r_\sigma(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$.

Решение: ясно, что оператор A линеен. Проверим его ограниченность:

$$\|Ax\|=\sup_{t\in[0,1]}|x(0)+tx(1)|\le\sup_{t\in[0,1]}\left(\underset{\|x\|}{\underset{\wedge\backslash}{|x(0)|}}+|t|\underset{\|x\|}{\underset{\wedge\backslash}{|x(1)|}}\right)\le\|x\|\sup_{t\in[0,1]}(1+t)=2\|x\|,$$

следовательно, оператор A ограничен.

Для определения спектра $\sigma(A)$ и резольвентного множества $\rho(A)$ найдем сначала собственные значения оператора A, т.е. найдем такие λ, что уравнение $Ax=\lambda x$ или $x(0)+tx(1)=\lambda x(t)$ имеет нетривиальные решения в пространстве $C[0,1]$. Из вида уравнения следует, что при $\lambda\neq 0$ собственная функция $x(t)$ должна иметь вид $x(t)=\alpha+\beta t$. Подставляя этот вид в исходное уравнение, получаем: $\alpha+t(\alpha+\beta)=\lambda(\alpha+\beta t)$. Поскольку на отрезке $[0,1]$ функции 1 и t линейно независимы, то получаем систему $\begin{cases}\alpha-\lambda\alpha=0\\ \alpha+\beta-\lambda\beta=0\end{cases}$. Поскольку $x(t)\not\equiv 0$, то α и β должны быть одновременно не равны 0, т.е. полученная однородная система должна иметь нетривиальное решение. Это возможно тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е. $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$, откуда $(1-\lambda)^2=0$, т.е. $\lambda=1$. Тогда из системы находим, что $\alpha=0$, а β – произвольное, не равное нулю число. Таким образом, собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda=1$ имеют вид $x(t)=\beta t$, $\beta\neq 0$. В случае, когда $\lambda=0$ исходное уравнение принимает вид $x(0)+tx(1)=0$, и, поскольку на отрезке $[0,1]$ функции 1 и t линейно независимы, то $x(0)=0$ и $x(1)=0$, поэтому число $\lambda=0$ также является собственным значением оператора A, а собственными функциями для этого собственного значения будут все не равные тождественно нулю непрерывные функции, обращающиеся в 0 в точках $t=0$ и $t=1$.

Чтобы установить, есть ли в спектре оператора A другие точки, необходимо исследовать на непрерывную обратимость оператор $A-\lambda I$. Прежде всего, отметим, что для любой функции $x(t)\in C[0,1]$

$$(A-\lambda I)x(t)=x(0)+tx(1)-\lambda x(t)\in C[0,1],$$

т.е. областью определения оператора $A-\lambda I$ является все пространство $C[0,1]$.

Считая, что $\lambda\neq 0$ и $\lambda\neq 1$, возьмем произвольную функцию $y(t)\in C[0,1]$ и решим уравнение $(A-\lambda I)x(t)=y(t)$, т.е. $x(0)+tx(1)-\lambda x(t)=y(t)$. Подставим в это уравнение $t=0$: $x(0)-\lambda x(0)=y(0)$, откуда $x(0)=\dfrac{y(0)}{1-\lambda}$. Подставим в уравнение $t=1$: $x(0)+x(1)-\lambda x(1)=y(1)$, откуда $x(1)=\dfrac{y(1)-x(0)}{1-\lambda}=\dfrac{y(1)}{1-\lambda}-\dfrac{y(0)}{(1-\lambda)^2}$.

Теперь из исходного уравнения выразим $x(t)$:

$$x(t)=-\frac{y(t)}{\lambda}+\frac{x(0)}{\lambda}+\frac{tx(1)}{\lambda}=-\frac{y(t)}{\lambda}+\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)}+\frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{ty(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}.$$

Таким образом, поскольку $\lambda\neq 0$ и $\lambda\neq 1$, то $\forall y(t)\in C[0,1]$

$$(A-\lambda I)^{-1}y(t)=-\frac{y(t)}{\lambda}+\frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)}+\frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)}-\frac{ty(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}\in C[0,1].$$

Итак, областью определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ (множеством значений оператора $A-\lambda I$) является все пространство $C[0,1]$. Непосредственно видно, что оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен. Это следует и из теоремы Банаха об обратном операторе, поскольку оператор $A-\lambda I$ взаимно однозначен, т.е. обратим (см. задачу 15). Таким образом, оператор $A-\lambda I$ непрерывно обратим, следовательно, оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ является резольвентой оператора A.

Спектр оператора A состоит только из чисел $\lambda=0$ и $\lambda=1$, которые принадлежат точечному спектру $\sigma_p(A)$. Непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры отсутствуют. Поскольку спектральный радиус $r_\sigma(A)$ является радиусом наименьшего круга с центром в точке $\lambda=0$, содержащего спектр оператора, а точка $\lambda=1$ принадлежит спектру, то $r_\sigma(A)=1$.

5. Пусть E – комплексное банахово пространство и $A:E\to E$ – линейный ограниченный оператор. Доказать, что:

а) если для комплексного числа λ существует такая нормированная последовательность $\{x_n\}\subset E$ (т.е. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|x_n\|=1$), что $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n-\lambda x_n)=0$, то $\lambda\in\sigma(A)$;

б) если $\lambda \in \sigma(A)$ и $\exists c > 0$: $\|Ax - \lambda x\| \ge c\|x\| \ \forall x \in E$, то $\lambda \in \sigma_r(A)$;

в) если $\lambda \in \sigma_c(A)$, то существует такая нормированная последовательность $\{x_n\} \subset E$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = 0$.

Решение: а) Пусть $\lambda \in \rho(A)$, тогда оператор $(A - \lambda I)$ непрерывно обратим, причем $(A - \lambda I)^{-1} : E \to E$. Имеем, $x_n = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)x_n = (A - \lambda I)^{-1}(Ax_n - \lambda x_n)$, значит, поскольку $Ax_n - \lambda x_n \to 0$, то, в силу непрерывности $(A - \lambda I)^{-1}$, получаем $x_n = (A - \lambda I)^{-1}(Ax_n - \lambda x_n) \to 0$, что противоречит условию $\|x_n\| = 1$.

б) Обозначим $T = A - \lambda I$, $E_0 = R(T) = \mathrm{Im}T \subset E$. Из условия $\|Tx\| \ge c\|x\|$ следует, что $\ker T = \{0\}$, откуда, во-первых, следует, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$, а, во-вторых, что оператор T инъективен. Если $E_0 = E$, то оператор T сюръективен, т.е. и биективен, поэтому имеет обратный. В силу теоремы Банаха об обратном операторе T непрерывно обратим, что невозможно, поскольку $\lambda \in \sigma(A)$. Таким образом, $E_0 \ne E$.

Пусть $T_0 : E \to E_0$, $T_0 x = Tx \ \forall x \in E$, тогда T_0 биективен. Таким образом, T_0 обратим, поэтому $T_0 x = y \Leftrightarrow x = T_0^{-1} y$ для соответствующих $x \in E$ и $y \in E_0$. Из $\|T_0 x\| \ge c\|x\| \ \forall x \in E$ получаем, что $\forall y \in E_0$ $\|y\| \ge c\|T_0^{-1}y\|$, $\|T_0^{-1}y\| \le \frac{1}{c}\|y\|$, поэтому оператор $T_0^{-1} : E_0 \to E$ – ограничен. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset E_0$, $y_n \to y$. Ясно, что $T_0^{-1}y_n \to T_0^{-1}y$, откуда $E \ni x_n \to T_0^{-1}y$. Поскольку E – банахово, т.е. замкнутое пространство, то $T_0^{-1}y \in E$, откуда $y \in E_0$, следовательно, E_0 замкнуто. Таким образом, $\overline{\mathrm{Im}T} \ne E$, откуда следует, что $\lambda \in \sigma_r(A)$.

в) следует непосредственно из п. б.

6. Найти точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

Решение: оператор A линеен и ограничен, а также определен на всем пространстве. Найдем точечный спектр $\sigma_p(A)$, т.е. собственные значения оператора A. Для этого надо найти такие λ, что уравнение $\int\limits_0^t x(s)ds = \lambda x(t)$ имеет ненулевые решения в пространстве $C[0,1]$.

Пусть $\lambda \ne 0$, тогда, поскольку левая часть этого уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией, то таковой должна быть и правая часть. Дифференцируя уравнение по t, находим, что $x(t) = \lambda x'(t)$ и, кроме того, справедливо начальное условие $x(0) = 0$. Решая полученную задачу Коши, находим, что $x(t) = 0$ для всех $t \in [0,1]$. Поэтому оператор A не может иметь собственных значений, отличных от нулевого.

Исследуем точку $\lambda = 0$. Уравнение для поиска ненулевой собственной функции в этом случае имеет вид $\int\limits_0^t x(s)ds = 0$. Дифференцируя это равенство, получаем, что $x(t) = 0$ для всех $t \in [0,1]$. Итак, оператор A не имеет ни одного собственного значения, т.е. множество $\sigma_p(A)$ пусто.

Поскольку спектральный радиус оператора A равен нулю (см. задачу 16), то единственной точкой спектра оператора A является точка $\lambda = 0$, причем эта точка не является собственным значением. Чтобы определить, какому из спектров, непрерывному $\sigma_c(A)$ или остаточному $\sigma_r(A)$ принадлежит точка $\lambda = 0$, необходимо доказать обратимость оператора $(A - \lambda I) = A - 0 \cdot I = A$ и исследовать его множество значений. Множеством значений оператора $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$ является множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $y(t)$ таких, что $y(0) = 0$. Обозначим это множество $C_0^{(1)}[0,1]$. В п. 6 теоремы о простейших свойствах обратных операторов доказано, что оператор A имеет обратный $A^{-1}y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$, определенный для всех $y(t) \in C_0^{(1)}[0,1]$. Таким образом, при $\lambda = 0$ оператор $A - \lambda I$ – обратим.

Предположим, что $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} = C[0,1]$, т.е., множество $C_0^{(1)}[0,1]$ всюду плотно в $C[0,1]$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x(t) \in C[0,1] \;\; \exists y(t) \in C_0^{(1)}[0,1]$: $\|x - y\| < \varepsilon$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon$, откуда $\forall t \in [0,1] \;\; |x(t) - y(t)| < \varepsilon$. В частности, при $t = 0$ $|x(0) - y(0)| < \varepsilon$, откуда $|x(0)| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ – произвольно, то из этого неравенства следует, что $|x(0)| = 0$, т.е. $x(0) = 0$. Поскольку пространство $C[0,1]$ не исчерпывается только функциями $x(t)$, для которых $x(0) = 0$, то предположение $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} = C[0,1]$ неверно, т.е. $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} \neq C[0,1]$. Таким образом, согласно определению, точка $\lambda = 0$ является точкой остаточного спектра $\sigma_r(A)$ оператора A. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ является пустым множеством.

7. По формуле $r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ вычислить спектральный радиус оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$ и найти спектр $\sigma(A)$, если $Ax(t) = tx(t)$.

Решение: оператор A линеен и ограничен, а также определен на всем пространстве. Ясно, что $A^n x(t) = t^n x(t)$, тогда

$$\|A^n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^n x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} |t^n x(t)|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n |x(t)|}{\|x\|} \le \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\| \sup\limits_{t\in[0,1]} t^n}{\|x\|} = \sup_{t\in[0,1]} t^n = 1.$$

С другой стороны, выбирая $x_0(t) \equiv 1$, получаем, что

$$\left\|A^n\right\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n x(t)\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|x(t)\right|} \geq \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n x_0(t)\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|x_0(t)\right|} = 1.$$

Таким образом, $\left\|A^n\right\| = 1$. Следовательно, $r_\sigma(A) = 1$. Значит, спектр оператора A целиком лежит внутри круга $|\lambda| \leq 1$. Проверим, имеет ли оператор A собственные значения, т.е. рассмотрим уравнение $tx(t) = \lambda x(t)$ и выясним, имеет ли оно нетривиальные решения в пространстве $C[0,1]$ при каких-либо λ. Указанное уравнение эквивалентно уравнению $(t-\lambda)x(t) = 0$, решением которого является функция $x(t) \overset{п.в.}{=} 0$ (всюду, кроме, быть может, точки $t_0 = \lambda$). Однако, поскольку решение ищется в пространстве $C[0,1]$, то $x(t) = 0$ всюду на отрезке $[0,1]$. Таким образом, $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Исследуем оператор $A - \lambda I$ на непрерывную обратимость, для чего возьмем произвольную функцию $y(t) \in C[0,1]$ и найдем решение уравнения $(A-\lambda I)x(t) = y(t)$ или $(t-\lambda)x(t) = y(t)$.

Если $\lambda \notin [0,1]$, то обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}y(t) = \dfrac{y(t)}{t-\lambda}$ определен на всем пространстве $C[0,1]$, поскольку дробь $\dfrac{y(t)}{t-\lambda}$ – непрерывная функция для всех $y(t) \in C[0,1]$, т.е. в этом случае оператор $A - \lambda I$ является непрерывно обратимым по теореме Банаха об обратном операторе. Таким образом, резольвентное множество оператора A содержит точки $\lambda \notin [0,1]$. Резольвента оператора A при $\lambda \notin [0,1]$ и $y(t) \in C[0,1]$ имеет вид $R_\lambda(A)y(t) = \dfrac{y(t)}{t-\lambda} \in C[0,1]$.

Пусть $\lambda \in [0,1]$, тогда, чтобы уравнение $(t-\lambda)x(t) = y(t)$ имело непрерывное решение $x(t)$, необходимо $y(\lambda) = 0$. Таким образом, $D(A-\lambda I)^{-1} = {}$ $= R(A-\lambda I) \subset C_0 = \{y(t) \in C[0,1]:\ y(\lambda) = 0\}$. Далее, предположив $\bar{C}_0 = C[0,1]$ и, рассуждая аналогично предыдущему примеру, при каждом фиксированном $\lambda \in [0,1]$ получаем, что $x(\lambda) = 0$. Ясно, что пространство $C[0,1]$ не исчерпывается только такими функциями $x(t)$, потому предположение $\bar{C}_0 = C[0,1]$ неверно. Итак, все точки $\lambda \in [0,1]$ принадлежат остаточному спектру $\sigma_r(A)$. Окончательно, $\sigma_r(A) = [0,1]$, точечный $\sigma_p(A)$ и непрерывный $\sigma_c(A)$ спектры отсутствуют.

8. Найти спектр и спектральный радиус оператора $A: l_\infty \to l_\infty$, определяемого для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_\infty$ соотношением $Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, \ldots)$.

Решение: ясно, что оператор A линеен, ограничен и определен на всем пространстве l_∞. Вначале найдем его собственные значения, если они есть. Для этого рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$, т.е. $(\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, ...) = \lambda(\xi_1, \xi_2, ...)$. Ясно, что это уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = \lambda \xi_1 \\ \xi_2 = \lambda \xi_2 \\ \xi_3 = \lambda \xi_3 \\ ... \end{cases}$. Если $\lambda = 0$, то из этой системы находим, что $(\xi_1, \xi_2, ...) = (0, 0, ...)$, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением, и потому далее считаем, что $\lambda \neq 0$. Из вида уравнений замечаем, что если $\lambda = 1$, то уравнения, начиная со второго, обращаются в тождества, а первое уравнение принимает вид $\xi_2 = 0$. Таким образом, $\lambda = 1$ – собственное значение оператора A, а $x = (\xi_1, 0, \xi_3, \xi_4, ...) \in l_\infty$ – собственный вектор, если не все его координаты одновременно равны нулю. Ясно, что других ненулевых решений указанная система не имеет. Таким образом, точечный спектр $\sigma_p(A)$ состоит из одной точки $\lambda = 1$.

Для нахождения других частей спектра необходимо исследовать оператор $A - \lambda I$ на непрерывную обратимость, считая, что $\lambda \neq 1$, т.е. взять произвольную последовательность $y = (\eta_1, \eta_2, ...) \in l_\infty$ и решить уравнение $(A - \lambda I)x = y$, т.е. уравнение $(\xi_1 + \xi_2, \xi_2, \xi_3, ...) - \lambda(\xi_1, \xi_2, ...) = (\eta_1, \eta_2, ...)$. Ясно, что это уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \lambda \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 - \lambda \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 - \lambda \xi_3 = \eta_3 \\ ... \end{cases}$. Из второго уравнения $\xi_2 = \dfrac{\eta_2}{1 - \lambda}$, из третьего – $\xi_3 = \dfrac{\eta_3}{1 - \lambda}$,..., а из первого: $\xi_1 = \dfrac{\eta_1 - \xi_2}{1 - \lambda} = \dfrac{\eta_1}{1 - \lambda} - \dfrac{\eta_2}{(1 - \lambda)^2}$.

Таким образом $x = (A - \lambda I)^{-1} y = \left(\dfrac{\eta_1}{1 - \lambda} - \dfrac{\eta_2}{(1 - \lambda)^2}, \dfrac{\eta_2}{1 - \lambda}, \dfrac{\eta_3}{1 - \lambda}, ... \right)$. Поскольку $\lambda \neq 1$, то при $y \in l_\infty$ получаем, что $(A - \lambda I)^{-1} y \in l_\infty$, т.е. областью определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$ (а значит, множеством значений оператора $A - \lambda I$) является все пространство l_∞. Непосредственно видно, что оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен (также, это следует из теоремы Банаха об обратном операторе). Значит, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ непрерывно обратим, следовательно, его резольвента имеет вид $R_\lambda(A) y = \left(\dfrac{\eta_1}{1 - \lambda} - \dfrac{\eta_2}{(1 - \lambda)^2}, \dfrac{\eta_2}{1 - \lambda}, \dfrac{\eta_3}{1 - \lambda}, ... \right)$, т.е. любая точка $\lambda \neq 1$ является регулярной для оператора A, и, значит, непрерывная $\sigma_c(A)$ и остаточная $\sigma_r(A)$ части спектра отсутствуют. Как и в примере 4 спектральный радиус $r_\sigma(A) = 1$.

9. Найти спектр оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = tx(t)$.

Решение: ясно, что оператор A линеен, ограничен и определен на всем пространстве $L_2[0,1]$.

Проверим, имеет ли оператор A собственные значения, т.е. рассмотрим уравнение $tx(t)=\lambda x(t)$ и выясним, имеет ли оно нетривиальные решения в пространстве $L_2[0,1]$ при каких-либо значениях λ. Указанное уравнение эквивалентно уравнению $(t-\lambda)x(t)=0$, решением которого является функция $x(t)\overset{п.в.}{=}0$. Это решение тривиально в $L_2[0,1]$, поскольку пространство $L_2[0,1]$ состоит из классов почти всюду совпадающих функций. Таким образом, собственных значений оператор A не имеет, т.е. $\sigma_p(A)=\varnothing$.

Далее, исследуем оператор $A-\lambda I$ на непрерывную обратимость, для чего возьмем произвольную функцию $y(t)\in L_2[0,1]$ и найдем решение уравнения $(A-\lambda I)x(t)=y(t)$ или $(t-\lambda)x(t)=y(t)$.

Очевидно, что $x(t)=\dfrac{y(t)}{t-\lambda}$, следовательно, оператор $A-\lambda I$ обратим (это ясно и из условия $\sigma_p(A)=\varnothing$), причем $(A-\lambda I)^{-1}y(t)=\dfrac{y(t)}{t-\lambda}$. Покажем, что при $\lambda\in[0,1]$ оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен не на всем пространстве $L_2[0,1]$. Действительно, возьмем $y(t)=1$, тогда $\int\limits_0^1\left|\dfrac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2dt=\int\limits_0^1\dfrac{1}{(t-\lambda)^2}dt=\int\limits_0^\lambda\dfrac{1}{(t-\lambda)^2}dt+\int\limits_\lambda^1\dfrac{1}{(t-\lambda)^2}dt$.

Оба интеграла расходятся (к $+\infty$), т.е. при $y(t)=1\in L_2[0,1]$ $\dfrac{y(t)}{t-\lambda}\notin L_2[0,1]$, значит, функция $y(t)=1$ не принадлежит области определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$. Итак, при $\lambda\in[0,1]$ областью определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$, а значит, множеством значений оператора $A-\lambda I$ является множество интегрируемых с квадратом функций $y(t)\in L_2[0,1]$, для которых $\dfrac{y(t)}{t-\lambda}\in L_2[0,1]$. Обозначим это множество $L_2^{(0)}$.

Если $\lambda\notin[0,1]$, то для всех $y(t)\in L_2[0,1]$ интеграл $\int\limits_0^1\left|\dfrac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2dt$ особенностей не имеет, т.е. оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на всем пространстве $L_2[0,1]$, а, значит, является непрерывно обратимым по теореме Банаха об обратном операторе. Таким образом, спектр оператора состоит только из точек $\lambda\in[0,1]$.

Осталось определить, какой именно части спектра принадлежат эти значения λ. Для этого рассмотрим множество Ω_λ – линейное многообразие функций $y(t)\in L_2[0,1]$ таких, что $y(t)=0$ в некоторой δ-окрестности точки $t=\lambda$, $\delta>0$, т.е. $y(t)=\begin{cases}0, & |t-\lambda|<\delta\\ y(t), & |t-\lambda|\ge\delta\end{cases}$. Имеем, если $y(t)\in\Omega_\lambda$:

$$\int_0^1 \left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2 dt = \int_0^{-\delta+\lambda} \frac{y^2(t)}{(t-\lambda)^2}dt + \int_{-\delta+\lambda}^{\delta+\lambda} \frac{y^2(t)}{(t-\lambda)^2}dt + \int_{\delta+\lambda}^{1} \frac{y^2(t)}{(t-\lambda)^2}dt =$$

$$= \int_0^{-\delta+\lambda} \frac{y^2(t)}{(t-\lambda)^2}dt + \int_{\delta+\lambda}^{1} \frac{y^2(t)}{(t-\lambda)^2}dt \le \frac{1}{\delta^2}\int_0^{-\delta+\lambda} y^2(t)dt + \frac{1}{\delta^2}\int_{\delta+\lambda}^{1} y^2(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2}\int_0^1 y^2(t)dt + \frac{1}{\delta^2}\int_0^1 y^2(t)dt = \frac{2}{\delta^2}\int_0^1 y^2(t)dt < +\infty,$$

т.е. $\frac{y(t)}{t-\lambda} \in L_2[0,1]$, следовательно Ω_λ содержится в области определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$, а значит, в множестве значений оператора $A-\lambda I$, т.е. $\Omega_\lambda \subset L_2^{(0)}$.

Покажем, что множество Ω_λ всюду плотно в $L_2[0,1]$. Это будет означать, что $\bar{\Omega}_\lambda = L_2[0,1]$, а значит, тем более, $\overline{L_2^{(0)}} = L_2[0,1]$.

Для любой функции $y(t) \in L_2[0,1]$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим последовательность $y_n(t) \in L_2[0,1]$ такую, что $y_n(t) = \begin{cases} 0, & |t-\lambda| < \frac{1}{n} \\ y(t), & |t-\lambda| \ge \frac{1}{n} \end{cases}$. Ясно, что $y_n(t) \in \Omega_\lambda$.

Кроме того, $y_n(t) - y(t) = \begin{cases} -y(t), & |t-\lambda| < \frac{1}{n} \\ 0, & |t-\lambda| \ge \frac{1}{n} \end{cases}$, откуда

$$\|y_n - y\|^2 = \int_0^1 |y_n(t) - y(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{n}+\lambda}^{\frac{1}{n}+\lambda} |y(t)|^2 dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, следовательно, $y_n \xrightarrow{L_2[0,1]} y$. Итак, нашли последовательность $y_n(t) \in \Omega_\lambda$, которая сходится к любому элементу $y(t) \in L_2[0,1]$, что, означает всюду плотность Ω_λ в $L_2[0,1]$. Тем самым проверено, что $(0,1) \subset \sigma_c(A)$. Аналогично проверяется, что $\{0,1\} \subset \sigma_c(A)$ (надо только выбирать не двусторонние окрестности точки λ, а соответствующие односторонние) Окончательно, поскольку $\overline{L_2^{(0)}} = L_2[0,1]$, то $\lambda \in [0,1] \subset \sigma_c(A)$.

10. Пусть $A: l_p \to l_p$. Найти спектр и резольвенту оператора левого сдвига $Ax = (\xi_2, \xi_3, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_p$, $1 \le p < \infty$.

Решение: ясно, что оператор линеен и ограничен, причем $\|A\| = 1$. Найдем собственные значения, для чего выясним, имеет ли уравнение $Ax = \lambda x$ нетривиальные решения в l_p. Имеем: $(\xi_2, \xi_3, ...) = \lambda(\xi_1, \xi_2, ...)$, откуда получаем, что $\xi_2 = \lambda\xi_1$, $\xi_3 = \lambda\xi_2 = \lambda^2\xi_1, \ldots$, т.е. $x = \left(\xi_1, \lambda\xi_1, \lambda^2\xi_1, ...\right) = \xi_1\left(1, \lambda, \lambda^2, ...\right) \ne 0$ при $\xi_1 \ne 0$.

При этом $x \in l_p$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{kp} < +\infty$, т.е. при $|\lambda| < 1$. Таким образом, множество $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$ представляет собой множество собственных значений оператора A. Поскольку спектр всегда замкнут, то круг $\{\lambda : |\lambda| \le 1\} \subset \sigma(A)$. А поскольку $\|A\| = 1$, то по теореме о свойствах спектра и резольвентного множества получаем, что точки $\{\lambda : |\lambda| > 1\}$ принадлежат резольвентному множеству. Итак, $\{\lambda : |\lambda| < 1\} = \sigma_p(A)$. Осталось исследовать множество $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$. Заметим, что такие $\lambda \notin \sigma_p(A)$, поэтому оператор $A - \lambda I$ обратим.

Покажем, что множество значений оператора $A - \lambda I$ содержит множество c_{00} всех финитных векторов. Если $(A - \lambda I)x = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, 0, 0, ...)$, то это приводит к системе $\begin{cases} \xi_{k+1} - \lambda \xi_k = \eta_k, \ k = 1, 2, ..., n \\ \xi_{k+1} - \lambda \xi_k = 0, \ k = n+1, n+2, ... \end{cases}$. Поскольку $|\lambda| = 1$, то получаем, что $|\xi_{k+1}| = |\xi_k|, k = n+1, n+2, ...$ Поскольку требуется, чтобы $x \in l_p$, то последнее равенство возможно только если $|\xi_k| = 0, k = n+1, n+2, ...$, т.е. x – финитная последовательность. Из уравнений $\xi_{k+1} - \lambda \xi_k = \eta_k, k = 1, 2, ..., n$ легко последовательно выразить все начальные координаты вектора x при произвольных значениях $\eta_1, ..., \eta_n$. Тем самым, $c_{00} \subset R(A - \lambda I)$. Поскольку множество финитных векторов всюду плотно в l_p, то $\overline{R(A - \lambda I)} = l_p$ и $\{\lambda : |\lambda| = 1\} = \sigma_c(A)$, $\sigma_r(a) = \varnothing$.

Для нахождения резольвенты необходимо решить уравнение $(A - \lambda I)x = y$ при $y = (\eta_1, \eta_2, ...) \in l_p$ и $|\lambda| > 1$. Имеем, $(\xi_2, \xi_3, ...) - \lambda(\xi_1, \xi_2, ...) = (\eta_1, \eta_2, ...)$, т.е. получаем рекуррентное уравнение $\xi_{k+1} - \lambda \xi_k = \eta_k$, $k = 1, 2, ...$. Это уравнение можно решать, полагая $\xi_1 = c$ и последовательно выражая $\xi_2, \xi_3, ...$ Приведем здесь более общий метод из теории рекуррентных соотношений.

Рассмотрим однородное уравнение $\xi_{k+1} - \lambda \xi_k = 0$ и будем искать его решение в виде $\xi_k = q^k$. Подставляя этот вид, получим характеристическое уравнение $q - \lambda = 0$, откуда $q = \lambda$ и $\xi_{k\text{одн}} = c\lambda^k$. Общее решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной в виде $\xi_k = c_k \lambda^k$. Подставим этот вид в неоднородное уравнение: $c_{k+1}\lambda^{k+1} - c_k \lambda^{k+1} = \eta_k$, откуда $c_{k+1} - c_k = \dfrac{\eta_k}{\lambda^{k+1}}$.

Сложим все такие равенства при $k = 1, 2, ..., n-1$ и получим $c_n - c_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\eta_k}{\lambda^{k+1}}$, откуда $\xi_k = \left(c + \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}} \right) \lambda^k$, $k = 2, 3, ...$. В частности, $\xi_2 = c\lambda^2 + \eta_1$, а, поскольку, из исходного уравнения $\xi_2 = \lambda \xi_1 + \eta_1$, то $\xi_1 = c\lambda$.

Далее, заметим, что $\left|\dfrac{\xi_k}{\lambda^k}\right| = \left|c + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}}\right|$, причем, поскольку $x \in l_p$, то, в частности, $|\xi_k| \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и, учитывая, что $|\lambda| > 1$, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $\left|c + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Ясно, что, поскольку $y \in l_p$, то последовательность $\{\eta_i\}$ ограничена, следовательно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}}$ сходится по признаку Вейерштрасса.

Таким образом, $c = -\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}}$. Окончательно получаем, что, при $k = 1,2,3,...$ $\xi_k = -\lambda^k \sum\limits_{i=k}^{\infty} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1}} = -\sum\limits_{i=k}^{\infty} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1-k}}$, а резольвента равна $R_\lambda(A)y = \left(-\sum\limits_{i=k}^{\infty} \dfrac{\eta_i}{\lambda^{i+1-k}}\right)_{k=1}^{\infty}$. Легко проверить непосредственно, что резольвента действительно определена на всем пространстве и ограничена (см. задачу 47).

11. Найти спектр и резольвенту диагонального оператора $Ax = \left(\dfrac{n+1}{n}\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, если: а) $A : l_\infty \to l_\infty$; б) $A : l_p \to l_p$, $p \ge 1$.

Решение: а) уравнение для поиска собственных значений $Ax = \lambda x$ имеет вид $\left(\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right)\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda \ne \dfrac{n+1}{n}$, то отсюда следует, что все $\xi_n = 0$, т.е. такие λ не являются собственными значениями. Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $\lambda = \dfrac{k+1}{k}$, то, выбирая соответствующее $\xi_k = 1$, получим ненулевой собственный вектор $(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0...) \in l_\infty$. Таким образом, $\left\{\dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \sigma_p(A)$. Поскольку спектр всегда замкнут, то предельная точка этого множества $\lambda = 1$ также является точкой спектра. Для исследования характера этой точки рассмотрим уравнение $Ax - x = y$, $y \in l_\infty$. Решая его, находим, что $\xi_n = n\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, оператор $(A - I)^{-1}$ определен для тех $y \in l_\infty$, для которых $\sup\limits_n n|\eta_n| < \infty$. Обозначим это множество M. Ясно, что $\forall y \in M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n|\eta_n| \le c$, откуда $|\eta_n| \le \dfrac{c}{n}$. Поскольку $\dfrac{c}{n} \to 0$, то $\eta_n \to 0$. Таким образом, $M \subset c_0$. Поскольку пространство c_0 является замкнутым подмножеством l_∞ и не совпадает с l_∞, то $\overline{R(A-I)} = \bar{M} \subset c_0 \ne l_\infty$, поэтому $1 \in \sigma_r(A)$. То же самое можно было установить, сразу заметив, что $y = Ax - x = \left(\dfrac{\xi_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \subset c_0$.

Далее, пусть $\lambda \neq 1, \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$, $y \in l_\infty$. Решая его, находим $\xi_n = \dfrac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda}$, $n \in \mathbb{N}$. Это решение принадлежит l_∞, если $\sup\limits_n \dfrac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} < \infty$. Обозначим $M = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$, тогда $\lambda \notin \bar{M}$. Отсюда следует, что $d = \inf\limits_{u \in M} |u - \lambda| > 0$, поэтому $\sup\limits_n \dfrac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} \leq \dfrac{1}{d} \sup\limits_n |\eta_n| < \infty$. Итак, оператор $(A - \lambda I)^{-1} y$ определен и ограничен $\forall y \in l_\infty$ при всех $\lambda \neq 1, \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$, поэтому $(R_\lambda(A) y)_n = \dfrac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda}$, $n \in \mathbb{N}$.

б) Аналогично $\left\{\dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \sigma_p(A)$, и точка $\lambda = 1$ является точкой спектра. Из уравнения $Ax - x = y$, $y \in l_p$ находим $\eta_n = \dfrac{\xi_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что множество значений оператора $A - I$ содержит все финитные последовательности (являющиеся образами финитных же последовательностей), которые всюду плотны в l_p. Тем самым, $1 \in \sigma_c(A)$. Далее, пусть $\lambda \neq 1, \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Из уравнения $Ax - \lambda x = y$, $y \in l_p$ находим $\xi_n = \dfrac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda} \in l_p$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку для всех $y \in l_p$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\eta_n|^p}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|^p} \leq \dfrac{1}{d^p} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p < \infty$. Таким образом, $(R_\lambda(A) y)_n = \dfrac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda}$.

12. Найти спектр и резольвенту оператора правого сдвига $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, $A: l_2 \to l_2$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$.

Решение: уравнение для поиска собственных значений $Ax = \lambda x$ эквивалентно системе $0 = \lambda \xi_1$, $\xi_n = \lambda \xi_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda = 0$, то из уравнений, начиная со второго, следует, что $x = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то снова $x = 0$. Таким образом, собственных значений оператор не имеет, $\sigma_p(A) = \varnothing$. Далее, рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$, $y \in l_2$. Оно эквивалентно системе $-\lambda \xi_1 = \eta_1$, $\xi_n - \lambda \xi_{n+1} = \eta_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательно выражаем: $\xi_1 = -\dfrac{\eta_1}{\lambda}$, $\xi_2 = -\dfrac{\eta_2}{\lambda} - \dfrac{\eta_1}{\lambda^2}$, $\xi_3 = -\dfrac{\eta_3}{\lambda} - \dfrac{\eta_2}{\lambda^2} - \dfrac{\eta_1}{\lambda^3}, \ldots$

В итоге $\xi_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Это решение принадлежит l_2 при условиях $\lambda \neq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right|^2 < \infty$. Если $\lambda = 0$, то $A - \lambda I = A$ и областью значений оператора $A - \lambda I$ является множество векторов из l_2, у которых первая координата нулевая. Ясно, что это множество не может быть всюду плотным в l_2 (см. пример 6), поэтому $0 \in \sigma_r(A)$. Далее считаем $\lambda \neq 0$.

Поскольку очевидно, что $\|A\| = 1$, то все числа $|\lambda| > 1$ являются регулярными, поэтому оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим при $|\lambda| > 1$.

Покажем, что точки $|\lambda| \leq 1$ принадлежат спектру. Сперва покажем, что при $|\lambda| < 1$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ задан не на всем пространстве l_2. Возьмем вектор $y = (1,0,0,...) \in l_2$, тогда $(A - \lambda I)^{-1} y = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, ... \right)$. Поскольку $\frac{1}{|\lambda|} > 1$, то полученная последовательность не лежит в l_2.

Далее, пусть $\forall y \in l_2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right|^2 < \infty$, тогда $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} = 0$, т.е. последовательность $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right\}$ ограничена, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right| \leq c$, откуда $\left| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \lambda^k \right| \leq c |\lambda|^{n+1}$. Поскольку $|\lambda|^{n+1} \to 0$, то $\sum_{k=1}^{n} \eta_k \lambda^k \to 0$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \lambda^k = 0$. Обозначим M – область определения оператора $(A - \lambda I)^{-1}$, тогда, как показано выше, $M \subset N = \left\{ y \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \lambda^k = 0 \right\}$. Пусть $\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \lambda^k$, $y \in l_2$, $|\lambda| < 1$. Ясно, что это линейный функционал и $|\varphi(y)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \|y\| = c\|y\|$. Таким образом, функционал определен на всем пространстве и ограничен, причем $\|\varphi\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}}$. При этом, очевидно, что $N = \ker \varphi$, а, поскольку функционал не тождественно нулевой, то $\ker \varphi \neq l_2$.

Далее возможно два рассуждения.

а) Ядро любого линейного ограниченного функционала замкнуто, поэтому $\overline{R(A - \lambda I)} \subset N \neq l_2$ и $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(A)$.

б) Поскольку $y_0 = (1,0,0,...) \notin N$, то можно посчитать расстояние от точки y_0 до N по формуле $\rho(y_0, N) = \dfrac{|\varphi(y_0)|}{\|\varphi\|}$ (см. пример 7 п. 2.3).

Имеем, $|\varphi(y_0)| = |\lambda|$, $\|\varphi\| \le \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}$, поэтому $\rho(y_0, N) \ge \sqrt{1-|\lambda|^2}$. Поскольку $\rho(y_0, M) \ge \rho(y_0, N)$, то элемент y_0 нельзя сколь угодно точно приблизить никаким элементом из $\bar{M}$. В итоге $\overline{R(A-\lambda I)} \ne l_2$ и $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(A)$.

Поскольку спектр всегда замкнут, то точки $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$ – также принадлежат спектру. Остается исследовать, какой именно части спектра они принадлежат. Воспользуемся теоремой о двойственности спектров и тем, что (гильбертовым) сопряженным к оператору правого сдвига является оператор левого сдвига (см. пример 10). Поскольку $\{\lambda : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c(A^*)$ и $\sigma_c(A^*) \subset \sigma_c(A)$, то $\{\lambda : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_c(A)$. Наконец, резольвента $R_\lambda(A) y = \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right)_{n=1}^{\infty}$, при $|\lambda| > 1$.

Заметим, что рассуждения, аналогичные проведенным в примере 10 для точек $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$ в данном случае не проходят, поскольку во множестве значений оператора $A - \lambda I$, лежат не все финитные последовательности, а только те для которых выполнено определенное условие, связывающее первую координату со всеми остальными (см. задачу 34).

Также заметим, что вывод $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_r(A)$ сразу следует из теоремы о двойственных спектрах, поскольку $\sigma_p(A^*) \subset \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(A^*)$ и $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \notin \sigma_p(A)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что если для некоторого натурального числа m $\|A^m\| < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится.

Указание: показать, что $r_\sigma(A) < 1$.

2. Выяснить, имеет ли оператор из примера 2 непрерывный спектр. Построить резольвенту на множестве регулярных значений оператора A.

3. Выяснить, имеет ли оператор из примера 3 непрерывный спектр. Построить резольвенту на множестве регулярных значений оператора A.

4. Пусть E – комплексное банахово пространство, $A : E \to E$ – линейный оператор и оператор A^{-1} существует. Доказать, что A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы.

5. Вычислить собственные векторы и собственные значения интегрального оператора $Ax(t)=\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau$ в $L_2[0,1]$, если $K(t,\tau)=\min\{t,\tau\}$.

6. В вещественном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найти собственные векторы и собственные значения оператора $Ax(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+s)x(s)ds$. Имеет ли этот оператор непрерывный спектр? Построить резольвенту на множестве регулярных значений оператора A.

7. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, если его область определения $D(A)=\left\{x(t)\in C^{(2)}[0,\pi]: x(0)=x(\pi)=0\right\}$.

8. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, если его область определения $D(A)=\left\{x(t)\in C^{(2)}[0,\pi]: x'(0)=x'(\pi)=0\right\}$.

9. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, если его область определения $D(A)=\left\{x(t)\in C^{(2)}[0,\pi]: x(0)=x(\pi),\, x'(0)=x'(\pi)\right\}$.

10. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$. Доказать, что $\sigma(A)$ пусто, если $D(A)=\left\{x(t)\in C^{(1)}[0,1]: x(0)=0\right\}$. Как это согласуется с теоремой о спектре?

11. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$. Доказать, что $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $D(A)=C^{(1)}[0,1]$.

12. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=\dfrac{dx}{dt}$. Доказать, что, если $D(A)=\left\{C^{(1)}[0,1]: x(0)=x(1)\right\}$, то $\sigma(A)$ состоит из собственных значений $\{2\pi ni,\, n\in\mathbb{Z}\}$.

13. Два оператора A и B называются перестановочными, если $AB=BA$. Доказать, что оператор и его резольвента перестановочны.

Указание: показать, что $A(A-\lambda I)=(A-\lambda I)A$ *и умножить обе части этого равенства слева на* $(A-\lambda I)^{-1}$.

14. Доказать, что если $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A).$$

Указание: умножить очевидное равенство $(A - \mu I) - (A - \lambda I) = (\lambda - \mu)I$ *слева на* $R_\lambda(A)$ *и справа на* $R_\mu(A)$.

15. Доказать, что ядро оператора $(A - \lambda I)x(t) = x(0) + tx(1) - \lambda x(t)$ из примера 4 при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ состоит только из нулевого вектора.

16. Используя определение, доказать, что спектральный радиус оператора A из примера 6 равен нулю.

17. Найти резольвенту оператора A из примера 6. Доказать, что точка $\lambda = 0$ является особой точкой резольвенты.

18. Пусть оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ определяется формулой $Ax(t) = \dfrac{1}{t} \cdot x(t)$, причем $D(A) = \left\{x(t) \in C^{(1)}[0,1] : x(0) = 0\right\}$. Найти его точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры.

19. Пусть оператор $A : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$ определяется формулой $Ax(t) = e^{it} \cdot x(t)$. Показать, что $\sigma(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\right\}$, т.е. $\sigma(A)$ заполняет единичную окружность.

20. Пусть $K(t,s)$ – непрерывная функция двух переменных в треугольнике $\Delta = \left\{t, s : a \le s \le t, a \le t \le b\right\}$. В пространстве $C[a,b]$ найти спектральный радиус оператора Вольтерра $Ax(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$. Найти $\sigma(A)$. При каком условии точка $\lambda = 0$ будет собственным значением оператора A?

Указание: рассмотреть $x_1(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$, $x_n(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x_{n-1}(s)ds$ $n = 2,3,\ldots$ *Обозначить* $k = \max\limits_{a \le t, s \le b} |K(t,s)|$ *(предварительно обосновать, что этот максимум существует), затем последовательно оценить* $|x_1(t)|$, $|x_2(t)|,\ldots$ *и вывести оценку* $\|A^n\| \le \dfrac{k^n(b-a)^n}{n!}$.

21. Пусть $K(t,s)$ – непрерывная функция двух переменных в треугольнике $\Delta = \left\{t, s : a \le s \le t, a \le t \le b\right\}$. В пространстве $L_2[a,b]$ найти спектральный радиус оператора Вольтерра $Ax(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$. Найти $\sigma(A)$. При каком условии точка $\lambda = 0$ будет собственным значением оператора A?

22. Найти точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры оператора $A : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, если $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

Указание: найти спектральный радиус. Для отыскания множества значений оператора $A-\lambda I$ воспользоваться свойством абсолютной непрерывности интеграла Лебега: если $x(s)$ – суммируемая функция, то $\int_0^t x(s)ds$ – абсолютно непрерывная функция. Показать, что множеством значений оператора $A-\lambda I$ являются все абсолютно непрерывные на отрезке (и, в частности, непрерывные) функции $y(t)$, удовлетворяющие условию $y(0)=0$. Учесть, что L_p состоит из классов почти всюду совпадающих функций.

23. Найти точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры оператора $A: C_0[0,1] \to C_0[0,1]$, если $Ax(t)=\int_0^t x(s)ds$ и $C_0[0,1]$ – банахово пространство непрерывных функций $x(t)$, для которых $x(0)=0$.

Указание: показать, что $\overline{C_0^{(1)}[0,1]} = C_0[0,1]$ (см. пример 6).

24. Пусть E – банахово пространство, $A: E \to E$ – линейный ограниченный оператор и существует $A^{-1}: E \to E$ – также линейный и ограниченный. Доказать, что, если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ и, обратно, если $\mu \in \sigma(A)$, то $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

Указание: если $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, то оператор $A^{-1}-\lambda I$ не является непрерывно обратимым. Показать, что и оператор $A\left(A^{-1}-\lambda I\right)$ не является непрерывно обратимым.

25. Пусть E – банахово пространство, $A: E \to E$ – линейный ограниченный оператор и $\lambda \in \sigma(A)$. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \lambda^n \in \sigma(A^n)$.

26. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим оператор $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$, где $\varphi(t)$ – некоторая строго монотонно возрастающая и непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Доказать, что $\sigma(A)=[\varphi(a),\varphi(b)]$, причем ни одна точка спектра не является собственным значением.

27. Найти спектр и резольвенту оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемого равенством $Ax(t)=\int_0^1 (1+ts)x(s)ds$.

28. По формуле $r_\sigma(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$ вычислить спектральный радиус оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$ и найти спектр $\sigma(A)$, если $Ax(t)=(t+1)x(t)$.

29. По формуле $r_\sigma(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$ вычислить спектральный радиус оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$ и найти $\sigma(A)$, если $Ax(t)=a(t)x(t)$, где $a(t) \in C[0,1]$.

30. Найти спектр, резольвенту и спектральный радиус оператора $A: l_\infty \to l_\infty$, определяемого для $x=(\xi_1,\xi_2,...) \in l_\infty$ соотношением $Ax=(\xi_3,\xi_1,\xi_2,\xi_4,\xi_5,...)$.

31. Найти спектр, резольвенту и спектральный радиус оператора $A: l_\infty \to l_\infty$, определяемого для $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_\infty$ соотношением $Ax = (-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \xi_4, ..., (-1)^n \xi_n, ...)$.

32. Найти спектр и резольвенту тождественного оператора $I: E \to E$, где E – банахово пространство.

33. Найти спектр и резольвенту операторов левого и правого сдвига (см. примеры 10 и 12) в случае $A: l_\infty \to l_\infty$.

Указание: для оператора правого сдвига в случае $|\lambda| = 1$ *показать, что множество значений оператора* $A - \lambda I$ *принадлежит ядру функционала* $\varphi(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \lambda^k$ *и* $\rho(y_0, \ker\varphi) \geq 1$, *где* $y_0 = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, ...) \in l_\infty$.

34. Найти спектр и резольвенту оператора правого сдвига (см. пример 12) в случаях $A: l_1 \to l_1$ и $A: l_p \to l_p$, $p \geq 3$. Показать, что при $|\lambda| = 1$ множество значений оператора $A - \lambda I$ не содержит все финитные последовательности.

35. Найти спектр и резольвенту операторов левого и правого сдвига (см. примеры 10, 12) для случая $A: c_0 \to c_0$.

36. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} x(s)ds$, $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

Указание: оценить спектральный радиус.

37. Показать, что спектральный радиус оператора $A: C\left[0, \frac{1}{2}\right] \to C\left[0, \frac{1}{2}\right]$, где $Ax(t) = tx(t^2)$ равен 0.

38. Показать, что спектр оператора $A: C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$, где $Ax(t) = x(t^2)$ лежит на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Указание: при $|\lambda| < 1$ *проверить, что резольвента оператора* A *имеет вид:* $R_\lambda(A)y = y\left(t^{\frac{1}{2}}\right) + \lambda y\left(t^{\frac{1}{4}}\right) + \lambda^2 y\left(t^{\frac{1}{8}}\right) + ...$ *(обосновать сходимость этого ряда и ограниченность этого оператора). Указать аналогичную резольвенту для случая* $|\lambda| > 1$.

39. Найти точечный $\sigma_p(A)$, непрерывный $\sigma_c(A)$ и остаточный $\sigma_r(A)$ спектры оператора $A: L_2\left[0,1\right] \to L_2\left[0,1\right]$, если $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$. Найти резольвенту оператора.

Указание: использовать теорему о резольвентном множестве.

40. Показать, что спектральный радиус оператора $A: C\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right]$, где

$$Ax(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)ds, & 0 < t \leq 1 \\ x(0), & t = 0 \end{cases}$$

равен 1.

41. Найти спектр диагонального оператора $Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, ...)$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ – ограниченная последовательность, $A: l_\infty \to l_\infty$.

Указание: для исследования части спектра $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ *показать, что множество значений оператора* $A - \lambda I$ *лежит во множестве векторов* l_∞, *содержащих подпоследовательности, стремящиеся к нулю. Показать, что вектор* $(1,1,...) \in l_\infty$ *не может быть с любой точностью приближен элементом данного множества.*

42. Найти спектр диагонального оператора $Ax = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, ...)$, $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ – ограниченная последовательность, $A: l_p \to l_p$, $p \ge 1$.

43. Пусть $A: l_p \to l_p, 1 \le p \le \infty$ – оператор правого или левого сдвига (см. примеры 10, 12). Доказать, что при $|\lambda| = 1$ операторы $A - \lambda I$ и $A - I$ слабо изометрически эквивалентны. Вывести отсюда, что в случае оператора правого сдвига $\{\lambda : |\lambda| = 1\} \subset \sigma_r(A)$ при $p = \infty$.

Указание: показать, что требуемая эквивалентность осуществляется диагональными операторами вида $(U_1x)_n = \lambda^n \xi_n$ *и* $(U_2x)_n = \lambda^{n+1}\xi_n$.

44. Найти спектр оператора двустороннего сдвига $(Ax)_n = \xi_{n-1}$, если $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ в пространстве $l_p(\mathbb{Z}) = \left\{ x = (\xi_n)_{n=-\infty}^{+\infty} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\xi_n|^p < +\infty \right\}$, $1 \le p \le \infty$.

45. Найти точечный спектр оператора $Ax(t) = \dfrac{1}{t}\int_0^t x(\tau)d\tau$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Указание: учесть, что в $L_2[0,1]$ *лежат функции, которые интегрируются с квадратом, поэтому на семейство собственных чисел* λ, *которое получится после решения дифференциального уравнения, необходимо наложить дополнительное условие* $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\right) < \dfrac{1}{2}$.

46. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_1 + \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...)$ если $A: l_2 \to l_2$.

47. Доказать, что резольвента, найденная в примере 10, определена на всем пространстве l_p и оценить ее норму (отдельно рассмотреть $p = 1$ и $p > 1$).

48. Пусть X – линейное пространство, $A: X \to X$ – линейный оператор, $e_1, e_2, ..., e_k$ – какие-то собственные вектора оператора A. Доказать, что линейная оболочка этих векторов инвариантна для оператора A. Если A ограничен, то показать, что замыкание линейной оболочки этих векторов инвариантно для A.

Указание: пусть L *– линейная оболочка векторов* $e_1, e_2, ..., e_k$, *т.е.* $x \in L$ *означает, что* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k$. *Доказать, что* $Ax \in L$. *Если* A *ограничен, то показать, что предел линейных комбинаций векторов переходит снова в предел линейных комбинаций.*

49. Пусть $\varphi(t)=\begin{cases}\mathrm{tg}t,\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ 0,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right)\end{cases}$. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$ в случаях $A:C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ и $A:L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

50. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t)=\sqrt{t}x(t)$, $A:L_1[0,1]\to L_1[0,1]$.

51. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax=\left(\frac{1}{n}\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, если $A:l_1\to l_1$.

52. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t)=\sin tx(t)$, $A:C\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]\to C\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$.

53. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t)=\int\limits_t^1 x(s)ds$, $A:C[1,2]\to C[1,2]$.

54. Найти спектр и резольвенту оператора $A:C\left[0,1\right]\to C\left[0,1\right]$, задаваемого равенством $Ax(t)=\int\limits_0^1 (t-s)x(s)ds$.

55. Найти спектр и резольвенту оператора $A:L_1[0,1]\to L_1[0,1]$, если $Ax(t)=\dfrac{x(t)}{\sqrt{t}}$, область определения которого $D(A)=\left\{x\in L_1\left[0,1\right]:Ax\in L_1\left[0,1\right]\right\}$.

56. Найти спектр и резольвенту оператора $A:l_2\to l_2$, если $Ax=\left(n\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}$, область определения которого $D(A)=\left\{x\in l_2:Ax\in l_2\right\}$.

57. Найти спектр и резольвенту оператора $Ax(t)=\begin{cases}5x(t),\ 0\le t\le\dfrac{1}{3}\\ 0,\ \dfrac{1}{3}<t\le 1\end{cases}$, если $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$.

58. Найти спектр и резольвенту оператора сдвига $Ax(t)=x(t-1)$ в пространствах $L_1\left(\mathbb{R}\right)$, $L_2\left(\mathbb{R}\right)$ и $L_\infty\left(\mathbb{R}\right)$.

Указание: найти (слабый) изометрический изоморфизм между этим оператором и оператором умножения на некоторую мнимую экспоненту.

59. Пусть X – банахово пространство, $A,B:X\to X$ – линейные ограниченные операторы. Доказать, что $\sigma(AB)\bigcup\{0\}=\sigma(BA)\bigcup\{0\}$. Доказать, что, если хотя бы один из операторов A или B обратим, то $\sigma(AB)=\sigma(BA)$.

Указание: воспользоваться задачей 9 п. 3.1. Для доказательства второго равенства проверить, что $BA-\lambda I=A^{-1}(AB-\lambda I)A$.

60. Пусть X – банахово пространство, $A,B:X\to X$ – линейные операторы и выполнено равенство $AB-BA=I$. Доказать, что хотя бы один из операторов A или B неограничен.

Указание: предположить противное. Показать, что точки $\lambda<1$ не могут быть точками спектра оператора AB (учесть, что имеет место равенство $AB-\lambda I=BA-(\lambda-1)I$), а точки $\lambda>-1$ не могут быть точками спектра оператора BA. Воспользоваться предыдущей задачей.

61. Доказать, что для любого компактного подмножества K множества $\mathbb{C}$ найдется линейный ограниченный оператор A, спектр которого равен K.

Указание: покажем, что, если для некоторого $\varepsilon>0$ для множества M найдется конечная ε-сеть, состоящая из точек метрического пространства X, то существует и конечная 2ε-сеть из точек множества M. Действительно, достаточно рассмотреть только те точки ε-сети a_n, которые находятся за пределами множества M и для которых $\|x-a_n\|<\varepsilon$ при $x\in M$. Построим круг $B(x,r_n)\subset B(a_n,\varepsilon)$ и выберем точку $b_n\in X\bigcap B(x,r_n)$. Тогда, заменяя точку a_n точкой b_n, получим требуемое.

Для решения задачи, используя свойство сепарабельности компакта, найти всюду плотную последовательность $\{\alpha_n\}\subset K$ и рассмотреть соответствующий диагональный оператор (см. задачу 42).

62. Доказать, что при $|\lambda|>\|A\|$ резольвента ограниченного оператора A задается в виде ряда Неймана $R_\lambda(A)=-\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A^n}{\lambda^n}$.

63. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(0,\xi_1,0,\xi_3,0,\xi_5,0,...)$.

64. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(0,\xi_1,0,\xi_2,0,\xi_3,0,...)$.

65. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(0,\xi_1,\xi_2,0,\xi_4,\xi_5,0,...,0,\xi_{3n+1},\xi_{3n+2},0,...)$.

66. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(\xi_2,\xi_1,\xi_4,\xi_3,...,\xi_{2n+2},\xi_{2n+1},...)$.

67. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(\xi_2,\xi_3,\xi_1,\xi_5,\xi_6,\xi_4,...,\xi_{3n+2},\xi_{3n+3},\xi_{3n+1},...)$.

68. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту оператора $A:l_p\to l_p$, $1\le p<\infty$, если $Ax=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)$.

3.4. Вполне непрерывные операторы

Определение: пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется вполне непрерывным, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Замечание: поскольку всякое предкомпактное множество ограничено, то вполне непрерывный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное, а, следовательно, является ограниченным оператором. Если пространство Y – конечномерно, то справедливо и обратное, т.е. всякий ограниченный оператор будет вполне непрерывным (задача 1).

Замечание: тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не является вполне непрерывным (см. задачу 2).

Теорема (об усиленной непрерывности вполне непрерывного оператора): пусть Y – банахово пространство, $A: X \to Y$ – вполне непрерывный оператор, тогда из условия $x_n \rightharpoonup x$ следует, что $Ax_n \to Ax$.

Доказательство: пусть $x_n \rightharpoonup x$, тогда по теореме об ограниченности слабо сходящейся последовательности $\{x_n\}$ ограничена. Поскольку A – вполне непрерывен, то последовательность $\{Ax_n\}$ – предкомпактна. Значит множество $\overline{\{Ax_n\}} \subset Y$ компактно, т.е. и секвенциально компактно. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{Ax_n\}$ имеет предел (необязательно принадлежащий $\{Ax_n\}$). Далее, предположим, что $Ax_n \not\to Ax$, т.е. существует такая окрестность $U(Ax)$, вне которой найдется бесконечно много членов последовательности $\{Ax_n\}$. Тогда, в частности, из этих членов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, причем, поскольку все ее элементы лежат вне окрестности $U(Ax)$, то к Ax эта подпоследовательность сходиться не может. Итак, показали, что $\exists Ax_{n_k} \to y \neq Ax$. Поскольку из сильной сходимости всегда следует слабая, то $Ax_{n_k} \rightharpoonup y \neq Ax$. С другой стороны, поскольку A – вполне непрерывен, то он ограничен. Тогда по теореме о слабой непрерывности ограниченного оператора из условия $x_n \rightharpoonup x$ следует, что $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Раз вся последовательность слабо сходится к Ax, то этот же предел должна иметь и любая ее подпоследовательность (см. задачу 1 п. 2.5). Противоречие.

Теорема доказана.

Замечание: если X – рефлексивное пространство, а Y – банахово, то справедливо и обратное утверждение (см. пример 12).

Определение: пусть $x, y \in [a,b]$, $K(x,y): [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$. Интегральным оператором с ядром K называется оператор $Af = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$, который каждой функции $f(x)$, определенной на $[a,b]$, ставит в соответствие функцию $g(x) = Af(x)$, также определенную на $[a,b]$.

Теорема (о вполне непрерывности интегрального оператора): если ядро $K(x,y)$ непрерывно на $[a,b]\times[a,b]$, то интегральный оператор с этим ядром является вполне непрерывным оператором из пространства $C[a,b]$ в себя.

Доказательство: надо доказать, что оператор любое ограниченное множество переводит в предкомпактное. Пусть $\{f_\alpha\}\subset C[a,b]$ – ограниченное множество, т.е. $\exists c>0$: $\|f_\alpha\|\le c$. Пусть $g_\alpha(x)=Af_\alpha(x)=\int\limits_a^b K(x,y)f_\alpha(y)dy$. Надо доказать, что множество $\{g_\alpha\}\subset C[a,b]$ – предкомпактно, т.е., по теореме Арцела-Асколи, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Заметим, что

$$|g_\alpha(x)|=\left|\int\limits_a^b K(x,y)f_\alpha(y)dy\right|\le\int\limits_a^b|K(x,y)||f_\alpha(y)|dy\le\|f_\alpha\|\int\limits_a^b|K(x,y)|dy\le c\int\limits_a^b|K(x,y)|dy.$$

Поскольку $[a,b]\times[a,b]$ – замкнутый квадрат, то, по критерию компактности в $\mathbb{R}^n$, множество $[a,b]\times[a,b]$ компактно. Поскольку $K(x,y)$ непрерывна на компакте, то по теореме Вейерштрасса она ограничена, т.е. $\exists M>0$: $|K(x,y)|\le M$. Тогда $|g_\alpha(x)|\le cM(b-a)$, т.е. множество $\{g_\alpha(x)\}$ ограничено константой, не зависящей ни от x, ни от α, следовательно, $\{g_\alpha(x)\}$ равномерно ограничено.

По определению равностепенной непрерывности надо проверить, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x_1,x_2\in[a,b]\ |x_1-x_2|<\delta\ \forall\alpha\ |g_\alpha(x_1)-g_\alpha(x_2)|<\varepsilon$. Имеем:

$$|g_\alpha(x_1)-g_\alpha(x_2)|=\left|\int\limits_a^b K(x_1,y)f_\alpha(y)dy-\int\limits_a^b K(x_2,y)f_\alpha(y)dy\right|=$$

$$=\left|\int\limits_a^b (K(x_1,y)-K(x_2,y))f_\alpha(y)dy\right|\le\int\limits_a^b|K(x_1,y)-K(x_2,y)||f_\alpha(y)|dy\le$$

$$\le c\int\limits_a^b|K(x_1,y)-K(x_2,y)|dy.$$

Поскольку $K(x,y)$ непрерывна на компакте, то $K(x,y)$ равномерно непрерывна по теореме Кантора, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ |x_1-x_2|<\delta\ |y_1-y_2|<\delta$ $|K(x_1,y_1)-K(x_2,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{c(b-a)}$. Возьмем $y_1=y_2=y$, тогда из $|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|=0<\delta$ следует $|K(x_1,y)-K(x_2,y)|<\dfrac{\varepsilon}{c(b-a)}$, откуда $|g_\alpha(x_1)-g_\alpha(x_2)|<c\int\limits_a^b\dfrac{\varepsilon}{c(b-a)}dy=\varepsilon$.

Теорема доказана.

Определение: линейный ограниченный оператор $A:X\to Y$ называется конечномерным (или оператором конечного ранга), если множество значений этого оператора является конечномерным подпространством в пространстве Y.

Теорема (критерий вполне непрерывности): пусть H – гильбертово пространство, $A:X\to H$ – линейный ограниченный оператор, тогда A –

вполне непрерывен тогда и только тогда, когда его с любой точностью можно приблизить конечномерным оператором, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B$ – конечномерный: $\|A - B\| < \varepsilon$.

Замечание: достаточность условия теоремы справедлива в случае произвольного банахова пространства Y (см. доказательство).

Доказательство: пусть A – вполне непрерывен. Рассмотрим единичный шар в пространстве X и обозначим его $S = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. Поскольку этот шар ограничен, то его образ $A(S)$ является предкомпактным множеством. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда, поскольку $A(S)$ предкомпактно, то для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, элементы которой обозначим $y_1, y_2, ..., y_n \in H$. Тогда $\forall Ax \in A(S) \quad \exists y_k$: $\|Ax - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $L \subset H$ – линейное подпространство, образованное векторами $y_1, y_2, ..., y_n$, P – проектор на подпространство L, и, наконец, пусть $B = PA$. Поскольку P переводит все пространство H в L – подпространство размерности n (или меньшей размерности, если среди векторов $y_1, y_2, ..., y_n$ есть линейно зависимые), то размерность образа оператора B не превосходит n, т.е. B – конечномерный оператор. Заметим, что, поскольку $\forall k \in \overline{1,n} \quad y_k \in L$, то $Py_k = y_k$ и напомним, что норма любого проекционного оператора равна 1.

Далее, при $\|x\| \le 1$ имеем, что $Ax \in A(S)$, тогда:

$$\|A - B\| = \|A - PA\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax - PAx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax - y_k + y_k - PAx\| \le$$

$$\le \sup_{\|x\| \le 1} \left(\|Ax - y_k\| + \|y_k - PAx\| \right) < \sup_{\|x\| \le 1} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|y_k - PAx\| \right) =$$

$$= \sup_{\|x\| \le 1} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|Py_k - PAx\| \right) \le \sup_{\|x\| \le 1} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|P\| \cdot \|y_k - Ax\| \right) = \sup_{\|x\| \le 1} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|y_k - Ax\| \right) < \varepsilon.$$

Обратно: дано, что оператор A с любой точностью можно приблизить конечномерным оператором, а надо доказать, что A – вполне непрерывен.

Пусть $E \subset X$ – ограниченное множество. Надо доказать, что $A(E)$ – предкомпактно, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найти для множества $A(E)$ конечную ε-сеть. Берем $\forall x \in E$, тогда $\exists c > 0$: $\|x\| \le c$. Берем $\forall \varepsilon > 0$, тогда $\exists B$ – конечномерный, такой, что $\|A - B\| < \frac{\varepsilon}{2c}$. Множество $B(E)$ конечномерно, поскольку B конечномерен, а также ограничено, поскольку B ограничен (т.к. $\|B\| \le \|B - A\| + \|A\|$) и E ограничено. Поскольку любое ограниченное подмножество конечномерного пространства предкомпактно, то $B(E)$ – предкомпактно. Следовательно, для множества $B(E)$ можно построить конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $y_1, y_2, ..., y_n$, т.е. $\forall Bx \in B(E)$ $\exists y_k$: $\|Bx - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что для множества $A(E)$ элементы $y_1, y_2, ..., y_n$ об-

разуют конечную ε-сеть. Возьмем $\forall y \in A(E)$, тогда $y = Ax$ и $\|y - y_k\| = \|Ax - y_k\| =$
$= \|Ax - Bx + Bx - y_k\| \le \|Ax - Bx\| + \|Bx - y_k\| \le \|A - B\| \cdot \|x\| + \|Bx - y_k\| < c \cdot \dfrac{\varepsilon}{2c} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема (о подпространстве вполне непрерывных операторов): пусть Y – банахово пространство, тогда множество вполне непрерывных операторов, действующих из X в Y, является замкнутым линейным подпространством пространства линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Доказательство: 1. Покажем, что множество вполне непрерывных операторов образует линейное многообразие, т.е.:

а) если A и B – вполне непрерывны, то $A + B$ – также вполне непрерывен;

б) если A – вполне непрерывен, то λA – вполне непрерывен ($\lambda \ne 0$).

а) Пусть E – ограниченное множество, тогда $A(E)$ и $B(E)$ – предкомпактные множества, т.е. для них существуют конечные $\dfrac{\varepsilon}{2}$-сети, которые обозначим, соответственно, $y_1,\dots,y_n$ и $z_1,\dots,z_m$, тогда $\forall Ax \in A(E)$ $\exists y_i$: $\|Ax - y_i\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\forall Bx \in B(E)$ $\exists z_j$: $\|Bx - z_j\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Покажем, что множество, состоящее из сумм $y_i + z_j$ будет конечной ε-сетью для множества $(A+B)(E)$. Тем самым, множество $(A+B)(E)$ будет предкомпактным, а оператор $A + B$ – вполне непрерывным: $\|(A+B)x - (y_i + z_j)\| = \|Ax + Bx - y_i - z_j\| \le \|Ax - y_i\| + \|Bx - z_j\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

б) Пусть E – ограниченное множество, тогда $A(E)$ – предкомпактно, т.е. для него существует конечная $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$-сеть, которую обозначим $y_1,\dots,y_n$. Тогда $\forall Ax \in A(E)$ $\exists y_i$: $\|Ax - y_i\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Покажем, что множество, состоящее из элементов λy_i будет конечной ε-сетью для множества $(\lambda A)(E)$. Тем самым, множество $(\lambda A)(E)$ будет предкомпактным, а оператор λA – вполне непрерывным: $\|(\lambda A)x - \lambda y_i\| = |\lambda| \cdot \|Ax - y_i\| < |\lambda| \cdot \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

2. Покажем, что линейное многообразие вполне непрерывных операторов замкнуто, т.е. если $\{A_n\}$ – последовательность вполне непрерывных операторов и $A_n \overset{L(X,Y)}{\to} A$ ($A_n \rightrightarrows A$), т.е. $\|A_n - A\| \to 0$, то A – также будет вполне непрерывным. Пусть E – ограниченное множество, т.е. $\forall x \in E$ $\exists c > 0$: $\|x\| \le c$. Поскольку $\{A_n\}$ – вполне непрерывны, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $A_n(E)$ – предкомпактно, т.е. для него можно найти конечную $\dfrac{\varepsilon}{2}$-сеть, которую обозначим

$y_1^{(n)},...,y_{m_n}^{(n)}$, т.е. $\forall A_n x \in A_n(E)\ \exists y_{i_k}^{(n)}$: $\left\|A_n x - y_{i_k}^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\|A_n - A\| \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N\ \ \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2c}$. Покажем, что $\forall n > N$ множество $y_1^{(n)},...,y_{m_n}^{(n)}$ будет конечной ε-сетью для множества $A(E)$, тогда $A(E)$ будет предкомпактным, а оператор A – вполне непрерывным. Действительно, при нужном нам $n > N$: $\left\|Ax - y_{i_k}^{(n)}\right\| = \left\|Ax - A_n x + A_n x - y_{i_k}^{(n)}\right\| \le \|Ax - A_n x\| + \left\|A_n x - y_{i_k}^{(n)}\right\| \le$
$\le \|A - A_n\| \cdot \|x\| + \left\|A_n x - y_{i_k}^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема (о вполне непрерывности произведения): пусть X – банахово пространство, $A, B : X \to X$, причем A – ограничен, а B – вполне непрерывен. Тогда операторы AB и BA – вполне непрерывны.

Доказательство: 1. Покажем, что AB – вполне непрерывен. Пусть E – ограниченное множество, тогда $B(E)$ – предкомпактно, т.е. для него можно построить конечную $\frac{\varepsilon}{\|A\|}$-сеть, которую обозначим $y_1,...,y_n$, т.е. $\forall Bx \in B(E)\ \exists y_i$: $\|Bx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Покажем, что $Ay_1,...,Ay_n$ будет конечной ε-сетью для множества $AB(E)$, тогда $AB(E)$ будет предкомпактным, а оператор AB – вполне непрерывным: $\|ABx - Ay_i\| \le \|A\| \cdot \|Bx - y_i\| < \varepsilon$.

2. Покажем, что BA – вполне непрерывен. Вначале к ограниченному множеству применяется оператор A. Поскольку A ограничен, то ограниченное множество он переводит в ограниченное. Затем к полученному ограниченному множеству применяется вполне непрерывный оператор B и получается предкомпактное множество. Таким образом, оператор BA всякое ограниченное множество переводит в предкомпактное, т.е. является вполне непрерывным.

Теорема доказана.

Теорема (о вполне непрерывности сопряженного оператора): пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Оператор $A : H_1 \to H_2$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $A^* : H_2 \to H_1$ вполне непрерывен.

Замечание: утверждение теоремы справедливо и в произвольных банаховых пространствах для банаховых сопряженных операторов (см., напр., [10]).

Доказательство: пусть A – вполне непрерывен. В силу критерия вполне непрерывности A с любой точностью можно приблизить конечномерным оператором, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists B$ – конечномерный: $\|A - B\| < \varepsilon$. По теореме о норме сопряженного оператора $\|A^*\| = \|A\|$, тогда $\|A^* - B^*\| = \|(A - B)^*\| = \|A - B\| < \varepsilon$, поэтому, если покажем, что B^* конечномерен, то получим, что A^* с любой точностью можно приблизить конечномерным оператором и поэтому A^* будет вполне непрерывным по критерию вполне непрерывности.

Рассмотрим множество значений $B(H_1) \subset H_2$. Раз оно конечномерно, то в нем есть ортонормированный базис $e_1,...,e_n$. Берем $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$, тогда $Bx \in B(H_1)$ и $Bx = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, где $c_i = (Bx, e_i)$, тогда $Bx = \sum_{i=1}^{n}(Bx, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}(x, B^* e_i)e_i$, откуда $(Bx, y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x, B^* e_i)e_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n}(x, B^* e_i)\left(e_i, y\right) = \left(x, \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)B^* e_i\right)$. С другой стороны, $(Bx, y) = (x, B^* y)$. Поскольку $x \in H_1$ – произвольный элемент, то, сравнивая эти два равенства, получаем $B^* y = \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)B^* e_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i B^* e_i$. Таким образом, любой элемент $B^* y \in B^*(H_2)$ оказался представлен в виде линейной комбинации векторов $B^* e_1,...,B^* e_n$, следовательно, пространство $B^*(H_2)$ имеет конечный базис (необязательно ортонормированный), т.е. $B^*(H_2)$ конечномерно.

Обратное утверждение предлагается доказать самостоятельно (задача 8).

Теорема доказана.

Примеры решения задач

1. Показать, что интегральный оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемый равенством $Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$, ядро которого $k(t,s) \in L_2\left([0,1]\times[0,1]\right)$, является вполне непрерывным.

Решение: по теореме о плотности непрерывных функций в L_p, множество непрерывных функций является всюду плотным в $L_2\left([0,1]\times[0,1]\right)$, следовательно, найдется последовательность $k_n(t,s) \in C\left([0,1]\times[0,1]\right)$ такая, что

$$k_n(t,s) \xrightarrow{L_2([0,1]\times[0,1])} k(t,s), \text{ т.е. } \int_0^1\int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds dt \to 0.$$

Пусть $A_n x(t) = \int_0^1 k_n(t,s)x(s)ds$, тогда, в силу задачи 18 из первого блока задач, все операторы A_n вполне непрерывны. Покажем, что $\|A - A_n\| \to 0$.

Применяя неравенство Гельдера, находим:

$$|A_n x(t) - Ax(t)| = \left|\int_0^1 k_n(t,s)x(s)ds - \int_0^1 k(t,s)x(s)ds\right| = \left|\int_0^1 (k_n(t,s) - k(t,s))x(s)ds\right| \le$$

$$\le \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)||x(s)|ds \le \left(\int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L_2[0,1]}.$$

Тогда $\|A_n x - Ax\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |A_n x(t) - Ax(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 ds \cdot \|x\|^2_{L_2[0,1]} dt \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \|x\|_{L_2[0,1]} \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 dsdt \right)^{\frac{1}{2}}.$

Таким образом, $\|A_n - A\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|A_n x - Ax\|_{L_2[0,1]}}{\|x\|_{L_2[0,1]}} \le \left(\int_0^1 \int_0^1 |k_n(t,s) - k(t,s)|^2 dsdt \right)^{\frac{1}{2}}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\|A - A_n\| \to 0$, следовательно, $A_n \rightrightarrows A$, т.е. A представляет собой равномерный предел последовательности вполне непрерывных операторов. По теореме о подпространстве вполне непрерывных операторов A – вполне непрерывен.

2. Пусть $k(t,s)$ – непрерывная функция в квадрате $P = [a,b] \times [a,b]$, функции $\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а точки $t_1,...,t_m$ принадлежат отрезку $[a,b]$. Доказать, что оператор $Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds + \sum_{k=1}^m \varphi_k(t)x(t_k)$ (“нагруженный” интегральный оператор) является вполне непрерывным оператором, отображающим пространство $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение: по теореме о подпространстве вполне непрерывных операторов, сумма вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором. Поэтому достаточно проверить, что операторы $Bx(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$ и $Cx(t) = \varphi(t)x(t_0)$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывная на $[a,b]$ функция, а t_0 – фиксированная точка отрезка $[a,b]$, являются вполне непрерывными операторами, отображающими пространство $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Интегральный оператор $Bx(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$ является вполне непрерывным, поскольку он удовлетворяет всем условиям теоремы о вполне непрерывности интегрального оператора. Докажем, что оператор $Cx(t) = \varphi(t)x(t_0)$ – вполне непрерывен. Рассмотрим ограниченное множество $M \subset C[a,b]$, тогда $\forall x(t) \in M \ \ \exists c > 0$: $\|x\| \le c$. Отсюда для всех $x(t) \in M$

$$|Cx(t)| = |\varphi(t)x(t_0)| = |\varphi(t)||x(t_0)| \le |\varphi(t)| \cdot \|x\| \le c|\varphi(t)|.$$

Поскольку $\varphi(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке ограничена, т.е. $\exists R > 0$: $|\varphi(t)| \le R$. Таким образом, $|Cx(t)| \le cR$, тем самым множество CM равномерно ограничено. Покажем, что множество CM равностепенно непрерывно, т.е. что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$: $\forall t_1,t_2\in[a,b]\ \ |t_1-t_2|<\delta$ $\forall x(t)\in M\ \ |Cx(t_1)-Cx(t_2)|<\varepsilon$. Имеем:

$$|Cx(t_1)-Cx(t_2)|=|\varphi(t_1)x(t_0)-\varphi(t_2)x(t_0)|=|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)||x(t_0)|\le c|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|.$$

Поскольку $\varphi(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Кантора, она на этом отрезке равномерно непрерывна, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0$: $\forall t_1,t_2\in[a,b]\ \ |t_1-t_2|<\delta$ $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<\dfrac{\varepsilon}{c}$. Тогда $|Cx(t_1)-Cx(t_2)|<\varepsilon$.

Итак, множество CM является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным, т.е. по теореме Арцела-Асколи, множество CM предкомпактно. Следовательно, оператор $Cx(t)=\varphi(t)x(t_0)$ вполне непрерывен.

3. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, если:

а) $Ax(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}}ds$;

б) $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$;

в) $Ax(t)=\displaystyle\int_0^1 x(s^2)ds$?

Будет ли этот оператор вполне непрерывным, если его рассматривать, как отображение пространства $L_2[0,1]$ в себя?

Решение: а) Оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\displaystyle\int_0^1\frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}}ds$ не определен на всем пространстве $C[0,1]$ и неограничен, т.к. при $x(t)\equiv 1\in C[0,1]$ получаем, что $\|x\|=1$, а при этом $|Ax(t)|=\left|\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(t-s)^2}}ds\right|=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{|t-s|}ds$. Поскольку $t\in[0,1]$, и интегрирование по s ведется также по отрезку $[0,1]$, то интеграл, стоящий в правой части – несобственный, с единственной особенностью на отрезке интегрирования. Ясно, что этот интеграл расходится, следовательно $\|Ax\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|Ax(t)|=+\infty$. Поскольку оператор неограничен, он не может быть вполне непрерывным.

В случае, когда тот же оператор действует из пространства $L_2[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$, аналогично можно показать, что он неограничен, а потому не является вполне непрерывным.

б) Оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$ определен на всем пространстве, линеен и ограничен, причем, нетрудно посчитать, что $\|A\|=1$. Рассмотрим ограниченное множество функций $M=(\sin nt)_{n=1}^{\infty}\subset C[0,1]$. Предположим, что множество $AM=\left(\sin n\sqrt{t}\right)_{n=1}^{\infty}\subset C[0,1]$ предкомпактно, тогда по теореме Арцела-Асколи оно равностепенно непрерывно, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall t_1,t_2\in[0,1]$ $|t_1-t_2|<\delta\ \ \forall x(t)\in M\ \ |Ax(t_1)-Ax(t_2)|<\varepsilon$.

В частности, это верно и для $t_1=0$, $t_2=\dfrac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$, тогда $|t_1-t_2|=\dfrac{1}{n^2}<\delta$, начиная с некоторого номера, и, начиная с этого же номера $|Ax(t_1)-Ax(t_2)|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Однако, поскольку $|Ax(t_1)-Ax(t_2)|=\left|\sin n\sqrt{0}-\sin n\sqrt{\dfrac{1}{n^2}}\right|=\sin 1$, то при выборе $0<\varepsilon<\sin 1$ получаем противоречие. Тем самым, оператор ограниченное множество перевел в множество, не являющееся предкомпактным, т.е. он не является вполне непрерывным.

Рассмотрим оператор $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$, если $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$. Снова нетрудно убедиться, что он линеен, ограничен и $\|A\|\le 2$.

Рассмотрим ограниченное в $L_2[0,1]$ множество $M=(\sin n\pi t^2)_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что множество $AM=\left(\sin n\pi t\right)_{n=1}^{\infty}\subset L_2[0,1]$ предкомпактно, тогда в силу критерия предкомпактности в $L_2[0,1]$ AM равностепенно непрерывно в среднем квадратичном, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall h\ \ |h|<\delta\ \ \forall x(t)\in M\ \ \|Ax(t+h)-Ax(t)\|<\varepsilon$. В частности, это верно и для $h=\dfrac{1}{n}$, тогда $|h|=\dfrac{1}{n}<\delta$, начиная с некоторого номера, и, начиная с этого же номера, $\left\|Ax\left(t+\dfrac{1}{n}\right)-Ax(t)\right\|<\varepsilon$ для всех $\varepsilon>0$. С другой стороны $\left\|Ax\left(t+\dfrac{1}{n}\right)-Ax(t)\right\|=\sqrt{\int\limits_0^1\left|Ax\left(t+\dfrac{1}{n}\right)-Ax(t)\right|^2dt}=\sqrt{\int\limits_0^1\left|\sin n\pi\left(t+\dfrac{1}{n}\right)-\sin n\pi t\right|^2dt}=$

$$=\sqrt{\int\limits_0^1\left|\sin\left(n\pi t+\pi\right)-\sin n\pi t\right|^2dt}=\sqrt{\int\limits_0^1\left|-2\sin n\pi t\right|^2dt}=2\sqrt{\int\limits_0^1\sin^2 n\pi t dt}=$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-\cos 2n\pi t)dt}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Выбирая $0<\varepsilon<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, получаем противоречие с $\left\|Ax\left(t+\dfrac{1}{n}\right)-Ax(t)\right\|<\varepsilon$. Тем самым, оператор ограниченное множество перевел в множество, не являющееся предкомпактным, т.е. он не является вполне непрерывным.

в) Оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^1 x(s^2)ds$ является линейным и ограниченным оператором, причем нетрудно посчитать, что $\|A\|=1$. Поскольку

$x(s^2)$ – непрерывная функция, то область значений этого оператора состоит из действительных чисел, поэтому этот оператор представляет собой линейный ограниченный функционал, а значит он вполне непрерывен (см. задачу 9).

Рассмотрим оператор $Ax(t)=\int\limits_0^1 x(s^2)ds$, если $A:L_2\left[0,1\right]\to L_2\left[0,1\right]$. Сделаем в интеграле замену $s^2=\tau$, тогда $Ax(t)=\int\limits_0^1 \frac{x(\tau)}{2\sqrt{\tau}}d\tau$. Этот оператор не является ограниченным, поскольку для последовательности $x_n(t)=n^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}\in L_2\left[0,1\right]$ получаем $\left\|x_n\right\|=\sqrt{\int\limits_0^1\left|n^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}\right|^2 d\tau}=1$, но $\left|Ax_n\right|=\left|\int\limits_0^1\frac{n^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\tau}}d\tau\right|=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 n^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2n}-1}d\tau=\sqrt{n}\to+\infty$, т.е. ограниченную последовательность этот оператор перевел в неограниченную. Поскольку оператор неограничен, то он не может быть вполне непрерывным.

4. Какой должна быть функция $\varphi\in C\left[a,b\right]$, чтобы оператор умножения на функцию $Ax(t)=\varphi(t)x(t)$, $A:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$ был вполне непрерывным?

Решение: покажем, что если функция φ хотя бы в одной точке $t_0\in\left[a,b\right]$ отлична от нуля, то соответствующий оператор A не является вполне непрерывным. Рассмотрим ограниченную последовательность $(x_n(t))_{n=1}^{\infty}\in C\left[a,b\right]$, построенную следующим образом: $x_n(t)=0$ для $a\le t\le t_0-\frac{1}{n}$ и $t_0+\frac{1}{n}\le t\le b$, $x_n(t_0)=\frac{1}{\varphi(t_0)}$, а на отрезках $\left[t_0-\frac{1}{n},t_0\right]$ и $\left[t_0,t_0+\frac{1}{n}\right]$ функция $x_n(t)$ линейна.

Предположим, что множество $(Ax_n(t))_{n=1}^{\infty}\subset C\left[a,b\right]$ – предкомпактно, тогда по теореме Арцела-Асколи оно равностепенно непрерывно, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall t_1,t_2\in\left[a,b\right]\ \left|t_1-t_2\right|<\delta\ \forall n\in\mathbb{N}\ \left|Ax_n(t_1)-Ax_n(t_2)\right|<\varepsilon$.

В частности, это верно и для $t_1=t_0$, $t_2=t_0+\frac{1}{n}$, тогда $\left|t_1-t_2\right|=\frac{1}{n}<\delta$, начиная с некоторого номера N, и, начиная с этого же номера, $\left|Ax_n(t_1)-Ax_n(t_2)\right|<\varepsilon$, но, т.к. $\left|Ax_n(t_1)-Ax_n(t_2)\right|=\left|Ax_n(t_0)-Ax_n\left(t_0+\frac{1}{n}\right)\right|=\left|1-0\right|=1$, то при $0<\varepsilon<1$, получаем противоречие. Итак, оператор ограниченное множество перевел в множество, не являющееся предкомпактным, т.е. он не вполне непрерывен.

Отметим, что здесь рассмотрен случай, когда $t_0\in(a,b)$. Случаи $t_0=a$ или $t_0=b$ рассматриваются с незначительными изменениями (задача 19).

5. Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t)=\frac{dx}{dt}$, если:

а) $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$;

б) $A: C^{(2)}[0,1] \to C^{(1)}[0,1]$;

в) $A: C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$?

Решение: вначале рассмотрим ограниченную последовательность $(t^n)_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$. Предположим, что она предкомпактна в $C[0,1]$, тогда по теореме Арцела-Асколи она равностепенно непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ \forall t_1, t_2 \in [0,1]$ $|t_1 - t_2| < \delta \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$. В частности, это верно для $t_1 = 1$ и $t_2 = 1 - \dfrac{1}{n}$, тогда $|t_1 - t_2| = \dfrac{1}{n} < \delta$, начиная с некоторого номера, поэтому, начиная с данного номера, для всех $\varepsilon > 0$ $|t_1^n - t_2^n| < \varepsilon$. Однако $|t_1^n - t_2^n| = \left|1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right| = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$, и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $1 - \dfrac{1}{e} \le \varepsilon$, следовательно, выбирая изначально $0 < \varepsilon < 1 - \dfrac{1}{e}$, получаем противоречие, т.е. множество функций $(t^n)_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$ не является предкомпактным в $C[0,1]$.

а) Рассмотрим множество $M = \left(x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} \subset C^{(1)}[0,1]$, $t \in [0,1]$. Оно ограничено в $C^{(1)}[0,1]$, поскольку

$$\|x_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x_n'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{t^{n+1}}{n+1}\right| + \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = \frac{1}{n+1} + 1 < 2 .$$

Множество $AM = \left(Ax_n(t) = t^n\right)_{n=1}^{\infty} \subset C[0,1]$, $t \in [0,1]$, как было показано выше, не является предкомпактным в $C[0,1]$, следовательно, оператор дифференцирования $A: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ не является вполне непрерывным.

б) Рассмотрим множество $M = \left(x_n(t) = \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \subset C^{(2)}[0,1]$, $t \in [0,1]$. Оно ограничено в $C^{(2)}[0,1]$, поскольку $\|x_n\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n'(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n''(t)| =$

$$= \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{t^{n+2}}{(n+2)(n+1)}\right| + \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{t^{n+1}}{n+1}\right| + \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + 1 < 3.$$

Покажем, что множество $AM = \left(Ax_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} \subset C^{(1)}[0,1]$, $t \in [0,1]$ не является предкомпактным в $C^{(1)}[0,1]$.

Действительно, если $x \in C^{(1)}\left[0,1\right]$, то $\|x\|_{C^{(1)}} = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| = \|x\|_C + \|x'\|_C$, тогда $\|x\|_{C^{(1)}} \ge \|x'\|_C$. Поэтому, если множество функций предкомпактно в $C^{(1)}\left[0,1\right]$, то множество, состоящее из производных этих функций, тем более предкомпактно в $C\left[0,1\right]$. Но это не так, поскольку множество, состоящее из производных элементов AM, имеет вид $\left(t^n\right)_{n=1}^{\infty}$ и не является предкомпактным в $C\left[0,1\right]$.

в) Пусть $M \subset C^{(2)}\left[0,1\right]$ – произвольное ограниченное множество, т.е. $\forall x(t) \in M \quad \exists R > 0$: $\|x\| \le R$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x''(t)| \le R$, откуда следует, что $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| \le R$, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le R$, $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x''(t)| \le R$.

Рассмотрим множество $AM = \left\{Ax(t) = x'(t) : x(t) \in M\right\}$. Тогда каждая функция из AM непрерывно дифференцируема, а из неравенства $\sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \le R$ следует, что $\forall t \in \left[0,1\right] \; |x'(t)| \le R$, т.е. множество AM равномерно ограничено. Покажем, что AM равностепенно непрерывно, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$: $\forall t_1, t_2 \in \left[0,1\right]$ $|t_1 - t_2| < \delta \;\; \forall x(t) \in M \;\; |Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon$. По теореме Лагранжа, при $\xi \in \left(t_1, t_2\right)$: $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = |x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\xi)||t_1 - t_2| < \delta|x''(\xi)| \le \delta \sup\limits_{t\in[0,1]}|x''(t)| = \delta R = \varepsilon$, при выборе $\delta = \dfrac{\varepsilon}{R}$. По теореме Арцела-Асколи множество AM предкомпактно, следовательно оператор A вполне непрерывен.

6. Рассмотрим оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, ...)$, $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2$ (диагональный оператор). Найти условие на последовательность $\left(\lambda_k\right)_{k=1}^{\infty}$, достаточное для того, чтобы оператор A был вполне непрерывен.

Решение: в п. 1.4 было показано, что этот оператор ограничен тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\left(\lambda_k\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена. Покажем, что оператор A является вполне непрерывным, если $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$. Рассмотрим ограниченное множество $M \subset l_2$, т.е. $\forall x \in M \quad \exists R > 0$: $\|x\| \le R$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$, то последовательность $\left(\lambda_k\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, оператор A ограничен, и ограниченное множество M он переводит в ограниченное множество AM. В силу критерия предкомпактности в l_2, ограниченное множество $AM \in l_2$ будет предкомпактно, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall Ax = (A\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in AM$ $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|A\xi_k|^2 < \varepsilon$ (см. часть I, раздел 1, п. 1.6, задача 17). Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall k > N \;\; |\lambda_k| < \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{R}$. Тогда $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|A\xi_k|^2 = \sum\limits_{k=N}^{\infty}|\lambda_k\xi_k|^2 = \sum\limits_{k=N}^{\infty}|\lambda_k|^2|\xi_k|^2 <$

$< \dfrac{\varepsilon}{R^2}\sum_{k=N}^{\infty}|\xi_k|^2 \le \dfrac{\varepsilon}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 = \dfrac{\varepsilon}{R^2}\|x\|^2 = \varepsilon$. Итак, множество AM предкомпактно, т.е. оператор A вполне непрерывен.

7. Пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор, A^*A – вполне непрерывный оператор. Доказать, что оператор A также вполне непрерывен.

Решение: рассмотрим ограниченное множество $M \subset H$, т.е. $\forall x \in M$ $\exists R > 0$: $\|x\| \le R$. Поскольку A^*A – вполне непрерывен, то множество A^*AM – предкомпактно, т.е. для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ у последовательности A^*Ax_n найдется сходящаяся подпоследовательность $\left(A^*Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ (в замыкании A^*AM, в силу секвенциальной компактности компактного множества).

Поскольку сходящаяся последовательность фундаментальна, то $\left(A^*Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, т.е., $\lim\limits_{k,l\to\infty}\left\|A^*Ax_{n_k} - A^*Ax_{n_l}\right\| = \lim\limits_{k,l\to\infty}\left\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\right\| = 0$.

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left\|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\right\|^2 = \left(Ax_{n_k} - Ax_{n_l}, Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\right) = \left(A(x_{n_k} - x_{n_l}), A(x_{n_k} - x_{n_l})\right) =$$
$$= \left(A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}\right) \le \left\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\right\| \cdot \left\|x_{n_k} - x_{n_l}\right\| \le$$
$$\le \left\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\right\| \cdot \left(\left\|x_{n_k}\right\| + \left\|x_{n_l}\right\|\right) \le 2R\left\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\right\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k,l \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{k,l\to\infty}\left\|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\right\| = 0$, т.е. последовательность $\left(Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поскольку пространство H полно, то подпоследовательность $\left(Ax_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ сходится.

Итак, в множестве AM всякая последовательность имеет сходящуюся (в замыкании AM) подпоследовательность, следовательно, замыкание множества AM секвенциально компактно, т.е. компактно, а само множество AM – предкомпактно. Следовательно, оператор A вполне непрерывен.

8. Пусть $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H, а Y – банахово пространство. Доказать, что если $A: H \to Y$ – такой линейный ограниченный оператор, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|Ae_k\|^2$ сходится, то A – вполне непрерывен.

Решение: по заданному оператору $A: H \to Y$ построим последовательность операторов $A_n: H \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ следующим образом. Вначале зададим оператор A_n на элементах базиса $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$ с помощью равенств: $A_n e_k = Ae_k$, если $k \le n$ и $A_n e_k = 0$, если $k > n$. Поскольку $\left(e_k\right)_{k=1}^{\infty}$ – базис в H, то в силу критерия базиса $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$. Распространяя оператор A_n на все пространство

H, будем иметь $\forall x \in H \quad A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) A e_k$. Следовательно, все операторы A_n конечномерны, а значит, вполне непрерывны (см. задачу 3).

Далее, очевидно, что $\forall x \in H \quad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) A e_k$, поэтому, применяя неравенство Гельдера для рядов, $\forall n \in \mathbb{N}$ получаем, что:

$$\|Ax - A_n x\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k) A e_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)| \|A e_k\| \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу неравенства Бесселя, $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \|x\|$. Поскольку по условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|A e_k\|^2$ сходится, то $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \underset{n \to \infty}{\to} 0$, как остаток сходящегося ряда. Тогда $\|A - A_n\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax - A_n x\|}{\|x\|} \le \sup_{x \ne 0} \frac{\|x\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\|x\|} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\|A - A_n\| \to 0$, т.е. $A_n \rightrightarrows A$. По теореме о подпространстве вполне непрерывных операторов A – вполне непрерывен.

Отметим, что $A_n = AP_n$, где P_n – проекционный оператор на подпространство L_n, натянутое на векторы $e_1, ..., e_n$ (см. задачу 15).

9. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{|t - s|^{\alpha}} ds$?

Решение: при $\alpha \ge 1$ оператор не является вполне непрерывным по аналогии с примером 3-а, поэтому далее будем рассматривать случай $\alpha < 1$. В этом случае для любой функции $x(t) \in C[0,1]$ $|Ax(t)| \le \int_0^1 \frac{|x(s)|}{|t - s|^{\alpha}} ds \le \|x\| \int_0^1 \frac{ds}{|t - s|^{\alpha}}$, и, поскольку $\int_0^1 \frac{ds}{|t - s|^{\alpha}} = \int_0^t \frac{ds}{(t - s)^{\alpha}} + \int_t^1 \frac{ds}{(s - t)^{\alpha}} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(1-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \frac{2}{1-\alpha}$ при всех $t \in [0,1]$, то $\|Ax\| \le \frac{2}{1-\alpha} \|x\|$, т.е. оператор A ограничен.

Рассмотрим последовательность операторов $A_n x(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{|t - s|^{\alpha} + \frac{1}{n}} ds$, $n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что при каждом фиксированном n оператор A_n представляет собой интегральный оператор с ядром $K_n(t,s)=\dfrac{1}{|t-s|^{\alpha}+\dfrac{1}{n}}$, которое является непрерывной функцией по совокупности своих аргументов. По теореме о вполне непрерывности интегрального оператора каждый A_n вполне непрерывен. Если покажем, что $A_n \rightrightarrows A$, то, по теореме о подпространстве вполне непрерывных операторов, оператор A также окажется вполне непрерывным. Имеем:

$$\|A_n x - Ax\| = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^{\alpha}+\frac{1}{n}}ds - \int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^{\alpha}}ds\right| \le \sup_{t\in[0,1]}\int_0^1\left|\frac{1}{|t-s|^{\alpha}+\frac{1}{n}}-\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}\right||x(s)|ds \le$$

$$\le \|x\|\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1\left(\frac{1}{|t-s|^{\alpha}}-\frac{1}{|t-s|^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)ds = \|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{(1-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^1\frac{ds}{|t-s|^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^t\frac{ds}{(t-s)^{\alpha}+\frac{1}{n}}+\frac{(1-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_t^1\frac{ds}{(s-t)^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}+\frac{(1-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^{1-t}\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)\le$$

$$\le\|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)+\|x\|\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{(1-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\int_0^{1-t}\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right).$$

Таким образом, $\|A_n x - Ax\|\le 2\|x\|\left(\dfrac{1}{1-\alpha}-\displaystyle\int_0^1\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)$, поскольку средствами дифференциального исчисления легко показать, что обе функции под знаками $\sup$ строго монотонны (первая возрастает, вторая убывает). Отсюда получаем, что $\|A_n - A\| = \sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\|A_n x - Ax\|}{\|x\|}\le 2\left(\dfrac{1}{1-\alpha}-\displaystyle\int_0^1\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\right)$. Ясно, что $\dfrac{1}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\dfrac{1}{\tau^{\alpha}}$, причем последовательность функций $\dfrac{1}{\tau^{\alpha}+\frac{1}{n}}$ монотонна по n, а сами эти функции суммируемы на отрезке $[0,1]$ в силу их интегрируемости по Риману. Далее, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha + \frac{1}{n}} \le \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, то выполнены все условия теоремы Б. Леви о монотонной сходимости, поэтому предельная функция $\frac{1}{\tau^\alpha}$ суммируема и $\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha + \frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Таким образом, $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, что и означает, что $A_n \rightrightarrows A$.

10. Пусть E – бесконечномерное банахово пространство, $A: E \to E$ – вполне непрерывный оператор. Доказать, что его множество значений $R(A)$ не является замкнутым множеством.

Решение: пусть $R(A) = \overline{R(A)}$. Поскольку E – банахово и $R(A) \subset E$, то $R(A)$ – банахово. Представим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(0)$, где $S_n(0) = \{x \in E : \|x\| \le n\}$. Тогда $R(A) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} AS_n(0)$. Поскольку оператор A вполне непрерывен, а каждый шар $S_n(0)$ ограничен, то $AS_n(0)$ – предкомпактно, т.е. $\overline{AS_n(0)}$ – компактно. В силу теоремы о нигде не плотности компакта $AS_n(0)$ – нигде не плотно. Таким образом, банахово пространство $R(A)$ оказалось представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Противоречие с теоремой Бэра.

11. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, если $Ax(t) = \sqrt{t}x(t)$.

Решение: рассмотрим множество $N = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, где $y_n = \begin{cases} 2^n, t \in E_n \\ 0, t \in [0,1] \setminus E_n \end{cases}$, $E_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]$. Поскольку $\|y_n\| = \int\limits_{E_n} 2^n dt = 1$, то N – ограничено. Далее, поскольку при $n > m$ $E_n \subset E_m$, то $\|y_n - y_m\| = \int\limits_{E_n} (2^n - 2^m)dt + \int\limits_{E_m \setminus E_n} 2^m dt \ge \int\limits_{E_n} (2^n - 2^m)dt = 1 - 2^{m-n} \ge \frac{1}{2}$. Таким образом, из последовательности (y_n) нельзя выделить ни одной фундаментальной, а значит, и сходящейся подпоследовательности, поэтому множество N не может быть предкомпактно. Возьмем $M = \left(\frac{y_n}{\sqrt{t}}\right)_{n=1}^{\infty}$ – прообраз N. Если множество M ограничено, то оператор A не будет вполне непрерывным.

При $n \geq 1$ $\left\|\frac{y_n}{\sqrt{t}}\right\| = \int\limits_{E_n} \frac{|y_n|}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{1-2^{-n}}} \int\limits_{E_n} |y_n| dt = \frac{1}{\sqrt{1-2^{-n}}} \|y_n\| = \frac{1}{\sqrt{1-2^{-n}}} \leq \sqrt{2}$.

12. Доказать, что, если X – рефлексивное пространство, а Y – банахово, то линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$, который переводит всякую слабо сходящуюся последовательность пространства X в сильно сходящуюся последовательность пространства Y, является вполне непрерывным.

Решение: пусть $M \subset X$ – ограниченное множество, $AM \subset Y$ – его образ. Рассмотрим произвольную последовательность $\{Ax_n\} \subset AM$ и покажем, что из нее можно выделить сходящуюся в Y подпоследовательность. Тем самым, множество AM будет предкомпактно.

Пусть X сепарабельно. В силу рефлексивности сепарабельно и X^{**}, а, значит, и X^* (см. пример 5 п. 2.3). Тогда всякое ограниченное подмножество X^{**} является *-слабо секвенциально предкомпактным (в п. 2.5 это было доказано для замкнутого шара, но доказательство без изменений проходит для любого ограниченного множества). В частности, ограниченная последовательность πx_n содержит *-слабо сходящуюся в X^{**} подпоследовательность πx_{n_k}, т.е. $\forall \varphi \in X^*$ $\pi x_{n_k}(\varphi) \to \pi x_0(\varphi)$. Отсюда $\forall \varphi \in X^*$ $\varphi(x_{n_k}) \to \varphi(x_0)$, т.е. $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. По условию $Ax_{n_k} \to Ax_0$, что и требовалось доказать.

Пусть X не сепарабельно. Обозначим N – замыкание линейной оболочки последовательности $\{x_n\}$. Тогда N, очевидно, сепарабельно (как банахово пространство со счетным базисом), рефлексивно (как замкнутое подпространство рефлексивного пространства) и слабо замкнуто (см. задачу 19 п. 2.5).

Пусть $\{x_n\}, x_0 \subset N$. Докажем вспомогательное утверждение: $x_n \rightharpoonup x_0$ в $X^* \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x_0$ в N^*. Пусть сперва $x_n \rightharpoonup x_0$ в X^*, т.е. $\forall \varphi \in X^*$ $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ и допустим, что $\exists f_0 \in N^*$: $f_0(x_n) \not\to f_0(x_0)$. По теореме Хана-Банаха $\exists \varphi_0 \in X^*$: $\varphi_0|_N = f_0$, тогда $\varphi_0(x_n) = f_0(x_n) \not\to f_0(x_0) = \varphi_0(x_0)$ – противоречие. Пусть теперь $x_n \rightharpoonup x_0$ в N^*, т.е. $\forall f \in N^*$ $f(x_n) \to f(x_0)$. Допустим, что $\exists \varphi_0 \in X^*$: $\varphi_0(x_n) \not\to \varphi_0(x_0)$, тогда $\exists f_0 = \varphi_0|_N \in N^*$ и $f_0(x_n) = \varphi_0(x_n) \not\to \varphi_0(x_0) = f_0(x_0)$ – противоречие.

Теперь, в силу доказанного выше, у последовательности $\{x_n\} \subset N$ найдется подпоследовательность $x_{n_k} \rightharpoonup x_0 \in N$ в N^*, откуда $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ в X^* и по условию $Ax_{n_k} \to Ax_0$.

Задачи для самостоятельного решения

(общие свойства вполне непрерывных операторов)

1. Доказать, что всякий линейный ограниченный оператор $A: X \to Y$ является вполне непрерывным, если пространство Y конечномерно.

Указание: воспользоваться определением предкомпактности и критерием компактности в $\mathbb{R}^n$.

2. Показать, что тождественный оператор $I: X \to X$ не является вполне непрерывным, если пространство X бесконечномерно.

Указание: воспользоваться теоремой о некомпактности шара.

3. Показать, что всякий конечномерный оператор вполне непрерывен.

4. Используя критерий вполне непрерывности показать, что оператор $A: X \to H$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда $A = K_1 + K_2$, где $\|K_1\| < 1$, а K_2 – конечномерен.

5. Доказать, что область значений вполне непрерывного оператора сепарабельна.

Указание: рассмотреть шары $\|x\| \le n$, $n \in \mathbb{N}$ *и воспользоваться теоремой о сепарабельности компакта. См. также пример 10.*

6. Доказать, что вполне непрерывный оператор не может иметь ограниченного обратного.

Указание: рассмотреть тождественный оператор $I = A \cdot A^{-1}$.

7. Используя критерий вполне непрерывности доказать, что оператор $A: X \to H$ является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{A_n\}: X \to H$ конечномерных операторов, равномерно сходящаяся к A.

8. Доказать достаточность условия теоремы о вполне непрерывности сопряженного оператора.

Указание: использовать равенство $(A^*)^* = A$.

9. Доказать, что всякий линейный ограниченный функционал является вполне непрерывным оператором.

10. Доказать, что любой проектор в гильбертовом пространстве вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он проектирует на подпространство конечной размерности (т.е. является конечномерным оператором).

11. Может ли оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{k(t,s)}{\sqrt{s}} x(s)ds$, $k(t,s)$ – непрерывная функция при $0 \le t, s \le 1$, иметь ограниченный обратный?

Указание: показать, что оператор вполне непрерывен.

12. Пусть E – банахово пространство и $A: E \to E$ – линейный ограниченный оператор. Пусть существует число $m > 0$ такое, что для любого $x \in E$ выполняется $\|Ax\| \ge m\|x\|$. Может ли оператор A быть вполне непрерывным?

13. Пусть ядро $k(t,s)$, определенное на множестве $[a,b] \times [a,b]$, представляется в виде $k(t,s) = \frac{k_1(t,s)}{|t-s|^\alpha}$, где $k_1(t,s)$ – непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция. Доказать, что если $\alpha < 1$, то оператор $Ax(t) = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)ds$, $A: C[a,b] \to C[a,b]$, является вполне непрерывным.

14. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, $A_n : X \to Y$ – последовательность вполне непрерывных операторов, $A_n \to A$ (т.е. поточечно). Всегда ли оператор A также является вполне непрерывным?

Указание: в пространстве l_2 рассмотреть операторы $P_n : l_2 \to l_2$, действующие по формуле $P_n x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, $x = (\xi_k) \in l_2$.

15. Доказать, что любой линейный ограниченный оператор $A: H \to H$ является поточечным пределом последовательности вполне непрерывных операторов.

Указание: рассмотреть последовательность операторов $A_n = AP_n$ (см. предыдущую задачу и пример 8).

16. Пусть X,Y – линейные нормированные пространства, причем X – бесконечномерно, $A: X \to Y$ – вполне непрерывный оператор. Доказать, что найдется последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to 0$.

Указание: воспользоваться задачей 6.

17. Пусть (e_n) – ортонормированный базис в H, $A: H \to H$ – вполне непрерывный оператор. Доказать, что $Ae_n \to 0$.

18. Показать, что интегральный оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемый равенством $Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds$, ядро которого $k(t,s)$ – непрерывно в квадрате $[0,1] \times [0,1]$, является вполне непрерывным.

Указание: воспользоваться критерием предкомпактности в $L_2[0,1]$.

19. В примере 4 обосновать, что оператор A не является вполне непрерывным, если $t_0 = a$ или $t_0 = b$.

Указание: предположить противное и воспользоваться непрерывностью функции $\varphi(t)$ на $[a,b]$. Либо повторить рассуждения примера 4.

20. Какой должна быть функция $a(t)$, чтобы оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, заданный с помощью равенства $Ax(t) = a(t)x(t)$ (оператор умножения на функцию) был вполне непрерывным?

Указание: показать, что функция $a(t)$ должна быть равна нулю почти всюду.

21. Доказать, что если оператор $A: H \to H$ вполне непрерывен, то оператор $A^* A: H \to H$ – также вполне непрерывен.

22. Используя пример 7, показать, что если $A: H \to H$ вполне непрерывен, то и $A^* : H \to H$ вполне непрерывен.

23. Пусть ядро $k(t,s)$, определенное на множестве $[a,b] \times [a,b]$, представляется в виде $k(t,s) = \dfrac{k_1(t,s)}{|t-s|^\alpha}$, где $k_1(t,s)$ – ограниченная измеримая по Лебегу на множестве $[a,b] \times [a,b]$ функция. Доказать, что если $\alpha < \dfrac{1}{2}$, то интегральный

оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $Ax(t) = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)ds$, является вполне непрерывным.

Указание: воспользоваться примером 1 и задачами 13 и 18.

24. Пусть функция $k(t,s)$, определенная на $[a,b]$, удовлетворяет условиям:

а) существует постоянная $C > 0$ такая, что $\int\limits_a^b |k(t,s)| ds \le C$ $(\forall t \in [a,b])$;

б) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ $(t_1, t_2 \in [a,b])$ следует, что $\int\limits_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)| ds < \varepsilon$.

Доказать, что интегральный оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)ds$, вполне непрерывен.

25. Доказать, что, если банахово пространство X рефлексивно, то любой ограниченный линейный оператор $A: X \to l_1$ вполне непрерывен.

26. Доказать, что, если банахово пространство Y рефлексивно, то любой ограниченный линейный оператор $A: c_0 \to Y$ вполне непрерывен.

27. Доказать, что всякий ограниченный оператор $A: l_r \to l_p$, $1 \le p < r < \infty$ вполне непрерывен.

28. Доказать, что слабо изометрически эквивалентные операторы вполне непрерывны одновременно.

29. Верно ли, что, если в бесконечномерном нормированном пространстве $A^2 = 0$, то оператор A вполне непрерывен?

Указание: рассмотреть в пространстве l_2 *оператор* $Ax = (\eta_1, \eta_2, ...)$, $\eta_i = 0$ *при четных* i, $\eta_i = \xi_{i-1}$ *– при нечетных* i.

Задачи для самостоятельного решения

(проверка вполне непрерывности операторов)

1. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = tx(t)$?

Указание: для всех $n \in \mathbb{N}$ *рассмотреть последовательность* $x_n(t) = t^{n-1}$.

2. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau) d\tau$?

3. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1)$?

4. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=t\int\limits_0^1 e^{ts}x(s)ds$?

5. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=x(t^2)$?

6. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[-1,1]\to C[-1,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]$?

Указание: рассмотреть последовательность $x_n(t)=t^{2n}$.

7. Доказать, что оператор $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^t \tau x(\tau)d\tau$, вполне непрерывен.

8. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=x(0)+tx(1)$?

9. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^1 e^{t}x(s)ds$?

10. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^1 x(s)ds$?

11. Является ли вполне непрерывным оператор $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^1 x(s)ds$?

12. Является ли вполне непрерывным оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^1 (s\sin t+s^2\cos t)x(s)ds$?

13. Является ли вполне непрерывным оператор $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t)=\int\limits_0^1 (s\sin t+s^2\cos t)x(s)ds$?

14. Доказать, что оператор вложения $A:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$, действующий по формуле $Ax(t)=x(t)$, где $x(t)\in C^{(1)}[a,b]$, является вполне непрерывным.

15. При каких α,β и $\gamma>0$ оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, определяемый формулой $Ax(t)=\int\limits_0^1 t^{\alpha}s^{\beta}x(s^{\gamma})ds$ является вполне непрерывным?

16. При каких α, β и $\gamma > 0$ оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определяемый формулой $Ax(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma) ds$ является вполне непрерывным?

17. Будет ли вполне непрерывным оператор вложения $A: l_1 \to l_2$, т.е. $Ax = x$ для $x \in l_1$?

18. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)ds}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}}$?

Указание: представить $\frac{1}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}} = \frac{\sqrt[3]{|t-s|}}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{|t-s|}}$ *и показать, что функция* $\frac{\sqrt[3]{|t-s|}}{\sqrt[3]{|\cos t - \cos s|}}$ *непрерывна по совокупности аргументов.*

19. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)ds}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}}$?

20. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)ds}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}}$?

21. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{s - \frac{1}{2}} ds$?

22. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{s - \frac{1}{2}} ds$?

23. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^\alpha} ds$?

24. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x\left(\sqrt{s}\right)}{s^{\frac{5}{4}}} ds$?

25. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(\sqrt{s})}{s^{\frac{5}{4}}} ds$?

26. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{\sin(t-s)} ds$?

27. Является ли вполне непрерывным оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{\sin(t-s)} ds$?

28. Рассмотрим оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, определяемый формулой $Ax(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s^\alpha)ds$, где $k(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$. Доказать, что при $0 < \alpha < 2$ оператор A вполне непрерывен.

29. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, определяемый формулой $Ax(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s^\alpha)ds$, где $k(t,s) \in C([0,1]\times[0,1])$. При каких α оператор A является вполне непрерывным?

30. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_2 \to l_2$, определяемый формулой $Ax = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots\right)$, $x = (\xi_k) \in l_2$?

31. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_2 \to l_2$, определяемый формулой $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, $x = (\xi_k) \in l_2$?

32. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_2 \to l_2$, определяемый формулой $Ax = \left(0, \xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots\right)$, $x = (\xi_k) \in l_2$?

Указание: воспользоваться теоремой о вполне непрерывности произведения.

33. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to L_1[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$?

Указание: представить оператор в виде произведения вполне непрерывного и ограниченного операторов.

34. Является ли вполне непрерывным оператор $Ax(t) = \int\limits_2^5 e^{ts}x(s)ds$ в случаях $A: C[2,5] \to C[2,5]$, $A: L_2[2,5] \to L_2[2,5]$, $A: C[2,5] \to L_1[2,5]$, $A: L_1[2,5] \to C[2,5]$?

35. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_1 \to l_2$, определяемый формулой $Ax = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots\right)$, $x = (\xi_k) \in l_1$? Тот же вопрос для $A: l_2 \to l_1$.

36. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C^{(1)}[0,2] \to C[0,2]$, действующий по формуле $Ax(t) = \ln(1+t)x(t)$?

37. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_p \to l_p$, определяемый формулой $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots)$, $x = (\xi_k) \in l_p$?

38. Является ли вполне непрерывным оператор $A: l_p \to l_p$, определяемый формулой $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, 0, 0, \ldots)$, $x = (\xi_k) \in l_p$?

39. Является ли вполне непрерывным оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле $Ax(t) = |x(t)|$?

40. Пусть дан оператор $Ax = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{2} - \xi_1, \frac{\xi_3}{2} - \xi_2, \ldots\right): l_1 \to l_1$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_1$. Исследовать его ограниченность, вполне непрерывность, найти сопряженный оператор, а также спектр и резольвенту.

41. Доказать, что оператор $Ax(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$, действующий в пространстве $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$ не является вполне непрерывным, используя теорему об усиленной непрерывности вполне непрерывного оператора.

42. Доказать, что оператор $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ вполне непрерывен в пространстве $C^{(n)}[0,1]$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Указание: представить оператор в виде произведения ограниченного оператора $B: C^{(n)}[0,1] \to C^{(n+1)}[0,1]$, $Bx(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$ *и вполне непрерывного оператора* $C: C^{(n+1)}[0,1] \to C^{(n)}[0,1]$ $Cx(t) = x(t)$.

43. Доказать, что оператор $Ax = \left(\xi_1, \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{2}, \ldots\right)$ не является вполне непрерывным ни в одном из пространств $l_p, 1 < p < \infty$, c, c_0.

3.5. Фредгольмовы операторы

Определение: пусть K – вполне непрерывный оператор, а I – тождественный оператор. Оператор $I+K$ называется фредгольмовым оператором.

Теорема (о ядре фредгольмова оператора): ядро фредгольмова оператора конечномерно.

Доказательство: пусть $T=I+K$ – фредгольмов оператор. Рассмотрим его ядро $\ker T=\{x:Tx=0\}=\{x:(I+K)x=0\}=\{x:x+Kx=0\}=\{x:Kx=-x\}$.

Допустим, что это ядро бесконечномерно и рассмотрим единичный шар $\{x\in\ker T:\|x\|\le 1\}$. Поскольку на элементах ядра $Kx=-x$, то под действием оператора K этот единичный шар перейдет сам в себя и, значит, поскольку в бесконечномерном пространстве шар не предкомпактен, то образ единичного шара не будет предкомпактен. С другой стороны, поскольку K вполне непрерывен, то он ограниченное множество переводит в предкомпактное. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (об образе фредгольмова оператора): пусть H – гильбертово пространство, $T:H\to H$ – фредгольмов оператор, тогда его образ $\operatorname{Im}T$ – замкнутое множество.

Доказательство: пусть $y_n\in\operatorname{Im}T$, т.е. $\exists x_n\in H$: $y_n=Tx_n=x_n+Kx_n$ и при этом $y_n\to y$. Можно считать, что $x_n\perp\ker T$ (если это не так, то вместо x_n можно рассмотреть векторы x_n-u_n, где u_n – проекция x_n на $\ker T$. Тогда $x_n-u_n\perp\ker T$ и $T(x_n-u_n)=Tx_n-Tu_n=Tx_n$, т.к. $u_n\in\ker T$). Покажем, что $\|x_n\|\le c$. Допустим, что это не так, тогда найдется подпоследовательность x_{n_k}: $\|x_{n_k}\|\to\infty$, откуда (поскольку $x_n+Kx_n\to y$) следует, что $\dfrac{x_{n_k}+Kx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\to 0$.

Поскольку оператор K вполне непрерывен, то ограниченное множество $\left\{\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right\}$ переходит в предкомпактное $\left\{K\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right\}$, т.е. в нем можно найти подпоследовательность $\{Kx_{n_\alpha}\}$, имеющую предел, причем $x_{n_\alpha}\subset\left\{\dfrac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right\}$ и $\|x_{n_\alpha}\|=1$. Но тогда из условия $\dfrac{x_{n_k}+Kx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\to 0$ следует, что $x_{n_\alpha}\to z\in H$, $\|z\|=1$. Поскольку $Tx_{n_\alpha}\to 0$, то $Tz=0$, т.е. $z\in\ker T$. С другой стороны, $x_{n_\alpha}\perp\ker T$, следовательно, в силу замкнутости ортогонального дополнения, $z\perp\ker T$. Таким образом, $z=0$. Противоречие. Итак, последовательность $\|x_n\|$ ограничена. Но тогда множество $\{Kx_n\}$ предкомпактно, т.е. содержит сходящуюся подпоследовательность $Kx_{n_m} \subset \{Kx_n\}$. Но тогда, поскольку $x_n + Kx_n \to y$, то сходится и подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$. Пусть $x_{n_m} \to x$, тогда из условия $y_n \to y$, окончательно получаем $y = \lim\limits_{m\to\infty} y_{n_m} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(x_{n_m} + Kx_{n_m}\right) = x + Kx = Tx$ и $y \in \mathrm{Im}T$.

Теорема доказана.

Замечание: из доказанной теоремы и примера 4, разобранного в п. 2.7 следует, что $H = \ker T \oplus \mathrm{Im}T^*$ и $H = \ker T^* \oplus \mathrm{Im}T$.

Теорема (первая теорема Фредгольма): пусть H – гильбертово пространство, $T: H \to H$ – фредгольмов оператор, тогда неоднородное уравнение $Tx = y$ имеет решения при тех и только тех $y \in H$, которые ортогональны каждому решению сопряженного уравнения $T^*x = 0$.

Доказательство: в силу представления $H = \ker T^* \oplus \mathrm{Im}T$ получаем, что $y \perp \ker T^* = \left\{x : T^*x = 0\right\} \Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}T$.

Теорема доказана.

Замечание: обозначим $M_n = \ker T^n$, $n \in \mathbb{N}$, тогда M_n – замкнутое подпространство в H, т.е. M_n – гильбертово. При этом ясно, что, если $T^n x = 0$, то $T^{n+1}x = T(T^n x) = T0 = 0$, т.е. $M_n \subset M_{n+1}$. Тогда $M_{n+1} = M_n \oplus M_n{}^{\perp}$, откуда следует, что, если $M_n \neq M_{n+1}$, то $\exists x_{n+1} \in M_{n+1}$: $\|x_{n+1}\| = 1$ и $x_{n+1} \perp M_n$, т.е. $\forall x \in M_n$ $x_{n+1} \perp x$.

Теорема (вторая теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма): пусть H – гильбертово пространство, $T: H \to H$ – фредгольмов оператор, тогда либо уравнение $Tx = y$ имеет единственное решение при любой правой части $y \in H$, либо однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевое решение.

Доказательство: 1. Докажем, что $\exists j : M_j = M_{j+1}$ (см. замечание выше). От противного: пусть все M_n различны, тогда существует ортонормированная последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_{n+1} \in M_{n+1}$ и $x_{n+1} \perp M_n$. Возьмем произвольные $l > m$, тогда $Kx_l - Kx_m = \left(x_l + Kx_l - Kx_m\right) - x_l = \left(Tx_l - Kx_m\right) - x_l = z - x_l$. Поскольку $x_l \in M_l = \ker T^l$, то $T^l x_l = 0$. Кроме того, по построению $T^{l-1}x_m = 0$ (при $l = m+1$ $T^m x_m = 0$, при $l > m+1$ $T^{l-1}x_m = T^{l-m-1}\left(T^m x_m\right) = 0$). Отсюда получаем, что $T^{l-1}z = T^l x_l - T^{l-1}Kx_m = 0 - KT^{l-1}x_m = 0$ (операторы K и T^{l-1} можно переставлять местами – см. задачу 2). Отсюда $z \in \ker T^{l-1} = M_{l-1}$, т.е. $z \perp M_l$. Тогда по теореме Пифагора $\|Kx_l - Kx_m\|^2 = \|z\|^2 + \|x_l\|^2 \geq \|x_l\|^2 = 1$, следовательно, из последовательности $\{Kx_n\}$ нельзя выделить ни одной сходящейся подпоследовательности, что противоречит предкомпактности множества $\{Kx_n\}$.

2. Покажем, что $\mathrm{Im}T = H \Leftrightarrow \ker T = \{0\}$. Пусть $\mathrm{Im}T = H$, но $\ker T \neq \{0\}$, тогда $\exists x_1 \neq 0 : x_1 \in \ker T = M_1$. Поскольку $\mathrm{Im}T = H$, то уравнение $Tx = x_1$ имеет ре-

шение x_2, причем $T^2x_2 = T(Tx_2) = Tx_1 = 0$, откуда $x_2 \in \ker T^2 = M_2$. При этом $x_2 \notin M_1$, иначе имели бы $x_1 = Tx_2 = 0$. Таким образом, $M_1 \subset M_2$, но $M_1 \neq M_2$. Аналогично, если x_3 – решение уравнения $Tx = x_2$, то $x_3 \in M_3$ и $x_3 \notin M_2$. И т.д. Таким образом, ни одно из множеств M_n не совпадает с другим, что противоречит п. 1.

Обратно: пусть $\ker T = \{0\}$, тогда, в силу $H = \ker T \oplus \operatorname{Im} T^*$ получаем, что $\operatorname{Im} T^* = H$. По доказанному выше $\ker T^* = \{0\}$ и в силу $H = \ker T^* \oplus \operatorname{Im} T$ получаем, что $\operatorname{Im} T = H$.

3. В силу п. 2, если $\ker T \neq \{0\}$, то $\operatorname{Im} T \neq H$, т.е. уравнение $Tx = y$ при некоторых $y \in H$ решений не имеет. Если же $\operatorname{Im} T = H$, то $\ker T = \{0\}$ и оператор T взаимно однозначен, т.е. при любом $y \in H$ существует единственное решение уравнения $Tx = y$.

Теорема доказана.

Замечание: поскольку всякий конечномерный оператор в гильбертовом пространстве вполне непрерывен, и сумма вполне непрерывных операторов представляет собой вполне непрерывный оператор, то сумма фредгольмова оператора с конечномерным снова будет фредгольмовым оператором.

Теорема (третья теорема Фредгольма): пусть H – гильбертово пространство, $T: H \to H$ – фредгольмов оператор, тогда однородные уравнения $Tx = 0$ и $T^*x = 0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Доказательство: в силу теоремы о ядре фредгольмова оператора $\ker T$ и $\ker T^*$ конечномерны. Пусть $\{\varphi_1, ..., \varphi_\mu\}$ – ортонормированный базис в $\ker T$, $\{\psi_1, ..., \psi_\nu\}$ – ортонормированный базис в $\ker T^*$ и $\mu < \nu$. В силу равенства $H = \ker T^* \oplus \operatorname{Im} T$ получаем, что $\psi_j \perp Tx$. Обозначим $Sx = Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j$. Поскольку S – это сумма T и конечномерного оператора, то S – фредгольмов. Если $Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0$, то $Tx = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_j \psi_j$. Поскольку $\psi_j \perp Tx$, то, умножая это равенство скалярно на ψ_j, $1 \le j \le \mu$, получим, что $\alpha_j = 0$, $1 \le j \le \mu$, откуда $Tx = 0$. Но тогда $\sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0$, откуда $(x, \varphi_j) = 0$, $1 \le j \le \mu$. Таким образом, $x \in \ker T$, а с другой стороны $x \perp \varphi_j$, т.е. $x \in (\ker T)^\perp$, поэтому $x = 0$, т.е. уравнение $Sx = 0$ имеет только нулевое решение.

В силу альтернативы Фредгольма уравнение $Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}$ имеет единственное решение.

Умножим это равенство скалярно на $\psi_{\mu+1}$, и, учитывая, что $Tx \in \mathrm{Im}T$, а $\mathrm{Im}T \perp \ker T^*$ (т.е. $\mathrm{Im}T \perp \psi_{\mu+1}$), получим противоречивое равенство $0=1$. Таким образом, случай $\mu<\nu$ невозможен. Предполагая, что $\mu>\nu$ и повторяя все рассуждения аналогично для оператора T^*, снова получим противоречие, откуда $\mu=\nu$.

Теорема доказана.

Замечание: все теоремы Фредгольма справедливы и для произвольных банаховых пространств (см. [7]).

Примеры решения задач

1. Рассмотрим оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$, определенный с помощью равенства $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$. Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любом $y \in C[0,1]$.

Решение: покажем, что A – вполне непрерывен. Пусть $M \subset C[0,1]$ – произвольное ограниченное множество, т.е. $\forall x(t) \in M \;\; \exists R > 0$: $\|x\| \le R$.

Тогда $\|Ax\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^t x(\tau)d\tau \right| \le \sup\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t |x(\tau)|d\tau \le \|x\| \sup\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t 1d\tau \le R$ для произвольной функции $x(t) \in M$. Значит, $\sup\limits_{t\in[0,1]} |Ax(t)| \le R$, откуда $\forall t \in [0,1] \;\; |Ax(t)| \le R$, следовательно, множество AM равномерно ограничено. Покажем, что AM равностепенно непрерывно, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$: $\forall t_1, t_2 \in [0,1] \;\; \forall x(t) \in M \;\; |t_1 - t_2| < \delta$ $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon$. Действительно (при $t_2 > t_1$):

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = \left| \int\limits_0^{t_1} x(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_2} x(\tau)d\tau \right| = \left| \int\limits_0^{t_1} x(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_1} x(\tau)d\tau - \int\limits_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} x(\tau)d\tau \right| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(\tau)|d\tau \le \|x\| \int\limits_{t_1}^{t_2} 1d\tau \le R(t_2 - t_1) \le R|t_2 - t_1| < R\delta = \varepsilon,$$

при выборе $\delta = \dfrac{\varepsilon}{R}$. Таким образом, по теореме Арцела-Асколи, множество AM предкомпактно, а оператор A – вполне непрерывен.

Для решения задачи воспользуемся альтернативой Фредгольма (справедливой и для банаховых пространств), а именно, покажем, что однородное уравнение $x - Ax = 0$ имеет только нулевое решение. Перепишем уравнение в виде: $x(t) - \int\limits_0^t x(\tau)d\tau = 0$ или $x(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$. Тогда ясно, что $x(0) = 0$. Кроме того, поскольку интеграл с переменным верхним пределом непрерывно дифференцируем, то таковой является и левая часть уравнения. Тогда после дифференцирования получаем $x'(t)=x(t)$. Решение полученной задачи Коши – есть $x(t)\equiv 0$. Следовательно, уравнение $x-Ax=y$ имеет решение при любом $y\in C[0,1]$, т.е. существует непрерывный обратный оператор $(I-A)^{-1}:C[0,1]\to C[0,1]$ (см. задачу 1).

2. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма $\varphi(t)-\lambda\int_0^1(s^2+st)\varphi(s)ds=0$ и соответствующее ему однородное сопряженное уравнение (т.е. уравнение с сопряженным оператором) $\psi(t)-\lambda\int_0^1(t^2+st)\psi(s)ds=0$. Проверить, что при каждом $\lambda\neq 0$ эти уравнения имеют одинаковое количество линейно независимых решений.

Решение: из вида этих уравнений ясно, что их решения надо искать в виде $\varphi(t)=\alpha_1+\alpha_2 t$ и $\psi(t)=\beta_1 t+\beta_2 t^2$. Подставляя эти виды решений в соответствующие уравнения и вычисляя получившиеся при этом интегралы, приходим к системам: $\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\alpha_1+\frac{\lambda}{4}\alpha_2=0\\ \frac{\lambda}{2}\alpha_1+\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\alpha_2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\beta_1+\frac{\lambda}{4}\beta_2=0\\ \frac{\lambda}{2}\beta_1+\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\beta_2=0\end{cases}$. Эти системы имеют одинаковый определитель, равный $-\frac{\lambda^2}{72}-\frac{2}{3}\lambda+1$, поэтому, если этот определитель не обращается в 0, то системы имеют по одному тривиальному решению. Если λ совпадает с одним из корней определителя, то каждая из систем имеет по одному нетривиальному решению, например $\varphi(t)=1+\frac{4}{3}\cdot\frac{3-\lambda}{\lambda}\cdot t$, $\psi(t)=t+\frac{4}{3}\cdot\frac{3-\lambda}{\lambda}\cdot t^2$.

Этот пример иллюстрирует третью теорему Фредгольма.

3. Пусть $f\in L_2[0,1]$. Решить уравнение $\varphi(t)-\lambda\int_0^1\varphi(s)ds=f(t)$ при $\lambda\neq 0$.

Решение: решение уравнения имеет вид $\varphi(t)=C\lambda+f(t)$, откуда, подставляя это выражение в уравнение, получаем $C\lambda+f(t)-\lambda\int_0^1(C\lambda+f(s))ds=f(t)$, т.е. $C(1-\lambda)=\int_0^1 f(s)ds$. При $\lambda\neq 1$ $C=\frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 f(s)ds$ и $\varphi(t)=\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 f(s)ds+f(t)$. Если $\lambda=1$, то равенство $C(1-\lambda)=\int_0^1 f(s)ds$ принимает вид $\int_0^1 f(s)ds=0$. Таким образом, в случае $\lambda=1$, если выполняется равенство $\int_0^1 f(s)ds=0$, то C – произвольно и исходное уравнение имеет бесконечное множество решений вида $\varphi(t) = C\lambda + f(t)$. Если же $\int_0^1 f(s)ds \neq 0$, то уравнение решений не имеет.

Отметим, что оператор, задающий левую часть уравнения является фредгольмовым, а сопряженный к нему имеет вид $T^*\psi = \psi(t) - \lambda\int_0^1 \psi(s)ds$. Тогда если при $\lambda = 1$ рассмотрим однородное уравнение $\psi(t) - \int_0^1 \psi(s)ds = 0$, то ясно, что его решениями являются функции вида $\psi(t) = C_1$. Таким образом, условие $\int_0^1 f(s)ds = 0$ является условием ортогональности правой части $f(t)$ исходного уравнения всем решениям $\psi(t) = C_1$ однородного уравнения с сопряженным оператором. Итак, данный пример иллюстрирует первую теорему Фредгольма.

4. При каких $y(t) \in L_2[0,\pi]$ уравнение $\varphi(t) - \int_0^\pi \sin(t-s)\varphi(s)ds = y(t)$ имеет решение в пространстве $L_2[0,\pi]$?

Решение: в силу первой теоремы Фредгольма, исходное уравнение имеет решение только для тех функций $y(t) \in L_2[0,\pi]$, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения, т.е. решениям уравнения $\psi(t) + \int_0^\pi \sin(t-s)\psi(s)ds = 0$. Это уравнение является уравнением с вырожденным ядром $\sin(t-s) = \sin t\cos s - \cos t\sin s$ (см. дополнение), поэтому его решение ищем в виде $\psi(t) = c_1\sin t + c_2\cos t$. Подставляем этот вид в уравнение, вычисляем все интегралы, после чего получаем систему уравнений: $\begin{cases} c_1 + \dfrac{\pi}{2}c_2 = 0 \\ c_2 - \dfrac{\pi}{2}c_1 = 0 \end{cases}$. Решение этой системы $c_1 = c_2 = 0$, тогда $\psi(t) = 0$, а поскольку 0 ортогонален любой функции $y(t) \in L_2[0,\pi]$, то исходное неоднородное уравнение имеет решение (в силу альтернативы Фредгольма, единственное) при любой правой части $y(t) \in L_2[0,\pi]$.

5. Найти все вещественные значения параметров a, b и c, при которых интегральное уравнение $\varphi(t) - \lambda\int_{-1}^1 (ts + t^2s^2)\varphi(s)ds = at^2 + bt + c$ имеет решение в пространстве $L_2[-1,1]$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Решение: однородное сопряженное уравнение $\psi(t)-\lambda\int_{-1}^{1}(ts+t^2s^2)\psi(s)ds=0$ имеет решения вида $\psi(t)=c_1t+c_2t^2$, подставляя которые в это уравнение и вычисляя все получившиеся интегралы, приходим к системе $\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{\lambda}{3}\right)=0 \\ c_2\left(1-\dfrac{\lambda}{5}\right)=0 \end{cases}$.

Если $\lambda\neq 3$ и $\lambda\neq 5$, то $c_1=c_2=0$ и $\psi(t)=0$, следовательно, аналогично предыдущей задаче, исходное неоднородное уравнение имеет решение при любых значениях a,b и c. Пусть $\lambda=3$, тогда c_1 – произвольно, $c_2=0$, следовательно $\psi(t)=c_1t$ и исходное неоднородное уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда функции $\psi(t)=c_1t$ ортогональны правой части неоднородного уравнения at^2+bt+c, т.е., когда $\int_{-1}^{1}(at^2+bt+c)c_1tdt=0$. Вычисляя интеграл, получаем, что должно выполняться условие $b=0$. Пусть $\lambda=5$, тогда $c_1=0$, c_2 – произвольно, $\psi(t)=c_2t^2$ и неоднородное уравнение будет иметь решения при $\int_{-1}^{1}(at^2+bt+c)c_2t^2dt=0$, т.е. при $\dfrac{a}{5}+\dfrac{c}{3}=0$.

Итак, уравнение разрешимо в $L_2[-1,1]$ при любых $\lambda\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $b=0$ и $3a+5c=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти оператор $(I-A)^{-1}$, если оператор A задан в примере 1.

2. Пусть T – фредгольмов оператор. Доказать, что операторы T^* и T^n – фредгольмовы, причем $T^nK=KT^n$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Пусть оператор $A:l_2\to l_2$ действует по формуле $Ax=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,...)$, $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$ (диагональный оператор), где числовая последовательность $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ограничена. При каких λ_k для уравнения $Ax=y$ справедлива альтернатива Фредгольма? Третья теорема Фредгольма?

Указание: альтернатива Фредгольма справедлива, если число 0 не является предельной точкой последовательности $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, *а третья теорема справедлива, если среди чисел* λ_k *только конечное число их не равно нулю.*

4. Пусть A – оператор сдвига в пространстве l_2, действующий по формуле $Ax=(0,\xi_1,\xi_2,...)$, $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_2$. Доказать, что для уравнения $Ax=y$ альтернатива Фредгольма справедлива, а третья теорема – нет.

5. Для каких $y \in C[0,1]$ уравнение $\varphi(t) - 4\int_0^1 ts^2\varphi(s)ds = y(t)$ имеет решение?

6. Найти все вещественные значения параметра a, при которых интегральное уравнение $\varphi(t) - \lambda\int_0^1 (at - s)\varphi(s)ds = y(t)$ имеет решение при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $y \in L_2[0,1]$.

7. Найти все значения λ, при которых интегральное уравнение $\varphi(t) - \lambda\int_a^b \cos(t + s)\varphi(s)ds = y(t)$ имеет единственное решение при любом $y \in C[a,b]$, если:

а) $a = 0, b = \pi$;

б) $a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Пусть $A : X \to X$ – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X, причем $\sigma(A) = \{0\}$. Доказать, что уравнение $(I - \lambda A)x = y$ разрешимо при любой правой части $y \in X$ и любых $\lambda \in \mathbb{C}$, и что решение уравнения представимо в виде ряда $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n y$.

3.6. Спектры самосопряженных и вполне непрерывных операторов

Замечание: далее, если не оговорено противное, все рассматриваемые пространства предполагаются комплексными.

Определение: пусть A – линейный ограниченный оператор, λ – его собственное значение, тогда множество собственных векторов соответствующих этому собственному значению $\{x \neq 0 : Ax = \lambda x\}$, называется собственным подпространством, соответствующим собственному значению λ.

Теорема (о собственном подпространстве): собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$ линейного ограниченного оператора A, является замкнутым линейным многообразием (т.е. подпространством). Если оператор A вполне непрерывен, то это подпространство конечномерно.

Доказательство: обозначим $L = \{x \neq 0 : Ax = \lambda x\}$.

1. Покажем, что L – линейное многообразие, т.е. если $x_1, x_2 \in L$, α – число, то $x_1 + x_2 \in L$ и $\alpha x_1 \in L$. Поскольку $x_1, x_2 \in L$, то $Ax_1 = \lambda x_1$ и $Ax_2 = \lambda x_2$, тогда, складывая, находим, что $Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2$, откуда $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$, т.е. $x_1 + x_2 \in L$. Аналогично, поскольку $x_1 \in L$, то $Ax_1 = \lambda x_1$, откуда $\alpha Ax_1 = \alpha\lambda x_1$, т.е. $A(\alpha x_1) = \lambda(\alpha x_1)$, следовательно, $\alpha x_1 \in L$.

2. Покажем, что L – замкнуто, т.е. если $\{x_n\} \subset L$ и $x_n \to x$, то $x \in L$. Поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in L$, то $Ax_n = \lambda x_n$. Поскольку оператор A – ограничен, т.е. непрерывен, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $Ax = \lambda x$, следовательно, $x \in L$.

3. Пусть A – вполне непрерывен. Предположим, что L – бесконечномерно. Рассмотрим в L шар радиуса 1 и применим к этому шару оператор A. Поскольку на элементах L справедливо равенство $Ax = \lambda x$, то этот шар перейдет в шар радиуса λ, снова лежащий в L (в силу его линейности). По теореме о некомпактности шара, в бесконечномерном пространстве шар не может быть предкомпактным множеством. Поскольку оператор A вполне непрерывен, то он ограниченное множество переводит в предкомпактное. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (о собственных значениях самосопряженного оператора): пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда все его собственные значения действительны.

Доказательство: пусть λ – собственное значение оператора A, $x_0 \neq 0$ – соответствующий ему собственный вектор, тогда $Ax_0 = \lambda x_0$. Ясно, что $(Ax_0, x_0) = (\lambda x_0, x_0) = \lambda(x_0, x_0) = \lambda\|x_0\|^2$. С другой стороны, поскольку оператор самосопряжен, то $(Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda x_0) = \overline{\lambda}(x_0, x_0) = \overline{\lambda}\|x_0\|^2$. Таким образом, из полученных равенств заключаем, что $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана.

Теорема (об ортогональности собственных векторов): пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда его собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство: пусть $A: H \to H$ самосопряжен, т.е. $\forall x, y \in H \ \ (Ax, y) = (x, Ay)$. Пусть x_1 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, т.е. $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Пусть x_2 – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2, т.е. $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Кроме того, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и по предыдущей теореме эти собственные значения действительны.

Поскольку $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$, то $(\lambda_1 x_1, x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2)$, т.е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$, значит, $(x_1, x_2) = 0$.

Теорема доказана.

Замечание: в примере 5 п. 3.3 доказано следующее утверждение: пусть E – комплексное банахово пространство и $A: E \to E$ – линейный ограниченный оператор. Если для комплексного числа λ существует такая нормированная последовательность $\{x_n\} \subset E$ (т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|x_n\| = 1$), что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$, то $\lambda \in \sigma(A)$.

Теорема (критерий регулярного значения): пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный оператор, тогда точка λ является регулярным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\forall x \in H \ \ \exists c > 0$: $\|Ax - \lambda x\| \geq c\|x\|$.

Доказательство: пусть λ – регулярное значение оператора, A, т.е. точка резольвентного множества, тогда существует резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, являющаяся линейным и ограниченным оператором, т.е. $\|R_\lambda(A)\| = d > 0$. Тогда $\forall x \in H \ \ \|x\| = \|R_\lambda(A)(A - \lambda I)x\| \leq \|R_\lambda(A)\| \cdot \|(A - \lambda I)x\| = d\|(A - \lambda I)x\|$, откуда получаем, что $\|Ax - \lambda x\| \geq \dfrac{1}{d}\|x\|$.

Обратно: пусть $\forall x \in H \ \ \exists c > 0$: $\|Ax - \lambda x\| \geq c\|x\|$. Обозначим $y = Ax - \lambda x$ для всех $x \in H$. Множество таких элементов y обозначим L. Ясно, что L – линейное многообразие.

Покажем, что L – всюду плотно в H. По теореме о всюду плотности линейного многообразия достаточно показать, что $L^\perp = \{0\}$. Предположим противное, т.е. что $L^\perp \neq \{0\}$, т.е. $\exists x_0 \in H$, $x_0 \neq 0$: $\forall y \in L \ \ (x_0, y) = 0$. Тогда для всех $x \in H \ \ (x_0, Ax - \lambda x) = 0$ или $(x_0, (A - \lambda I)x) = 0$. Поскольку A, I – самосопряженные операторы, то $((A - \overline{\lambda} I)x_0, x) = 0$ или $(Ax_0 - \overline{\lambda} x_0, x) = 0$. Поскольку $x \in H$ – произвольный элемент, то $Ax_0 - \overline{\lambda} x_0 = 0$, т.е. $Ax_0 = \overline{\lambda} x_0$. Поскольку $x_0 \neq 0$, то $\overline{\lambda}$ – собственное значение оператора A, т.е. $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$, откуда $Ax_0 - \lambda x_0 = 0$. Далее, по условию $\|Ax_0 - \lambda x_0\| \geq c\|x_0\|$, откуда $x_0 = 0$ – противоречие.

Покажем, что L – замкнуто, т.е. что если $\{y_n\} \subset L$ и $y_n \to y_0$, то $y_0 \in L$. Поскольку $y_n \to y_0$, то последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, следовательно $\|y_n - y_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$. Поскольку $\forall y \in L \ \ \|y\| \geq c\|x\|$, то $\|y_n - y_m\| \geq c\|x_n - x_m\|$. Следовательно, $\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ – также фундаментальна. Поскольку гильбертово пространство H – полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\exists x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Поскольку оператор A – ограничен, т.е. непрерывен и $\{y_n\} \subset L$, то $y_n = Ax_n - \lambda x_n$ и $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = Ax_0 - \lambda x_0$, следовательно, $y_0 \in L$. Итак, L – замкнуто, т.е. $\overline{L} = L$. Поскольку выше показали, что $\overline{L} = H$, то получаем, что $L = H$.

Таким образом, оператор $(A - \lambda I)$ переводит H во все H. Покажем, что этот оператор взаимно однозначен. Пусть $x \in \ker(A - \lambda I)$, т.е. $(A - \lambda I)x = 0$. Тогда, поскольку $\|Ax - \lambda x\| \geq c\|x\|$, то $\|x\| = 0$, следовательно $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$.

Итак, оператор $(A - \lambda I): H \to H$ взаимно однозначен, следовательно, существует оператор $(A - \lambda I)^{-1}: H \to H$ и из равенства $y = Ax - \lambda x$, получаем, что $\forall y \in H \ \ x = (A - \lambda I)^{-1} y$. Тогда $c\|(A - \lambda I)^{-1} y\| = c\|x\| \leq \|Ax - \lambda x\| = \|y\|$, откуда $\forall y \in H \ \ \|(A - \lambda I)^{-1} y\| \leq \frac{1}{c} \cdot \|y\|$, т.е. оператор $(A - \lambda I)^{-1}: H \to H$ ограничен, следовательно, он является резольвентой оператора A, поэтому λ – его регулярное значение.

Теорема доказана.

Замечание: из доказанной теоремы следует, что условие $\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$ для всякой нормированной последовательности $\{x_n\}$ в гильбертовом пространстве является не только достаточным для того, чтобы $\lambda \in \sigma(A)$, но и необходимым. Таким образом, при достаточно больших n, точка $\lambda \in \sigma(A)$ является “почти собственным значением” оператора A.

Теорема (о регулярных значениях самосопряженного оператора): пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда комплексные числа $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) могут являться только регулярными значениями оператора A.

Доказательство: обозначим $y = Ax - \lambda x$ для всех $x \in H$. Тогда

$$(y, x) = (Ax - \lambda x, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x) = (Ax, x) - \lambda\|x\|^2,$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} = \overline{(Ax, x) - \lambda\|x\|^2} = (Ax, x) - \overline{\lambda}\|x\|^2, \text{ (см. задачу 2)},$$

$$(x, y) - (y, x) = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|^2 = (\alpha + i\beta - (\alpha - i\beta))\|x\|^2 = 2i\beta\|x\|^2,$$

откуда $|(x, y) - (y, x)| = 2|\beta|\|x\|^2$. С другой стороны, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что $|(x, y) - (y, x)| \leq |(x, y)| + |(y, x)| \leq \|x\| \cdot \|y\| +$

$+\|y\|\cdot\|x\|=2\|x\|\cdot\|y\|$. Таким образом, $\|y\|\geq|\beta|\|x\|$, т.е. при $|\beta|>0$ $\|Ax-\lambda x\|\geq|\beta|\|x\|$. По предыдущей теореме λ является регулярным значением оператора A.

Теорема доказана.

Определение: пусть $A:H\to H$ – самосопряженный оператор, тогда действительные числа $M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ и $m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ называются соответственно верхней и нижней границами оператора A.

Замечание: очевидно, что если $A:H\to H$ – самосопряженный оператор и $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$ (в силу примера 3 из п. 2.7), то $\|A\|=\max\{|m|,|M|\}$.

Теорема (о спектре самосопряженного оператора): спектр самосопряженного оператора $A:H\to H$ целиком лежит на отрезке $[m,M]$ действительной оси, причем числа m и M являются точками спектра оператора A.

Доказательство: из предыдущей теоремы следует, что спектр оператора A может лежать только на действительной оси. Покажем, что все числа $\lambda\notin[m,M]$ – регулярные значения. Пусть $\lambda>M$, тогда $\lambda=M+d$, где $d>0$. Используя результат задачи 3, получаем, что для всех $x\in H$

$$(Ax-\lambda x,x)=(Ax,x)-\lambda(x,x)\leq M(x,x)-\lambda\|x\|^2=(M-\lambda)\|x\|^2=-d\|x\|^2.$$

Тогда $|(Ax-\lambda x,x)|\geq d\|x\|^2$. С другой стороны, в силу неравенства Коши-Буняковского, $|(Ax-\lambda x,x)|\leq\|Ax-\lambda x\|\cdot\|x\|$. Из полученных неравенств заключаем, что $\|Ax-\lambda x\|\cdot\|x\|\geq d\|x\|^2$, откуда $\|Ax-\lambda x\|\geq d\|x\|$ и в силу критерия регулярного значения λ – регулярное. Случай $\lambda<m$ рассматривается аналогично.

Покажем, что M – точка спектра оператора A. Заметим, что, если заменить оператор A оператором $A-\mu I$, $\mu\in\mathbb{R}$, то $((A-\mu I)x,x)=(Ax,x)-\mu\|x\|^2=$ $=(Ax,x)-\mu$ при $\|x\|=1$, поэтому числа M и m заменяются на $M-\mu$ и $m-\mu$, а спектр сдвигается вдоль действительной оси на величину μ. Поэтому достаточно рассмотреть случай $0\leq m\leq M$. В этом случае $\|A\|=M$. Поскольку $M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$, то $\exists\{x_n\}\subset H$: $\|x_n\|=1$ и $(Ax_n,x_n)\to M$. При этом заметим, что $\|Ax_n\|\leq\|A\|\cdot\|x_n\|=\|A\|=M$. Далее, $\|Ax_n-Mx_n\|^2=(Ax_n-Mx_n,Ax_n-Mx_n)=\|Ax_n\|^2-$ $-2M(Ax_nx_n)+M^2\|x_n\|^2\leq M^2-2M(Ax_nx_n)+M^2=2M^2-2M(Ax_nx_n)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $\|Ax_n-Mx_n\|^2\to 0$ и, следовательно, M – точка спектра оператора A.

Аналогично доказывается, что m – точка спектра оператора A (достаточно рассмотреть случай $m\leq M\leq 0$).

Теорема доказана.

Теорема (о линейной независимости собственных векторов): собственные вектора линейного оператора, отвечающие его различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство: применим индукцию по количеству собственных векторов k. Один собственный вектор x_1 оператора A линейно независим, поскольку $x_1 \neq 0$. Пусть любые k собственных векторов оператора A, отвечающие его различным собственным значениям, линейно независимы. Предположим, что какие-то $k+1$ собственных векторов $x_1,...,x_{k+1}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,...,\lambda_{k+1}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$), линейно зависимы, т.е. $\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = 0$, причем не все c_i равны нулю. Применяя к этой сумме оператор $A - \lambda_{k+1} I$, получим

$$0 = (A - \lambda_{k+1} I)\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i A x_i - \sum_{i=1}^{k+1} c_i \lambda_{k+1} x_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) x_i = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) x_i .$$

Поскольку система из k векторов линейно независима, то $c_i\left(\lambda_i - \lambda_{k+1}\right) = 0$, $1 \leq i \leq k$, откуда $c_i = 0$ (т.к. $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$) при $1 \leq i \leq k$. Но тогда из $\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = 0$ следует, что $c_{k+1} = 0$, т.е. все коэффициенты в этой линейной комбинации нулевые. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема (о последовательности собственных значений): все ненулевые собственные значения вполне непрерывного оператора в банаховом пространстве X можно расположить в последовательность, стремящуюся к нулю (при условии, что их бесконечно много).

Доказательство: 1. Возьмем $\forall \delta > 0$ и покажем, что число собственных значений, по модулю больших, чем δ, конечно. От противного: допустим, что это не так, т.е. существует бесконечно много собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ таких, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\lambda_n| > \delta_0$. Пусть $\{x_n\}$ – соответствующая последовательность собственных векторов, тогда, в силу предыдущей теоремы, эта система линейно независима.

Пусть X_n – подпространство X, образованное векторами $x_1,...,x_n$, тогда ясно, что $X_1 \subset X_2 \subset ...$, причем $X_{n+1} \neq X_n$ ни при каком n. Поскольку все X_n конечномерны, то они замкнуты. По теореме Рисса о почти перпендикуляре $\exists y_n \in X_n$: $\|y_n\| = 1$ и $\forall x \in X_{n-1}$ $\|x - y_n\| > \frac{1}{2}$. Поскольку $\{y_n\}$ – ограниченное множество, а оператор A – вполне непрерывен, то множество $\{Ay_n\}$ – предкомпактно, т.е. содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим $A_\lambda = A - \lambda I$ и рассмотрим любые $m > n$, тогда получаем, что $\|Ay_m - Ay_n\| =$

$$= \left\|A_{\lambda_m} y_m + \lambda_m y_m - A_{\lambda_n} y_n - \lambda_n y_n\right\| = |\lambda_m| \left\| y_m - \left(-\frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_m} y_m + \frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_n} y_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n\right)\right\| =$$

$= |\lambda_m| \|y_m - z\| > \delta_0 \|y_m - z\|$. Поскольку $y_n \in X_n$, то $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, поэтому

$$A_{\lambda_n} y_n = (A - \lambda_n I)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i \in X_{n-1} \subset X_{m-1}.$$

Кроме того, $y_n \in X_n \subset X_{m-1}$ и $A_{\lambda_m} y_m \in X_{m-1}$ (аналогично полученному выше для $A_{\lambda_n} y_n$). Таким образом, элемент $z \in X_{m-1}$. Отсюда $\|Ay_m - Ay_n\| > \frac{\delta_0}{2}$ и из последовательности $\{Ay_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Противоречие.

2. Итак, любых собственных чисел, по модулю больших, чем δ – конечное число. Возьмем $\delta = 1$ и занумеруем все собственные значения оператора A, по модулю большие, чем 1: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_{k_1}$. Возьмем $\delta = \frac{1}{2}$ и рассмотрим те собственные значения, которые по модулю больше, чем $\frac{1}{2}$, но которые еще не занумерованы. Их так же конечное число, следовательно, можно продолжить нумерацию: $\lambda_{k_1+1}, \lambda_{k_1+2}, ..., \lambda_{k_2}$. Возьмем $\delta = \frac{1}{3}$ и занумеруем те оставшиеся собственные значения, которые по модулю больше, чем $\frac{1}{3}$, и так далее. Итак, все ненулевые собственные значения оказались занумерованы, т.е. расположены в последовательность, и, поскольку $\delta \to 0$, то эта последовательность собственных значений также стремится к нулю.

Теорема доказана.

Теорема (о спектре вполне непрерывного оператора): пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – вполне непрерывный оператор. Тогда все точки спектра оператора A за исключением точки 0 являются собственными значениями этого оператора.

Замечание: при этом точка 0 всегда лежит в спектре (см. задачу 1), но может собственным значением не быть.

Доказательство: пусть $\lambda \neq 0$ – точка спектра оператора A. Допустим, что λ не является его собственным значением, тогда уравнение $Ax = \lambda x$ имеет только нулевое решение. Преобразуя его, получаем уравнение $Ax - \lambda x = 0$ или $(A - \lambda I)x = 0$. Поскольку $\lambda \neq 0$, то, разделив уравнение на $-\lambda$, заключаем, что уравнение $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)x = 0$ имеет только нулевое решение. Отсюда следует, что оператор $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)$ – инъективен. Поскольку A – вполне непрерывен, то по теореме о подпространстве вполне непрерывных операторов, оператор $-\frac{1}{\lambda}A$ – также вполне непрерывен. Следовательно, уравнение $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)x = 0$ принимает вид $Tx = 0$, в котором $T: H \to H$ – фредгольмов оператор. В силу альтернативы

Фредгольма уравнение $Tx = y$ имеет решение при любой правой части $y \in H$. Таким образом, оператор T сюръективен, а, значит, и биективен, следовательно, он имеет обратный $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)\right)^{-1}$. Поскольку $\lambda \neq 0$, то оператор $(A - \lambda I)$ также имеет обратный. Поскольку фредгольмов оператор T всегда является ограниченным, то, по теореме Банаха об обратном операторе, оператор $\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$, а значит и оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ является ограниченным. Таким образом, точка λ принадлежит резольвентному множеству, что противоречит тому, что λ – точка спектра оператора A.

Теорема доказана.

Замечание: данная теорема остается справедливой в произвольных банаховых пространствах, поскольку альтернатива Фредгольма справедлива и в них.

Теорема (о существовании собственного значения): пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный вполне непрерывный оператор, $A \neq 0$. Тогда у него существует хотя бы один собственный вектор и соответствующее ему отличное от нуля собственное значение.

Доказательство: т.к. A – самосопряжен, то $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$, т.е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. Поскольку $A \neq 0$, то числа $(Ax_n, x_n) \neq 0$ для всех достаточно больших n, причем, рассуждая от противного, получаем, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to \lambda$, где $\lambda = \|A\|$ или $\lambda = -\|A\|$. Тогда получаем:

$$\left\|Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}\right\|^2 = \left(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}, Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}\right) = \left\|Ax_{n_k}\right\|^2 - 2\lambda\left(Ax_{n_k}, x_{n_k}\right) + \lambda^2\left\|x_{n_k}\right\|^2.$$

Поскольку $\left\|Ax_{n_k}\right\|^2 \leq \|A\|^2\left\|x_{n_k}\right\|^2 = \|A\|^2 = \lambda^2$, то $\left\|Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}\right\|^2 \leq 2\lambda\left(\lambda - \left(Ax_{n_k}, x_{n_k}\right)\right)$, откуда $Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k} \to 0$. Поскольку $\left\{x_{n_k}\right\}$ ограничена, то $\left\{Ax_{n_k}\right\}$ предкомпактна, т.е. имеет сходящуюся подпоследовательность $\left\{Ax_{n_\alpha}\right\}$. Поскольку $Ax_{n_\alpha} - \lambda x_{n_\alpha} \to 0$, то подпоследовательность $\left\{x_{n_\alpha}\right\}$ имеет предел. Обозначим его x, причем, поскольку $\left\|x_{n_\alpha}\right\| = 1$, то $\|x\| = 1$. Тогда $0 = \lim\limits_{\alpha \to \infty}\left(Ax_{n_\alpha} - \lambda x_{n_\alpha}\right) = Ax - \lambda x$, т.е. $\lambda \neq 0$ – собственное значение, поскольку $x \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание: если оператор A самосопряжен, то, как указывалось выше, $\|A\| = \max\left\{|m|, |M|\right\}$, причем m и M – точки спектра оператора A. Если, кроме того, оператор A вполне непрерывен, то $\|A\| = |\lambda_{\max}|$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное по модулю собственное значение оператора A.

Теорема (о существовании базиса из собственных векторов): пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный вполне непрерывный оператор. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Доказательство: для любого собственного значения λ рассмотрим подпространство, состоящее из собственных векторов, соответствующих этому собственному значению. По теореме о собственном подпространстве, это замкнутое линейное многообразие. Поскольку гильбертово пространство полно, а замкнутое подпространство полного пространства – также полно, то собственное подпространство также является полным, т.е. гильбертовым пространством. По теореме о сепарабельности подмножества, собственное подпространство сепарабельно. По теореме о существовании базиса в гильбертовом пространстве, в этом собственном подпространстве можно выбрать ортонормированный базис. Такой базис выберем для каждого собственного значения, т.е. в каждом собственном подпространстве и рассмотрим систему векторов, состоящую из всех полученных базисных векторов.

Покажем, что полученная система векторов ортонормирована. Действительно, если любые два собственных вектора соответствуют одному и тому же собственному значению λ, то они ортогональны по построению. Если же они соответствуют различным собственным значениям, то они ортогональны по теореме об ортогональности собственных векторов. Итак, полученная система ортогональна. Нормировать ее можно, разделив каждый собственный вектор на его норму. Ясно, что ортогональность при этом сохранится.

Осталось показать, что эта система является базисом в пространстве H, т.е., что не найдется еще одного ненулевого вектора, ортогонального всем векторам данной системы. Для этого достаточно проверить, что ортогональное дополнение к замыканию L линейной оболочки всех собственных векторов оператора A состоит только из нулевого вектора. Предположим, что это не так. Поскольку L инвариантно для оператора A (см. задачу 48, п. 3.3), то по теореме об инвариантности ортогонального дополнения, $L^\perp$ является инвариантным подпространством для оператора A, т.е. $A: L^\perp \to L^\perp$. По теореме об ортогональном дополнении $L^\perp$ – замкнуто, поэтому полно, а значит, гильбертово. Поскольку $L^\perp$ ортогонально всем собственным векторам оператора A, то в нем собственных векторов оператора A нет, т.к. $L \cap L^\perp = \{0\}$. С другой стороны, в $L^\perp$ собственный вектор есть, в силу предыдущей теоремы. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема Гильберта-Шмидта: пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный вполне непрерывный оператор. Тогда при любом $x \in H$ элемент $Ax \in H$ раскладывается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов оператора A.

Доказательство: пусть $\varphi_1 \in H$ – нормированный собственный вектор, отвечающий наибольшему по модулю собственному значению $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ оператора A. Обозначим $H_1 = \{x \in H : (x, \varphi_1) = 0\}$. Ясно, что H_1 – замкнуто, т.е. гильбертово. Т.к. $\forall x \in H_1$ $(Ax, \varphi_1) = (x, A\varphi_1) = (x, \lambda_1\varphi_1) = \lambda_1(x, \varphi_1) = 0$, то $Ax \in H_1$. Таким образом, оператор $A : H_1 \to H_1$ вполне непрерывен и самосопряжен, а значит, если в H_1 $A \neq 0$, то он имеет собственное значение $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и отвечающий ему нормированный собственный вектор $\varphi_2 \in H_1$, причем $|\lambda_2| \le |\lambda_1|$ и $\|A\| = |\lambda_2|$ (см. доказательство теоремы о существовании собственного значения).

Обозначим $H_2 = \{x \in H_1 : (x, \varphi_2) = 0\}$ и, применяя аналогичные рассуждения, получаем, что оператор $A : H_2 \to H_2$ является вполне непрерывным и самосопряженным, т.е. если $A \neq 0$ в H_2, то в H_2 оператор снова имеет собственное значение и отвечающий ему собственный вектор. И т.д.

Возможны два случая:

1. Найдется номер n такой, что на $H_n = \{x \in H : (x, \varphi_k) = 0, k = 1, 2, ..., n\}$ получим, что $A = 0$. Тогда $\forall x \in H$ рассмотрим элемент $y = x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k$. Нетрудно проверить, что $y \in H_n$. Поскольку на H_n $A = 0$, то $Ay = 0$, поэтому

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)A\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k \ \ (A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k).$$

2. Процесс продолжается неограниченно, т.е. получаем последовательность $\{\lambda_k\}$ собственных значений оператора A и последовательность $\{\varphi_k\}$ отвечающих им собственных векторов, причем в H_n $\|A\| = |\lambda_{n+1}|$. Тогда

$$\left\| A\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k \right) \right\|^2 \le \|A\|^2 \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 = |\lambda_{n+1}|^2 \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 =$$

$$= |\lambda_{n+1}|^2 \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, \varphi_k)|^2 \right) \le |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2 .$$

В предпоследнем переходе расписали квадрат нормы через скалярное произведение, а в последнем воспользовались неравенством Бесселя. Перейдем к пределу при $n \to \infty$, тогда по построению и по теореме о последовательности собственных значений $\lambda_{n+1} \to 0$, поэтому $A\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\varphi_k \right) \to 0$, откуда следует, что $\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)A\varphi_k \to Ax$. Поскольку $A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, то $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k \to Ax$, откуда окончательно получаем, что $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k$.

Теорема доказана.

Замечание: если $A : H \to H$ – самосопряженный вполне непрерывный обратимый оператор, то из его собственных векторов можно набрать базис H. Это следует из того, что, применяя к равенству $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k$ оператор

A^{-1}, получим $x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\varphi_k)\varphi_k$, т.е. всякий $x\in H$ оказался представлен в виде сходящегося к нему ряда Фурье по ортонормированной системе собственных векторов, т.е. эта система является базисом.

Определение: два оператора, действующие в гильбертовых пространствах, называются унитарно эквивалентными, если они изометрически эквивалентны.

Замечание: приведем примеры унитарных изоморфизмов:

1. оператор $U:H\to l_2(I)$, где I – некоторый набор индексов, действующий по правилу $(Ux)_{n\in I}=\{(x,e_n)\}_{n\in I}$, где $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в H. То, что этот оператор биективен и сохраняет норму, было доказано в теореме об изоморфизме всех сепарабельных гильбертовых пространств пространству l_2 (см. часть I, раздел 3, п. 3.5);

2. оператор Фурье, определяемый согласно теореме Планшереля: существует унитарный оператор $U:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, однозначно определенный тем, что для любой функции $f\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ функция $g=Uf$ почти всюду совпадает с классическим преобразованием Фурье. Из унитарности оператора следует, что $\|g\|=\|f\|$. Также заметим, что множество $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ лежит в $L_2(\mathbb{R})$ всюду плотно (более подробно см. в [10]).

Примеры решения задач

1. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, $A:H\to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что для такого оператора остаточная часть спектра отсутствует.

Решение: пусть λ – точка спектра оператора A, тогда число λ является действительным, поэтому оператор $(A-\lambda I)$ также самосопряжен. Пусть λ – не собственное значение оператора A, тогда $\ker(A-\lambda I)=\{0\}$ и, в силу примера 4 п. 2.7, $R(A-\lambda I)^{\perp}=\ker(A-\lambda I)^{*}=\ker(A-\lambda I)=\{0\}$. Тогда из теоремы о всюду плотности линейного многообразия следует, что $\overline{R(A-\lambda I)}=H$, следовательно, точка λ принадлежит непрерывной части спектра $\sigma_c(A)$ оператора A.

2. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, $A:H\to H$ – самосопряженный оператор, причем $R(A-\lambda I)=H$. Показать, что $\lambda\in\rho(A)$.

Решение: если число λ не является действительным, то по теореме о регулярных значениях самосопряженного оператора $\lambda\in\rho(A)$. Далее будем считать, что $\lambda\in\mathbb{R}$ и покажем, что λ не является собственным значением оператора A. Предположим противное, тогда $\exists x_0\in H$, $x_0\neq 0$: $Ax_0=\lambda x_0$. Поскольку, по условию $R(A-\lambda I)=H$, то для любого вектора $y\in H$ найдется вектор $x\in H$ такой, что $y=Ax-\lambda x$. Тогда $(x_0,y)=(x_0,Ax-\lambda x)=(Ax_0-\lambda x_0,x)=0$. Поскольку элемент $y\in H$ – произволен, то $x_0=0$. Противоречие. Таким образом, число λ не является собственным значением оператора A, тогда $\ker(A-\lambda I)=\{0\}$, т.е. оператор $(A-\lambda I):H\to H$ действует взаимно однозначно, поэтому он обратим. По теореме Банаха об обратном операторе существует обратный линейный ограниченный оператор $(A-\lambda I)^{-1}:H\to H$, следовательно, $\lambda\in\rho(A)$.

3. Пусть $A:l_p\to l_p$ ($p>1$) – вполне непрерывный оператор, определенный формулой $Ax=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,...)$, где $x=(\xi_1,\xi_2,...)\in l_p$, а числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$.

Решение: рассмотрим для всех $k\in\mathbb{N}$ вектор $e_k=(0,0,...,0,\underset{k}{1},0,0,...)\in l_p$. Ясно, что $Ae_k=\lambda_k e_k$ и при этом $e_k\neq 0$, следовательно, все числа λ_k являются собственными значениями вполне непрерывного оператора A. Тогда, согласно теореме о последовательности собственных значений, $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$.

4. Найти спектр оператора $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=tx(t)$.

Решение: нетрудно убедиться, что оператор является самосопряженным, причем действующим в гильбертовом пространстве. По теореме о спектре самосопряженного оператора $\sigma(A)\subset[m,M]$, причем $M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ и $m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ – точки спектра оператора A.

$$(Ax,x)=\int_0^1 Ax(t)\cdot\overline{x(t)}dt=\int_0^1 tx(t)\cdot\overline{x(t)}dt=\int_0^1 t|x(t)|^2\,dt.$$

Поскольку $0\le t\le 1$, то $0\le(Ax,x)\le\int_0^1|x(t)|^2\,dt=\|x\|^2$, откуда $0\le\dfrac{(Ax,x)}{\|x\|^2}\le 1$, т.е. $0\le\left(A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right),\dfrac{x}{\|x\|}\right)\le 1$. Обозначая $\dfrac{x}{\|x\|}=y$, замечаем, что $\|y\|=1$, значит, $\forall y\in L_2[0,1]$: $\|y\|=1$ $0\le(Ay,y)\le 1$. Таким образом, $m,M\in[0,1]$. Покажем, что $\sigma(A)=[0,1]$. Пусть $0\le\lambda<1$. Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $[\lambda,\lambda+\varepsilon]\subset[0,1]$ и рассмотрим функцию $x_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & t\in[\lambda,\lambda+\varepsilon]\\ 0, & t\notin[\lambda,\lambda+\varepsilon]\end{cases}$.

Тогда $\|x_\varepsilon\|^2=\int_0^1|x_\varepsilon(t)|^2\,dt=\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\dfrac{1}{\varepsilon}dt=\dfrac{1}{\varepsilon}(\lambda+\varepsilon-\varepsilon)=1$ и точка λ будет точкой спектра, если $\|Ax_\varepsilon-\lambda x_\varepsilon\|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$. Имеем:

$$\|Ax_\varepsilon-\lambda x_\varepsilon\|^2=\int_0^1(Ax_\varepsilon(t)-\lambda x_\varepsilon(t))^2dt=\int_0^1(tx_\varepsilon(t)-\lambda x_\varepsilon(t))^2dt=\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\frac{(t-\lambda)^2}{\varepsilon}dt=\frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Ясно, что $\|Ax_\varepsilon-\lambda x_\varepsilon\|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$, таким образом, любая точка полуинтервала $[0,1)$ является точкой спектра оператора A.

Аналогично, рассматривая $0<\lambda\le 1$ и выбирая $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $[\lambda-\varepsilon,\lambda]\subset[0,1]$, для функции $x_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & t\in[\lambda-\varepsilon,\lambda]\\ 0, & t\notin[\lambda-\varepsilon,\lambda]\end{cases}$ получаем, что любая точка полуинтервала $(0,1]$ является точкой спектра оператора A. Объединяя эти случаи, получаем, что $\sigma(A)=[0,1]$. Нетрудно убедиться, что ни одна точка спектра не является собственным значением, а в силу примера 1 заключаем, что спектр оператора A – непрерывный.

5. Вычислить норму оператора $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, если:

а) $Ax(t)=\int\limits_0^t x(\tau)d\tau$;

б) $Ax(t)=\int\limits_0^1 (1+ts)x(s)ds$.

Решение: а) легко проверить вполне непрерывность оператора, используя критерий предкомпактности в $L_2[0,1]$. Кроме того, $A^*x(t)=\int\limits_t^1 x(\tau)d\tau$. Тогда оператор AA^* – самосопряжен и вполне непрерывен, поэтому $\|A\|^2=\|AA^*\|=|\lambda_{\max}|$, откуда $\|A\|=\sqrt{|\lambda_{\max}|}$.

Поскольку $AA^*x(t)=\int\limits_0^t\int\limits_\tau^1 x(s)dsd\tau$, то для нахождения собственных чисел получаем уравнение $\int\limits_0^t\int\limits_\tau^1 x(s)dsd\tau=\lambda x(t)$. Дифференцируем его по переменной t (левая часть равенства дифференцируема почти всюду, следовательно, такова и правая часть) и получаем, что почти всюду $\int\limits_t^1 x(s)ds=\lambda x'(t)$. Снова дифференцируем: $-x(t)=\lambda x''(t)$. Поскольку нас интересуют ненулевые собственные значения, то, обозначив $\mu=\dfrac{1}{\lambda}\ne 0$, получим, что $x''(t)+\mu x(t)=0$. Из исходного интегрального уравнения следует, что $x(0)=0$, а из продифференцированного первый раз уравнения следует, что $x'(1)=0$. Легко видеть, что при $\mu<0$ полученная краевая задача не имеет нетривиальных решений в пространстве $L_2[0,1]$. При $\mu>0$ получаем $x(t)=c_1\cos\sqrt{\mu}t+c_2\sin\sqrt{\mu}t$. Далее, $x(0)=c_1=0$, $x'(1)=c_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}=0$. Нетривиальное решение получится только если $c_2\ne 0$, т.е. $\cos\sqrt{\mu}=0$, откуда $\mu=\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)^2$, $n=0,1,2,\ldots$. Поскольку $\mu_{\min}=\dfrac{\pi^2}{4}$, то

$\lambda_{\max} = \dfrac{4}{\pi^2}$, откуда $\|A\| = \dfrac{2}{\pi}$. Заметим, что при вычислении нормы данного оператора обычным методом оценивания получается недостижимая завышенная оценка сверху $\|A\| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Поскольку $Ax(t) = 1 \cdot \int\limits_0^1 x(s)ds + t \cdot \int\limits_0^1 sx(s)ds = 1 \cdot c_1 + t \cdot c_2$, то данный оператор конечномерен (ранг 2). Множество его значений – двумерное подпространство с базисом $\{1, t\}$. Тем самым, оператор вполне непрерывен. Кроме того, легко проверяется, что он самосопряжен, поэтому сразу $\|A\| = |\lambda_{\max}|$. Для поиска собственных значений можно было бы составить и решить интегральное уравнение Фредгольма, но мы воспользуемся конечномерностью оператора, а именно, тем, что его действие определяется конечной матрицей. Для нахождения матрицы оператора, как и в линейной алгебре, найдем образы базисных векторов множества значений оператора:

$$A(1) = 1 \cdot \int\limits_0^1 1ds + t \cdot \int\limits_0^1 sds = 1 + \frac{1}{2}t;\; A(t) = 1 \cdot \int\limits_0^1 sds + t \cdot \int\limits_0^1 s^2 ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}t.$$

Полученные коэффициенты разложения по базису $\{1, t\}$ дают столбцы матрицы оператора, т.е. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, тогда $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right) - \frac{1}{4} = 0$.

Таким образом, $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{13}}{6}$, откуда $\|A\| = \dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$. Заметим, что по обычному методу получается недостижимая завышенная оценка сверху $\|A\| \le \sqrt{\dfrac{29}{18}}$.

6. Найти спектр оператора $(Ax)_k = \xi_{k-1} - 2\xi_k + \xi_{k+1}$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, где $l_2(\mathbb{Z}) = \left\{ x = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) : \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |\xi_k|^2 < +\infty \right\}$.

Решение: поскольку $A - \lambda I = A + 2I - (\lambda + 2)I = B - \mu I$, то, если μ – точка спектра оператора $B = A + 2I$, то $\lambda = -2 + \mu$ – точка спектра оператора A. Заметим, что $(Bx)_k = \xi_{k-1} + \xi_{k+1}$, причем $\|B\| = 2$, откуда следует, что спектр этого оператора лежит в круге $|\mu| \le 2$. Кроме того, оператор B самосопряжен, поскольку $(Bx, y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (\xi_{k-1} + \xi_{k+1})\overline{\eta}_k = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_{k-1}\overline{\eta}_k + \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_{k+1}\overline{\eta}_k = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k\overline{\eta}_{k+1} + \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k\overline{\eta}_{k-1} =$

$= \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k\left(\overline{\eta}_{k-1} + \overline{\eta}_{k+1}\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \overline{\eta_{k-1} + \eta_{k+1}} = (x, By)$, поэтому его спектр состоит из действительных чисел. Проверим, имеет ли оператор B собственные значения. Имеем уравнение $Bx=\mu x$, откуда $\xi_{k+1}-\mu\xi_k+\xi_{k-1}=0$. Ищем его частные решения в виде $\xi_k=q^k$: $q^2-\mu q+1=0$ – характеристическое уравнение. Его дискриминант $\mu^2-4\le 0$ при $|\mu|\le 2$. Тем самым, $\xi_k=c_1q_1{}^k+c_2q_2{}^k$ (либо $\xi_k=(c_1+c_2k)q^k$ при $|\mu|=2$), причем $|q_{1,2}|=1$ (соответственно, $|q|=1$). Заметим, что при $c_1{}^2+c_2{}^2\ne 0$ найденное решение $x=\left(\xi_k\right)_{k=-\infty}^{+\infty}$ не принадлежит $l_2(\mathbb{Z})$, т.к. $\xi_k \underset{|k|\to+\infty}{\not\to} 0$. Тем самым, собственных чисел оператор не имеет, т.е. $\sigma_p(B)=\varnothing$.

В силу примера 1 заключаем, что оператор B имеет только непрерывный спектр. Кроме того, критерием принадлежности точки μ спектру является существование последовательности $\{x_n\}\subset l_2(\mathbb{Z})$ такой, что $\dfrac{\|Bx_n-\mu x_n\|}{\|x_n\|}\to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим последовательность $(x_n)_k=q^ke^{-n|k|}$, где q – одно из частных решений характеристического уравнения для $Bx=\mu x$ при $|\mu|\le 2$. Имеем, $\|x_n\|^2=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|q|^{2k}e^{-2n|k|}=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-2n|k|}=1+2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}e^{-2nk}=1+\dfrac{2}{e^{2n}-1}\underset{n\to+\infty}{\to}1$. Далее,

$$\|Bx_n-\mu x_n\|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|q^{k+1}e^{-n|k+1|}-\mu q^ke^{-n|k|}+q^{k-1}e^{-n|k-1|}\right|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|q^2e^{-n|k+1|}-\mu qe^{-n|k|}+e^{-n|k-1|}\right|^2.$$

Поскольку $\left|q^2e^{-n|k+1|}-\mu qe^{-n|k|}+e^{-n|k-1|}\right|^2\le\left(e^{-|k+1|}+2e^{-|k|}+e^{-|k-1|}\right)^2$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-|k+1|}+2e^{-|k|}+e^{-|k-1|}\right)^2$, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left|q^2e^{-n|k+1|}-\mu qe^{-n|k|}+e^{-n|k-1|}\right|^2$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Тем самым, под знаком суммы этого ряда можно переходить к пределу при $n\to\infty$, т.е. $\|Bx_n-\mu x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$ и числа $|\mu|\le 2$ принадлежат непрерывному спектру оператора B, а $\sigma_c(A)=[-4,0]$.

Отметим, что без сдвига исходного оператора пришлось бы отдельно рассматривать случай $\lambda\in(0,4]$ (т.к. $\|A\|=4$) и доказывать, что все эти числа принадлежат резольвентному множеству.

7. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}x(\tau)d\tau$ в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.

Решение: заметим, что по теореме Лебега об ограниченной сходимости можно переставлять местами знаки интеграла и суммы ряда, поскольку $\sum\limits_{n=-N}^{N}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}x(\tau)\to\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}x(\tau)$ и $\left|\sum\limits_{n=-N}^{N}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}x(\tau)\right|\le c|x(\tau)|$, $c=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}2^{-|n|}$, причем функция $c|x(\tau)|$ очевидно суммируема. Рассмотрим унитарный изоморфизм $U:L_2[-\pi,\pi]\to l_2(\mathbb{Z})$, ставящий в соответствие любому элементу

$x \in L_2[-\pi,\pi]$ последовательность его коэффициентов Фурье разложения по ортонормированному базису $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ пространства $L_2[-\pi,\pi]$. Тогда имеем (перемена порядка интегрирований законна в силу теоремы Фубини для интеграла Лебега): $(UAx)_k = \left(Ax, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}x(\tau)d\tau\right)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}}dt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}e^{-ikt}x(\tau)d\tau\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}e^{int}e^{-in\tau}e^{-ikt}x(\tau)dt\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{-|n|}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{int}e^{-ikt}dt\right)e^{-in\tau}x(\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}2^{-|k|}e^{-ik\tau}x(\tau)d\tau =$$

$$= 2^{-|k|}\left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right) = (TUx)_k,$$

где $Tx = \left(2^{-|k|}\xi_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ – диагональный оператор. Таким образом, исходный оператор A унитарно эквивалентен диагональному оператору T, поэтому их спектры (и части спектров совпадают). Оператор T исследуется, как обычный диагональный оператор (см. пример 11, п. 3.3). В результате получаем, что $\sigma_p(A) = \left\{2^{-|k|} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\lambda = 0 \in \sigma_c(A)$, поскольку легко проверяется, что оператор A самосопряжен и для него остаточная часть спектра отсутствует (либо можно показать, что всюду плотное множество финитных последовательностей лежит в образе оператора $T - \lambda I$ при $\lambda = 0$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что всякий вполне непрерывный оператор содержит в спектре точку 0.

Указание: воспользоваться тем, что вполне непрерывный оператор не может иметь ограниченного обратного.

2. Доказать, что если $A: H \to H$ – самосопряженный оператор, то для всех $x \in H$ число (Ax, x) – действительное.

3. Доказать, что если $A: H \to H$ – самосопряженный оператор, то $\forall x \in H$ $(Ax,x) \le M(x,x)$, $(Ax,x) \ge m(x,x)$, где $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$, $m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$.

4. Найти спектр диагонального оператора $A: l_2 \to l_2$, определенного формулой $Ax = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \ldots)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$, а числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена.

Указание: показать, что спектр этого оператора представляет собой замыкание множества $\{\lambda_k\}$. При этом $\sigma_p = \{\lambda_k\}$, $\sigma_c = \overline{\{\lambda_k\}} \setminus \{\lambda_k\}$.

5. Пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что $\|A^2\| = \|A\|^2$.

6. Пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – самосопряженный оператор. Доказать, что $r_\sigma(A) = \|A\|$.

7. Доказать, что оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = \left(0, \xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots\right)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$ является вполне непрерывным и найти его спектр.

Указание: оценить спектральный радиус.

8. Доказать, что оператор $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} t^2 s x(s) ds$ является вполне непрерывным и найти его спектр.

9. Доказать, что оператор $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 ts(1-ts)x(s)ds$ является вполне непрерывным и найти его спектр.

10. Найти спектр оператора $Ax(t) = \int_0^1 \max(t,\tau)x(\tau)d\tau$, $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

11. Найти спектр оператора $Ax(t) = e^{i\cos\frac{1}{t^2}} x(t)$, $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

12. Пусть H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор. Доказать, что $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$, где черта означает комплексное сопряжение.

13. Найти норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = \int_0^t e^t x(\tau) d\tau$. Краевую задачу для уравнения Бесселя решить численно.

14. Найти норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = t\int_0^1 x(t)dt$.

15. Найти норму оператора $A: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, если $Ax(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+\tau)x(\tau)d\tau$.

16. Найти норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 \min(t,\tau)x(\tau)d\tau$.

17. Найти норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = t^3 \int_0^1 s^2 x(s)ds$.

18. Найти норму оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если $Ax(t) = \int_0^1 (t-s)x(s)ds$.

19. Найти норму оператора $Ax = (\xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2, \xi_4, \xi_5, \ldots)$, если $A: l_2 \to l_2$.

20. Решить задачу из примера 6, не выполняя сдвиг оператора. При $\lambda \in (0,4]$ построить резольвенту.

Указание: пусть по методу вариации постоянных решение неоднородного разностного уравнения имеет вид $\xi_k = a_k q_1^k + b_k q_2^k$, *где* $q_{1,2}$ *– действительные частные решения характеристического уравнения, причем* $|q_1| > 1$, $|q_2| < 1$. *По аналогии с дифференциальными уравнениями* $(a_{k+1} - a_k) q_1^k + (b_{k+1} - b_k) q_2^k = 0$, *и, подставляя вид решения в исходное разностное уравнение, получаем систему двух уравнений относительно неизвестных* $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ *и* $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$ *(подставляем выражение из одного уравнения в другое, преобразовываем, затем, выполняя в полученном уравнении замену индексов* $k \to k+1$, *складываем уравнения, и в полученном после этого уравнении заменяем индексы обратно).*

21. Найти спектр оператора $Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos nt \cos n\tau x(\tau) d\tau$ в пространстве $L_2[0,\pi]$.

22. Найти спектр оператора $Ax(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2}} x(\tau) d\tau$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Указание: сперва можно считать, что $x(t) \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ *и, применив оператор Фурье, найти унитарно эквивалентный оператор. Затем воспользоваться всюду плотностью* $L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R})$ *в* $L_2(\mathbb{R})$.

23. Найти спектр и резольвенту оператора $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, задаваемого равенством $Ax(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s) ds}{1 + (t-s)^2}$.

24. Найти спектр оператора Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Указание: показать, что оператор Фурье унитарно эквивалентен диагональному оператору $T_\lambda : l_2 \to l_2$, *где* $\lambda_n = (-i)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$. *Унитарную эквивалентность осуществляет оператор, ставящий в соответствие любой функции* $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ *последовательность ее коэффициентов Фурье разложения по ортонормированной системе функций Эрмита* $H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\|H_n\|} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$. *При преобразованиях воспользоваться тем, что* $\frac{d^n}{dt^n} \left(e^{\frac{1}{2}(t-i\xi)^2} \right) = (-i)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{\frac{1}{2}(t-i\xi)^2} \right)$.

25. Решить задачу из примера 6, подобрав унитарный изоморфизм с оператором умножения на функцию в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Указание: рассмотреть операторы умножения на мнимые экспоненты.

26. Найти спектр оператора $(Ax)_k = \xi_{k-1} + \xi_{k+1}$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$.

27. Найти норму, спектр и резольвенту оператора $Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \ldots)$, если $A : l_2 \to l_2$.

28. Найти норму, спектр и резольвенту оператора $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, задаваемого формулой $Ax(t) = \int\limits_0^1 (s \ln t - t \ln s) s(s) ds$.

29. Найти норму, спектр и резольвенту оператора $Ax = \left(0, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{3}, \frac{\xi_3}{4}, \ldots\right)$, если $A: l_2 \to l_2$.

30. Доказать, что система функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt\right\}$, $k \in \mathbb{N}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

Указание: рассмотреть оператор Штурма-Лиувилля $Ax(t) = x''(t)$ с областью определения $D(A) = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,\pi] : x(0) = x(\pi) = 0\right\}$. Найти его собственные функции. Доказать, что обратный оператор можно продолжить на все пространство $L_2[0,\pi]$, он вполне непрерывен и самосопряжен (это интегральный оператор с симметрическим ядром, см. дополнение). Воспользоваться замечанием к теореме Гильберта-Шмидта, либо теоремой о существовании базиса из собственных векторов.

31. Доказать, что система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kt\right\}$, $k \in \mathbb{N}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

32. Используя оператор Штурма-Лиувилля $Ax(t) = x''(t)$ с областью определения $D(A) = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,\pi] : x'(0) = x(\pi) = 0\right\}$, построить ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

33. Используя оператор Штурма-Лиувилля $Ax(t) = x''(t)$ с областью определения $D(A) = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,\pi] : x(0) = x'(\pi) = 0\right\}$, построить ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\pi]$.

34. Найти спектр оператора $Ax(t) = \int\limits_0^\pi k(t,s) x(s) dx : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$, если $k(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^3}$.

Указание: рассмотреть оператор, как действующий в $L_2[0,\pi]$ и показать, что во всех классах эквивалентности его собственных функций лежит непрерывная функция. Для исследования точки $\lambda = 0$ использовать то, что $Ax(0) = 0$.

35. Найти спектр оператора $Ax(t) = \int\limits_0^\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin nt \sin n\tau\, x(\tau) d\tau$ в пространстве $L_2[0,\pi]$.

36. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_0^{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos nt\cos n\tau x(\tau)d\tau$ в пространстве $L_2[0,\pi]$.

37. Найти собственные значения оператора $Ax(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)ds$ в пространствах $L_p[0,1]$, $1<p\le\infty$, $C[0,1]$ и сделать вывод о не вполне непрерывности этого оператора в указанных пространствах.

38. Найти собственные значения оператора $Ax(t)=\frac{1}{t^{\alpha}}\int\limits_0^t s^{\alpha-1}x(s)ds$, $\operatorname{Re}\alpha>\frac{1}{p}$ в пространствах $L_p[0,1]$, $1\le p<\infty$.

39. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_0^{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3^{|n|}}e^{-in(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ в пространстве $L_2[0,\pi]$.

40. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_0^{\pi}K(t,\tau)x(\tau)d\tau$ в пространстве $L_2[0,\pi]$, если $K(t,\tau)=\begin{cases}\sin t\cos\tau,\ 0\le t\le\tau\le\pi\\ \sin\tau\cos t,\ 0\le\tau\le t\le\pi\end{cases}$.

41. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_0^1\left(ts+\max(t,s)\right)x(s)ds$ в пространстве $L_2[0,1]$.

42. Найти спектр оператора $Ax(t)=\int\limits_0^1\left(ts+\max(t,s)-2\min(t,s)-2\right)x(s)ds$ в пространстве $L_2[0,1]$.

43. Найти спектр оператора $(Ax)_k=\xi_{k-1}-\xi_{k+1}$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$.

Дополнение. Линейные интегральные уравнения

Определение: пусть $t,s \in [a,b]$, $k(t,s)$ – функция, суммируемая с квадратом на множестве $[a,b]\times[a,b]$, $f(t)$ – функция, суммируемая с квадратом на отрезке $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Уравнение вида $\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ называется уравнением Фредгольма первого рода, а уравнение вида $\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ называется уравнением Фредгольма второго рода. Здесь $\varphi(t)$ – неизвестная функция, $k(t,s)$ – ядро уравнения, $f(t)$ – свободный член уравнения.

Определение: пусть $t,s \in [a,b]$, $k(t,s)$ – функция, суммируемая с квадратом на множестве $[a,b]\times[a,b]$, $f(t)$ – функция, суммируемая с квадратом на отрезке $[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Уравнение вида $\int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ называется уравнением Вольтерра первого рода, а уравнение вида $\varphi(t)-\lambda\int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ называется уравнением Вольтерра второго рода. Здесь $\varphi(t)$ – неизвестная функция, $k(t,s)$ – ядро уравнения, $f(t)$ – свободный член уравнения.

Теорема (метод резольвент для уравнения Фредгольма второго рода): пусть ядро $k(t,s)$ и свободный член $f(t)$ уравнения $\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ квадратично суммируемы и $|\lambda| < B^{-1}$, где $B^2 = \int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2 dtds$, $K\varphi(t) = \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds$, тогда ряд Неймана $\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K^m f$ сходится в среднем к квадратично суммируемому решению этого уравнения. Это решение единственно.

Замечание: при этом $K^m\varphi(t) = \int_a^b k_m(t,s)\varphi(s)ds$, где функции $k_1(t,s) = k(t,s)$ и $k_m(t,s) = \int_a^b k(t,\tau)k_{m-1}(\tau,s)d\tau$ $(m = 2,3,...)$ называются итерированными ядрами.

Замечание: решение $\varphi(t)$ уравнения $\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ можно представить в виде $\varphi(t) = f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s,\lambda)f(s)ds$, где $R(t,s,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m k_{m+1}(t,s)$ – резольвента Фредгольма этого уравнения.

Теорема (метод резольвент для уравнения Вольтерра второго рода): пусть ядро $k(t,s)$ и свободный член $f(t)$ уравнения $\varphi(t)-\lambda\int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ квадратично суммируемы, тогда при любом λ это уравнение имеет единственное суммируемое решение $\varphi(t)$, которое может быть получено, как сумма ряда Неймана $f(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m K^m f$, где $K\varphi(t)=\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds$, $k_m(t,s)=\int_s^t k(t,\tau)k_{m-1}(\tau,s)d\tau$ ($m=2,3,\ldots$).

Замечание: с помощью резольвенты решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода записывается в виде $\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^t R(t,s,\lambda)f(s)ds$.

Замечание: все сказанное имеет место и в случае, когда все функции, определенные ранее в $L_2[a,b]$ (квадратично суммируемые) считать непрерывными на отрезке $[a,b]$. При этом в методе резольвент для уравнения Фредгольма изменится условие на параметр λ.

Замечание: интегральное уравнение Вольтерра первого рода при помощи дифференцирования приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Теорема (метод последовательных приближений): пусть свободный член и ядро уравнения Фредгольма второго рода являются непрерывными функциями (на $[a,b]$ и на $[a,b]\times[a,b]$ соответственно). Выберем какую-нибудь непрерывную функцию $\varphi_0(t)$ и подставим ее в правую часть этого уравнения. Получим $\varphi_1(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi_0(s)ds$, причем $\varphi_1(t)$ также непрерывна на $[a,b]$. Поступим с ней также, как и с $\varphi_0(t)$, и, продолжая этот процесс, получим последовательность функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,..., удовлетворяющих уравнениям

$$\varphi_2(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi_1(s)ds$$

$$\ldots$$

$$\varphi_n(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds$$

$$\ldots$$

Из этой системы будет следовать, что

$$\varphi_n(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k_1(t,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^b k_2(t,s)f(s)ds+\ldots+$$

$$+\lambda^{n-1}\int_a^b k_{n-1}(t,s)f(s)ds+R_n(t),$$

где $R_n(t)=\lambda^n\int\limits_a^b k_n(t,s)\varphi_0(s)ds$. Тогда при условии $|\lambda|(b-a)\max\limits_{a\le t,s\le b}|k(t,s)|<1$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$, не зависящий от выбора начального приближения $\varphi_0(t)$.

Замечание: все сказанное применимо и к уравнениям Вольтерра второго рода с учетом того, что в этом случае последовательные приближения сходятся к решению уравнения уже при любом λ.

Определение: ядро $k(t,s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода называется вырожденным, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от t на функции только от s, т.е. если оно имеет вид $k(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(t)b_k(s)$, где функции $a_k(t)$ и $b_k(s)$ непрерывны на $[a,b]$ и попарно линейно независимы между собой.

Замечание: в этом случае уравнение принимает вид

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds,$$

или, поскольку $\int\limits_a^b b_k(s)\varphi(s)ds=c_k$, то $\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}c_k a_k(t)$. Таким образом, решение этого уравнения сводится к нахождению неизвестных постоянных c_k ($k\in\mathbb{N}$). Подставляя $\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}c_k a_k(t)$ в исходное уравнение Фредгольма второго рода, и учитывая линейную независимость функций $a_k(t)$, для определения c_k получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Определение: значения $\lambda\ne 0$, при которых однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода $\varphi(t)-\lambda\int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)ds=0$ имеет ненулевые решения, называются характеристическими числами этого уравнения (или ядра $k(t,s)$), а каждое ненулевое решение этого уравнения называется собственной функцией, соответствующей этому характеристическому числу. Число линейно независимых собственных функций, соответствующих значению λ, называется рангом характеристического значения λ.

Замечание: ранг характеристического значения всегда конечен.

Определение: уравнение Фредгольма называется уравнением с симметрическим ядром, если $\int\limits_a^b\int\limits_a^b|k(t,s)|^2dtds<+\infty$ и $k(t,s)=\overline{k(s,t)}$.

Теорема (о решениях уравнения Фредгольма второго рода с симметрическим ядром): рассмотрим уравнение $\varphi(t)-\lambda\int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)ds=f(t)$ с непрерывным симметрическим ядром $k(t,s)$ и непрерывным свободным членом $f(t)$.

1. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ не совпадает с характеристическими числами λ_n ($n \in \mathbb{N}$) однородного уравнения $\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = 0$, то исходное уравнение имеет для любой правой части $f(t)$ единственное непрерывное решение, определяемое формулой $\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ – ортонормированные собственные функции, соответствующие числам λ_n, а $a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt$.

2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ совпадает с характеристическим числом λ_k ранга q, т.е. $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_{k+q-1}$. Тогда решение уравнения существует тогда и только тогда, когда свободный член f ортогонален (в смысле пространства L_2) всем собственным функциям, соответствующим числу λ_k. При этом, уравнение имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных: $\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) - \lambda \sum_{n=k+q}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) + c_0\varphi_k(t) + ... + c_{q-1}\varphi_{k+q-1}(t)$, где $c_0, ..., c_{q-1}$ – произвольные постоянные.

3. Если $f(t)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_n(t)$, то решением уравнения является сама эта функция, т.е. $\varphi(t) \equiv f(t)$.

Теорема (о решениях уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим ядром): пусть дано уравнение $\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ с замкнутым симметрическим ядром $k(t,s)$ и $f(t) \in L_2[a,b]$, тогда это уравнение имеет в классе $L_2[a,b]$ единственное решение $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \varphi_n(t)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |a_n|^2$.

Замечание: здесь $\varphi_n(t)$ – ортонормированные собственные функции, соответствующие характеристическим числам λ_n ядра $k(t,s)$, а $a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt$. Замкнутость ядра характеризуется тем, что собственные функции этого ядра образуют полную ортогональную в $L_2[a,b]$ систему функций.

Замечание: более подробно об интегральных уравнениях см. [6].

Примеры решения задач

1. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши $y''' + ty'' + (t^2 - t)y = te^t + 1$ $y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0$.

Решение: обозначим $\dfrac{d^3y}{dt^3}=\varphi(t)$ и проинтегрируем это равенство от 0 до t: $\int\limits_0^t \dfrac{d^3y}{ds^3}ds=\int\limits_0^t \varphi(s)ds$, откуда $\left.\dfrac{d^2y}{ds^2}\right|_{s=0}^{t}=\int\limits_0^t \varphi(s)ds$ или $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{d^2y}{dt^2}(0)=\int\limits_0^t \varphi(s)ds$, и, поскольку $y''(0)=0$, то $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\int\limits_0^t \varphi(s)ds$.

Снова интегрируя, получаем: $\int\limits_0^t \dfrac{d^2y}{ds^2}ds=\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \varphi(s)dsd\tau=\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$, откуда $\left.\dfrac{dy}{ds}\right|_{s=0}^{t}=\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$ или $\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dy}{dt}(0)=\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$ и, поскольку $y'(0)=1$, то $\dfrac{dy}{dt}=1+\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$.

Еще раз интегрируя, получаем, что $\int\limits_0^t \dfrac{dy}{ds}ds=\int\limits_0^t\left(1+\int\limits_0^\tau(\tau-s)\varphi(s)ds\right)d\tau=$ $=t+\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\tau(\tau-s)\varphi(s)ds\right)d\tau=t+\int\limits_0^t\dfrac{(t-s)^2}{2}\varphi(s)ds$, откуда, поскольку $y(0)=1$, получаем, что $y(t)=1+t+\int\limits_0^t\dfrac{(t-s)^2}{2}\varphi(s)ds$.

Подставим найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение: $\varphi(t)+t\int\limits_0^t\varphi(s)ds+(t^2-t)\left(1+t+\int\limits_0^t\dfrac{(t-s)^2}{2}\varphi(s)ds\right)=te^t+1$. После преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(t)+\int\limits_0^t\frac{2t+(t^2-t)(t-s)^2}{2}\varphi(s)ds=te^t+t-t^3+1.$$

При преобразованиях использовалось соотношение (проверяемое непосредственным дифференцированием): $\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1}dx_2...\int\limits_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n=\dfrac{1}{n!}\int\limits_0^x(x-y)^nf(y)dy$.

2. Воспользовавшись связью между дифференциальными и интегральными уравнениями, найти решение уравнения $y'(t)-y(t)=0$ при условии $y(0)=1$.

Решение: аналогично примеру 1 приводим данное уравнение к уравнению Вольтера второго рода $y(t)=1+\int\limits_0^t y(s)ds$. Для нахождения $y(t)$ используем метод последовательных приближений: $y_0(t)\equiv 0$, тогда $y_1(t)=1+\int\limits_0^t y_0(s)ds=1$,

$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)ds = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t$, $\quad y_3(t) = 1 + \int_0^t y_2(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$,

$y_4(t) = 1 + \int_0^t y_3(s)ds = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$,... На n-м шаге получаем, очевидно, закономерность $y_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$, откуда

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

3. Пусть $k(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s \\ s(1-t), & t \ge s \end{cases}$ $(t, s \in [0,1])$. Найти характеристические значения и собственные функции этого ядра.

Решение: найти характеристические значения ядра $k(t,s)$ – означает найти те значения $\lambda_k \ne 0$, при которых уравнение $\varphi(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds = 0$ имеет нетривиальные решения $\varphi_k(t)$, которые и называются собственными функциями.

С учетом вида ядра $k(t,s)$ и аддитивности интеграла приведем уравнение к виду $\varphi(t) = \lambda \int_0^t s(1-t)\varphi(s)ds + \lambda \int_t^1 t(1-s)\varphi(s)ds$. Продифференцируем обе части по t: $\varphi'(t) = \lambda t(1-t)\varphi(t) - \lambda \int_0^t s\varphi(s)ds - \lambda t(1-t)\varphi(t) + \lambda \int_t^1 (1-s)\varphi(s)ds = -\lambda \int_0^t s\varphi(s)ds +$ $+\lambda \int_t^1 (1-s)\varphi(s)ds$. Продифференцируем по t полученное соотношение еще раз: $\varphi''(t) = -\lambda t\varphi(t) - \lambda(1-t)\varphi(t) = -\lambda\varphi(t)$. Из исходного уравнения следует, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, тогда получаем краевую задачу $\varphi''(t) + \lambda\varphi(t) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Поскольку $\lambda \ne 0$, то рассмотрим два случая.

Случай 1: $\lambda < 0$, тогда характеристическое уравнение для $\varphi''(t) + \lambda\varphi(t) = 0$ имеет вид $k^2 - |\lambda| = 0$, откуда $k = \pm\sqrt{|\lambda|}$ и $\varphi(t) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}t} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}t}$. Используя краевые условия, получаем систему уравнений $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0 \end{cases}$. Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}} & e^{-\sqrt{|\lambda|}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|}} - e^{\sqrt{|\lambda|}} \ne 0$, поэтому система имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$, откуда $\varphi(t) \equiv 0$, т.е. числа $\lambda < 0$ не могут быть характеристическими числами.

Случай 2: $\lambda > 0$, тогда характеристическое уравнение имеет решения $k = \pm i\sqrt{\lambda}$, откуда $\varphi(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t$.

Используя первое краевое условие, находим, что $\varphi(0)=c_1=0$, тогда из второго краевого условия получаем: $\varphi(1)=c_2\sin\sqrt{\lambda}=0$. Поскольку $\varphi(t)$ должна быть нетривиальной, а $c_1=0$, то $c_2\neq 0$, и равенство $c_2\sin\sqrt{\lambda}=0$ возможно только при $\sin\sqrt{\lambda}=0$, т.е. при $\sqrt{\lambda_n}=\pi n, n\in\mathbb{N}$, откуда $\lambda_n=\pi^2 n^2, n\in\mathbb{N}$. Тогда собственные функции имеют вид $\varphi_n(t)=c_2\sin\pi nt, n\in\mathbb{N}$, где $c_2\neq 0$ и можно считать, что $c_2=1$.

4. Определить функцию φ из класса $C^{(1)}(\mathbb{R})$ такую, что

$$\varphi(t)=\sin t+\lambda\int_0^t e^{-s}\varphi(t-s)ds.$$

Решение: сделаем в интеграле замену переменной $t-s=u$, тогда уравнение придет к виду $\varphi(t)=\sin t+\lambda\int_0^t e^{u-t}\varphi(u)du$ или $\varphi(t)=\sin t+\lambda e^{-t}\int_0^t e^{u}\varphi(u)du$.

Умножив обе части на e^t, получим $e^t\varphi(t)=e^t\sin t+\lambda\int_0^t e^{u}\varphi(u)du$. Продифференцируем полученное уравнение по t: $e^t\varphi(t)+e^t\varphi'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t+\lambda e^t\varphi(t)$. После преобразований получим уравнение $\varphi'(t)+(1-\lambda)\varphi(t)=\sin t+\cos t$. Из исходного интегрального уравнения видно, что $\varphi(0)=0$.

Решение однородного уравнения $\varphi'(t)+(1-\lambda)\varphi(t)=0$ имеет вид $\varphi_0(t)=ce^{(\lambda-1)t}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $A\cos t+B\sin t$, тогда, $-A\sin t+B\cos t+(1-\lambda)(A\cos t+B\sin t)=\sin t+\cos t$, откуда получаем систему $\begin{cases}-A+(1-\lambda)B=1\\ B+(1-\lambda)A=1\end{cases}$. Ее определитель $\begin{vmatrix}-1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=-1-(1-\lambda)^2=-2+2\lambda-\lambda^2$. Поскольку уравнение $-2+2\lambda-\lambda^2=0$ действительных решений не имеет, то исходная система имеет единственное решение $A=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{-2+2\lambda-\lambda^2}=-\dfrac{\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}$ и $B=\dfrac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}}{-2+2\lambda-\lambda^2}=\dfrac{2-\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $\varphi(t)=ce^{(\lambda-1)t}-\dfrac{\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}\cos t+\dfrac{2-\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}\sin t$.

Используя начальное условие, находим $\varphi(0)=c-\dfrac{\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}=0$, откуда $c=\dfrac{\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}$. Окончательное решение исходного интегрального уравнения:

$$\varphi(t)=\frac{\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}\left(e^{(\lambda-1)t}-\cos t\right)+\frac{2-\lambda}{2-2\lambda+\lambda^2}\sin t.$$

5. Построить резольвенту уравнения $\varphi(t)-\lambda\int_0^t k(t,s)\varphi(s)ds=f(t)$ и с ее помощью найти решение при $k(t,s)=e^{-(t-s)}$, $\lambda=1$, $f(t)=te^{\frac{t^2}{2}}$.

Решение: найдем итерированные ядра этого уравнения. Учитывая, что $k_1(t,s)=k(t,s)=e^{-(t-s)}$, последовательно находим:

$$k_2(t,s)=\int_s^t k(t,\tau)k_1(\tau,s)d\tau=\int_s^t e^{-(t-\tau)}e^{-(\tau-s)}d\tau=\int_s^t e^{-(t-s)}d\tau=e^{-(t-s)}(t-s),$$

$$k_3(t,s)=\int_s^t k(t,\tau)k_2(\tau,s)d\tau=\int_s^t e^{-(t-\tau)}e^{-(\tau-s)}(\tau-s)d\tau=$$

$$=e^{-(t-s)}\int_s^t(\tau-s)d\tau=e^{-(t-s)}\frac{(t-s)^2}{2},$$

....

Далее, по индукции, доказывается, что $k_n(t,s)=e^{-(t-s)}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$, $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, $R(t,s,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(t,s)=e^{-(t-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\dfrac{(t-s)^n}{n!}=e^{-(t-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\lambda(t-s))^n}{n!}=$ $=e^{-(t-s)}e^{\lambda(t-s)}=e^{(t-s)(\lambda-1)}$. Решение уравнения: $\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^t R(t,s,\lambda)f(s)ds$. При $\lambda=1$, получаем, что $R(t,s,\lambda)=1$ и при $f(t)=te^{\frac{t^2}{2}}$, получаем:

$$\varphi(t)=te^{\frac{t^2}{2}}+\int_0^t se^{\frac{s^2}{2}}ds=te^{\frac{t^2}{2}}+e^{\frac{s^2}{2}}\Big|_0^t=te^{\frac{t^2}{2}}+e^{\frac{t^2}{2}}-1.$$

6. Построить резольвенту уравнения $\varphi(t)-\lambda\int_0^1 ts\varphi(s)ds=f(t)$ и с ее помощью найти решение при $\lambda=2$, $f(t)=t$.

Решение: найдем итерированные ядра данного уравнения, учитывая, что $k_1(t,s)=k(t,s)=ts$. Тогда последовательно получаем:

$$k_2(t,s)=\int_0^1 k(t,\tau)k_1(\tau,s)d\tau=\int_0^1 t\tau^2 s d\tau=\frac{ts}{3},$$

$$k_3(t,s)=\int_0^1 k(t,\tau)k_3(\tau,s)d\tau=\int_0^1 t\tau\frac{\tau s}{3}d\tau=\frac{ts}{9},$$

....

Методом математической индукции доказывается, что $k_n(t,s)=\dfrac{ts}{3^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Таким образом $R(t,s,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(t,s)=ts\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{1}{3^n}=ts\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^n$. Полученный ряд сходится только при $\left|\frac{\lambda}{3}\right|<1$ или при $|\lambda|<3$ и в этом случае его сумма равна $\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}}=\frac{3}{3-\lambda}$, тогда $R(t,s,\lambda)=\frac{3ts}{3-\lambda}$. Решение уравнения записывается в виде $\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 R(t,s,\lambda)f(s)ds$ и при $\lambda=2$, $f(t)=t$ имеем $\varphi(t)=t+6\int_0^1 ts^2ds=3t$.

7. Решить интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t e^{t-s}\varphi(s)ds=\sin t.$$

Решение: приведем это уравнение к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, для чего продифференцируем его по t: $\varphi(t)+\int_0^t e^{t-s}\varphi(s)ds=\cos t$. Здесь $k(t,s)=e^{t-s}$, $\lambda=1$, $f(t)=\cos t$. Как в примере 5 находим $R(t,s,\lambda)=e^{(t-s)(\lambda+1)}=1$, тогда $\varphi(t)=\cos t-\int_0^t\cos s ds=\cos t-\sin t$.

8. Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

$$\text{а) } \varphi(t)-\int_0^t(s-t)\varphi(s)ds=1;\ \text{б) } \varphi(t)=t+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(s)ds.$$

Решение: а) Возьмем $\varphi_0(t)=0$. Тогда $\varphi_1(t)=1+\int_0^t(s-t)\varphi_0(s)ds=1$,

$$\varphi_2(t)=1+\int_0^t(s-t)\varphi_1(s)ds=1+\int_0^t(s-t)ds=1+\frac{t^2}{2}-t^2=1-\frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t(s-t)\varphi_2(s)ds=1+\int_0^t(s-t)\left(1-\frac{s^2}{2}\right)ds=1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}-t^2+\frac{t^4}{6}=$$

$$=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!},$$

....

На n-м шаге получим $\varphi_n(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-...+\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^{2k-2}}{(2k-2)!}$.

Тогда $\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^{2k-2}}{(2k-2)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}t^{2k-2}}{(2k-2)!}=\cos t$.

б) Возьмем $\varphi_0(t)=0$. Тогда $\varphi_1(t)=t+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_0(s)ds=t$,

$$\varphi_2(t)=t+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_1(s)ds=t+\int_0^{\frac{1}{2}}sds=t+\frac{1}{8},$$

$$\varphi_3(t)=t+\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_2(s)ds=t+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(s+\frac{1}{8}\right)ds=t+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=t+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8},$$

....

На n-м шаге получим $\varphi_n(t)=t+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{8}=t+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k}$.

Тогда $\varphi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(t+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k}\right)=t+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=t+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=t+\frac{1}{4}$.

9. Решить уравнение $\varphi(t)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(t\cos s+s^2\sin t+\cos t\sin s)\varphi(s)ds=t$, где $\lambda\in\mathbb{R}$.

Решение: это уравнение с вырожденным ядром, поскольку его ядро представляет собой конечную сумму попарных произведений функций, зависящих только от t на функции, зависящие только от s. Преобразуем уравнение к виду

$\varphi(t)-\lambda t\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\varphi(s)ds-\lambda\sin t\int_{-\pi}^{\pi}s^2\varphi(s)ds-\lambda\cos t\int_{-\pi}^{\pi}\sin s\varphi(s)ds=t$ или

$$\varphi(t)=t\left(1+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\varphi(s)ds\right)+\lambda\sin t\int_{-\pi}^{\pi}s^2\varphi(s)ds+\lambda\cos t\int_{-\pi}^{\pi}\sin s\varphi(s)ds.$$

Таким образом, решение исходного уравнения необходимо искать в виде $\varphi(t)=c_1t+c_2\sin t+c_3\cos t$. Подставляя этот вид решения в уравнение, получаем:

$$c_1t+c_2\sin t+c_3\cos t=t\left(1+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos s(c_1s+c_2\sin s+c_3\cos s)ds\right)+$$

$$+\lambda\sin t\int_{-\pi}^{\pi}s^2(c_1s+c_2\sin s+c_3\cos s)ds+\lambda\cos t\int_{-\pi}^{\pi}\sin s(c_1s+c_2\sin s+c_3\cos s)ds.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в левой и правой частях уравнения, получаем, что:

$$c_1=1+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos s(c_1s+c_2\sin s+c_3\cos s)ds,$$

$$c_2=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}s^2(c_1s+c_2\sin s+c_3\cos s)ds,$$

$$c_3 = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin s(c_1 s + c_2 \sin s + c_3 \cos s)ds.$$

Вычисляя все интегралы, получаем систему $\begin{cases} c_1 - \pi\lambda c_3 = 1 \\ c_2 + 4\pi\lambda c_3 = 0 \\ 2\pi\lambda c_1 + \pi\lambda c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$. Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ 2\pi\lambda & \pi\lambda & -1 \end{vmatrix} = -2\pi^2\lambda^2 - 1 \neq 0$, поэтому система имеет единственное решение, найти которое можно по формулам Крамера:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ 0 & \pi\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-2\pi^2\lambda^2 - 1} = \frac{1 + 4\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2},\ c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\pi\lambda \\ 0 & 0 & 4\pi\lambda \\ 2\pi\lambda & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2\pi^2\lambda^2 - 1} = -\frac{8\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2},\ c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\pi\lambda & \pi\lambda & 0 \end{vmatrix}}{-2\pi^2\lambda^2 - 1} = \frac{2\pi\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2}.$$

Тогда решение исходного уравнения записывается в виде:

$$\varphi(t) = \frac{1 + 4\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2} t - \frac{8\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2} \sin t + \frac{2\pi\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2} \cos t.$$

10. Решить интегральное уравнение $\varphi(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (2ts^3 + 5t^2 s^2)\varphi(s)ds = 7t^4 + 3$.

Решение: это уравнение представляет собой уравнение с вырожденным ядром. Представим его в виде $\varphi(t) - \lambda \cdot 2t \int_{-1}^{1} s^3 \varphi(s)ds - \lambda \cdot 5t^2 \int_{-1}^{1} s^2 \varphi(s)ds = 7t^4 + 3$ или $\varphi(t) = 2\lambda t \int_{-1}^{1} s^3 \varphi(s)ds + 5\lambda t^2 \int_{-1}^{1} s^2 \varphi(s)ds + 7t^4 + 3$. Значит, его решение надо искать в виде $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_4 t^4$.

Подставим этот вид решения в уравнение и получим

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_4 t^4 = 2\lambda t \int_{-1}^{1} s^3 (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_4 s^4)ds +$$

$$+5\lambda t^2 \int_{-1}^{1} s^2 (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_4 s^4)ds + 7t^4 + 3.$$

Отсюда получаем, что $c_0 = 3$, $c_4 = 7$,

$$c_1 = 2\lambda \int_{-1}^{1} s^3 (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_4 s^4)ds,$$

$$c_2 = 5\lambda \int_{-1}^{1} s^2 (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_4 s^4)ds.$$

Подставляя в эти два равенства значения c_0 и c_4, и, вычисляя интегралы, получаем систему $\begin{cases} c_1\left(1-\dfrac{4}{5}\lambda\right)=0 \\ c_2(1-2\lambda)=20\lambda \end{cases}$.

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1-\dfrac{4}{5}\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = \left(1-\dfrac{4}{5}\lambda\right)(1-2\lambda)=\dfrac{8}{5}\lambda^2-\dfrac{14}{5}\lambda+1$ равен нулю при $\lambda=\dfrac{1}{2}$ и $\lambda=\dfrac{5}{4}$, т.е. при этих значениях λ система либо не имеет решений, либо имеет более одного решения. Пусть $\lambda=\dfrac{1}{2}$, тогда $\begin{cases} \dfrac{3}{5}c_1=0 \\ c_2\cdot 0=10 \end{cases}$, т.е. система в этом случае решений не имеет. Пусть $\lambda=\dfrac{5}{4}$, тогда $\begin{cases} c_1\cdot 0=0 \\ -\dfrac{3}{2}c_2=25 \end{cases}$, откуда $c_2=-\dfrac{50}{3}$, c_1 – произвольное, и решение интегрального уравнения имеет вид $\varphi(t)=3+c_1t-\dfrac{50}{3}t^2+7t^4$. Пусть $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ и $\lambda\neq\dfrac{5}{4}$, тогда $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2=\dfrac{20\lambda}{1-2\lambda} \end{cases}$, и решение интегрального уравнения имеет вид $\varphi(t)=3+\dfrac{20\lambda}{1-2\lambda}t^2+7t^4$.

11. Решить уравнение $\varphi(t)-\lambda\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds=t$ с симметричным ядром $k(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & t\le s \\ s(1-t), & t\ge s \end{cases}$.

Решение: в примере 3 найдены характеристические числа $\lambda_n=\pi^2n^2$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_n(t)=\sin\pi nt, n\in\mathbb{N}$ данного ядра. Поскольку $\|\varphi_n\|_{L_2[0,1]}=\sqrt{\int\limits_0^1\sin^2\pi nt dt}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то нормированные собственные функции будут иметь вид $\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\pi nt, n\in\mathbb{N}$. Если $\lambda\neq\lambda_n$, то по п. 1 теоремы о решениях уравнения с симметрическим ядром $\varphi(t)=f(t)-\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(t)$, где

$$a_n=\int\limits_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt=\sqrt{2}\int\limits_0^1 t\sin\pi nt dt=-\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\int\limits_0^1 t d\cos\pi nt=-\frac{\sqrt{2}}{\pi n}t\cos\pi nt\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\int\limits_0^1\cos\pi nt dt=$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\cos\pi n + \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 n^2}\sin\pi nt\Bigg|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\cos\pi n = -\frac{\sqrt{2}}{\pi n}(-1)^n = \frac{\sqrt{2}}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Тогда $\varphi(t) = t - \dfrac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin\pi nt}{n(\lambda+\pi^2 n^2)}$.

Если $\lambda = \lambda_n$, то по п. 2 теоремы о решениях уравнения с симметрическим ядром данное уравнение не имеет решений, поскольку его правая часть $f(t) = t$ не ортогональна всем собственным функциям. Это следует из того, что скалярное произведение $(f(t), \varphi_n(t)) = a_n \neq 0$.

12. Найти характеристические числа, собственные функции и решения (при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором они существуют) интегрального уравнения $\varphi(t) - \lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(t-s)\varphi(s)ds = \sin 2t$.

Решение: данное уравнение является уравнением с симметрическим ядром, поскольку $k(t,s) = \cos^2(t-s) = \overline{\cos^2(s-t)} = \overline{k(s,t)}$. Найдем его характеристические значения и собственные функции, для чего рассмотрим однородное уравнение $\varphi(t) - \lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(t-s)\varphi(s)ds = 0$.

Поскольку $\cos^2(t-s) = \dfrac{1+\cos 2(t-s)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t\cos 2s + \dfrac{1}{2}\sin 2t\sin 2s$, то $\varphi(t) = \dfrac{\lambda}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(s)ds + \dfrac{\lambda}{2}\cos 2t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2s\varphi(s)ds + \dfrac{\lambda}{2}\sin 2t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2s\varphi(s)ds$.

Таким образом, решение будем искать в виде $\varphi(t) = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t$. Подставим этот вид в уравнение:

$$c_1 + c_2\cos 2t + c_3\sin 2t = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cos 2t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2s(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sin 2t\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2s(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds.$$

Откуда

$$c_1 = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds,$$

$$c_2 = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2s(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds,$$

$$c_3 = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2s(c_1 + c_2\cos 2s + c_3\sin 2s)ds.$$

Вычисляя все интегралы, получаем систему $\begin{cases} c_1(1-\lambda\pi)=0 \\ c_2\left(1-\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)=0 \\ c_3\left(1-\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. Это – однородная система линейных уравнений, поэтому она имеет нетривиальное решение, только если ее определитель равен нулю, т.е. $(1-\lambda\pi)\left(1-\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)\left(1-\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)=0$, откуда находим характеристические значения $\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$, $\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{2}{\pi}$.

Если $\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$, то c_1 – произвольно, $c_2=c_3=0$, и значит $\varphi_1(t)=c_1$. Чтобы функция была нормированной, найдем $\|\varphi_1\|=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}c_1^2dt}=c_1\sqrt{2\pi}=1$ при $c_1=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $\varphi_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Аналогично находим $\varphi_2(t)=\dfrac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}$ и $\varphi_3(t)=\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}$ – обе нормированные. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_1,\lambda_2\}$, тогда по п. 1 теоремы о решениях уравнения с симметрическим ядром $\varphi(t)=f(t)-\lambda\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(t)$, где $a_n=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\varphi_n(t)dt$ т.е., в данном случае, $\varphi(t)=\sin 2t-\dfrac{\lambda a_1}{\lambda-\lambda_1}\varphi_1(t)-\dfrac{\lambda a_2}{\lambda-\lambda_2}\varphi_2(t)-\dfrac{\lambda a_3}{\lambda-\lambda_3}\varphi_3(t)$, причем $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2tdt=0$, $a_2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2t\cos 2tdt=0$, $a_3=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2tdt=\sqrt{\pi}$.

Следовательно, $\varphi(t)=\sin 2t-\dfrac{\lambda\pi\sin 2t}{\pi\lambda-2}=\dfrac{2\sin 2t}{2-\pi\lambda}$.

Пусть теперь $\lambda=\lambda_1$, тогда по п. 2 теоремы о решениях уравнения с симметрическим ядром, поскольку правая часть $f(t)=\sin 2t$ ортогональна собственной функции $\varphi_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, то исходное неоднородное уравнение имеет решения $\varphi(t)=f(t)-\lambda\cdot\dfrac{a_2}{\lambda-\lambda_2}\varphi_2(t)-\lambda\cdot\dfrac{a_3}{\lambda-\lambda_3}\varphi_3(t)+c_0\varphi_1(t)$, где c_0 – произвольная постоянная (ранг характеристического числа $q=1$).

Таким образом, $\varphi(t)=\dfrac{2\sin 2t}{2-\pi\lambda}+\dfrac{c_0}{2\sqrt{\pi}}=C+\dfrac{2\sin 2t}{2-\pi\lambda}$.

Наконец, при $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$ исходное уравнение решений не имеет, поскольку его правая часть $f(t)=\sin 2t$ не ортогональна к функции $\varphi_3(t)$.

13. Найти решения уравнения $\varphi(t)-\lambda\int\limits_0^1\varphi(s)ds=1,\ \lambda\neq 0$.

Решение: решим это уравнение Фредгольма второго рода методом резольвент. Здесь $k(t,s)=1$, $B=\sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^1|k(t,s)|^2\,dtds}=1$, тогда данное уравнение имеет решение при $|\lambda|<B^{-1}=1$, и это решение представляется рядом Неймана, т.е. $\varphi(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m K^m f(t)$. Здесь $Kf(t)=\int\limits_0^1 k(t,s)f(s)ds=\int\limits_0^1 1ds=1$, $K^2 f(t)=K(Kf(t))=$ $=\int\limits_0^1 k(t,s)K(f(s))ds=\int\limits_0^1 1ds=1$, и, аналогично, для всех $m\geq 0$ $K^m f(t)=1$ (это можно обосновать и по индукции). Тогда $\varphi(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m=\dfrac{1}{1-\lambda}$. При $|\lambda|\geq 1$ ряд Неймана расходится.

Решим это же уравнение иначе, а именно, заметим, что его решение нужно искать в виде $\varphi(t)=c$. Подставляя в уравнение этот вид решения, получаем: $c-\lambda\int\limits_0^1 cds=1$, откуда $c-c\lambda=1$, т.е. $c=\dfrac{1}{1-\lambda}$. Таким образом, $\varphi(t)=\dfrac{1}{1-\lambda}$, причем при $\lambda=1$ решения не существует. Итак, даже при условии, что ряд Неймана расходится при $|\lambda|>1$, решение уравнения все равно существует.

14. Решить интегральное уравнение Фредгольма первого рода $\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds=\sin^3\pi t$ с симметричным ядром $k(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & t\leq s\\ s(1-t), & t\geq s\end{cases}$.

Решение: собственные функции ядра – есть $\varphi_n(t)=\sqrt{2}\sin\pi nt, n\in\mathbb{N}$, а соответствующие им характеристические числа $\lambda_n=\pi^2 n^2$. Система $\{\varphi_n(t)\}$ на отрезке $[0,1]$ полна. Далее, $\sin^3\pi t=\dfrac{3}{4}\sin\pi t-\dfrac{1}{4}\sin 3\pi t=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\varphi_1(t)-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\varphi_3(t)$, т.е. коэффициенты разложения правой части уравнения по базису $\{\varphi_n(t)\}$ – есть $a_1=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$, $a_3=-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, остальные a_n равны нулю. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2|a_n|^2$ сходится и выполнены все условия теоремы о решениях уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим ядром. Согласно этой теореме получаем единственное решение $\varphi(t)=\lambda_1 a_1\varphi_1(t)+\lambda_3 a_3\varphi_3(t)=\dfrac{3\pi^2}{4}(\sin\pi t-3\sin 3\pi t)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим диф-

ференциальным уравнениям с заданными начальными условиями:

а) $y''(t)+y(t)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

б) $y'''(t)-3y''(t)-6y'(t)+8y(t)=0$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$;

в) $y''(t)+y(t)=\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

2. Найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции ядра $k(t,s)=st+s^2t^2$ $(t,s\in[-1,1])$.

3. Найти резольвенту интегрального уравнения $\varphi(t)-\lambda\int\limits_0^t k(t,s)\varphi(s)ds=f(t)$ и с ее помощью решить уравнение в следующих случаях:

а) $k(t,s)=e^{t^2-s^2}$, $\lambda=2$, $f(t)=e^{t^2+2t}$;

б) $k(t,s)=\dfrac{1+t^2}{1+s^2}$, $\lambda=1$, $f(t)=1+t^2$;

в) $k(t,s)=\dfrac{2+\cos t}{2+\cos s}$, $\lambda=1$, $f(t)=e^t\sin t$.

4. Найти резольвенту интегрального уравнения $\varphi(t)-\lambda\int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)ds=f(t)$ и с ее помощью решить уравнение в следующих случаях:

а) $k(t,s)=\sin t\cos s$, $a=0$, $b=\dfrac{\pi}{2}$, $\lambda=-1$, $f(t)=\cos t$;

б) $k(t,s)=te^s$, $a=-1$, $b=1$, $\lambda=\dfrac{e}{3}$, $f(t)=(3t^2+1)e^{-t}$;

в) $k(t,s)=ts+t^2s^2$, $a=-1$, $b=1$, $\lambda=1$, $f(t)=3(t+1)$.

5. Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

а) $\varphi(t)=t+\int\limits_0^t (s-t)\varphi(s)ds$ $(\varphi_0(t)\equiv 0)$;

б) $\varphi(t)=\dfrac{5}{6}t+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 ts\varphi(s)ds$ $(\varphi_0(t)\equiv 0)$;

в) $\varphi(t)=2t+2-\int\limits_0^t \varphi(s)ds$ $(\varphi_0(t)\equiv 1)$;

г) $\varphi(t)=1+t+\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$ $(\varphi_0(t)\equiv 1)$;

д) $\varphi(t)=\operatorname{arctg} t+\int\limits_0^t \dfrac{\varphi(s)}{1+s^2}ds$ $(\varphi_0(t)\equiv 0)$.

6. Решить следующие интегральные уравнения Вольтерра первого рода:

а) $\int\limits_0^t \sin(t-s)\varphi(s)ds=e^{\frac{t^2}{2}}-1$;

б) $\int\limits_0^t (1-t^2+s^2)\varphi(s)ds = \frac{t^2}{2}$.

7. Решить уравнения:

а) $\varphi(t) = 3\int\limits_0^2 ts\varphi(s)ds + 3t - 2$;

б) $\varphi(t) = 3\int\limits_0^1 ts\varphi(s)ds + 3t - 2$;

в) $\varphi(t) = \int\limits_0^1 (t+s)\varphi(s)ds + 18t^2 - 9t - 4$;

г) $\varphi(t) = \int\limits_0^\pi \cos(t+s)\varphi(s)ds + 1$.

8. Решить интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

а) $\varphi(t) - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\varphi(s)ds = 2t - \pi$;

б) $\varphi(t) - \lambda\int\limits_0^1 \cos(q\ln s)\varphi(s)ds = 1,\ q \in \mathbb{R}$;

в) $\varphi(t) - \lambda\int\limits_{-1}^1 (t^2 - st)\varphi(s)ds = t^2 + t$;

г) $\varphi(t) - \lambda\int\limits_0^\pi (\sin s + s\cos t)\varphi(s)ds = 1 - \frac{2t}{\pi}$.

9. Решить уравнения:

а) $\varphi(t) = t - \int\limits_0^t e^{t-s}\varphi(s)ds$;

б) $\varphi(t) = \cos t - \int\limits_0^t (t-s)\cos(t-s)\varphi(s)ds$.

10. Решить уравнение $\varphi(t) - \lambda\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds = \cos\pi t$, $k(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s \\ (t-1)s, & s \le t \le 1 \end{cases}$.

11. Решить уравнение $\varphi(t) - \lambda\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds = t^3 - t^2$, $k(t,s) = \begin{cases} t-s, & 0 \le t \le s \\ s-t, & s \le t \le 1 \end{cases}$.

12. Решить уравнение $\varphi(t) - \lambda\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds = \sin\pi t$, $k(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \le t \le s \\ s(t-1), & s \le t \le 1 \end{cases}$.

13. При всех λ и b решить в $C[0,1]$ уравнение $f(x) - 10\lambda x^2\int\limits_0^1 t^2 f(t)dt = 2x + bx^2$.

14. Пусть $\varphi(t)-\lambda\int_0^1 \min(t,s)\varphi(s)ds=\sin\pi t$. Доказать, что характеристические значения и собственные функции этого уравнения – есть $\lambda_n=\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, $\varphi_n(t)=\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t$, $n=0,1,2,...$ Найти решения этого уравнения при каждом $\lambda\in\mathbb{C}$, при котором они существуют.

15. Решить в $L_2[0,1]$ уравнение $f(x)-\lambda\int_0^1 \min(x,t)f(t)dt=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

16. Решить в $L_2[0,1]$ уравнение $f(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)f(t)dt=\cos(2\pi x)$, где $K(x,t)=\begin{cases}(x+1)t, & x\le t\\ (t+1)x, & x\ge t\end{cases}$.

17. При всех λ и a решить в $C[0,1]$ уравнение $f(x)-6\lambda x\int_0^1 tf(t)dt=ax+2x^2$.

18. Выяснить, какие из данных уравнений имеют единственное решение и найти это решение. В случае неединственности указать несколько решений:

а) $\int_0^1 t\varphi(t)dt=\frac{1}{3}$;

б) $\int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)dt=x^3+3x-1$;

в) $\int_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t)dt=\pi\cos x$.

Указание: решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода не будет единственным, если система собственных функций его ядра не является полной на соответствующем отрезке.

Рекомендуемая литература

1. Городецкий, В.В. Методы решения задач по функциональному анализу/ В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – М.: Книжный дом "Либроком", 2012. – 480 с.
2. Иосида, К. Функциональный анализ/ К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1984. – 752 с.
4. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа/ А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. – 400 с.
5. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2017. – 576 с.
6. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию/ М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 302 с.
7. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
8. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
9. Треногин, В.А. Функциональный анализ/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
10. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2014. – 560 с.

Содержание

Учебное издание

Кутузов Антон Сергеевич

Введение
в функциональный анализ

Учебное пособие

Ответственный редактор *Ю. Барабанщикова*
Верстальщик *Е. Семенова*

Издательство «Директ-Медиа»
117342, Москва, ул. Обручева, 34/63, стр. 1
Тел/факс + 7 (495) 334-72-11
E-mail: manager@directmedia.ru
www.biblioclub.ru
www.directmedia.ru

Отпечатано в ООО «МЭЙЛ ТЕКНОЛОДЖИ»
142172, г. Москва, г. Щербинка,
ул. Космонавтов, д.16