Билим берүү жана Илим министрлиги

ОшМУнун окуу китептери

М. Ш. Мамаюсупов

Дж. У. Байсалов

Р. Усубакунов

М. Назаров

ГУМАНИТАРДЫК БАГЫТТА ОКУГАН СТУДЕНТТЕР ҮЧҮН

МАТЕМАТИКА КУРСУ

Ош – 2018

УДК 510

ББК 22.11я73

М. 34

Китеп ОшМУ нун «Жогорку математика» кафедрасы менен И. Арабаев атындагы КМУ нун педагогика институтунда даярдалып, басмага сунушталган.

Редактору: ОшМУ нун доценти К. Байгазиев

Рецензенттер: физ. – мат. и. д-ру: проф. Ж.Сатаров, проф. И.Ташполотов

Авторлор: Мамаюсупов М. Ш., Байсалов Дж. У.

М .34 “МАТЕМАТИКА КУРСУ”; Окуу китеби. – Ош: 2018. – 221 б.

ISBN 978 – 9967 – 18 – 467 – 1

«МАТЕМАТИКА КУРСУ» окуу китеби гуманитардык багытта окуган студенттерге, окутуучуларга жана математиканы өз алдынча өздөштүрүүнү каалаган окурмандарга арналган. Китептин электрондук вариантын ОшМУ нун жана www.okuma.kg сайттарынан акысыз окууга, көчүрүүгө болот.

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика кафедрасы.

Электрондук дарек: mamaiusupov.m@gmail.com

М 1602010000 – 18 УДК 510

ISBN 978 – 9967 – 18 – 467 – 1 ББК 22. 11я73

МАЗМУНУ

Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.

Галилей

КИРИШ СӨЗ

Сиздер кайсы сабакты окусаңыздар да, андан кандай пайда аларыңарды билишиңиздер керек. Анткени алган билимиңер, сиздерге келечек жашооңорду ийгиликтүү уюштурууга кызмат кылууга тийиш. Ошондуктан математика сабагын окуудан мурда, аны эмне үчүн окуп жатканыңарды билишиңиздер зарыл. Математика сөзү кыргызча “акыл – ойдун илими” – деген мааниде которулгандыктан, көпчүлүгү математиканы билсеңер логикалык ой жүгүртүүңөр өсүп, акылдуу болосуңар деген жалпы жоопту беришет. Кайсы бирлери математика эсеп – кысапты жакшы үйрөтөт деп, математиканы “эсеп” сабагы деп да айтышат. Бирок бул айтылгандар, математикага үстүрттөн берилген мүнөздөмөлөр болушат, анткени математика тикеден тике акыл кошуучу же эсептөөчү илим эмес, ал кыргыз, орус, англис тилдери сыяктуу эле кайсы бир кубулуштарды, окуяларды таанып үйрөнүү үчүн колдонулуучу кошумча тил болуп эсептелет. Мисалы, 36 тамганын жардамы менен сезимдерибизди, жомокторду, насааттарыбызды кат же аңгеме катары жазып билдире алсак, кайсы бир үйдүн курулушу, машинанын түзүлүшү, экономикалык көрсөткүчтөр ж.б. сыяктуу окуяларды 36 тамгалар менен толук баяндап түшүндүрө албайбыз. Ошондуктан жаңы тамгаларды колдонгон кошумча тилди киргизүүгө мажбур болобуз. Ал тил математикалык тил болот. Математикалык тилдин улуту жок, аны ар бир эл өз таануу зарылчылыгына жараша колдонуп келет. Мисалы байыртан эле кыргыздар аралыкты, убакытты, аянтты, көлөмдөрдү ченөө менен байланышкан өлчөм тамгаларын жана бир, эки, үч, ... сыяктуу санак белги – тамгаларын колдонуп келгенин Манас эпосунан жолуктурабыз. Ошондой эле математикалык тилди кеңейтүүгө өзгөчө салым кошуп медициналык трактаттарын жазган Ибин Сина (Авицена), математикалык сүйлөмдөрдүн түзүлүү сапатын көтөрүшкөн Омар Хайам, Темирландын урпагы Улугбек сыяктуу жердештерибиз менен сыймыктанабыз. Кала берсе математиканы “эсептөө” илиминен, “таануу” илимине айландырган жердешибиз Аль Ажебрдин урматына “Алгебра” (*Al Algebr*) аталышы коюлганын кантип унутабыз. Ошентип бүгүнкү математиканын калыптанышына биздин ата – бабалардын да салымы бар экенин билип, математикалык тил бизге да тиешелүү экенин сезебиз. Ошондуктан, аны эне – тилибиздей үйрөнүп, чөйрө кубулуштары менен аалам сырларын таанып, жашообузда колдонуу менен бай жана бакубат жашообузду уюштурууга тийишпиз. Демек математика сабагы, Сиздер өздөштүрүп жаткан кесипти терең жана толук үйрөнүү үчүн, сүйлөө тилине кошумча математикалык тилди колдоно билүүгө үйрөтүү менен, кесиптерди таануунун эл аралык тилине айланган компьютердик тилди өздөштүрүүгө жол ачат.

Сиздерге сунуш кылынуучу математика курсу, Кыргыз Республикасынын Билим берүү стандартынын базалык бөлүгүндөгү “Математикалык жана табыгий илимдер” – циклинде каралган 3 кредиттик саат өлчөмүнө ылайыкталып тандалган темаларды камтып, негизги көңүл математикалык далилдөөлөр менен ырастоолорго бурулбастан, “бакалавр” – илимий даражасын деңгээлинде гуманитардык багыттагы кесиптерди өздөштүрүүгө, математикалык тилди пайдалана билүү жөндөмдүүлүгүн арттырууга бурулган. Анткени, бүгүнкү ирмем тездигине ээ ааламдашуу процессине аралаш жашаган коомдо, илимий даражага ээ болгон адам: социалдык, илимий жана экономикалык тармактарда болуп жаткан жаңылыктарды, документтерди, коомдогу окуяларды, чөйрө кубулуштарын аңдап, туура түшүнүп, башкаларга туура маалымат бере билүүсү зарыл.

Математикалык усулдар аркылуу кесиптерди атайын терең изилдеп үйрөнүү, кийинки тандоо курстарында каралган сааттарда окутулуп, ал бөлүктөрдө комбинаторика менен ыктымалдыктар теориясы, статистиканын элементтери менен корреляциялык байланыштар тереңдетилип окутулат.

Өз алдынча иштөөнү эске алып, айрым темалар боюнча кеңири маалымат берилген, алар санариптик технологияларда колдонулган сандардын түзүлүү табыяты менен биз жашаган чөйрөнүн түзүлүү табыяты аналогиялуу (окшош) экендигин, таануу процессиндеги чагылтуу аппаратын (функциялардын) ордун ачыктоо максатында кеңейтилген. Негизги максат, студенттер математикалык маселе – мисалдарды чыгарууну толук билбесе да, кайсы кубулуш же окуя кандай математикалык усулдар аркылуу таанып үйрөнүлөрүн билип, керек болгондо китептерден таап, өздөштүрө ала тургандай билимге ээ кылуу болуп эсептелет.

Окуулукту түзүүдө колдонулган адабияттар тизмесинде көрсөтүлгөн: ОшМУ нун профессорлору М.Н. Назаровдун (Мектеп математикасынын илимий негиздери), Д. Турсуновдун (Дискреттик математика), К. Байгазиевдин (Комбинаториканын элементтери) М. Мамаюсуповдун (Жогорку математика боюнча окума 1 – 3 томдор), Кыргыз – Түрк Манас университетинин профессорлору Р. Рафатов, А. Асанов менен авторлошуп жазылган (Жогорку математика боюнча окума 4, 5 томдор) окуу китептери жана интернет тармагынан алынган орус окумуштууларынын китептери колдонулуп, айрым чиймелер жана мисалдар пайдаланылды.

Окуу китеби “Ош МУнун окуу китептери” – грифи менен даярдалып, анын мукабасына кыргыз математикасын түптөө салым кошушкан агайлардын сүрөттөрү коюлган.

Авторлор

I – БӨЛҮК: ЖАЛПЫ МАТЕМАТИКАЛЫК БИЛИМДЕР

§1. Математиканын предмети. Математикалык тил, сүйлөм, алфавиттер, шарттуу символдор.

Математика илими байыркы илимдердин бири болуп, алгачкы доордон баштап “акыл – ойдун илими” деген ат менен окутулуп келе жатканы менен, бүгүнкү илимий – техникалык прогресске негизделген жашоону уюштуруу муктаждыгына жараша, математика илиминен өсүп чыккан көптөгөн жаңы илимий тармактарды адам тилинде түшүнүүчү тилге айланып бара жатат. Натыйжада окуучуларга окутулуучу предметтердин саны көбөйүп, “таза математиканы” окутуу максаты менен мазмуну өзгөрдү. Ошентип бүгүнкү **математика илимин, өзүнүн тармагынан өсүп өнүгүп калыптанган илимдерди жана кесиптерди таанып өздөштүрүп, үйрөтүүчү тил** катары кабыл алууга тийишпиз. Анткени 36 тамганын жардамы менен кыял ойлорубузду чыгарма же кат жүзүндө баяндай алсак, кайсы бир имараттын же ГЭС тин курулушун, трансформатор же болбосо тиричилик техникасын түзүлүшүн, 36 тамга менен толук жазып түшүндүрө албайбыз.

Математика илиминин өнүгүү жолун, кыскача төмөндөгүдөй төрт доорго бөлүүгө болот:

I. Математиканын жаралуу доору;

II .Элементардык математиканын доору;

III. Өзгөрүлмө чоңдуктардын математикасынын доору;

IV. Заманбап математиканын доору.

Жаралуу доорунда математика илими, эксперименталдык тажрыйбалардын, байкоолордун натыйжасында топтолгон билимдерден турган эрежелер сыяктуу кабыл алынган. Мисалы төрт бурчтуктун, үч бурчтуктун, көп бурчтуктун аянттары менен периметрлерин эсептөө формулалары, мейкиндик фигураларын көлөмдөрү, беттерин аянты, сандар менен болгон амалдардын эрежелери ж. б. у. сыяктуу тажрыйбалар аркылуу негизделген универсалдык эрежелер менен формулаларды келтирип чыгарышкан. Байыркы Пифагордон баштап Архимедке чейинки окумуштуулардын баары, атайын лабораторияларда көптөгөн сыноо тажрыйбаларды жүргүзүп, жыйынтыгын жазуу менен убара болушкан. Мисалы, Архимед айлананын узундугу менен тегеректин аянтын эсептөө тажрыйбаларында мааниси толук аныкталбаган $\pi \approx 3{,}14 \ldots$ санын таап, аны окутуучусу Пифагордун урматына $\pi -$ тамгасы менен белгилеген. Тик бурчтуктук, үч бурчтук, көп бурчтук сыяктуу жалпак фигуралардын периметри менен аянттарын эсептөөдө, анын жактарынын узундуктары пайдалангандыктан, Архимед айлананын узундугу менен тегеректин аянтын, алардын радиусу R, диаметри $d = 2R$ менен байланыштырып табуу аракетин көргөн. Айланага ичтен жана сырттан адегенде төрт бурчтук, андан кийин беш бурчтук, алты бурчтук ж.б.у.с. көп бурчтуктарды сызуу менен, айланага ичтен жана сырттан курчашкан көп бурчтуктар аркылуу улам жакындап келе берген. Натыйжада сырттан сызылган көп бурчтуктардын периметрлери айлананын узундугуна узунураак, ал эми ичтен сызылган көп бурчтуктардын периметрлери айлананын узундугунан кыскараак болуп, көп бурчтуктардын жактары 5, 6, 7, ..., 1000 бурчтук ж.б. көбөйгөн сайын, ичтен жана сырттан сызылган көп бурчтуктардын периметрлери бири ичтен, экинчиси сырттан айлананын накта узундугуна умтулуп жеткен. Табылган айлананын узундугун $d = 2R$ диаметрине байланыштыруу максатында, аны $d -$ диаметрине бөлгөндө, мурда белгисиз $\pi \approx 3{,}14 \ldots$ саны табылган. Ушундай эле тажрыйба менен аныкталган тегеректин аянтында да, π санын тапкан. Ошентип бардык айланалардын узундугу менен тегеректердин аянттарын эсептөөчү универсалдык $\mathrm{C} = 2\pi R$ менен $S = \pi R^2$ формулаларын табышкан.

Кийинки доордо математиканы илим катары расмийлештирүү процесси жүрүп, анын негизин Эвклиддин "Башталма" аттуу эмгеги түзгөн. Бул эмгекте аныктоосуз кабыл алынган алгачкы же негизги түшүнүктөр деп "чекит, түз, тегиздик, натуралдык сан, көптүк" ж.б. алынып, алардын негизинде көптүктөр менен геометриянын далилдөөсүз кабыл алынган ырастоолору же аксиомалары түзүлгөн. Эвклиддин төмөндөгүдөй 5 багытты камтыган 20 аксиомалары аркылуу, математиканын теориясы негизделген:

1) байланыш аксиомалары; 2) тартиптештирүү аксиомалары;

3) кыймылдардын аксиомалары; 5) параллелдүүлүк аксиомалары деп аталышкан.

Бул аксиомалардын тобу, кийинчээрек Гильберт тарабынан толукталып, 21 – аксиома киргизилген: *“Түздө жайгашышкан каалагандай төрт чекиттерге: В чекити А менен С чекиттеринин, ошондой эле А менен Д чекиттеринин арасында; С чекити А менен Д чекиттеринин, ошондой эле В менен Д чекиттеринин арасында жайгашышкан деген аттарды коюп белгилөөгө болот.”*

Бул аксиома менен толукталгандан кийин, төмөндөгү аталыштагы

1.Математикалык структура жөнүндө түшүнүк ......

2.Группоид жана жарым группа ......

3.Группа жана анын касиеттери .....

4.Алкак, тело жана талаа ......

5.Конгруенция ....

аксиомалар тобу аркылуу **МАТЕМАТИКАНЫН АКСИОМАЛЫК МЕТОДУ** түзүлгөн. Мындайча айтканда бардык математикалык түшүнүктөрдү, ырастоолорду, теоремаларды далилдөө, жогорудагы аксиомалардын тобуна таянылып жүргүзүлөт. Ал эми аксиомалардын өзү болсо: «натуралдык сан», «чекит», «түз сызык», «аралык» сыяктуу алгачкы же негизги түшүнүктөргө таянган далилдөөсүз кабыл алынган ырастоолор болушат. Мисалы, “*Бир тегиздикте жатышкан эки чекит аркылуу бир гана түз жүргүзүүгө болот*.” – деген аксиоманы далилдөө мүмкүн эмес.

Жогоруда биз бир нече алгачкы түшүнүктөрдү жана аксиомаларды алып, кандайдыр бир теорияны, нерсени аксиомалык жол менен түзүүгө болот деп айтып кеттик. Алгачкы объектилерди, катыштарды жана алгачкы аксиомаларды каалагандай эле тапдап ала берүүгө болбойт. Каалагандай эле тандап алуунун негизинде анык бир теорияны, нерсени түзө берүүгө болбойт. Негизинен тандап алынган аксиомалардын системасы төмөнкү шарттарды канааттандырышы зарыл: *1) аксиомалардын системасынын карама – каршы эместиги; 2) системадагы аксиомалардын толук болушу; 3) системадагы аксиомалардын өз ара көз каранды болбостугу.*

Аксиомалар методун салыштырмалуу түшүнүү үчүн, математикага байланышы жок башка бир мисалды карайлы: Чөйрөдө жер, суу, от, аба, топуракты аныктоосуз кабыл алынган алгачкы түшүнүктөр деп алсак, анда жердеги бардык кубулуштарды алар аркылуу негиздеп түшүндүрүүгө болот. Мисалы: “шамал” – абанын кыймылы, “жылулук” – оттун таасири, “имарат” – топурак менен сууну аралашмасынан жана жердеги топуракта өнүп чоңойгон дарактан курулат – деген сыяктуу түшүндүрмөлөрдү айтууга болот. Ошондой эле тил илиминде: “тамга”, “чекит, утүр ж.б.” сыяктуу белгилерди аныктоосуз алынган алгачкы түшүнүктөр деп алып, алар аркылуу далилдөөсүз аксиома сыяктуу же аксиомаларга таянып далилденүүчү эрежелердин негизинде, тил илими түзүлөт. Демек, бардык эле илимдерде аныктоосуз кабыл алынган алгачкы же негизги түшүнүктөр жана аларга негизделген далилсиз аксиомалар сыяктуу ырастоолор болот. Ал эми бардык калган ырастоолор менен ачылыштар, ошол илимдеги аксиомалар аркылуу далилденишет.

Акыркы IV – этапта таануунун тилине айланган математика илими, бардык эле тил илимдерине окшоп өзүнүн тамгаларынан турган математикалык алфавитке ээ. Башка тилдердин алфавиттеринен айырмаланып, математикалык символдордон жана белгилерден куралган математикалык алфавит, жашоодогу кесиптер менен илимдерди таануу процессинин зарылчылыгына жараша жаңыланып, улам жаңы тамгалар менен толукталып бара берет. Ошентип адамзаттын жакшы жашоого болгон муктаждыгын канааттандыруу жолунда математикалык символдордун тили, математика илими менен кошо өнүгүп келет.

Математикалык символдор айрыкча XV – XVI кылымдардан баштап тез өнүктү. Жаңы символдорду киргизүү жана аларды пайдаланууда Ф. Виет, Р. Декард, Ньютон, Лейбниц ж. б. у. сыяктуу окумуштуулар чоң салым кошушкан.

Мисалы: $“+”,\ ”-“,\ ”*”,\ ”:”,\ "\frac{\partial y}{\partial x}"-$ символдору 1698-ж Лейбниц тарабынан, “log” - символу Кеплер тарабынан, $“\sin\ ,\cos\ ,tg”$ - символдору 1753-жылы Эйлер тарабынан, $“>,<”$ белгилери 1631-жылы Горриот тарабынан, $"//"-$ параллел, $"\perp"-$ перпендикуляр” - символдору 1677-жылы Эригон, $“a^2,\ a^T”$ - символдору Декарт, $"\int"-$ интеграл Ньютон тарабынан ж.б.у.с киргизилген.

Кыргыз тилинде, орус тилинде ж. б. жазуу үчүн пайдаланып жүргөн символдор — *тамгалар* деп аталган сыяктуу эле математикада пайдаланылган символдор да *математикалык тамгаларды* түзүшөт.

Математикалык тамгалардын семантикалык (маанини билдирүүчү) жагын таштап коюп, алардын тилинин синтаксисин карайбыз. Ал тамгалар:

1. Цифралар:$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
2. Турактуу чоңдуктар: a, b, с, $n, m, \ldots$
3. Өзгөрмөлүү чоңдуктар: $x, y, z, t, . , .$
4. Жардамчы белгилер: $(\quad), [[\ ]], \{\{\}\}, \ldots$
5. Ажыратуучу белгилер: $:, ;, \ldots$
6. Амалдар: $+, -, \times, :, \sqrt[n]{\ }, \ log, \ \cup, \ \ldots$
7. Катыш белгилери: $>, \leq, =, \in, \subseteq, \ldots$
8. Атайын белгилери: $\sin\quad, \cos\quad, \lim\quad, \ldots$
9. Логикалык белгилер: $\Rightarrow, \exists, \forall, \ \vee, \ldots$
10. Өзгөртүп түзүүлөр: f, S_l, H_0^k, ж. б. *көрүнүштөрдө болушат.*

Математикалык тамгалардан түзүлгөн комбинациялар математикалык сөз – сүйлөмдөр деп аталышат. Жогорудагы тамгалардын семантикалык маанилерин билдирген белгилердин баары, сөзгө мисалдар боло алат. $(a+b)^3$ комбинациясын алсак, бул дагы сөз. Тамгалардын ар бири деле, өзүнчө бир сөздү түзө алат. Мисалы: $9; 5; \ \alpha; \ tg$ ж. б.

Математикалык сөз чектүү гана тамгалардан турушу мүмкүн. Мисалы: $6x^2+5x-4=0, \ \ a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \ \ \int \sin x\, dx$. Айрым сөздөрдү кыскартып жазуу да кабыл алынган. Мисалы, $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$ сөзү кыскача a^6 деп, $\log 7+\log ab-\log 32$сөзү $\log\frac{7ab}{32}$— деп, $\sqrt[4]{625}$сөзүн 5 деп, $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$ сөзүн $\sin x$ деп, $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots$ сөзүн $\frac{1}{3}$ деп алууга болот ж. б. у. с. Тамгалардан түзүлгөн бардык эле сөздөр мааниге ээ боло бербейт. Мисалы, $\sqrt{+\sin}$ сөзү эч кандай маанини бербейт. Ошондой эле төмөнкү: $62-(\cdots)$; $\lim$; $6-tg\cdot\sqrt{\ }$; $35\ [\quad]\lim$; $43-$; $2a<\sqrt[5]{\log}=\forall E;\cdots$ сөздөр мааниге ээ болушпайт.

Жогоруда көрсөтүлгөн математикалык символдордун көптүгү алфавит деп аталат.

Математика, өзүнүн түрдүү бөлүктөрү үчүн жалпы болгон анык бир символдордон пайдаланат, алар математикалык тилдин тамгалары болуп эсептелишет. Зарыл болгон учурда жаңы тамгалар кийирилип турат. Бирок, киргизилген тамгалардын баары эле кеңири колдонуп кетти дегенден алыспыз. Айрым учурларда баш айлантkан математикалык тамгаларды киргизүү менен, математикалык тилди чектен сырткары ашкере колдонуу да туура эмес. Бирок жашоо зарылдыгына жараша, кесиптик билимдерде колдонулган математикалык тамгалардын маани – маңызын түшүнүп, аларды туура окуп билүүгө милдеттүүбүз. Анткени “бакалавр” илимий даражасына ээ болгон адамдын көз карашы менен таанып билүү жөндөмдүүлүгү, катардагы орто билимдүү жарандардан жогору турушу керек. Алар мамлекеттик расмий документтерди, иш келишимдерин, ММК маалыматтарын, коомдук жашоонун жүрүшүн толук түшүнүп, аларга анализ жүргүзө билүүсү зарыл. Мисал катары айрым математикалык символ – тамгаларды колдонуп, сүйлөм түзүү мисалдарын көрсөтүп кетебиз:

1. “$\stackrel{\text{def}}{=}$”символу *аныктоо боюнча* дегенди билдирет. Мисалы, а) a^0“ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ”1 жазуусу: «$a^0 -$ аныктоо боюнча бирге барабар» $(a \neq 0)$; б) “$(a \| b) \stackrel{\text{def}}{=} a \cap b = \emptyset \vee a \equiv \mathrm{b}$” дегенди: «$(a \| b)$—боюнча *a* жана b түз сызыктары бир тегиздикте жатышып, алар кесилишпейт же өз ара дал келишет» деп окууга болот. в) $\Delta ABC,\ [AD]$- биссектриса $\stackrel{\text{def}}{=} \angle BAD \cong \angle CAD$ ж. б. у. с. Айрым китептерде «аныктоо боюнча» деген сөздү «$\overline{\overline{\overline{Def}}}$» символу менен да белгилешет. Мисалы:$(\log_a \mathrm{b} = \mathrm{c})\ \overline{\overline{\overline{\mathrm{Def}}}}\ (a^{\mathrm{c}} = \mathrm{b})$, мында $\mathrm{b} > 0,\ a > 0, a \neq 1$; $a^{-n} \overline{\overline{\overline{Def}}} \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$ ж. б. у. с.

2. «$\forall$» символу *жалпылык квантору* деп аталып, «каалаган», «бардык» деген маанини билдирет. Мисалы: $\forall a$,b: $a + \mathrm{b} = \mathrm{b} + a$; $\forall \alpha$:$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; $\forall \Delta \mathrm{ABC}$: $\widehat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi = 180^\circ$ ж.б. Ал эми «$\exists$»символу *жашоо квантору* деп аталып, ал «жашайт», «болот», «бар», «табылат» деген маанини билдирет. Мисалы: $\exists x$: $\sin 2x < \frac{1}{2}$; $\exists \Delta \mathrm{ABC}$: $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}|$; $\forall a, \mathrm{b} \in \mathrm{N}, \exists\ \mathrm{c} \in \mathrm{N}$: $a + \mathrm{b} = \mathrm{c}$ ж. б. у. с. *Акыркы сүйлөмдү «каалаган a, b натуралдык сандары үчүн, кандайдыр бир c натуралдык саны табылып,* $c = a + b$ *болот*» — деп окууга болот.

3. «□» символу менен «зарыл» сөзү белгиленген. $(\mathrm{n} \vdots 4)$□$(\mathrm{n} \vdots 2)$, — *«n* дин 4 кө бөлүнүшү үчүн, анын 2 ге бөлүнүшү зарыл» — деп окулат;

$(\Delta ABC:\ \widehat{A} = \widehat{B})\square(|AC| = |BC| \Leftrightarrow ABC$

\- деген жазуу: *«ABC үч бурчтугунда $\hat{A} = \hat{B}$ бурчтарынын болуш үчүн, [AC] жана [BC] кесиндилеринин узундуктарынын барабар болушу зарыл»* дегенди билдирет.

$(b^2 - 4ac > 0 \ \Rightarrow \ ax^2 + bx + c = 0, \qquad \square\, \exists x_1, x_2\colon\ ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ $\Lambda\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0,\ x_1 \neq x_2)$ *деген жазуу «Эгерде $b^2 - 4ac > 0$ болсо, анда $ax^2 + bx + c = 0$ барабардыгы аткарылышы үчүн, жок дегенде өз ара барабар эмес эки x_1, x_2 сандары жашап, $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ жана $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ барабардыктарынын аткарылышы зарыл»* деп окулат.

4. « ◊ » символу *мүмкүн болор* дегенди билдирет.
$(\exists\ \Delta ABC)\ \lozenge\ (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 100^0) \Leftrightarrow$ жазуусун: *«ABC үч бурчтугу бар болуп, анын ички бурчтарынын суммасы 100° ка барабар болушу мүмкүн»* — деп окууга болот (Н. И. Лобачевскийдин сүйлөмү). Ал эми Ферманын «улуу проблемасын, символдор аркылуу $(\exists a, b, c, n \in Z, n > 2)\ \lozenge\ (a^n + b^n = c^n)$ көрүнүштө жазууга болот ж. б. у.с.

5. «$\vdash$» символу *келтирип чыгарууга болот* деген маанини түшүндүрөт. Мисалы, $(n \vdots 10) \vdash (n \vdots 5)$ сүйлөмүн *«n дин 10 го бөлүнүшүнөн, анын 5 ке бөлүнүшүн келтирип чыгарууга болот»* — деп окууга болот.

6. Мурдатан эле теңдемелердин жана барабарсыздыктардын системасын «{» символу менен белгилечүбүз. Ал «жана» сөзүн билдирет. Мисалы,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1,\ f(x)\cdot g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{же}$$

болбосо $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ж. у. с.

7. $\int_0^5 x^2\,dx$ – деп, *« Төмөн жагы Ох огунун $[0,\ 5]$ аралыгы, ал эми жогору жагы $y = x^2$ функциясынын графиги менен чектелген жалпак фигуранын аянтын»* белгилейбиз.

8. $A_k^s = \frac{k!}{(k-s)!}$ – деп, *«k элементтүү көптүктүн элементтерин s элементтен орундаштыруу»*; ал эми $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ – деп: *« бир учурда А окуясынын же В окуясынын аткарылуу*

ыктымалдыгы»; $P(A) = \frac{m}{n} -$ деп, *«A окуясынын аткарылуусуна n сандагы жалпы жагдайлар жана m сандагы көмөктөшүүчү жагдайлар түзүлгөн учурдагы A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы»*; $P(A \cdot B) -$ деп, *«A окуясынын жана B окуясынын бир учурда аткарылуу ыктымалдыгы»* белгиленишкен.

Математика курсун окуунун жүрүшүндө, кайсы кубулуштарды жана кесиптерди таанып өздөштүрүүдө, кандай математикалык тамгалар колдонгонуна күбө болосуңар жана гуманитардык кесиптерде окуган студенттер болсо, “Пушкинге математиканын кереги тийгенби?” – деген суроосуна жооп алат деген ойдомун. Анткени, ат арабада жүргөн Пушкин самолётто учкан эмес, чөнтөк телефон, смартфон компьютер, электр жарыгы, санариптик технлогиялар, кир жуугуч автомат, космос корабли сыяктуу нерселерди көргөн эмес. Пушкин жашаган доордо эл ат жумшап тиричилик өткөрсө, бүгүн электрон жумшап тиричилик өткөрүшүүдө. Эгерде Пушкин бүгүн жашаса, ал коомго аралашып жашоо үчүн, өзүнүн 36 тамга аркылуу тааныган тар дүйнөсүн, математикалык тил менен байытууга аракет кылмак.

§2. Математикалык логика боюнча негизги түшүнүктөр. Көптүктөр теориясы.

Логика сөзү гректердин “logos- сөз, ой ,кеп, акыл” деген сөзүнөн алынып, логика илими ой жүгүртүү менен туура чечим кабыл алуу усулдары жана мыйзамдары жөнүндөгү илим болот. Ал үч бөлүктөн турат: диалектикалык логика, математикалык логика жана формалдуу логика.

Диалектикалык логика – адамдын ой жүгүртүүсүндө объективдүү дүйнөнүн турпатын чагылуу абалы жана чындыкты таанып – билүүнүн мыйзам ченемдери жөнүндөгү илим. Анын элементтерин байыркы Гераклит, Платон, Аристотель ж. б. ойчулдардын эмгектеринде, ал эми таанып-билүүнүн, ой жүгүртүүнүн жалпы принциптери жана методдору боюнча Ф. Бекон, Декарт, Лейбниц ж. б. окууларында жолуктурууга болот. Диалектикалык логиканы өнүктүрүүгө Кант менен Гегел белгилүү салым кошушкан. Анын негизги маселеси катары, заттардын кыймыл аракетин, диалектиканын мыйзамдары аркылуу түшүнүктөрдө чагылдырууну изилдөө, анын негизинде ой жүгүртүүнүн өзүнүн өнүгүшүн үйрөнүү, таанып – билүүнүн жалпы мыйзам ченемдери болуп эсептелет.

Формалдуу логика – ойдун формаларынын (ойдо талдоо, ой жыйынтыктоо, түшүнүү, далилдөө ж. б.) логикалык түзүлүшүн үйрөтүүчү илим. Формалдуу логиканын негизги максаты – корутунду билимге ээ болуу жараянында сакталуучу мыйзамдарды жана принциптерди иштеп чыгуу болуп саналат.

Математикалык логика – математиканын формалдуу методдорун жана математикалык ой жүгүртүүлөр менен далилдөөлөрдүн, логикалык изилдөөлөрдү колдонуунун натыйжасында түзүлгөн билимдер тармагы. Математикалык логикада: логикалык процесстер – логикалык эсептөөлөр сыяктуу формалдаштырылган тилдерде, аларды чагылдыруу аркылуу изилденет. Логикалык эсептөөлөрдүн формалдуу түзүлүшүн изилдөө менен катар эле, эсептөөлөр жана алардын интерпретациясы менен моделдери болуп кызмат кылуучу мазмундуу тармактардын ортосундагы катыш – байланыштарды кароо милдети да турат.

Математикалык логиканын изилдөө ыкмаларында математикалык тамга – символдор, сөз – сүйлөмдөр менен кошо, логиканын өзүнүн символдордон куралган тили колдонулат. Логиканын негизги түшүнүктөрүн бирин "*Айтуу*" дейбиз.

Def – 1. *Логикада чын же жалган деп бир мааниде мүнөздөөгө мүмкүн болгон жай сүйлөмдү - "Айтуу" деп атайбыз.*

Демек *"Айтуу"* бир учурда <u>чын</u> жана <u>жалган</u> боло албайт. Мисалы: "$5 > 4$" - чын айтуу; "Мугалим пара албайт" – айтуу эмес; "$3 < 0$" – жалган айтуу; "$x^2 - 5x + 6 = 0$" - айтуу эмес.

Аныктамада айтылгандай суроолуу, илептүү сүйлөмдөр айтуу боло албайт. Логикада айтууларды кичине тамгалар менен белгилеп жазып, анын мазмунуна эмес чын же жалган экендигине гана маани берилип, айтуулардын арасындагы катыш – байланыштары изилденет. Айтуулар чын болсо "1", жалган болсо "0" сандары менен бааланышат.

Математикалык логикада *"Айтууларды"* толук изилдөө системасы "*<u>предикаттар логикасы</u>*" аркылуу толукталат. Өзгөрүлмө чоңдуктар катышкан сүйлөмдү – “предикат” деп атайбыз. Предикат өзгөрүлмөлөрдүн ар башка маанилеринде “чын” же “жалган” маанилерди кабыл алышы мүмкүн.

Мисалы $x^2-9=0$ - сүйлөмү предикат болот. Ал өзгөрүлмөлөрдүн $x_1=-3,\ x_2=+3$ маанилеринде “чын”, ал эми калган маанилерде “жалган” айтуулар болушат.

Жогоруда §1 де баяндалган математикалык тамга – белгилер жана кийинки логикалык символдордун баары, реалдуу дүйнөдө жашабаган, кыялыбызда гана формалдуу белгиленген түзүлүштөр болушат. Математикалык логиканын бүгүнкү милдети: *кыялыбызда кабыл алган формалдуу символдорду, кыялыбызда киргизилген амалдар аркылуу байланыштырып, реалдуу дүйнө процесстерин математикалык моделдерин түзүп, моделдер аркылуу туура чечимдерди кабыл алуу усулдарын изилдөө* болуп эсептелет.

Көптүктөр теориясы

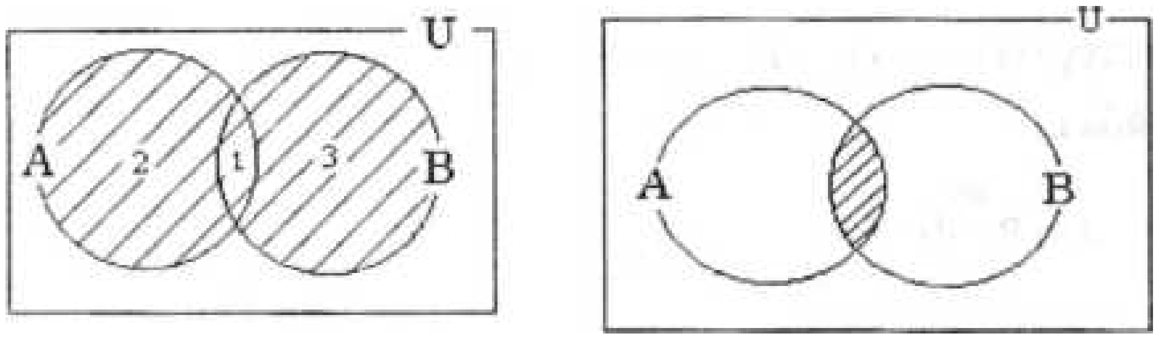
Математикадагы «натуралдык сан», «чекит», «түз сызык», «аралык» ж. б. алгачкы түшүнүктөр сыяктуу «көптүк» түшүнүгү да алгачкы түшүнүк болуп, ага аныктоо берилбейт жана мисалдар келтирүү менен түшүндүрүүгө болот. Көптүктөр теориясын аксиомалардын жардамы менен да түзүүгө болот.

Көптүктөр теориясы учурдагы математиканын негиздерин бири болуп, анын теориялык негиздери Георг Кантор (1845—1918) тарабынан 1872-жылы берилген. Кантордун теориясы боюнча «*көптүк - бул бир жерге чогултулган элес*» болот. Мисалы, класстагы окуучулардын көптүгү, кыргыз алфавитиндеги тамгалардын көптүгү, библиотекадагы китептердин көптүгү, *A* чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктардын көптүгү, 5 цифрасын камтып турган эки орундуу сандардын көптүгү, $x^3-1=0$ теңдемесинин тамырларынын көптүгү, ж. б. *Жалпысынан алганда кандайдыр жалпы касиетке ээ болгон объектилердин, нерселердин тобу же биригүүсү көптүк болот.* Турмушта «көптүк» сөзүнүн маанисин билдирүүчү башка сөздөр да колдонулат. Алар: «ансамбль», «коллекция», «армия», «букет», «система», «парк» ж. б. сөздөрү – көптүк сөзүнүн синонимдери болушат. Мисалы, бир нече комузчулардын тобу комузчулардын ансамблин, бир топ гүлдөр букетти түзүшөт, бир нече трактор турган жер тракторлордун паркы деп аталат. Көптүктөр *A, B, C, D,... ,X, У,...* сыяктуу чоң тамгалар менен белгиленет. ***Көптүккө кирген объектилер, нерселер анын элементтери деп аталышат.***

Көптүктүн элементтери $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots, г, n, b, \ldots$ сыяктуу кичине тамгалар менен белгиленишет. Эгерде *a* объектиси *A* көптүгүнүн элементи болсо, $a \in$ А деп жазылат жана « *a* элементи *A* көптүгүнө таандык» деп окулат. Эгерде *b* элементи *A* көптүгүнүн элементи болбосо, ал $b \overline{\in}$ А деп жазылат жана « *b* элементи *A* көптүгүнө таандык эмес» деп окулат. Мисалы, *A* жуп сандардын көптүгү болсо, анда $102 \in A$ болот, бирок $13 \overline{\in} A$. Бир да элементи жок болгон көптүк бош же куру көптүк деп аталып $\{\emptyset\}$ - символу менен белгиленет.

Сандардын алгебрасында сандар менен түрдүүчө амалдарды жүргүзгөндөй эле, көптүктөр менен да бир топ алгебралык амалдарды жүргүзүүгө болот.

1. Көптүктөрдү кошуу



а) *1 – чийме* *б)*

Def – 2. *Эгерде A,B,C, ... , D көптүктөрү берилген болсо, анда жок дегенде алардын бирине таандык болгон элементтердин көптүгү, ал көптүктөрдүн суммасы (биригүүсү) деп аталат жана ал* $A \cup B \cup C \cup \ldots \cup D$ *символу менен белгиленет* (“∪” *– биригүү белгиси).*

Эгерде А$=\{1, a, b\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{a, b, c\}$ болсо , анда

$A \cup B \cup C = \{1,2,3, a, b, c\}$болот. А – жуп сандардын көптүгү, В – так сандардын көптүгү болсо, анда $A \cup B$ баардык жуп жана так сандардын көптүгү болот. $(x^2 - 1)(2x + 5) = 0$ теңдемесин чыгаруу талап кылынсын дейли. Анда ал барабардыкты канааттандыруучу

M=$\{x|\ (x^2-1)(2x+5)=0\}$ көптүктүн элементтерин табуу жетиштүү. Ал

$$\mathrm{M}=\{x\ (x^2-1)(2x+5)=0\}=\{x|\ x^2-1=0\}\cup\{x|2x+5=0\}=$$

$=\{x|\ x^2=1\}\cup\{x|2x=-5\}=\{1,-1\}\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}=\left\{1,-1,\ -\frac{5}{2}\right\}$ көптүгү болот. Бул көптүктүн каалаган элементи берилген теңдеменин чыгарылышы болот. Аны ордуна коюп текшерүү мүмкүн.

Эки А, В көптүктөрүн биригүүсүн 1*а)* – чиймеде штрихтелип көрсөтүлгөн. Мында $U-$ универсалдык көптүк деп аталып, ал бардык көптүктөрдү камтып турган кудреттүү көптүк катары эсептелет.

Көптүктөрдү кошуунун аныктамасынан төмөнкү касиеттер келтирилип чыгарылат:

1) А$\cup B=B\cup A$ (кошуунун орун алмаштыруу закону);
2) (А$\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (топтоштуруу закону);
3) А$\cup A=A$;
4) А$\cup\emptyset=A$. Мында $\emptyset-$ элементи жок “бош” же “куру” көптүк.

2 . Көптүктөрдү көбөйтүү

Def – 3. *Бизге А жана В көптүктөрү берилсе, анда алардын экөөсүнө тең таандык болгон элементтердин көптүгү, А жана В көптүктөрүнүн көбөйтүндүсү (кесилиши) деп аталат жана ал $A\cap B$ символу менен белгиленет :* $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\ \in B\}$.

Эгерде А$=\{a,b,c,d\}$, В$=\{1,2,b,d\}$ болсо, анда $A\cap B=\ \{b,d\}$ болот. Эгерде А – тик бурчтуктардын көптүгү, В – ромбдордун көптүгү болсо, анда $A\cap B$ – квадраттардын көптүгү болот. А$=\{x|x<5\}$, $B=\{x|x>0\}$ болсо, анда $A\cap B=\{x|0<x<5\}=]0{,}5[$ интервалы болот. Эгерде А жана В көптүктөрү жалпы элементтерге ээ болушпаса, анда алардын кесилиши куру $A\cap B=\emptyset$ көптүк болот. Мисалы, А=$\{1,2,3\}$, В=$\{a,b,c,d\}$ болсо, анда $A\cap B=\emptyset$. Эгерде a түз сызыгы жана α тегиздиги өз ара параллель болушса, анда $a\cap\alpha=\emptyset$ болот, ж.у.с. Эки А, В көптүктөрдүн кесилиши 1*б*)– чиймеде штрихтелип көрсөтүлгөн.

Көптүктөрдү көбөйтүүнүн аныктамасынан төмөнкүдөй натыйжалар келип чыгат.

1°. Ар дайым $A\cap A=A$, жалпысынан алганда $A\cap A\ \cap\ldots\cap A=A$ болот.

$2^{\circ}.\ \emptyset \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \emptyset = \emptyset;$

$3^{\circ}.\ A \cap B = B \cap A;$

$4^{\circ}.\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cup C);$

$5^{\circ}(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

$6^{\circ}.\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

А көптүгүн **тануусу** деп, анын элементтерин танган маанидеги (карама – каршы же тескери) элементтердин көптүгүн айтып, тануу көптүгүн $\overline{\text{A}}$ символу менен белгилейбиз. Мисалы А – *бардык так натуралдык сандардын көптүгү болсо,* $\overline{\text{A}}$ – *бардык так эмес же жуп натуралдык сандардын көптүгү* болот. 2 *б)* – чиймеде А көптүгүн $\overline{\text{A}}$ –тануусу штрихтелип көрсөтүлгөн.

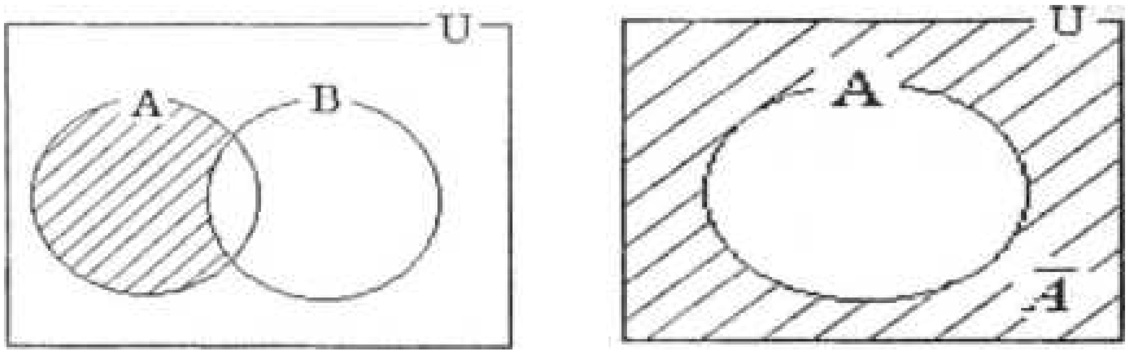
Көптүктөрдү кошууда жана көбөйтүүдө де Моргандын закону деп аталуучу төмөнкү байланыш – катышы орун алат:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}, \qquad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \qquad (2)$$

Акырында төмөнкү туура барабардыктарды эске сала кетебиз:

$1^{\circ}.\text{A} \cup \emptyset = \text{A};$ $2^{\circ}.\text{A} \cap \text{U} = \text{A};$ $3^{\circ}.\text{A} \cap \emptyset = \emptyset;$ $4^{\circ}.\text{A} \cup \overline{\text{A}} = \text{U};$



а) *2 – чийме* *б)*

$5^{\circ}.\text{A} \cap \overline{\text{A}} = \emptyset;$ $6^{\circ}.\text{U} \cup \emptyset = \text{U};$ $7^{\circ}.\text{U} \cap \emptyset = \emptyset.$

3. Көптүктөрдү кемитүү

Def – 4. *А жана В көптүктөрү берилсин. В көптүгүнө таандык болбогон А көптүгүн элементтеринин көптүгү, А жана В көптүктөрүнүн айырмасы деп аталат жана $A \backslash B$ символу менен белгиленет (2а - чийме).*

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, m, n, t\}$ *болсо,* $A \backslash B = \{a, c, e\}$ *болот.* Жалпы эле $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \,\overline{\in}\, B\}$. A — натуралдык сандардын

көптүгү, B — жөнөкөй сандарын көптүгү болсо, анда $A\backslash B$— бир саны менен бардык курама сандардын көптүгү болот.
A көптүгү берилсе $A\backslash A = \emptyset,\ A\backslash\emptyset = A,\ U\backslash A = \bar{A}$ экендигин айта кетүү зарыл. Эгерде $A \subset B$ болсо, $A\backslash B = \emptyset$ болот.

$\boldsymbol{Def}$ – **5**. *B нын элементи болбогон A көптүгүнүн элементтери менен, A нын элементи болбогон B көптүгүн элементеринин суммасы, A жана B көптүктөрүн симметриялуу айырмасы деп аталат жана ал айырма $A \vartriangle B$символу менен белгиленет.*

Аныктаманы белгилер менен $A \vartriangle B = (A/B) \cup (B \setminus A)$ көрүнүштө жазып, симметриялуу айырманы $A \vartriangle B = (A \cup B)\backslash(B \cap A)$. деп да жазабыз. $A = \{a, b, c, d\},\ B = \{1,2,3,4, a, c\}$ болсо, анда $A \vartriangle B = \{b, d, 1,2,3,4\}$ болот. $B \subset A$ болсо, анда $A \vartriangle B = (A\backslash B)$, ал *эми* $A \cap B = \emptyset$ болсо, $A \vartriangle B = A \cup B$ болот, ж. у. с.

Практикада изилдөө зарылдыгына жараша, ар кандай нерселердин көптүктөрү каралганы менен, аларды изилдөө ыкмалары сандарга салыштырылып жүргүзүлөт. Ошондуктан, математика илиминде сандык көптүктөр же сан тамгалардын көптүктөрү кеңири колдонулуп, өзгөчө орунда турат.

§3. Сан көптүктөрү, кубаттары. Эсептөө системалары. Чөйрө мейкиндиктерин сандар менен моделдештирүү.

1. Натуралдык жана бүтүн сандар

Чөйрө таануу процессинде колдонулган эң алгачкы белги – символ – тамгалар катарында сандарды эсептөөгө болот. Сан – тамгалар аркылуу нерселерди: өлчөмүнө, жайгашуу аралыгына, санына карата белгилеп таанып жүрөбүз. Адамзат алгачкы жолу колдонгон сандар, натуралдык же санак сандар деп аталышат.

Санак муктаждыктарын канааттандырууга керектелген сандарды натуралдык сандар деп атап, бардык натуралдык сандардын көптүгүн N тамгасы менен белгилейбиз.

Натуралдык сандар көптүгүн өсүү тартибинде

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots\}$$

көрүнүштө жазып, эркин тандалган натуралдык сан $n -$ тамгасы менен белгилешет. Натуралдык сандарды мындай символдор менен белгилөө, араб математиктери тарабынан кабыл алынган (Индиядан арабдар аркылуу Европага тараган деген божомолдор да бар). Айрым учурларда Рим цифралары да колдонулат:

I, II, III, IV, V, … , X, … , XXI, … - Рим белгилөөсүндө,
1, 2, 3, 4, 5, …, 10, …, 21, … - Араб белгилөөсүндө.

Теориялык жактан санактын жүрүшүн чексизге чейин уланта берүүгө болгондуктан, N көптүгү да чексиз көп элементтерден же сандардан турат. Иш жүзүндө чексиз санакты аткаруу мүмкүн эмес, ошондуктан чексиз деп эсептелген натуралдык санды «∞» символу менен белгилейбиз. Натуралдык сандар адамдардын кыялында гана жашоочу белги – символдор болуп, аларды өзгөртүп жазуу же башкача белгилөө адамдардын эркинен көз каранды. Ошондой болсо да, жалпы бирдейликти сактоо максатында натуралдык сандарды индус цифраларында жазуу эрежеси кабыл алынган. Натуралдык сандарды 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларынын жардамы менен ондук системада же ар бир он сандан кийин, санакты жаңылоо менен толук жазып көрсөтүүгө болот.

Мисалы: 45 эки орундуу натуралдык санын белгилөө үчүн 4 жолу эсепти жаңылоочу ондук жана 5 санактары колдонулат $45 = 4 \cdot 10 + 5$. Үч орундуу 397 саны: $397 = 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$ көрүнүштөгү мааниде түшүнүлүп, 3 жолу $10^2 = 100$ санагы, 9 жолу 10 санагы жана бир жолу 7 санагы, баары кошулуп 397 саны пайда болот деп эсептелет. Ошондой эле $5925 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$ төрт орундуу сан, $78763 = 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$ беш орундуу сан болуп, жалпы учурда m орундуу натуралдык санды жазуу эрежеси

$$C_1 C_2 C_3 \ldots C_m = C_1 \cdot 10^{m-1} + C_2 \cdot 10^{m-2} + C_3 \cdot 10^{m-3} + \ldots + C_{m-1} \cdot 10 + C_m$$

түрүндө болот. Бул жерде C_i деп 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларын бири ($i = 1, 2, \ldots, m$) алынат. Ошентип көрсөтүлгөн он цифраларды бирдик, ондук, жүздүк, миңдик, …, 10^{m-1} дик, … тартиптеги орундарга коюу менен бардык натуралдык сандарды жазууга болот. Жогорудагы мисалдарда 45 санында 4 - ондук, 5 - бирдик; 397 санында 3 - жүздүк, 9 - ондук, 7 - бирдик; 5925 санында 5 - миңдик, 9 - жүздүк, 2 - ондук, 5 - бирдик; 78763 санында 7 - он миңдик, 8 - миңдик, 7 - жүздүк, 6 - ондук, 3 - бирдик орундарда жайгашышкан; Ал эми $C_1C_2C_3...C_m$ санында $C_1 - 10^{m-1}$ дик, $C_2 - 10^{m-2}$ дик, …, C_{m-1} – ондук, C_m – бирдик орундарда жайгашкан болушат.

Адамдын колдорундагы манжалардын саны он болуп, саноого ыңгайлуу болгондуктан, ондук система тандалып алынган. Ошондой болсо да, дүйнө элдеринде эсептөөнүн жетилик, он экилик, жыйырмалык, кырктык ж.б. системалары колдонулуп жүргөн фактылар катарында жуманын жети күндөн, кырк чоро, кырктык, жыйырмалык сыяктуу түшүнүктөр сакталып калганын айтууга болот.

Мисалы: Жетилик системада 10 деп 7 санын түшүнүп, ар бир 7 жолку санактан кийин жаңы санак баштайбыз.

Жетиликте: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, . . . ,

ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...

Экилик системада ар бир эки 0, 1 деген санактардан кийин жаңы санак башталып**,** электр тогунун “ажыратуу”, “туташтыруу” абалдарын элестеткендиктен, экилик системада жазылган сандардын жардамы менен компьютердик эсептөө технологиялары түзүлүп, натыйжасы таблого ондук системада жазылып чыгат. Ошондой эле жарыктын “өчүү”, “жануу” кубулуштарына негизделип, лазердик эсептөө технологиялары келип чыккан.

Экиликте: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, . . . ,

ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Бул учурларда натуралдык санды жазып көрсөтүү эрежелери да алмашат. Жетилик системада бирдик, ондук ж.б. түшүнүктөрүнүн ордуна бирдик, жетилик, 7^2 тык, 7^3 тук ж.б. түшүнүктөрү келип чыгат.

Мисалы: Ондук системадагы $75 = 7 \cdot 10 + 5$ саны, жетилик системада 135 деп жазылып, $135 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5$ көрүнүшүндө түшүндүрүлөт. Ондук системадагы бирдик менен жазылган 9 саны, экилик системада 1001 көрүнүштө жазылат же $1001 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$ санында бирдик, 2 лик, 2^2 тык, 2^3 тук орундарда жайгашкан 0, 1 цифраларынан куралган миңдикке ээ сан катарында түшүнүлөт.

Эсептөө системаларын кандай тандаганыбызга карабай санак тартиби сакталып, бардык эсептөө системаларында нерселердин саны өзгөрбөйт. Ошондой болсо да расмий математикада ондук эсептөө системасын колдонуу макулдашылган.

Def – 1. *А көптүгүн элементтеринин саны анын кубаты деп аталып, $\mu(A)$ символу менен белгиленет. Тең кубаттуу көптүктөр эквиваленттүү көптүктөр болушат. Эквиваленттүүлүк “$\sim$” тамгасы менен белгиленет.*

Натуралдык сандардын көптүгү чексиз көп элементтерден турганына карабастан, эсептөө иретин бузбастан чексизге чейин уланта берүү мүмкүнчүлүгү сакталгандыктан, теориялык жактан аны эсептеп чыгууга болот деп ойлоп, кубатын "∞" деп атабай, ***«санактык» же «эсептелүүчү » кубатка ээ деп, кубатын "a" символу менен белгилейбиз, же $\mu(N) = a$ көрүнүштө жазабыз.*** N натуралдык сандардын көптүгүндө кошуу, көбөйтүү амалдары гана толугу менен аткарылат $N("+", \ " \times ")$.

2. Z – бүтүн сандардын көптүгү

Натуралдык сандар оң багыттагы өсүү тартибиндеги санак жүргүзүү муктаждыгын канааттандырууга ылайыкташкан. Бирок тескери санакты жүргүзүүгө ыңгайсыз, ошондуктан терс белгидеги натуралдык сандар түшүнүгүн киргизүү менен, оң жана тескери же эки багыттуу санакты ишке ашырууга дарамети жеткен сандардын көптүгүн түзөбүз. Аны бүтүн сандардын көптүгү деп Z тамгасы менен белгилейбиз жана

$$Z = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, ... \}$$

көрүнүштө жазабыз жана $N \subset Z$ болорун көрөбүз. Мында n эркин алынган бүтүн санды түшүндүрөт.

Бүтүн сандардын көптүгүндө натуралдык сандардын көптүгүнө караганда эки эсе көп элементтер бар болгондой көрүнгөнү менен, теориялык жактан N, Z көптүктөрүн элементтеринин саны бирдей болуп, тең кубаттуу же эквиваленттүү көптүктөр болушат $N \sim Z$.

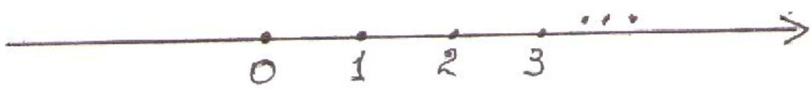
$\triangleright$ Чынында Z көптүгүн оң жана терс натуралдык сандардын көптүктөрүнө ажыратып:

$N_{+} = \{0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n, \ldots \}$,

$N_{-} = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$ алардын ар бири санактык, б.а. a кубатындагы көптүктөр экенине ишенебиз. $Z = N_{+} \cup N_{-}$ болгондуктан, саноонун чексиз жүрүшүндө N_{+} көптүгүн эсептеп бүткөн соң, N_{-} көптүгүн эсептеп аягына чыгарууга болот деген теориялык тыянакка таянып, Z көптүгүн элементтерин да санап чыгууга болот деген бүтүмгө келебиз. Ошентип Z көптүгү санактык a кубатына ээ жана N көптүгүнө эквиваленттүү $\mu(Z) = \mu(N) = a$. Z бүтүн сандардын көптүгүндө кошуу, кемитүү, көбөйтүү $Z("+", "-", "\times")$ амалдары аткарылат. $\triangleleft$

3. Q – рационалдык сандардын мейкиндиги

Бүтүн сандардын көптүгүндө чексиз көп элементтер болгонуна карабастан, сан огунда бири – биринен «бир» аралыгында обочолонгон чекиттер



3 - чийме

аркылуу сүрөттөлүп (3 – чийме), чөйрөдөгү «бир» аралыгынан жакын жайгашкан нерселерди сүрөттөөгө жетишсиз болот. Ошондой эле бүтүн сандар «бир» салмагынан, убактысынан ж.б. аз же кичине болгон абалдарды баалоого мүмкүнчүлүгү жетпейт. Бул кемчилдикти жоюу үчүн жаңы «бөлчөк» же «рационалдык» сан – моделдери түзүлүп, алар мурдагы эле ондук системадагы бүтүн сандардын жардамы менен жазылат. Ал үчүн кыскарбас же жалпы көбөйтүүчүлөрү жок p, q бүтүн сандарын $(q \neq 0)$

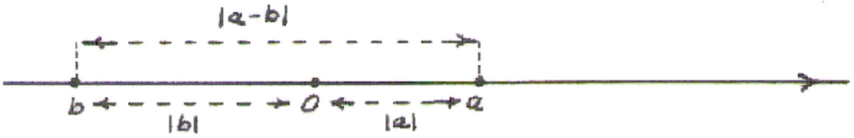
алып, аларды $\frac{p}{q}$ көрүнүштө жазып «бөлчөк сан» же «рационалдык сан» деп айтабыз. p саны бөлчөктүн алымы, q саны бөлчөктүн бөлүмү деп айтылат. Эгерде бөлчөктүн алымы, бөлүмү кыскаруучу бүтүн сандар болушса, анда $p.q$ деп, аларды кыскартып бүткөндөн кийинки бүтүн сандарды түшүнөбүз.

***Def* – 2.** *Бардык бүтүн жана бөлчөк сандардын көптүгү рационалдык сандардын көптүгү деп аталып, Q тамгасы менен белгиленет жана* $Q=\left\{\frac{p}{q}: p,q\in Z,\ \ q\neq 0\right\}$ *символ тамгалары менен жазып түшүндүрүлөт.*

Рационалдык сандардын көптүгү $N,\ Z$ көптүктөрүнүн муктаждыкка жараша кеңейтилүүсү болуп, аларды өзүнө камтып турат же $N\subset Z\subset Q$. Чынында эле каалагандай a бүтүн санын, $\frac{a}{1}$ көрүнүштөгү бөлчөк катары түшүнүүгө болот. Бирок Q көптүгү N,Z көптүктөрүн камтып турганына карабай, үчөөсү тең элементтери барабар, тең кубаттуу же эквиваленттүү көптүктөр болушат $\mu(N)=\mu(Z)=\mu(Q)$, же $N{\sim}Z{\sim}Q$. Рационалдык сандардын көптүгүндө аткарылган бардык арифметикалык төрт амалдардын натыйжасы да рационалдык сан болгондуктан, аны бул амалдарга карата туюк же мейкиндик деп атап, **Q (“+”, “-”, “$\times$”, “:”)** көрүнүшүндө белгилеп жазабыз.

***Def* – 3.** *Сан огунда O башталмасынан a рационалдык санына чейинки аралык a санын модулу же абсолюттук чоңдугу деп аталып,* $|\,a\,|$ *символу менен белгиленет* (4 - чийме).

О башталмасынан a жана $-a$ сандары бирдей узактыкта жайгашкандыктан, $|\,a\,|=|-a\,|$ жана аралык оң сан менен ченелгендиктен $|\,a\,|\geq 0$ болот. Демек, абсолюттук чоңдукту:



(4 - чийме).

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, \ \textit{эгерде} & a \geq 0 \ \textit{болсо}, \\ 0, \ \textit{эгерде} & a = 0 \ \textit{болсо}, \\ -a, \ \textit{эгерде} & a < 0 \ \textit{болсо} \end{cases}$$

деп түшүнүүгө болот.

Def – 4. *Эки* a *жана* b *рационалдык сандарын арасындагы метрика же аралык чени деп, алардын айырмасынын абсолюттук чоңдугун же сан огунун* a *дан* b *га (же* b *дан* a *га) чейинки кесиндисин узундугун айтып, метриканы (аралыкты)* $\rho(a,b) = |\,a-b\,|$ *же* $\rho\,(b,a) = |\,b-a\,|$ *көрүнүштө белгилейбиз (4 – чийме).*

Сандын абсолюттук чоңдугунун жана аралыктын айрым касиеттерин көрсөтүп өтөлү:

1^0. $|a| \leq n$ деген $-n \leq a \leq n$ менен,

$|a| > n$ деген $a < -n$ жана $a > n$ менен тең күчтүү.

2^0. $|a+b| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$.

3^0. $|\,a-b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$.

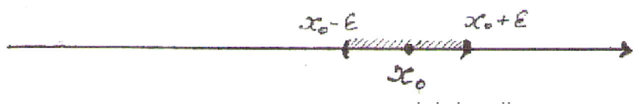
Бул касиеттердин далилдөөсү абсолюттук чоңдуктун аныктамасынан келип чыгат.

Рационалдык сандарды элестеткен чекиттер коңшуларын көрсөтө албаган деңгээлде тыгыз жайгашкандыктан, анык бир такталган конкреттүү санга жетүү, аны айырмалап бөлүп көрсөтүү процесси кошуна чекиттерди аралап, өзгөрүп кыймылдаган жакындоо менен ишке ашат деп элестетебиз. Ошондуктан конкреттүү рационалдык сандар менен кошо өзгөрүлмө рационалдык сандарды карап, аларды сан огундагы өзгөрүлмө чекиттер деп, өзгөрүү кесиндилери менен чогуу карайбыз. Сан огунда каралуучу кесиндилердин учтары кесиндиге таандык же таандык эмес болгонуна жараша, аларды сегмент, интервал, жарым сегмент, жарым интервал деп бөлүштүрөбүз. Кесиндиде жаткан чекиттерди кыймылдуу сан өзгөрмөлөр деп атап: $x,\ y,\ z,\ t,\ \ldots$ сыяктуу латын тамгалары менен белгилейбиз.

Def – 5. *a, b рационалдык сандарын арасында жайгашкан бардык x чекиттердин көптүгү: $a \le x \le b$ шартын канааттандырышса сегмент деп аталып, $[a,b]$ символу менен белгиленет $[a;b]=\{x: a\le x\le b\}$. Ал эми $a<x<b$ шартын канааттандырышса, анда интервал деп аталып $(a,\ b)$, кээде $]a,\ b[$ символдору менен белгиленишет: $(a,b)=\{x:\ a<x<b\}$.*

Бардык сегменттер кесиндинин учтарындагы чекиттерди кошо кармап тургандыктан туюк аралык же туюк (кээде жабык) көптүк деп, ал эми интервалдар кесиндинин учтарындагы чекиттерди кармап турбагандыктан, ачык аралык же ачык көптүк деп аталышат. Ошондой эле $(a;b]=\{x: a<x\le b\}$ жарым интервал, $[a;b)=\{x: a\le x<b\}$ жарым сегмент болуп эсептелишет.

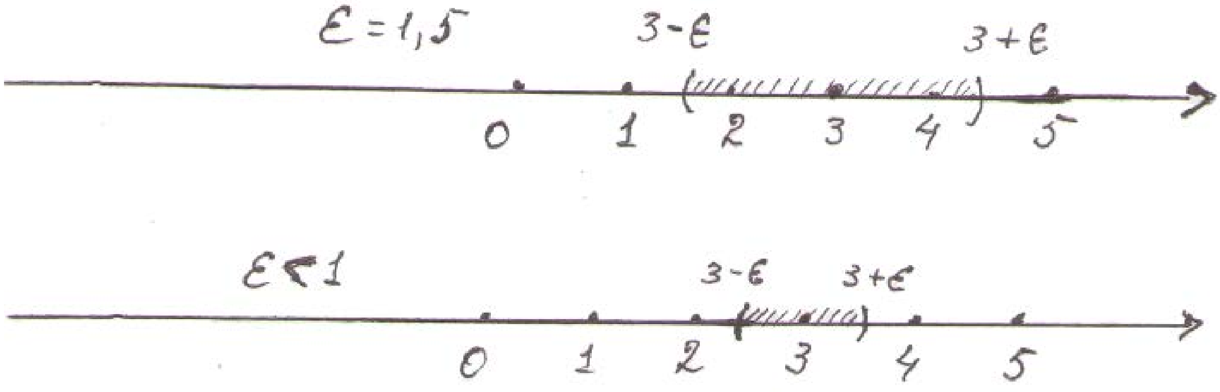
Def – 6. *x_0 рационалдык санын « ε - чеке бели» же « ε - аймакчасы» деп, x_0 санынан ε аралыгынан узак эмес жайгашкан бардык сандардын (чекиттердин) көптүгү айтылат жана $\omega_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ деп белгиленет. « ε - аймакча» - интервал же ачык аралык катарында алынат (5 -чийме).*



5 - *чийме*

Бизди x_0 рационалдык санына коңшулук деңгээлде жакын жайгашкан сандар көбүрөөк кызыктыргандыктан, ε ду жетишерлик кичине оң сан деп эсептейбиз. Ошентип ε - аймакчада жайгашкан x чекиттери же сандары $\rho(x_0,x)=|x_0-x|<\varepsilon$ шартын канааттандырат жана x чекиттери x_0 чекитине чексиз жакын же андан чексиз кичине гана айырмаланат деп түшүнөбүз.

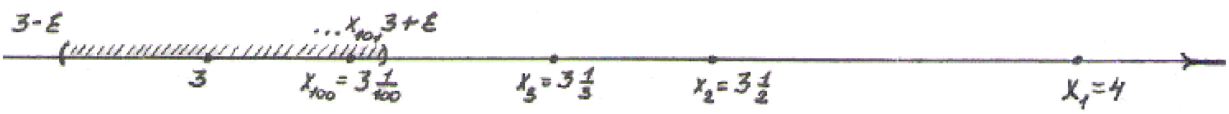
***Def* – 7.** *Эркибизче алынган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын кандай тандалышына карабастан, берилген көптүктүн кандайдыр бир x_0 элементин каалагандай ε - аймакчасында, x_0 дөн башка да чексиз көп элементтери кошо кармалып турса, анда x_0 элементин берилген*



6 - *чийме*

көптүктүн пределдик чекити же коюулануу чекити деп атайбыз.

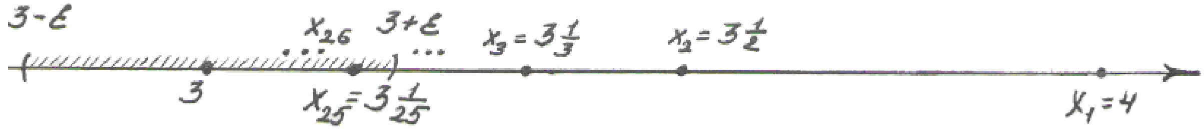
N, Z көптүктөрүндө пределдик элементтер же чекиттер жок, анткени



7 чийме

каалагандай бүтүн сандын жакынкы ε - аймакчасында өзүнөн башка бир да бүтүн сан жок болуп, ε санын 1 ден чоң деп тандаганда гана бир нече бүтүн сандар аймакчага кирип калышы мүмкүн *(6 - чийме)*. Мисалы, 3 санынын кичине ε-аймакчасында бир да бүтүн сан жок, ал эми $\varepsilon = 1{,}5 -$ *деп аймакчаны* жетишерлик чоңойтсок гана, ε - аймакчада 2, 4 деген эки бүтүн сандары жайгашкан болушат. Рационалдык сандардын көптүгүндө ар бир рационалдык сан пределдик чекит боло алат. **Мисалы:** Каалагандай бир $x_0 = 3$ рационалдык санын пределдик чекит болорун көрсөтөлү: ▹ $\varepsilon = 0{,}01$ деп тандайлы да, $\rho(3, x) = |x - 3| < 0{,}01$ шартын канааттандырган канча x рационалдык сандары бар экенин тактайлы. Эсептөөгө ылайыкташтырып x сандарын

$x_n = 3 + \frac{1}{n}$ көрүнүштө болсун деп ойлойлу $(n = 1, 2, 3...)$. Анда $\rho\ (3,\ x_n) = |x_n - 3| = \left|3 + \frac{1}{n} - 3\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < 0{,}01$ же $n > \frac{1}{0{,}01} = 100 = N_\varepsilon$ болгон мезгилде бардык x_n сандары 3 санынын тандалган ε - аймакчасында жайгашары келип чыгат. Демек, алгачкы 100 сандагы x_n сандары гана $\varepsilon = 0{,}01$ - аймакчанын сыртында болуп, $x_{100} -$ чекити чек арада жайгашып, калган $n = 101, 102, ...$ номерлүү чексиз көп рационалдык сандар 3 санын $\varepsilon = 0{,}01$- аймакчасын ичинде жайгашкан болот *(7 – чийме).* Экинчи жолу $\varepsilon = 0{,}04$ деп тандалса, анда $\rho(x_n, 3) = |x_n - 3| = \left|(3 + \frac{1}{n}) - 3\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 0{,}04$ шартын $n > \frac{1}{0{,}04} = 25 = N_\varepsilon$ болгон номерлер менен белгиленген бардык x_n сандары канааттандырат. Ал эми $N_\varepsilon = 25$ номери менен белгиленген x_{25} саны ε - аймакчанын чек арасында жайгашкан болот (8 – чийме). Ошентип тандалган $\varepsilon = 0{,}04$ санына жараша x_n сандарын алгачкы 24 мүчөсү гана 3 санын ε - аймакчасын сыртында, бирөөсү $x_{25} = 3\frac{1}{25}$ саны чек арасында, калган x_{26} мүчөсүнөн баштап чексизге чейинки мүчөлөрү ε - аймакчанын ичинде жайгашкан болушат.



8 – чийме

Тандалган $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}04$ сандарына жараша табылган $N_\varepsilon = 100,\ N_\varepsilon = 25$ номерлери ε кичирейсе чоңоюп, ε чоңойсо кичирейип андан көз каранды болот, ошондуктан N_ε номерине ε санын кошо N_ε же $N(\varepsilon)$ көрүнүштө тиркеп жазышат. Демек *Def – 7* аныктамасына ылайык, $x_0 = 3$ саны рационалдык сандардын көптүгүнө пределдик чекит болот, ал математикалык тилде $\{x_n\} -$ удаалаштыгын предели

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 3$$

катарында белгиленип жазылат. ◃

Def – 8. *Кандайдыр бир эреже табылып, анын жардамы менен көптүктүн элементтеринен удаалаштык түзүп, пределдик чекитин аныктоо мүмкүн болсо, анда ал көптүктү ошол эрежеге карата мейкиндик деп айтабыз. Эгерде пределдик чекиттерин бардыгы өзүнө таандык болсо, аны толук мейкиндик, ал эми пределдик чекиттерин толугу менен кармап тура албаса, толук эмес мейкиндик дейбиз.*

Q – рационалдык сандардын көптүгүндө, ар бир рационалдык сан пределдик чекит болгондуктан, аны $N,\ Z$ сан көптүктөрдөн айырмалап, мейкиндик деп айтабыз. Бирок бардык пределдик чекиттерин кармап турбагандыктан, толук эмес (ченелбөөчү) метрикалык мейкиндик болот.

4. R – чыныгы сандардын мейкиндиги

Реалдуу чөйрөдө түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрдүн бардыгын рационалдык сандарды элестеткен чекиттер менен сүрөттөй албайбыз, анткени түз сызыктагы (сан огундагы) айрым чекиттерди белгилөөгө рационалдык сандар жетишсиздик кылат.

Мисалы, Сан огунда $\sqrt{2}$ санына туура келүүчү чекит рационалдык чекит болбойт, же $\sqrt{2}$ рационалдык эмес сан.

Далилдөө. ▹ Чынында эле, тескерисинче $\sqrt{2}$ санын рационалдык сан деп болжолдосок, анда аны $\frac{p}{q}$ түрүндөгү кыскарбас бөлчөк көрүнүштө жаза алабыз $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Бул барабардыктын эки жагын тең квадратка көтөрүп $2=\frac{p^2}{q^2}$, же $p^2 = 2q^2$ (*)

теңдештиктерине ээ болуп, p нын жуп сан болорун көрөбүз. Андай болсо, p ны жуп сан катарында $p=2n$ деп алууга болот. Бул маанини (*) теңдештигине коюп, $(2n)^2 = 2q^2$ же $q^2 = 2n^2$ теңдештигине келебиз. Мындан q да жуп сан экендиги келип чыгат. Демек, алымы жана бөлүмү жуп сандар болгондуктан, кыскаруучу бөлчөк келип чыгып, $\sqrt{2}$ саны кыскарбас бөлчөк катарындагы рационалдык сан болот деген болжолубуз туура эмес болот, же $\sqrt{2}$ рационалдык сан боло албайт. Бирок, $\sqrt{2}$ санын жакындаштырып тегеректелген тамырлары рационалдык сандар болуп, улам $\sqrt{2}$ санына умтула жакындап келе берген рационалдык сандардын удаалаштыгын түзүшөт же $\sqrt{2}$ рационалдык сан болбосо да Q көптүгүнө пределдик чекит болот.

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41423, 1{,}414235,\ \ldots \to \sqrt{2} \text{ же } \sqrt{2} \approx 1{,}414235\ldots\ .\ \triangleleft$$

Сан огунда рационалдык сандар менен сүрөттөлбөгөн, $\sqrt{2}$ санына туура келген чекиттер сыяктуу, чексиз көп чекиттер бар. Мындай чекиттерге туура келген жаңы сан - моделдерди иррационалдык (бөлчөк эмес) сандар деп атап, алардын көптүгүн J тамгасы менен белгилейбиз. Иррационалдык сандар рационалдык сандардын мейкиндигине пределдик чекиттер болушат, анткени ар бир иррационалдык сандын чексиз кичине ε - чеке белинде чексиз көп рационалдык сандар жайгашкан. Жогоруда $\sqrt{2}$ иррационалдык санына, анын тегеректелген тамырларынын маанилери болушкан рационалдык сандардын удаалаштыгы жыйналарын сөз кылдык. Ошентип Q мейкиндиги өзүнүн бардык рационалдык пределдик чекиттерин кармап турганы менен, чексиз көп иррационалдык пределдик чекиттерин кармап тура албаган толук эмес мейкиндик болот.

N, Z, Q көптүктөрүнөн айырмаланып, J көптүгүндө саноого мүмкүн эмес деңгээлдеги чексиз көп элементтери бар болуп, санактык эмес көптүктү түзөт. Иррационалдык сандардын көптүгүн кубаты же элементтеринин саны $\mu(J) > a$ болуп, аны $\mu(J) = c$ кубатына же континуум кубатына ээ деп айтабыз.

Def – 9. *Бардык рационалдык жана иррационалдык сандардын көптүктөрүн биригүүсү чыныгы сандардын көптүгү деп аталып, R тамгасы менен белгиленет $N \cup Z \cup Q \cup J = R$.*

$R-$ чыныгы сандардын көптүгү, $J-$ иррационалдык көптүк сыяктуу эле континуум кубатына ээ $\mu(R) = \text{с}$ же $R \sim J$ эквиваленттүү көптүктөр болушат. R (“+”, “-”, “$\times$”, “:” "$\sqrt{\ }$","a^n", "lim") амалдары аткарылат.

R чыныгы сандарын мейкиндиги кандай артыкчылыктарга ээ экендигин санап өтөлү:

1. Сан огунда Q сандары менен белгиленген чекиттер канчалык тыгыз жайланышса да, арасында рационалдык сандар менен белгиленбеген бош чекиттер калып кетип, туташ сызыкты түзбөстөн жылчыктуу сызыкты түзөт. Ошондуктан рационалдык сандардын өздөрү гана жайгашкан кесиндинин узундугун, туура ченөө мүмкүн эмес, анткени иррационалдык сандар жайгашкан бош жылчыктар аралыкка кирбей калат. Чыныгы сандарды пайдаланууда мындай кемчилдик жок, анткени сан огунда чыныгы сан менен белгиленбеген бир да чекит калган эмес, б. а. сан огундагы бардык чекиттер менен R чыныгы сандарын ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулуп, R сандары үзгүлтүксүз туташ сызык же көптүк катарында сүрөттөлүп, ченөө иштерин толук жүргүзүүгө кудурети жетет. Ошондуктан Q ну ченелбөөчү, ал эми R ди ченелүүчү көптүк дейбиз. Чыныгы сандар менен белгиленген сызык бойлой жайгашкан кубулуштарды чекиттер деп ойлоп, бир өлчөмдүү мейкиндиктин сан огундагы модели катары $R^1 \equiv R$ ди эсептеп, реалдуу абалдагы үзгүлтүксүз өзгөрүүлөрдү көрсөтмөлүү ченеп, баалап үйрөнө алабыз.

2. R көптүгүндө ар бир чыныгы сан пределдик чекит болуп, аралык эрежесине карата бардык пределдик чекиттерин өзүндө кармаган толук метрикалык (ченелүүчү) мейкиндик болот. Аралык эрежеси боюнча чекиттердин кыймылдоо механизмин түшүндүргөн предел аппараты, ар бир чекитке үзгүлтүксүз тийип аралап өткөн кыймылды элестетет:

$$\forall x_n \in R\colon \lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \Rightarrow \quad a \in R.$$

3. Сан көптүктөрүн ичинен чыныгы сандар эң көп элементтүү же чоң кубатка ээ болгон көптүк: $\mu(R) = c$, ал эми $\mu(Q) = a$ жана $c > a$. Ааламдын түзүлүү табияты татаал жана табышмактуу, анын кичинекей эле бөлүгүндө чексиз көп континуум кубатына ээ сандагы бөлүкчөлөр

жайгашкандыктан, ааламдын сандык моделдерин бири катарында түзүлгөн R мейкиндигиндеги ар бир сегментте же интервалда континуум кубатындагы санда чекиттер бар:

$\mu([a;b]) = \mu((a;b)) = \mu([c,d]) = \mu(R) = c$, б.а. R мейкиндиги өзүндө кармалып турган бардык аралыктарга эквиваленттүү жана бардык аралыктар да бири – бирине эквиваленттүү болушат.

Ошентип чыныгы сандар аралыкты ченөө эрежесине (метрикага) карата бир ченемдүү мейкиндикти түзүп, кыялыбызда гана жашаган символдор же белгилер болгонуна карабастан, ааламдын түзүлүшүнө окшоштурулуп түзүлүп, адамдын таануу процессинде негизги математикалык аппарат же каражат катары кызмат кылат. Мындан ары атайын эскертүүсүз сөз кылынган сандардын баарын чыныгы сандар деп түшүнөбүз. Айрым учурларда чыныгы сандарды алгебралык, трансценденттик деп бөлүп айтышат, анын мааниси төмөндөгүчө: коэффициенттери бүтүн сандар болгон

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad x \in R, \ n \in N, \ a_i \in Z \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

сыяктуу көп мүчөлөргө карата түзүлгөн $n-$ тартиптеги Р(x) = 0 теңдемесине чечимдер болушкан чыныгы сандарды алгебралык сандар, ал эми бир да мындай теңдемелерге чечим боло албаган чыныгы сандарды трансценденттик сандар деп айтабыз. Мисалы x = 3 саны алгебралык сан, анткени ал экинчи тартиптеги бүтүн коэффициенттүү көп мүчөгө карата түзүлгөн $x^2 - 9 = 0$ теңдемесине чечим болот. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ чыныгы сандары да алгебралык сандар болушат, себеби $2x^2 - x - 1 = 0$ бүтүн коэффициенттүү экинчи даражадагы теңдеменин чечимдери болушат. $\sqrt{2}$ - иррационалдык саны да $x^2 - 2 = 0$ бүтүн коэффициенттүү теңдемеге чечим болгондуктан, алгебралык сан болот. Демек, иррационалдык сандардын арасында алгебралык жана трансценденттик сандар кездеше берет. Коэффициенттери бүтүн сандар болушкан теңдемелердин саны санактык сандан ашпагандыктан, алардын чечимдерин көптүгү болгон алгебралык сандар да санактык көптүк болот. Ал эми трансценденттик сандар эбегейсиз көп болуп, континуум кубатына ээ. Практикалык колдонуу ыңгайына жараша айрым трансценденттик сандарды тамгалардын же символдордун жардамы менен жазабыз: $e, \pi, \sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha,\ \dots$.

Бардык трансценденттик сандар иррационалдык сандар болгону менен, тескерисинче бардык иррационалдык сандар трансценденттик боло беришпейт. Трансценденттик деген сөз латындардын «transcendens» сөзүнөн алынып, «чектен чыгуу» деген маанини билдирет.

5. Комплекстик сандардын талаасы

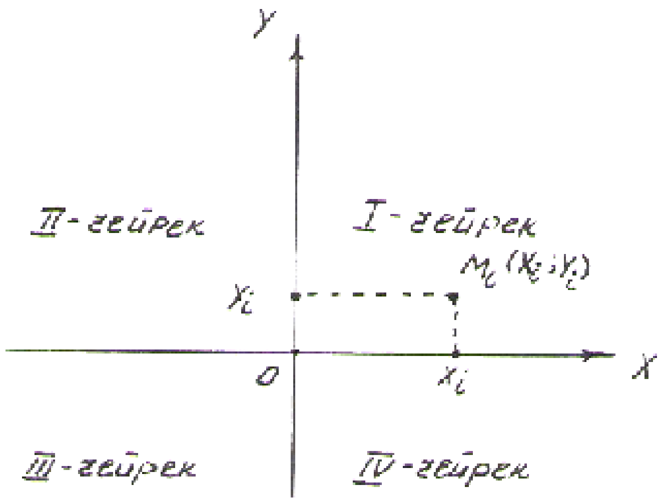
$R-$ чыныгы сандардын көптүгү, адамзаттын бүгүнкү жашоо муктаждыгын толугу менен канааттандырып, ааламдын түзүлүшүн белгилеп үйрөнүүгө жетерлик сандагы сан – тамгаларга ээ. Ошондой болсо да, атайын изилдөөлөрдө $z = x + iy$ көрүнүштө белгиленип, комплекстик сандар деп аталышкан сандар колдонулушат.

Def – 10. *Квадраты “ - 1” ге барабар болгон санды i тамгасы менен белгилеп, “жалган бирдик” деп айтабыз* $(i^2 = -1)$ *. Эркин тандалган* $x, y \in R$ *чыныгы сандары менен түзүлгөн* $z = x + iy$ *суммасын* z *комплекстик саны дейбиз,* x *ти* z *комплекстик санын чыныгы бөлүгү (* $x = \operatorname{Re} z$*), ал эми* y *ти жалган бөлүгү* $(y = \operatorname{Im} z)$ *деп атап, бардык комплекстик сандардын көптүгүн* C *тамгасы менен белгилейбиз.*

Кеңейтүүнүн натыйжасында терс чыныгы сандардан квадраттык тамыр чыгаруу мүмкүнчүлүгүнө ээ болдук. Мисалы, $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)\cdot 4} = \sqrt{i^2 \cdot 4} = i2$ комплекстик саны болот. Ошентип C комплекстик сандарын көптүгү эки түгөй $(x; y)$ чыныгы сандардын көптүгү катарында элестетилип, тегиздиктеги чекиттерге окшоштурулат. Комплекстик сандардын көптүгүн кубаты (элементтеринин саны) R чыныгы сандарынын кубатына барабар болуп, $\mu(C) = \mu(R) = c$ континуум кубатына ээ. Символикалык түрдө C көптүгүн $C = \{\ z: \quad z = x + iy \wedge\ x, y \in R\ \}$ көрүнүштө жазууга болот. Комплекстик сандарды колдонуп, кадимки чыныгы сандар сыяктуу эсептөө, санак, ченөө иштерин жүргүзө албаганыбызга карабай, аларды математикалык тамга же обьект - аппарат катарында кабыл алып, атайын эрежелерди киргизүү менен комплекстик сандардын математикалык теориясын түзүп, практикалык колдонууга ылайыкташтырабыз.

6. Эки өлчөмдүү R^2 мейкиндиги

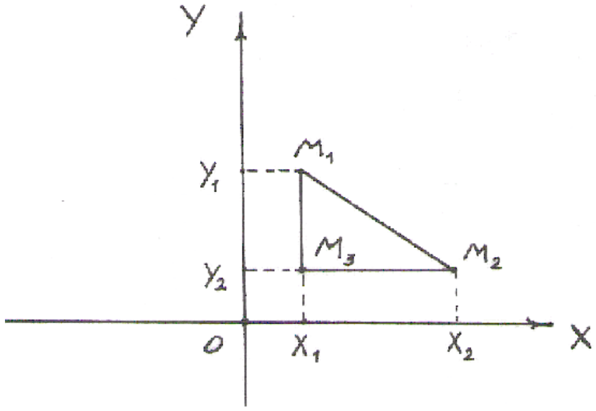
Ааламдын түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрүн сан огундагы чекиттер деп ойлоп, чекиттерге чыныгы сандарды тиешелеш коюу менен ааламдын сызыктуу бөлүгүнүн сандык модели болгон бир өлчөмдүү R^1 мейкиндигин түзүүгө болот. Тегиздиктин бетинде жайгашкан бардык чекиттердин көптүгүн сандар менен белгилеп, аны эки өлчөмдүү мейкиндик деп, R^2 көрүнүштө жазабыз. Тегиздиктин бетинде жайгашкан чекиттерди бири – биринен айырмалап салыштыруу



	I	II	III	IV
X	+	−	−	+
Y	+	+	−	−

9 – чийме

үчүн, тегиздикте аралыкты ченөө түшүнүгүн киргизебиз. Ал үчүн өз ара перпендикуляр эки Ox жана Oy сан октору жардамы менен түзүлгөн Декарттык координаталар системасы деп аталган аппаратты пайдаланабыз (9 – чийме). O - чекити координата башталмасы, Ox - абцисса огу, Oy - ордината



10 – чийме

огу, Oxy - координаттык тегиздик деп аталышат.

Тегиздикте жайгашкан каалагандай M_i чекитинен координаттык окторго перпендикуляр түшүрүп, аны абциссасы x_i, ординатасы y_i болгон чекит деп, $M_i(x_i,\ y_i)$ көрүнүштө даректештирип жазабыз. x_i, y_i сандары кадимки эле чыныгы сандар болушуп, M_i чекитин координаталары деп аталышат. Ox жана Oy координаттык окторунда континуум кубатындагы чекиттер (сандар) болуп, тегиздиктин бардык чекиттерин белгилөөгө кудурети жетет, же координаттык тегиздиктеги бардык чекиттер эки түгөй сандар менен толук даректештирилет. Тегиздикте эркин кыймылда болгон М чекити, тик бурчтуу Декарттык координаталарда өзгөрүлмө эки түгөй $(x;y)$ чыныгы сандары менен даректештиребиз. Ал эми бир тегиздикте жатышкан эки $\text{M}_1(x_1,y_1)$, $\text{M}_2(x_2,y_2)$ чекиттерин арасындагы аралык же метрика деп

$$d = \rho\ (M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

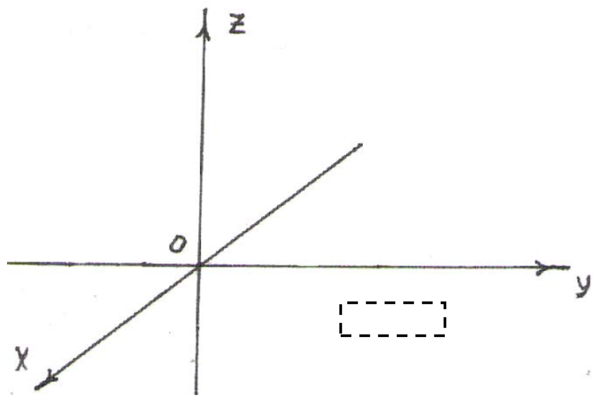
формуласы менен эсептелген d оң санды түшүнөбүз.

Аралыкты ченөөнүн (1) эрежеси кадимки эле Пифагордун теоремасына окшоп кетет, чынында эле $\Delta \text{M}_3\text{M}_1\text{M}_2$ тик бурчтуу үч бурчтугунун тик чокусун $\text{M}_3(x_1; y_2)$ чекити десек, тик бурчтуу $\Delta \text{M}_3\text{M}_1\text{M}_2$ үч бурчтугунда ρ (M_1, M_2) = $|\text{M}_1\text{M}_2| = d$ - гипетенузанын узундугу, катеттердин узундуктары $|\text{M}_3\,\text{M}_2| = x_2 - x_1$, $|\text{M}_3\,\text{M}_1| = y_1 - y_2$ болушуп, катеттердин квадраттарын суммасы гипетенузанын квадратына барабар $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ болору келип чыгат *(10 – чийме)***.** R^2 мейкиндиги аралыкты ченөөнүн (метриканын) (1) – эрежесине карата, өзүнүн **бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык (ченелүүчү)** мейкиндик болот.

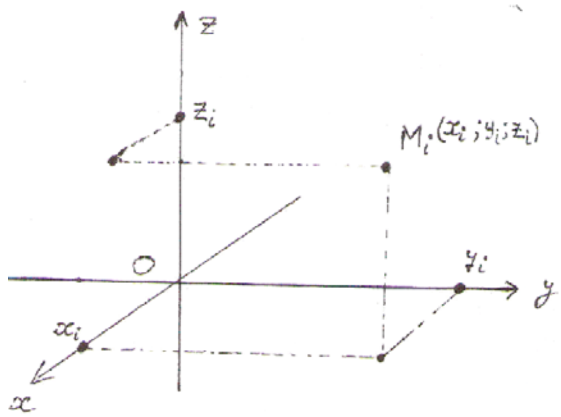
7. Үч өлчөмдүү R^3 мейкиндиги

Ааламдын биздин көзүбүзгө көрүнүп, күнүмдүк жашообузду өткөрүп жаткан бөлүгү үч өлчөмдүү R^3 мейкиндиги болуп, бардык нерселер үч өлчөмү: узуну, туурасы, бийиктиги боюнча таанылып, сезимибизде кабыл алынат.

Үч өлчөмдүү мейкиндикти математиканын тилинде түшүндүрүү үчүн байкоочу турган чекит катары, мейкиндиктин кайсы бир жеринен О чекитин тандайбыз.



11 – чийме



12 – чийме

О чекитинде кесилишүүчү өз ара перпендикуляр Ox, Oy, Oz сан окторун тургузабыз *(11 – чийме).* Натыйжада, О чекитинде туруп алып, үч өлчөмдүү мейкиндикке байкоо жүргүзүүгө ылайыкташкан тик бурчтуу декарттык координаталар системасы деп аталган аппаратты түзөбүз. О чекити координаталар башталмасы, Ox абцисса огу, Oy ордината огу, Oz аппликата огу деп айырмаланып аталып, жалпы учурда тик бурчтуу $Oxyz$ декарттык координаталар системасында Ox, Oy, Oz координаттык октор, Oxy, Oyz, Oxz координаттык тегиздиктер деп айтылышат. Координаттык тегиздиктер мейкиндикти 8 октанттарга же бөлүктөргө бөлүп турат.

Үч өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан каалагандай M_i чекитин, берилген $Oxyz$ декарттык системасына карата үч координаталары болот. Бул координаталарды табуу үчүн, M_i чекитинен Ox, Oy, Oz координаттык окторуна перпендикуляр кесүүчү тегиздиктерин жүргүзөбүз. Тегиздиктердин координаттык октор менен кесилишүү чекиттери болушкан x_i, y_i, z_i чыныгы сандары, M_i чекитин координаталары деп аталышат *(12 – чийме).* O чекитин координаталары менен $O(0;\ 0;\ 0)$, ал эми M_i чекитин $M_i\ (x_i;\ y_i; z_i)$ көрүнүштөрдө даректештирип жазабыз.

R^3 мейкиндигинде жайгашкан каалагандай эки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ жана $M_2(x_2; y_2; z_2)$ чекиттерин арасындагы аралыктын чени же метрика деп:

$$\rho\left(M_1, M_2\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)}^{\,2} \qquad (2)$$

чыныгы санын түшүнөбүз.

Үч өлчөмдүү R^3 мейкиндиги, аралыкты ченөөнүн (метриканын) (2) – эрежесине карата, өзүнүн **бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык (ченелүүчү)** мейкиндик болот.

§4. Математикалык индукция жана дедукция усулдары. Дискреттик математика түшүнүгү. Комбинаториканын элементтери.

1. Математикалык индукция жана Ньютондун биному

Натуралдык жана бүтүн сандардын көптүгү чексиз сандардан тургандыктан, алар менен болгон амалдарды жана айрым касиеттерди бардык сандар үчүн толук текшерип чыгуу мүмкүн эмес. Ошондой болсо да дедуктивдик жана индуктивдик усулдарга таянып, ал касиеттерди бардык сандар үчүн туура же ката деп болжолдоп, кыялыбызда гана ишенип келебиз.

Дедукция усулу деп, жалпы бүтүмдөрдүн негизинде бир жеке бүтүмгө келүүнү түшүнөбүз.

Мисалы: «Аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сан сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген жалпы тыянактан, «1725 саны 5 ке бөлүнөт» деген жеке бир бүтүмгө келебиз жана анын чын же жалган экенин текшербестен эле ишенебиз.

Индукция болсо, көптөгөн жекече текшерилген бүтүмдөрдүн негизинде жалпы бир бүтүм чыгаруу ыкмасы болот. Мындайча айтканда 5, 10, 15, 20, …, 625 сандарын ар биринин 5 ке бөлүнөрүн текшерип, тууралыгына ишенип, «бардык аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сандар, сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген бир жалпы бүтүмгө келебиз.

Индукция усулу толук жана толук эмес индукция деп аталган эки түргө бөлүнөт. Толук индукцияда мүмкүн болгон бардык чектүү сандагы бүтүмдөрдү өз - өзүнчө бөлүп, текшерип далилдөөнүн негизинде гана, аларды жалпылоочу бир корутунду - бүтүм кабыл алынат. Толук эмес индукция усулунда каралуучу бардык учурлар эске алынбайт. Жетишерлик чоң сандагы учурларды гана текшерип көрүү менен, бардык учурлар үчүн бир корутунду - бүтүм чыгарыла берилет. Ошондуктан айрым учурларда чыгарылган корутунду - бүтүм туура болбой да калат. Мындай катачылыкка жол бербөө максатында «Математикалык индукция принциби» деп аталган төмөндөгүдөй усул колдонулуп жүрөт:

1. Эгерде $A(n)$ сүйлөмүнүн чын экендигин чектүү $n=p$ сандагы учурлардын бардыгы үчүн далилдөө мүмкүн болсо (p чектүү натуралдык сан);

2. Эркин тандалган $n=k$ деп алынган k натуралдык саны үчүн бул сүйлөмдү чын деп болжолдосок;

3. $A(n)$ сүйлөмүнүн чын экендигин $n=k+1$ болгон учур үчүн далилдей алсак, анда $A(n)$ сүйлөмүн бардык n натуралдык сандары үчүн чын деп айтабыз.

Мисалы: 1. Берилген n сандагы так сандардын суммасы n^2 болот деген бүтүмдүн чындыгын текшергиле.

Текшерүү:

▹ 1. $n=1$ учурунда $1^2=1$ болсо, $n=2$ болгондо $1+3=4=2^2$ *болуп*, $n=3$ болсо $1+3+5=9=3^2$ болуп, $n=p=3$ учурларынын бардыгында айтылган бүтүм чын болору текшерилди.

2. $n=k$ учуру үчүн

$$1+3+5+7+...+(2k-1)=k^2 \qquad (1)$$

чын болсун деп болжолдойбуз.

3. $n=k+1$ учуру үчүн

$$1+3+5+7+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \qquad (2)$$

аткарыларын далилдейли. Болжолубуз боюнча $n=k$ болгондо (1) туура болгондуктан, аны пайдаланып (2) нин сол жагын

$k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$ түрүнө келтирип, (2) нин туура экенин көрсөткөн болобуз. Демек, чыгарылган эреже бардык так n натуралдык сандары үчүн туура, б.а.

$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$. ◁

2. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (3)$

эрежесинин бардык натуралдык сандар үчүн туура экендигин көрсөткүлө.

▷ **Чыгаруу:** $n=1$ болсо, (3) эрежеси $1=\left[\frac{1\,(1+1)}{2}\right]^2$ же 1=1 болуп аткарылат. $n=k$ үчүн (3) туура болсун деп болжолдойлу, б.а.

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \qquad (4)$$

аткарылсын. $n=k+1$ үчүн туура экендигин далилдөө үчүн

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2 \qquad (5)$$

аткарылышын көрсөтүү керек. Чынында эле $n=k$ үчүн (3) эрежеси аткарылат, ошондуктан (4) барабардыгын пайдаланып, (5) тин сол жагын өзгөртүп жазуу менен

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]=(k+1)^2\cdot\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]=(k+1)^2\cdot\frac{(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

натыйжасына ээ болуп, (5) тин туура аткарыларын далилдеген болобуз. ◁

Ньютондун биному: Практикалык эсептөөлөрдө эки сандын суммасын же айырмасын жетишерлик чоң даражаларга көтөрүү зарылчылыктары туулат. Ошондуктан

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ формулаларын математикалык индукция усулу менен жалпылап,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + ... + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ньютондун биному деп аталган формуланы табабыз. Практикалык эсептөөлөрдө Ньютондун биномундагы C_n^i $(i = 0,1,...,n)$ коэффициенттерин табууну жеңилдетүү үчүн Паскалдын үч бурчтугун түзүп пайдаланабыз:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

--- .

Эгерде n =5 болсо, анда эки сандын суммасын 5 – даражага көтөрүү формуласы төмөндөгүчө жазылат:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

$n = 4$ болсо, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Ошентип үч бурчтуктун ар бир жолчосу (чокусун кошпогондо) эки сандын суммасын же айырмасын көтөрүү даражасын, ал эми жолчодогу сандар ажыралуунун коэффициенттерин түшүндүрүшөт. Ньютондун биномун чындыгы да, математикалык индукция усулу менен далилденет.

Ошентип математикалык индукция усулу менен көзүбүзгө көрүнгөн санак сандарында аткарылуучу амал – аракеттер чексиз көп сандарга чейин уланып, кыялыбызда чын бойдон кала берет деген ишеничке ээ болобуз.

2. Дискреттик математика түшүнүгү

Көптүктөр теориясында күбө болгондой, айрым көптүктөрдүн элементтери бири – биринен обочо жайгашса, айрымдары жылчыксыз (үзгүлтүксүз) деңгээлдеги жакындыкта жайгашышат. Мисалы: группадагы студенттердин көптүгү, айбанаттардын көптүктөрү, саналуучу буюмдардын көптүктөрү, $N-$ натуралдык, $Z-$ бүтүн сандардын көптүктөрүн элементтери бири – бирине жабышпай, обочо турганына күбө болобуз. Мындай көптүктөрдү дискреттик (жылчыктуу же үзүк) көптүктөр деп аташат. Дискреттик көптүктөрдүн элементтери, кайсы бир элементине үймөлөктөп коюулана чексиз жакындап келе алышпайт, же пределдик чекиттерге ээ болушпайт. Ошондуктан үзгүлтүксүз процесстердин математикалык моделдерин түзүүгө, дискреттик көптүктөрдүн элементтерин пайдалана албайбыз. Ошондой болсо да, көзгө көрүнгөн дүйнөнүн көптөгөн кубулуштары өз – өзүнчө санап эсептөөгө боло тургандай абалдарда өзгөрүп, дискреттик маанилер боюнча окуп үйрөнүлөт. Мисалы өндүрүлгөн продукциялар, кокустук чоңдуктардын бөлүштүрүү мыйзамдары, статистикалык тандоолор ж.б.у.с. процесстер дискреттик математиканын изилдөө тармагы болушат. $Q-$ рационалдык сандардын көптүгү да, натуралдык сандардай эле саналуучу көптүк болгону менен, толук маанидеги дискреттик көптүк деп эсептелбейт. Анткени, анын элементтери бири – бирине чексиз жакындап коюуланып, пределдик абалда дискреттик мүнөзүн жоготушат. Ал эми $J-$ иррационалдык сандардын, $R-$ чыныгы сандардын көптүктөрү – сан огунда, $C-$ комплекстик сандардын талаасы – комплекстик тегиздикте жылчыксыз же үзгүлтүксүз жайгашкан чекиттер сыяктуу мүнөздөлүшүп, дискреттик эмес көптүктүр болушат.

Дискреттик көптүктөрдө жүргүзүлгөн изилдөөлөрдө колдонулган айрым ыкмаларга токтолуп өтөбүз.

3. Комбинаториканын элементтери

Элементтерин санын эсептөөгө мүмкүн болгон көптүктө, кайсы бир шарттарга карата элементтерди тандап жайгаштыруу эрежелери – комбинаториканын элементтери деген ат менен белгилүү. Комбинаторика сөзү латындардын “combinare” сөзүнөн алынып, кыргызча “айкалыштыра бириктирүү” деген маанини түшүндүрөт. Комбинаторикада изилденүүчү маселе – мисалдар, көптүктөрдө аткарылуучу амалдарга негизделген эрежелер боюнча чечилип, көбүнчө ***көптүктөрдү кошуу, көбөйтүү*** жана көптүктүн өзүндө жүргүзүлгөн амалдар менен байланышкан болот.

Көптүктөрдүн арасындагы комбинаторикалык амалдар

Көптүктөрдү кошууда элементтеринин санын (кубаттарын) эсептөө эрежелери: Айталы өз ара $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset)$ кесилишпеген А көптүгүндө n сандагы элемент, ал эми В көптүгүндө k сандагы элемент болсун , б.а. кубаттары $\mu(\mathrm{A}) = n \;\; \wedge \;\; \mu(\mathrm{B}) = k$ дейли. Бул учурда А менен В көптүктөрүнүн $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ биригүүсүндө $n + k$ сандагы элемент болору талашсыз. Демек

$$\boldsymbol{\mu}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \boldsymbol{\mu}(\mathrm{A}) + \boldsymbol{\mu}(\mathrm{B}) = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}, \qquad (6)$$

Көптүктөрдү бириктиргенде, алардын элементтерин сандарынын суммасынча элементи же кубаты бар көптүк келип чыгат. Анда $\forall a \in A$ – “А көптүгүн каалагандай a элементин” n ыкма менен тандоо мүмкүнчүлүгү болсо, $\forall b \in B$ – “В көптүгүн каалагандай b элементин” k ыкма менен тандоо мүмкүнчүлүгү болсо, анда $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ көптүгүнүн каалагандай с - элементин тандоо үчүн $n + k$ сандагы мүмкүнчүлүк болот.

Эгерде А менен В көптүктөрү өз ара кеслишип, $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = m$ сандагы жалпы элементтерге ээ болушса, анда с элементин

$$\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = n + k - m \qquad (7)$$

тандоо мүмкүнчүлүгүн саны $n + k - m$ болот.

Мисалдар: 1. 2 - курста 40 студент бар, алардын ичинен 21 студент стипендия алышса, 32 студент кошумча ишке орношуп алышкан. Эгерде 15 студент стипендия алышып, кошумча да иштегени белгилүү болсо, анда канча студент стипендия да албайт, жумушка да орношкон эмес.

Чыгаруу: ► Жалпы курстагы студенттердин көптүгүн универсалдык U көптүгү десек, анда ага камтылган А – стипендия алгандардын, В – жумушка орношкондордун, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}-$ экөөсүнө тең катышкандардын көптүктөрү болушат. Бул көптүктөрдүн кубаты же элементтерин саны $\mu(U) = 40$, $\mu(\mathrm{A}) = 21$, $\mu(\mathrm{B}) = 32$, $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 15$ болушат. (2) формула боюнча $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ көптүгүндө

$\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 21 + 32 - 15 = 38$ сандагы элементтер болот. Анда стипендия да албаган, жумушу да жок студенттердин саны $\mu(U) - \mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 40 - 38 = 2$ ге барабар. ◄

Эгерде А, В, С деген үч көптүктөр берилишсе, анда алардын биригүүлөрүн элементтерин санын

$$\mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) + \mu(\mathrm{C}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mu(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) +$$
$$+\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \qquad (8)$$

формула менен эсептейбиз.

2 – **мисал:** Спорттук лагерде машыгууга 70 студент чакырылган. Алардын ичинен 36 студент бокс менен, 28 студент улуттук күрөш менен, 20 студент самбо менен машыгышат. Ал эми 10 студент бир учурда бокс жана самбо менен, 12 студент улуттук күрөш жана самбо менен, 14 студент бокс жана улуттук күрөш менен машыгышкан. 17 студент болсо, спорттун эч кандай түрү менен машыгышпай, лагердин чарбалык иштерине жардам беришкени белгилүү болсо, канча студент спорттун бир гана түрү менен машыгарын аныктагыла.

Чыгаруу: ► Б – "бокс менен", К – "күрөш менен", С – "самбо менен" машыгышкан, жана Ч – "чарбалык иштер менен" алектенген студенттердин көптүгү болсун.

1 – кадам: Маселе шартынан $\mu(\mathrm{Б}) = 36$, $\mu(\mathrm{К}) = 28$, $\mu(\mathrm{С}) = 20$, $\mu(\mathrm{Б} \cap \mathrm{С}) = 10$, $\mu(\mathrm{К} \cap \mathrm{С}) = 12$, $\mu(\mathrm{Б} \cap \mathrm{К}) = 14$ жана $\mu(\mathrm{Ч}) = 17$ келип чыгат. Жалпы студенттердин санын универсалдык U көптүгү десек, анда спорт менен машыккан студенттердин саны

$\mu(\text{Б} \cup \text{К} \cup \text{С}) = \mu(U) - \mu(\text{Ч}) = 70 - 17 = 53$ болот. Демек (8) формуласын пайдаланып Б, С, К көптүктөрүн биригүүлөрүндөгү элементтердин санын

$$\mu(\text{Б} \cup \text{К} \cup \text{С}) = \mu(\text{Б}) + \mu(\text{К}) + \mu(\text{С}) - \mu(\text{Б} \cap \text{С}) - \mu(\text{К} \cap \text{С}) - \mu(\text{Б} \cap \text{К}) +$$

$+\mu(\text{Б} \cap \text{К} \cap \text{С})$ эсептөө эрежеси боюнча аныктайбыз. Мындан спорттун үч түрү менен тең машыккандардын саны болгон $\mu(\text{Б} \cap \text{К} \cap \text{С})$ табылат.

$$\mu(\text{Б} \cap \text{К} \cap \text{С}) = \mu(\text{Б} \cup \text{К} \cup \text{С}) - \mu(\text{Б}) - \mu(\text{К}) - \mu(\text{С}) + \mu(\text{Б} \cap \text{С}) +$$

$+\mu(\text{К} \cap \text{С}) + \mu(\text{Б} \cap \text{К}) = 53 - 36 - 28 - 20 + 10 + 12 + 14 = 5.$ Демек 5 студент спорттун үч түрү менен машыгат.

2 – кадам: Спорттун эки түрү менен таанышкандардын санынан, үч түрү менен машыккандарды кемитип чыгабыз, анткени алар эки жолудан эсепке кирип калышат. Демек спорттун эки түрү менен машыккандардын **туура саны**:

$\mu(\text{Б} \cap \text{С})$ – бокс менен самбого: $10 - 5 = 5$ студент;

$\mu(\text{К} \cap \text{С})$ – күрөш менен самбого: $12 - 5 = 7$ студент;

$\mu(\text{Б} \cap \text{К})$ – бокс менен күрөш: $14 - 5 = 9$ студент болуп, бардыгы $5 + 7 + 9 = 19$ студент спорттун эки түрү менен машыгышат.

3 – кадам: Спорттун түрлөрүнө аралаш катышкан ар бир спортчулардын **туура санын** аныктайбыз.

$$\text{Бокска: } \underbrace{36}_{\text{Бокс}} - \left(\underbrace{5}_{\text{Б}\cap\text{К}\cap\text{С}} + \underbrace{5}_{\text{Б}\cap\text{С}} + \underbrace{9}_{\text{Б}\cap\text{К}}\right) = 36 - 19 = 17 \text{ студент;}$$

$$\text{Күрөшкө: } \underbrace{28}_{\text{күрөш}} - \left(\underbrace{5}_{\text{Б}\cap\text{К}\cap\text{С}} + \underbrace{7}_{\text{К}\cap\text{С}} + \underbrace{9}_{\text{Б}\cap\text{К}}\right) = 28 - 21 = 7 \text{ студент;}$$

Самбого: $\underset{күрөш}{20} - \left(\underbrace{5}_{Б\cap К\cap С} + \underbrace{5}_{Б\cap С} + \underbrace{7}_{К\cap С}\right) = 20 - 17 = 3$ студент катышып, бардыгы $17 + 7 + 3 = 27$ студент спорттун аралаш түрлөрү менен машыгышат.

4 – кадам: Жалпы 70 студенттердин 17 си чарба жумуштарда иштесе, 27 си спорттун аралаш түрлөрүндө машыгышкан. Анда спорттун бир түрү менен гана машыгышкан студенттердин санын x десек: $x = 70 - (17 + 27) = 70 - 44 = 36$ студент спорттун бир түрү менен гана машыккан деген жоопко келебиз.◄

Көптүктөрдү көбөйтүүдө элементтеринин санын (кубаттарын) эсептөө эрежелери: Айталы $\text{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ көптүгүндө $n-$ сандагы, ал эми $\text{B} = \{b_1, b_2, b_3, \dots b_k\}$ көптүгүндө $k-$ сандагы элементтер болушсун, б.а. $\mu(\text{A}) = n$, $\mu(\text{B}) = k$ кубаттарына ээ болушсун. Анда бул эки көптүктүн көбөйтүндүсү $\text{A} \times \text{B}$ символу менен белгиленип, элементтери (a_i, b_j) көрүнүштөгү түгөй сандар менен белгиленген көптүк болот. $(i = 1, 2, 3, \dots, n;\ \ j = 1, 2, 3, \dots, k)$. Түшүнүктүү болушу үчүн А көптүгүн элементтерин $0x-$ абцисса огуна жайгаштырсак, ал эми В көптүгүн элементтерин $Oy-$ ордината огуна жайгаштырсак, анда $\text{A} \times \text{B}$ - көбөйтүндү көптүктүн элементтери: Декарттык координаталар тегиздигинде жайгашкан координаталары (a_i, b_j) болушкан чекиттерди элестетишет.

$\text{A} \times \text{B}$ ***көптүгүн элементтеринин саны $\boldsymbol{n \cdot k}$ болот, же көбөйтүндү көптүк $\boldsymbol{\mu}(\text{A} \times \text{B}) = \boldsymbol{n \cdot k}$ кубатына ээ.***

$$\mu(\text{A} \times \text{B}) = \mu(\text{A}) \cdot \mu(\text{B}) = n \cdot k \qquad (9)$$

Эгерде экиден ашыкча көптүктөр көбөйтүлсө, анда көбөйтүндү көптүк, алардын санынча топтордон турган элементтер болушат. Мисалы үч көптүктөр көбөйтүлсө, көбөйтүндүсү үчтүктөрдөн турушат. (4) формуласы көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын аныктоо эрежеси деп аталып, көбөйтүндү көптүктүн кубаты, көбөйүүчү көптүктөрдүн кубаттарынын көбөйтүндүсүнө барабар болорун көрсөтөт.

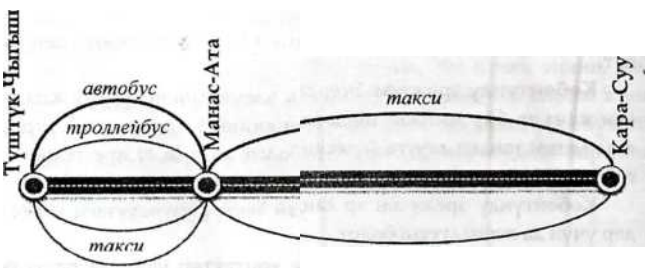
3 – **мисал:** Ош шаарынын Түштүк – Чыгыш аймагынан Манас – Ата аймагына автобус, троллейбус, маршрутка жана такси менен келүүгө мүмкүн болсо, Манас – Ата аймагынан Кара Суу базарына маршрутка же такси менен гана барууга болору белгилүү. Түштүк – Чыгыш аймагынан Кара Суу базарына канча түрдүү тандоолор менен барууга болорун эсептегиле.

Чыгаруу: ► Көптүктөрдүн тилинде

$$A = \left\{\underbrace{\text{автобус}}_{\text{а}}, \underbrace{\text{троллейбус}}_{\text{тр}}, \underbrace{\text{маршрутка}}_{m}, \underbrace{\text{такси}}_{\text{т}}\right\}, \quad B = \left\{\underbrace{\text{маршр}}_{m}, \underbrace{\text{такси}}_{\text{т}}\right\}$$

көптүктөрү болушсун. Элементтеринин саны же кубаты $\mu(A) = 4$, $\mu(B) = 2$ болуп, (4) формула боюнча

$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B) = 4 \cdot 2 = 8$ түрдүү тандоолор менен барууга болорун табабыз. Чынында эле 1 – чиймеде сызылган атайын схема боюнча талдоо жүргүзүп, унааларды 8 ыкмада тандоого болоруна ишенебиз. Түштүк – Чыгыш менен Манас – Ата аймактарын 4 жолдор туташтырса, манас – Ата менен Кара Суу базарын эки жолдо туташтырып турушат. Алардын каалаган бири менен жүрүүлөрдүн санын эсептесек, 8 сандагы түгөйлөрдү алабыз: $\{а, m\}, \{а, т\}$, $\{тр, m\}$, $\{тр, т\}, \{т, m\}, \{т, т\}$, $\{m, т\}$, $\{m, m\}$ (*13 - чийме*).



13 - чийме

Тандоо ыкмаларын түгөйлөр аркылуу таблицада көрсөтүүгө болот:

A \ **B**	такси	маршрутка
автобус	(Автобус, такси)	(Автобус, маршрутка)
троллейбус	(Троллейбус, такси)	(Троллейбус, маршрутка)
маршрутка	(Маршрутка, такси)	(Маршрутка, маршрутка)
такси	(Такси , такси)	(Такси, маршрутка)

. ◄

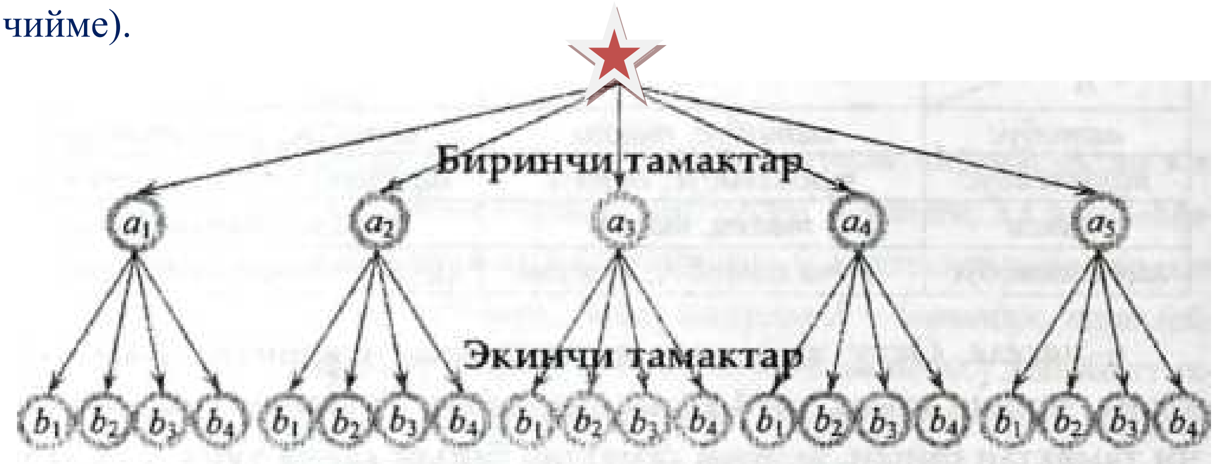
4 – **мисал:** Жайкы лагердин катышуучуларына түштөнүү үчүн, 5 түрдүү биринчи тамак, 4 түрдүү экинчи тамак сунушталат. Эс алуучу канча түрдүү ыкма менен биринчи жана экинчи тамактардан бирден тандап жей алат ?

Чыгаруу: ► Биринчи тамактар – A, экинчи тамактар – B көптүгү:

$$\mathrm{A} = \left\{\underbrace{\text{шорпо}}_{a_1}, \underbrace{\text{лагман}}_{a_2}, \underbrace{\text{рассольник}}_{a_3}, \underbrace{\text{борщ}}_{a_4}, \underbrace{\text{щи}}_{a_5}\right\},$$

$$\mathrm{B} = \left\{\underbrace{\text{куурдак}}_{b_1}, \underbrace{\text{палоо}}_{b_2}, \underbrace{\text{котлет}}_{b_3}, \underbrace{\text{бифштекс}}_{b_4},\right\}$$ көрүнүштө белгиленип жазылсын.

Анда алардын кубаттары $\mu(\mathrm{A}) = 5$, $\mu(\mathrm{B}) = 4$ элементтерден туруп, $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ көбөйтүндүсү $\mu(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = 5 \cdot 4 = 20$ сандагы түгөй элементтерге ээ болот. Демек бул тамактардын ар биринен бирден тандоолордун саны 20 түгөй тамактар болушат. Бул ырастоонун тууралыгын “графтар” же “варианттар дарагы” – деп аталган схемада текшерип көрөбүз (14 – чийме).



14 – чийме

Тамырдан төмөн карай өсүп чыккан дарактын алгачкы 5 бутагында биринчи тамактар, ал эми алардын ар биринен өсүп чыккан 4 дарактын ар биринде 1 – тамакка кошо 2 – тамак катары тандалган түгөй тамактар коюлган. a_1 менен кошо жегенге (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4) төрт вариант бар ж.б.у.с. a_5 менен кошо жегенге да (a_5, b_1), (a_5, b_2), (a_5, b_3), (a_5, b_4) төрт варианттар болуп, бардык варианттардын саны 20 чыгарын көрөбүз.

Ушул натыйжаны төмөндөгү таблицадан көрүүгө болот.◄

B / **A**	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	(a_1, b_4)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	(a_2, b_4)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	(a_3, b_4)
a_4	(a_4, b_1)	(a_4, b_2)	(a_4, b_3)	(a_4, b_4)
a_5	(a_5, b_1)	(a_5, b_2)	(a_5, b_3)	(a_5, b_4)

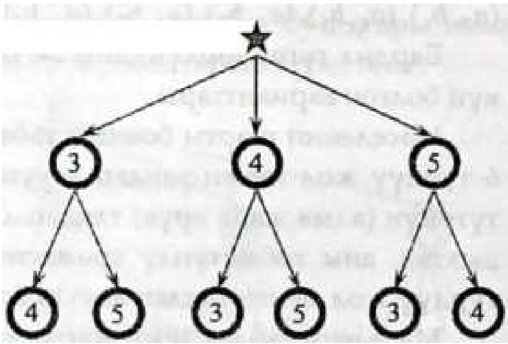
5 – **мисал:** 3, 4, жана 5 цифраларын колдонуп, кайталанбай турган тартипте канча эки орундуу сандарды жазууга болот.

Чыгаруу: ► Эки орундуу сан бирдиктер жана ондуктар аркылуу жазылышат. A – бирдиктердин, B– ондуктардын көптүктөрү болушсун. Анда ондуктардын ордуна 3, 4, 5 цифраларын гана колдоно алабыз, ал эми бир цифраны эки жолу колдонууга укук берилбегендиктен, B көптүгүнүн элементтеринин саны экиден ашпайт $\mu(A) = 3$, $\mu(B) = 2$. Анда (4) формула боюнча $\mu(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$ жолу цифралары кайталанбай турган эки орундуу сандарды түзө алабыз. Графтар ыкмасы менен текшерели:

ондуктар

15 - чийме

жүздүктөр



15 – чиймеден биринчи бутактардын чокулары менен экинчи бутактын чокуларында турган цифраларды түгөйлөштүрүп жазып, эки орундуу алты: 34, 35, 43, 45, 53, 54 сандарын алабыз. ◄

Көптүктүн өзүндө жүргүзүлгөн комбинаториканык амалдар

Чектүү көптүктөрдүн элементтери менен комбинаторикалык амалдар негизинен төмөндөгүдөй багыттарга бөлүнүшөт:

I. **Чектүү көптүктөрдү иреттөө амалы деп,** *чектүү n – сандагы элементи бар көптүктүн элементтерин орундарын алмаштыруу мүмкүнчүлүктөрүн жана санын (канча жолу) аныктоону айтабыз.*

II. *Чектүү n сандагы элементи бар көптүктүн элементтеринен, k сандагы элементтерден турган иреттелген көптүктөрдү тандап түзүүнүн санын аныктоо эрежеси,* n **сандагы элементтерди k сандан орундаштыруу амалы деп аталат.**

III. *Чектүү n – сандагы элементи бар көптүктүн өзүнө камтылып турушкан, k – сандагы элементтерден турган көптүктөрдүн санын аныктоо,* **n элементүү көптүктүн элементтерин k элементтен топтоштуруу амалы деп аталат**.

I. **Орун алмаштыруу** – *деп,* n *элементүү көптүктүн элементтерин кайталанбай тургандай тартипте, элементтери бири – биринен жайгашуу ирети менен гана айырмалана тургандай тартипте жайгаштыруу мүмкүнчүлүктөрүн санын түшүнөбүз.*

Мындай иреттеп жайгаштыруудан соң, түзүлгөн көптүктөрдүн баары n элементтүү болушат, б.а. орун алмаштырууда көптүктүн кубаты сакталат.

Мисалы: 1) Элементтерин саны экөө болгон $\{n_1, n_2\}$ көптүгүн элементтерин эки түрдүү ыкмада $\{n_1, n_2\}$, $\{n_2, n_1\}$ орун алмаштырып жаза алабыз. Элементтеринин саны үчөө болгон көптүктүн элементтерин

$n_1, \ n_2, n_3; \quad n_2, \ n_1, n_3; \quad n_2, \ n_3, n_1;$

$n_3, \ n_2, \ n_1; \quad n_3, \ n_1, \ n_2; \quad n_1, \ n_3, \ n_2.$

6 жолу орундарын алмаштырып, үч орундуу көптүктөр катары алабыз.

Мисалдардан сезилгендей көптүктүн элементтерин саны көбөйгөн сайын, орундаштыруулардын санын эсептөө татаалдашып барат. Ошондуктан эсептөө тажрыйбаларына жана математикалык индукция усулуна таянып, элементтеринин саны n болгон көптүктүн элементтерин

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad (10)$$

жолу орундарын алмаштырууга болот. Мында $n!$ – «эн факториал» деп окулуп, 1 ден n ге чейинки натуралдык сандардын көбөйтүндүсүнө барабар болот: Жогорудагы мисалда үч элементтүү көптүктүн элементтери $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 6$ жолу орундарын алмаштырып жазылган эле. P_n белгилөөсү француз тилиндеги орун алмаштыруу – permutation сөзүнүн баш тамгасынан алынып, далилдөөсү математикалык индукция усулу аркылуу жүргүзүлөт ($0! = 1$ деп алынат).

2) Ишке жаңы кирген адиске ар бир күнү сөзсүз аткарылууга тийиш болгон 5 милдет жүктөлдү. Жаш адис бул милдеттерди канча жолу кезектерин алмаштырып аткара алат ?

Жооп: (10) формуласын пайдаланып, адис бул милдеттерди

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ жолу кезектерин алмаштырып аткаруу мүмкүнчүлүгү бар деп жооп берүүгө болот.

II. Орундаштыруу: Орундаштыруулар кайталануучу жана кайталанбоочу болуп экиге бөлүнүшөт:

а) Адегенде кайталануучу орундаштырууларга мисал келтирели:

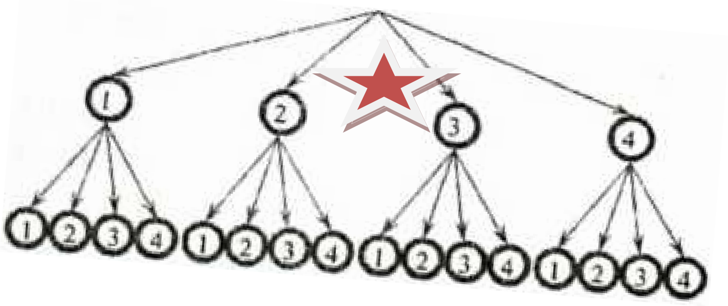
6 – **мисал:** 1, 2, 3 жана 4 цифралары менен канча эки орундуу сандарды түзүүгө болот.

Чыгаруу: ► Берилген цифралар $A = \{1, 2, 3, 4\}$ төрт элементүү көптүк десек, анда эки орундуу сандар түгөй цифралардан тургандыктан, түзүлүүчү эки орундуу сандар $A \times A$ - көбөйтүндү көптүгүн элементтери болорун байкайбыз. Көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын көрсөткөн кубаты

$\mu(A \times A) = \mu(A) \cdot \mu(A) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ болгондуктан, эки орундуу 16 сандарды түзө алабыз. Бирок жогорудагы 5 – мисалдан айырмаланып,

ондуктар

16 -чийме



жүздүктөр

цифралар кайталанып колдонулганына ишенүү максатында графтар ыкмасына кайрылабыз (16

- чийме). Тамырдан чыгышкан 4 бутактардын чокуларындагы цифраларды, кийинки 16 бутактардын чокуларындагы цифралар менен түгөйлөштүрүп жазып: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44 эки орундуу сандарын алабыз.

Мындан бир цифра эки жолу кайталанып колдонулган 11, 22, 33, 44 сандарын көрөбүз. Ушундай эле натыйжаны таблицада көрүүгө

Бирдик / Ондук	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

болот. Демек цифралар кайталанбай турган эки орундуу сандардын саны $16 - 4 = 12$ ◀

Ошентип n сандагы элементи бар А көптүгүн элементтеринен, k элементтерден турган көптүкчөлөрдү канча ыкма менен тандап алууга болорун, көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын аныктоочу (9) формула менен $\mu(\mathrm{A} \times \mathrm{A}) = n \cdot k = n^k$ көрүнүштө эсептөөгө болорун көрдүк.

Бул амалды ***“ n элементтүү көптүктүн элементтерин k элементтен орундаштыруу”*** – деп атап, алардын санын эсептөө формуласын (9) дан айырмалап, жалпы учурда A_n^k – символу менен белгилейбиз. Кайталануучу орундаштыруулардын санын $\overline{\mathrm{A}}_n^k$ деп белгилеп,

$$\overline{\mathrm{A}}_n^k = n^k \qquad (11)$$

формуласы менен эсептейбиз. Орундаштыруу белгисинде француздардын “орундаштыруу же иреттөө” деген маанидеги А – “Arrangement” сөзүнүн баш тамгасы колдонулат.

б) n элементүү көптүктүн элементтерин, кайталанбай тургандай тартипте k элементтен тартипте орундаштыруулардын санын аныктоо үчүн, жалпы $\mathrm{P}_n = n! -$ орун алмаштыруулардын санынан, кайталануу коркунучу болгон $(n-k)$ сандагы элементтердеги орун алмаштырууларын $(n-k)!$ санына кыскартып салып, азайтуу керек:

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{\mathrm{P}_n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot[n-(k-1)]\cdot[n-(k-2)]\cdot\ldots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-k)} =$$

$= [n-(k-1)]\cdot[n-(k-2)]\cdot\ldots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$. Бул маанини квадраттык кашааны ачып, кемүү тартибинде жазып

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1) \qquad (12)$$

кайталанбоочу орундаштыруулардын санын эсептөө формуласына ээ болобуз. (12) формула аркылуу жогоруда 6 – мисалда кайталанбоочу орундаштыруулардын саны $\mathrm{A}_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2} = 3\cdot4 = 12$ экени чын болгонун, дагы бир жолу текшерип көрөбүз.

Үч элементтүү $\{n_1, n_2, n_3\}$ көптүгүн элементтерин экиден жазып чыгуу мүмкүнчүлүктөрүн саны 6 жолу болуп, төмөндөгүдөй жазылат:

$\{n_1, n_2\}$, $\{n_2, n_1\}$, $\{n_1, n_3\}$, $\{n_3, n_1\}$, $\{n_2, n_3\}$, $\{n_3, n_2\}$. (*)

Ал эми көптүктүн элементтери көп болсо, аларды белгилүү бир сандагы топторго бөлүп орундаштыруулардын санын жазып көрсөтүү, эсептөө кыйынга турат. Ошондуктан n элементтүү көптүктүн элементтерин k элементтен жазып чыгуунун санын (12) формуласы менен эсептейбиз. Бул формуланын чындыгын математикалык индукция методу менен далилдөөгө болот.

III. Топтоштуруу: Үч элементтүү $\{n_1, n_2, n_3\}$ көптүгүн эки элементтен топтоштурууда бир жолу жазылган экилик топ, экинчи жолу кайталанып жазылбайт. Экиден орундаштырууда бир эле экилик топ, элементтеринин орундарын алмаштырып кайталана бергенин жогоруда (*) дан көрдүк. Демек, үч элементтүү көптүктү экиден топтоштуруу $\{n_1, n_2\}$, $\{n_1, n_3\}$, $\{n_2, n_3\}$, үч жолу гана болуп, кайталоолордун санына 2 эсе кыскарат.

Жалпы учурда n элементтүү көптүктүн элементтерин k элементтен $(k \leq n)$ топтоштуруулардын саны

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...1}{(1\cdot 2\cdot ...k)(n-k)\cdot(n-(k+1))...1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ же

$$C_n^\kappa = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!} \qquad (13)$$

жолу болот. Анткени топтоштуруулардын саны орундаштыруудан k! эсе аз, б.а. k сандагы элементтер орундары алмашкан шарттарда k! жолу кайталанбайт.

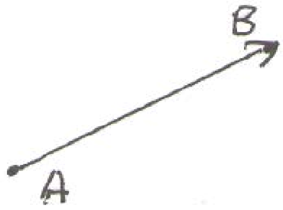
Ошондуктан үч элементтүү көптүктүн элементтерин эки элементтен топтоштуруулардын саны, орундаштыруулардын саны 6 га караганда $\kappa! = 2! = 1\cdot 2 = 2$ эсе аз же

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1!} = 3$$ болот.

Комбинаториканын элементтери болушкан P_n, A_n^k, C_n^k сандары, тиешелүү түрдө n элементтүү көптүктүн элементтерин орун алмаштыруу, орундаштыруу, топтоштуруу мүмкүнчүлүктөрүн санын көрсөтүп, алардын бардык n, k натуралдык сандар үчүн тууралыгы математикалык индукция усулу менен далилденет. Аларды эсептөөдө $0! = 1$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^{n-k} = C_n^k$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ эрежелери аткарыларын текшерип ишенүүгө болот.

§5 Багыттуу жана түз кыймылдар менен экинчи тартиптеги ийрилер. Алардын математикалык тилде жазылыштары жана чөйрө таануудагы ролу

1. Вектор түшүнүгү



Чөйрөдөгү кубулуштарды математикалык аппараттар менен моделдештирүүдө чоңдуктарды скалярдык жана вектордук деп экиге бөлөбүз. Скалярдык чоңдук деп сандык мааниси боюнча толук мүнөздөөгө мүмкүн болгон чоңдуктарды түшүнөбүз. Мисалы аралык, аянт, көлөм, масса скалярдык

17 – чийме

чоңдуктар болушат, анткени аларды сандык мааниси боюнча эле толук таанып билүүгө болот. Вектордук чоңдуктарды болсо сандык маанилери боюнча толук мүнөздөй албастан, алардын өзгөрүү кыймылынын багытын кошо кароого мажбур болобуз. Мисалы күч, ылдамдык, ылдамдануу, басым вектордук чоңдуктар болушуп, аларды толук мүнөздөө үчүн сандык мааниси менен катар, багытын да билүүгө тийишпиз.

Def – 1. *Башталуучу А жана бүтүүчү В чекиттери белгилүү болгон багыттуу кесинди “вектор” – деп аталат.* (17 – чийме)

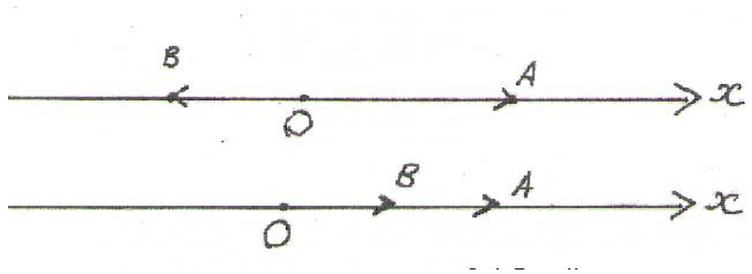
Башталуу А жана бүтүү В учтары көрсөтүлүп жазылган векторлор, козголбос векторлор деп аталышат. Бирок бардык козголбос векторлорду, каалагандай чекиттен башталгандай абалга бир жолу которуп куруууга болот. Ошондуктан векторлорду жазууда **башталуу жана бүтүү учтарын** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ ж.б. сыяктуу көрсөтүп жазып олтурбай, векторлорду эркин векторлор деп эсептеп, $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}, \vec{d}$ ж.б. сыяктуу каалагандай кичине же чоң тамгалар менен белгилеп жаза берүүгө болот. Демек, берилген вектордун элесин, каалаган чекиттен башталган вектордой бир жолу которуп куруууга болот.

Математикалык белги катары кабыл алынган вектор символун түшүнүп, жашоодо колдонуу маанисин таанып билүү үчүн, айрым түшүнүктөргө токтолуп өтөбүз.

I. ***Бир түздө же өз ара параллель түздөрдө жайгашкан векторлордун тобу коллинеардуу векторлор деп аталышат.***

II. ***Бир тегиздикте же өз ара параллель тегиздиктерде жайланышкан ар башка үч вектор же андан көп векторлордун тобу, компланардуу векторлор деп аталышат.***

III. *Эки $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ коллинеардуу векторлорун сан огундагы бир О чекитине курсак, анда алар бир Ox түзүндө (сан огунда) жайгашып калышат. Бул учурда алар О чекитинин бир тарабында же эки тарабында жайгашып калышы мүмкүн (18 – чийме).*



18 –чийме

Чийменин үстүнкүсүндө карама – каршы, ал эми төмөнкүсүндө багытташ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ векторлор көрсөтүлгөн. Багыттары дал келип, узундуктары барабар болгон векторлорду барабар векторлор дейбиз. Жалпы учурда коллинеардуу векторлорду параллель $\vec{a}//\vec{b}$ деп эсептейбиз. $\vec{a}$ векторуна карама - каршы векторду "$-\vec{a}$" деп белгилейбиз. Сандык октун (координаттык октун) багыты оң деп алынат.

Координаттык окто (сан огунда) жатып, башталуу чекити координата башталмасында болгон, узундугу бирге барабар векторду координаттык октун орту деп атайбыз.

R^1- сызыктуу мейкиндиги (сан огундагы) менен R^2- мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгащкан векторлордун мисалында, векторлордун даректери, узундуктары жана алар

менен болгон амалдар сыяктуу айрым түшүнүктөргө токтолуп өтөбүз. Векторлордун мейкиндиктерде жайгашуу абалы, декарттык координаталар системасында үйрөнүлөт. R^1 мейкиндигиндеги векторлордун баары сан огу болгон бир түздө жайгашып, өз ара коллинеардуу болушат. Бул мейкиндиктеги каалаган $\vec{a}$ эркин векторун, О башталмасынан оң багытка карап курсак, анын бүтүүчү учу A_0

19 – *чийме*

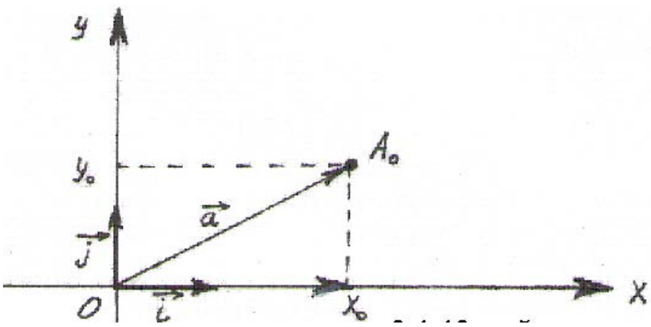
чекитине бир x_0 саны туура келет *(19 – чийме).* Бул x_0 саны $\overrightarrow{a}$ векторунун сызыктуу координатасы деп аталат.

$\overrightarrow{a}$ векторунун узундугун $|\vec{a}|$ деп белгилеп, башталуучу O жана бүтүүчү A_0 чекиттеринин арасындагы $|OA_0|$ аралыкты түшүнүп, аны вектордун модулу дейбиз. $\vec{a}$ векторунун узундугу $|\vec{i}| = 1$ ге барабар бөлүгү, $\vec{a}$ векторунун орту деп аталгандыктан, $\vec{i}$ орту аркылуу координатасы x_0болгон $\vec{a}$ векторун,

$$\vec{a} = x_0 \cdot \vec{i} \qquad (2)$$

көрүнүштө жаза алабыз (19 – чийме).

Эгерде $\overrightarrow{a}$ вектору O чекитинен терс багытка карап курулса, (2) туюнтуусу $\overrightarrow{a} = -x_0 \cdot \overrightarrow{i}$ көрүнүштө болот. Демек, R^1 мейкиндигинде бардык векторлорду координаталары менен (2) көрүнүштө жазууга болот.



20 – *чийме*

R^2 мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгашкан каалагандай эркин $\overrightarrow{a}$ вектору Oxy декарттык координаталар тегиздигинде каралат. $\overrightarrow{a}$ векторун O координата башталмасына которуп курсак, анын бүтүүчү учу болгон A_0 чекитине кандайдыр бир $(x_0; y_0)$ координаталары туура келет *(20 – чийме).* Бул учурда $\vec{a}$ векторун координаталары деп, A_0 чекитинин координаталары алынып, $\vec{a}$ вектору, координаталары менен $\vec{a}(x_0, y_0)$ же $\vec{a} = \{x_0, y_0\}$ көрүнүштөрдө жазылат.

Вектордун чоңдугун мүнөздөөчү, анын узундугу болгон $|OA_0|$ аралыгы,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \qquad (3)$$

формуласы менен эсептелет. Бул формула 20 – чиймеде сызылган тик бурчтуу $\Delta \mathrm{OA}_0 x_0$ үч бурчтугуна Пифагордун теоремасын колдонуу менен табылган (гипетенузасы $|\vec{a}| = |\mathrm{OA}_0|$, катеттери $|\mathrm{O}x_0|$, $|\mathrm{O}y_0|$) .

Жалпы учурда О чекитинен башталбаган каалагандай $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ векторунун координаталары деп, анын координаттык октордогу тик проекцияларынын (көлөкөлөрүнүн) узундуктарын айтабыз. Айталы башталуу чекити $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{B})$, бүтүүчү чекити $\mathrm{B}(x_\mathrm{B},\ y_\mathrm{B})$ координаталарына ээ болушса, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ векторун координаталары менен

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A};\ \ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})$ $\vee$ (же) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A};\ \ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\}$ жазса болот.

Узундугу болсо $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2} \qquad (3^\mathrm{A})$

формуласы менен эсептелет. (3) – формулада башталуу чекити $\mathrm{O}\ (0, 0)$, бүтүүчү чекит $\mathrm{A}_0(x_0,\ y_0)$ координаталарына ээ болуп, октордогу көлөкөлөрүнүн узундугу x_0 менен y_0 сандары болушуп, (3^A) боюнча $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0} = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ келип чыккан (20 чийме).

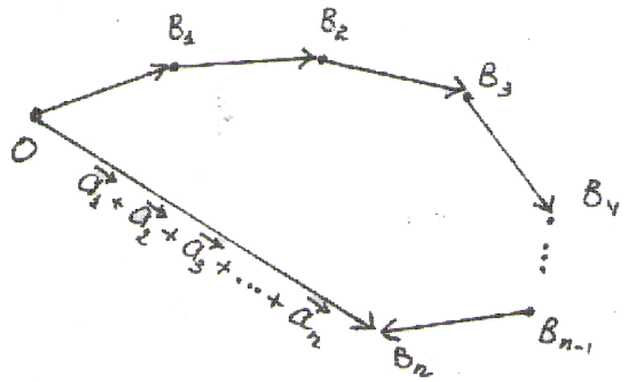
Узундугу 1 ге барабар болгон эркин векторду $|\vec{a}| = 1$ бирдик вектор деп атап, көбүнчө $\vec{e}$ – символу менен белгилешет. Узундугу $|\vec{a}| = 0$ нөл болгон вектор $\vec{a} = \vec{0}$ нөл вектор деп аталат.

Жаратылыш кубулуштарын математикалык тилде моделдештирип үйрөнүүдө, векторлор көптүгүн кыймылга келтирип пайдалануу үчүн, алар менен жүргүзүлүүчү амалдарды аткаруу эрежелерин киргизебиз. Векторлорду сандар сыяктуу санап, кошуп – кемитип, көбөйтүп – бөлүп колдоно албасак да, багыттуу кыймылдардын абалын көзөмөлгө алууга жетерлик кошуу, кемитүү, скалярдык менен вектордук жана аралаш көбөйтүү амалдарын киргизебиз.

Векторлорду кошуу жана кемитүү

Тегиздикте эркин жайгашкан $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \qquad (4)$

векторлору берилишсин. Алардын ар бирин каалагандай чекитке котоРуу менен бир гана жолу курууга болгондуктан, эркин тандалган O башталуу чекитине $\overrightarrow{a_1}$ векторун куралы. $\overrightarrow{a_1}$ векторунун бүтүүчү учу B_1 чекитине $\overrightarrow{a_2}$ векторун куруп, $\overrightarrow{a_2}$ нын бүтүүчү учу B_2 чекитине $\overrightarrow{a_3}$ векторун куруу менен ушул поцессти улантсак, акырында $\overrightarrow{a_{n-1}}$ векторунун бүтүүчү учу B_{n-1} чекитине $\overrightarrow{a}_n$ вектору курулган болот. Натыйжада (4) векторлор тобун бири – бирине улаштырылган абалда жайгаштырган болобуз *(21 – чийме).*



21 – чийме

Def – 2. *Берилген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлорун суммасы деп, бул векторлорду улаштыруу жолу боюнча кыймылдап келген чекиттин баштапкы жана акыркы абалдарын туташтырган векторду айтабыз. Векторлордун суммасы да вектор болуп, $\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + \dots + \overrightarrow{a}_n$ көрүнүштө жазылат. Эгерде чекиттин кыймылы баштапкы абалга келип токтосо, анда суммасы $\overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + \dots + \overrightarrow{a}_n = \vec{0}$ нөл вектор болот.*

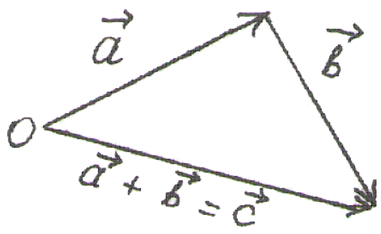
Ошентип $\overrightarrow{OB_n} = \vec{a}_1, +\vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ болот.

Эки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлорун суммасын 22 – чиймеде көрсөтүлгөндөй жайгаштырып, аны векторлорду кошуунун үч бурчтук эрежеси деп атайбыз: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Ox жана Oy координаталык окторун ортторун тиешелүү түрдө $\vec{i}$, $\vec{j}$ бирдик векторлору десек (20 – чийме), анда $\vec{a}$ вектору жактары $x_0\vec{i}$, $y_0\vec{j}$ болгон параллелограммдын диогоналы катарында өзүнүн координаталары менен

$$\vec{a} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} \qquad (5)$$

көрүнүштө жазыларын көрөбүз. ***Мындан эки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлорун бир чекиттен чыккандай абалга которуп, жактары $\vec{a}$, $\vec{b}$ болгон параллелограммдын диоганалы $\vec{c}$ векторун алардын суммасы катары эсептөөчү жаңы параллелограмм эрежеси келтирип чыгарабыз.***



22 – чийме

$\vec{a}$ векторунан $\vec{b}$ векторун кемитүү деп, $\vec{a}$ вектору менен $\vec{b}$ векторуна карама – каршы багыттагы " $-\vec{b}$" векторун кошууну түшүнөбүз.

Координаталары менен берилген $\vec{a}=\{x_a,y_a\}$, $\vec{b}=\{x_b,y_b\}$ векторлорун кошуп – кемитүү үчүн, алардын тиешелүү координаталарын кошуп – кемитип коюу жетиштүү:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_a \pm x_b, y_a \pm y_b\}. \qquad (6)$$

Векторлорду скалярдык көбөйтүү

Векторлор учтуу таяк сымал элестетилгендиктен, аларды улаштырып кошууга, кесип салып кемитүүгө болоруна ишенебиз. Бирок эки же бир канча таяктарды көбөйтүүгө же бөлүүгө болот десе, ишенүү кыйын. Ошондуктан, векторлорду көбөйтүүнү биз көнгөн мааниде аткаруу мүмкүн эмес. Векторлор менен сандар сыяктуу санак жана арифметикалык амалдарды аткара албасак да, студенттин коомдогу таанып билүү жөндөмдүүлүгүн өстүрүү максатында, векторлорду мүнөздөгөн сандык (скалярдык) чоңдуктарын көбөйтүү эрежесин үйрөнөбүз.

Эки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлору берилишсе, аларды мүнөздөгөн сандык чоңдуктар же сандар катары: **алардын координаталары менен узундуктарын жана өз ара жайгашуу багыттарын билдирген арасындагы бурчтарды** гана түшүнөбүз.

Def – 3. *Берилген* $\vec{a}$ *жана* $\vec{b}$ *векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү деп* $(\vec{a},\vec{b})$ *же* $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ *же* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *символдору менен белгиленген*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \text{ же } \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi \qquad (7)$$

чыныгы санын айтабыз. Мында $\varphi = \widehat{\vec{a},\vec{b}}$ эки вектордун арасындагы бурчтун чоңдугу болуп, $\varphi = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ формуласы менен табылат.

Эки векторду скалярдык көбөйтүүдө, векторлордун өздөрү көбөйтүлбөстөн, аларды мүнөздөөчү узундуктары жана алардын арасындагы бурчтун косинусу болгон сандар гана көбөйтүлдү.

(7) формуладан $\forall\vec{a},\vec{b}\text{:}\ \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad (7^{\text{А}})$

же өз ара перпендикуляр векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар деген натыйжа чыгат, анткени $\varphi = 90^{\circ} \Rightarrow \cos 90^{\circ} = 0$ болуп, нөлдү каалагандай сандарга көбөйткөндө нөл келип чыгат.

$(\mathbf{7}^{\text{А}})$ ***формуласы эки вектордун ортогоналдык шарты деп аташат.***

Ошондой эле параллель векторлор скалярдык көбөйтүү

$$\forall\vec{a},\vec{b}\text{:}\ \vec{a}//\vec{b} \Rightarrow \varphi = 0^{\circ} \Rightarrow \cos 0^{\circ} = 1 \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| \qquad (7^{\text{Б}})$$

эрежеси боюнча аткарылат.

Эгерде $\vec{a}(x_a,y_a),\vec{b}(x_b,y_b)$ векторлор координаталары менен берилишсе, анда аларды координаталары менен $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}$ орттору аркылуу

$\vec{a} = x_a\cdot\vec{\imath} + y_a\cdot\vec{\jmath},\quad \vec{b} = x_b\cdot\vec{\imath} + y_b\cdot\vec{\jmath}$ көрүнүштөрдө жазып, скалярдык көбөйтүүнү эки мүчө көбөйтүү катары аткарсак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_a\cdot\vec{\imath} + y_a\cdot\vec{\jmath})\cdot(x_b\cdot\vec{\imath} + y_b\cdot\vec{\jmath}) = x_a\cdot x_b\cdot\underbrace{(\vec{\imath}\cdot\vec{\imath})}_{=1} + x_a\cdot y_b\cdot\underbrace{(\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath})}_{=0} +$$

$$+y_a\cdot x_b\cdot\underbrace{(\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath})}_{=0} + y_a\cdot y_b\cdot\underbrace{(\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath})}_{=1} = x_a\cdot x_b + x_a\cdot y_b \text{ же}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + x_a\cdot y_b, \qquad (7^{\text{В}})$$

скалярдык көбөйтүүнү: тиешелүү координаталарын көбөйтүп кошуу менен эсептөөчү формула табылат. Скалярдык көбөйтүүнү эсептөөдө: параллелдүүлүк $\vec{\imath}//\vec{\imath},\ \vec{\jmath}//\vec{\jmath}\ \wedge |\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{(7^{\text{Б}})} (\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}) =$

$= (\vec{j} \cdot \vec{j}) = 1$ жана перпендикулярдык $\varphi = 90^{\circ} \Rightarrow \cos 90^{\circ} = 0$ жана $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \wedge (\vec{i} \cdot \vec{i}) = (\vec{j} \cdot \vec{j}) = 0$ шарттар эске алынды.

R^1, R^2, R^3 мейкиндиктеринде жайгашкан векторлор боюнча кеңири маалыматты, анын ичинде вектордук жана аралаш көбөйтүүлөрдү: www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М.Ш. Мамаюсуповдун "Жогорку математика боюнча окума" (1 – бөлүк, II – глава, §2.1. –§ 2.4.) китебинен акысыз окусаңар же көчүрүп алсаңар болот.

1 – мисал: $\mathrm{A}(-1;\ 4)$ чекитинен башталып, $\mathrm{C}(2;\ 3)$ чекитинде бүткөн $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ вектору менен $\mathrm{B}(-1; 5)$ чекитинен башталып, $\mathrm{M}(3; 4)$ чекитинде бүткөн $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ векторлорун багыты менен келген шамалдарды, O координата башталмасынан чыккандай абалга которуп, шамалдардын жана алардын суммасынын чоңдугун жана скалярдык көбөйтүүсүн тапкыла.

Чыгаруу: ►$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ векторун координаталары менен

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}};\ y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}}\} = \{2 - (-1);\ 3 - 4\} = \{3;\ -1\}$,

$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{B}};\ y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{B}}\} = \{3 - (-1);\ 4 - 5\} = \{4;\ -1\}$ жазып, бул векторлордун элестерин O башталмасынан чыгышкан, алар менен барабар болгон

$\vec{a} \equiv \overrightarrow{AC} = \{3;\ -1\}$ жана $\vec{b} \equiv \overrightarrow{BM} = \{4;\ -1\}$ векторлор менен алмаштырабыз. Вектордун узундуктары (3) боюнча табылып, шамалдардын чоңдуктарын мүнөздөйт:

$|\vec{a}| \equiv |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10},\ |\vec{b}| = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

$\sqrt{17} > \sqrt{10}$ болгондуктан, $\overrightarrow{BM}$ шамалы күчтүрөөк деген тыянак чыгат.

(6) формуласы боюнча, экөөнүн суммасы

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{x_a + x_b,\ y_a + y_b\} = \{3 + 4;\ -1 - 1\} = \{7;\ -2\}$ вектору болуп, анын узундугу

$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$ саны болот. Демек эки шамал кошулганда бири – бирин өчүрбөстөн, кайра күчөйт.

($7^{\text{В}}$) формуласын пайдаланып, скалярдык көбөйтүндүсүн табабыз: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + x_a \cdot y_b = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) = 12 + 1 = 13$. Ал эми эки вектордун арасындагы бурч

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \arccos \frac{13}{\sqrt{170}} \approx \arccos \frac{13}{13{,}04} \approx$$

$\approx \arccos 0{,}9969 \approx 4^{\circ}$ болгондуктан, бул эки вектор багыттары жакын болуп, суммасы күчөп кеткенин сезебиз. ◄

2. Түз бойлогон кыймылдардын теңдемелери

Жаратылыш чөйрөсүн таанып билүүдө түз сызыктарга салыштырып үйрөнүү учурлары көп кездешет. Анткени курчап турган чөйрөдөгү кыймылдар, байкоочу турган чекиттен чексиз көп түз сызыктарга окшоп кыймылдагандай же түздөрдү бойлоп таралгандай көрүнөт. Ааламды таануу байкоочу турган чекиттен жүргүзүлгөндүктөн, түздүн теңдемесин да байкоочу турган О чекитине салыштырмалуу түзө алабыз. Байкоочу адам турган О чекити ар кандай тандала бергендиктен, бир эле түз алардын ар биринен ар башка абалда жайгашкандай көрүнөт. Ааламдын чексиз көп түздөрүнүн арасынан, бизге керектүү түздөрдү таанып билип, аларды бойлоп кыймылдаган нерселердин барар жолуна көзөмөл жүргүзүү үчүн, ар бир түздү бири – биринен айырмалап тааныгандай ат коюуга туура келет. Мындай ат түздүн математикалык теңдемеси (модели) болот. Түз бойлоп өзгөргөн бардык кыймылдарды көзөмөлдөө үчүн, түз менен кошо чуркап же учуп коштоп жүрүү мүмкүн эмес, ошондуктан анын барактагы математикалык тилде жазылган модели (теңдемеси) аркылуу үйрөнүүгө мажбурбуз. Түздүн теңдемеси, Декарттын координаталар системасында О башталма чекитине салыштырмалуу түзүлөт, б.а. кайсы жерден байкасак да, ал жерди которуп, координата башталмасында турат деп элестетебиз.

Жалпы учурда R^2 – тегиздигинде кыймылдап өзгөрүшкөн М$(x;\ y)$ координаталуу чекиттерге карат түздүн теңдемеси (модели):

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + C = 0 \qquad (8)$$

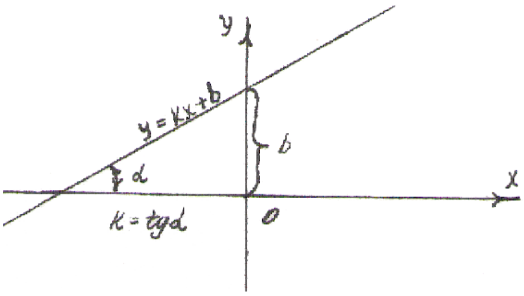
биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеме болот. Мында $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} -$ белгилүү жана турактуу сандар, ал эми А, В бир мезгилде нөл болбойт деген шартка баш ийет (бул шарт $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 > 0$ көрүнүштө жазылат). $x, y -$ түздө эркин өзгөрүп чуркаган белгисиз $\mathrm{M}(x;\ y)$ чекиттерин координаталары.

Практикалык эсептөөлөрдө түздүн (8) жалпы теңдемесин төмөндөгүдөй эки көрүнүштө жазып жүрүшөт:

1) $y = kx + b \qquad (8^{\mathrm{A}})$

Мында k –түздүн бурчтук коэффиценти, $b -$ белгилүү турактуу сан. (8) менен (8^{A}) формулаларын бирдей экендигин көрсөтүүгө болот. Чынында эле (8) ди В га бөлүп жиберип,

$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x + y + \frac{C}{B} = 0$ жана $k = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $b = -\frac{C}{\mathrm{B}}$ деп белгилөө менен (8^{A}) көрүнүшүнө келтирүүгө болот. Түздүн $k -$ бурчтук коэффициенти, Ox огу менен L түзүнүн арасындагы α - көтөрүлүү бурчунун тангенсине барабар болот k = tgα *(23 – чийме)*;

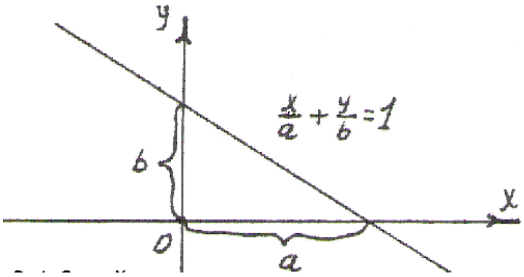


23 - чийме

2) Эгерде А, В коэффициенттери жана С бош мүчөсү бир учурда нөлгө барабар болбосо, б.а $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot C \neq 0$, анда $a = -\frac{C}{\mathrm{A}}$, $b = -\frac{C}{\mathrm{B}}$ белгилөөлөрүнүн жардамы менен түздүн (8) жалпы теңдемесин

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (8^{\text{Б}})$$

көрүнүшкө келтиребиз. $(8^{\text{Б}})$ түздүн кесиндилердеги теңдемеси деп аталат *(24 – чийме).*



24 - чийме

Эгерде түз өтүүчү бир $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекити берилсе, бул бир чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ же } \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) = 0 \qquad (8^{\mathrm{B}})$$

көрүнүштө түзүлөт $\left(k = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)$. Эгерде k белгилүү болсо, анда көтөрүлүү бурчун $k = tg\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = arcctg\, \mathrm{k}$ маанисин табууга болот.

Эгерде түз өтүүчү эки $\mathrm{M}_1(x_1; y_1)$ менен $\mathrm{M}_2(x_2; y_2)$ чекиттери берилсе, анда бул эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (8^{\Gamma})$$

көрүнүштө түзүлөт.

2 – мисал: Көтөрүлүү бурчу $\alpha = 45^{\circ}$ болуп, $\mathrm{M}_0(3; -2)$ чекити аркылуу түз бойлоп кыймылдаган тело, экинчи бир $\mathrm{M}_1(1; 5), \mathrm{M}_2(4; -1)$ чекиттери аркылуу өткөн түз бойлой кыймылдаган тело менен кезигишеби? Экинчи түздүн көтөрүлүү бурчун тапкыла.

Чыгаруу: ► Биринчи L_1 түзүндө $\alpha = 45^{\circ}$, $x_0 = 3$, $y_0 = -2$; экинчи L_2 түзүндө $\mathrm{M}_1(1; 5), \mathrm{M}_2(4; -1)$ болгондуктан, (8^{B}) жана (8^{Γ}) формулалары пайдаланып,

$$L_1: y - (-2) = k(x - 4) \;\Leftrightarrow\; y + 2 = \underbrace{tg45^{\circ}}_{=1} \cdot (x - 4) \;\Leftrightarrow\; y - x + 6 = 0$$

$$L_2: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-5}{-1-5} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{-6} \;\Leftrightarrow\; (-6) \cdot (x - 1) =$$

$$= 3 \cdot (y - 5) \;\Leftrightarrow\; 3y + 6x + 21 = 0 \;\Leftrightarrow\; y + 2x + 7 = 0$$

теңдемелерине ээ болобуз. Бул эки түз бойлой кыймылдаган телолордун кезигүү мүмкүнчүлүгү, эки түздөрдүн кесилишүү чекитинде гана болот. Ошондуктан эки түздөрдүн кесилишүү чекиттерин табуу үчүн

$\begin{cases} y - x + 6 = 0, \\ y + 2x + 7 = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасын чечимдерин табабыз. Биринчисинен экинчисин кемитип жазып: $0 - 3x - 1 = 0 \;\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$, ал эми биринчисин 2 ге көбөйтүп, экинчисине кошуп жазып: $3y + 19 = 0$

же $y = -\frac{19}{3} = -6\frac{1}{3}$ чыгарылыштарына ээ болобуз. Демек бул эки түздөр М$\left(-\frac{1}{3};\ -6\frac{1}{3}\right)$ чекитинде кесилишет, же аларды бойлоп кыймылдаган телолор кезигишет.

Экинчи түздү: $y + 2x + 7 = 0 \ \Rightarrow\ y = kx + b$ же $y = -2x - 7$ көрүнүштө жазып, бурчтук коэффициент $k = -2$ болорун көрөбүз. Анда көтөрүлүү бурчу $k = tg\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = arcctg\,\mathrm{k} = arcctg\,(-2) \approx -64^{\circ}$ болот.◄

Мындай мисалдар самолёттордун учуу жана деңиз жолдорун көзөмөлдөө, жол куруу, туннель казуу, электр зымдарын тартуу сыяктуу иштерди долбоорлоодо кездешет. Мисалдан байкагандай көтөрүлүү бурчу түздүн теңдемесин түзүүдө маанилүү ролду аткарып, айрым студенттердин: "дегеле тангенс менен котангенстин пайдасын көрбөдүм" – деген сөзүнө берилчүү, миңдеген жооптордун бири гана болот. Чынында эле кол эмгегине негизделген жөнөкөй турмуш агымында чоңойгон бала, акыл эмгеги менен самолёт сыяктуу татаал техникаларды жасап, башкарып жашаган элдердин жашоо шарттарын жакшы билбегени турган нерсе.

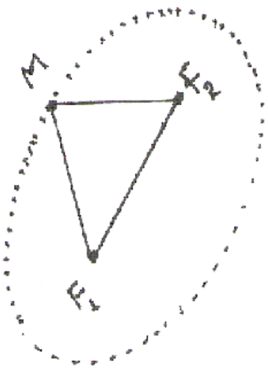
Демек түздүн теңдемесин түзүү үчүн, ал өтүүчү бир чекит жана көтөрүлүү бурчу α белгилүү болушу, же болбосо, түз өтүүчү эки чекит белгилүү болушу керек.

Ошентип R^2- тегиздигинде жайгашкан түздөрдү, негизинен жогоруда көрсөтүлгөн беш көрүнүштөгү теңдеме – моделдер аркылуу математикалык тилде жазып, алар аркылуу түздөрдөгү кыймылдарга көзөмөл жүргүзөбүз. Мындан сырткары түздөрдүн өз ара жайгашуу абалдары, чекиттен түзгө чейинки жана түздөрдүн арасындагы аралыктар, векторлор менен байланыштары, R^3- мейкиндигиндеги түздөр менен тегиздиктер жөнүндөгү кеңири маалыматтарды www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун "Жогорку математика боюнча окума" (1 – бөлүк, III – глава, §3.1. –§3.4.) китебинен акысыз окусаңар же көчүрүп алсаңар болот.

3. Экинчи тартиптеги ийрилер

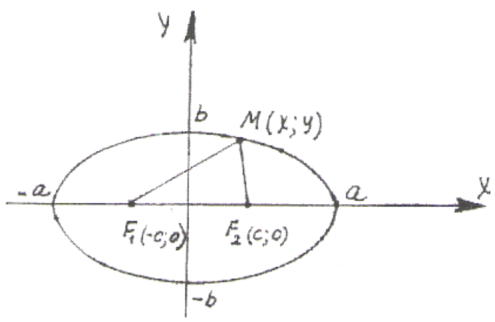
Түздүн теңдемесинде, түздө эркин чуркап кыймылдап өзгөргөн $\mathrm{M}(x;\ y)$ чекиттеринин координаталары болушкан $x, y -$ өзгөрүлмөлөрү, биринчи даражада катышканын көрдүк, ошондуктан аларды биринчи тартиптеги сызыктар деп атап, түздүн теңдемесин сызыктуу теңдеме деп айтабыз. Эгерде теңдемеде $x, y -$ өзгөрүлмөлөрүн жок дегенде бири эле экинчи даражада ("x^2" $\vee$ "y^2" $\vee$ "$x \cdot y$") катышса, анда аны экинчи тартиптеги теңдеме дейбиз. Мисалы бизге белгилүү квадраттык теңдеме $ax^2 + bx + c = 0$, айлананын теңдемеси $x^2 + y^2 = r^2$ экинчи тартипте болушуп. алардын ***графиктери экинчи тартиптеги сызыктар же ийрилер деп*** аталышат.

Адамдын күнүмдүк жашоосунда жердин күндүн, айдын жердин айланасындагы учуу жолдору, кометалардын учуу жолдору, техникадагы параболалык түзүлүштөр сыяктуу суроолор жаралып, ага түшүндүрмөлөрдү берүү зарылчылыктары туулуп турат. Ошондуктан айрым экинчи тартиптеги ийрилер боюнча кыскача маалыматтарды беребиз.



25 – чийме

Эллипс: ***Def – 4.*** *Тегиздиктеги өзгөрүлмө M чекитинен берилген фокустар деп аталуучу F_1, F_2 чекиттерине чейинки аралыктардын суммасы дайыма бир эле турактуу санга тең болсо, анда мындай M чекиттерин көптүгүнүн изин эллипс деп атайбыз. F_1 жана F_2 фокустарын арасындагы аралык* $\rho\,(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) = |\mathrm{F}_1\ \mathrm{F}_2|$ *- фокалдык аралык деп аталып, M чекитинен F_1, F_2 фокустарына чейинки аралыктарын суммасынан* $\rho(\mathrm{F}_1, \mathrm{M}) = |\mathrm{F}_1\ \mathrm{M}|$, $\rho(\mathrm{F}_2, \mathrm{M}) = |\mathrm{F}_2\mathrm{M}|$ *кыска болот (25 – чийме), б.а.*



26 – чийме

ρ $(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) \leq \rho$ $(F_1, M) + \rho$ (F_2, M).   (9)

Декарттык координаталар системасын О башталмасына салыштырмалуу эллипстин математикалык тилдеги модель – теңдемеси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

көрүнүштө жазылып, эллипс ийриси 26 – чиймедей сызылат. $Ox -$ огун, эллипстин чоң огу, ал эми чоң ок менен кесилишкен $(-a; 0)$ жана $(a; 0)$ чекиттерин – эллипстин чоң чокулары деп атайбыз. $Oy -$ огун, эллипстин кичине огу, кичине ок менен кесилишкен $(0; -b)$, $(0; b)$ чекиттерди – кичине чокулары дейбиз. Эгерде a = b болсо, (10) теңдемеси айлананын каноникалык теңдемесине айланат, $a \neq$ b болсо, айлана Ox огуна карата $\frac{b}{a}$ эсе кысылып, эллипс кейпине келет.

Эллипстин эске тутуп калуучу айрым касиеттерин көрсөтөлү:

1⁰. Эгерде $M_0(x_0; y_0)$ чекити эллипске таандык болсо, анда $(-x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ жана $(x_0; -y_0)$ чекиттери да эллипске таандык болушат. Анткени, бул чекиттердин экөөсү M_0 чекитине координаттык окторго карата, бирөөсү О башталмасына карата симметриялуу жайгашкан.

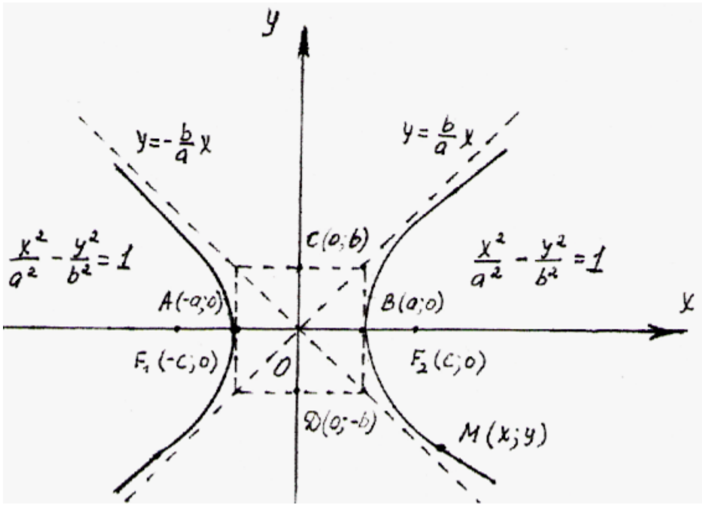
2⁰. $(\pm a; 0)$, $(0; \pm b)$чекиттери эллипстин чокулары деп аталышат. Ал эми эллипске таандык $M(x; y)$ чекитинде $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ шарттары аткарылат.

3⁰. Эллипстин оң $F_2(c; 0)$ жана сол $F_1(-c; 0)$ эки фокусу болуп, $|F_1F_2| = 2c$ аралыгы – фокалдык аралык деп аталып, $b^2 = a^2 - c^2$ байланышы орун алат.

4⁰. $e = \frac{c}{a}$ саны эллипстин эксцентриситети деп аталып, ал айлананы кысуу менен эллипске айлантуу деңгээлин аныктайт. $e = 0$ болсо, айлана кысылбай айлана бойдон калат. $e = 1$ болсо, айлана түз абалына чейин толук кысылган болот. Ошентип эллипсте $0 < e < 1$ болот.

5^0. $x+\dfrac{a}{e}=0$ жана $x-\dfrac{a}{e}=0$ түздөрү эллипстин директрисалары деп аталышат. Эллипс оң жана сол болгон эки директриса түздөрүнө ээ болот.

Гипербола: ***Def – 5.*** *Тегиздикте эркин өзгөргөн* М($x;y$) чекиттеринен *фокустар деп аталуучу эки F*$_1$ *жана F*$_2$ *чекиттерине чейинки аралыктардын айырмасын модулу дайыма бир эле турактуу санга тең болсо, анда мындай абалда өзгөргөн* М($x;y$) *чекиттерин көптүгүн изин гипербола дейбиз. F*$_1$*, F*$_2$ *чекиттерин аралыгы фокалдык аралык* *деп аталып, фокустардан М чекитине чейинки аралыктардын айырмасын модулунан узун болот:*



27 – чийме

$$\rho(\mathrm{F}_1,F_2)>\left|\rho(F_1,M)-\rho(F_2,M)\right|. \qquad (11)$$

Oxy тик бурчтуу декарттык координаталар системасында фокустар деп аталуучу

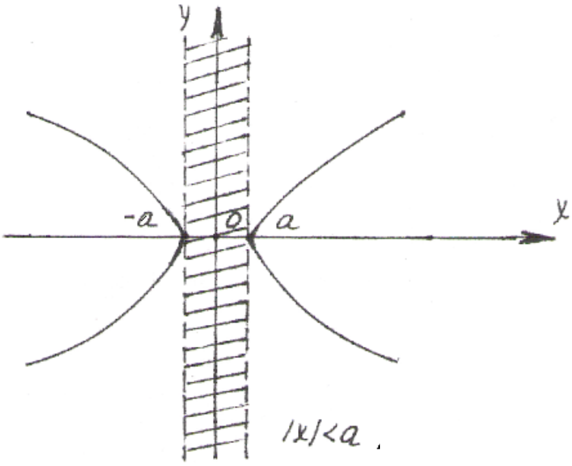
F$_1$(-c;0), F(c;0) координаталуу чекиттери берилип, М($x;y$) өзгөрүлмө чекит болсун (27 – чийме). Бул учурда гиперболанын теңдемеси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (12)$$

көрүнүштө түзүлөт ($b^2=c^2-a^2$).

Гиперболага мүнөздүү айрым касиеттерди көрсөтөлү:

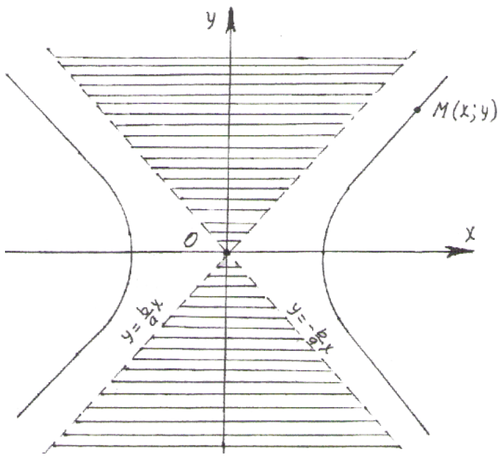
1^0. Гипербола $|x|<a$ тилкесинин сыртында жайгашып, A(-a;0), B(a;0) чекиттери гиперболанын чокусу болот. AB кесиндиси гиперболанын башкы огу деп аталат. Чынында эле



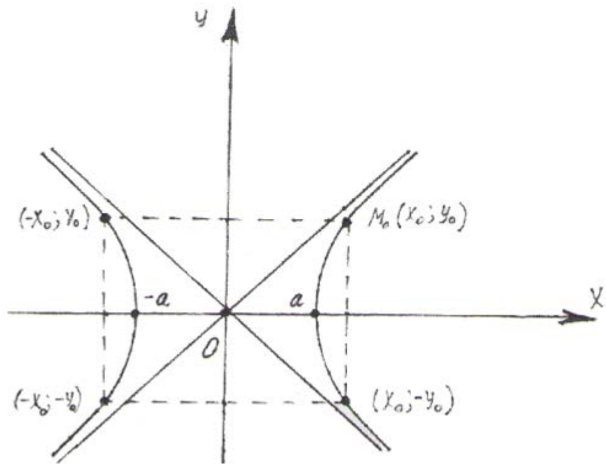
М($x; y$) гиперболада жайгашкан өзгөрүлмө чекит болсо, $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$ болуп, $|x|\geq a$ келип чыгат *(28 – чийме).*

28 – чийме

2^0. Гипербола $y=\pm\frac{b}{a}x$ түздөрүн арасында жайгашат *(29 – чийме).* $y=-\frac{b}{a}x$ сол, $y=\frac{b}{a}x$ оң асимптоталары болуп, алар гиперболанын графигине $|x|\to\infty$ умтулганда чексиз жакындап барат.



29 – чийме

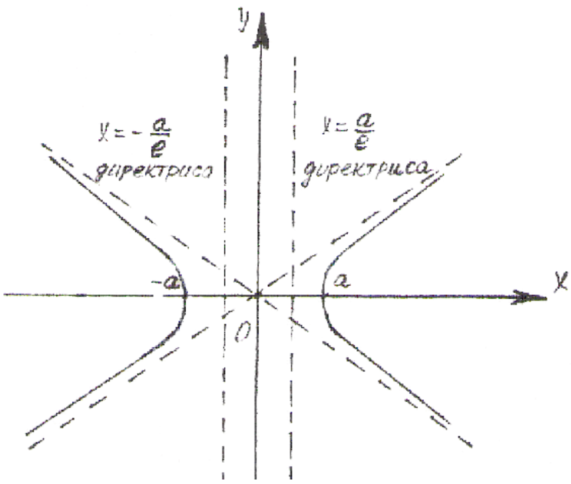


30 – чийме

3^0. Гиперболага Ox жана Оу координаттык октору симметрия борбору болот *(30 – чийме).*

Чынында эле $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити гиперболага таандык болсо, анда

$(-x_0;\ y_0)$, $(-x_0;\ -y_0)$, $(x_0;\ -y_0)$ чекиттери да гиперболага таандык болот.

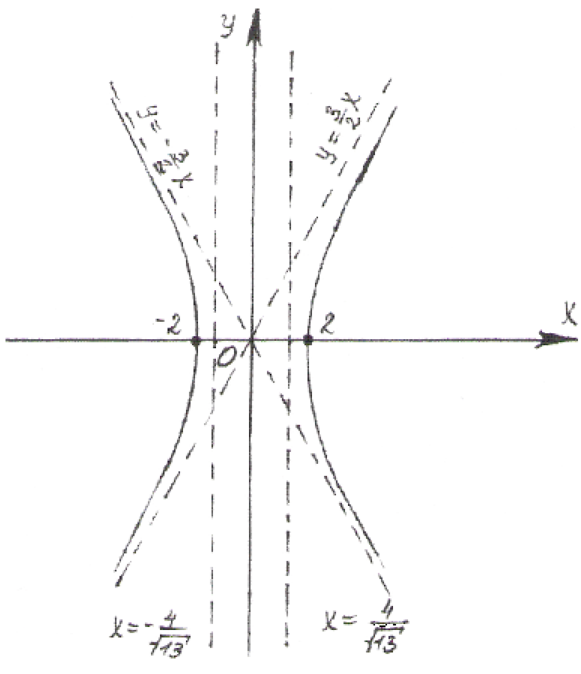


31 – чийме

4^0. $e = \dfrac{c}{a}$ саны гиперболанын эксцентриситети деп аталып, $e > 1$ болот. e саны гиперболанын кысылуу деңгээлин көрсөтүп, e чоңойгон сайын гиперболанын эки бутагы тең куушурулат, ал эми ал кичирейип бирге жакындаган сайын бутактары кеңейип, $e = 1$ болгондо эн чоң бутактуу гипербола болуп, $x = \pm a$ түздөрүнө айланат. $a = b$ болгон учурда гипербола тең жактуу деп аталып, $x^2 - y^2 = a^2$ көрүнүштөгү теңдемеге ээ болот. Асимптоталары $y = \pm x$ түздөрүнө айланат. Ал эми $x + \dfrac{a}{e} = 0$ жана $x - \dfrac{a}{e} = 0$ түздөрү, гиперболанын директрисалары деп аталышат (31 – чийме).

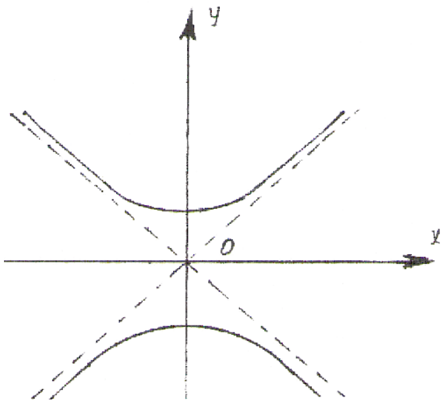
Мисалы, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ гиперболасында $a = 2$, $b = 3$, $b^2 = c^2 - a^2$ болгондуктан, $c^2 = b^2 + a^2 = 4 + 9,\ c = \sqrt{13}$;

$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{13}$ – фокалдык аралык; $F_1(-\sqrt{13};0)$, $F_2(+\sqrt{13};0)$ - фокустары; чокулары $A(-2;0), B(2;0)$; $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ саны эксцентриситети жана



32 – чийме

$$\begin{cases} x+\dfrac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}=0, \\ x-\dfrac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}=0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x+\dfrac{4}{\sqrt{13}}=0, \\ x-\dfrac{4}{\sqrt{13}}=0 \end{cases}$$ түздөрү директрисалар болушат.



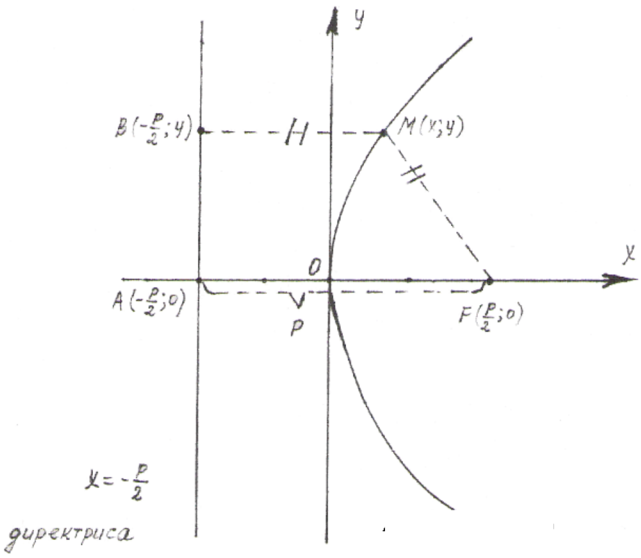
Асимптоталары $y=\frac{3}{2}x, y=-\frac{3}{2}x$ түздөрү болот *(32 – чийме).*

5⁰. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (12)

гиперболасы, (11) гиперболасына түйүндөш гипербола деп аталат *(33 – чийме).*

33 – чийме

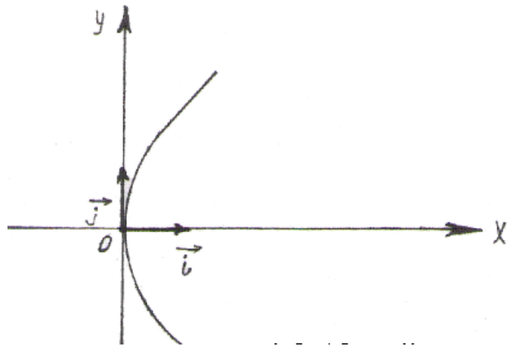
Парабола: ***Def – 6.*** *Тегиздикте берилген фокус деп аталуучу F чекитинен жана бул чекит аркылуу өтпөөчү директриса деп аталган түздөн бирдей узактыкта жайланышкан өзгөрүлмө M чекиттерин көптүгүн изи парабола деп аталат (34 – чийме).*



34 – чийме

Фокустан директрисага чейинки аралыкты фокалдык параметр деп, p менен белгилейбиз. Параболанын каноникалык теңдемесин түзүү үчүн Oxy каноникалык координаттык системасын тандайбыз. Ox огун, директриса деп аталган $x=-\frac{p}{2}$

түзүнө перпендикуляр болуп, F фокусу аркылуу өтө тургандай сызабыз. F фокусунан директрисага чейинки аралык p саны болсун. Бул аралыктын тең ортосунан Ox огуна перпендикуляр түз жүргүзүп, аны Oy ордината огу катарында кабыл алабыз.



35 – *чийме*

Ушундай ыкмада тандалган Oxy координаталар системасында фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, директриса менен Ox огунун кесилишүү чекити $A\left(-\frac{p}{2};0\right)$, параболага таандык өзгөрүлмө чекит $M(x;y)$ координаталарына ээ болушсун. M чекитинен директрисага түшүрүлгөн перпендикуляр менен директрисанын кесилишүү чекити $B\left(-\frac{p}{2};y\right)$ дейли. Параболанын аныктамасы боюнча $\rho(B,M)=\rho(M,F)$, аны координаталары менен жазуудан $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+y^2}$ теңдештиги келип чыгат. Эки жагын тең квадратка көтөрүп топтоштуруп

$$y^2=2px, \qquad (13)$$

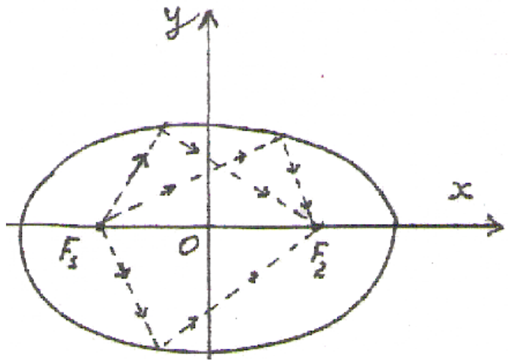
параболанын каноникалык теңдемесин алабыз.

1^0. (13) параболасы Ox огунун оң жагында жайгашып, чокусу O(0;0) чекити болот *(35 – чийме).*

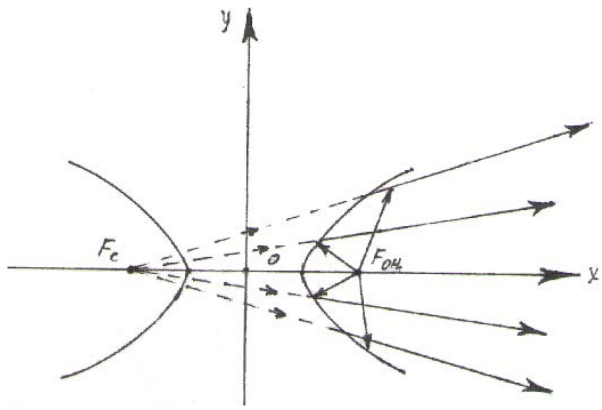
2^0. Каноникалык Oxy координаталар системасынын Ox абсциссасы – параболанын жалгыз гана симметрия огу болот.

Экинчи тартиптеги ийрилердин оптикалык касиеттерине токтолобуз, анткени экинчи тартиптеги ийрилерди координаттык октордун айланасында айлантуу менен үч өлчөмдүү R^3 – мейкиндигинде пайда болушкан жумуртка сымал эллипсоид, казан сымал параболоид менен гиперболоид фигуралары техникалык түзүлүштөрдө, архитектуралык курулуштарда, аалам мейкиндигин үйрөнүүдө кеңири колдонууга ээ. Ошондуктан илимий даражага ээ адам катары, мындай түзүлүштөрдүн негизин билип, адамзаттын илимий – техникалык жетишкендиктерине баа бере тургандай жөндөмү болушу керек.

А) *Эллипстин кайсы бир фокусуна жарык булагын орнотсок, анын шооласы эллипстин күзгүдөй жалтырак бетиндеги каалагандай* M_0 *чекитинен чагылып экинчи фокуска топтолот (36 – чийме).*



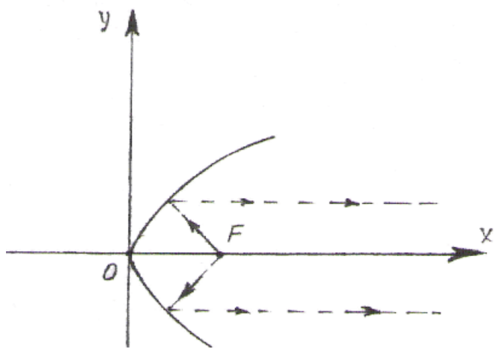
36 – чийме



37 – чийме

Б) *Гиперболанын бир фокусуна орнотулган жарык булагынын шооласы гиперболанын күзгүдөй бетинен чагылып, экинчи фокусунан чыккан шооланын уландысы катарында көрүнүп тарайт (37 – чийме).*

В) *Параболанын фокусуна орнотулган жарык булагынын шооласы параболанын күзгүдөй бетинен чагылып, параболанын огуна параллель шоолалар болуп тарашат (38 – чийме).*



38 – чийме

Экинчи тартиптеги ийрилер, беттер жана телолор жөнүндө кеңири маалыматтарды www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун “Жогорку математика боюнча окума” (1 – бөлүк, IV – глава, §4.1. –§4.3.) китебинен акысыз окусаңар же көчүрүп алсаңар болот.

§6. Матрица жана анын аныктагычы, алардын маалымат технолологияларын түзүүдө жана сызыктуу теңдемелер системаларын чыгарууда колдонуу

Бүгүнкү илимий – техникалык прогресстин кучагында жашаган коомчулукта маалыматтар көбөйүп, аларды берүү, алуу белгилеп жазып эске сактап калуу проблемасы чыкты. Ошондуктан маалыматтарды тамга менен сөз катары жазуу муктаждыкты канааттандырбай, сандар менен белгилөө усулдары иштелип чыккан. Сандарды алгачкы колдонуу номерленген тизмелерди түзүүдөн башталып, кийинчээрек автомобилдерге, телефондорго, банк эсептерине номерлерди, географиялык карталарда координаталарды ж.б.у.с. коюу менен улам өнүгүп, IXX – кылымда сандар аркылуу жашыруун шифр коюлган телеграфтык кабарлар кеңири колдонула баштаган. Электр тогунун “күйүү” жана “өчүү” эки касиеттерине таянып, экилик системада жазылган сандарга негизделген компьютердик технологиялардын пайда болуусу менен, маалыматтарды сандар менен белгилөө усулу өнүгүп, санариптик технологиялардын түзүлүүсүнө шарт түздү. Бүгүнкү күндө адамдан баштап, жан – жаныбарлар, жер менен асман телолорун баары сандар менен белгиленген идентификациялык номерлерге ээ экендиги баарыбызга маалым. Ошентип, колдонулуучу сандардын орундары көбөйүп. 16 – 20 орундуу сандарга чейин узарып жетти. Мындай абалдан чыгуу үчүн, сандарды жазуунун башкача формалары пайда болгон. Алардын алгачкыларынын бири катары, сандарды иреттелген таблица же матрица көрүнүшүндө жазуу эрежесин айтууга болот.

Матрица түшүнүгү: Берилген $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ сандарынан, төмөндөгүдөй $n = 3$ жолчолор менен $m = 3$ мамычларга тартип менен иреттелип жайгаштырылган

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

таблица, $(3 \times 3) -$ тартиптеги квадраттык матрица деп аталат. $a_{ij} -$ лер $(i = 1, 2\ 3;\ \ j = 1, 2, 3)$ матрицанын элементтери деп аталышып, $i -$ индекси элемент турган жолчону, ал эми $j -$ индекси элемент турган мамычаны билдирет. Демек a_{23} – деп, экинчи жолчо менен үчүнчү мамычанын кесилишинде турган элементти түшүнөбүз. Жолчолору менен мамычалары $n = m$ барабар болгон матрицалар квадраттык матрица деп аталат.

3×3 –*тартиптеги бирдик матрица*: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ал эми ***нөл матрица***: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ көрүнүштөрдө жазылышат. Матрицанын **башкы диагоналы** деп, a_{11}, a_{22}, a_{33} элементтерин тобу жайгашкан диагоналды айтабыз.

Матрицаларды ыңгайына жараша A, B, C,… чоң тамгалары менен, кээде (a_{ij}) деп жазуу кабыл алынган. Жалпы учурда n жолчодон жана m мамыдан турган матрица $(n \times m)$ – тартиптеги матрица деп айтылат. Эгерде (1) матрицасы бир гана жолчо менен түзүлсө, бир жолчолуу $1 \times m$ - тартиптеги, ал эми бир гана мамыдан турса $n \times 1$- тартиптеги, бир гана элементтен турса (a_{11}) - биринчи тартиптеги матрица деп айтабыз. Ошентип, турмуштук колдонуу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{im} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nj}\ldots a_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i - жолчо \\ \\ \\ \end{array} \qquad (2)$$

j – мамыча

зарылчылыкка жараша, ар кандай тартиптеги, кала берсе квадраттык эмес матрицаларды түзүп, колдонобуз. Бизге түшүнүктүү болсун үчүн тартиби төмөн, көбүнчө (3×3) – тартиптеги квадраттык матрицаларды мисал келтирип, алар менен болгон амалдар менен касиеттер бардык тартиптеги матрицалар үчүн туура болорун эскерте кетебиз.

Турмушта кездешүүчү таблицалардын баарын матрица деп эсептөөгө болот. Мисалы, 3 тайпадан турган студенттердин өздөштүрүү көрсөткүчүн 3×4 –тартиптеги матрица көрүнүшүндө (ар бир тайпада 25 студент бар). Мында “5” “4” “3” “2” – баалоо критерийлери.

	"5"	"4"	"3"	"2"
1 – тайпа	0	12	10	3
2 – тайпа	4	10	11	0
3 – тайпа	2	8	12	3

жазууга болот.

Мындай матрица студенттердин өздөштүрүү окуясын сандык жактан мүнөздөгөн математикалык аппарат катарында эсептелип, болгон окуяны толук баяндоочу кыска жана түшүнүктүү ыкма боло алат.

Таблицанын аналогиясында түзүлгөн матрицаларды турмушта сандар сыяктуу колдонуу үчүн, алар менен белгиленген обьекттердин кыймыл өзгөрүүлөрүнө өзүндөй дал келүүчү (тууратган) кыймыл аракеттерди мүнөздөгөн амалдары киргизүү зарылчылыгы келип чыгат.

1. Матрицаларды кошуу жана кемитүү амалдары, ***алардын тиешелүү элементтерин кошуу жана кемитүү менен аткарылат.***

Айталы $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

көрүнүштөгү $3 \times 3 -$ тартиптеги квадраттык матрицалары берилсин, анда алардын суммасы менен айырмасы

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{12} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

көрүнүштөгү, $3 \times 3 -$ тартиптеги квадраттык матрица болот.

Матрицаларды кошуу менен кемитүү, алардын тиешелүү элементтери аркылуу ишке ашырылгандыктан, бул амалдар бирдей тартиптеги матрицалар үчүн гана аткарылат. Сумма же айырма болгон матрицанын тартиби, кошулуучу же кемүүчү матрицалардын тартибиндей болот.

Матрицаларды кошуу, кемитүү амалдары $A \pm B = B \pm A$ коммутативдүүлүк жана $(A + B) + C = A + (B + C)$ ассоциативдүүлүк касиеттерине ээ.

2. Матрицаларды көбөйтүү амалы: жогоруда берилген $3 \times 3 -$ тартиптеги A, B матрицалары үчүн, алардын көбөйтүндүсү деп аталган үчүнчү C матрицасын түзүү менен ишке ашырылат. C матрицасын $c_{ij} -$ элементи $(i, j = 1, 2, 3)$ төмөндөгүдөй эреже боюнча табылат:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} \,. \qquad (4)$$

Ал эми $(n \times n)$ – тартиптеги A, B квадраттык матрицалар үчүн

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (4^A)$$

көрүнүштө болот. Бул учурда көбөйтүндү C матрицасы

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = C \qquad (5)$$

көрүнүштө түзүлөт. Ошентип C матрицасын $c_{ij} -$ элементи A матрицасын i – жолчосун элементтерин, B матрицасын j – мамычасынын тиешелүү элементтерине түгөйлөш көбөйтүп, суммалоо менен табылат:

$$\left(\frac{i - жолчо}{} \right) \cdot \left(\Big| \, j - мамыча \right) = \left\langle \frac{i - жолчо}{} \middle| \frac{c_{ij}}{j - мамыча} \right\rangle \,.$$

A B C

Матрицаларды көбөйтүүнүн (4), (4^A), (5) эрежелеринен, каалагандай эле тартиптеги матрицаларды көбөйтө берүүгө болбой турганын байкайбыз, б.а. А матрицасында канча мамыча болсо, В матрицасында ошончо жолчо болууга тийиш. Ушундай шартта гана элементтерин бири – бирине түгөйлөш көбөйтүп, (4) көрүнүштөгү сумманы түзүп, эсептей алабыз:

$$\begin{pmatrix} Тартиби \\ n\times m \\ A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Тартиби \\ m\times p \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Тартиби \\ n\times p \\ C \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Бул көбөйтүү эрежесинде В матрицасын мамычаларын p санына чек коюлбайт. Мисалы, 3×3 тартиптүү А матрицасына, 3×2 тартиптүү В матрицасын көбөйтүүгө болот:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot2+1\cdot1+3\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+3\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Бирок, тескерисинче $B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ көбөйтүүсү аткарылбайт, анткени биринчи көбөйтүүчү В матрицасында 2 мамыча, ал эми экинчи көбөйтүүчү А матрицасында 3 жолчо болуп, аларды түгөйлөштүрүп көбөйтүү мүмкүн эмес.

Матрицалардын көбөйтүүнүн айрым касиеттерин карайлы:

1^0. Жалпы учурда матрицаларды көбөйтүү коммутативдүүлүк касиетине ээ эмес: $A\cdot B\neq B\cdot A$. Бирок, айрым бир тандалган матрицалар үчүн коммутативдүүлүк касиети аткарылат.

2^0 Каалагандай А матрицасын, Е бирдик матрицасына көбөйткөндө, А матрицасын өзү келип чыгат: $A\cdot E = E\cdot A = A$.

Матрицаны кайсы бир $\lambda-$ чыныгы санын көбөйтүү деп, берилген матрицанын бардык элементтерин λ – санына көбөйтүү менен түзүлгөн матрицаны айтабыз:

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

3^0 Бирдей тартиптеги A, B, C матрицалары берилсе, анда

а) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$**;**

б) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C;$

в) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A, \qquad \alpha, \beta \in R;$

г) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$

д) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ орун алат.

4^0 А матрицасына көбөйткөндө бирдик матрица келип чыкса, анда *көбөйтүлүүчү матрица* – А *матрицасына тескери матрица* деп аталып, A^{-1} – символу менен белгиленет: $A \times A^{-1} = E$.

Ошентип, жогорудагыдай эрежелер менен аныкталган кошуу, кемитүү, көбөйтүү амалдары матрицалардын алгебрасын түзүшөт. Матрицаларда бөлүү амалы аткарылбайт, ошондой болсо да, матрицаны өзүнө тескери матрицага көбөйтүүнү, кайсы бир деңгээлде бөлүү амалына окшоштурсак болот. Анткени санды өзүнө бөлгөндө 1 келип чыккандай эле, матрицаны тескерисине көбөйткөндө бирдик E матрицасы келип чыгарын, 4^0 – касиетинде белгилеп кеттик.

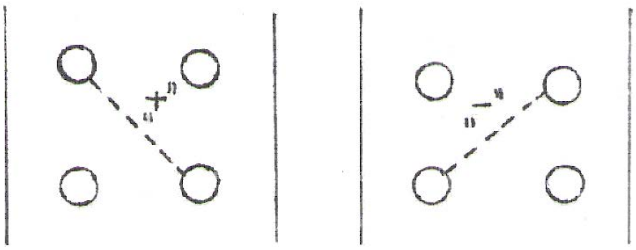
Матрицалардын көптүгүндө аткарылган амалдарга таянып, бүгүнкү санариптик технологиялар, көп түспөлдүү чагылтуулар, теңдемелер системасын матрицалар аркылуу жазуу жана чыгаруу сыяктуу турмуштук зарылчылыктарды чечип келебиз. Мисалы А матрицасына кызыл түстү, В матрицасына жашыл түстү белгилеген сандарды жайгаштырсак, бул түстөрдүн аралашуусун эки матрицаны кошуу эрежесине, эки түстүн бир учурда берилүүсүн, матрицаларды көбөйтүү эрежесине көрсөтүлгөн матрицаларга окшош схемаларда түзүлгөн матрицаларда жайгаштырабыз. Үндөр деле, өздөрү белгиленген матрицаларда жүргүзүлгөн амалдарга шайкеш матрицалар аркылуу кошулуп, көбөйтүлүп, кемитилип олтуруп керемет музыкаларга, ширин аңгемелерге айланып, аппараттар аркылуу угулушат. Ошондуктан бардык санариптик техникаларда матрицалар жөнүндө сөз болуп келет.

Матрицанын аныктагычы деп, матрицанын чоңдугун мүнөздөгөн санды айтышат. Анткени матрица жөн гана таблица болгондуктан, алардын кимиси чоң же кичине мазмундагы маалыматтарды камтыганын биле албайбыз. Ошондуктан, ар бир матрицага канчалык чоңдуктагы жана мазмундагы маалыматтар батарын көрсөтүүчү сан өлчөмүн киргизип, аны ошол матрицанын аныктагычы деп атайбыз. Мисалы телефондун матрицасында сандар менен белгиленип жазылган маалыматтарга жумшалган байт – эс тутумдар, ошол матрицанын сыйымдуулугун сандык чоңдугун, же кубатын көрсөтүүчү аныктагыч – сандар болушат.

$2\times 2 -$ тартиптеги **квадраттык** $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ **матрицанын аныктагычы** деп, $\det A -$ “детерминант А”, же $\Delta -$ “дельта”, же $|\mathrm{A}|$ көрүнүштөрдө белгиленген санды айтабыз. Ал сан Крамерь – Гаусстун

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \quad (7)$$

эсептөө эрежеси боюнча табылат. (7) эсептөө эрежеси оң же $"+"$ диагоналда турган элементтердин көбөйтүндүсүнөн, сол же $"-"$ диагоналда турган элементтердин көбөйтүндүсүн кемитүү менен ишке ашырылат (схеманы кара).



3×3 тартиптеги квадраттык

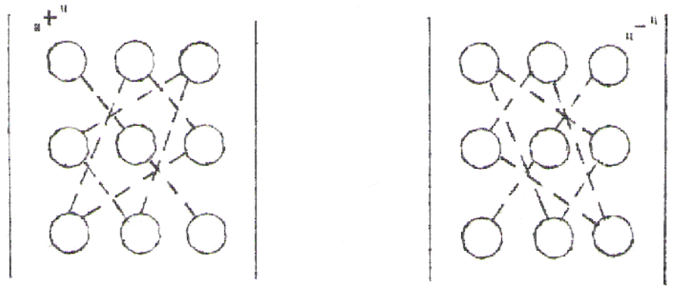
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицанын аныктагычы Сарриустун

$$|A| \text{ же } \det A \text{ же } \Delta_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \qquad (8)$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

эрежеси менен эсептелген сан болот. ***Сарриустун эрежеси – үч бурчтук эрежеси деп аталат, анткени аны эсептөө:***

а) $" + "$*диагоналда турган элементтердин көбөйтүндүсүнө, анын капталында үч бурчтуктардын чокулары сыяктуу абалда жайгашкан элементтердин көбөйтүндүлөрүн кошобуз*;



б) $" - "$ *диагоналда турган элементтердин көбөйтүндүсүнөн, анын капталында үч бурчтуктардын чокулары сыяктуу абалда жайгашкан элементтердин көбөйтүндүлөрүн кемитебиз (схемада көрсөтүлгөн).*

Натыйжада аныктагычтын сандык мааниси: келип чыккан а) - суммасынан б) – айырмасын кемитүү менен табылат.

Квадраттык матрицалардын гана аныктагычтарын түзүп сандык чоңдуктарын аныктоого болот. Ал эми квадраттык эмес матрицанын аныктагычын же чоңдугун эсептөө үчүн, матрицаны квадраттык матрицага келтирүүчү теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүшөт.

Ошентип, $1 \times 1 -$ тартиптеги аныктагыч $|a_{11}| = a_{11}$ санын өзү, $2 \times 2 -$ тартиптеги аныктагыч (7) де эсептелген сан, $3 \times 3 -$ тартиптеги аныктагыч (8) де табылган сан болушат. Бирок $4 \times 4 -$ тартиптеги аныктагычтардан жогорку тартиптеги аныктагычтарды эсептөө үчүн, (7) менен (8) ге окшоп келтирилип чыгарылган формулалар жок. Жалпы учурда каралган $n \times n -$ тартиптеги аныктагычтар, кайсы бир жолчолорун же мамычаларын минорлору боюнча ажыратып, улам тартиптерин төмөндөтүп, тартиптери 2×2 , же 3×3 болгон аныктагычтардын суммасы катарында эсептелет. Ал үчүн аныктагычтын $a_{ij} -$ элементине карата минору жана алгебралык толуктоочу деген түшүнүктөрдү киргизебиз:

Def – 1. *$det\,A$ аныктагычын $a_{i\,j}$ элементинин $M_{i\,j}$ минору деп, берилген $det\,A$ аныктагычтын $a_{i\,j}$ элементи жайгашкан i - жолчо менен j - мамычаны сызып салгандан кийин келип чыккан аныктагычты айтабыз.*

Ошентип $M_{i\,j}$ минору берилген $det\,A$ аныктагычына караганда бир жолчого жана мамычага кемип, тартиби бирге төмөндөгөн аныктагыч болот.

Мисалы: Үчүнчү тартиптеги

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

аныктагычтын $a_{21} = -1$ элементинин минору $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ экинчи тартиптеги аныктагыч же 4 саны болот.

Def – 2. *Δ аныктагычын $a_{i\,j}$ элементинин алгебралык толуктоочу $A_{i\,j}$ деп, $i+j$ саны жуп болсо $M_{i\,j}$ минорун өзүн, ал эми так болсо “$-M_{i\,j}$” минорун айтабыз, б.а.*

$$A_{i\,j} = (-1)^{i+j} M_{i\,j} \quad \textit{болот.} \qquad (9)$$

Жогорудагы мисалдагы аныктагычтын $a_{21} = -1$ элементинин алгебралык толуктоочу: $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$ сандык маанисине ээ болгон экинчи тартиптеги аныктагыч болот. (9) теңдештигинен көрүнгөндөй, $M_{i\,j}$ минору менен $A_{i\,j}$ алгебралык толуктоочу барабар болгон же белгилеринен гана айырмаланган аныктагычтар (сандар) болушат.

Мисал катары, $3 \times 3 -$ тартиптеги аныктагычты 1 – жолчосун минорлору боюнча ажыратып, $2 \times 2 -$ тартиптеги аныктагычтардын суммасы катарында эсептеп көрөлү:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \;\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32} \;\, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} +$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13} = a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{33} - a_{3i}a_{23}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}\cdot a_{32} - a_{3i}a_{22}) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} -$$

$$- a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

Мындай эреже менен эсептегенде, аныктагыч кайсыл жолчо (мамыча) менен ажыратылганына карабай, бир эле сандык натыйжага ээ болот.

Теңдемелер системасы жөнүндө түшүнүк

Матрицалар жана аныктагычтар менен болгон амалдар, алардын касиеттери, элементардык өзгөртүп түзүүлөр сыяктуу аракеттердин баары, кубулуштарды жана окуяларды матрицалардын касиеттерине таянып, санариптик техникаларды түзүү жана сызыктуу тендемелер системасын чыгарууга арналган деп айтсак болот.

Мисалы, картошканын жаңы өнүм – уругун өндүрүп тараткан Европадагы илимий тажрыйба чарбасынан Кыргызстанга ташып келип сатылган картошканын базар баасынын түзүлүү наркын моделдештирели:

Айталы, тажрыйба чарбасынын x_1- жеке ишкердин чыгымы, x_2- салык чыгымдары, x_3- болжогон пайдасы, b_i- сатылуу наркы болсун ($b_1 = 10\ c,\ b_2 = 15\ c,\ b_3 = 20\ c$). Анда бул окуянын математикалык

$$\begin{cases} x_1 \;+\; x_2 \;+\; 4x_3 = 10 - \text{Европадагы баа,} \\ 0\cdot x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 = 15 - \text{тобунан сатуу баасы,} \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 3x_2 = 20 - \text{базарда сатуу баасы} \end{cases}$$

тилде, үч белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасы катары жазып, ушундай чыгымдар жана үстөк кошуулардан кийин, болжогон пайда алынабы ? – деген суроого жооп издейли. Теңдемелер системасын матрицалык көрүнүштө $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}}_{B}$ жазып, кыскача $A \cdot X = B$ деп белгилөөгө болот. Мында A – "*теңдемелер системасын матрицасы*", X – "*белгисиздердин матрицасы*", B – "*бош мүчөлөрдүн матрицасы*" деп аталышат.

Теңдемелер системасы чыгарышка ээ (биргелешкен) болушу үчүн, анын матрицасынын аныктагычы $det\,A = \Delta \neq 0$ болушу керек.

а) Теңдемелер системасын аныктагычын эсептесек:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 -$$

$-2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \neq 0$ келип чыгат. Демек, теңдемелер системасынын чечимдери жашайт.

б) $x_1,\ x_2, x_3 -$ белгисиздерин коэфициенттери турган мамычалардын ар бирин кезеги менен бош мүчөлөрдүн мамычасын алмаштырып, тиешелүү $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ аныктагычтарын маанилери болушкан

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 15 & 1/2 & 1/4 \\ 20 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 15 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 20 - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 -$$

$$-2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 - 15 \cdot 1 \cdot 3 = 15 + 120 + 5 - 40 - 5 - 45 = 50,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 0 & 15 & 1/4 \\ 0 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \cdot 4 + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 \cdot 15 \cdot 4 -$$

$$-20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 \cdot 10 \cdot 3 = 45 - 5 = 40,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1/2 & 15 \\ 0 & 2 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 + 0 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 15 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 -$$

$-2 \cdot 15 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 20 = 10 - 30 = -20$ сандарын табабыз.

Мындан теңдемелер системасы $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{50}{1} = 50$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{40}{1} = 40$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-20}{1} = -20$ чечимдерине ээ болору келип чыгат. Демек мындай кыял бизнес планы менен иш кылуудан пайда алуу мүмкүн эмес экендигин көрөбүз.

Албетте, Кыргызстандын базарындагы картошканын баасы менен Европадагы тажрыйба чарбасы өндүргөн картошканын өнүм - уругунун баасынын арасындагы байланыштарды башкача моделдештирүүгө да болот. Бирок, аны теңдемелер системасы көрүнүштө моделдештирүү, окуяны толук жана ачык түшүнүүгө, кайсы жерде катачылык кеткенин аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Анткени, теңдемелер системасында баштапкы өндүрүүчүнүн чыгымдары менен ортомчулардын ар бир этаптагы чыгымдары салыштырылып, картошканын баасынын бардык этаптардагы сатуу наркынын калыптанышы боюнча маалыматтар камтылат.

Жалпы учурда m белгисиздүү сызыктуу n теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

көрүнүшпө жазылат. Аны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$ белгилөөсүн киргизүү менен,

$A \times X = B$ – матрицалык теңдеме көрүнүшүндө жазууга болот. Мында b_j - бош мүчөлөр ($j = 1, 2, \ldots, n$), x_i – белгисиздер ($i = 1, 2, \ldots, m$), A матрицасын элементтери болгон a_{ij} сандары теңдемелер системасын коэффциенттери болушат. X матрицасы белгисиздер мамычасы, B матрицасы бош мүчөлөрдүн мамычасы, A теңдемелер системасын матрицасы деп аталышат.

Зарылдыкка жараша матрицалар жана алардын аныктагычы, сызыктуу теңдемелер системасы жөнүндө кеңири маалыматтарды: www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун "Жогорку математика боюнча окума" (1 – бөлүк, I, V – главаларынын, §1.5, §5.1. – §5.6.) китебинен акысыз окуп үйрөнсө же көчүрүп алса болот.

§7. Көптүктөрдү чагылтуунун таануу процессиндеги орду. Функциялар жана алардын айрым касиеттери

Чагылтуу түшүнүгү. Чөйрөдө болуп жаткан анча тааныш эмес кубулуштарды жана окуяларды, өзүбүзгө тааныш көптүктөрдүн элементтерине тиешелеш коюп, салыштырып үйрөнүү мүмкүнчүлүгүн түзгөн мыйзам - эрежелер, математикада чагылтуу аппараты же амалы катарында түшүндүрүлүп келет. Чагылтуу аппараттарын жардамы менен кубулуштарды үйрөнүүдө чоң катачылыктарга жол бербөө үчүн, чагылтуу эрежесине **негизги шарт** коюлат. Айталы F чагылтуу эрежеси X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтсын дейли, анда F чагылтуусуна *" X көптүгүн ар бир x элементине, Y көптүгүнөн бирден гана, y элементин (x тин элесин) тиешелеш коёт "* – деген **негизги шарт** коюлат.

Чынында эле X көптүгүндөгү бир x кубулушуна (элементине), Y көптүгүндөгү $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ сыяктуу ар түрдүү көп маанидеги элестер (элементтер) тиешелеш коюлса, анда x кубулушун көптөгөн

элестеринин $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ кайсы бирине салыштырып, x ти үйрөнөрүбүз белгисиз болуп калат. Бул учурда чагылтуу аппаратын таанып билүү каражаты катарында колдонуу мүмкүн эмес. Ошондуктан **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларга гана токтолуп, аларды салыштырып үйрөнүүдө каталыгы азыраак математикалык таануу каражаты деп эсептейбиз. Мындан ары чагылтуу деп, **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларды гана түшүнөбүз.

Мындай чагылтуулар эки түргө бөлүнүшөт:

1. Өз ара бир маанилүү чагылтуулар: Айталы кандайдыр бир F эреже – мыйзамына таянып: X көптүгүн ар бир x элементинин жалгыз өзүнө, Y көптүгүнөн бирден гана y элементи тиешелеш коюлсун жана тескерисинче X көптүгүн ар бир жалгыз x элементине да, Y көптүгүнөн бир жалгыз y элементи тиешелеш коюлсун. Бул учурда F эреже – мыйзамы эки көптүктөрдүн элементтерин арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотуп, Y көптүгүн X көптүгүнө тескери чагылтуу да орун алып, ал да **негизги шартты канааттандырат.** F чагылтуусуна тескери чагылтууну F^{-1} деп белгилеп, символикалык көрүнүштөрдө гана тиешелеш коюлган

F: X →Y , F^{-1}: Y → X же $X \overset{F}{\leftrightarrow} Y$ жазып түшүндүрөбүз.

2. Бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулар: Чагылтылган тараптан гана бир маанилүү болгон чагылтуулар да **негизги шартты** канааттандырышып, таанып билүү практикасында колдонууга жарамдуу болушат. Анткени мындай чагылтууда X көптүгүндөгү ар түрдүү $x_1,\ x_2\ ,\ x_3,\ \dots\ \ ,x_n$ (элементтерине) кубулуштарына, Y көптүгүнөн бирден гана y_k элементи тиешелеш коюлуп, бир x_i *кубулушу* $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, бир гана y_k га чагылып же салыштырылып, **негизги шарт** бузулбайт. Бул учурда X *теги айрым* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots, x_n$ кубулуштары Y көптүгүндөгү бир эле y_k элементине чагылып, ал кубулуштарды элестери окшош, же теңдеш кубулуштар катары баалоого болот. Бирок, бул учурда тескери F^{-1} чагылтуусу **негизги шартты** канааттандырбайт, анткени тескери чагылтууда бир эле y_k кубулушунун бир канча x_i сыяктуу элестери болуп, алардын кайсынысын y_k кубулушун мүнөздөө үчүн аларыбызды билбейбиз. Демек, бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулардын тескериси каралбайт же жашабайт деп айтылат. Математикада чагылтууга катышып жаткан көптүктөрдүн түзүлүү структурасына (табыятына) карап, чагылтууларга өз – өзүнчө аттар берилет.

▪ ***Сан көптүктөрүн сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже - мыйзамдар функция деп аталышат.***

▪ ***Сандардан башка ар кандай элементтерден турган көптүктөрдү, сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже – мыйзамдар функционал деп аталышат.***

▪ ***Сандардан башка ар кандай элементтүү көптүктөрдү, өз ара бири – бирине чагылтуучу эреже – мыйзамдарды оператор деп коюшат.***

Мисалдар

1. Токтогул ГЭС ин суу көлмөсүндө топтолгон суунун көлөмүн аныктоо үчүн, атайын ченөө эрежеси киргизилген. Ал үчүн көлмөнүн түбүнөн жогору карай, R чыныгы сандарын көптүгүнөн алынган 0 санынан баштап, 19,7 миллиард санына чейинки сандар жазылган сызыктар менен белгиленген ченегич – эреже орнотулган Суунун ченегичтеги сан жазылган сызыкка тийүүсүнө карап, суунун көлөмү аныкталат.

Ошентип көлмөдөгү таанууга татаал болгон суунун көлөмдөрүн көптүгүн, атайын курулган F ченегич эреже – мыйзамын жардамы менен R сандарынын $[0\,,\ 19{,}7\,\text{млрд.}]$ сегментине чагылтып, суунун көлөмдөрүн көптүгү, сан көптүгүнө чагылтылгандыктан, ченегич эрежесин функционал деп эсептөөгө болот. Ал өз ара бир маанилүү функционал болуп, тескериси жашайт. Анткени ченегичтеги ар бир санга бир гана суу көлөмү туура келет (жана тескерисинче).

2. Векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежесине таянып, каалагандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ эки түгөй векторлордон турган көптүктү, R чыныгы сандарына чагылтууну ишке ашырууга болот.

Чынында эле, скалярдык көбөйтүү эрежеси боюнча

$\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\,^\wedge \vec{b})$ болгондуктан, векторлордун ар бир түгөйүнө $\{\vec{a}, \vec{b}\,\} \to \alpha$, бир гана α *чыныгы саны* ($\alpha \in$ R) туура келип, эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн сан көптүгүнө чагылдырган F функционалы келип чыгат. Бул эреже менен ишке ашырылган функционалдын тескериси жашабайт же тескериси колдонууга жараксыз болот, анткени скалярдык көбөйтүндүлөрү тең болгон түгөй векторлор көп кездешет. Ошондуктан скалярдык көбөйтүү эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн бир чыныгы санга чагылтуучу, бир тараптуу бир маанилүү функционал гана боло алат.

3. Адамдын колу менен жасалган таразаны F эреже – мыйзам катарында кабыл алып, өндүрүлгөн түшүмдөрдүн өлчөмдөрүн көптүгүн чыныгы сандарга салыштырып, үйрөнүүгө болот.

Чынында эле, айдоо аянттарынан жыйналган ар түрдүү өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү жөнүндө жеткиликтүү маалымат алуу үчүн, аларды таразага тартып, чыныгы сандарга чагылтып салыштырып көрөбүз. Таразанын таблосуна чыккан санга карап, өсүмдүктөрдүн түрүнө жараша, кайсы талаадан кандай түшүм алынганын тааныйбыз. Натыйжада “тараза” эрежеси түшүмдөрдүн көптүгүн чыныгы сандарга чагылтуучу функциональ экендигин баамдайбыз. Бул бир тараптуу бир маанилүү функциональ болот, анткени анын тескерисин таануу процессинде бир мааниде түшүнүү мүмкүн эмес. Себеби ар кандай айдоо талааларынан алынган, ар түрдүү өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү бирдей болуп калган учурда, алардын баары бир чыныгы санга туура келгендиктен, ал чыныгы сан боюнча кайсы айдоо талаасындагы, кандай өсүмдүктөрдүн түшүмү жөнүндө сөз болуп жаткандыгын толук биле албайбыз.

4. Вектордук көбөйтүү эрежеси боюнча, каалагандай түгөй $\vec{a}\,,\vec{b}$ векторлорунун көптүгүн, кандайдыр бир $\vec{c} = [\vec{a}\,,\vec{b}]$ векторлорун көптүгүнө чагылтууга болот $\{\vec{a}\,,\vec{b}\} \to \{\vec{c}\}$.

Чынында эле, вектордук көбөйтүүнүн F эрежесине ылайык, бир тегиздикте жатышкан каалагандай $\vec{a},\,\vec{b}$ түгөй векторлору менен оң үчтүктү түзүп, аларга перпендикуляр жайгашкан $\vec{c}$ векторун арасында бир тараптуу гана бир маанилүү тиешелештикти орнотуу мүмкүн, анткени вектордук көбөйтүндүлөрү барабар болгон көптөгөн түгөй векторлор болгондуктан, тескери чагылтуу **негизги шартты** канааттандырбайт. Мындай чагылтуу: түгөй векторлордун көптүгүн, векторлордун көптүгүнө чагылткан, бир тараптуу бир маанилүү F оператору болуп эсептелет.

5. $\mathrm{F}(x) = \int f(x)dx + C$ анык эмес интегралын эсептөө эрежесинин жардамы менен, ар кандай үзгүлтүксүз $f(x)$ функцияларын C турактуу санга чейинки тактыкта, $\mathrm{F}(x)$ – функцияларына чагылтууга болот. Мында $C - constanta$ (*каалагандай турактуу сан*) . Ошентип, бул чагылтуу функцияларды, функцияларга $\{f(x)\} \leftrightarrow \{F(x) - C\}$ турактуу санга чейинки тактыкта, өз ара бир маанилүү чагылтуучу оператор болот.

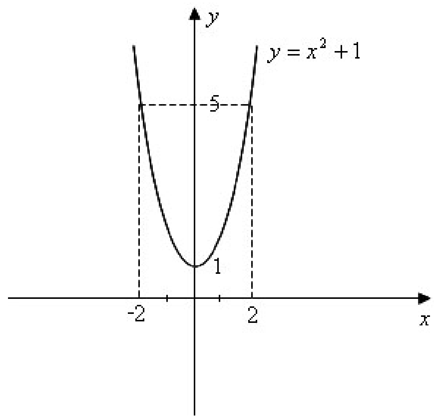
Ошентип керектөөгө жараша, таанып билүү процессинде колдонулган айла – амалдардын бири катарында, математикалык чагылтуу аппаратын аныктаган эреже – мыйзамдарын түзүү, ойлоп табуу изденүүчүлүгү улам өнүгүп кете бермекчи.

Функция жана аны түзүлүшү

Жалпы учурда, чагылтууну кеңири мааниде оператор деп атоого да болот, анткени жалпы учурда сан көптүктөрү деле ар кандай элементтүү көптүктөрдүн бири болот. Бирок көбүнчө чөйрөнү үйрөнүү процесси сандарга салыштырылып же ченелип таанылгандыктан, сан көптүктөрүндөгү чагылтууларга же функцияларга кененирээк токтолуп өтөбүз.

Функция кыргызча көз карандылык байланыш – деген маанини түшүндүрүп, чагылтуу аркылуу эки сан көптүктөрдүн арасында орнотулган көз карандылык байланышты аныктаган эреже – мыйзам катарында кабыл алынат. Негизги шартты канааттандырган чагылтуу аппаратын, сандык көптүктөрдү бири – бирине чагылтуучу учуру катарында каралуучу функция түшүнүгү, чөйрө таануу процессинде кеңири колдонуларын эске алып, ага өзүнчө аныктама бере кетели.

Def – 1. *Айталы X жана Y сан көптүктөрү берилсин дейли. Эгерде кандайдыр бир f эреже – мыйзамы жашап, анын жардамы менен X көптүгүн ар бир x элементине (санына) Y көптүгүнөн бирден гана y элементин (санын) тиешелеш коюучу байланышты орнотуу* *мүмкүн болсо, анда бул* f *эреже – мыйзамын,* X *көптүгүндө аныкталган функция деп айтабыз.*

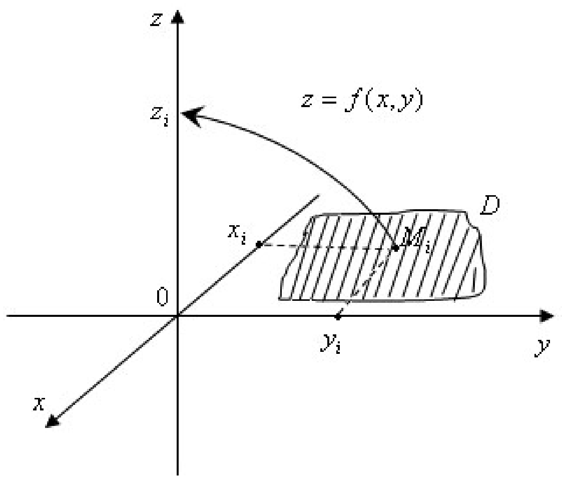


39 – чийме

Функцияны $y = f(x)$ символу менен белгилеп: " *игрэк барабар эф икстен* " – деп окуйбуз (орусчасы эф от икс). Бул жазылыш "эф икстен көз каранды" – деген сөздүн кыскача белгилениши катарында кабыл алынган. Анткени эркин тандалган x ке карата, ага тиешелеш коюлган y элеси аныкталгандыктан, x ти көз карандысыз чоңдук же функциянын аргументи, ал эми y ти көз каранды чоңдук же функциянын мааниси деп атайбыз. Ошентип X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = f(x)$ функциясы, бул эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланышын орнотуучу эреже – мыйзам болуп эсептелет. X көптүгү функциянын аныкталуу областы, Y көптүгү функциянын өзгөрүү областы деп аталышат. Функцияны f тамгасынан башка каалагандай чоң же кичине латын, орус, кыргыз тамгалары менен белгилей берүүгө болот. Бирок анын аргументин жана маанисин кичине тамгалар менен белгилеп келебиз. Мисалы $y = \ell(x)$, $y = \mathrm{g}(z)$, $y = a(l)$, $u = F(t, a, c)$, $y = f(x)$ ж.б.у.с.

Мисалы "Берилген санды квадратка көтөрүп, бирди кош" эреже – мыйзамы менен $y = x^2 + 1$ көрүнүшүндө жазылган квадраттык функция $X = R \equiv]-\infty, +\infty[$ чыныгы сандарын көптүгүн,

Y= $R_1 \equiv [1, +\infty[$ сандарын көптүгүнө бир тараптуу бир маанилүү чагылтат. Анткени анын тескери чагылтуусу $x = \pm\sqrt{y-1}$ эрежеси менен жүргөндүктөн, бир y санына эки $\pm x$ тер *тиешелеш коюлуп*, чагылтуунун негизги шарты аткарылбайт. Чынында эле X *көптүгү* деп Ox *огун,* Y *көптүгү деп* Oy огун алып, берилген функцияны декарттык координаталар системасында графикте көрсөтсөк (39 – чийме), анда бүтүндөй Ox огундагы чекиттер, Oy огунун оң бөлүгүндөгү $[1, +\infty[$ жарым сегменттин чекиттерине бир маанилүү чагылганын көрөбүз. Мында $x_1 = -2$ саны *бир гана* $y_1 = 5$ *санына* , $x_2 = 2$ *саны да бир* гана (*жалгыз*) $y_2 = 5$ санына чагылып, **негизги шарт** же бир маанилүүлүк сакталат. Бирок тескери $Y \to X$ чагылтуусу аткарылбайт, анткени Y көптүгүндөгү бир $y = 5$ саны, X көптүгүндөгү эки $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ сандарына чагылып, 5 санын чагылгандан кийинки элеси катарында “-2, 2” сандарын кайсынысын алуу керек экендиги белгисиз кала берет. Ошондой болсо да мындай эки маанилүүлүктү, X= $]-\infty,\ +\infty[$ аралыгын $X_1 =]-\infty,\ 0]$ жана $X_2 = [0,\ +\infty[$ эки аралыктарына бөлүү менен жоюуга болот. Ал үчүн $y = x^2 + 1$ функциясын $X_1 \leftrightarrow Y$ *жана* $X_2 \leftrightarrow Y$ өз ара бир маанилүү чагылтууларын, өз өзүнчө ишке ашыруучу эки башка функциялар катарында түшүнүү керек. Бул эки башка функциялар өздөрүнчө ар бир белгиге карата $x = -\sqrt{y+1}$ жана $x = +\sqrt{y+1}$ эки тескери функцияларына ээ болушат.



40 – чийме

Эгерде X, Y көптүктөрү бир өлчөмдүү (сызыктуу) R мейкиндигинде жайгашышса (X,Y $\subset R$), анда $y = f(x)$ бир өзгөрүлмөлүү функция деп аталат. Ал эми Y сызыктуу R мейкиндигинде жайгашканы менен:

1. X көптүгү (областы) эки өлчөмдүү R^2 тегиздигинде болсо ($(x,y) \in X \subset R^2$), эки өзгөрүлмөлүү $z = f(x,y)$ функция;

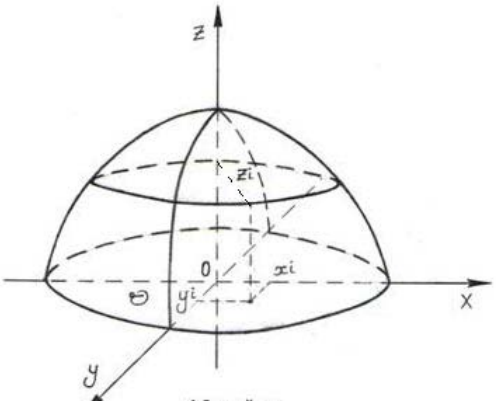
2. X областы үч өлчөмдүү R^3 мейкиндигинде жайгашса ($(x,y,z) X \subset R^3$), үч өзгөрүлмөлүү $u = f(x,y,z)$функция;

3. Жалпы учурда $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset R^n$ болсо, анда n өзгөрүлмөлүү $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция деп аталышат.

Жогорудагы мисалда бир өзгөрүлмөлүү $y = x^2 + 1$ функция каралган эле.

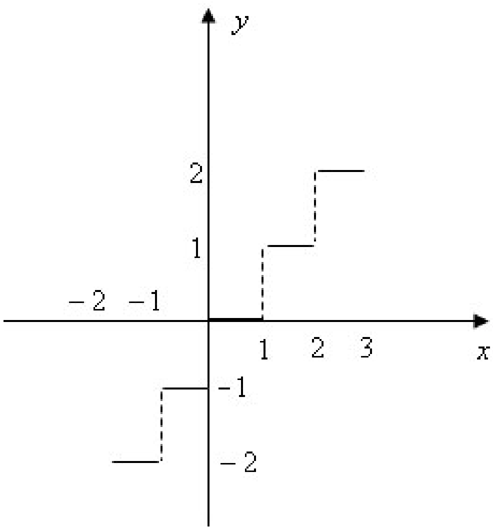
Эки өзгөрүлмөлүү функциянын чагылтуу механизмин, үч өлчөмдүү декарттык координаталар системасында көрсөтөлү (40 – чийме). Чагылуучу көптүк (область) катарында Oxy тегиздигинде жайгашкан D областын, ал эми D областынын чагылткандан кийинки элеси деп Oz аппликата огундагы чекиттерди (R сандарын) алалы. $D \subset R^2$

болгондуктан, анын ар бир М чекити $(x;y)$ координаталарына ээ, ошондуктан бул областта аныкталган функция же чагылтуу эреже – мыйзамы $z = f(M) = f(x,y)$ көрүнүштө жазылат. Чагылтуу механизми D областындагы ар бир M_i $(x_i;y_i)$ чекитине, Oz огунан бир гана z_i чекитин тиешелеш коюу аркылуу ишке ашырылат. Мейкиндиктеги координаталары $(x_i;y_i;z_i)$ болгон чекиттердин көптүгү, $z = f(x,y)$ функциясына график болгон бетти түзөт.



41 – чийме

Мисалы $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы, Oxy тегиздигиндеги борбору O чекити, радиусу r =1 болгон тегеректин D = $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, (x,y) \in R^2\}$ ичин элестеткен областын, Oz огунда жайгашкан $[0,1]$ сегментиндеги чыныгы сандарга чагылтып, 41 – чиймедей элестетилип сүрөттөлөт.



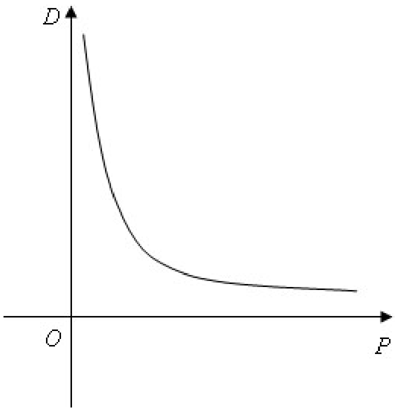
42 – чийме

Ошентип канча өзгөрүлмөлүү функция болсо да, аныкталуу областы (чагылуучу область) көп өлчөмдүү болгону менен, өзгөрүү областы (чагылтылгандан кийинки элеси) бир өлчөмдүү R мейкиндигиндеги сандар болушуп $(y \epsilon R)$, көп өзгөрүлмөлүү функциялар, көп ченемдүү мейкиндиктеги абалдарды, кадимки чыныгы сандарга салыштырып үйрөнүүчү математикалык аппарат болуп эсептелишет.

Функцияларды түзүү ыкмалары

1. Аналитикалык ыкма. Бул ыкмада X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы көз карандылык байланыштар, эреже – мыйзам катарында эсептелген формулалар аркылуу ишке ашырылат.

Мисалы $y = sinx, \;\; u = (yz)^3 + \frac{\sqrt{x}}{y^2 - x}$.



2. Кара сөз жүзүндөгү ыкма. Айрым учурларда функцияны формула менен берүүгө мүмкүн болбой, ага кошумча кара сөз менен түшүндүрмө берүүгө туура келет. Айрыкча жаңы формулаларга сөзсүз кара сөздүү баяндамалар жазылат. Мисалы x санына, анын бүтүн бөлүгүн тиешелеш коюучу көз

43 – чийме

карандылык байланышын формула менен жазып көрсөтө албайбыз. Ошондуктан ага $y = [x\,] \; = E(x)$ ("x тин бүтүн бөлүгү" – деп окулат), көрүнүштөгү түшүндүрмө кара сөзду коштоп жазабыз. Бул функциянын графиги тепкичтүү көрүнүштө болот (42 – чийме).

3. Графиктик ыкма. Эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык эреже – мыйзамдарын чийилген графиктер аркылуу орнотууга да болот. Мисалы адамдын жүрөгүн иштөө ыргагы кардиограмма сызыгы менен аныкталып, врач ошол сызыкка карап жүрөктүн абалын баалайт. Иш жүзүндө жүрөктүн иштөө абалдарын көптүгү менен, кардиограмма сызыгында көрсөтүлгөн өлчөм сандардын арасында тиешелештик же көз карандылык байланышын аныктоочу функция орнотулган болот. Ошондой эле экономикалык көрсөткүчтөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын (функцияны) графикте көрсөтүү ыңгайлуу. Мисалы D – керектөөлөрдүн көптүгү менен, Р өндүрүлгөн товарлардын көптүгүнүн арасындагы көз карандылык байланыштарын 43 – чиймедеги графикте көрсөтүү менен, товарлардын саны көбөйгөн сайын, аны керектөө азаярын дароо байкайбыз.

4.Таблицалык ыкма. Бул ыкма менен чектүү сандагы элементтери бар көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын орноткон функцияларды берүү ыңгайлуу. Мындай учурда функцияны эч бир универсалдуу формулада, кара сөздө, графикте берүү мүмкүнчүлүктөрү болбой калат же ыңгайсыз болушу мүмкүн. Мисалы беш жылдык ичинде фермада өндүрүлгөн товарлардын түрлөрүнүн көлөмдөрүн формула менен көрсөтүү

Жыл / Товар	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Сүт(тонна)	57	56,8	56,9	62	63	74
Эт(тонна)	20	15	18	21	22	23,8

мүмкүн эмес, же графикте көрсөтүү ыңгайсыз. Ошондуктан аны таблицада гана көрсөтө алабыз. Төмөндөгү таблицада *(жылдар) = ƒ (товар) = ƒ(сүт, эт)* көрүнүшүндөгү эки өзгөрүлмөлүү функция көрсөтүлгөн.

5. Айкын эмес көрүнүштө жазуу ыкмасы. Функцияларды аналитикалык ыкмалар менен жазууда x, y өзгөрүлмөлөрүн бири – бири менен айкын туюнтуу татаал болгон учурлар кездешет.

Мисалы $x^3 \cdot siny = e^{xy} - 1$ теңдештигинен x *ти же* y ти табуу, же бири – бири менен айкын туюнтуу кыйын. Мындай туюнтма көрүнүшүндөгү эреже – мыйзамдары менен берилген эки өзгөрүлмөлөрдүн көз карандылыгын, $F(x, y) = 0$ көрүнүшүндө жазып, айкын эмес көрүнүшүндө берилген функция деп айтабыз. Айкын берилген бир өзгөрүлмөлүү функцияны да $y = f(x) \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ айкын эмес көрүнүштө жазууга болот. Мисалы, жогорудагы теңдештик менен берилген эки x, y өзгөрүлмөлөрүнүн арасындагы көз карандылык байланышын

$F(x, y) \equiv x^3 \cdot siny - e^{xy} + 1 = 0$, көрүнүштөгү айкын эмес функция деп эсептейбиз. Ошондой эле айкын көрүнүштө берилген бир өзгөрүлмөлүү $y = x^4 - 7$ функциясын да, $F(x, y) \equiv y - x^4 - 7 = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес формада жаза алабыз. Ошентип эки өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x, y, z) = 0$, үч өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x, y, z, t) = 0$, ж.б. у. с. n өзгөрүлмөлүү функцияны $n + 1$ өзгөрүлмөлүү $F\left(u, x_1, x_2, x_{3,} \dots, x_n\right) = 0$ көрүнүштөрдөгү айкын эмес функциялар катарында жазууга болот. Бизге белгилүү $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{y^2} - 1 = 0 -$

эллипстин, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{y^2} - 1 = 0 -$ гиперболанын теңдемелери даэки өзгөрүлмөлүү $F(x,y) = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес функциялар болушат.

5. Параметрдик ыкма менен берүү. Функцияны аналитикалык ыкмада берүүнүн дагы бир көрүнүшү катарында, параметрдик жол менен берилген функцияларды айтууга болот. Бул учурда $y = f(x)$ функциясындагы өзгөрүлмөлөрдүн $x \in X,\ y \in Y$ экөөсү тең, үчүнчү бир башка өзгөрүлмөдөн көз каранды болушат. Мисалы R^2 тегиздигинде кыймылдап бара жаткан $(x; y)$ координаталуу чекит, t убактысынын ар бир ирмемимде өзгөрүп, t убактысынан көз каранды $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\quad t \in T$ болот. Ошентип убакыттын кайсы бир Т аралыгында кыймылда болгон чекит координаталары менен гана мүнөздөлбөстөн, параметр (бул жерде убакыт) деп аталган t өзгөрүлмөсүнө да байланыштуу болот. Мында t параметри Т аралыгында өзгөргөн кезде, x, y өзгөрүлмөлөрү тиешелүү түрдө $X,\ Y$ көптүктөрүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет. Мисалы,

$x^2 + y^2 = 16$ айланасында жаткан ар бир $(x; y)$ чекити, t параметри (бурчу) менен $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ көз карандылык байланышында болот жана t көрсөтүлгөн аралыкта өзгөргөн учурда: $x \in X = [-4, +4]$, $y \in Y = [-4, +4]$ көптүктөрүн чегинен чыгып кетпейт.

Эскертүү: Жогоруда функцияларды декарттык координаталар системасында түзүү ыкмалары каралды. Ал эми функцияны полярдык же башка координаталар системасында түзүү талап кылынса, анда §1.3 , 1 – бөлүктө көрсөтүлгөн байланыштар эске алынат.

Мисалдар

1. $y = arcsin\sqrt{x-1}$ функциясын аныкталуу жана өзгөрүү областын тапкыла.

Чыгаруу: ►$siny = \sqrt{x-1}$ ***болгондуктан,*** $|siny| \le 1$ шартын ага тең болгон $\left|\sqrt{x-1}\right| \le 1$ барабарсыздыгы менен алмаштырабыз. Экинчи жактан, оң сандан гана квадраттык тамыр чыккандыктан, $x -$

$1 \geq 0$ болушу керек. Бул эки талапты бириктирсек: $\begin{cases} x-1 \leq 1, \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ болуп, $1 \leq x \leq 2$ келип чыгат. Ал эми y болсо $Y =]-\infty, +\infty[$ аралыгындагы маанилерди кабыл алат. Демек берилген функциянын аныкталуу областы $X = [1, 2]$, өзгөрүү областы $Y =]-\infty, +\infty[$ аралыктары болушат. ◄

2. ▪ Туруктуу температура кезинде, поршендүү идиште кысылган идеалдык газдын P басымы менен V көлөмүнүн арасында Бойль – Мариоттун законуна ылайык, $P \cdot V = C - constanta$ көз карандылык байланышы орун алат. Аны

$$P = \frac{C}{V} = \mathrm{P}(V) \quad \text{жана} \quad V = \frac{C}{P} = V(P) \quad (1)$$

көрүнүштөрдө жазып, басымдардын көптүгүн көлөмдөрдүн көптүгүнө жана тескерисинче эки тараптан тең өз ара бир маанилүү чагылтуучу (1) эреже – мыйзамдарын алабыз. Басымдар менен көлөмдөрдүн сандык чендери чагылтылып жаткандыктан, (1) ди оператор дебей, бир өзгөрүлмөлүү функция деп атайбыз. ▪

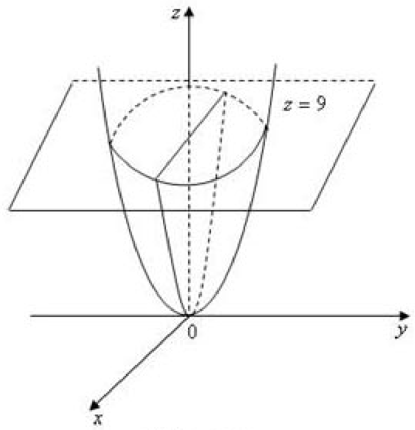
3. ▪ Поршенде кысылган газдын массасын температурасы туруктуу эмес болгон учурда, анын көлөмү V менен Р басымын, Т – абсолюттук температурасын арасындагы байланыш Клапейрондун формуласы боюнча $P \cdot V = RT$ $(R = const.)$ көрүнүштө жазылат. Эгерде V менен Т ны көз карандысыз чоңдуктар деп ойлосок, анда басымды $\mathrm{P} = \frac{RT}{V} = P(V, T)$ эки өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. ▪

4. ▪ Кесилген конустун V көлөмүн, анын эки негиздерин радиустары - R, r жана бийиктиги h – өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды деп,

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = V(R, r, h)$ үч өзгөрүлмөлүү функция катарында кароого болот. ▪

5. ▪ Кайсы бир телонун R^3 мейкиндигиндеги физикалык абалына байкоо жүргүзүп жатып, алардын бир чекиттен экинчи чекитке которулуп жатканда касиеттерин өзгөрүлөрүн байкайбыз (Мисалы

тыгыздыгы, температурасы, электр талаасын потенциалы ж.б.у.с.). Ошондуктан бул физикалык абалдарды ошол чекиттердин x, y, z координаталарына карата үч өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. Кээде физикалык абалдар төртүнчү бир t убакыт чоңдугунан да көз каранды болгондуктан, жалпы учурда аларды x, y, z, t төрт өзгөрүлмөлөрдөн функция деп эсептөөгө болот. ▪



44 – чийме

6. $z = x^2 + y^2$ функциясынын аныкталуу жана өзгөрүү областтарын аныктап, $z = 9$ деңгээл сызыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу: ► Каалагандай эле чыныгы сандарды квадратка көтөрүп кошууга болгондуктан, функциянын аныкталуу областы бүтүндөй R^2 тегиздиги болот. Ал эми өзгөрүү областы $\mathrm{Z} = [0, +\infty[$ аралыгындагы чыныгы сандар болушат. $z = 9$ маанисине туура келген деңгээл сызыгы $9 = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген, радиусу $r = 3$, борбору Oz огунун $z = 9$ чекитинде жайгашкан айлана болот. Ал айлана $z = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген гиперболалык параболоиддин, $z = 9$ тегиздиги менен кесилүүсүнөн келип чыгат (44 – чийме). ◄

7. $u = \frac{z+1}{x^2 - y^2}$ үч өзгөрүлмөлүү функциянын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу: ► Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтма $x^2 - y^2 \neq 0$ болгондуктан, $x - y \neq 0$ *жана* $x + y \neq 0$ шарттары коюлат. Бөлчөктүн алымындагы z өзгөрүлмөсүнө эч кандай шарт коюлбагандыктан, аныкталуу областы болуп, R^3 мейкиндигиндеги $x \neq \pm y$ шартын канааттандырган бардык чекиттердин көптүгү ($x = \pm y$ түзүндө жатпаган чекиттер) эсептелет.◄

8. Эгерде металл стержень $T = 0^0$ температурада l_0 узундугуна ээ болуп, аны $T = \theta^0$ градуска ысыткан кезде, l узундугуна ээ болсо, анда стержендин узаруу процессин мүнөздөгөн сандардын $\{l\}$ көптүгү

менен, $[0^0, \ \theta^0]$ сегментиндеги температураны мүнөздөгөн сандардын арасындагы өз ара бир маанилүү көз карандылык байланышын

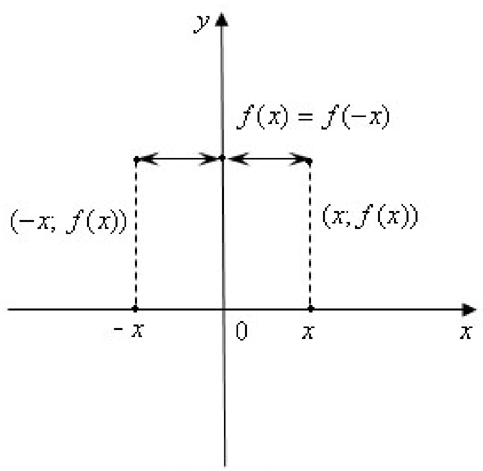
$l = l_0(1+\beta\theta) = l(\theta)$ бир өзгөрүлмөлүү функция катарында көрсөтүүгө болот.

9. Үч бурчтуктун бир чокусунан чыккан *a жана b* жактары турактуу болуп, алардын арасындагы φ бурчу өзгөрүлмө мүнөзгө ээ болсо, анда үч бурчтуктун үчүнчү с жагы, φ өзгөрүлмөсүнөн көз каранды же функция болот. Чынында эле косинустар теоремасы боюнча

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi$ болгондуктан, аралыкты оң деп

с = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi}$ = с (φ) – бир өзгөрүлмөлүү функциясына ээ болобуз.

Ошентип, жогоруда каралган мисалдарда көрүнгөндөй, сандык көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарын үйрөнүү, практикалык муктаждыктардан же зарылчылыктардан улам келип чыгат. Ошондой эле, көз карандылык байланышында болгон өзгөрүлмөлөрдүн биринчиси эркин көз каранды эмес чоңдуктар (сандар), экинчиси көз каранды чоңдуктар (сандар) болорун байкайбыз.



45 – чийме

Функциялардын өзгөчөлүктөрү баары эле көптүктөрдү бири – бирине чагылтуу аркылуу байланыштыруу милдетин аткарышып, чөйрө кубулуштарын сандарга салыштырып таануу мүмкүнчүлүгүн түзгөн математикалык модель – каражаттар болушкандыктан, кубулуштар сыяктуу эле алардын да жеке өздөрүнө гана тиешелүү өзгөчөлүктөрү болот. Алардын айрымдарын санап өтөлү:

1) $\forall x \in X, \exists M \in R: |f(x)| \leq M \Rightarrow f(x) -$ **чектелген функция,** ал эми чектөөчү М табылбаса **чектелбеген функция** деп аталат.

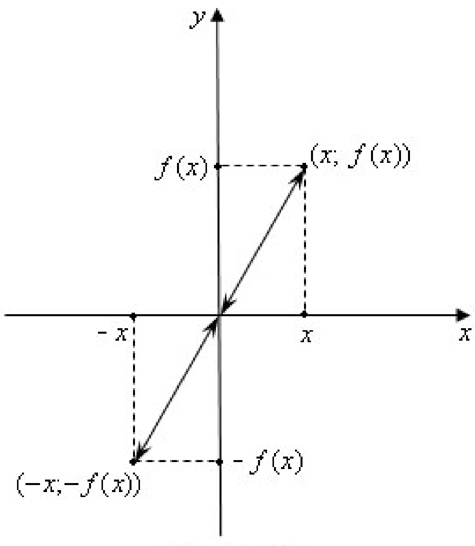
2) Монтондуу функциялар:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \le f(x_2) \text{ жай монотондуу өсүүчү,} \\ f(x_1) \ge f(x_2) \text{ жай монотондуу кемүүчү.} \end{cases}$$

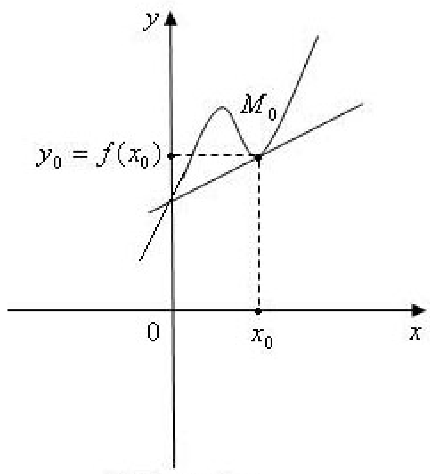
$$\forall\, x_1, x_2 \in X:\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ шыдыр өсүүчү,} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ шыдыр кемүүчү;} \end{cases}$$

3) $\forall\, x \in X$: $f(-x) = f(x)$ шарты аткарылса, анда X көптүгүндө $f(x)$ функциясын ***жуп функция*** (45 – чийме)**,** ал эми $f(-x) = -f(x)$ болсо, ***так функция*** болот дейбиз (46 – чийме);

Демек жуп функциянын графиги $Oy-$ ордината огуна карата симметриялуу, ал эми так функциянын графиги O координата башталмасына карата симметриялуу жайгашат.



46 – чийме



47 – чийме

4) Мезгилдүү функциялар: $y = f(x)$ *функциясы* $(x \in X, y \in Y)$ *берилип, X көптүгүндөгү бардык* x *элементтери(сандары) үчүн кандайдыр бир T саны табылып (* $T \neq 0$*),* x *жана* $x + \mathrm{T}$ *эки башка аргументтерге функциянын бир эле* $f(x) = f(x + \mathrm{T})$ *мааниси туура келсе, анда* $f(x)$ *функциясын X көптүгүндө T – мезгилдүү функция деп айтабыз. T саны функциянын мезгили деп аталат;*

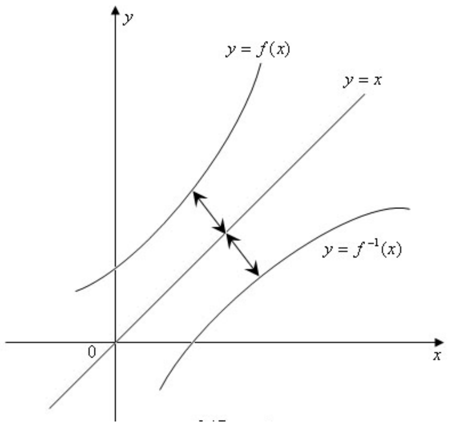
Мезгилдүү функциянын графиги ар бир T аралыгынан кийин, кайра мурдагыдай абалда кайталанып бара берет. Мисалы $y = \sin x$,

$y = \cos x$ функцияларынын графиктери $\mathrm{T} = 2\pi$ аралыктан соң кайталана бергенин билебиз.

5) Асимптота сызыгы: $y = f(x)$ *функциясын асимптота сызыгы деп, анын графиги менен кесилишпей, бирок ага чексиз жакындап жандап келген түз сызыкты айтабыз. Асимптота түзү пределдик абалда функциянын графигине тийип, жабыша уланат деп элестетебиз.*

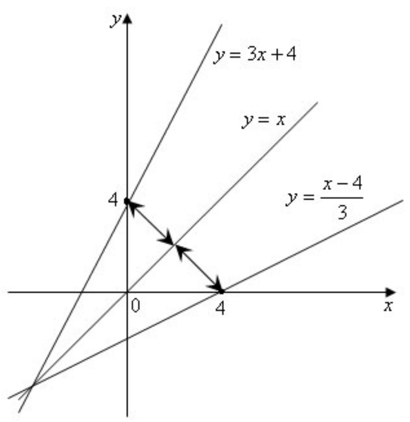
Бардык эле функциялардын асимптоталары боло бербейт.

6) Жаныма түз: $y = f(x)$ *функциясын графигинде жайгашкан* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинен (мында* $y_0 = f(x_0)$ *) жүргүзүлгөн жаныма түз сызыгы деп, бул чекиттин өзүндө жана анын жакынкы чеке белинде, берилген функциянын графигин кесип өтпөгөн, бирок анын графиги менен кесилишпесе да бир гана* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитине тийип өткөн, же бир гана* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *жалпы чекитине ээ болгон түз сызыкты айтабыз (47 – чийме)*. Жаныма түздүн теңдемеси $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ көрүнүштө жазылып, $k = f'(x_0)$ – бурчтук коэффициент болот. Бардык эле функцияларга жаныма түз жүргүзө берүүгө болбойт.



48 – чийме

7) $\boldsymbol{y = f(x)}$ теңдештин x карата чыгарып, $y = f(x)$ ке тескери функцияны таап, аны $x = f^{-1}(y)$ көрүнүштө белгилеп жазабыз. $y = f(x)$ функциясына Бирок x менен аргументти, y менен функциянын маанисин белгилеп көнүп калгандыктан, тескери функцияны $y = f^{-1}(x)$ көрүнүштө жазууну кабыл алышкан. Мындай x менен y тин ордундарын алмаштырып жазууд жазууда $0x$ менен $0y$ окторунун ордундары алмашып, өз ара тескери функциялардын графиктери $y = x$ түзүнө карата симметриялуу жайгашып калышат (48 – чийме).

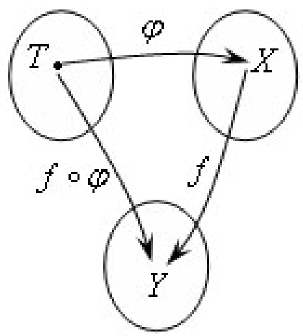


49 – чийме

Мисалы $y = 3x + 4$ функциясына тескери болгон функцияны табайлы. Анын аныкталуу областы X = $]-\infty, +\infty[\equiv R$, өзгөрүү областы Y = $]-\infty, +\infty[\equiv R$ бардык чыныгы сандардын көптүктөрү болушуп, ар бир x тин өзүнө жалгыз гана бир y тиешелеш болгондуктан, өз ара бир маанилүү функция болот. Берилген теңдештикти теңдеме катарында чыгарсак, $x = \frac{y-4}{3}$ тескери функциясы келип чыгып, анын графиги берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиги менен дал келет. Бирок тескери функцияны жазуунун кабыл алынган эрежесин сактасак, б.а. x менен yөзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, тескери функцияны $y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$ көрүнүштө жазсак, анда анын графиги менен, берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиктери, $y = x$ түзүнө (биссектрисасына) карата өз ара симметриялуу жайгашышат (49 – чийме).

8) Функциялардын суперпозициясы же татаал функциялар

Аныкталуу областы X жана өзгөрүү областы Y болгон $y = f(x)$ функциясы берилсин дейли. Эгерде функциянын аргументи болгон x көз каранды эмес өзгөрүлмөсү да, кайсы бир T көптүгүндө аныкталган φ эреже – мыйзамы боюнча t өзгөрүлмөсүнөн көз карандылык байланыштагы $x = \varphi(\mathrm{t})$ көрүнүштөгү функция болсо, анда $y = f(x)$ функциясын t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция деп атап, $y = f(\varphi(\mathrm{t}))$ көрүнүштө жазабыз. Мында t өзгөрүлмөсү T көптүгүндө өзгөргөн кезде, x өзгөрүлмөсү X көптүгүнүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет.



50 – чийме

Кээде жогорудагыдай f жана φ функцияларынан турган татаал функцияны бул экөөнүн суперпозициясы деп атап,

$y = f \circ \varphi$ көрүнүштө белгилейбиз. Функциялардын суперпозициясын

схемада T $\xrightarrow{f \circ \varphi}$ Y $\Leftrightarrow$ T $\xrightarrow{\varphi}$ X $\xrightarrow{f}$ Y көрсөтүп, 50 – чиймесинде сүрөттөйбүз. Айрым учурларда экиден көп бир канча функциялардын суперпозицияларынан турган татаал функцияларды жолуктурууга болот.

Мисалдар

1. $f(x) = e^{sin\sqrt{x}}$ татаал функциясын $\mathrm{u} = \sqrt{x},\ v = \sin\mathrm{u},\ \mathrm{g} = e^{v}$ деп, үч функциялардын суперпозициясы катарында кароого болот

$f \Leftrightarrow \mathrm{u} \circ v \circ \mathrm{g}.$

2. $y = \log_7(x^{\,2} + 3\,x + 4)$ татаал функциясы $\mathrm{u} = x^{\,2} + 3x + 4$ жана

$\mathrm{g} = \log_7\mathrm{u}$ функцияларынын суперпозицияларынан турат $y \Leftrightarrow \mathrm{u}\circ\mathrm{g}$.

Биз функциялар жана алардын касиеттери, боюнча кыскача маалыматтар менен чектелдик, функция жөнүндө кеңири маалыматтарды: www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун “Жогорку математика боюнча окума” (2 – бөлүк, VI – глава, §6.1. – §6.2.) китебинен акысыз окуп үйрөнсө жана көчүрүп алса болот.

§8. Функциялардын предели, үзгүлтүксүздүгү, туундусу, интегралы жөнүндөгү түшүнүктөр

Функциянын чекиттеги предели

X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = f(x)$ функциясы берилсин. X жана Y көптүктөрү R чыныгы сандарын мейкиндигинде кармалып тургандыктан, алардын элементтерин коңшулук деңгээлге чейин таануу мүмкүн эмес экендигин билебиз. Ошондуктан X көптүгүндө аргументтердин a чекитине жакындап келип жыйналуу, же алыстоо процессин, x аргументтери a чекитине

$$x_1\,,\ x_2\,,x_3\,,\qquad \ldots\,,\qquad x_n\,,\ldots\ \rightarrow\ a\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_n\ = a \qquad (1)$$

удаалаштыктын мүчөлөрү боюнча жүрүп олтуруп жетет же деп элестетебиз. Анда ушул чекиттерге тиешелүү болгон функциянын маанилери да, Y көптүгүндө $y_1 = f(x_1\,),\ \ y_2 = f(x_2\,),\ y_3 = f(x_3\,), \ldots,$

$y_n = f(x_n), \ . \ . \ .$ сандарынан турган, кандайдыр бир А санына жакындап келүүчү же жыйналуучу

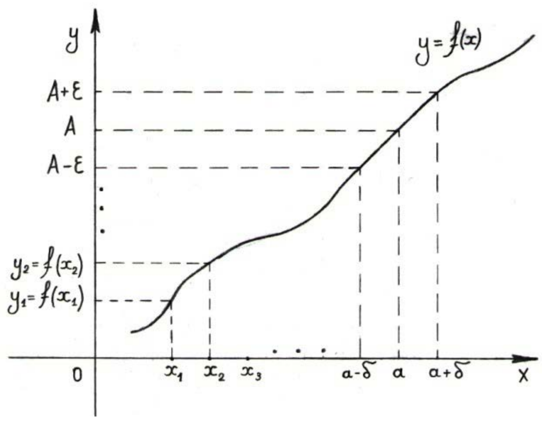
$$f(x_1), \ f(x_2), \ f(x_3), \ \dots \ , f(x_n), \ \dots \to A \qquad (2)$$

удаалаштыкты түзүшү мүмкүн (51 – чийме). Айтылган пикирди R мейкиндигинде киргизилген ченөө эрежеси – метриканын же аралыктардын тилинде түшүндүрөлү.

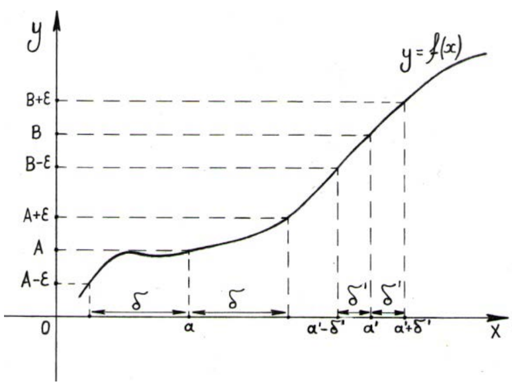
$\{f(x_n)\}$ элестери, А чекитинин жетишерлик кичине ε чеке белин толук толтуруусун камсыз кылгандай, $\{x_n\}$ аргументтери толтурулган a чекитин $\delta-$ чеке белин түзүүгө мүмкүн болсо, анда $x \to a$ умтулганда $f(x) \to A$ умтулат деп эсептеп, А санын $f(x)$ тин a чекитиндеги предели дейбиз. Аны математикалык тилде

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (3)$$

көрүнүштө жазып, "*x өзгөрүлмөсү a санына умтулган кезде $f(x)$ функциясы A пределине ээ болот* " $-$ деп окуйбуз.



51 – чийме



52 – чийме

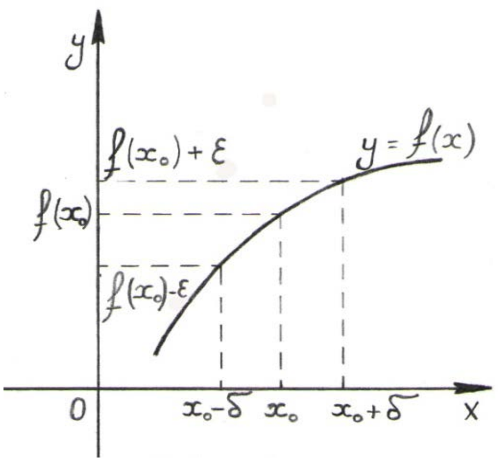
Ошентип: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\rho(a, x) = |x - a| < \delta \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \rho(f(x), A) = |f(x) - A| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim_{x \to a} f(x) = A \,.$$

$\varepsilon -$ оң саны менен ченелген элестердин чеке белине, $\delta -$оң саны менен ченелген аргументтердин чеке бели, ылайыкталып курулгандыктан, табылчуу δ саны, алдын ала тандалган ε санынан көз каранды болорун байкайбыз $\delta = \delta(\varepsilon)$. Аргументтердин a чекитине жакындашуу аралыгын чен – чоңдугун $\delta -$ көрсөтсө, $f(x)$ функциясын маанилерин А санына жакындашуу аралыгынын чен – чоңдугун, эркин тандалчуу жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ саны көрсөтөт. Жалпы учурда табылган δ оң саны, ε оң саны менен кошо a чекити (саны) жайгашкан абалдан да көз каранды болот $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

Мисалы, 52 – чиймеде жетишерлик кичине ε оң саны бирдей чоңдукта тандалып, $\{f(x)\}$ маанилерин А, В пределдик маанилерине жетүү же жакындашуу ылдамдыктары бир эле $\varepsilon-$ саны менен ченелгенине карабай, $\{x\}$ аргументтерин эки башка абалда алынган a, a' сандарына (чекиттерине) жетүү же жакындашуу ылдамдыктары ар башка δ, δ' оң сандары менен ченелгенин көрөбүз. Мындан ар дайым эле X аныкталуу областын чекиттериндеги аргументтердин (оргиналдардын) жакындашуу ылдамдык – чендерин (коюулануусун) бирдей болушунан, функциянын маанилерин (элестердин) да жакындашуу ылдамдык чендерин (коюулануусун) бирдей болушу (тескериси да) келип чыкпайт деген кортунду чыгарабыз.

Функциянын үзгүлтүксүздүгү: Айталы, $y = f(x)$ функциясы X көптүгүндө аныкталган же ушул көптүктөгү x сандары (чекиттери) менен белгиленген кубулуштарды, Y сандык көптүгүнө чагылтуучу эреже – мыйзам болсун ($x \in X$, $y \in Y \subseteq R$). x кубулуштары a чекитине чексиз жакын аралыкта болуп өтсө же ушул чекитте коюуланса, анда алардын элестери болгон кубулуштар же функциянын $y = f(x)$ маанилери, кайсы бир А санына чексиз жакын аралыкта болот деген түшүнүктү символикалык түрдө $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ предели менен белгилегенбиз.



53 – *чийме*

Функциянын a чекитиндеги предели менен адаштырбас үчүн, X көптүгүнөн a чектинен башка бир кыймылы токтотулган (фиксирленген) x_0 чекитин алалы. $f(x)$ функциясы ушул чекитте жана анын жакынкы $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ чеке белинде аныкталып, бул чеке белди, элестердин $(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ чеке белине чагылтат дейли (53 – чийме).

Def -1. *Эгерде $f(x)$ функциясын x_0 чекитиндеги предели жашаса жана ал x_0 чекитиндеги функциянын $A = f(x_0)$ маанисине барабар болсо, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз жана символикалык түрдө*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (4)$$

көрүнүшпө жазабыз. $f(x)$ функциясы X көптүгүн бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, аны бүтүндөй X көптүгүндө үзгүлтүксүз функция дейбиз. Ал эми $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ ти x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ деп айтабыз, б.а. функция үзгүлтүксүз болбогон чекитте үзүлүшкө ээ болот (53 – чийме).

Бул аныктаманы аралыктарында тилинде дагы бир жолу түшүнүп көрөлү:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

болушу керек, б.а. алдын ала жетишерлик кичине деп тандалган $\varepsilon > 0$ санына жараша, кандайдыр бир $\delta > 0$ саны табылып, аргументтер

$|x - x_0| < \delta$ жакындыкта жайгашканда, алардын тиешелүү элес – маанилерин $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ жакындыгында жайгашышы келип чыкса, анда $f(x)$ ти x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция дейбиз (8.1 – чийме).

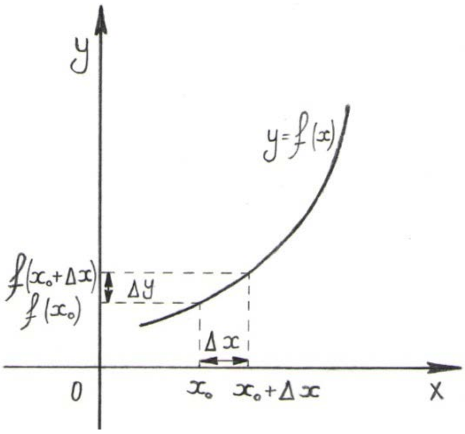
Функциянын a чекитиндеги пределинде $x \neq a$ деп ойлоп, a чекитиндеги функциянын $f(a)$ мааниси жашайбы же жокпу ага кызыкпастан, анын ушул чекиттеги предели болгон А санына көңүл бурганбыз. Функциянын x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүндө, пределдик $x = x_0$ чекитинде жана анын жетишерлик кичине аймакчасында $f(x_0)$ менен кошо, $\{f(x)\}$ маанилерин жашашы негизги шарттардын бири болуп эсептелет. Айтылган шарттарды эске алып, функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн өсүндүлөр тилинде түшүндүрүүгө болот. Айталы $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталсын (жашасын), анда x_0 гө жетишерлик кичине Δx

өсүндүсүн кошуу менен, x_0 чекитин сөз кылынган $\delta -$ чеке белден чыгып кетпей тургандай $x_0 + \Delta x$ абалына козгоого болот. Бул учурда функциянын, x_0 чекитиндеги Δx өсүндүсүнө (козголуусуна) туура келүүчү өзгөрүү болгон

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ чоңдугу, функциянын $f(x_0)$ дун $\varepsilon -$ чеке

белинен чыкпай тургандай өсүндүсү деп аталат (54 – чийме).

Мындан $x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ тең күчтүү экендигин байкап, (4) эрежесин өсүндүлөр тилинде



54 – чийме

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \text{ же}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} = 0 \text{ же}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (5)$$

көрүнүштөрдө жазууга болорун байкайбыз. *Демек x_0 чекитиндеги аргументтин өсүндүсү нөлгө умтулганда, функциянын тиешелүү өсүндүсү да нөлгө умтулса, анда x_0 чекитинде функцияны үзгүлтүкүз деп айтууга болот* деген натыйжага келебиз.

Мектеп курсунда окулган бардык функциялар өздөрүнүн X аныкталуу областын бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз функциялар же жөн эле элементардык функциялар өздөрүнүн аныкталуу областында үзгүлтүксүз функция болушкандыктан, алардын графиктери үзүгү жок туташ сызыктар болгондугун билебиз. Демек чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын суммасы, көбөйтүндүсү жана тийиндиси (бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгондо) үзгүлтүксүз функциялар болушат.

Функциянын үзгүлтүксүз болушу, X көптүгүн, Y көптүгүнө чагылтуу менен таанып үйрөнүү ыкмасында негизги орунду ээлейт. Анткени $f -$ үзгүлтүксүз функциясы, оргинал x_0 аргументин ($x_0 \in$ X) өзү менен чогуу анын жакынкы аймакчасындагы же чеке белиндеги чекиттердин бирин калтырбай, y_0 – элесинин ($y_0 \in$ Y) жакынкы чеке белине чагылтып, толтурат, б.а. үзгүлтүксүз функция, оргинал кубулуштардын чексиз кичине өзгөрүүлөрүн, анын элестерин чексиз кичине өзгөрүүлөрү катары катасыз чагылтып, кубулуштарды элестери боюнча толук үйрөнүүгө шарт түзөт.

Ошентип функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү, ошол чекитке чексиз жакындап келүү мүмкүнчүлүгүн түзгөн предел аппараты аркылуу көрсөтүлөт. Ошондуктан үзгүлтүксүз функциянын бардык касиеттери, функциянын пределин касиеттеринен келип чыгат.

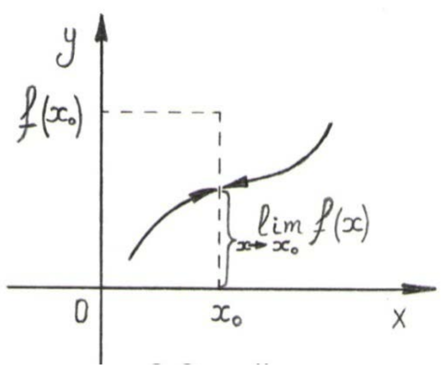
Үзүлүү чекиттерин классиффикациялоо

x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталган $y = f(x)$ функциясы берилсе (жашаса) жана $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ болсо, анда аны x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция деп айттык. Функциянын чекиттеги предели жашаса, анда ал жалгыз гана болуп, бир жактуу пределдери менен тең болгондуктан, функция x_0 чекитинде оң жактан жана сол жактан

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \qquad (6)$$

тең үзгүлтүксүз болгондо гана, үзгүлтүксүз болорун көрөбүз.

Айталы, функция x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ болсун $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ дейли. Анда төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:



55 – *чийме*

1^0 $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0 - 0)$ сол жактуу, $f(x_0 + 0)$ оң жактуу пределдери жашап, алар барабар

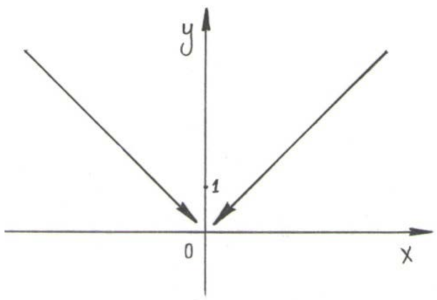
$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ болушканы менен, функциянын x_0 чекитиндеги $f(x_0)$ маанисине тең эмес болушсун (55 – чийме).

Бул учурда x_0 чекитин $f(x)$ функциясын жоюлуучу үзүлүү чекити деп айтабыз, анткени берилген функцияны x_0 чекитинде

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{эгерде } x \neq x_0 \textit{ болсо}; \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \textit{эгерде } x = x_0 \textit{ болсо} \end{cases}$$

көрүнүштө кошумча аныктоо менен, берилген функцияны (6) теңдештиги орун ала тургандай үзгүлтүксүз F(x) функциясына айлантууга болот. Мисалы

$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \textit{ болсо}, \\ 1, & x = 0 \textit{ болсо} \end{cases}$ функциясы $x_0 = 0$ чекитинде жоюлуп кетүүчү үзүлүшкө ээ. Анткени бул чекиттеги оң жана сол жактуу пределдери жашашып барабар болушканы менен



56 – чийме

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 0 \neq f(x_0) = 1,$$

функциянын ушул чекиттеги маанисине барабар эмес (56 – чийме). Эгерде функциянын $x_0 = 0$ чекитиндеги маанисине $f(x_0) = f(0) = 0$ деген түзөтүү киргизсек, анда берилген функция бул чекитте

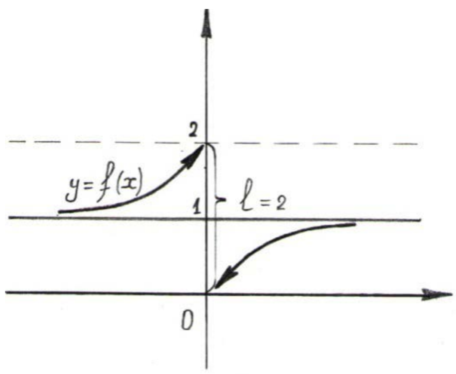
үзгүлтүксүз $\mathrm{F}(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \textit{ болсо}, \\ 0, & x = 0 \textit{ болсо} \end{cases}$

функциясына айланып, үзүлүү чекити жоюлат.

Жоюлуучу x_0 үзүлүү чекитине ээ болгон функциянын графигинде бир гана $(x_0;\ f(x_0))$ чекити кыркылып, башка чекитке жылып калганын көрөбүз (56 – чийме). Графиктеги кыркылып тешилген чекитке, оң жана сол жактуу пределдерге барабар болгон жаңы маанини берүү менен тешикче бүтөлүп, үзүлүү жоюлганын байкайбыз.

2^0 Бир өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0 - 0)$ сол жактан, $f(x_0 + 0)$ оң жактан чектүү пределдери жашап,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$



57 – чийме

алар барабар эмес болушсун. Бул учурда $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болсо функцияны сол жактан үзгүлтүксүз, ал эми $f(x_0 + 0) =$

$f(x_0)$ болсо оң жактан үзгүлтүксүз дейбиз. Бирок берилген функция кайсы тараптан үзгүлтүксүз болгонуна карабастан, x_0 чекитиндеги предели жашабайт, анткени ал бирөө гана болуп, (6) шартын канааттандырышы керек эле.

Ал аткарылбаган соң, берилген функция бул чекитте үзүлүшкө ээ болуп, $f(x)$ функциясы x_0 чекити аркылуу өткөндө, чектүү секирик мүнөзүндөгү үзүлүшкө ээ болот дейбиз. Чектүү секирик чоңдугун l десек, анда ал

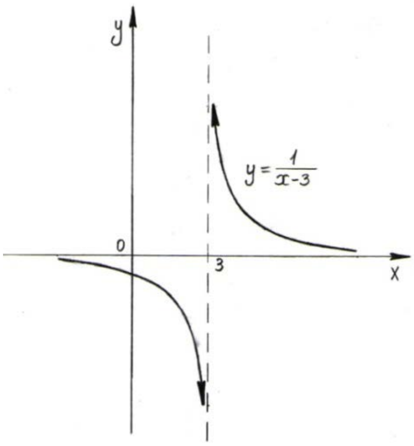
$l = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ санына барабар болот.

Мисалы $f(x) = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ функциясы $f(0) = 0$ маанисине ээ, бирок $x_0 = 0$ чекитинде сол жактан $f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = 2$ пределине, ал эми оң жактан $f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = 0$ пределине ээ болгондуктан, функциянын бул чекиттеги үзүлүү секириги

$$l = |f(x_0+0) - f(x_0-0)| = |0-2| = 2 \text{ санына барабар (57 – чийме).}$$

4^0 Эгерде $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ бир жактуу пределдеринин жок эле дегенде бирөөсү "∞" пределине ээ болсо, анда x_0 үзүлүү чекиттерин **II - роддогу (түрдөгү)** же чектелбеген үзүлүү чекиттери деп айтабыз.

Мисалы $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 \textit{болсо}, \\ 2, & x = 3 \textit{ болсо} \end{cases}$ функциясы $x_0 = 3$ чекитинде аныкталып, $f(x_0) = f(3) = 2$ маанисине ээ болгону менен, бир жактуу пределдери жолугушпай же $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ чектелбей бири – биринен качкандыктан, II-түрдөгү үзүлүшкө дуушар болушат (58 – чийме).



58 – чийме

Предел эсептөөнүн айрым өзгөчөлүктөрүн айтып өтөлү: Аналитикалык ыкма менен берилген функциялардын чекиттеги пределин касиеттерин эске алып, бардык алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен пределди табууну, **алгебралык ыкма** деп атайбыз. Пределдерди алгебралык жол менен эсептөөдө (a чектүү сан) $\frac{a}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{a}=\infty,\ \frac{a}{\infty}=0,\ a^{\infty}=\infty\ (a\neq 1)$ деп алынып, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}, 0^{0}$, ∞^{0} абалдары аныксыздыктар деп аталышат Келип чыккан аныксыздыктарды алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен эсептелүүчү абалга келтирүү, аныксыздыктарды ачуу деп аталат.

Айрым сонун пределдер (пределдердин ачылыштары):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ сонун предели $\left(\frac{0}{0}\text{ аныксыздыгы}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ сонун предели $\left(\frac{0}{0}\text{ аныксыздыгы}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ сонун пределин $\mu\in R$. $\left(\frac{0}{0}\text{ аныксыздыгы}\right)$;

4) $\varphi(x),\ \psi(x),\ \alpha(x)$ үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда (1^{∞} – аныксыздыктарына):

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ \wedge\ \lim_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e\quad (2 – \text{сонун предел}),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\ \wedge\ \lim_{\psi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\psi(x)}\right)^{\psi(x)}=e,$$

5) $\frac{0}{0}$ аныксыздыктарына: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\log_a e$,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a,$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **же "1 – сонун предели"**.

Бул сонун пределдердин туура болорун келтирип чыгарууга болот. Демек $x_0 = 0$ чекитинде $\alpha(x)$ чексиз кичине функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда бул чекиттин чексиз кичине чеке белинде

$\boldsymbol{log_a}(\mathbf{1} + \alpha(\boldsymbol{x}))\sim\boldsymbol{k}\cdot\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{k} = \boldsymbol{log_a e}$; $\;\mathbf{ln}(\mathbf{1} + \alpha(\boldsymbol{x}))\sim\alpha(\boldsymbol{x})$;

$\boldsymbol{a}^{\alpha(x)} - \mathbf{1}\sim\mathbf{ln}\boldsymbol{a}\cdot\alpha(\boldsymbol{x})$; $\;\boldsymbol{e}^{\;\alpha(x)} - \mathbf{1}\sim\alpha(\boldsymbol{x})$; $\;(\mathbf{1} + \alpha(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{1}\sim\boldsymbol{\mu}\alpha(\boldsymbol{x})$;

$\mathbf{sin}\,\alpha(\boldsymbol{x})\sim\alpha(\boldsymbol{x})$; $\;\mathbf{tg}\,\alpha(\boldsymbol{x})\sim\alpha(\boldsymbol{x})$; $\;\boldsymbol{arcsin}\alpha(\boldsymbol{x})\sim\alpha(\boldsymbol{x})$; $\;\boldsymbol{arc}\mathbf{tg}\alpha(\boldsymbol{x})\sim\alpha(\boldsymbol{x})$

функцияларынын өз ара эквиваленттүүлүгүн көрөбүз. Мындан алардын үзгүлтүксүздүгүн эске алып, $x \to 0$ умтулгандагы пределдерин эсептөөдө, эквиваленттүү чоңдуктар катарында бири – бири менен алмаштырып жазуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

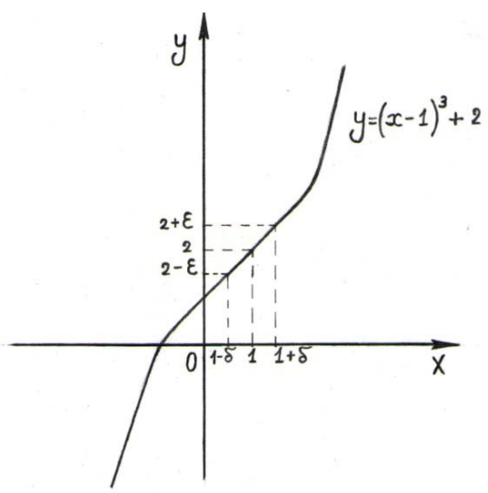
Мисалдар:

1). $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясын $a = 1$ чекитиндеги предели А = 2 саны болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Жетишерлик кичине деп алынган ε санын тандасак, $\rho(f(x), A) = |f(x) - A| = |(x-1)^3 + 2 \; - 2| = |(x-1)^3| = |x-1|^3 < \varepsilon$, анда $f(x)$ менен А = 2 санынын арасындагы $\rho(f(x), A) = |f(x) - A|$ аралыгы, $|x-1| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ шарты аткарылганда гана ε санынан кичине болорун көрөбүз. Демек табууну талап кылган δ саны деп

$\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$ санын алууга болот.

Эгерде $\varepsilon = 0{,}027$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$; $\varepsilon = 0{,}001$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ болуп, табылган δ саны ε дон көз



59 – чийме караңды $\delta = \delta(\varepsilon)$ экендигине ишенебиз. Ошентип $\varepsilon > 0$ санын кандай тандасак да, ага ылайыкташкан $\delta > 0$ саны табылып, x аргументтери $a = 1$ санын $\delta -$аймакчасына кирери менен, $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясын маанилери А $= 2$ санынын $\varepsilon -$ аймакчасына киргендиктен, А = 2 санын функциянын

$a = 1$ чекитиндеги предели деп айтып (59 – чийме),

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 1}\{(x-1)^3 + 2\} = 2$$

көрүнүшүндө жазабыз. ◀

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ предели , $\frac{0}{0}$ көрүнүштөгү аныксыздыкты жаратат, бирок аны алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен көбөйтүүчүлөргө ажыратып, аныксыздыкты пайда кылуучу $(x-1)$ көбөйтүүчүлөрдү кыскартып жиберебиз.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

3) $f(x) = \sin x$ функциясы да аныкталуу областын бардык x_0 чекиттеринде үзгүлтүксүз функция болот. Чынында

эле $\sin x < x < tgx$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ барабарсыздыгын эске алсак, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $\sin x < x$ барабарсыздыгы орун алат. Жалпы x тер үчүн $|\sin x| \leq 1$ барабарсыздыгы аткарылгандыктан, $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ *жана* $|x| > 1$ *болгондо* деле $|\sin x| \leq |x|$ барабарсыздыгын орун аларын байкайбыз. Демек

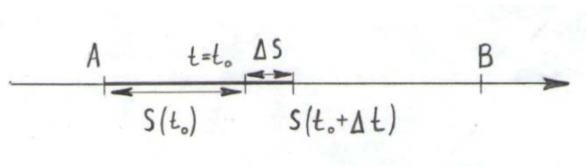
$$|\sin x - \sin x_0| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}\cdot 1 = |x-x_0| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылып, алдын ала кандай гана жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын албайлы, $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай аргументтердин $|x - x_0| < \delta$ чеке белин түзүү мүмкүн, же ушундай аймакчанын чегин көрсөтүүчү изделген δ саны деп, ε санын өзүн алууга болорун көрөбүз $\delta = \varepsilon$.

$\cos x$ функциясын да, аныкталуу областын ар бир x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болорун ушундай эле көрсөтүп, үзгүлтүксүз функциялардын катышы катарында $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ тригонометриялык функциялары өз аныкталуу областтарын ички чекиттеринде үзгүлтүксүз функциялар болоруна ишенебиз.

Функцияны дифференцирлөө ***деп функциянын чекиттеги туундусун эсептөөнүн жүрүшүн айтабыз.***

Дифференцирлөө деген сөз кыргызча майдалап жекече бөлүштүрүү деген мааниде болуп, туунду алуу эрежесинин механикалык процесстерди (ар бир чекиттеги ылдамдыгын, тыгыздыгын, басымын, убактысын ж.б.) чекитке чейинки тактыкта майдалап түшүнүү аракеттеринен улам келип чыккандыгынан кабар берет. Предел аппараты табылганга чейин, көбүнчө математиканы туруктуу кубулуштарды (аянт, көлөм ж.б.) моделдештирүүдө колдонушуп, кыймылдуу кубулуштардын орточо маанилери боюнча (орточо ылдамдык, орточо тыгыздык ж.б.) үйрөнүү мүмкүнчүлүктөрү гана бар эле. Пределди математикада таанып билүү каражаты катарында колдонуу ыкмалары иштелип чыккан соң, аралыктарда өзгөрүлмө кубулуштарды орточо маанилери боюнча эмес, ар бир чекиттеги абалдары боюнча таанып билүүгө шарт түзгөн математикалык аппараттар ойлонулуп табылды (алгачкылардан болуп Лейбниц, Ньютон колдонгон деген маалыматтар бар). Алардын бири туунду алуу эрежеси болуп эсептелет. Мисалы узундугу $S=|AB|$ болгон аралыкты, t убактысында басып өткөн автомобилдин орточо ылдамдыгы $v=\frac{S}{t}$ көрүнүшө эсептелгени менен, аралыктын ар бир чекитиндеги убакыттын ирмемдеринде автомобиль кандай ылдамдамдыкта болгонун билбейбиз. Аны билүү үчүн, басып өткөн жолдун t убактысынан көз карандылыгын аныктаган, байланыш эрежеси болгон $S=S(t)$ функциясын түзөбүз. Айталы, убакыттын t_0 ирмеминде автомобиль $S(t_0)$ узундуктагы жолду басып өтсүн. Бирок, убакыттын ушул t_0 ирмемин токтотуп туруу мүмкүн эмес болгондуктан, ченөөдө

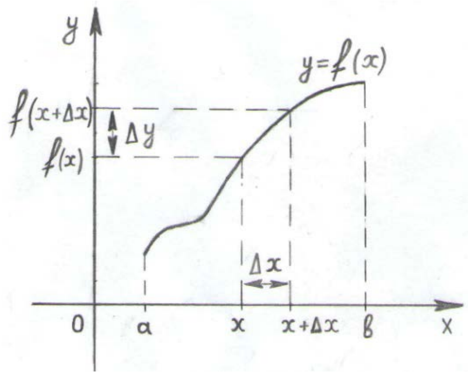


60 – чийме

жетишерлик кичине Δt убактысына каталык кетиришибиз мүмкүн. Ченөө каталыгы кошулган $t_0+\Delta t$ ирмемде автомобиль $S(t_0+\Delta t)$ узундуктагы жолду басып өтүүгө үлгүрдү десек (60 – чийме), анда Δt каталык убактысында автомобиль $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$ узундуктагы жол жүргөн болуп, бул аралыктагы орточо ылдамдыгы $v_{\text{орт.}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ көрүнүштө эсептелет. Ал эми убакыттын накта t_0 ирмеминдеги ылдамдыкты табуу үчүн, каталыкты $\Delta t \to 0$ нөлгө чейин азайтуу зарыл. Демек, каталык убактысындагы орточо ылдамдыктын $\Delta t \to 0$ умтулгандагы пределин мааниси, убакыттын накта t_0 ирмеминдеги ылдамдык болуп эсептелет

$\mathrm{v}_{t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{орт.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$. Математикада бул пределдин мааниси $S = S(t)$ функциясынан же жолдон, t өзгөрүлмөсү боюнча t_0 чекитинде алынган туунду деп аталат. Ошентип математикада функциянын туундусу түшүнүгү, механикалык процесстердин көз ирмемдеги абалдарын моделдештирүү зарылчылыгынан улам келип чыккан.

Айталы, $y = f(x)$ функциясы $]a, \ b[$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун. Бул аралыктан каалагандай x фиксирленген (кыймылы токтотулган) чекитин алып, ага Δx өсүндүсүн же термелүүсүн берели. Берилген Δx өсүндүсү x чекитин оң же сол тарабына берилгенине жараша Δx эркин белгилерге жана чоңдуктарга ээ боло бергени менен, ага $x + \Delta x$ четтөөсү берилген интервалдан чыгып кетпесин деген шарт коюлат. $f(x)$ функциясы $]a, \ b[$ аралыгында үзгүлтүксүз болгондуктан, Δx ке жараша же андан көз каранды болгон, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ термелүүсүнө (өсүндүсүнө) ээ болот (61 – чийме).



61 – чийме

x чекитиндеги функция менен аргументтин өсүндүлөрүн (термелүүлөрүн) катышын түзөлү:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$. x чекити фиксирленген деп эсептелгендиктен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$ катышын, Δx өзгөрүлмө термелүү (өсүндү) чоңдугунан гана көз каранды деп түшүнүп, предел эсептөөдө x ке турактуу сан катарында мамиле жасайбыз.

$y = f(x)$ функциясын $[a,\ b]$ сегментинде (туюк аралыгында) каралбагандыгын себеби, фиксирленген x чекити аралыктын учтарында жайгашып калган учурда $x + \Delta x$ четтөөсү аралыктан чыгып кетиши мүмкүн. Мисалы $x = a$ десек, "$-\Delta x$" терс өсүндүсүн бергенде $x - \Delta x$, берилген сегменттин сол жак сыртына чыгып кетет. Ошондуктан, ар бир x чекитин Δx аралыгына козгогон кезде аралыктын сыртына чыкпай турган мүмкүнчүлүктү сактап калуу максатында, аралыктын учтарындагы чекиттерди таштап жиберип, аралыктын ички чекиттери болгон интервалда (ачык көптүктө) өзгөрүүчү чекиттерди карайбыз.

Def 2. *Эгерде* $\Delta x \to 0$ *умтулгандагы* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *катышын предели жашаса, анда ал пределдин мааниси* $f(x)$ *функциясынан* x *чекитинде алынган туунду деп аталып, жазуу ыңгайына жараша* $f'(x),\ y'(x),\ y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ *көрүнүштөрдө белгиленет.*

Мисалы $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ бөлчөк көрүнүштөгү белгилөөлөр Лейбниц тарабынан киргизилип, алымы менен бөлүмү ар башка сандар катары элестетилип, функциялар менен болгон арифметикалык амалдарда аларды кошулуучу, көбөйтүндү, тийинди катарында колдонууга ыңгайлаштырган.

Ошентип ***Def – 2*** боюнча, функциянын туундусун предел аппаратын жардамы менен киргизип,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (7)$$

көрүнүштө жазылган жаңы алгебралык амал же эреже катарында эсептейбиз. Эгерде $f(x)$ функциясын $]a,\ b[$ интервалын ар бир x чекитинде туундусу жашаса, анда аны бүтүндөй интервалда туундуга ээ функция дейбиз. "Туунду" – термини, "пределден келтирип чыгарылган же төрөлгөн натыйжа" маанисинде айтылып калган.

x өзгөрүлмөсүн фиксирлебей кыймылга келтирүү менен, $f'(x)$ туундусу да функция болорун көрөбүз. Бирок $f'(x)$ функциясы берилген

$]a,\ b[$ интервалын айрым чекиттеринде үзүлүүгө ээ болуп, маанилери жашабай калышы да мүмкүн болорун эскертебиз.

Иш жүзүндө функциядан туунду алуу амалы (7) пределин эсептөө болуп, эсте тутууга кыйын, узун процесске окшоп кетет. Ошондуктан аны жогорудагы белгилөөлөрдүн жардамы менен $f(x)$ функциясын, $f'(x)$ функциясына чагылтуучу оператор катарында эстеп калуу ыңгайлуу:

$$\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow f(x) \to f'(x) \text{ же } \quad Df: f(x) \to f'(x)\,. \qquad (7)^*$$

Мисалдар

1) $y = x^3$ функциясын аныкталуу областына таандык каалагандай x чекитиндеги туундусун (7) эрежеси боюнча эсептейли. x аргументи $x + \Delta x$ өсүндүсүн алса, функция $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 +$

$+3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ өсүндүсүнө ээ болот. Демек туундусу

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + (0)^2 = 3x^2$ көрүнүштөгү функция болуп, ал $y = x^3$ функциясы аныкталган областта аныкталып, үзгүлтүксүз функция болорун байкайбыз.

2) $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ функциясын x чекитиндеги туундусун эсептейли. $x + \Delta x$ четтөөсүнө $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ термелүүсү туура келет. Анда сонун пределин эске алып, туундусу

$(a^x)' = \quad y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$ функциясы болорун көрөбүз. Мында да функция менен анын туундусу бир аралыкта аныкталышып, үзгүлтүксүз болушат.

3) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясын аныкталуу областы $X =]-\infty, +\infty[$ аралыгы

болгону менен, анын туундусу

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ болуп, $\frac{\Delta x}{x} = t$ белгилесек $\Rightarrow$

$\Delta x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ жана $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1}{t} = \frac{1}{3}$ болгондуктан,

$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ функциясы экендиги келип чыгат. Анын аныкталуу областына X көптүгүндөгү $x_0 = 0$ чекити кирбейт, б.а. $y(x)$ бул чекитте үзгүлтүксүз болгону менен, анын $y'(x)$ туундусу

$X =]-\infty, \ 0[\cup]0, +\infty[$ аралыгында аныкталып, $x_0 = 0$ чекитинде II – түрдөгү үзүлүүгө ээ болот. Бирок $y = \sqrt[3]{x}$ функциясын $x_0 = 0$ чекитинде $y'(x) = +\infty$ чектелбеген туундусу жашайт.

4) $y = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болгону менен туундусу жашабайт. Чынында эле анын туундусун (7) эрежеси менен эсептесек,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \begin{vmatrix} x = 0 \\ \text{десек} \end{vmatrix} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1 \text{ эгерде } \Delta x > 0, \\ -1 \text{ эгерде } \Delta x < 0 \end{cases}$$

предели кош мааниге ээ болуп, туундунун жашабай тургандыгын көрөбүз.

- $]a, \ b[$ *интервалынан эркин алынуучу фиксирленген чекитти*

конкреттештирип x_0 *деп белгилеп,* $f(x)$ *функциясын* x_0 *чекитиндеги туундусун* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (8)

көрүнүштөгү эреже менен эсептөөгө да болот. Чынында эле $x - x_0 = \Delta x$ белгилөөсүн киргизсек, $x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ жана $x = x_0 + \Delta x$ болуп, (8) ге жаңы белгилөөлөрдү коюп, (7) ни алабыз. Демек функциянын чекиттеги туундусун эсептөөдө (7), (8) эрежелерин кайсынысын болсо да колдоно берүүгө болот.

Функциянын туундусун эсептөөнүн (8) эрежесин пайдаланып, T мезгилдүү функциянын туундусу да T мезгилдүү функция болорун көрсөтөлү:

$f(x+\mathrm{T})=f(x)\wedge\ f(x_0+\mathrm{T})=f(x_0)$ болсо, $x+\mathrm{T}\to x_0+\mathrm{T}\Leftrightarrow x\to x_0$ экендигин эске алып, (8) эрежесинен,

$$f'(x_0+\mathrm{T})=\lim_{x+\mathrm{T}\to x_0+\mathrm{T}}\frac{f(x+\mathrm{T})-f(x_0+\mathrm{T})}{(x+\mathrm{T})-(x_0+\mathrm{T})}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

теңдештигине ээ болобуз. Ошондой эле жуп функциянын туундусу так, так функциянын туундусу жуп болорун да байкоого болот. Мисалы $f(x)$ жуп функция же $f(-x)=f(x)\wedge f(-x_0)=f(x_0)$ болсун, анда

$(-x)-(-x_0)=-(x-x_0)\quad\wedge\quad x\to x_0\Leftrightarrow(-x)\to(-x_0)$ келип чыгат. Анда (8) ди колдонуп, жуп функциянын туундусу

$f'(-x_0)=\lim\limits_{(-x)\to(-x_0)}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}=-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-f'(x_0)$ так функция болоруна күбө болобуз.

- *Функциядан (7), (8) эрежелери боюнча туунду алуу процессин же өсүндүлөрдүн катышын түзүп, пределин эсептөөнүн жүрүшүн, функцияны дифференцирлөө деп айтабыз. Эгерде пределдин мааниси табылып чектелген сан болсо, анда функцияны туунду алынуучу чекитте дифференцирленүүчү, ал эми предели жашабаса же жашаган менен чектелбеген* $\pm\infty$ *сан болсо, анда бул чекитте дифференцирленбөөчү деп айтабыз.*

Мисалы, жогоруда каралган $y=\sqrt[3]{x}$, $y=|x|$ функциялары $x_0=0$ чекитинде дифференцирленбөөчү же өзгөрүү ылдамдыгын чекиттеги тактыкка чейин үйрөнүүгө мүмкүн болбогон функциялар болушат. Ошондой эле,

$f(x)=\begin{cases}x\ \sin\frac{1}{x},\ \textit{эгерде}\ x\neq 0\ \textit{болсо},\\ \quad 0,\ \textit{эгерде}\ x=0\ \textit{болсо}\end{cases}$ функциясы да $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз болуп, бардык $x\neq 0$ чекиттеринде чектүү туундулары жашап, дифференцирленүүчү болгону менен $x=0$ чекитинде туундусу жашабай, дифференцирленбөөчү болот. Чынында эле,

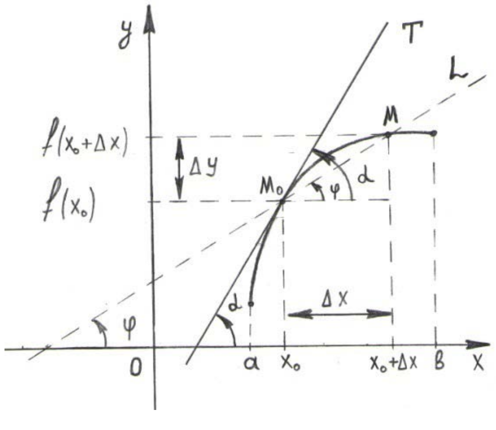
$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}sin\frac{1}{\Delta x}$ предели жашабайт, анткени анын пределдери көп же чексиз маанилүү болуп,

$[-1,\ 1]$ сегментиндеги ар кандай сан боло бериши мүмкүн. Аны $\frac{1}{\Delta x} \to \infty$ умтулганда ага кошо умтулуучу $\left\{\frac{1}{\Delta x_n}\right\} \to \infty$ жекече удаалаштыктарын түзүү менен көрсөтүүгө болот. Пределдин жалгыздык шарты бузулгандыктан, сөз кылынган предел жашабайт же мисалдагы функция $x = 0$ чекитинде дифференцирленбөөчү болот деген жыйынтыкка келебиз.

Натыйжа. Берилген аралыкта чектүү туундусу жашаган функцияны, ушул аралыкта дифференцирленүүчү функция дейбиз. Берилген x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция, бул чекитте ар дайым эле дифференцирленүүчү боло бербейт, анткени анын x_0 чекитинде туундусу жашабай калышы же чектелбеген сан болуп калышы мүмкүн (3 – мисалда $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз бирок дифференцирленбөөчү).

Туундунун геометриялык мааниси

- $]a,\ b[$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз $y = f(x)$ функциясын карайлы. Бул аралыктагы функциянын графигин тургузуп, графикте жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитин белгилеп алып ($y_0 = f(x_0)$), бул чекиттен функциянын графигине T жаныма түзүн жүргүзөлү (62 – чийме). O x огу менен T жанымасын арасындагы бурч α болсун. x_0 чекитини Δx өсүндүсү менен $x_0 + \Delta x$ козгосок, функция $f(x_0 + \Delta x)$ абалына козголуп, M_0 чекити $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ чекитине которулат. Функциянын графигин M_0, M чекиттеринде кесип



62 – чийме

өтүүчү L түзүн жүргүзөлү, ал Ox огу менен φ бурчун түзсүн дейли. Эгерде $\Delta x \to 0 \Rightarrow \mathrm{M} \to \mathrm{M}_0 \wedge \varphi \to \alpha$ умтулуп, L түзү $y = f(x)$ функциясына $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн T жаныма түзүнүн абалына умтулат. L түзүнүн бурчтук коэффициенти $k_l = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ болгондуктан, функциянын x_0 чекитиндеги $k_T = f'(x_0)$ туундусу, функциянын графигинде жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн Т жаныма түзүнө бурчтук коэффициент

$$k_{\mathrm{T}} = tg\alpha = \lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0} k_L = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,, \qquad (9)$$

болорун көрөбүз. Ошентип $y = f(x)$ функциясын графигине $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн $y - y_0 = k_{\mathrm{T}}(x - x_0)$ теңдемеси (9) дун негизинде $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ көрүнүштө жазылат.

Элементардык функциялардын туундуларын таблицасы

1. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ $\quad(\forall\alpha\in R, x>0)$; $\quad$ 2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad(x>0)$;

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $\quad(a>0, a\neq 1, x>0)$; $\quad$ 4. $(e^x)' = e^x$;

5. $(a^x)' = a^x\ln a$ $\quad(a>0, a\neq 1)$; $\quad$ 6 .$(\sin x)' = \cos x$;

7. $(\cos x)' = -\sin x$;

8. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{cos^2x}$ $\quad(x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$;

9. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{sin^2x}$ $\quad(x\neq n\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$;

10. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(-1<x<1)$;

11. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad(-1<x<1)$;

12. $(ar\mathrm{ctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $\quad$ 13. $(arc\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

14. $(shx)' = chx$; $\quad$ 15. $(chx)' = shx$;

16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$; $\quad$ 17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$ $\quad(x\neq 0)$;

Татаал функциялардын туундуларын, жогорудагы эрежелердин негизинде табууга болот.

$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$ мында c – const,

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\quad (\forall \alpha \in R, u > 0)$; $\quad$ 2. $(\ln x)' = \frac{u'}{u}$ $\quad (u > 0)$;

3. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $\quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$; $\quad$ 4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$; $\quad$ 6 .$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(\mathrm{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $\quad (u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots)$;

9. $(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ $\quad (u \neq n\pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots)$;

10. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad (-1 < u < 1)$;

11. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad (-1 < u < 1)$;

12. $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$; $\quad$ 13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$;

14. $(sh u)' = ch\, u \cdot u'$; $\quad$ 15. $(ch u)' = sh u \cdot u'$;

16. $(th u)' = \frac{u'}{ch^2 u}$; $\quad$ 17. $(cth\, u)' = -\frac{u'}{sh^2 u}$ $\quad (u \neq 0)$;

Жогорку тартиптеги туундуларды эсептөөнүн айрым эрежелери:

1. $[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = (u)^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot (u)^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 \cdot (u)^{(n-2)} \cdot$
$\cdot v'' + \cdots + C_n^{n-2} \cdot u'' \cdot (v)^{(n-2)} + C_n^{n-1} \cdot u' \cdot (v)^{(n-1)} + u \cdot (v)^{(n)}$.

2. $(u(x) \pm v(x))^{(n)} = (u(x))^{(n)} \pm (v(x))^{(n)}$.

Туундунун колдонулуштары

1. Жакындаштырып эсептөөдө колдонуучу формулалар:

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ формуласы колдонулат.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)} + R_{2k+2}(x)$.

4. $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x)$.

5. $(1 + x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!} \cdot x^k + R_{n+1}(x)$.

6. Предел эсептөөдө Лопиталдын эрежелери:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\ , \qquad g'(a) \neq 0;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}\ , \quad g^{(n)}(a) \neq 0,$$

7. $f(x)$ тин экстремумдары жана өсүү, кемүү аралыктары:

1-таблица. x	$x_0 - \delta < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	+	0 , же жашабайт	−
$f(x)$	Өсөт	Локалдык максимум	Кемийт

2-таблица. x	$x_0 - \delta < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	−	0 , же жашабайт	+
$f(x)$	Кемийт	Локалдык минимум	Өсөт

3-таблица.			

x	$x_0 - \delta < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	$+$	0 , же жашабайт	$+$
$f(x)$	Өсөт	Экстремум жок	Өсөт
$f'(x)$	$-$	0 , же жашабайт	$-$
$f(x)$	Кемийт	Экстремум жок	Кемийт

8. функциянын ийметик томпоктук аралыктары:

4- таблица. x	$\forall x \in]a, \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c}, b[$
$f''(x)$	$f''(x) > 0$ же $(+)$	0 , же жашабайт	$f''(x) > 0$ же $(-)$
$f(x)$	иймек	Ийил. чекити	томпок

5- таблица. x	$\forall x \in]a, \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c}, b[$
$f''(x)$	$f''(x) < 0$ же $(-)$	0 , же жашабайт	$f''(x) > 0$ же $(+)$
$f(x)$	томпок	Ийил. чекити	иймек

6- таблица. x	$\forall x \in]a, \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c}, b[$
$f''(x)$	$f''(x) < 0\ (-)$	0 , же жашабайт	$f''(x) < 0$ $(-)$

$f(x)$	томпок	Бул ийилүү чекити аркылуу өткөндө $f''(x)$ тин белгиси өзгөрбөйт. Графиктин томпоктугу сакталат.	томпок
$f''(x)$	$f''(x) > 0\ (+)$	0 , же жашабайт	$f''(x) > 0\ (+)$
$f(x)$	иймек	Бул ийилүү чекити аркылуу өткөндө $f''(x)$ тин белгиси өзгөрбөйт. Графиктин иймектиги сакталат.	иймек

9. Функциянын асимптоталары:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ чектүү предели жашаса, анда $y = b$ берилген функциянын горизонталдык асимптотасы болот. Ал эми $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ болсо, анда горизонталдык асимптотасы жок болуп, кошумча кийинки кадамдагы изилдөөгө өтөбүз.

Эгерде $y = kx + b$ түзү $y = f(x)$ функциясын жантык асимптотасы болсо, анда $x \to \pm\infty$ умтулганда алар бири – бирине чексиз жандаша жакындашып, чексиз алыстагы чекиттерге жеткенде дал келишет же айырмасынын предели $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ деп ойлойбуз. Ошондуктан чексиз алыстатылган x чекиттеринде

$f(x) - (kx + b) \approx \alpha(x) -$ чексиз кичине чоңдук болот. Мындан $k \approx \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}$ же

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b+\alpha(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - 0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

ошондой эле $b \approx f(x) - kx - \alpha(x)$ же

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx - \alpha(x)\ ] = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$$

коэффициенттерин табууга болот.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ предели жашаса жантык асимптотасы бар, ал эми предели жашабаса жантык асимптотасы жок болуп, кийинки кадамдагы изилдөөнү улантабыз.

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx\ ) = b$ чектүү предели жашаса, анда жантык асимптотасы бар болуп, $y = kx + b$ теңдемеси менен жазылат. Эгерде чектүү предели жашабаса, анда асимптотасы жок функция болот. $k = 0$ болгон учурда жантык асимптота горизонталдык асимптотага айланат.

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ болсо, анда $x = a$ түзү вертикалдык асимптота болот.

10. Функциянын графигин тургузуу тартиби

Берилген $y = f(x)$ функциясын графигин тургузуу үчүн :

1) Анын $x \in \text{X}-$ аныкталуу областын жана $y \in Y-$ өзгөрүү областын, же $f -$ эреже – мыйзамы кайсы X сандарын көптүгүн, кайсы Y сандарын көптүгүнө чагылтып жатканын аныктайбыз.

2) $f(x) -$ функциясын үзүлүү чекиттерин жана үзүлүү мүнөздөрүн (I, II – түрлөрүн, багыттарын, секиригин) аныктоо. Вертикалдык асимптоталары бар же жок экенин аныктоо.

3) Функциянын мезгилдүүлүгүн, жуп же тактыгын аныктоо.

4) Графиктин координаттык $0x$, $0y$ октору менен кесилүү чекиттерин аныктоо.

5) Функциянын чексиз алыстатылган x чекиттериндеги абалын же горизонталдык жана жантык асимптоталарын аныктоо.

6) Функциянын монотондуулук аралыктарын жана максимум, минимум чекиттерин аныктоо.

7) Функциянын томпоюу (иймейүү) багыттарын аныктоо. Иймейүү чекиттери.

8) Алынган маалыматтарга таянып функциянын графигин тургузуу.

Мисалдар.

а) $y = \ f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу: ► 1) Берилген бөлчөк функциянын жашашы үчүн, анын бөлүмү $1 - x^2 \neq 0$ же $x \neq \pm 1$ болушу керек. Демек, аныкталуу областы бул эки чекиттен башка бардык чыныгы сандардын көптүгү

$X =]-\infty, -1[\cup]-1,\ 1[\cup]1, +\infty[$ болуп, өзгөрүү областы

$Y \equiv R =]-\infty, +\infty[$ бардык чыныгы сандардын көптүгү болот.

2) Функция аныкталуу областын чекиттеринде үзгүлтүксүз болуп, аныкталуу областына кирбеген $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ чекиттеринде II – түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ, анткени бул чекиттердеги оң жана сол жактуу пределдери чектүү болбой, чексиз

$l = |f(x_0 +) - f(x_0 -)| = \infty$ секиригине ээ. Чынында эле $x_1 = -1$ чекитинде оң жактан

$$f(x_1 +) = \lim_{x \to (-1)+} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = -\infty ,$$

сол жактан

$f(x_1 -) = \lim_{x \to (-1)-} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = +\infty$ пределине, ошондой эле $x_2 = 1$ чекитине да оң жактан $f(x_2 +) = \lim_{x \to 1+} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = -\infty$,

сол жактан $f(x_2 -) = \lim_{x \to 1-} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = +\infty$ пределдерине ээ.

Бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланган $x = -1$, $x = 1$ түздөрүндө, функция вертикалдык $0y$ огундагы $(-\infty)$ ден $(+\infty)$ ге чейинки аралыктагы маанилерди кабыл алып, бул түздөр вертикалдык асимптоталар болушат.

3) Так функция, анткени $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$ шарты аткарылат. Демек функциянын графиги $\mathrm{O}(0;0)$ координата башталмасына карата симметриялуу жайгашат.

Мезилсиз функция, анткени $f(x+\mathrm{T}) = \frac{(x+\mathrm{T})^3}{1-(x+\mathrm{T})^2} = \frac{x^3}{1-x^2} = f(x)$ теңдештиги орун ала тургандай Т саны табылбайт. Бул теңдештик $\mathrm{T} = 0$ болсо гана аткарылып, мезгилсиз (нөл мезгилдүү) болот.

4) $\mathrm{O}x$ огу менен кесилишин табуу үчүн $y = 0$ дейбиз. Анда $\frac{x^3}{1-x^2} = 0$ келип чыгып, бөлчөк алымы нөлгө тең болгондо гана нөлгө барабар болгондуктан, $x = 0$ экенин көрөбүз. Демек, берилген функция координаттык октор менен бир гана $\mathrm{O}(0;0)$ координаталар башталмасында кесилишет.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^3)'}{(1-x^2)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3\,x^2}{-2\,x} = -\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} x = -\infty$ болуп, x аргументи эки багыт боюнча тең чексиз алыстаганда, y мааниси да чексиз алыстоону улантып, $y = a$ сыяктуу горизонталдык түздөрдү бойлоп жүрбөйт же горизонталдык асимптоталарга ээ эмес. Жантык асимптота $y = kx + b$ көрүнүшүндөгү түздүн теңдемеси менен берилип, коэффициенттери

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{1-x^2} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

көрүнүштөрдө табылгандыктан, $y = -x$ түзү жантык асимптота болот.

6) Берилген функциянын туундусу

$y' = \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)' = \frac{3x^2\cdot(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ бөлчөгү болуп, аныкталуу областына кирген бардык $x \neq \pm 1$ чекиттеринде бөлүмү $(1-x^2)^2 > 0$ оң болгондуктан, анын нөлгө тең жана оң же терс белгиде болушу, алымын нөл болушуна жана белгисине жараша болот. Ошондуктан $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x^2) = 0$ теңдештигинен

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$ зарыл шартты канааттандырган стационардык (шектүү) чекиттерин таап, алар аркылуу өткөн учурда $f'(x)$ тин белгилерин тактайбыз.

а) $x < -\sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = x^2(3 - x^2) < 0$; $-\sqrt{3} < x < -1 \Rightarrow$

$f'(x) = x^2(3 - x^2) > 0$ болуп, $f'(x) -$ туундусу $x_3 = -\sqrt{3}$ чекити аркылуу өткөндө белгисин $(-)$тан $(+)$ ка өзгөртөт, анда жетишерлик шарт боюнча бул чекит минимум чекити болуп, функция

$f_{\text{мин.}} = f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ маанисине ээ болот. Функция

$]-\infty, -\sqrt{3}\,]$ аралыгында туундусу $f'(x) < 0$ терс болгондуктан монотондуу кемүүчү, ал эми $[-\sqrt{3}, -1[$ жарым сегментинде $f'(x) > 0$ болгондуктан монотондуу өсүүчү болот.

б) $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$; $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$. Демек $x_1 = 0$ чекити аркылуу өткөндө туундунун белгиси өзгөрбөйт же бул чекитте функция өсүүсүн уланта берип, анын бул чекиттеги $f(0) = 0$ мааниси экстремум боло албайт.

в) $1 < x < \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) > 0$; $x > \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) < 0$. Демек $x_2 = \sqrt{3}$ шектүү чекити аркылуу өткөндө $f'(x) -$ туундусун белгиси $(+)$ тан $(-)$ ка өзгөрүп, $x_2 = \sqrt{3}$ чекити максимум чекити болот

$f_{\text{макс.}} = f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{1-3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Функция $1 < x < \sqrt{3}$ аралыгында монотондуу өсүп, $\sqrt{3} < x < +\infty$ аралыгында кемийт (I – таблицаны кара).

I – таблица x	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$

$f(x)$	кем.	мин.	өсөт	өсөт	экст. жок	өсөт	өсөт	макс.	кем.

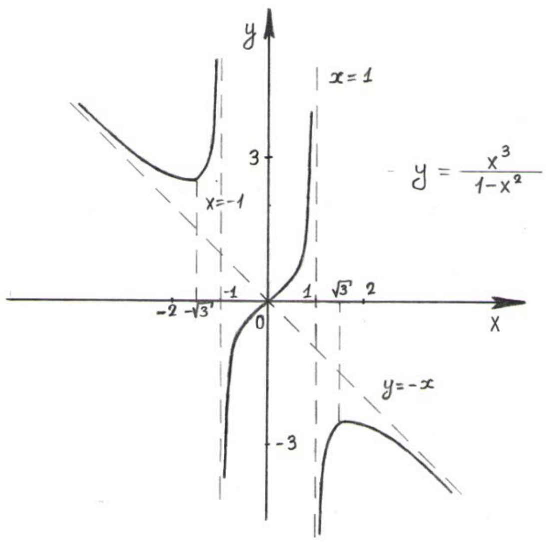
7) Функцияны томпоктук (иймектик) аралыктарын аныктоо үчүн, анын экинчи тартиптеги туундусун $f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$ табабыз. Иймектикке шектүү чекиттер $f''(x) = 0$ теңдемесине чечим болгон жана экинчи тартиптеги туундулары жашабаган чекиттерден тургандыктан, алар $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ чекиттери болушат. Бирок $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ чекиттери аныкталуу областына кирбегендиктен, иймектикке шектүү чекит деп $x_1 = 0$ чекитин гана алып, ал аркылуу өткөндө экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусун белгисин тактайбыз (II – таблицаны кара).

II – таблица x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x < 1$
$f''(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	иймек	томпок	ийилүү чекити	иймек	томпок

8) Жогорудагы маалыматтарга таянып, функциянын графигин 63 – чиймедей тургузабыз.◄

Биз функциялардын предели, үзгүлтүксүздүгү, туундусу жана алардын турмуштук колдонуулары жөнүндө кыскача маалыматтар менен тааныштык. Алар жөнүндө жетишерлик маалыматтарды www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун “Жогорку математика боюнча окума” (2 – бөлүк, VII, VIII, IX – главалардын

§7.1. – §7.2., §8.1. – §8.4., §9.1. – §9.9.) китебинен акысыз окуп үйрөнсө жана көчүрүп алса болот. Негизинен мал карап, айыл чарба менен алектенген Кыргызстандыктардын жашоо турмушу жөнөкөй формада болуп, азырынча көз ирмем сайын өзгөрүлгөн кубулуштардын касиеттерин пайдаланып түзүлгөн техникалык жабдыктарды жасап сатуу муктаждыгын сезе бербейт. Бирок бүгүнкү глобалдашуу процессинде башка улуттар менен атаандашып жашап, кыргыз мамлекетин



63 – чийме

сактап калуу үчүн, өзүбүзгө керектүү турмуштук, согуштук техникаларды жасоону, жок дегенде оңдоп колдонууну өздөштүрүүбүз зарыл. Ошондуктан, “баклавр” – илимий даражасына ээболгон мугалим же башка кесип ээси катары, эгемендүү өлкөбүздүн келечеги илим менен билимге таянган түшүнүшү керек.

Функциянын интегралдары

1. Анык эмес интеграл.

Чөйрөнү таанып билүү процессинде математикалык усулдар негизги каражат катары кызмат кылары белгилүү. Анткени кандай гана кубулуш болбосун аны сандык чени же өлчөмдөрү боюнча айырмалап түшүнүп, ошол сапатта кабыл алууга болот. Кубулуш жүрүп жаткан аймактагы процессти толук билүү үчүн, ошол аймакты чыныгы сандардын мейкиндигине бир маанилүү чагылтууга жөндөмдүү математикалык моделдерди же теңдемелер менен функцияларды түзүп келебиз.

Аалам, сүңгүп жете алгыс чексиз майда жана эбегейсиз өлчөмдөгү чексиз чоң жана кичине бөлүктөрдөн куралгандыктан, чыныгы сандардын түзүлүү табиятын ааламга окшоштуруп, адамдын көз мерчеми жете албаган бөлүктөрдөгү абалдарды предел аппараты менен баалап үйрөнөбүз. Кубулуштардын чекиттерге чейинки абалын майдалап үйрөнүүчү математикалык аппараттар предел аппаратынын жардамы менен түзүлөрү белгилүү. Ошондой аппараттардын бири болгон функцияны дифференцирлөө амалын карап өттүк. Кээде, тескерисинче чекиттерде болуп жаткан майда абалдарды кураштырып, кайсы бир бүтүн кубулушту түптөп үйрөнүүгө туура келет. Математикада мындай кураштырууну “суммалоо” деген маанини түшүндүргөн интегралдоо амалы катарында колдонуп келишет. Ошентип, дифференцирлөө менен интегралдоо амалдарын өз ара тескери амалдар деп эсептөөгө болот.

Def 3. *Эгерде* $f(x)$ *жана* $F(x)$ *функциялары үчүн* $x \in X$ *аралыгында* $F'(x) = f(x)$ (10)

теңдештиги орун алса, анда ушул X *аралыгында* $F(x)$ *функциясын* $f(x)$ *функциясына алгачкы функция деп айтабыз.*

Аныктамада баяндалгандай, берилген X аралыгын ар бир x чекитинде дифференцирленүүчү болгон $F(x)$ функциясы гана, алгачкы функция боло алат.

Мисалы, $F(x) = x^4$ функциясы $X = (-\infty, +\infty) \equiv R$ аралыгында, $f(x) = 4x^3$ функциясына алгачкы функция болот. Ал эми $F(x) = \arcsin x$ функциясы, $X = (-1, +1)$ аралыгында $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясына алгачкы функция болот.

Турактуу сандын туундусу нөлгө тең болгондуктан, (10) дон $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясына алгачкы функция болсо, анда $F(x) + C$ функциясы да алгачкы функция болору келип чыгат ($C - const$). Анткени туунду алуу эрежеси боюнча

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

теңдештиги аткарылат. Ошентип X аралыгында $f(x)$ функциясын алгачкы функциясы жашаса, анда алар чексиз көп болушуп, бири – биринен турактуу C чоңдугуна айырмаланышкан алгачкы функциялар болушат. Эгерде $X = (a,\ b)$ арлыгында $f(x)$ функциясын каалагандай эки $F(x)$ жана $\Phi(x)$ алгачкы функциялары берилишсе, анда X аралыгында алардын айырмасы турактуу сан болорун көрсөтүүгө болот. Чынында эле, алгачкы функциялар катарында алар

$\forall x \in X$: $F'(x) = f(x) \wedge \Phi'(x) = f(x)$ шарттарына баш ийишет десек,

анда дифференцирленүүчү функциялардын айырмасы катарында киргизилген $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ жардамчы функциясы дифференцирленүүчү болуп, Лагранждын чектүү өсүндүлөр боюнча теоремасын шарттарын канааттандыргандыктан, $X = (a,\ b)$ арлыгынан алынган каалагандай эки $x_0,\ x$ чекиттерин арасынан η чекити табылып,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \ \varphi'(\eta) \cdot (x - x_0)$$

теңдештиги орун алат. Экинчи жактан, X аралыгында

$\varphi'(x) = [\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$ болгондуктан,

$\eta \in [x,\ x_0] \subset X \Rightarrow \ \varphi'(\eta) = 0$ келип чыгып, $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$ айырмасын нөлгө тең болорун көрөбүз. Мындан $\varphi(x)$ жардамчы функциясын $[x,\ x_0]$ аралыгында турактуу $\varphi(x_0)$ санына тең болору билинет $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Анда $x,\ x_0$ чекиттери эркин тандалгандыктан, бүтүндөй X аралыгында

$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) \equiv C - const.$ болору келип чыгып, экөө деп алынган алгачкы функциялардын арасында

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

байланышы орун аларына ишенебиз.

Def 4. *$f(x)$ функциясын $X = (a,\ b)$ интервалындагы бардык алгачкы функцияларын тобун, берилген интервал боюнча $f(x)$ функциясынан алынган анык эмес интеграл деп атайбыз жана*

$$\int f(x)\,dx \qquad (11)$$

символу менен белгилейбиз.

Мында $\int -$ интегралдоо белгиси ($S -$ сумма сөзүнүн баш тамгасын көркөмдөп жазуудан алынган), $f(x)dx -$интеграл алдындагы туюнтма, ал эми $f(x)-$ интеграл алдындагы функция, $x-$ интегралдоо өзгөрүлмөсү деп аталышат.

Берилген $f(x)$ функциясын алгачкы $F(x)$ функциясын табуу процессин жүрүшүн же анык эмес интегралды табуу амалын, $f(x)$ функциясын интегралдоо дейбиз. Иш жүзүндө функцияны интегралдоо амалы, берилген туундусу боюнча функциянын өзүн табуу амалы болуп, дифференцирлөөгө (туунду алууга) карата тескери амал болот жана

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad (12)$$

көрүнүштөгү интегралдык формула менен жазылат. Табылган интегралдын $F(x) + C$ маанисин туура экендиги, андан

$[F(x) + C]' = f(x)$ туунду алуу менен текшерилет.

Ошентип, функцияны интегралдоо менен дифференцирлөө өз ара тескери амалдар болушуп, интегралдоо да дифференцирлөө эрежелерине негизделген касиеттерге ээ болот:

1^0 . $f(x)$ функциясын $X = (a,\ b)$ интервалында интегралдануучу функция болушу үчүн, анын ушул аралыкта үзгүлтүксүз алгачкы функциясы жашашы керек.

2^0. Анык эмес интегралдын дифференциалы

$d[\int f(x)\, dx] = f(x)dx -$ интеграл алдындагы туюнтмага барабар.

Далилдөө: ► $\forall x \in X\colon F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; d[\int f(x)\, dx] =$

$= d[F(x) + C\,] = d[F(x)] + 0 = F'(x)dx = f(x)dx$ болот. ◄

3^0. Анык эмес интегралдын туундусу

$[\int f(x)\, dx]' = f(x)$ эрежеси менен эсептелет.

Далилдөө: ► $[\int f(x)\, dx]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. ◄

4^0. Калагандай функциянын дифференциалынан алынган анык эмес интеграл, ал функциянын өзүнө С турактуу санын кошконго барабар: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Далилдөө: ► $\forall x \in X: F'(x) = f(x) \Rightarrow \int dF(x) = \int F'(x)dx =$

$= \int f(x)\, dx = F(x) + C$. ◄

5^0. Каалагандай a $(a \neq 0)$ турактуу санын анык эмес интегралдын белгисинин сыртына чыгарууга болот:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

6^0 . Чектүү сандагы интегралдануучу функциялардын суммасын (айырмасын) интегралы, кошулуучулардын интегралдарын суммасына (айырмасына) барабар:

$$\int \left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) dx\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x) dx.$$

Элементардык функцияларды интегралдоо таблицасы

Элементардык функциялардын туундусун эсептөө таблицасын негизинде жогорудагы $1^0 - 6^0$ касиеттерди эске алып, элементардык функцияларды интегралдоо таблицасын түзө алабыз, б.а. *Def 3 кө* таянып, элементардык функциялардын (10) теңдештиги орун ала тургандай алгачкы функцияларын аныктап, аларды (12) интегралдык формула көрүнүштөрүндө жазабыз:

1. $\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$, $x > 0$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $0 < a \neq 1$. Эгерде $a = e$ болсо, $\int e^x\, dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C,\ x \neq n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1,$ жалпы учурда

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + \text{C}, \quad |x| < |a|$ көрүнүшүндө жазылат.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, ($|x| > |a|$ *болсо* " $-$ " *алынат*).

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + C$, жалпы учурда

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \text{arctg} \frac{x}{a} + \text{C}$ көрүнүштө болот.

11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{|a+x|}{|a-x|} + C, \ |x| \neq a.$

12. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C.$

13. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C.$

14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = -th\, x + C$.

15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C, \ x \neq 0.$

Түзүлгөн таблицанын туура экендигин ишенүү үчүн, оң жактарынан туунду алып, анын сол жагындагы интеграл алдындагы функцияларга тең болорун текшерүү жетиштүү болот. Ошентип, элементардык функциялардын анык эмес интегралын табууда, ар бир жолу алгачкы функцияны издөө убарагерчилигин тартпастан, интеграл алдындагы функцияларды арифметикалык жана алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн, амалдардын жардамы менен жогорудагы 1 – 15 таблицалык көрүнүштөрдүн бирине келтирип, аны тикелей колдонууга аракет кылабыз.

Мисалы, 1) $\int \left(\frac{(1+x)^2}{x^3+x} + \sin x\right) dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)} dx +$

$+ \int \sin x\, dx = \int \frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)} dx + \int \sin x\, dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \sin x\, dx =$

$= \ln|x| + 2\text{arctg}\, x - \cos x + C$.

2) $\int \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$.

3) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{1+\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}} + C.$

4) $\int \frac{5\cdot 7^x + 2\cdot 3^x}{21^x}dx = 5\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx + 2\int \left(\frac{1}{7}\right)^x dx = 5\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + 2\cdot\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln\frac{1}{7}} + C\,.$

5) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^3 - 2 + x^{-3})\,dx =$

$=\int x^3\,dx - 2\int dx + \int x^{-3}dx = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C\,.$

Интегралдоо усулдары:

1. Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt;$

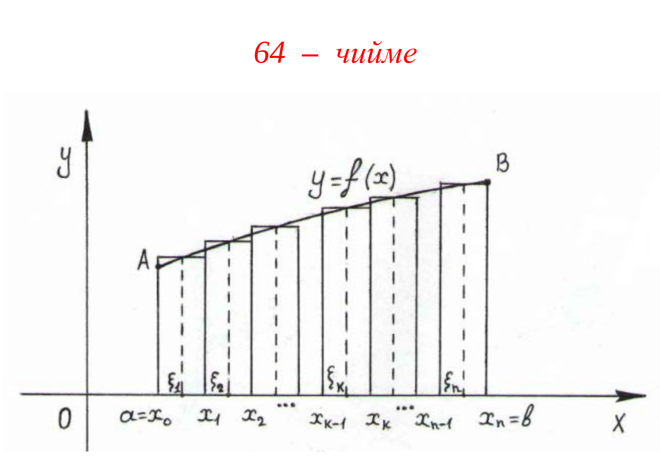
2. Бөлүктөп интегралдоо $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du + C$, же

$\int v\,du = u\cdot v - \int u\,dv + C;$

2. Анык интеграл.

Жалпак фигуранын аянтын эсептөө. R^2 мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгашкан фигураларды жалпак фигура деп айтып, алардын арасынан үч бурчтук, төрт бурчтук, трапеция, параллелограмм, тегерек сыяктуу айрым жалпак фигуралардын аянттарын эсептөөчү конкреттүү геометриялык формулалар бар экендигин билебиз. Бирок, математикада интеграл аппараты ойлонулуп табылганга чейин, эркин формадагы жалпак фигуралардын аянттарын эсептөөчү универсалдык формуланы келтирип чыгаруу мүмкүн болгон эмес.

64 – чийме



Математикада, интеграл майда бөлүкчөлөрдөгү маалыматтардан курaштырып же суммалап жалпы бир бүтүн нерсе жөнүндө маалымат алуучу аппарат катарында колдонулат. Мисалы кайсы бир жалпак фигураны, Oxy

координаталар системасында төмөн жагынан Ox огу, каптал жактарынан $x = a,\ x = b$ түздөрү, жогору жагынан $y = f(x)$ функциясынын графиги менен чектелип турган $ABCD$ ийри сызыктуу трапециясы катарында сүрөттөө мүмкүн болсун (64 – чийме). Мындай фигуранын аянтын эсептөөчү атайын геометриялык формула болбогондуктан, аянты эсептөөнүн жаңы усулун келтирип чыгарабыз.

$y = f(x)$ функциясын $[a, b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз функция деп эсептеп, берилген $a \leq x \leq b$ аралыгын эркин алынган x_k чекиттери аркылуу n сандагы майда бөлүкчө – кесиндилерге бөлөлү ($k = 0, 1, 2, \ \dots, n$) :

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_{n-1} < x_n = b$. Натыйжада, $[a, b]$ сегменти узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон $[x_{k-1},\ x_k] -$ бөлүкчөлөргө бөлүнөт. Бул бөлүкчөлөрдүн ар биринен эркин тандалган ξ_k чекиттерин алып бийиктиги $f(\xi_k)$, негизинин узундугу Δx_k болгон тик бурчтуктун аянтын $s_k \approx f(\xi_k)\,\Delta x_k$ көрүнүштө жакындаштырып эсептейбиз.

$ABCD$ ийри сызыктуу трапециясын аянтын жакындаштырылган түрдө $n -$ сандагы бөлүкчө тик бурчтукчалардын s_k аянттарын

$$S_{ABCD} \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 \ + \ f(\xi_2)\,\Delta x_2 \ + \ \dots + \ f(\xi_n)\,\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (13)$$

суммасы катарында кароого болот. Иш жүзүндө тик бурчтукчалар накта тик бурчтук болбостон, жогору жагында $[x_{k-1},\ x_k] -$ бөлүкчөсүнө туура келген $f(x)$ тин графигин жаачасы турат. Ал эми (1) суммасында: жогору жагынан жаачалар менен чектелген тик бурчтукчалардын ордуна, бийиктиги $f(\xi_k)$, негизи $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон накта тик бурчтукчалар алынып (65 – чийме) , $ABCD$ ийри сызыктуу трапециясы негизи Δx_k , бийиктиги $f(\xi_k)$ болгон секиче тик бурчтукчалардын суммасы катарында каралган. Натыйжада ийри сызыктуу трапеция секиче тик бурчтукчалар менен капталып, анын аянты сезилбес каталык кетирүү менен, секиче тик бурчтукчалардын аянттарынын суммасы менен алмаштырылган.

$[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчө кесиндилерин $\Delta x_k -$ узундуктарынын эң чоңун λ деп белгилейли $\lambda = \underbrace{max}_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$. Эгерде λ саны чексиз кичинерсе $\lambda \to 0$, б.а. бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйсө $n \to \infty$, анда бөлүүлөрдөн пайда болгон тик бурчтукчалардын эни (негизи) чексиз кичинерип, (13) сумма эни кыскарып сызыкчаларга айланып бара жаткан тик бурчтукчалардын аянттарынын суммасы катарында, $S_{ABCD} -$ ийри сызыктуу трапециясын накта аянтына умтулуп жөнөйт. Демек, берилген ийри сызыктуу трапециянын катасыз аянты деп,

$$S_{ABCD} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k \qquad (14)$$

суммасын пределдик маанисин түшүнөбүз. Ошондуктан (14) предели кандай учурда жашайт же чектүү мааниге ээ болот, деген суроого жооп издөөгө туура келет.

2. Материалдык чекиттин баскан жолу. Убакыттын $t = t_0$ ирмеминен $t = T$ убактысына чейинки аралыкта, t убактысына жараша өзгөрүлмө $v = f(t)$ мыйзамы боюнча сызыктуу кыймылда болгон материалдык чекиттин баскан жолунун $S -$ узундугун табалы.

Убакыт өзгөргөн мезгилди $[t_0,\ T]$ сегменти деп, бул аралыкты n майда бөлүкчө убакыттарга бөлөлү:

$t_0 < t_1 < t_2 < \ \dots\ < t_{n-1} < t_n = T$. Айталы, материалдык чекиттин ылдамдыгы убакыттын жетишерлик кичине $[t_{k-1},\ t_k]$ аралыгында анчалык өзгөрө бербесин. Ошондуктан ар бир бөлүкчөдө материалдык чекиттин орточо ылдамдыгын сезилбес каталык менен турактуу деп эсептеп, ар бир бөлүкчөдөн эркин тандалган τ_k ирмеминдеги ылдамдыкты $v_k = f(\tau_k)$ санына барабар деп алалы ($t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$). Андай болсо, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ убагында материалдык чекит анча чоң эмес каталык менен эсептегенде $s_k = f(\tau_k)\Delta t_k$ жолун басып өтөт ($v = \frac{s}{t}$, $s = v \cdot t$). Ал эми, убакыттын $[t_0,\ T]$ аралыгында жакындаштырылган түрдө

$$S \approx S_n = s_1 + s_2 + \ \dots + s_n = f(\tau_1)\Delta t_1 + \ \dots + f(\tau_n)\Delta t_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k \quad (15)$$

жолун басып өтөт.

Убакыттын Δt_k бөлүкчөлөрүнүн эң узунун $\lambda = \underbrace{max}_{1\le k\le n}\{\Delta t_k\}$ деп белгилейли, анда $\lambda \to 0$ чексиз кичинерсе , же бөлүүлөрдүн саны чексиз $n \to \infty$ көбөйсө, убакыттын Δt_k бөлүкчөлөрү чексиз кыскарып бир ирмемге же чекиттин абалына умтулат. Анда $v_k = f(\tau_k)$ убакыттын кайсы бир $[t_{k-1},\ t_k]$ аралыгына туура келген орточо ылдамдыкты мүнөздөбөстөн, ар бир τ_k убактысындагы (чекитиндеги) ылдамдыкты мүнөздөйт. Ал эми жогорудагы сумма, өзгөрүлмө кыймылдагы материалдык чекиттин жолунун накта (катасыз) узундугуна умтулуп жакындайт.

Ошентип, убакыттын $[t_0,\ T]$ аралыгында t га карата өзгөрүлмө $v = f(t)$ ылдамдыгы менен кыймылдаган материалдык чекит,

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k \qquad (16)$$

пределин S маанисине барабар болгон узундуктагы жолду басып өтөт. Демек (14), (16) пределдери чектүү маанилерге ээ болгон учурда гана, ийри сызыктуу трапециянын жана материалдык чекиттин басып өткөн жолунун универсалдык формулаларын таба алган болобуз.

Жогорудагы мисалдарда моделдештирилген ийри сызыктуу трапециянын аянтын жана материалдык чекиттин басып өткөн жолун табуу маселелерин, жалпы эле $[a, b]$ сегментинде аныкталган каалагандай үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясы үчүн жайылталы ($f(x) \in$ C$[a, b]$) . $[a, b]$ сегментин эркин ыкмада x_k чекиттери аркылуу узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон n майда бөлүктөргө бөлүп ($k = 1, 2, \dots, n$), ар бир $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөлөрүн каалаган жеринен ξ_k чекиттерин ($x_{k-1} \le \xi_k \le\ x_k$) алып,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (17)$$

суммасын түзөлү.

Бөлүүлөр эркин ыкмада жүргүзүлүп, ξ_k чекиттери эркин алынгандыктан, ар бир тандоолорго жараша түзүлгөн (17) суммалары ар башка болуп, $f(x)$ функциясын $[a,b]$ аралыгындагы интегралдык суммалары деп аталышат, алардын чоңдугу $[a,b]$ сегментин бөлүү усулуна жана ξ_k чекиттерин тандоого жараша өзгөрүп турушу мүмкүн.

$[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчө кесиндилерин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ узундуктарынын эң чоңун λ деп белгилейли $\lambda = \underbrace{max}_{1\le k\le n} \{\Delta x_k\}$.

$$J = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (18)$$

***Def* 5.** $[a,b]$ *аралыгын* ($a < b$) *кандай ыкма менен майда* n *бөлүккө бөлгөнүбүзгө жана* ξ_k *чекиттерин кантип тандаганыбызга карабастан, ар дайыма (18) пределдин мааниси бир гана чектүү* J *санына барабар болсо, анда* J *саны* $f(x)$ *функциясынан* $[a,b]$ *аралыгы боюнча алынган Римандын маанисиндеги анык интеграл деп аталып,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ символу менен белгиленет.}$$

$\int_a^b f(x)\,dx -$ *символу*: “$f(x)$ функциясынан a дан b га чейинки алынган анык интеграл” – деп окулат жана

$$J = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (19)$$

теңдештиги аткарылат. Мында $f(x) -$ интеграл алдындагы функция, $f(x)\,dx -$ интеграл алдындагы туюнтма, $x -$ интегралдоо өзгөрүлмөсү, ал эми a, b сандары тиешелүү түрдө анык интегралдын төмөнкү жана жогорку пределдери деп аталышат. x өзгөрүлмөсү бир өлчөмдүү Ox

огуна таандык $[a, b]$ кесиндисинде өзгөргөндүктөн, (19) ну сызыктуу интеграл деп да айтабыз.

Анык интеграл аппаратын түзүлүү табияты, майда бөлүкчөлөрдү суммалоо жана пределге өтүү амалдары менен түшүндүрүлгөндүктөн, $[a, b]$ аралыгындагы чектүү сандагы айрым бир чекиттерде $f(x)$ функциясы коңшу чекиттерден айырмаланып, чектүү секирик көрүнүштө өзгөрсө же болбосо I – роддогу үзүлүшкө ээ болсо деле, (19) пределин чектүү маанисин жашашына тоскоолдук кыла албайт.

Ошондой эле, *Def 5* – аныктамада $[a, b]$ аралыгы боюнча алынган анык интеграл $a < b$ болгон учур үчүн баяндалгандыктан:

1) $b = a$ болсо, анда $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

2) $b < a$ болсо, анда $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ болорун эскерте кетебиз.

Def 5 – аныктамага ылайык, 64 – чиймеде сүрөттөлгөн ийри сызыктуу трапециянын аянты $S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx$, ал эми материалдык чекиттин басып өткөн жолу $S = \int_{t_0}^T f(\tau)\,d\tau$ формулалары менен эсептелишет. *Def 5* – аныктамасы колдонуп, $[-1,\ 4]$ аралыгы боюнча

1) $\int_{-1}^4 (1 + x)dx$ анык интегралын эсептеп көрөлү.

►Аралык эркин ыкмада майда бөлүктөргө бөлүнө бергендиктен, $[-1,\ 4]$ аралыгын барабар n бөлүктөргө бөлөлү: Анда ар бир бөлүкчөнүн узундугу турактуу

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{4-(-1)}{n} == \frac{5}{n} = \lambda$ санына барабар болуп ($k = 1, 2, \ldots, n$), берилген аралык

$[x_{k-1},\ x_k] = \left[-1 + \frac{5(k-1)}{n}, -1 + \frac{5\,k}{n}\right]$ бөлүкчөлөрүнө бөлүнөт. Ар бир бөлүкчөлөрдөн эркин алынган ξ_k чекити деп, бөлүкчөлөрдүн сол четиндеги $\xi_k = -1 + \frac{5(k-1)}{n}$ чекиттерин алалы. Анда $f(x) = 1 + x$ функциясынын $[-1,\ 4]$ сегментиндеги интегралдык суммасы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \left(-1+\frac{5(k-1)}{n}\right)\right]\frac{5}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{25(k-1)}{n^2}\right] = \frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$$

$$= \frac{25}{n^2}\cdot\frac{0+\ n-1}{2}\cdot n = \frac{25(n-1)}{2n} = \frac{25}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

көрүнүшүндө түзүлөт. Сумманы эсептөөдө арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын $s_n = \frac{a_1+a_2}{2}\cdot n$ формуласы пайдаланылды. Ал эми анык интеграл сумманын $\lambda \to 0 \iff n \to \infty$ умтулгандагы предели катарында

$\int_{-1}^{4}(1+x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{25}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$ көрүнүштө эсептелет.

ξ_k чекитин бөлүкчө аралыкчанын оң чети $\xi_k = -1+\frac{5\,k}{n}$ деп алып, башка бир интегралдык сумма түзсөк, анын предели да $\frac{25}{2}$ санына барабар болорун текшерип көрүүгө болот.◄

2) Кайсы бир тело убакыттын ар бир t ирмеминде $v(t) = t^2\ ^{м}/_{сек}$ өзгөрүлмө ылдамдыгы менен кыймылда болсо, анда телонун $t = 0$ убатысынан $t = b$ убактысына чейин басып өткөн жолун узундугун тапкыла.

► Убакыттын $[0,\ b]$ аралыгын барабар n майда бөлүктөргө бөлсөк, ар бир бөлүкчө $\Delta t = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n} = \lambda$ узундугуна ээ болуп, $k-$ бөлүк убакыттын $t_k = \frac{b\,k}{n}$ ирмеминен $t_{k+1} = \frac{b\,(k+1)}{n}$ ирмемине чейин уланат.

Оболу убакыттын $[t_k,\ t_{k+1}]$ бөлүкчөсүндө телонун ылдамдыгын кайсы бир каталык менен t_k ирмеминдеги ылдамдыкка $v(t_k) = (t_k)^2$ барабар деп алсак, анда убакыттын бул бөлүкчө аралыгында басылган жол $s_k \approx v(t_k)\,\Delta t = (t_k)^2\,\Delta t$ көрүнүштө эсептелет. Бул учурда, b убактысына чейин жалпы жолдун узундугу жакындаштырылган түрдө,

$$S(b) \approx s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} = {t_0}^2\,\Delta t + {t_1}^2\,\Delta t + \cdots + {t_{n-1}}^2\,\Delta t$$
$$= \sum (t_k)^2\,\Delta t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b\,k}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

көрүнүштө табылат.

Бөлүүлөрдүн n санын чексиз көбөйтсөк, $n \to \infty \Leftrightarrow \lambda \to 0$ умтулуп, кетирилген каталык азайып, жолдун узундугун эсептөө тактыгы чоңо*ёт*. Демек, эсептөөнү талап кылган жолдун катасыз, накта узундугу

$$S(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n^2} = \frac{b^3}{3}$$

санына барабар болот.

$\int_0^b t^2 \; d\,t$ анык интегралына интегралдык сумма $\sum_{k=0}^{n-1} (t_k)^2 \, \Delta t$

көрүнүштө болгондуктан, убакыттын $[t_k,\; t_{k+1}]$ бөлүкчөсүндө телонун ылдамдыгы орточо t_{k+1} ирмеминдеги ылдамдыкка барабар деп, башка бир интегралдык сумма түзсөк деле

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1})^2 \, \Delta t = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6},$$

анын $n \to \infty$ умтулгандагы предели

$S(b) = \int_0^b t^2 \; d\,t = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^3} = \frac{b^3}{3}$ келип чыгып, b убактысында телонун басып өткөн жолу $S(b) = \int_0^b t^2 \; d\,t = \frac{b^3}{3}$ анык интегралына барабар болорун көрөбүз. ◄

4) Анык интегралдын аныктамасына таянып, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \;\; dx$ эсептегиле.

► $\left[0,\; \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисин

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2n},\ x_2 = \frac{2\pi}{2n},\ \ldots, x_k = \frac{k\pi}{2n}, \ldots,\ x_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ чекиттери аркылуу барабар n майда бөлүктөргө бөлсөк, ар бир бөлүкчө кесиндинин узундугу $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$ турактуу болот.

ξ_k чекити катарында, $k-$ бөлүкчөлөрдүн оң $\xi_k = \frac{(k+1)\pi}{2n}$ учтарын тандап, интегралдык сумманы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\xi_k \cdot \frac{\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$$

түзөбүз. Кашаанын ичиндеги сумманы

$P_n = \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$ деп белгилеп, анын эки жагына тең $2\sin\frac{\pi}{4n}$ көбөйтүп, оң жагындагы тригонометриялык функциялардын көбөйтүндүлөрүнө суммага ажыратуу формуласын колдонсок:

$$2\sin\frac{\pi}{4n} \mathrm{P}_n = 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{2n} + 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{2\pi}{2n} + \ \ldots + 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{2n}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{2n}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{2\pi}{2n}\right) +$$

$$+ sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{3\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \sin\frac{3\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{5\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n} + \sin\frac{7\pi}{4n} - \sin\frac{5\pi}{4n} +$$

$$+ \ \ldots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{4n} - \sin\frac{(2n-3)\pi}{4n} = -\sin\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{(2n-1)\pi}{4n} = \left|\begin{matrix}\text{көбөйт.}\\ \text{өзгөртсөк}\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\sin\frac{\frac{(2n-1)\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{(2n-1)\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}}{2} = 2\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \text{ же}$$

$2\sin\frac{\pi}{4n} \mathrm{P}_n = 2\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$ келип чыгат.

Мындан $\mathrm{P}_n = \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$ таап, интегралдык сумманы

$S_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \mathrm{P}_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$ көрүнүшүнө келтирип, $n \to \infty$ умтулганда $\sin\frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n}$ экендигин эске алып пределге өтсөк,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4n}} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} =$$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ жообуна ээ болобуз. ◄

Функиянын интегралдануучу болуусуна коюлган шарттар

I$_{\textbf{зарыл шарт}}$. *$f(x)$ функциясын $[a, b]$ сегментинде интегралдануучу болушу үчүн, анын ушул аралыкта чектелген болушу зарыл шарт болуп эсептелет.*

II$_{\textbf{\textit{жетишерлик шарт}}}$. *$[a, b]$ арлыгында үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясы, ушул аралыкта интегралдануучу болот.*

III$_{\textbf{жетишерлик шарт}}$. *$[a, b]$ сегментинде монотондуу жана чектелген $f(x)$ функциясы интегралдануучу болот.*

IV$_{\textbf{жетишерлик шарт}}$. *$f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментинде чектелген болуп, чектүү сандагы чекиттерде I – түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ болсо деле, интегралдануучу болуп кала берет.*

$f(x)$ функциясы, $[a, b]$ аралыгындагы (сегментиндеги) кайсы бир кубулуштардын математикалык тилде жазылган моделдери болгондуктан, жогорудагы интегралдануучулук шарттары, кандай кубулуштарды интеграл аппараты менен үйрөнүүгө болорун көрсөтөт.

Функциялардын предели, үзгүлтүксүздүгү, туундусу, интегралы жана алардын касиеттери боюнча кыскача маалыматтар менен чектелдик, интегралдар жана алардын практикалык колдонуштары боюнча кеңири маалыматтарды: www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан М. Мамаюсуповдун “Жогорку математика боюнча окума” (2 – бөлүк, VII, VIII, IX главаларынын §7.1. – §7.2., §8.1. – §8.4., §9.1. – §9.7., 3 – бөлүк, XI, XII главаларынын §11.1. – §11.3., §12.1. – §12.5.,) китебинен акысыз окуп үйрөнсө жана көчүрүп алса болот.

§9. Өзгөрүлмө кубулуштардын математикалык тилде жазылыштары. Дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү

Жаратылыш кубулуштарын окуп үйрөнүүдө жана аны турмушта колдонууда, жаратылыштын закондоруна таянабыз. Бирок чексиз ааламдын кубулуштарын баары эле көзгө көрүнүп, кол менен кармап үйрөнө тургандай деңгээлде түшүнүктүү боло бербейт. Алар өзгөргөн мыйзамдар да, көзгө көрүнгөндөй далили жок болуп, абстракттуу мүнөздө болушат. Ошондуктан көзгө көрүнгөн, өзгөрүүсү туюлган кубулуштарды математикалык тилде моделдештирип жазуу үчүн, туруктуу сандар жана алардын кыймылдарын, өз ара аракеттерин мүнөздөгөн төрт амалдар жетиштүү болот. Мисалы: “*Асанда 30 кой, 50 тоок, 5 жылкы, 10 уй болсо, анда Асандын жылдык кирешесин эсептөө*” – маселесинде эч кандай $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ сыяктуу тригонометриялык функцияларды жана $\int f(x)dx -$ интеграл менен $f'(x) -$ туунду өңдүү түшүнүктөрдү билүүнүн зарылчылыгы жок. Бирок дүйнө элдеринин баары эле, бизге окшош жөнөкөй малчылык менен дыйканчылыкка негизденген турмуш – тиричилик кечиришпей, бири көтөрүлүү жана түшүү бурчтары $(tg\, x)$ менен башкарылган согуштук куралдарды, учуучу жана сүзүүчү техникаларды, кайсы бири термелүү процесстерине $(\sin x,\ \cos x)$ байланышкан технологияларды жасаган инженердик менен тиричилик өткөрүп, дүйнөнүн бай – бакубат жашаган бөлүгүн түзүп келишет. Ошентип, адамдардын жашоо талаптарына жараша түзүлгөн кырдаалдардан чыгуу муктаждыгы, алардын кайсы бир кубулуштардын, окуялардын өзгөрүү мыйзамдарын математикалык тилде моделдештирип үйрөнүүгө болгон ынтызардыгын ойготот. Ал закондор математиканын тилинде моделдештирилип, түзүлгөн моделдерди изилдөө менен таанылып үйрөнүлөт жана адамдардын турмуш практикасында колдонулат.

Математикалык модели жок эле үйрөнсө болбойбу? – деген суроо туулушу мүмкүн. Эгерде модель түзбөсөк, анда кубулуштарды жанында жүрүп, көзүбүз менен көрүп, колубуз менен кармап үйрөнүүгө туура келет. Бирок адамдын мүмкүнчүлүгү чектелүү, ал чексиз кичине микроб сыяктуу бөлүкчөнү же чексиз асман мейкиндигиндеги телону аралай –

ээрчип жүрүп, аларды үйрөнүүгө кудрети жетпейт. Ошондуктан, физиканын, техниканын, химиянын, биологиянын, экономиканын жана башка көп тармактардын маселелери, ушул тармактардын закондорунун негизинде түзүлгөн математикалык модель – теңдемелерди чыгаруу менен ишке ашырылганына күбө болуп жүрөбүз. Эгерде теңдемеде:

1. белгисиз чоңдуктар сандар болсо, анда аны **алгебралык теңдеме**;

2. белгисиздер функциялар болсо **функционалдык теңдеме**;

3. белгисиздер функциялар, анын туундулары жана аргументтери болсо **дифференциалдык теңдеме;**

4. белгисиздер интеграл алдындагы функциялар, анын туундулары жана аргументтери болсо **интегралдык теңдеме**

деп айтабыз.

Ошентип дифференциалдык теңдеме, бир же бирден көп өзгөрүлмө чоңдуктарды, ал өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон белгисиз функцияны жана анын туундуларын кармап турат. Эгерде белгисиз функция жана анын туундулары бир өзгөрүлмөлүү болсо, анда дифференциалдык теңдеме **кадимки дифференциалдык** теңдеме, ал эми белгисиз функция көп өзгөрүлмөлүү болсо, анда **жекече туундулуу дифференциалдык** теңдеме же **математикалык физиканын** теңдемеси деп аталышат. Бирок, атайын эскертүү болбосо кадимки жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин экөөсүн тең эле дифференциалдык теңдемелер деп атап, практикалык зарылчылыкка жараша окуп үйрөнүп колдоно беребиз.

Эң жөнөкөй дифференциалдык теңдемеге мисал катары $y' = f(x)$ теңдештигин канааттандыруучу $y = y(x)$ функциясын табуу маселесин келтирүүгө болот. $f(x)$ белгилүү функция болгондо, берилген теңдеме

$$y = \int f(x)\,dx + C = \Phi(x) + C$$

көрүнүштөгү чыгарылышка ээ. Мында $\Phi(x)$ деп $f(x)$ функциясынын алгачкы функциясы, ал эми С менен каалагандай турактуу сан белгиленген. Бул дифференциалдык теңдеменин бири – биринен С турактуусуна айырмаланган чексиз көп чыгарылыштарга ээ болоруна күбө болобуз.

Дифференциалдык теңдемедеги белгисиз функциянын туундусунун **эң жогорку тартиби**, ал дифференциалдык теңдеменин **тартиби** деп аталат. Мисалы

$y' - x \cdot y^{99} + y = 0$ же $F(x, y, y') = 0$, 1 – тартиптеги;

$y'' + \sin x\, y' + y = 0$ же $F(x, y, y', y'') = 0$, 2 – тартиптеги;

$7y^V + y' + y - x^2 + 3 = 0$ же $F(x, y, y', y'', \dots, y^V) = 0$, 5 – тартиптеги дифференциалдык теңдемелер болушат.

Жалпы учурда x өзгөрүлмөсүнө карата $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ белгисиз функцияларын кармаган $n-$ тартиптеги дифференциалдык теңдемени

$$F\big(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\big) = 0, \qquad (1)$$

$n + 2$ өзгөрүлмөлүү айкын эмес функция көрүнүшүндө берүүгө болот. (1) жазылышында теңдеменин тартибин көрсөткөн $y^{(n)}(x)$ туундусу сөзсүз катышат, калган тартиптеги туундулары катышпай калышы да мүмкүн. Мында $n = 1,\ 2,\ 3, \dots$.

Айрым учурда (1) ди жогорку $n-$ тартиптеги туундусуна карата чыгарылган

$$y^{(n)} = F\big(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}\big) \qquad (1^A)$$

көрүнүшкө келтирип жазышат.

(1) теңдемесин кайсы бир жекече учуру катарында эсептелген n – тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемени, жалпы учурда

$$a_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (2)$$

көрүнүштө жазабыз.

Мында $a_n(x)$, $a_{n-1}(x),\dots, a_1(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$ белгилүү функциялар жана $a_n(x)$ функциясы аныкталуу областында нөлгө барабар эмес, анткени ал туундунун тартибин көрсөткөн $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ ке коэффициент болуп турат (*$a_n(x)= 0$ болсо, анда теңдеме n – тартипте болбой калат).* Ошондой эле $a_0(x)$, $a_1(x),\dots,a_n(x)$ функциялары (2) **дифференциалдык теңдеменин коэффициенттери**, ал эми $f(x)$ функциясы **бош мүчө** деп аталышат.

Эгерде теңдемеде $y(x), y', y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ белгисиз функцияларын бирөөсү же бир канчасы, башка бир функциянын суперпозициясы катары катышса, анда аны **сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме** дейбиз.

Эгерде аныкталуу областын бардык чекиттеринде $f(x) \equiv 0$ нөлгө барабар болсо ($f(x)$– нөлдүк функция), анда (2) теңдеме n – тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемеге айланат.

Мисалы,

а) $\frac{dx}{dt} = x^3 + t^6 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} - x^3 = - t^6$ теңдемеси, $x(t)$ –белгисиз функциясына карата биринчи тартиптеги бир тектүү эмес жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот. Анткени $x(t)$ –белгисиз функциясы үчүнчү даражада катышып, башка бир $x = u$, $u = x^3$ функциянын суперпозициясы (татаал функция) катарында катышууда.

б) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = x^4 +5x$

$y(x)$ - белгисиз функциясын, анын биринчи туундусу $y'(x)$ ти жана экинчи туундусу $y''(x)$ ти кармаган, экинчи тартиптеги бош мүчөсү $f(x) = x^4 +5x$ болгон бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот.

в) $x^4 y''' + (y')^3 + y^2 = x^7$

дифференциалдык теңдемеси үчүнчү тартиптеги бир тектүү эмес жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот. Анткени белгисиз $y(x)$

функциясы экинчи даража, y' - туундусу үчүнчү даража көрсөткүчтөрү менен катышып, көрсөткүчтүү татаал функциянын аргументтери катарында эсептелүүдө.

г) $y^{(IV)} = \ln (x y''') + \ln (x^2 y'') + y^3$

теңдемеси жогорку туундусуна карата чыгарылган 4 – тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот.

д) $(x^2+1) y''' + (\ln x) y'' + (\cos x) y' + y = e^x$

теңдемеси *3* – тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот. Себеби бул теңдеме (2) теңдеменин $n = 3$,

$a_3(x)= x^2+1$, $a_2(x) = \ln x$, $a_1(x) = \cos x$, $a_0(x)=1$, $f(x) = e^x$ болгондогу айрым бир учуру.

е) $(1 + x^4) y'' + (\cos x) y' + (\arcsin x) y = 0$

теңдемеси *2* – тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот. Себеби бул теңдеме (2) теңдеменин $n = 2$,

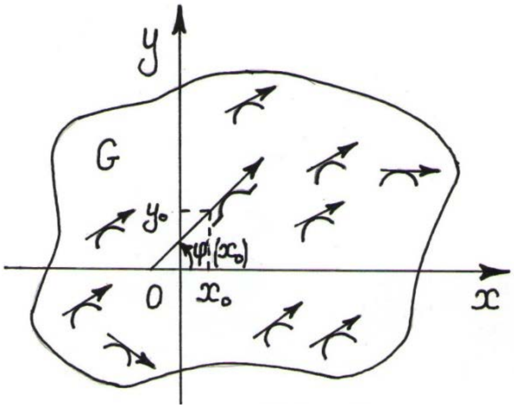
$a_2(x)= 1+ x^4$, $a_1(x) = \cos x.$ $a_0(x)=\arcsin x$, $f(x) = 0$ болгондогу бир айрым учуру.

Эгерде (1) теңдемесине $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$, … , $y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ *маанилерин койгондо (1) теңдештиги аткарылса , б.а. теңдемени канааттандырса, анда* $y = \varphi(x)$ *функциясы (1) теңдемесин чыгарылышы деп аталат.*

Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын (чечимин) табуу маселеси теңдемени ***интегралдоо маселеси*** *деп аталат. Ал эми дифференциалдык теңдеменин* $y = \varphi(x)$ *чыгарылышын графиги, дифференциалдык теңдеменин* ***интегралдык ийриси*** *деп аталат.*

Дифференциалдык теңдеменин чексиз көп интегралдык ийрилери бар. Мисал катары 1 – тартиптеги $F(x, y, y') = 0$ теңдемесин $y = \varphi(x)$ чечимине геометриялык түшүндүрмө берели. Теңдемени y' ке карата чыгарып, $y' = f(x, y)$ көрүнүштө жазуу мүмкүн болсун дейли. Эгерде $f(x, y)$ функциясы координаттык тегиздиктеги G областында аныкталса, анда теңдеме койгон шартка ылайык G областын каалагандай $(x_0; y_0)$

координаталуу чекитинде $y = \varphi(x)$ функциясын графигине жүргүзүлгөн жаныма түздүн бурчтук коэффициенти $k = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ болушу керек. Ал эми $(x_0; y_0)$ чекити деп G областынан ар кандай чекиттерди ала берсек, анда G областы ар кандай $k = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ бурчтук коэффициенттери менен багыттары аныкталган жанымалардын чексиз көп агымы менен толтурулган болот. Мындай



65 – чийме

агым дифференциалдык теңдеменин **багыттарын талаасы** деп аталат (65 – чийме). Механикалык жактан *y′ = f(x, y)* теңдемесинин $y = \varphi(x)$ чечимин, G областын каалагандай $(x_0; y_0)$ координаталуу чекитинде

$v = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ ылдамдыгына ээ болгон кубулушту сүрөттөөчү функция деп түшүнөбүз.

Мисалдар: 1) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

функциясы $y'' + y = 0$ теңдемесине чыгарылыш болорун көрсөткүлө.

► Берилген $y(x)$ функциясынан эки жолу туунду алып, табылган

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$

маанилерди теңдемеге койгондо

$y'' + y = (-C_1 \cos x - C_2 \sin x) + (C_1 \cos x + C_2 \sin x.) = 0,$

сол жагы да нөлгө тең болуп, теңдештик аткарылат. Демек, берилген функция дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болот.◄

Ошентип, берилген дифференциалдык теңдеменин мүмкүн болгон бардык чыгарылыштары

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x = \varphi(x, C_1, C_2)$

көрүнүштө болуп, алар C_1 жана C_2 эки турактуу сандарына берилген маанилерге жараша өзгөрүп туруучу бир өзгөрүлмөлүү функция болот.

Турактуулардын ар кандай маанилерине жараша дифференциалдык теңдеменин чексиз көп жекече чыгарылыштарын табууга болот. Ал эми $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ теңдеменин **жалпы чыгарылышы** деп аталат. ◄

Ушул логиканы улап, n – тартиптеги (1) теңдемесин мүмкүн болгон бардык чыгарылыштарын кармап турган **жалпы чыгарылышы,** n сандагы ар кандай C_1, C_2 ,…, C_n турактуу сандарынан көз каранды болгон

$$y = \varphi (x, C_1, C_2 ,\ldots, C_n) \qquad (3)$$

функциясы көрүнүшүндө болот деген жыйынтыкка келебиз. Мында

$\varphi (x, C_1, C_2 ,\ldots, C_n)$ деп, $n+1$ өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон белгилүү функцияны түшүнөбүз.

Эгерде (1) теңдеменин (3) чыгарылышындагы C_1, C_2 ,…, C_n *турактууларга белгилүү бир сандык маанилерди берсек, анда ал чыгарылыш (1) теңдемесин жекече чыгарылышы (чечими) деп аталат.*

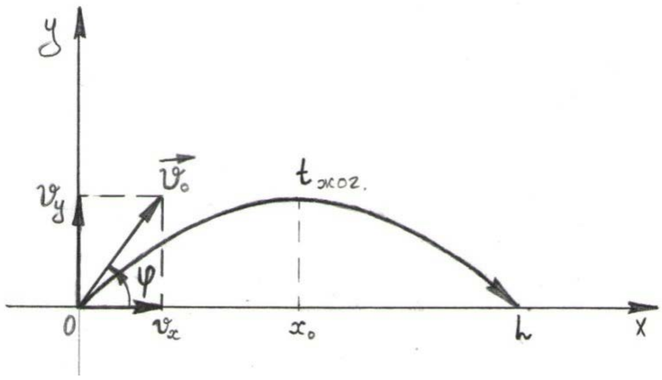
Жекече чыгарылыштар, кайсы бир конкреттүү кубулушту үйрөнүүгө карата коюлган маселенин чыгарылышы болуп, эркин делген C_1, C_2 ,…, C_n турактуулары эркин болбой, ошол конкреттүү кубулуштун мүнөзүнө жараша дифференциалдык теңдемеге коюлган баштапкы жана чек аралык шарттар аркылуу бир маанилүү туюнтулушат.

Мисалдагы теңдеменин $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ жалпы чыгарылышында $C_1 = 0$ жана $C_2 = 1$ болсо,

анда $y = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$ функциясы, ал эми $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -1$ болсо , анда $y = \frac{1}{2} \cos x - \sin x$ функциясы теңдеменин жекече чыгарылыштары болушат.

Эң жөнөкөй өзгөрүлмө кубулуштардын математикалык моделин түзүүгө токтололу:

А) Багбан шлангадан v_0 – баштапкы ылдамдыгы менен агып чыгып жаткан суу менен бакчаны сугарууда. Шлангадан чыгып жаткан суу максималдык узак аралыкка чейин учуп жетиши үчүн, багбан шланганы горизонттон канчалык φ бурчуна кыйшайтып кармоосу керек.



66 – чийме

Чыгаруу: ►Горизонттон φ бурчуна кыйшак учуп чыккан телонун (бизде суу тамчылары) учуу узактыгын математикалык жактан моделдештирели. Суу Oxy – декарттык координаталар системасын О башталыш чекитинен чыгып, L – суунун учуу узактыгы же сугаруу аралыгы, Т – суунун шлангадан чыгып жерге түшкөнгө чейинки толук учуу убактысы болсун. Суунун учуу жолу пароболанын траекториясы боюнча жүрүп, анын убакыт бирдигиндеги $\vec{v}$ ылдамдык векторун горизонталдык Ox огундагы проекциясы $\vec{v}_x = v_0 \cos\varphi$ турактуу саны, ал эми Oy огундагы вертикалдык проекциясы t убактысына жараша өзгөрүлмө

$\vec{v}_y = v_0 \sin\varphi - \mathrm{g}\, t$ саны болот (66 – чийме). Мында $\mathrm{g} \approx 9{,}8$ – оордук күчүн ылдамдануусу болуп, $\mathrm{g}\, t = \left(\frac{\mathrm{g}\cdot t^2}{2}\right)'$ – убакыттын ар бир t моментинде суу тамчыларын жерге тартып турган эркин түшүү ылдамдыгы (жолдон убакыт боюнча туунду, $0 \le t \le \mathrm{T}$) . Анда суу тамчылары Т – убактысын ичинде горизонталдык багыт боюнча $L = \mathrm{T} \cdot v_0 \cos\varphi$ сугаруу аралыгына учуп жете алышат. Т – убактысы, суунун траектория боюнча чокуга жеткенге чейинки $t_{жог.}$ – жогорулоо убактысынан жана чокудан жерге түшкөнгө чейинки $t_{төм.}$ – ылдыйлап төмөндөө убактысынан $\mathrm{T} = t_{жог.} + t_{төм.}$ туруп, жогорулоо жана төмөндөө убактылары $t_{жог.} = t_{төм.}$ барабар болушсун дейли. Учуу траекториясын чокусунда суунун көтөрүлүүсү токтогондуктан $\vec{v}_y = 0$ болуп, $v_0 \sin\varphi - \mathrm{g}\, t_{жог.} = 0$ теңдештигинен

$t_{жог.} = \frac{v_0 \sin\varphi}{\mathrm{g}}$ табабыз. $\mathrm{T} = 2 \cdot t_{жог.} = \frac{2\, v_0 \sin\varphi}{\mathrm{g}}$ маанисин сугаруу аралыгына коюп, $L = \frac{2\, v_0 \sin\varphi \cdot v_0 \cos\varphi}{\mathrm{g}} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{\mathrm{g}} = L(\varphi)$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

функциясына же φ бурчуна жараша **суунун учуу узактыгын математикалык моделине** ээ болобуз. Табылган функциянын туундусун $L'(\varphi) = \frac{2v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$ эсептеп, $L'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2v_0^2 \sin 2\varphi}{g} = 0$ теңдемесинен, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ – шектүү чекитин табабыз. $L(\varphi)$ функциясын эң чоң мааниси

$M = \sup\{L(\varphi)\} = max\left\{L(0), L\left(\frac{\pi}{2}\right), L\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = max\left\{0, 0, \frac{v_0^2}{g}\right\} = \frac{v_0^2}{g}$ келип чыгып, шланганы горизонттон жогору $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$ бурчка кыйшайтып кармаган учурда эң узун $L = \frac{v_0^2}{g}$ сугаруу аралыгына жетерин көрөбүз. ◄

Б) Радиоактивдүү ажыралыш. Эгерде *m(t)* аркылуу *t* убакытысындагы радиоактивдүү заттын массасын белгилесек, анда радиоактивдүү ажыралуу төмөндөгүдөй физикалык законго баш ийет. Ажыралыштын ылдамдыгы терс (себеби убакыт өткөн сайын масса кемийт) жана убакыттын *t* ирмеминдеги заттын массасына пропорциялаш. Мында пропорция коэффициенти *k* белгилүү жана $k < 0$. Бул закон математикалык тилде төмөндөгүдөй жазылат:

$$\frac{dm(t)}{dt} = k\, m(t), \quad k < 0 .$$

Радиоактивдүү ажыралуунун математикалык модели болгон бул теңдеменин жалпы чыгарылышы, $m(t) = Ce^{kt}$ формуласы менен берилет, мында C – эркин туруктуу. Ажыралыш законун толук аныктоо үчүн баштапкы убакыттагы заттын массасы белгилүү болушу керек, б.а.

$m(t_o) = m_o$. ◄

В) Айталы, убакыттын t моментинде базарда В товарын сатылып жаткандыгы жөнүндөгү маалыматты, жалпы N сандагы керектөөчүлөрдүн x сандагысы гана кызыктар болсун дейли. Сатууну уюштурууну тездетүү максатында, массалык маалымат кызматтары аркылуу рекламалар берилген. Натыйжада, В товарын билгендердин саны, биринчиден товар жөнүндө билгендердин башкалар менен бөлүшүүсүнөн, экинчиден реклама аркылуу кабар алгандар болуп, убакыт өткөн сайын алгачкы N сандагы керектөөчүлөрдүн санына $k >$

$0-$ коэффициенти менен пропорционалдуу өсүп олтурары белгилүү. Реклама бергенге чейинки баштапкы N адамдын ичинен $\gamma-$ бөлүгү, же $\frac{N}{\gamma}-$ адам товарды сатып алганга кызыктар дейли.

Анда бул реклама берүүнүн эффективдүүлүгүн математикалык тилде:

$$\frac{dx(t)}{dt}=kx(N-x),$$

$$x(t)|_{t=0}=\frac{N}{\gamma}-\text{ баштапкы шарт}$$

көрүнүштөгү баштапкы шарт менен берилген биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме менен моделдештирилет.

Чыгаруу: ► Теңдемени өзгөрүлмөлөрүнө карата ажыратып

$$\frac{1}{(N-x)}\cdot\frac{dx}{x}=k\,dt\;\Rightarrow\;\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{dx}{N-x}+\frac{dx}{x}\right)=k\,dt\;\Rightarrow\;\frac{1}{N}\cdot\left(-\frac{d(N-x)}{N-x}+\frac{dx}{x}\right)=k\,dt,$$

интегралдасак:

$$\frac{1}{N}\cdot\left[-\int\frac{d(N-x)}{N-x}+\int\frac{dx}{x}\right]=k\int dt\;\Rightarrow\;\frac{1}{N}\cdot[-\ln(N-x)+\ln x]=k\,t+\text{c же}$$

$$\ln\frac{x}{N-x}=Nk\,t+N\text{c}\;\Rightarrow\;\frac{x}{N-x}=e^{Nk\,t+N\text{c}}\;\Rightarrow\;\frac{x}{N-x}=e^{Nk\,t}\cdot e^{N\text{c}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;x=(N-x)e^{Nk\,t}\cdot\text{C}_1\;\Rightarrow\;x(1+\text{C}_1e^{Nk\,t})=\text{C}_1Ne^{Nk\,t}\;\Rightarrow$$

$$x(t)=\frac{\text{C}_1e^{Nk\,t}}{1+\text{C}_1e^{Nk\,t}}$$

функциясы чечим болорун табабыз. Мында эркин турактуу $\text{C}_1=e^{N\text{c}}$ деп белгиленди. Баштапкы шартта $t=0$ убактысында $x(0)=\frac{N}{\gamma}$ болгондуктан, эркин деген C_1 турактуу чоңдугу

$$\frac{N}{\gamma}=\frac{\text{C}_1e^0}{1+\text{C}_1e^0}\;\Rightarrow\;\frac{N}{\gamma}=\frac{\text{C}_1}{1+\text{C}_1}\;\Rightarrow\;\text{C}_1=\frac{\frac{N}{\gamma}}{1-\frac{N}{\gamma}}=\text{A (деп белгилейли),}$$

көрүнүштөгү анык бир мааниге ээ болот. Демек, дифференциалдык теңдеменин баштапкы шартка баш ийген жалгыз гана чечими

$x(t) = \frac{\mathrm{A}e^{Nk\,t}}{1+\mathrm{A}e^{Nk\,t}}$ функциясы болуп, В товарын рекламалоонун натыйжасында, убакыттын ар бир t ирмеминдеги керектөөчүлөрдүн саны, ушул функциянын өзгөрүү мыйзамы аркылуу эсептелет. ◄

Өзгөрүлмө кубулуштарды дифференциалдык теңдемелер аркылуу моделдештирип үйрөнүү усулдары жана алардын практикалык колдонуштары боюнча кеңири маалыматтарды: www.okuma.kg – электрондук (сайт) китепканасынан Р.Рафатов, А. Асанов, М. Мамаюсуповдорун “Жогорку математика боюнча окума” (5 – бөлүк, XVIII, XIX, XX главаларынан) китебинен акысыз окуп үйрөнсө жана көчүрүп алса болот.

II – БӨЛҮК

ЫКТЫМАЛДЫКТАР ТЕОРИЯСЫ МЕНЕН СТАТИСТИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

§10. Окуялардын классикалык жана статистикалык ыктымалдыктары. Геометриялык ыктымалдык

Классикалык аныктама: Математикалык моделдер аркылуу, жашоо турмушубузда кезигүүчү сандык чоңдуктар менен байланышкан маселе – мисалдарды моделдештирип чечүүгө болорун билебиз Ыктымалдыктар теориясында **кокус өтүүчү окуялардын** болуп өтүү тобекелчиликтерин сандар аркылуу баалоо менен, алардын аткарылуусуна алдын ала болжолдуу жыйынтыктарды чыгаруу ыкмалары үйрөтүлөт. Ыктымалдыктар теориясынын негизги предмети болуп, болор – болбосу белгисиз болгон **кокустук окуяларын** баалоо болуп эсептелет. Мындан ары, атайын эскертүүсүз **окуялар** дегенде, **кокустук окуяларды** түшүнүп, окуяларды A, B, C, ... – сыяктуу чоң символ – тамгалар менен белгилеп, аларды окуялардын математикалык тилдеги баян - жазылышы катары кабыл алабыз. **Мисалы** кайсы бир A окуясынын болуп өтүшү үчүн, жалпысынан n жолу жагдайлар түзүлүп, анын ичинде m жолу A окуясынын аткарылышына жагымдуу жагдайлар болсун дейли.

Def – 1. *A окуясынын аткарылуусунун* ***классикалык ыктымалдагы*** *деп,* $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}$ *формуласы эсептелген* $\mathrm{p}-$ *санын айтабыз.* $\mathrm{p}-$ *саны* $0 \leq \mathrm{p} \leq 1$ *аралыгында өзгөрүп,* $\mathrm{p} = 1$ *болсо A окуясы сөзсүз болуп өтүүчү “ишенимдүү окуя", ал эми* $\mathrm{p} = 0$ *болсо, тап – такыр аткарылбоочу “жалган окуя” деп эсептелет.*

Ошентип $\mathrm{p}-$ саны 1 санына жакындаган сайын, окуянын аткарылышына ишеним өсүп, тескерисинче 1 ден алыстап 0 гө жакындаган сайын ишеним жоголуп, анын аткарылуусуна күмөндүүлүк артып бара берет.

Эскертүү: Көбүнчө классикалык сөзүн таштап, жөн эле ыктымалдык деп айтабыз.

Мисалы: 1. Студент сабакка даярданып жаткан китептин бетин эстеп калбай, анын ар түрдүү цифралардан турган эки орундуу сан экенин гана унутпай калган. Студент кийинки жолу ойлонбой туруп, китептин беттерин ачканда, керектүү беттин табылуу окуясын ыктымалдыгын табалы.

Чыгаруу: ►**A**– "Студент бир ачканда эле керектүү беттин табылуу" окуясы болсун. Анда изделүүчү бет белгиленген ар башка цифралардан турган эки орундуу сан 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 деген 10 цифралардын экөөсү аркылуу жазылат. Бир цифра эки жолу кайталанбагандыктан, кайталанбоочу орундаштыруулардын санын табуу формуласы $A_k^s = \frac{k!}{(k-s)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-s)\cdot(k-(s-1))\cdot\ldots\cdot(k-2)\cdot(k-1)\cdot k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-s)} =$ $= (k-s+1)\cdot\ldots\cdot(k-2)\cdot(k-1)\cdot k$ боюнча, $k=10$ элементтүү көптүктү $s=2$ элементтен орундаштыруу болуп $A_{10}^2 = 10\cdot 9 = 90$ ыкма менен экиден орундашып жазылат. Бирок биринчи цифрасы 0 болгон 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 сыяктуу тогуз учурду чыгарып салуу керек, анткени алар бир орундуу сандар болушат. Демек жалпы жагдайлардын саны $n = 90 - 9 = 81$ болот. **A** – окуясынын аткарылуусуна жагымдуу же көмөктөшүүчү жагдайдын саны $m = 1$, (ачылар менен туура беттин табылуу учуру). Демек **A** – окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{1}{81} \approx 0{,}0124$. ◄

2. Эки оюн сөөкчөсүн (6 беттүү) калчаганда, келип чыккан упайлардын суммасы жуп сан болуу менен катар, жок дегенде биринин 6 упай менен чыгуу окуяларынын ыктымалдыгын табалы.

Чыгаруу: ► Биринчи сөөкчөнүн упайлары 1, 2, 3, 4, 5, 6 болуп чыгып калышы мүмкүн. Анда экинчиси алган упайлар менен алардын суммасы, биринчинин ар бир упайына байланыштуу болуп, жалпы $6\times 6 = 36$ жагдайлар түзүлөт. Көмөктөшүү учурлардын саны:

1) Бири 6 упай болсо, экинчиси 2 упай чыкса гана экөөсүнүн суммасы $6+2=8$ жуп болот; 2) бири 6 упай болсо, экинчиси 4 упай чыкса, экөөсүнүн суммасы $6+4=10$ жуп болот; 3) бири 6 упай болсо, экинчиси 6 упай чыкса, экөөсүнүн суммасы $6+6=12$ жуп болот; 4) бири 2 упай болсо, экинчиси 6 упай чыкса, экөөсүнүн

суммасы жуп болот $2+\ 6=8$;   5) бири 4 упай болсо, экинчиси 6 упай чыкса экөөсүнүн суммасы жуп $6+\ 4=10$ болот.

Демек жалпы жагдайлардын саны 36, ал эми көмөктөшүүчү жагдайлардын саны 5. Анда бири 6 упай алганда, эки упайлардын суммасынын жуп сан болуу ыктымалдыгы $\mathrm{P(A)}=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}$ болот. ◄

Статистикалык аныктама: Эгерде n жолу сыноонун жүрүшүндө, **А** окуясын m жолу **аткарылганын күбө болсок**, анда $W(A)=\frac{m}{n}$ санын, **А** окуясынын аткарылуу жыштыгы деп, аны статистикалык ыктымалдык деп эсептейбиз. Ошентип ыктымалдыктын классикалык аныктамасында, **А** окуясы боло электе эле, анын болуп өтүүсүн болжолдосок, статистикалык ыктымалдыкта **А** окуясынын болуп өтүүсүнө **күбө болуп**, фактыга ишенгенден кийин гана, анын аткарылуу ыктымалдыгы болжолдонот. Айталы n_1 жолку сыноолордун кезинде А окуясы m_1 жолу (A_1-учуру), n_2 жолку сыноолордун кезинде m_2 жолу (A_2-учуру), n_3 жолку сыноолордун кезинде m_3 жолу (A_3-учуру), ж.б.у.с. аткарылсын дейли, анда $\frac{m_1}{n_1}=\omega_1, \frac{m_2}{n_2}=\omega_2, \frac{m_3}{n_3}=\omega_3$, … сандары **А** окуясынын аткарылуусунун салыштырмалуу жыштыгы деп аталышат. Көптөгөн учурлардагы сыноолордун жүрүшүндө, **А** окуясынын аткарылуу жыштыгы $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n,\dots\to\mathrm{p}$, барган сайын кайсы бир $\mathrm{p}-$ санынын тегерегине жакындашып, туруктуу мүнөздөгү абалга токтоло баштаганын байкоого болот. Эгерде ар башка сандагы сыноолордун санын k десек, анда ар башка сыноолордун саны чексиз өскөндө, окуялардын салыштырмалуу жыштыгы классикалык ыктымалдыкка умтулуп жетерин байкаса болот:

$$\lim_{k\to\infty} W(\mathrm{A}_k)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{m_k}{n_k}\right)=\mathrm{P(A)}=\mathrm{p}\,.$$

Мисалы: 1. Чөйрөнү жашылдандыруу долбоорунун алкагында 1000 терек олтурузулган, күзүндө алардын 91 даанасы көктөбөй калганын билишти. Эгилген көчөттөрдүн көктөп кетүү окуясынын статистикалык ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► **В** окуясы деп “Эгилген көчөттөрдүн көктөп кетүү окуясын” белгилейли. Анда көктөп кетүүгө мүмкүнчүлүктөрдүн жалпы саны $n=1000$, ал эми көктөгөндөрдүн саны $m=1000-91=989$.   Анда **В** окуясынын аткарылуусунун статистикалык ыктымалдыгы $W(\text{В}) = \frac{m}{n} = \frac{989}{1000} = 0{,}989$ болот. ◀

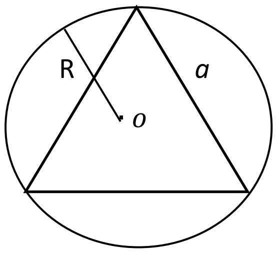
Ушул эле окуяны кең мааниде карап, үч аймактардын биринде 1000, экинчисинде 850, үчүнчүсүндө 600 көчөттөр тигилип, алардын ар биринде ар башка сандагы көчөттөр көктөбөй калсын дейли. Айталы 1 – аймакта 87 көчөт, 2 – аймакта 78 көчөт, 3 – аймакта 52 көчөттөр көктөбөй калсын дейли. Бул учурларда **В** окуясынын аткарылуу жыштыктары: 1 – аймакта $\omega_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{87}{1000} = 0{,}087$, 2 – аймакта $\omega_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{78}{850} = 0{,}092$, 3 – аймакта $\omega_3 = \frac{m_3}{n_3} = \frac{52}{600} = 0{,}08$ болот. **В** окуясынын үч учурдагы аткарылуу жыштыктарын салыштырып көрүп, үчөөсүнүн арифметикалык орточосун, статистикалык ыктымалдыктар аркылуу табылган **В** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы катары кабыл алып, аткарылуу жыштыктары $W(\text{В}) \equiv \text{P}(\text{В}) = \frac{0{,}087+0{,}092+0{,}08}{3} = \frac{989}{1000} \approx 0{,}086$ санын тегерегине коюуланып, улам жакындап бара берет деп түшүнөбүз.

Геометриялык ыктымалдык: **А** окуясы, кайсы бир G геометриялык фигурасынын g бөлүгүндө аткарылсын дейли. Мисалы узундугу L болгон электр зымынын, узундугу l болгон бөлүгүндө авариялык абалдын түзүлүү окуясынын ыктымалдыгын $\text{P}(\text{А}) = \frac{l}{L}$ көрүнүшүндө эсептөөгө болот. Анткени авария болуучу жалпы жагдай бүтүндөй L сызыгында жаралса, анын l бөлүгү авариядан жабырланган же окуянын өтүүсүнө көмөктөшкөн бөлүк болот. Ошентип, l кесиндиси L дин кайсы бөлүгүндө жайгашканына карабастан, **А** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы, l кесиндисинин узундугуна пропорционалдуу болот. Демек геометриялык ыктымалдык окуянын болуп өтүүсүнө шарт түзгөн бөлүктүн ченемин, геометриялык фигуранын жалпы ченемине бөлүү аркылуу аныкталат: $\text{P}(\text{А}) = \frac{S_g}{S_G}$ же

$\text{P}(\text{А}) = \frac{\text{көмөктөшүүчү узундук}}{\text{жалпы узундук}}$, $\text{P}(\text{А}) = \frac{\text{көмөктөшүүчү аянт}}{\text{жалпы аянт}}$, $\text{P}(\text{А}) = \frac{\text{көмөктөшүүчү көлөм}}{\text{жалпы көлөм}}$.

Мисалы: 1. Радиусу $R = 25$ см болгон тегерекке атылган жаанын жебесинин, айланага ичтен сызылган туура үч бурчтуктун ичине тийүү ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► **А** - “жаанын жебеси туура үч бурчтуктун ичине тийген” – окуя болсун. Туура үч бурчтуктун бардык жактары тең болуп, жактарын a десек, анда $a = R\sqrt{3}$ болору белгилүү. Демек, туура үч бурчтуктун аянты $S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}$ болот. Туура үч бурчтуктун ички аянты окуянын аткарылуусуна көмөктөшүүчү g фигурасы болгондуктан, анын аянты $S_g = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}$, ал эми жалпы G фигурасынын ордунда радиусу $R = 25$ см болгон тегерек туруп, анын аянты



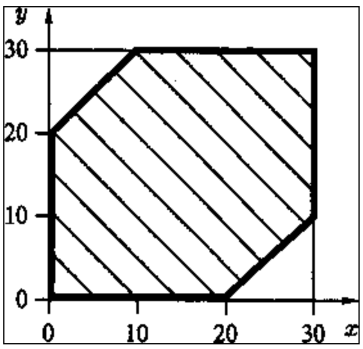
$S_G = \pi R^2$ болот. Анда $\mathrm{P}(A) = \frac{S_g}{S_G} = S_g : S_G =$

$$= \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4} : \pi R^2 = \frac{R^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

1 - чийме

көрүнүштө эсептелет (1 - чийме). ◄

2. Эки дос саат 12^{00} дөн 12^{30} га чейинки убакыт ичинде паркта жолугушмак болушту. Биринчи келгени, кечиккенин 20 минута күтүп, келбей калса кете берет деп убадалашты. Эгерде достордун ар бири өз мүмкүнчүлүктөрүнө жараша $12^{00} - 12^{30}$ убакыттар аралыгында келишкен болушса, анда алардын сөзсүз жолугушуу окуясынын ыктымалдыгын тапкыла.



2 - чийме

Чыгаруу: ► А – “достордун сөзсүз жолугушуу” окуясы болсун. Достордун биринчиси 12^{00} дөн $x -$ минута өткөндө, ал эми экинчиси келген $y -$ минута өткөндө паркка келсин деп, аларды координаттык тегиздикте сүрөттөйлү. Анда жолугушуу сөзсүз болушу үчүн, алардын айырмасы 20 минутадан ашып кетпеши керек: $|x - y| \leq 20$. Декарттык координаталардын $0x$ огунда 1 ден 30 га чейинки минуталарды коюп, биринчисинин, $0y$ огунда 1 ден 30 га чейинки минуталарда экинчисинин келген убакыттарын көрсөтөлү. Анда достордун жолугушуу аймагы координаттык тегиздикте $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 30$ шартына баш ийген $(x;\ y)$ чекиттеринен же жактары $a = 30$ болгон квадраттын ички бөлүгү болот. Демек **А** окуясынын аткарылышына жалпы жагдайлар түзүлгөн G фигурасы, жактары $a = 30$ болгон квадраттын ичи болуп, анын аянты $S_G = a^2 = 30^2 = 900$ болот. Ал эми жолугушуу **А** окуясына көмөктөшүүчү аймак же g фигурасы, жактары $a = 30$ болгон квадраттын $|x-y| \leq 20$ шартына баш ийген бөлүгүн түзөт:

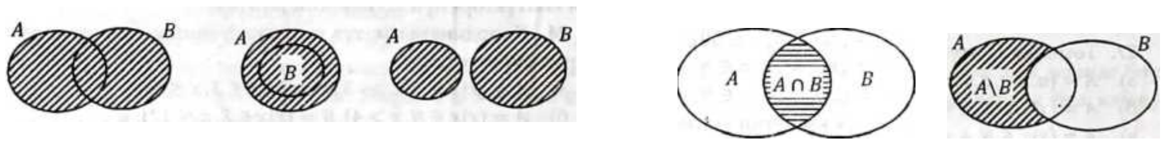
$|x-y| \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq x-y \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \leq x-y, \\ x-y \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+20, \\ y \leq x-20 \end{cases}$. Ошентип, g фигурасы квадраттын $\begin{matrix} y = x+20, \\ y = x-20 \end{matrix}$ түздөрү менен чектелген бөлүгү болуп, ал жалпы делген G квадратынан, жактары с $= 30 - 20 = 10$ болгон квадратты кесип алгандан кийинки бөлүктү түзөт. Демек $S_g = a^2 - c^2 = 30^2 - 10^2 = 900 - 100 = 800$ болуп, А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы $P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{800}{900} = \frac{8}{9} \approx$ 0,88 болот (2 - чийме). ◄

§11. Ыктымалдыктар теориясы колдонгон негизги амалдарды аткаруу эрежелери

Тамга символдор менен белгилеген окуялар көптүктөр сыяктуу каралып, аларды кошуу, көбөйтүү, кемитүү амалдары, көптүктөр теориясындагы "∪" —биригүү же кошуу, "∩" —кесилишүү же көбөйтүү, "/" — кесүү же кемитүү эрежелери сыяктуу жүргүзүлөт (3 - сүрөттөр):

$\underbrace{A \cup B}_{\text{көптүктөрдө биригүү}} \Leftrightarrow \underbrace{A + B}_{\text{окуяларда кошуу}}$; $\underbrace{A \cap B}_{\text{көптүктөрдө кесилишүү}} \Leftrightarrow \underbrace{A \cdot B}_{\text{окуяларда көбөйтүү}}$; $\underbrace{A / B}_{\text{көптүктөрдө кесүү}} \Leftrightarrow \underbrace{A - B}_{\text{окуяларда кемитүү}}$.



а) б) в)

3 - чиймелер

3 а), б), в) – чиймелерде ар кандай абалда жайгашкан А, В көптүктөрүн биригүүлөрү штрихтелип көрсөтүлсө, кийинкилерде кесилишүү менен кемитүү штрихтелип көрсөтүлгөн.

Ыктымалдыктарды кошуу: Адегенде окуяларды мүнөздөрүнө жараша түрлөргө бөлүп алалы:

<u>Def – 1.</u> *Жүргүзүлгөн бир эле жагдай – сыноолордун жүрүшүндө, **A** менен **B** окуяларынын экөөсү бир учурда аткарылбаса, анда алар **биргелешпеген окуялар** деп айтылышат.*
Мисалы бир монетаны калчап ыргытканда **A** – "монетанын герб жагы", **B** – "цифра жагы" менен түшүү окуялары болушсун. Экөөсү тең бир сыноодо аткарылуу мүмкүнчүлүгү болгону менен, бир учурда экөөсү аткарылбайт. Демек, алар биргелешпеген окуялар болушат.

<u>Def – 2.</u> *Эгерде* A, B *окуялары **биргелешпеген болушса**, анда алардын суммасынын ыктымалдыгы* $P(A+B)$ *деп, алардын ар биринин ыктымалдыктарынын суммасын айтабыз*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \qquad (1)$$

$$P(A \text{ же } B) = P(A) + P(B).$$

Ошентип окуялардын суммасынын ыктымалдыгы, **A** окуясынын же **B** окуясынын жок дегенде бирөөсүнүн аткарылуу ыктымалдыгы катары бааланат. Ошондуктан аны: $P(A \text{ же } B)$ деп түшүнүүгө болот. Ошондой эле өз ара бири – бири менен биргелешпеген $A_{\mathbf{1}}, A_{\mathbf{2}}, A_{\mathbf{3}}, \dots, A_к$ окуялардын системасы (тобу) болушса, анда алардын суммасынын ыктымалдыгын эсептөө деле, (1) – формуланы кеңейтип колдонуу менен ишке ашырылып,

$$P(A_{\mathbf{1}} + A_{\mathbf{2}} + A_{\mathbf{3}} + \dots + A_к) = P(A_{\mathbf{1}}) + P(A_{\mathbf{2}}) + \dots + P(A_к) \qquad (1^A)$$

көрүнүштө эсептелет.

<u>Def – 3.</u> *Сыноо учурунда өз ара биргелешпеген* $A_{\mathbf{1}}, A_{\mathbf{2}}, A_{\mathbf{3}}, \dots, A_к$ *окуялардын жок дегенде бири сөзсүз аткарылып, калгандары аткарылбаса, анда бул окуялардын системасын **толук группаны** түзүшөт дейбиз.*

Толук группаны түзүшкөн, бирдей мүмкүнчүлүктөргө ээ окуялардын суммасы ишенимдүү окуя болуп, суммасынын аткарылуу ыктымалдыгы

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_к) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_к) = 1$$

ге барабар болот. Мисалы ыргытылган монетанын A – "герб жагы" жана B – "цифра жагы" менен түшүү окуялары толук группаны түзүшөт. Анткени ыргытылгандан кийин, бир учурда экөөсү барабар аткарылбаганы менен, алардын бири сөзсүз аткарылып, суммасы $P(A+B) = P(A \text{ же } B) = \mathbf{1}$ ишенимдүү окуя болот. Эгерде **A** окуясы аткарылса, анда **B** окуясы аткарылбайт, бирок суммасы ишенимдүү окуя. Бул учурда **B** окуясын **A** окуясына карама – каршы окуя деп, аны

$\overline{\mathrm{A}}$ деп белгилейбиз $\overline{\mathrm{A}} \equiv \mathrm{B}$. Эгерде $\mathrm{P(A)} = \mathrm{p}$ десек, ага карама – каршы болгон $\overline{\mathrm{A}}$ окуясынын аткарылуу ыктымалдыгын q деп белгилейбиз. Мындан

$$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{p} + \boldsymbol{q} = \mathbf{1}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathbf{1} - \mathrm{P(A)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \mathrm{p}\,.$$

келип чыгып, өз ара карама – каршы окуялардын суммасы ишенимдүү окуя болорун көрөбүз. Ошентип биргелешпеген жана толук группаны түзүщкөн эки карама – каршы окуялардын суммасы ишенимдүү окуя болот.

Ыктымалдыктарды көбөйтүү: А жана В көптүктөрүнүн кесилиши же көбөйтүндүсү, алардын экөөсүнө тең таандык болгон элементтерден тургандыктан, А менен В окуяларынын көбөйтүндүсү деп, экөөсү тең аткарылган окуяны түшүнөбүз.

Def – 4. *Эгерде **А** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы, **В** окуясынын болор же болбосуна көз каранды болбосо, анда **А** окуясын **В** окуясынан **көз каранды эмес** деп айтабыз.*

Эгерде **А** менен **В** өз ара көз каранды эмес окуялар болушса, анда окуялардын көбөйтүндүсүнүн же экөөсүнүн бир учурда кошо аткарылуу ыктымалдыгы, ар биринин ыктымалдыктарын көбөйтүндүсүнө барабар болот:

$$\mathrm{P(A \cdot B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)}\,, \qquad (3)$$

$$\mathrm{P(A\ жана\ B)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)}\,.$$

Def – 5. *Эгерде ар кандай сыноолор кезинде **А** менен **В** окуяларынын экөөсүндө тең аткарылуу мүмкүнчүлүгү сакталса, анда аларды **биргелешкен** окуялар дейбиз.*

Эгерде **А** жана **В** окуялары биргелешкен окуялар болушса, анда алардын суммасынын ыктымалдыгы

$$\mathrm{P(A + B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cdot B)}, \qquad (4)$$

$$\mathrm{P(A\ же\ B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A\ жана\ B)}.$$

формуласы менен эсептелет.

Def – 6. ***В** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы, **А** окуясынын аткарылуусуна жараша (көз каранды) болсо, анда **В** окуясын **А** окуясынан **көз каранды** дейбиз.*

А окуясы аткарылгандан кийинки шартта аткарылган **В** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы **шарттуу ыктымалдык** деп аталып, $\mathrm{P_A(B)}$

көрүнүштө белгиленет. Бул учурда A окуясы менен B окуясынын экөөсүнүн бир учурда аткарылуу ыктымалдыгы, A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгын, A окуясы аткарылгандан кийинки шарттагы B окуясынын аткарылуу ыктымалдыгына көбөйткөнгө барабар:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}), \qquad (5)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\text{ жана }\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).$$

Мында $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ деп A окуясы аткарылгандан кийинки B окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы белгиленген.

Эгерде k сандагы $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_k$ окуялары өз ара көз каранды эмес окуялар болушса, анда алардын көбөйтүндүсүнүн же кошо аткарылуусунун ыктымалдыгы, алардын ар биринин аткарылуу ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсүнө барабар болот:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\cdot\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{A}_3\cdot\ldots\cdot\mathrm{A}_k)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_k), \qquad (6)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\text{жана }\mathrm{A}_2\text{жана }\ldots\text{жана }\mathrm{A}_k)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}_k).$$

Ал эми алар өз ара көз каранды окуялар болуп калса, анда алардын баарынын кошо аткарылуу ыктымалдыгы

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\cdot\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{A}_3\cdot\ldots\cdot\mathrm{A}_k)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}(\mathrm{A}_4)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_{k-1}\ldots}(\mathrm{A}_k) \qquad (7)$$

Мында $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)$ деп, андан мурдагы A_1окуясы аткарылгандан кийин A_2 окуясынын шарттуу ыктымалдыгы, $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)$ деп андан мурдагы A_1, A_2 окуялары аткарылгандан кийинки A_3 окуясынын шарттуу аткарылуу ыктымалдыгы, ж.б.у.с. $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\ldots\mathrm{A}_{k-1}\ldots}(\mathrm{A}_k)$ деп андан мурдагы A_1, A_2, A_3 …, A_{k-1} окуялары аткарылып бүткөндөн кийинки A_k окуясынын шарттуу аткарылуу ыктымалдыгы белгиленишкен.

Мисалдар: **1.** Миң даана акча – буюм лотереясына 5 акчалай жана 20 буюм утуштары туура келет. Эгерде 1 лотерея сатып алсак, анда анын утуу ыктымалдыгы канча болот ?

Чыгаруу: ▶ A_1 деп “1 билетке буюм утуу” окуясын, A_2 деп “1 билетке акча утуу”, **A** деп “1 билетке кандай болсо да утуш” алуу окуяларын белгилейли.

A_1 менен A_2 окуялары биргелешпеген окуялар, анткени экөөсү бир учурда аткарылбайт. **A** окуясы болсо, A_1 же A_2 окуяларынын кайсынысы аткарылса эле аткарылуучу окуя. Анда A окуясын A_1 менен A_2 окуяларынын суммасы десек болот: $\mathrm{A}=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2$. Жалпы сыналуучу жагдайлардын саны $n=1000$, ал эми A_1 окуясынын аткарылышына жагымдуу же көмөктөшүүчү жагдайлардын саны $m_1 = 20$, экинчи A_2 окуясында $m_2 = 5$. Анда (1) формуласы боюнча, **A** - “1 билетке кандай болсо утуш” алуу окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = 0{,}02 +$$
$$+0{,}005 = 0{,}025 \text{ болот. } \blacktriangleleft$$

2. Студентке экзамен учурунда 5, 4, 3, 2 деген баалардын бири коюлмакчы. Студенттин “беш алуу” ыктымалдыгы 0,3; “төрт алуу” ыктымалдыгы 0,4; “үч алуу” ыктымалдыгы 0,2; “эки алуу” ыктымалдыгы 0,1 болсо, анда жогорудагы окуялардын кайсылары биргелешпеген окуялардын толук группасын түзөрүн; Студент “5 алды” – деген окуяга карама – каршы окуяны аныктап, ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► A – “студент 5, 4, 3, 2 деген баалардын бирин алды” деген окуя болсун. A_1 –“беш алуу”, A_2 –“төрт алуу”, A_3 –“үч алуу”, A_4 –“эки алуу” окуялары болушсун дейли. Анда $P(A_1) = 0{,}3$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(A_3) = 0{,}2$, $P(A_4) = 0{,}1$ болушат. Студентке ушул баалардын бири сөзсүз коюлгандыктан, A окуясы алардын суммасы

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ болот. Экинчи жактан A_1, A_2, A_3, A_4 окуялары биргелешпеген жана алардын бири сөзсүз аткарылгандыктан, окуялардын толук группасын түзүшүп, алардын суммасы ишенимдүү окуя болот. Ошондуктан, анын аткарылуу ыктымалдыгы

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + +P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1 \text{ болот.}$$

Студенттин A_1 – “беш алуу” окуясына карама – каршы окуя, $\overline{A_1}$ – “студент беш алган жок” болуп, бул учурда ал 4, 3, 2 деген баалардын бирин алып, A_2 же A_3 же A_4 окуларын бири сөзсүз аткарылган болот б.а. $\overline{A_1} = A_2 + A_3 + A_4$, Демек

$$P(\overline{A_1}) = P(A_2 + A_3 + A_4) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0{,}4 + 0{,}2 +$$
$+0{,}1 = 0{,}7$ болот. Ушул эле жоопко (2) формуланы пайдаланып, жетүүгө да болот: $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. ◄

3. Математика боюнча текшерүү ишинде коюлган балдар 10 го чейинки бүтүн сандар менен бааланып, **X** – деген студенттин “10 бал алуу” ыктымалдыгы 0,2; “9 бал алуу” ыктымалдыгы 0,3; “1 ден 9 га чейинки бал алуу” ыктымалдыгы 0,7 болсун дейли. **X** – деген студенттин:

а) “9 дан кем эмес бал алуу” окуясынын;

б) “0 бал алуу” окуясынын ыктымалдыктарын тапкыла.

Чыгаруу: ►A_1 – “10 бал алуу”, A_2 – “9 бал алуу”, A_3 – “1 ден 9 га чейинки бал алуу”, **X** – деген студенттин **A** – “9 дан кем эмес бал алуу”, **B** - “0 бал алуу” окуялары болсун деп белгилеп алалы. Анда A_1, A_2, A_3 окуяларынын аткарылуу ыктымалдыктары $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}3$, $P(A_3) = 0{,}7$ болушат. A_2, A_3 биргелешкен окуялар экенин баамдап, окуяларды биргелешпей тургандай тандап, биргелешпеген окуялардын суммаларын ыктымалдыктарынын (1) формуласын колдонууга аракет жасайбыз.

а) **A** - “9 дан кем эмес бал алуу” окуясы биргелешпеген A_1 менен A_2 окуялардын суммасы болуп $A = A_1$же $A_2 = A = A_1 + A_2$, анын ыктымалдыгы

$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$ табылат.

б) **B** - “0 бал алуу” окуясынын ыктымалдыгын эсептөө үчүн, ага карама – каршы болгон $\overline{B}$ – “ студент 0 бал алган жок” окуясын карайбыз. $\overline{B}$ окуясы, A_1же A_3 окуялары аткарылганда аткарылгандыктан, биргелешпеген A_1, A_3 окуяларынын суммасы $\overline{B} = A_1 + A_3$ болуп, анын ыктымалдыгы

$\mathbf{P}(\overline{B}) = P(A_1) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9$ болот.

Карама – каршы окуялар катары B нын ыктымалдыгы (2) формуладан $P(B) + P(\overline{B}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ көрүнүштө табылат. ◄

4. Концерттик студияда элдик музыкалар 20, ал эми эстрадалык жанрдагы музыкалар 10 дисктерге жазылып аралаш коюлган. Режиссёр тандабастан туруп, алган дисктерди ордуна кайра койбостон, эки дискти биринин артынан экинчисин алганда:

1) 1 – дискте элдик музыка; 2) 2 – дискте да элдик музыка чыгуу окуяларынын ыктымалдыктарын эсептегиле.

Чыгаруу: ► **1)** A –“1 – дискте элдик музыка”, B –“2 – дискте да элдик музыка” чыгып калуу окуялары болсун дейли. A окуясынын аткарылуусу үчүн түзүлгөн жалпы жагдайлардын саны $n_1 = 20 + 10 = 30$, ал эми анын аткарылуусуна жагымдуу же көмөктөшкөн жагдайлардын саны $m_1 = 20$, анда **A** нын аткарылуу ыктымалдыгы $P(A) = \frac{m_1}{n_1} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ болот.

2) **B** окуясы **A** окуясынан көз каранды болот, анткени A окуясынын аткарылышы **B** окуясынын аткарылышына таасирин тийгизет. биринчи алган диск элдик музыка болуп калган же **A** окуясы аткарылгандан кийинки шартта **B** окуясынын аткарылуусунун шарттуу ыктымалдыгын эсептейли. 1 – диск алынган соң, жалпы жагдайлар $n_2 = 30 - 1 = 29$, жагымдуу жагдайлар $m_2 = 20 - 1 = 19$ болуп, шарттуу ыктымалдык $\mathrm{P_A(B)} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{19}{29}$ эсептелет.◄

5. Жогоруда каралган мисалга кошумча C – "Удаалаш алынган эки дискте тең элдик музыка" болуу окуясынын ыктымалдыгын эсептейли.
Чыгаруу: ► **C** окуясы **A** жана **B** окуяларынын экөөсү тең аткарылган учурда аткарылгандыктан, аны **A** жана **B** окуяларынын көбөйтүндүсү $\mathrm{C = A \cdot B}$ деп эсептейбиз. **B** окуясы **A** окуясынын аткарылышынан көз каранды болгондуктан, окуялардын көбөйтүндүсүнүн ыктымалдыгы (5) формуласы боюнча эсептелет:
$$\mathrm{P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{29} = \frac{38}{87} \approx 0{,}4368\ .\ ◄$$

6. Кыркылган тамгалардан кураштырып МАШИНА сөзү жазылган эле. Ойлонбостон туруп, бул сөздөн 4 тамганы удаалаш алып тизгенде ШИНА сөзүнүн жазылуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► Окуяларды төмөндөгүдөй тартипте белгилеп алалы:
$\mathrm{B_1}$ – "1 – алганда Ш тамгасы чыгат",
$\mathrm{B_2}$ – "2 – алганда И тамгасы чыгат",
$\mathrm{B_3}$ – "3 – алганда Н тамгасы чыгат",
$\mathrm{B_4}$ – "1 – алганда А тамгасы чыгат", ал эми B – "эркибизче төрт тамганы удаалаш алганда ШИНА сөзү жазылат" окуялары болушсун. B окуясы тамгаларды 1 ден удаалаш алуу учурунда адегенде Ш, кийин И, кийин Н, кийин А болгондо гана аткарылгандыктан, ал $\mathrm{B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4}$ окуяларынын көбөйтүндүсү болот. $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{B_4}$ окуяларынын ар бири өзүнөн мурда кандай тамга чыккан окуяга жараша аткарылып, көз каранды окуялар болушат. $\mathrm{B_1}$ окуясынын ыктымалдыгын жана $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{B_4}$ окуяларынын өзүнөн мурда келген окуялар аткарылды деген шарттуу ыктымалдыктарын эсептейли: $\mathrm{B_1}$ окуясында алынуучу жалпы тамгалар $n_1 = 6$, анткени МАШИНА сөзүндө 6 тамга бар, ал эми жагымдуу жагдайлар $m_1 = 1$. Анда $\mathrm{P(B_1)} = \frac{1}{6}$.

B_1 окуясы аткарылгандан кийин B_2 окуясында $n_2 = 5$, ал эми жагымдуу жагдайлар $m_2 = 1$. Анда шарттуу ыктымалдык $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{5}$.

B_1 менен B_2 окуялары аткарылгандан кийин B_3 окуясында $n_3 = 4$, ал эми жагымдуу жагдайлар $m_3 = 1$. Анда шарттуу ыктымалдык $P_{B_1B_2}(B_3) = \frac{1}{4}$.

B_1 менен B_2 жана B_3 окуялары аткарылгандан кийин B_4 окуясында $n_4 = 3$, ал эми жагымдуу жагдайлар $m_4 = 2$, анткени 6 тамганын ичинде эки А бар. Анда шарттуу ыктымалдык $P_{B_1B_2B_3}(B_4) = \frac{2}{3}$.

Демек В окуясынын ыктымалдыгы (7) формула боюнча

$P(B) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) \cdot P_{B_1B_2}(B_3) \cdot P_{B_1B_2B_3}(B_4) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{180}$ көрүнүштө эсептелет. ◄

Толук ыктымалдык: Айталы **А** окуясы өз ара биргелешпеген, толук группаны түзгөн n сандагы $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ окуяларынын (гипотезалар дешет) кайсы биринин аткарылуусунан кийин аткарылышы мүмкүн болгон окуя болсун. Бул учурда А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) \qquad (8)$$

формуласы менен эсептелип, **А** окуясы B_1 же, B_2 же, ..., же B_n окуяларынын кайсы бири аткарылган учурда болуп өтөрүн баалайт.

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ гипотезалары толук группаны түзгөндүктөн, алардын суммасы ишенимдүү окуя болот:

$$P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1. \qquad (9)$$

Байестин формуласы: Айталы **А** окуясы өз ара биргелешпеген, толук группаны түзгөн n сандагы $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ окуяларынын кайсы биринин аткарылуусунан кийин гана аткарылышы мүмкүн болгон окуя болсун. Эгерде А окуясы болуп өттү десек, анда А окуясынан мурда болуп өтүүчү B_i гипотезаларынын ыктымалдыктарын да кайрадан баалоо, Байестин формуласы менен ишке ашырылат:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (10)$$

Мисал: 7. Үч заводдо электр лампочкаларын жасалып, жалпы лампочкалардын 35% пайызы 1 – заводдо, 50% пайызы 2 – заводдо, ал эми 15% пайызы 3 – заводдо өндүрүлөт. Биринчи заводдун лампочкаларынын 70% пайызы, экинчисинин 80% пайызы, үчүнчүсүнүн 90% пайызы стандартка жооп берери белгилүү. Эгерде базарда үч заводдун лампочкалары сатылып жаткан болсо, анда:

1) Тандабай алынган лампочканын “1 – заводдун стандартка жооп берген лампочкасы” болуу;

2) “Базардан сатып алынган лампочканын стандарттуу” болуу окуяларынын ыктымалдыктарын эсептегиле.

Чыгаруу: ► Окуяларды төмөндөгүдөй бөлүштүрүп белгилеп алалы: B_1 — “алынган лампочка 1 – заводдуку”;

B_2 — “тандабай сатып алынган лампочка 2 – заводдуку”;

B_3 — “тандабай сатып алынган лампочка 3 – заводдуку”;

C_1 — “тандабай сатып алынган лампочка 1 – заводдуку жана стандарттуу”; A – “базардан сатып алынган лампочка стандарттуу” деген окуялар болушсун.

B_1, B_2, B_3 биргелешпеген жана сыноонун жүрүшүндө сөзсүз бирөөсү аткарылгандыктан, окуялардын толук группасын түзүшкөн болжол гипотезалар болушат. Бул болжол – гипотезаларда сатып алынган лампочкалар каалагандай сапатта болушуп, стандартка жооп берер – бербесине кепилдик жок экендигин байкайбыз. Үч заводдордон өндүрүлгөн лампочкалардын базарга сатыкка түшүү ыктымалдыгы, өндүрүлгөн 100 лампочкаларга (100%) салыштырмалуу

$P(B_1) = 0{,}35$, $P(B_2) = 0{,}5$, $P(B_3) = 0{,}15$ көрүнүштө эсептелет. Толук группанын түзгөн окуялардын суммасы ишенимдүү окуя болгондуктан:

$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_1) + P(B_1) = 0{,}35 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1.$ Ал эми алардын шарттуу ыктымалдыктары, өндүрүлгөн 100 лампочкаларга (100%) салыштырмалуу: $P_{B_1}(A) = 0{,}7$; $P_{B_2}(A) = 0{,}8$; $P_{B_3}(A) = 0{,}9$.

A менен C_1 окуяларынын аткарылуу ыктымалдыктарын эсептөөнү эки учурга бөлөлү:

а) $C_1 -$ "тандабай сатып алынган лампочка 1 – заводдон жана стандарттуу", ал эми А – кайсы заводдуку экенине карабастан, "базардан сатып алынган лампочка стандарттуу" деген окуялар болгондуктан, B_1 менен, андан көз каранды болгон А окуяларынын көбөйтүндүсү, C_1 окуясына барабар $C_1 = B_1 \cdot A$ болот. Ошондуктан (8) формула боюнча C_1 окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы, B_1 жана B_1 окуясы аткарылгандан кийинки А окуясынын шарттуу ыктымалдыктарынын көбөйтүндүсү

$P(C_1) = P(B_1 \cdot A\,) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) = 0{,}35 \cdot 0{,}7 = 0{,}245$ болот.

б) А окуясын төмөндөгүдөй биргелешпеген окуялардын суммасы катарында карайбыз $A = C_1 + C_2 + C_3$:

C_1 –"алынган лампочка 1 – заводдуку жана стандарттуу";

C_2 –"алынган лампочка 2 – заводдуку жана стандарттуу";

C_3 –"алынган лампочка 3 – заводдуку жана стандарттуу".

Ар бир C_i $(i = 1, 2, 3)$ окуялары, ар бир B_i менен, алардан көз каранды болгон А окуясынын көбөйтүндүлөрү болот: $C_1 = B_1 \cdot A$, $C_2 = B_2 \cdot A$, $C_3 = B_3 \cdot A$. Анда $A = C_1 + C_2 + C_3 = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A$ болуп,

А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы B_1, B_2 жана B_3 гипотезалары аткарылгандан кийинки А окуясынын шарттуу ыктымалдыктарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасы катарында

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0{,}35 \cdot 0{,}7 +$$

$+0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}245 + 0{,}4 + 0{,}135 = 0{,}78$ көрүнүштө табылат. ◄

8. Бардык тетиктердин 80% пайызы 1 – автоматта құраштырылса, ошондой эле тетиктердин 20 % пайызы 2 – автоматта кураштырылат. 1 – автомат кураштырган тетиктердин 1% пайызы, ал эми 2 – автомат кураштырган тетиктердин 5% пайызы жараксыз болушу мүмкүн болсун. Эгерде тандабай текшерилген тетик жараксыз болуп калса, анда анын 1 – автоматта же 2 – автоматта кураштырылган болуу окуяларынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► Тетиктердин сапатын текшерүү гипотезаларын карайлы:

B_1 –"биринчи автоматта кураштырылган тетик текшерилген";

B_2 –"экинчи автоматта кураштырылган тетик текшерилген";

А – "текшерилген тетик жараксыз болуу" гипотезалары болушсун.

Текшерүү башталганга чейинки гипотезалардын шартсыз аткаруу ыктымалдыктары (100 тетик үчүн): $P(B_1) = 0{,}8$; $P(B_2) = 0{,}2$ болору берилген. B_1 менен B_2 окуялары, биргелешпеген окуялардын толук группасын түзүп, суммасы ишенимдүү окуя болот: $P(B_1) + P(B_2) = 1$.
Биринчи автоматта 1% же 100 тетиктин арасынан 1 жараксыз тетик, экинчи автоматта 5% же 100 тетиктин арасынан 5 жараксыз тетик жасалышы мүмкүн, ошондуктан алардын B_1 , B_2 гипотезалары аткарылгандан учурда, жараксыз тетик чыгуусунун шарттуу ыктымалдыктары $P_{B_1}(A) = 0{,}01$ $P_{B_2}(A) = 0{,}05$ болушат.
Ошентип А окуясы, B_1 менен кошо, же B_2 менен кошо аткарылуучу окуя болот.

Айталы А окуясы болуп өттү дейли, анда ал B_1 менен B_2 гипотезаларынын кайсы биринен кийин аткарылганын болжолдуу баалоо Байестин (10) формуласы аркылуу эсептелет:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}01}{0{,}8\cdot 0{,}01+0{,}2\cdot 0{,}05} = \frac{0{,}008}{0{,}018} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9};$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}8\cdot 0{,}01+0{,}2\cdot 0{,}05} = \frac{0{,}01}{0{,}018} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$ болуп, А окуясынын B_2 окуясынан кийин аткарылуу ыктымалдыгы чоң экендигин көрөбүз. Анткени $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$. ◄

§12. Көз каранды эмес кайталануучу сыноолордо аткарылуучу окуялардын ыктымалдыктарын эсептөө

Бернуллинин формуласы:

Айталы n сандагы бири - биринен көз каранды эмес жүргүзүлгөн сыноолордун ар биринде, **А** окуясынын болор же болбосу белгисиз болсун дейли. **А** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы ар бир сыноодо бирдей туруктуу р санына барабар болсо, анда n жолку көз каранды эмес сыноолордо **А** окуясынын ар кандай тартипте туура m жолу аткарылуу ыктымалдыгы, Бернуллинин

$$P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} \cdot p^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n-m}} \qquad (1)$$

формуласы аркылуу эсептелет. Мында $n-$ жалпы сыноолордун, ал эми $m-$ бул сыноолордо **А** окуясынын болуп өтүүлөрүнүн саны; $\text{p}-$ **саны ар бир сыноодо А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы,** $\boldsymbol{q}-$ **саны, ар бир сыноодо А окуясынын аткарылбоо ыктымалдыгы**; $\text{P}_n(m)-n$ жолку көз каранды эмес сыноолордо **А** окуясынын ар кандай тартипте туура m жолу аткарылуу ыктымалдыгы. Ар бир сыноодо **А** окуясы болот же болбойт, ошондуктан $\text{p}+\boldsymbol{q}=\mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{q}=\mathbf{1}-\text{p}$ болот.

Мисалдар:

1. Бир даана лотерея билеттин утуу ыктымалдыгы $\frac{1}{7}$ ге барабар. Сатып алынган 7 лотерея билеттеринин а) экөөсүнүн; б) үчөөсүнүн утуп алуу ыктымалдыктарын эсептегиле.

Чыгаруу: ► Сыноо ар билетти текшерүү менен жүрүп, бардык сыноолордун саны 7 болот. **А**– “текшерген билеттин утушка ээ болуу” окуясы болсун. Сыноолор бири – биринен көз каранды эмес, анткени Сыноолордо **А** окуясынын аткарылуусуна, андан мурдагы билетте **А** окуясы болгонуна же болбогонуна байланышы жок. Ар бир сыноодо **А** окуясынын болуп өтүү ыктымалдыгы $\text{p}=\text{P(A)}=\frac{1}{7}$ болору берилген, анда **А** окуясына карама – каршы $\overline{\text{A}}$, же аткарылбай калуу окуясынын ыктымалдыгы $\boldsymbol{q}=\text{P}(\overline{\text{A}})=\mathbf{1}-\text{P(A)}=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$ болот.

а) В деп “эки билеттин утуп алуу” окуясын белгилейли, анда жалпы сыноолордун саны $n=7$ жолу, ал эми утуш билеттерин саны $m=2$. Анда Бернуллинин (1) формуласы боюнча

$$\text{P(A)}=\text{P}_{\mathbf{7}}(\mathbf{2})=\text{C}_7^2\cdot\text{p}^2\cdot q^{7-2}=\frac{7!}{2!\cdot(7-2)!}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^5=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)}\cdot\frac{1^2}{7^2}\cdot\frac{6^5}{7^5}=3\cdot7\cdot\frac{6^5}{7^7}\approx0{,}1983.$$

б) С – “үч билет утуп алган” окуя болсун, анда жалпы сыноолор $n=7$ жолу, ал эми утуш билеттерин саны $m=3$. Демек

$$\text{P(A)}=\text{P}_{\mathbf{7}}(\mathbf{3})=\text{C}_7^3\cdot\text{p}^3\cdot q^{7-3}=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^4=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3(1\cdot2\cdot3\cdot4)}\cdot\frac{1^3}{7^3}\cdot\frac{6^4}{7^4}=\frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{6^4}{7^7}=35\cdot\frac{6^4}{7^4}\approx0{,}0551.\ ◄$$

2. Базар тармагынан эки смартфон сатып алынган. Алардын ичинен бирөөсүнүн гана оригинал болуп калуу ыктымалдыгы 0,18 ге барабар. Эгерде алардын ар биринин оригинал чыгуу ыктымалдыктары тең жана 0,7 ден кем эмес экендиги белгилүү болсо, анда смартфондун ар биринин оригинал болуп калуу ыктымалдыктарын тапкыла.

Чыгаруу:► Смартфондорду лабораторияда текшерүүлөр, сыноолор болуп эсептелишет. Сыноолор бири – биринен көз каранды эмес, жана алардын жалпы саны $n = 3$. A – “сыналуучу смартфондун самопал болуу” окуясы болсун. Ар бир сыноодо смартфондун самопал же оригинал болушу белгисиз болгону менен, анын оригинал чыгып калуу ыктымалдыгы белгилүү $\mathrm{P}_2(1) = 0{,}18$.
Экинчи жактан Бернуллинин (1) формуласы боюнча
$\mathrm{P}_2(1) = \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{p}^1 \cdot q^{2-1} = \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{p}^1 \cdot q^1 = 2 \cdot \mathrm{p} \cdot (1 - \mathrm{p})$ болот ($q = 1 - \mathrm{p}$).
Аларды теңдештирсек, p га карата
$2\mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = 0{,}18 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = 0{,}09$ же $\mathrm{p}^2 - \mathrm{p} + 0{,}09 = 0$
квадраттык теңдемесин алабыз. Мындан
$\mathrm{p}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}09}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}36}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}64}}{2} = \frac{1 \pm 0{,}8}{2}, \quad \Rightarrow \ \mathrm{p}_1 = 0{,}9; \ \mathrm{p}_2 = 0{,}1$
ээ болуп, чечимдеринин арасынан 0,7 ден кем эмес болгон $\mathrm{p}_2 = 0{,}9$ чечимин, смартфондордун ар биринин сыноолордо оригинал чыгып калуу окуяларынын ыктымалдыгы катары кабыл алабыз. ◄

Окуянын болуп өтүүсүн күтүлүүчү жыштыгы: Кайталануучу n жолку бири – биринен көз каранды эмес сыноолор учурунда, **A** окуясынын аткарылуусуна үмүт берип, күткөн учурлар ар бир сыноолордо бирдей турактуу p ыктымалдыгы менен, эң аз дегенде m_0 жолу аткарылат деп болжолдосок (ар кандай иретте), анда $n - m_0$ жолу $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \mathrm{p}$ ыктымалдыктары менен **A** окуясы аткарылбайт деп эсептеген болобуз. Бул учурда $\boldsymbol{m_0}$ **саны, A окуясынын болуп өтүүсүнүн күтүлүүчү жыштыгы** деп аталып,

$$\boldsymbol{n}\mathrm{p} - \boldsymbol{q} \le \boldsymbol{m_0} \le \boldsymbol{n}\mathrm{p} + \boldsymbol{q} \qquad (2)$$

кош барабарсыздыгы менен болжолдонот.

Мисалы: 3. Комиссия тарабынан ТЕЦ тин тетиктеринин 15% пайызы жараксыз абалда деген жыйынтык чыгарылганы белгилүү дейли. ТЕЦ тин ар кандай цехтеринен, кокусунан алынган 20 тетиктердин жараксыз чыгып калуу ыктымалдыктарын эсептегиле.

Чыгаруу:► Сыноолор деп, ар бир алынган тетиктердин абалдарын текшерүүлөрдүн саны $n = 20$ жана алар биринен көзкаранды эмес. **A** – “текшерилген жабдыктын жараксыз болуу” окуясы десек, анда 100 жолку сыноолордун ар биринде, анын аткарылуу ыктымалдыгы $\mathrm{P(A)} =$

0,15 болру белгилүү. **A** окуясына карама – каршы $\bar{A}$ – “текшерилген жабдык жарактуу” окуясынын ыктымалдыгы $p(\bar{A}) = \boldsymbol{q} = \mathbf{1} - p = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$ болот. Бул учурда, $n = 20$ жолку сыноолордо **A** окуясынын болуп өтүүсүн күтүү жыштыгы болгон m_0 саны (2) формуласы боюнча $\boldsymbol{n}p - \boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{m_0} \leq \boldsymbol{n}p + \boldsymbol{q}$ эсептелет. Адегенде кош барабарсыздыктын оң жагын эсептейбиз: $\boldsymbol{n}p + \boldsymbol{q} = 20 \cdot 0{,}15 + 0{,}85 = 3 + 0{,}85 = 3{,}85$. Оң жагы менен сол жагы 1 ге айырмаланып тургандыктан, сол жагы $3{,}85 - 1 = 2{,}15$ болот. Каалаcак эсептеп: $\boldsymbol{n}p - \boldsymbol{q} = 20 \cdot 0{,}15 - 0{,}85 = 2{,}15$ ишенебиз.

Демек $2{,}15 \leq m_0 \leq 3{,}85$ болгондуктан, көз каранды эмес текшерүү учурунда, 20 жабдыктардын $m_0 = 2$ же $m_0 = 3$ дааналары жараксыз болуп калышы мүмкүн деп күтөбүз. ◀

Лапластын асимптотикалык формуласы: n жолку бири – биринен көз каранды эмес сыноолордун ар биринде **A** окуясынын аткарылар же аткарылбасы белгисиз болгону менен, ар бир сыноодо анын аткарылуу ыктымалдыктары туруктуу болуп, бирдей рсанына барабар болсун дейли$(0 < p < 1)$. Анда ар бир сыноодо **A** окуясынын аткарылбай калуу ыктымалдыгы $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - p$ болот. Сыноолордун саны эбегейсиз көбөйүп, жетишерлик чоң санга өсүп жеткен учурда, ар кандай ырааттуулукта болсо да, **A** окуясынын туура m жолу аткарылуусун күтүүнүн жакындаштырылган болжол ыктымалдыгы же жыштыгы – Лапластын асимптотикалык

$$P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}p\boldsymbol{q}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

формуласы менен эсептелет. Мында

$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}}}$ функциясы, дискреттик кокустук окуясынын бөлүштүрүү закону (функциясы), ал эми ар бир сыноодо x өзгөрүлмө чоңдугу $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}}{\sqrt{\boldsymbol{n}p\boldsymbol{q}}}$ маанилерин кабыл алат деп эсептейбиз. $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ жуп функция, демек x тин $x < 0$ же терс маанилери менен оң маанилеринде $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ функциясы $\boldsymbol{\varphi}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ барабар маанилерге ээ болот жана $x > 4$ болгондо, анын даражасы $" - 1"$ ден кичине болуп, чексиз кемүүчү функцияга айланат же сыноолордун саны өскөн сайын нөлгө жакындап бара берет. Ошондуктан $x > 4 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \approx 0$ деп алабыз. Жалпы учурда айрым x тер үчүн $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ функциясынын маанилерин, атайын түзүлгөн даяр таблица (№ 1 – тиркеме) боюнча издеп табабыз. Бернуллинин (1) формуласына караганда, Лапластын асимптотикалык (3) формуласы сыноолордун саны өскөн мезгилдеги **А** окуясынын болуп өтүү саны $\boldsymbol{m}$ ди болжолдоп билүүнүн, же күтүүнүн тагыраак жакындаштырылган ыкмасы болот.

Мисалы: 4. Мектеп окуучуларынын орточо 84% пайызы, мектепти окуп бүткөндөн кийин, мектеп билиминин жетишсиздигинен жабыр тартышат экен. Кокусунан топтолгон 60 бүтүрүүчүлөрдүн арасынан 52 бүтүрүүчү, мектеп билиминин жетишсиздигинен жабыр тарткандар болуусун болжолдуу ыктымалдыгын эсептегиле.

Чыгаруу:► Бири – биринен көзкаранды болбогон сыноолор деп, ар бир окуучунун мектеп билими боюнча пикирлерин текшерүүнү эсептейли. Анда сыноо жалпы $n = 60$ бүтүрүүчүлөрдүн ар бири менен жүргүзүлүп, алардын арасынан $m = 52$ бүтүрүүчү “мектеп билиминин жетишсиздигинен жабыр тарткандар болуу” – окуясын **А** деп белгилейли. Ар бир сыноодо А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы туруктуу жана р = 0,84 болору берилген (100 бүтүрүүчүгө салыштырмалуу). Анда ар бир сыноодо **А** окуясынын аткарылбай калуу ыктымалдыгы $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \mathrm{p} = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$ болот. Сыноолордун $n = 60$ саны жетишерлик чоң болгондуктан, Лапластын (3) асимптотикалык формуласын пайдаланып

$\mathrm{P}_{\mathbf{60}}(\mathbf{52}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}\mathrm{p}\boldsymbol{q}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}\mathrm{p}\boldsymbol{q}}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}}}$ ээ болобуз. Формулага x тин $x = \frac{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}}{\sqrt{\boldsymbol{n}\mathrm{p}\boldsymbol{q}}} = \frac{52-60\cdot0{,}86}{\sqrt{60\cdot0{,}86\cdot0{,}14}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{7{,}224}} \approx \frac{0{,}4}{2{,}69} \approx 0{,}58$ маанисин коюп, А окуясынын 52 жолу болуп өтүүсүн күтүлүүчү болжол ыктымалдыгын

$\mathrm{P}_{\mathbf{60}}(\mathbf{52}) \approx \frac{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})}{\sqrt{\boldsymbol{n}\mathrm{p}\boldsymbol{q}}} = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0{,}58})}{\sqrt{\mathbf{60\cdot0{,}86\cdot0{,}14}}} = \frac{\mathbf{0{,}3410}}{\sqrt{\mathbf{60\cdot0{,}86\cdot0{,}14}}} \approx 0{,}1201$ табабыз.

Мында $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0,58}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\cdot3{,}14}}} \cdot e^{-\frac{(0{,}58)^2}{2}} \approx 0{,}3410$ мааниси, $\varphi(x)$ функциясынын маанилеринин атайын таблицасынан алынды.◄

Пуассондун формуласы: бири – биринен көз каранды эмес n жолку сыноолордун ар биринде **А** окуясынын аткарылар же аткарылбасы белгисиз болуп, **А** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы жетишерлик кичине, нөлгө жакын жана ар бир сыноодо турактуу р санына тең дейли. Бул учурда n жолку көз каранды эмес сыноолор учурунда **A** окуясынын туура m жолу аткарылуусун күтүү ыктымалдыгы, жакындаштырылган түрдө Пуассондун

$$\boldsymbol{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}}, \text{ мында } \boldsymbol{\lambda = np} \qquad (4)$$

формуласы менен эсептелет. Пуассондун формуласын $\lambda = np \leq 10$ болгон учурда $P_n(m)$ ыктымалдыгын жакындаштырып эсептөөдө колдонобуз. Айрым бир λ лар үчүн, $P(m, \lambda)$ функциясынын **маанилеринин даяр түзүлгөн таблицасын** пайдаланабыз (№ 2 – тиркеме).

Ошентип кайталануучу көз каранды эмес n жолку сыноолор кезинде **A** окуясынын болжол менен туура m жолу аткарылуу ыктымалдыктарын жакындаштырып эсептөөдө: Бернуллинин - (1), күтүлүүчү жыштыктын - (2), Лапластын - (3), Пуассондун - (4) формулалары бирдей милдеттерди аткаргандай көрүнөт. Бирок, алар тактыктары боюнча айырмаланышып, сыноолордун санына жана ар бир сыноодо **A** окуясынын аткарылуу ыктымалдыгынын чоңдугуна жараша, колдонуу ыңгайы боюнча айырмаланып турушат.

Мисалы: 5. Окуу залында кыргыз тилинде жазылган окуу китептер 0,4% пайызды түзөт. Окуу залынан кокусунан алынган 125 китептердин арасында:

а) “3 китептин кыргыз тилинде болуу”;

б) “Үчтөн ашпаган китептердин кыргыз тилинде болуу”

окуяларынын ыктымалдыктарын тапкыла.

Чыгаруу:► Сыноолор деп, ар бир китептин кайсыл тилде жазылганын текшерип чыгууларды эсептейбиз. **A** деп “текшерилген китептин кыргыз тилинде болуу” окуясын белгилейли. Анда $n = 125$ жолу сыноолор өтөт жана алардын ар биринде **A** окуясынын аткарылар – аткарылбасы белгисиз. Кийинки сыналган китептин кайсыл тилде болушу, мурдагы китептин кайсыл тилде экендигинен көз каранды эмес. Китептин кыргыз тилинде болуу окуясынын ыктымалдыгы өтө аз жана 100 китепке салыштырмалуу р = 0,004 -жетишерлик кичине санына барабар. Бул учурда Пуассондун (4) формуласын пайдаланып, A окуясынын $m = 3$ жолу аткарылуу ыктымалдыгын эсептейбиз:

а) $\boldsymbol{\lambda = np} = 125 \cdot 0{,}004 = 0{,}5$ санын таап, $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}5 < 10$ болгону үчүн, (4) формуланы пайдаланып, текшерүүлөрдө 3 китептин кыргыз тилинде болуу ыктымалдыгын

$P_{125}(3) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{0{,}5^3}{3!} \cdot e^{-0{,}5} = \frac{0{,}125}{6} \cdot 0{,}60653 \approx 0{,}012636$ табабыз. Мында $e^{-0{,}5} \approx 0{,}60653$ мааниси даяр таблицадан алынды.

б) $n = 125$ китептерди текшергенде, А окуясынын аткарылуу саны $0 \leq m \leq 3$ сегментинде жайгашкан болот. Демек, 125 сыноолор учурунда А окуясы же 0, же 1, же 2, же 3 жолу аткарылышы мүмкүн болуп, А окуясынын сегментте кармалган сандарча аткарылуу ыктымалдыгы, ар бир санча аткарылуу ыктымалдыктарын суммасы

$P_{125}(0 \leq m \leq 3\,) = P_{125}(0) + P_{125}(1) + P_{125}(2) + P_{125}(3)$ болот.

$\boldsymbol{\lambda = np} = 125 \cdot 0{,}004 = 0{,}5$; $e^{-0{,}5} \approx 0{,}60653$ маанилерин Пуассондун формуласына коюп, ар бир санча аткарылуу ыктымалдыктарын

$P_{125}(0) = \frac{0{,}5^0}{0!} \cdot e^{-0{,}5} = \frac{1}{1} \cdot 0{,}6065 = 0{,}6065;$

$P_{125}(1) = \frac{0{,}5^1}{1!} \cdot e^{-0{,}5} = 0{,}5 \cdot 0{,}6065 = 0{,}3033;$

$P_{125}(2) = \frac{0{,}5^2}{2!} \cdot e^{-0{,}5} = \frac{0{,}25}{2} \cdot 0{,}6065 = 0{,}0758;$

$P_{125}(3) = \frac{0{,}5^3}{3!} \cdot e^{-0{,}5} = \frac{0{,}125}{6} \cdot 0{,}6065 = 0{,}0126$ суммасын,

$P_{125}(0 \leq m \leq 3\,) = 0{,}6065 + 0{,}3033 + 0{,}0758 + 0{,}0126 = 0{,}9982$ жооп деп алабыз. ◄

Лапластын интегралдык формуласы: Жетишерлик чоң сан деп эсептелген n жолку көз каранды эмес сыноолордун ар биринде **А** окуясы болор же болбосу белгисиз окуя болсун. Эгерде ар бир сыноодо **А** окуясынын болуп өтүү ыктымалдыгы бирдей р санына барабар болсо $(0 < \text{р} < 1)$, анда бул жетишерлик чоң сандагы сыноолор учурунда **А** окуясынын m_1 ден кем эмес, m_2 ден ашыкча эмес жолу болуп өтүүсүн жакындаштырылган ыктымалдыгы, **Лапластын функциясы** деп аталган

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \qquad (5)$$

интегралдык функциясынын жардамы менен аныкталган

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (6)$$

формула менен эсептелет.

Мында $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{\boldsymbol{n}\text{р}\boldsymbol{q}}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{\boldsymbol{n}\text{р}\boldsymbol{q}}}$, $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \text{р}$**.**

Практикада Лапластын (6) формуласы, сыноолордун саны 10 дон көп же $n > 10$ болгон учурда колдонулуп, сыноолор эбегейсиз көбөйүп n чексиз чоңойгон сайын эсеп тактыгы жогорулап бара берет.

Кемчилдиги р саны 0 гө жана 1 ге чексиз жакындап келген учурларда эсептөө татаалданып, эсеп тактыгы бузулушу мүмкүн. Лапластын $\Phi(x)$ функциясынын маанилерин табууну жеңилдетүү максатында $x > 0$ учурлар үчүн, атайын таблица түзүлгөн (№ 3 – тиркеме). $\Phi(x)$ - так функция, ошондуктан $x < 0$ же “терс” жана $x > 0$ же “оң” болгон учурларда $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ болорун эске алууга туура келет. $x > 5$ болгондо таблицадагы жакындаштырылган маанилерде айырмачылыктар аз болгондуктан, $\Phi(x) \approx 0{,}5$ деп ала берүүгө болот.

Мисалы: 6. Архивдик документтерди текшергенде, алардын орточо 10% пайызы окулбай турган абалда болорун көрүүгө болот. Кокусунан алынган 200 документтерди иреттеп текшергенде, алардын 15 менен 50 сандарынын ортосундагы нускаларынын окулбай турган абалда болуу ыктымалдыгын эсептегиле.

Чыгаруу: ► Шарт боюнча А – “архивдик документтердин окулбай турган абалда болуу” окуясынын ыктымалдыгы 100 китепке салыштырмалуу р $= 0{,}1$, анда ага каршы окуянын ыктымалдыгы $q = 1 - \mathrm{p} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Сыноолордун жалпы саны $n = 200$, бул сыноолордо А окуясы ар кандай тартипте болсо да аткарылуу санын m десек, ал $m_1 = 15 \leq m \leq m_2 = 50$ сегментинде жайгашкан сандардын бирине тең болушу керек. Сыноолордун саны $n = 200$ жетишерлик чоң болгондуктан, Лапластын (6) формуласын колдонуу үчүн x тин

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{15 - 200 \cdot 0{,}1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{15-20}{\sqrt{18}} \approx \frac{-5}{4{,}24} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 200 \cdot 0{,}1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{50-20}{\sqrt{18}} \approx \frac{30}{4{,}24} \approx 7{,}07$$ маанилерин табабыз.

$x_1 = -\,1{,}18$ терс болгондуктан, Лапластын (5) функциясынын $\Phi(-1{,}18) = -\Phi(1{,}18)$ так экендигин эске алып, таблицадан $\Phi(-1{,}18)$ тин ордуна $\Phi(1{,}18)$ маанисин терс белгиде алабыз: $-\Phi(1{,}18) = -0{,}3810$.

$x_2 = 7{,}07 > 5$ болгондуктан, Лапластын функциясынын таблицадагы $\Phi(7{,}07) \approx 0{,}5$ мааниси алынат.

Андай болсо, А окуясы көрсөтүлгөн сегменттеги сандарча жолу аткарылуу ыктымалдыгы (6) боюнча

$P_{200}(15 \leq m \leq 50) = \Phi(7{,}07) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 - (-\,0{,}381) = 0{,}5 +$ $+0{,}381 = 0{,}881$ көрүнүштө эсептелет. ◀

§13. Кокустук окуялар жана аларды бөлүштүрүү закондору

Дискреттик кокустук окуялар: $Def - 1.$ *Жүргүзүлгөн сыноолор учурунда* X *өзгөрүлмө чоңдугу чектүү, же санактык сандагы* $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}, \dots$, $\boldsymbol{x_n}, \dots$ *удаалаштыгындагы маанилердин кайсы бирин, тиешелүү түрдө* p_1, p_2, p_3, … , $p_n \dots -$ *ыктымалдыктары менен кабыл алып олтурса, анда* x *өзгөрүлмө чоңдугун дискреттик кокустук окуя дейбиз* (*Мында* $p_i = P(x = x_i)$, $\quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$)**.**

Аныктамада баяндалгандай X өзгөрүлмө чоңдугунун ар бир $\boldsymbol{x_i}$ маанисин кабыл алуусуна $p_{\boldsymbol{i}} -$ ыктымалдыгы тиешелеш коюлат. $p_{\boldsymbol{i}}$ нин $\boldsymbol{x_i}$ өзгөрүлмө чоңдугуна карата мындай көз карандылыгын, $p_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$ **функционалдык көз карандылыгы катары баалап, аны: “** X **кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү закону”** – деп айтабыз.

Кокустук чоңдуктун $p_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$ **ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү законун** дискреттик же обочолонгон маанилерди кабыл алган **функция сыяктуу** түшүнүп, аны **бөлүштүрүү катары менен таблицада**, **бөлүштүрүү көп бурчтугу** көрүнүштө графикте жана аналитикалык формада **ыктымалдыктарды бөлүштүрүү функциясы** менен беребиз:

1. Таблицада x дискреттик **кокустук окуясынын ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катары** төмөндөгүдөй көрүнүштө берилет:

$\boldsymbol{x} -$ кокустук чоңдугу кабыл алуучу маанилер - $\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_n}$	…
Бул маанилерди кабыл алуу ыктымалдыктары -	$p_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$	$p_2 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$	…	$p_n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n})$	…

$p_i = P(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i}) =$ $= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$					

Сыноолордун жүрүшүндө X кокустук чоңдугу $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots\ , x_n\ , \dots$ маанилеринин кайсы бирин сөзсүз кабыл алгандыктан, алардын аткарылуу ыктымалдыктарынын чексиз суммасы, же бөлүштүрүү закону **1 санына жыйналуучу сандык катар** болот:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\ . \qquad (1)$$

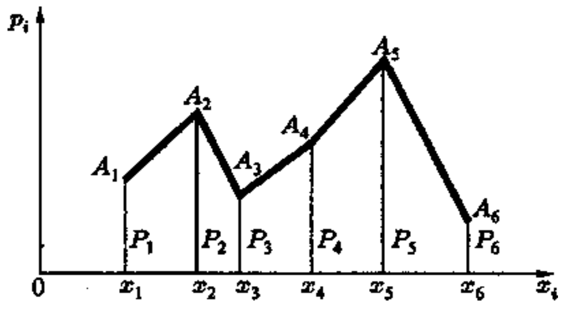
$$p_1 + p_2 + p_3 + \ \dots + p_n + \ \dots = \mathbf{1} \qquad (1^A)$$

Эгерде өзгөрүлмө маанилердин удаалаштыгынын саны, чектүү N санда болсо, анда **(1)** чектүү сумма көрүнүштө

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

жазылат. Ошентип, X кокустук чоңдугунун бөлүштүрүлгөн ыктымалдыктарынын суммасы 1 болуп, кокустук окуянын жыйынтыгы ишенимдүү окуя болот.

2. Бөлүштүрүү законун графикте көрсөтүү үчүн, X өзгөрүлмөсү $x_1,\ x_2, x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$ маанилерин, $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$ ыктымалдыктары менен кабыл алган учурду карайлы. Декарттык координаталар системасынын Ox огуна кокустук чоңдугу кабыл алуучу маанилерди, ал эми Оу огуна ошол маанилерди кабыл алуу



4 - чийме

ыктымалдыктарын жайгаштырып, координаталары $A_1(x_1;\ p_1)$, $A_2(x_2;\ p_2)$, ... , $A_6(x_6;\ p_6)$ чекиттерин белгилеп, аларды сынык сызыктар менен туташтырып чыксак, дискреттик **кокустук чоңдуктун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү көп бурчтугун** же графигин түзгөн болобуз. Мисалы (4 - чийме).

Мисал: 1. Студент сынакта берилген бир суроого туура жооп берсе 5, ал эми туура эмес жооп берсе 0 деген упайларды алат. “Туура” же “туура эмес” деген эки варианттагы суроолорго күтүүсүз жооптор берилгендиктен, жоопторго карата топтолгон упайлардын саны кокустук чоңдук болот. Жоопко жараша: X – “студент алган упайлардын саны” кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катарын тапкыла.

Чыгаруу: ► Берилген X – кокустук чоңдугу сыноолор учурунда $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ деген эки маанилерди алышы мүмкүн. Күтүүсүз берилген 1 суроого “туура” жана “туура эмес” даярдыксыз жоопторду берүү ыктымалдыктары барабар $\mathrm{P}(x_1) = 0{,}5$ жана $\mathrm{P}(x_2) = 0{,}5$.

Демек X кокустук чоңдугунун бөлүштүрүү катары

X: $\begin{array}{ccc} \boldsymbol{x_i} & 0 & 5 \\ \mathrm{p}_i & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$ көрүнүштө болот. ◄

Мисал: 2. “Оюн сөөкчөсүн бир жолу калчаганда 6 упай чыгуу” – деген X кокустук чоңдугун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катарын түзгүлө. Оюн сөөкчөсү 6 бетүү.

Чыгаруу: ► Сыноо деп, оюн сөөкчөсүн бир жолу калчаганды алабыз. X кокустук чоңдугунда 2 мүмкүнчүлүк бар: $x_1 = 0$ – “алты упай чыкпаган”, $x_2 = 1$ – “алты упай чыккан”. Эгерде бир жолу калчаганда A_1 - “бир упай”, A_2 - “эки упай”, ... , A_6 - “алты упай” окуялары десек, алардын баары тең мүмкүнчүлүктүү, бири – биринен көз каранды эмес окуялардын толук группасын түзүшөт. Ыктымалдыктары $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) = \cdots = \mathrm{P}(\mathrm{A}_6) = \frac{1}{6}$ барабар жана суммалары 1 ге барабар. Анткени алардын бири сөзсүз аткарылат.

Айталы, бир калчаганда 6 упай чыкты дейли, анда X кокустук окуясы $x_2 = 1$ деген маанини кабыл алып, ага A_6 окуясы аткарылган $\mathrm{p}_2 = \mathrm{P}(\mathrm{A}_6) = \frac{1}{6}$ ыктымалдыгы тиешелеш коюлат. Эгерде 6 упай чыкпаса, анда A_6 га карама – каршы болгон $\overline{\mathrm{A}_6}$ окуясы аткарылып, X кокустук чоңдугу $x_1 = 0$ маанисин кабыл алып, ага тиешелүү ыктымалдык $\mathrm{p}_1 = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_6}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}_6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ саны болот. Демек X кокустук чоңдугун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катары

X: $\begin{array}{ccc} \boldsymbol{x_i} & 0 & 1 \\ \mathrm{p}_i & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$ көрүнүштө жазылат.◄

Кокустук окуялардын ыктымалдыктарын бөлүштүрүү функциялары: *X - дискреттик кокустук чоңдугу,* ***бөлүштүрүүнүн интегралдык функциясы*** *деп аталуучу* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ – ***бөлүштүрүү функциясы*** *менен да берилиши мүмкүн.*

$Def-2$. *X кокустук чоңдугун* ***бөлүштүрүү функциясы*** *деп,* X *тин ар кандай маанилеринде,* ***X кокустук окуясынын x тен ашып кетпей турган маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгы белгилеген $\boldsymbol{F(x)}$ функциясын*** *айтып, аны*

$\boldsymbol{F(x)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x)$ $\quad(***)$ *көрүнүштө белгилейбиз.*

Жогоруда таблицада көрсөтүлгөн дискреттик кокустук чоңдугун бөлүштүрүү функциясы

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \mathrm{p}_i \text{ көрүнүштө жазылат.} \qquad (2)$$

Мында суммалоо x тен кичине болгон бардык x_i лерге тиешелеш коюлган p_i лер боюнча жүргүзүлөт.

Бөлүштүрүү функциясын төмөндөгүдөй касиеттери бар:

$\mathbf{1}^{\circ}$**.** Бөлүштүрүү функциясын маанилери $[0,\ 1]$ аралыгында өзгөрөт $0 \le F(x) \le 1$.

$\mathbf{2}^{\circ}$**.** Бөлүштүрүү функциясы кемибөөчү функция болот.
$x_1 < x_2 \Rightarrow\ F(x_1) \le F(x_2)$

Мындан төмөндөгүдөй натыйжалар келип чыгат:

а) X кокустук чоңдугу $[a, b)$ жарым сегментиндеги x маанилерин кабыл алган учурда, кокустук чоңдуктун аткарылуу ыктымалдыгы, анын бөлүштүрүү функциясы аркылуу

$$x \in [a, b)\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(a \le x < b) = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

формуласы аркылуу туюнтулат. Ошентип X кокустук чоңдугунун (a, b) интервалындагы x маанилерин кабыл алуу ыктымалдыгы, бөлүштүрүү функциясынын ушул интервалдагы өсүндүсүнөн ашып кетпейт.

$\mathrm{P}(a < \mathrm{X} < b) \le F(\,b) - F(a)$.

б) Үзгүлтүксүз X кокустук окуясынын кайсы бир анык маанини (мисалы x_1 деген) алуу ыктымалдыгы нөлгө барабар: $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_1\,) = 0$.

$\mathbf{3}^{\circ}$. Эгерде X кокустук окуялардын бардык маанилери (a, b) интервалында жайгашса, анда $x \le a \Rightarrow F(x) = 0$, ал эми $x \ge b \Rightarrow F(x) = 1$ болот.

натыйжалар:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \Lambda \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ болот. $\qquad (3)$

$\mathbf{4}^{\circ}$. Бөлүштүрүү функциясы сол тараптан үзгүлтүксүз болот:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)\,. \qquad (4)$$

Мисал: 3. X кокустук окуясы $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x \le -1 \text{ болсо}, \\ \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}, & \text{эгерде } -1 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{эгерде } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ бөлүштүрүү функциясы менен берилген. Сыноолор учурунда X кокустук окуясы $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ интервалында жайгашкан маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► 2° – а) натыйжасын эске салып $\mathrm{P}(a < \mathrm{X} < b) \le F(b) - F(a)$; $a = 0$ жана $b = \frac{1}{3}$ болгон учурда $\mathrm{P}\left(0 < \mathrm{X} < \frac{1}{3}\right) \le F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left[\frac{3x}{4} + \frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}} - \left[\frac{3x}{4} + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = \frac{1}{4}$ жообуна ээ болобуз. ◄

4. X кокустук чоңдугу X:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

бөлүштүрүү катары менен берилген. X тин $F(x)$ - бөлүштүрүү функциясын таап, графигин тургузгула.

Чыгаруу: ► X кокустук чоңдугун $\mathrm{X} \equiv R = (-\infty, +\infty)$ сан огунда x_i: -2, 0, 3, 7 маанилерине карата аралыктарга бөлүп карайбыз.

1) X кокустук чоңдугу $-\infty < x \le -2$ аралыгында -2 ден кичине болгон бир да маанини кабыл албайт. Ошондуктан бөлүштүрүү функциясы

$$F(x) = F(-2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < -2) = 0 \text{ болот.}$$

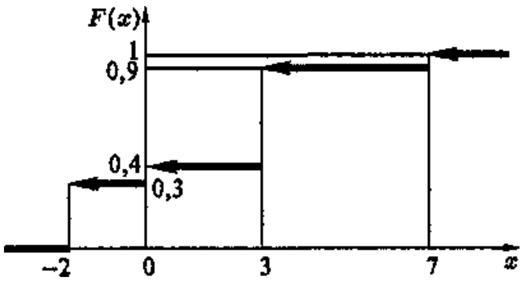
2) $-2 < x \le 0$ аралыгында X кокустук чоңдугу, жалгыз $\mathrm{X} = 0$ маанисин кабыл алып, бөлүштүрүү функциясы $F(x) = F(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 0)$ көрүнүштө болот. Демек $\mathrm{X} < 0$ болгон аралыкта, кокустук чоңдук 0 дөн кичине болгон бир гана $x_1 = \mathbf{-2}$ маанисин алышы мүмкүн, анда $F(x) = F(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 0) = 0{,}3$.

3) $0 < x \le 3$ аралыгында X кокустук чоңдугу жалгыз гана $\mathrm{X} = 3$ маанисин кабыл алып, бөлүштүрүү функциясы $F(x) = F(3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 3)$ көрүнүштө болот. $\mathrm{X} < 3$ болгондо, X кокустук чоңдугу: 0,3 ыктымалдыгы менен $x_1 = -2$, же 0,1 ыктымалдыгы менен $x_2 = 0$ маанилерин кабыл алышы мүмкүн. Кайсы маанини кабыл алса да боло бергендиктен, бул биргелешпеген окуялардын суммасынын ыктымалдыгы катары $F(x) = F(3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = -2) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$ болот.

4) $3 < x \leq 7$ аралыгында X кокустук чоңдугу бир гана $X = 7$ маанисин кабыл алып, бөлүштүрүү функциясы $X < 7$ болгондо, X кокустук чоңдугу: 0,3 ыктымалдыгы менен $x_1 = -2$, же 0,1 ыктымалдыгы менен $x_2 = 0$, же 0,5 ыктымалдыгы менен $x_3 = 3$ маанилерин кабыл алышы мүмкүн. Кайсы маанини кабыл алса да боло бергендиктен, бул биргелешпеген окуялардын суммасынын ыктымалдыгы катары бөлүштүрүү функциясы

$$F(x) = F(7) = \mathrm{P}(X < +\infty) =$$
$$= \mathrm{P}(X = -2) + \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 3) =$$
$$= 0{,}3 + +0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}9$$

көрүнүштө болот.



5 – чийме

5) $7 < x < +\infty$ аралыгында X кокустук чоңдугу, мүмкүн болгон бардык маанилерди кабыл алууга жөндөмдүү. Ошондуктан бөлүштүрүү функциясы $F(x) = \mathrm{P}(X < +\infty) = 1$ көрүнүштө болот.

Демек, X кокустук чоңдугун бүтүндөй сан огунда төмөндөгүдөй бөлүштүрүү функциясы менен мүнөздөй алабыз:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x \leq -2 \text{ болсо,} \\ 0{,}3 & \text{эгерде } -2 < x \leq 0 \text{ болсо,} \\ 0{,}4 & \text{эгерде } 0 < x \leq 3 \text{ болсо,} \\ 0{,}9 & \text{эгерде } 3 < x \leq 7 \text{ болсо,} \\ 1 & \text{эгерде } x > 7 \text{ болсо.} \end{cases}$$

5 – чиймеде бөлүштүрүү функциясын графиги сызылган. ◄

Дискреттик кокустук чоңдуктарын сандык мүнөздөмөлөрү:

Чектүү n сандагы маанилерди кабыл алган ***X*** кокустугу чоңдугу

$$X: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 & \dots & \mathrm{p}_i & \dots & \mathrm{p}_n \end{matrix}$$

көрүнүштөгү бөлүштүрүү катары менен берилсин дейли.

$Def - 3.$ ***X*** *кокустук чоңдугу кабыл алууга мүмкүн болгон чектүү* n *сандагы бардык* x_i *– маанилери менен, ошол маанилерди кабыл алуу* p_i *– ыктымалдыктарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасы,* ***X кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү*** *деп аталып,* M[X] - *символу менен белгиленет:*

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} \cdot \mathrm{p}_i. \quad \text{Мында } \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i = \mathbf{1} \qquad (5)$$

Эгерде X кокустук чоңдугу чексиз көп маанилерди кабыл алса, анда анын математикалык күтүүсү, төмөндөгү жыйналуучу деп алынган катардын суммасы m_x саны болот (жыйналбаган учур каралбайт).

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot \mathrm{p}_i = m_x, \text{ Мында } \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}_i = \mathbf{1} \qquad (5^{\mathrm{A}})$$

Мурдатан айтып келгендей эле, **X** өзгөрүлмөсү аталган маанилерди кайсы бир деңгээлдеги ыктымалдыктарда толук кабыл алып бүткөндүктөн, маанилерди кабыл алуу ыктымалдыктарынын суммасы 1 болуп, **X** кокустук чоңдугу ишенимдүү окуя болот.

Айталы көз каранды эмес сыноолордун саны K жолу жүргүзүлүп, ар бир сыноодо X кокустук чоңдугу:

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ маанисин } k_1 \text{ жолу,} \\ x_2 \text{ маанисин } k_2 \text{ жолу,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i \text{ маанисин } k_i \text{ жолу} \end{array}$$

кабыл алсын. Сыноолордун саны K чексиз өскөндө, ***X кокустук чоңдугунун арифметикалык орточо мааниси, кокустук чоңдуктун математикалык күтүүсүнө умтулуп жетет.*** Демек X кокустук чоңдугун орточо жыштыгы $\frac{k_i}{\mathrm{K}}$, кокустук чоңдуктун x_i маанисин кабыл алуу ыктымалдыгына умтулуп жетип: $\frac{k_i}{\mathrm{K}} \to \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \mathrm{p}_i$, жакындаштырылган абалда

$$\overline{\mathrm{M}}_{\substack{\text{орточо} \\ \text{жыштык}}} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot \frac{k_i}{\mathrm{K}} \approx \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot \mathrm{p}_i = \mathrm{M}[\mathrm{X}]$$

теңдештиги орун алат.

Натыйжа: Ошентип, X кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү, X кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү борбору болуп эсептелет.

Ыктымалдыктарды бөлүштүрүү борбору, механикадагы оордук борборго окшош түшүнүк болуп, аны $0x$ абциссасынын $x_1, x_2, \dots, x_n$ чекиттерине, массалары $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots, \mathrm{p}_n$ нерселер жайгашкан учурдай, бул нерселердин массаларынын оордук борборун абциссасы

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot \mathrm{p}_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}_i} \text{ сыяктуу табылат .}$$

Эгерде $\sum \mathrm{p}_{\boldsymbol{i}} = 1$ болсо, анда ыктымалдыктарды бөлүштүрүү борбору

$$x_{\mathrm{C}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot \mathrm{p}_{\boldsymbol{i}} \qquad (6)$$

формуласы менен эсептелет.

Математикалык күтүүнүн касиеттери:

1°. C – *constanta, б.а. турактуу чоңдук болсо* $\mathrm{M}[\mathrm{C}] = \mathrm{C}$ *болот;*

2°. k – *constanta* $\Rightarrow$ $\mathrm{M}[k\mathrm{X}] = k\mathrm{M}[\mathrm{X}]$ *болот;*

3°. *Ар кандай эки X, Y кокустук чоңдуктары берилсе, анда алардын суммасынын математикалык күтүүсү, алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн суммасына барабар болот*

$\mathrm{M}[\mathrm{X} + Y] = \mathrm{M}[\mathrm{X}] + \mathrm{M}[Y]$.

4°. *Көз каранды эмес эки $X,\ Y$ кокустук чоңдуктары берилсе, анда алардын көбөйтүндүсүн математикалык күтүүсү, алардын ар биринин математикалык күтүүлөрүнүн көбөйтүндүлөрүнө барабар болот*

$\mathrm{M}[\mathrm{X} \cdot Y] = \mathrm{M}[\mathrm{X}] \cdot \mathrm{M}[Y]$.

X кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү борборунун абалын, анын математикалык күтүүсү аныктаса, X тин дисперсиясы, кокустук чоңдуктун чачыла таралып бөлүштүрүүсүн сандык чоңдугун көрсөтөт. Дисперсия сөзү “себелөө” – деген мааниде которулат.

$Def-4$. ***X кокустук чоңдугунун*** $\boldsymbol{D}[\mathrm{X}]$ – ***дисперсиясы*** *деп, X кокустук чоңдугу менен, анын математикалык күтүүсүн айырмасынын квадратынын математикалык күтүүсүн айтып, дисперсияны*

$$D[\mathrm{X}] = M\big[X - M[X]\big]^2 \quad \text{же ага теңдеш} \qquad (7)$$

$$D[\mathrm{X}] = M[\mathrm{X}^2] - \mathrm{M}^2[\mathrm{X}] \qquad (7^{\mathrm{A}})$$

формулалары менен эсептейбиз.

Ошентип дисперсия математикалык күтүүгө салыштырмалуу, X кокустук чоңдуктун маанилеринин себеленип чачылуусун сандык мүнөздөмөсү болот.

Эгерде X кокустук чоңдугу чектүү n сандагы маанилерди кабыл алууга мүмкүнчүлүгү болсо, анда анын дисперсиясын

$$D[\mathrm{X}] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^{\boldsymbol{2}} \cdot \mathrm{p}_{\boldsymbol{i}}, \qquad (\boldsymbol{7}^{\mathrm{Б}})$$

$$D[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} (x_i{}^2 \cdot \mathrm{p}_i) \ - \mathrm{M}^2[\mathrm{X}] \qquad (\mathbf{7}^{\mathrm{В}})$$

формулалары менен эсептөөгө болот.

Дисперсиянын касиеттери:

k менен **С** – турактуу сан, X менен Y көз каранды эмес кокустук чоңдуктар болушкан учурда

1°. $D[\mathrm{C}] = 0$;

2°. $D[k \cdot \mathrm{X}] = k^2 D[\mathrm{X}]$;

3°. $D[X + Y] = D[\mathrm{X}] + D[Y]$ болушуп, k менен **С** – турактуу сан, X менен Y көз каранды эмес кокустук чоңдуктар болушкан учурларда аткарылышат.

Х кокустук чоңдугунун **орточо квадраттык четтөөсүн же стандартын $\boldsymbol{\sigma}$ –** тамгасы менен белгилеп,

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D[\mathrm{X}]} \qquad (\mathbf{8})$$

формуласы менен эсептейбиз.

Ошентип дисперсия, Х кокустук чоңдугунун квадратынын себеленип чачылуу ченеми болсо, орточо квадраттык четтөө Х кокустук чоңдугунун өзүнүн себелене чачылып бөлүнүүсүн аныктоо инструменти болот.

Мисал: 5. Х кокустук чоңдугу Х: $\begin{matrix} x_i & 1 & 2 & 4 \\ p_i & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{matrix}$ бөлүштүрүү катары менен берилген. Анын математикалык күтүүсүн, дисперсиясын, орточо квадраттык четтөөсүн тапкыла.

Чыгаруу: ► $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1 \ \Rightarrow$ (5) формула боюнча Х кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \mathrm{p}_i = x_1 \cdot \mathrm{p}_1 + x_2 \cdot \mathrm{p}_2 + x_3 \cdot \mathrm{p}_3 = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 +$$

$+4 \cdot 0{,}6 = 0{,}1 + 0{,}6 + 2{,}4 = 3{,}1$ болот. Х кокустук чоңдугу чектүү 3 сандагы маанилерди кабыл алгандыктан дисперсияны $(\mathbf{7}^{\mathrm{Б}})$ менен $(\mathbf{7}^{\mathrm{В}})$ формулалары эсептөөгө болот. Экөөсү менен эсептеп салыштыралы:

$$(\mathbf{7}^{\mathrm{Б}}) \ \Rightarrow D[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathrm{p}_i = (x_1 - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathrm{p}_1 +$$

$$+(x_2 - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathrm{p}_2 + (x_3 - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \cdot \mathrm{p}_3 = (1 - 3{,}1)^2 \cdot 0{,}1 +$$

$+(2-3{,}1)^2 \cdot 0{,}3 + (4-3{,}1)^2 \cdot 0{,}6 = 4{,}41 \cdot 0{,}1 + 1{,}21 \cdot 0{,}3 + 0{,}81 \cdot 0{,}6 =$
$= 0{,}441 + 0{,}363 + 0{,}486 = 1{,}29;$

$$(\mathbf{7}^{\text{В}}) \quad \Rightarrow D[\mathrm{X}] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{3} (\boldsymbol{x_i}^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_{\boldsymbol{i}}) - \mathrm{M}^{\mathbf{2}}[\mathrm{X}] = \boldsymbol{x_1}^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{x_2}^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x_3}^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_{\mathbf{3}} -$$

$-\mathrm{M}^{\mathbf{2}}[\mathrm{X}] = 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 - (3{,}1)^2 = 0{,}1 + 1{,}2 + 9{,}6 -$
$-9{,}61 = 10{,}9 - 9{,}61 = 1{,}29$ болуп, эки формула менен эсептеп, бирдей жыйынтыктарга ээ болдук.

Орточо квадраттык четтөөсү $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D[\mathrm{X}]} = \sqrt{1{,}29} \approx 1{,}1358$. ◄

Бөлүштүрүүнүн биноминалдык закону: Айталы X кокустук чоңдугу, n жолку көз каранды эмес сыноолордун ар биринде A окуясынын аткарылуу сандары болсун $\mathrm{X} = \{\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots ,\ \boldsymbol{x_n}\}$. Бардык учурларда A окуясынын аткарылуу ыктымалдыктары бирдей турактуу p санына, ал эми аткарылбай калуу ыктымалдыктары $q = 1 - p$ санына барабар болушсун дейли. Мындай **кокустук чоңдуктун бөлүштүрүү законун бөлүштүрүүнүн биноминалдык закону дейбиз**.

Биноминалдык закон менен бөлүштүрүлгөн X кокустук чоңдугу, ыктымалдыктын төмөндөгүдөй бөлүштүрүү катары менен мүнөздөөгө болот:

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	…	$x_m = m$	…	$x_n = n$
p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(m)$	…	$P_n(n)$

.

Бул таблицада x_i деп, A окуясы канча жолу аткарылуу санын көрсөткөн X кокустук чоңдугунун мүмкүн болгон маанилери, ал эми p_i деп, ошол маанилерди кабыл алуу ыктымалдыктары белгиленген.
$P_n(m)$ ыктымалдыктары Бернуллинин $\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} \cdot \mathrm{p}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n-m}}$ формуласы менен эсептелип, таблицага толтурулат.
Бөлүштүрүүнүн биноминалдык законуна баш ийген X кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү, дисперсиясы жана орточо квадраттык четтөөсү тиешелүү түрдө:

$$M[X] = n \cdot p, \qquad (5^{\text{Б}})$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q, \qquad (7^{\Gamma})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \qquad (8^{\text{А}})$$

формулалары менен эсептелет.

Мисал: 6. Урнага 5 ак жана 10 кара шарлар салынган. Урнадан тандабастан эле тобекелчилик менен 1 шар алынган. X кокустук чоңдугу, алынган шарлардын ак болуу санын көрсөтсүн дейли. Бул кокустук чоңдуктун бөлүштүрүү законун (катарын) түзүп, математикалык күтүүсүн, дисперсиясын, орточо квадраттык четтөөсүн тапкыла.

Чыгаруу: ► Сыноо деп урнадан 1 шарды алууну, А деп урнадан алынган шардын ак болуп калуу окуясын түшүнөлү. А окуясын аткарылуу ыктымалдыгы $p = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, ал эми А окуясына каршы $\overline{\text{A}}$ окуясын ыктымалдыгы $q = P(\overline{\text{A}}) = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ болот. Мында $n = 15$ жалпы жагдай же шарлардын саны, ал эми $m = 5$ көмөктөшүүчү жагдайлардын же ак шарлардын саны.

X кокустук чоңдугу эки: x_i 0 1 деген маанилерди кабыл алышы мүмкүн, анткени сыноодо алынган шар ак болбосо А окуясы $x_1 = 0$ жолу, ак болсо $x_2 = 1$ жолу аткарылган болот. Тиешелүү ыктымалдыктар болсо $\text{p}_1 = P(\overline{\text{A}}) = q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\text{p}_2 = P(\text{A}) = \frac{2}{3}$ болушат. Демек X кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катары

X: $\begin{matrix} x_i & 0 & 1 \\ p_i & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$ көрүнүштө жазылат.

Математикалык күтүүсү ($5^{\text{Б}}$) формула боюнча

$$M[X] = n \cdot p = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .$$

Дисперсиясы (7^{Γ}) боюнча $D[X] = n \cdot p \cdot q = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Орточо квадраттык четтөөсү (8^{A}) формуласы боюнча $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D[X]} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ болушат. ◄

7. Оюн сөөкчөсүн 3 жолу кайталап ыргыткан учурлардагы 6 упайлардын чыгуу сандарын X кокустук чоңдугу дейли. Кокустук чоңдуктун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү катарын, математикалык күтүүсүн, дисперсиясын, орточо квадраттык четтөөсүн тапкыла.

Чыгаруу: ► Оюн сөөкчөсүн ар бир жолу ыргытканды сыноолор десек, анда $n = 3$ жолу сыноолор жүргүзүлөт. Ыргытылган оюн сөөкчөлөрдүн мурункусунун чыккан упайы, кийинкисинин упай натыйжасына таасир эте албагандыктан, сыноолор көз каранды эмес болушат. Ыргытылган оюн сөөкчөнүн 6 упай чыгуу окуясын A десек, анда ар бир сыноодо A окуясы аткарылат же аткарылбайт. Ар бир сыноодо A окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы $p = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$, ал эми аткарылбай калуу ыктымалдыгы $q = P(\bar{A}) == 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$n = 3$ жолку сыноолордо A окуясынын аткарылуу сандары $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ жолдору болушу мүмкүн. Демек X кокустук чоңдугу кабыл алуучу дискреттик маанилер $x_i = m_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ сандары болушат. A окуясынын көрсөтүлгөн сандарча аткарылуу ыктымалдыктары Бернуллинин формуласы боюнча эсептелет.

$x_0 = m_0 = 0$ жолу аткарылганда:

$$p_0 = \mathrm{P}(m_0 = 0) = \mathrm{C}_3^0 p^0 q^{3-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

$x_1 = m_1 = 1$ жолу аткарылганда:

$$p_1 = \mathrm{P}(m_1 = 1) = \mathrm{C}_3^1 p^1 q^{3-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{216} = \frac{75}{216};$$

$x_2 = m_2 = 2$ жолу аткарылганда:

$$p_2 = \mathrm{P}(m_2 = 2) = \mathrm{C}_3^2 p^2 q^{3-2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216};$$

$x_3 = m_3 = 3$ жолу аткарылганда:

$$p_3 = \mathrm{P}(m_3 = 3) = \mathrm{C}_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$ болушат.

Ыктымалдыктардын суммасы $\sum p_i = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1$ болорун текшерип көрөбүз.

Анда бөлүштүрүү катары X:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

.

Математикалык күтүүсү ($5^{Б}$) формула боюнча

$$M[X] = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Дисперсиясы ($7^{Г}$) боюнча $D[X] = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

Орточо квадраттык четтөөсү (8^{A}) формуласы боюнча $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D[X]} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$ болушат. ◄

Пуассондун закону: *Айталы X кокустук чоңдугу жалаң оң бүтүн сандардан турган* $x_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, m, \ldots$ *сыяктуу* ***чектелбеген сандарга чейин улана бериши мүмкүн болгон дискреттик маанилерди*** *кабыл алышсын.*

Эгерде X кокустук чоңдугу конкреттүү бир m деген маанинин кабыл алуу ыктымалдыгы

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = m) = \mathrm{P}_m = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad (m = 0, 1, \quad 2, \ldots) \qquad (9)$$

формуласы менен эсептелсе, анда X кокустук чоңдугун бөлүштүрүү **Пуассондун закону деп аталган төмөндөгүдөй таблицада көрсөтүлгөн (10) ыктымалдыктардын бөлүштүрүү катары** аркылуу берилет:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	…

(10)

Пуссондун закону боюнча бөлүштүрүлгөн X кокустук чоңдугунун кабыл алган маанилеринин арифметикалык орточо санын көрсөткөн математикалык күтүүсү менен дисперсиясы тең болушуп,

$$M[X] = D[X] = \lambda \qquad (11)$$

формуласы аркылуу эсептелет. Мында $\lambda > 0$ саны бөлүштүрүүнүн параметри деп аталат.

Мисал: 8. Жаңы жыл келген түнү шаардык тез жардам кызматына, орточо эсеп менен саатына 90 чакыруу келип түшкөн. Убакыттын ар кандай бөлүктөрүндө чакыруулардын саны Пуассондун закону менен бөлүштүрүлөт деп ойлоп:

а) X кокустук чоңдугун “тез жардам кызматына 4 минута ичинде келип түшкөн чакыруулардын саны” деп алып, анын бөлүштүрүү катарын түзгүлө;

б) 4 минута ичинде үчтөн кем эмес чакыруулардын болуу окуясынын ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► X кокустук чоңдугу 4 минута аралыгында тез жардам кызматына келип түшкөн чакыруулардын саны болсун. Убакыттын ар кандай бөлүктөрүндө чакыруулардын саны Пуассондун закону менен бөлүштүрүлгөндүктөн, 4 минута ичинде болгон чакырыуулардын саны да, Пуассондун закону боюнча бөлүштүрүлөт. 1 саатта же 60 минутада 90 чакыруулар болгондуктан, $1\text{ минутада} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ чакыруулар болушу мүмкүн. Анда 4 минутада $1{,}5 \cdot 4 = 6$ чакыруулар болушу мүмкүн. Демек 4 минута ичинде чакырууларды алдын ала болжолдонгон математикалык күтүү (же жыштыгы), (11) боюнча $M[X] = D[X] = 6$ болуп, бөлүштүрүү параметри $\lambda = 6$ болору келип чыгат. Пуассондун таблицасын колдонуп, а) – учурун карайлы:

а) Пуассондун $\mathrm{P}_n(m) = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, $(\lambda = n \cdot \mathrm{p})$ формуласы боюнча:

X −чакыруу болуу окуясынын саны, $m = 0$ жолу болуу ыктымалдыгы $p_0 = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{6^0}{0\,!} \cdot \mathrm{e}^{-6} = 1 \cdot \mathrm{e}^{-6} = \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0025$;

X −чакыруу болуу окуясынын саны, $m = 1$ жолу болуу ыктымалдыгы $p_1 = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{6^1}{1\,!} \cdot \mathrm{e}^{-6} = 6 \cdot \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0149$;

X −чакыруу болуу окуясынын саны, $m = 2$ жолу болуу ыктымалдыгы $p_2 = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{6^2}{2\,!} \cdot \mathrm{e}^{-6} = 18 \cdot \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0446$;

X −чакыруу болуу окуясынын саны, $m = 3$ жолу болуу ыктымалдыгы $p_3 = \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{6^3}{3\,!} \cdot \mathrm{e}^{-6} = 36 \cdot \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0892$;

ж.б.у.с. $m = 4,\ 5, \dots,\ m, \dots$ жолу чакыруу ыктымалдыктарын эсептөөнү улантууга болот. Анда чакыруулардын санын билдирген X кокустук чоңдугун бөлүштүрүү катарын:

$$\mathrm{X}: \begin{array}{cccccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & m & \dots \\ p_i & 0{,}0025 & 0{,}0149 & 0{,}0446 & 0{,}0892 & \dots & \frac{\lambda^m}{m\,!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} & \dots \end{array}$$

көрүнүштө жазабыз.

б) “4 минута ичинде тез жардамга 3 төн кем эмес чакыруулар болуу” окуясын В дейли. Бул окуяга карама – каршы $\overline{\mathrm{B}}$ - “тез жардамга 3 кө жетпеген чакыруулар түштү” окуясын карап, анын ыктымалдыгын

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = p_0 + p_1 + p_2 \underbrace{\approx}_{\text{а)}}$$

$\approx 0{,}0025 + 0{,}0149 + 0{,}0446 = 0{,}062$ табабыз.

Анда В окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы

$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1 - q = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - 0{,}062 = 0{,}9380$ саны болот.◄

Үзгүлтүксүз кокустук чоңдуктардын бөлүштүрүү функциясы жана ыктымалдыктарын бөлүштүрүү тыгыздыгы: Жогоруда дискреттик маанилерди гана кабыл алган X кокустук чоңдуктарын карап келдик. Үзгүлтүксүз кокустук чоңдуктардын кабыл алган маанилер дискреттик же секирик мүнөздө болбостон, жылчыксыз же туташ маанилер болушат. Үзгүлтүксүз X кокустук чоңдугуна: “бычактын мизинин жешилип мокоо ченемдери” мисал боло алат. Анткени бычактын мокоо процесси билинбеген жешилүү аркылуу жүрүп олтурат. Анын жешилүү ченин бири – биринен обочолонгон сандар менен эмес, жылчыксыз туташ жайгашкан сандар аркылуу гана жазып белгилей алабыз.

Айталы X кокустук чоңдук закону, $Def-2$ менен 11 – темада аныкталган бөлүштүрүүнүн $(***)$ интегралдык функциясы аркылуу берилсин:

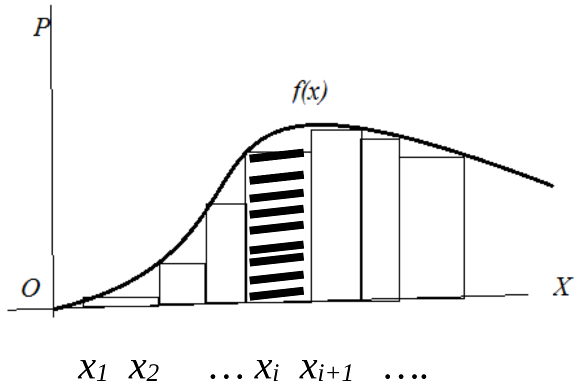
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x). \qquad (\mathbf{12})$$

11 – темада дискреттик кокустук чоңдукту бөлүштүрүүнүн интегралдык функциясы, $0x$ - сан огунда x тен кичине болгон ***дискреттик же обочолонуп секирген*** $x_1, x_2, \ldots$ сыяктуу маанилерди кабыл алса, үзгүлтүксүз кокустук чоңдукту бөлүштүрүүнүн $(\mathbf{12})$ интегралдык функциясы, $0x$ - сан огунда x тен кичине болгон ***туташ үзүгү жок жылчыксыз же үзгүлтүксүз маанилерди*** кабыл алат.

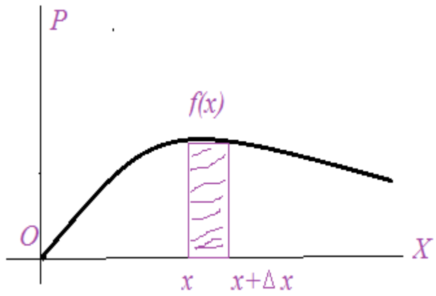
Кокустук чоңдуктун ыктымалдыгын берилген интервалда кармалышы:

Айталы, X үзгүлтүксүз кокустук чоңдугу, кандайдыр бир $(a,\ b)$ интервалында бардык маанилерди кабыл алсын. Бул интервал чектелбей $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болуп калышы да мүмкүн болсун. Берилген $(a,\ b)$ интервалын жетишерлик чоң n сандагы ар кандай $x_1,\ x_2,\ x_2, \ldots,\ x_n$ чекиттери аркылуу майда бөлүкчө аралыктарга бөлөлү. Анда ар бир i −чи бөлүкчө аралык узундугу жетишерлик кичине $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ болгон, майда $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалдарга бөлүнгөн болот. Эгерде X кокустук чоңдугу, ушул $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалында үзүгүлтүксүз жайгашкан баардык маанилерди кабыл алып жатат деп ойлосок, анда анын ыктымалдыгын $\mathrm{P}(x_{i-1} < \mathrm{X} < x_i) = F(x_i + \Delta x_i) - F(x_{i-1})$ көрүнүштө эсептеп, аны координаттык тегиздикте негизи Δx_i бийиктиги

$\mathrm{P}(x_{i-1} < \mathrm{X} < x_i)$ болгон тик бурчтуктун аянты менен сүрөттөп көрсөтөбүз. Натыйжада маанилери ар бир $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалда жайгашкан кокустук чоңдуктун, аткарылуу ыктымалдыктарын сүрөттөгөн тепкич сымал тик бурчтуктардын аянттарын көрөбүз (6 - чийме). Бул учурда бөлүштүрүү $\mathrm{p}_i = f(x_i)$ функциясынын графиги



6 – чийме



7 – чийме

(бөлүштүрүү ийриси) тепкич сымал жайгашкан сынык сызыктарга жакындаштырылып алмаштырылган болот (6 – сүрөт). Үзгүлтүксүз X кокустук чоңдуктун ыктымалдыктарды бөлүштүрүү функциясы $\mathrm{p}(x) = f(x)$, же ийриси $(a,\ b)$ интервалда берилсе, анда графиги, сынык сызыктардын жогорку оң (же сол) чокуларын туташтырган, 7 – чиймеде көрсөтүлгөндөй туташ сызык болот. $\mathrm{p}(x) = f(x)$функциясын графиги – **ыктымалдыктарды бөлүштүрүү ийриси** деп коюшат.

$Def - 5.$ *Үзгүлтүксүз* X *кокустук чоңдугунун* ***ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү тыгыздыгы*** *деп, бөлүштүрүүнүн интегралдык* $\boldsymbol{F(x)}$ *- функциясынын биринчи тартиптеги туундусу болгон* $\boldsymbol{f(x)}$ *функциясын айтабыз:*

$$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}\,. \qquad (13)$$

Ыктымалдыктарды бөлүштүрүү тыгыздыгын, бөлүштүрүүнүн дифференциалдык функциясы деп да аташат. *Ыктымалдыктарды бөлүштүрүү тыгыздыгы болгон* $\boldsymbol{f(x)}$ *функциясы, дискреттик кокустук чоңдуктардагы ыктымалдыктарды бөлүштүрүүнүн* $\mathrm{p}_i = f(x_i)$ *дискреттик функциясынын жалпыланышы болгон* $\mathrm{p}(x) = f(x)$ *функциясы болорун байкаса болот (11 - тема).*

Чынында эле: $\mathrm{P}(x < \mathrm{X} < x + \Delta x)$ ыктымалдыгын, Δx узундугуна бөлүү менен $\frac{\mathrm{P}(x<\mathrm{X}<x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, X кокустук чоңдугунун узундугу

Δx болгон $(x,\ x+\Delta x)$ интервалдагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыктарын тыгыздыгын аныктаса болот. X кокустук чоңдугу $(a,\ b)$ интервалындагы бардык маанилерди үзүксүз кабыл алышы үчүн, интервалды бөлүктөргө бөлүүнүн санын чексиз көбөйтүү керек экендигин байкайбыз. Анда бөлүкчө интервалдардын узундуктары Δx кичирейип олтуруп, нөлгө умтулуп жетип, туундунун аныктамасы боюнча $F(x)$ үзгүлтүксүз болгон аралыктарда, туундусу жашап

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \qquad (\mathbf{13}^{\text{А}})$$

теңдештиги орун алат. Мындан X кокустук чоңдугун (a,b) интервалдагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгын

$$\text{P}(a<\text{X}<\ b)=\int_a^b f(x)dx \qquad (14)$$

формуласы менен табууга болору келип чыгып, ыктымалдыктардын бөлүштүрүү тыгыздыгы аркылуу, кокустукту бөлүштүрүүнүн интегралдык функциясын табуу мүмкүн болорун байкайбыз:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,. \qquad (15)$$

Ыктымалдыктарды бөлүштүрүү тыгыздыгын, төмөндөгүдөй касиеттерин белгилеп кетели:

$\mathbf{1}^{\circ}$. $\quad f(x)\geq 0;$

$\mathbf{2}^{\circ}$. $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ же $x\in(a,b)\ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx=1\,.$

Эгерде X үзгүлтүксүз кокустук чоңдук болуп, $x\in[\alpha,\ \beta)$ жарым сегменттеги маанилерди кабыл алса, анда анын ыктымалдыгы

$$\text{P}(\alpha\leq\text{X}<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)\ \text{же}\ \text{P}(\alpha\leq\text{X}<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \qquad (16)$$

формулалары менен эсептөөгө болот.

Мисал: 9. Үзгүлтүксүз X кокустук чоңдугу ыктымалдыктарды бөлүштүрүүнүн

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{эгерде } x\leq 2 \text{ болсо,}\\ (x-2)^2, & \text{эгерде } 2<x\leq 3 \text{ болсо,}\\ 1, & \text{эгерде } x>3 \text{ болсо}\end{cases}$$

интегралдык функциясы менен берилсин. Анын:

а) $f(x)$ – бөлүштүрүү тыгыздыгын тургузгула;

б) $F(x)$ менен $f(x)$ функцияларынын графиктерин сызгыла;

в) Берилген $F(x)$ функциясы менен табылган $f(x)$ функцияларын пайдаланып, сыноолордо X кокустук чоңдугунун 2,1 ден кем эмес, 2,5 тен кичине маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгын тапкыла.

Ыктымалдыктын табылган $P(2{,}1 \le X < 2{,}5)$ маанисине геометриялык жактан түшүндүрмө бергиле.

Чыгаруу: ► Бөлүштүрүүнүн тыгыздыгы, бөлүштүрүү функциясынан алынган биринчи тартиптеги туундуга барабар болгондуктан:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x \le 2 \text{ болсо,} \\ (x-2)^2, & \text{эгерде } 2 < x \le 3 \text{ болсо,} \\ 1, & \text{эгерде } x > 3 \text{ болсо} \end{cases}$$

бөлүштүрүү функциясына ээ болобуз.

а) (16) формула боюнча бөлүштүрүү тыгыздыгы

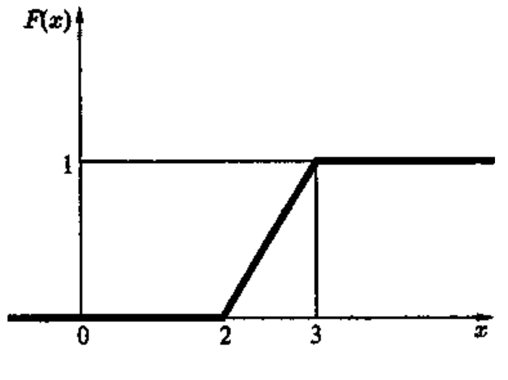
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x \le 2 \text{ болсо,} \\ 2(x-2), & \text{эгерде } 2 < x \le 3 \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } x > 3 \text{ болсо} \end{cases}$$ көрүнүштө

табылат.

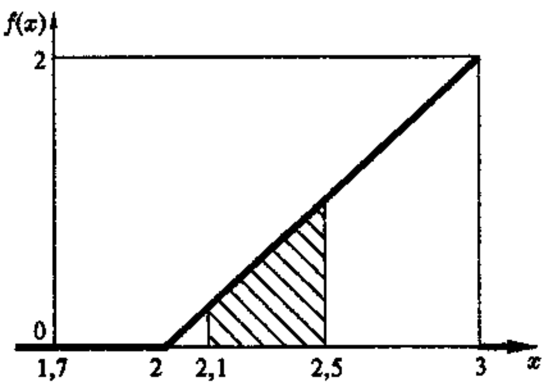
б) $F(x)$ менен $f(x)$ функцияларынын графиктери 8 – чийме менен 9 – чиймеде көрсөтүлөт.

в) Кокустук чоңдуктун $[2{,}1\ ,\ 2{,}5)$ аралыгында болуп калуу ыктымалдыгы (16) формуланын биринчиси боюнча

$$P(2{,}1 \le X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(2{,}1) = (x-2)^2|_{x=2{,}5} - (x-2)^2|_{x=2{,}1} =$$
$$= (2{,}5-2)^2 - (2{,}1-2)^2 = 0{,}5^2 - 0{,}1^2 = 0{,}24$$ саны болот.



8 – чийме



9 – чийме

Ушул эле ыктымалдыкты (16) формуласынын экинчиси боюнча

$$P(2{,}1 \le X < 2{,}5) = \int_{2,1}^{2,5} 2(x-2)dx = (x-2)^2\big]_{2,1}^{2,5} = (2{,}5-2)^2 -$$

$-(2{,}1-2)^2 = 0{,}5^2 - 0{,}1^2 = 0{,}24$ табууга болот.

$P(2{,}1 \le X < 2{,}5)$ ыктымалдыгын геометриялык жактан 9 – чиймедеги штрихтелген трапециянын аянты катары кароого болот. ◄

Үзгүлтүксүз кокустук чоңдуктардын сандык мүнөздөмөлөрү:

X кокустук чоңдугу жалаң оң бүтүн сандардан турган $x_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots, m, \dots$ сыяктуу **чектелбеген сандарга чейин улана бериши мүмкүн болгон дискреттик маанилерди** кабыл алсын. Бул учурда X кокустук дискреттик чоңдугу $p_i = f(x_i)$ бөлүштүрүү закону (дискреттик функциясы) менен берилсе, анда дискреттик кокустук чоңдуктун ыктымалдыктарынын бөлүштүрүү борборун көрсөткөн математикалык күтүүсү

$$M[X] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \boldsymbol{x_i} \cdot p_{\boldsymbol{i}} = m_x,\ \text{Мында}\ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} p_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{1} \qquad (5^A)$$

формуласы менен берилерин эстейбиз.

Эгерде X үзгүлтүксүз кокустук чоңдугу, $x \in X \subset (-\infty,\ +\infty)$ сан огунда аныкталган, $p(x) = f(x)$ ыктымалдыктарды бөлүштүрүү тыгыздыгы менен берилсе, анда (5^A) формуласында суммалар, интегралдык суммаларга, ал эми x_i лер x ке алмашып, (5^A) формуласы $\Delta x \to 0$ умтулган пределдик абалда, интегралдарга айланат.

Натыйжада бүтүндөй $0x$ сан огундагы маанилерди кабыл алган X **үзгүлтүксүз кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү,** төмөндөгүдөй көрүнүшкө келип,

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad (\mathbf{17})$$

өздүк эмес интегралы менен эсептелет. Мында (17) формуласынын оң жагындагы **өздүк эмес интеграл жыйналуучу деп эсептелет.**

Эгерде X үзгүлтүксүз кокустук чоңдугу алуучу, мүмкүн болгон бардык маанилер, чектелген $x \in X \subset (a,\ b)$ интервалында кармалып турса, анда анын математикалык күтүүсүн

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \int_a^b xf(x)dx \qquad (\mathbf{17}^{\mathrm{A}})$$

формуласы менен эсептей алабыз.

Бүтүндөй $0x$ сан огунда үзгүлтүксүз болгон X кокустук чоңдугунун дисперсиясы, дискреттик учурдагы ($\mathbf{7}^{\text{Б}}$), ($\mathbf{7}^{\mathrm{B}}$), ($\mathbf{7}^{\mathrm{A}}$)

$$D[\mathrm{X}] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_i \text{ же } D[\mathrm{X}] = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n} (\boldsymbol{x_i}^{\mathbf{2}} \cdot \mathrm{p}_{\boldsymbol{i}}) - \mathrm{M}^{\mathbf{2}}[\mathrm{X}]$$

же $\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - \mathrm{M}^2[\mathrm{X}]$ **же**

формулаларынын жалпыланышы катары

$$x \in \mathrm{X} \subset (-\infty, +\infty) \Rightarrow \mathrm{D}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 f(x)dx \qquad (\mathbf{18})$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\mathbf{2}} f(x)dx - (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \qquad (\mathbf{18}^{\mathrm{A}})$$

формулалары менен эсептелишет.

Эгерде X үзгүлтүксүз кокустук чоңдугу бүтүндөй сан огунда эмес, чектүү $(a,\ b)$ интервалдагы маанилерди кабыл алса, анда дисперсиясын

$$x \in \mathrm{X} \subset (a, b) \Rightarrow \mathrm{D}[\mathrm{X}] = \int_a^b (x - \mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 f(x)dx \qquad (\mathbf{18}^{\text{Б}})$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \int_a^b x^{\mathbf{2}} f(x)dx - (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 \qquad (\mathbf{18}^{\mathrm{B}})$$

формулалары менен эсептөөгө болот.

X кокустук чоңдугунун **орточо квадраттык четтөөсү** дискреттик учурда **(8) –** формула $\left(\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D[\mathrm{X}]}\right)$ аркылуу эсептелсе, кокустук чоңдук үзгүлтүксүз болгондо

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{X}) = \sqrt{D[\mathrm{X}]} \qquad (\mathbf{19})$$

формуласы менен эсептелет.

Үзгүлтүксүз X кокустук чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин арасынан, дифференциалдык бөлүштүрүү функциясынын локалдык максималдык маанисин камсыз кылган x *мааниси, кокустук чоңдуктун модасы деп аталып,* $\mathrm{M}_0[\mathrm{X}]$ *көрүнүштө белгиленет.*

X кокустук чоңдуктун медианасы деп, $M_e[X]$ *көрүнүштө белгиленип,* $P(X < M_e[X]) = P\big(X > M_e([X])\big)$ *барабарсыздыгын канааттандырган санды айтабыз.*

Мисал: 10. Үзгүлтүксүз X кокустук чоңдугун кабыл алууга мүмкүн болгон бардык маанилери $(0,\ 3)$ интервалында кармалып, ушул эле интервалда аныкталган $f(x) = \frac{2}{9}x$ дифференциалдык бөлүштүрүү функциясы менен берилсин. X кокустук чоңдугун математикалык күтүүсүн, дисперсиясын, орточо квадраттык четтөөсүн тапкыла.

Чыгаруу: ► Математикалык күтүүсү (17^A) формуласы боюнча

$$M[X] = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^3 x\cdot\frac{2}{9}xdx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot\left[\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] =$$

$= \frac{2}{9}\cdot[9-0] = 2$ болот.

Дисперсиясы болсо, (18^B) формуласы менен

$$D[X] = \int_a^b x^2f(x)dx - \big[M[X]\big]^2 = \int_0^3 x^2\cdot\frac{2}{9}\cdot xdx - 2^2 = \frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx - 4 =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 - 4 = \frac{2}{9}\cdot\left[\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] - 4 = \frac{2}{9}\cdot\left[\frac{81}{4} - \frac{0}{4}\right] - 4 = \frac{2}{9}\cdot\frac{81}{4} - 4 = \frac{9}{2} - =$$

$= 4{,}5 - 4 = 0{,}5$ табылат.

Орточо квадраттык четтөөсү $\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071$. ◄

11. Мүмкүн болгон кабыл алуучу маанилери $(1,\ 3)$ интервалында кармалган, X кокустук чоңдугу $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{9}{4}$ дифференциалдык бөлүштүрүү функциясы менен берилсин. X кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсүн, модасын, медианасын тапкыла.

Чыгаруу: ► Дифференциалдык бөлүштүрүү функциясын

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) + 3 - \frac{9}{4} =$$

$= -\frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{4}$ көрүнүшкө келтирип, анын экстремумга шектүү чекиттерин табалы. Шектүү чекиттерди аныктоо үчүн

$f'(x) = \left(-\frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{4}\right)' == -\frac{3}{2}(x-2) + 0 = -\frac{3}{2}(x-2)$ туунду алып, нөлгө барабар маанилерин табалы: $-\frac{3}{2}(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$, анда экстремумга шектелген $x = 2$ чекити болот.

$f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{4}$ функциясында $a = -\frac{3}{4} < 0$ болгондуктан, анын графиги чокусу $\left(2; \frac{3}{4}\right)$ чекити болгон, бутактары төмөн караган парабола болот. Демек $\underbrace{max}_{1<x<3}\{f(x)\} = f(2) = \frac{3}{4}$ болот. Анда X кокустук чоңдугун $X = 2$ мааниси, анын модасы болот: $M_0[X] = 2$. Ошол эле учурда X тин бөлүштүрүү ийриси $x = 2$ түзүнө карата симметриялуу жайгашкандыктан, кокустук чоңдуктун бөлүштүрүү борбору катарында, математикалык күтүүсү $M[X] = \mathbf{2}$ жана медианасы $M_e[X] = 2$ болот. ◄

Бир калыптагы жыштыктын закону:

***Def* – 6.** *Эгерде X кокустук чоңдугу* $[a,\ b]$ *сегментинде*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x < a \text{ болсо}, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{эгерде } a \le x \le b \text{ болсо}, \\ 0, & \text{эгерде } x > b \text{ болсо} \end{cases} \qquad (20)$$

ыктымалдыктарды бөлүштүрүү функциясы менен берилсе, анда X кокустук чоңдугу $[a,\ b]$ *сегментинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн деп айтылат.*

Мисал: 12. $[a,\ b]$ сегментинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн X кокустук чоңдугун: математикалык күтүүсүн, дисперсиясын тапкыла.

Чыгаруу: ► Бир калыпта бөлүштүрүлгөн кокустук чоңдуктун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү функциясы (20) көрүнүштө берилет. Демек $x \in [a,\ b]$ болгон учурда (17^A) формуласы боюнча математикалык күтүү

$$M[X] = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсиясын (18^B) формула менен эсептейли

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \int_a^b x^{\mathbf{2}} f(x)dx - (\mathrm{M}[\mathrm{X}])^2 = \int_a^b \frac{x^{\mathbf{2}}}{b-a}dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{1}}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b -$$

$$-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{1}}{b-a}\cdot\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) - \frac{(b+a)^2}{\mathbf{4}} = \frac{b^3-a^3}{\mathbf{3}(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{\mathbf{4}} =$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{\mathbf{3}} - \frac{b^2+2ba+a^2}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{4}(b^2+ba+a^2)-\mathbf{3}(b^2-ba+a^2)}{\mathbf{12}}$$

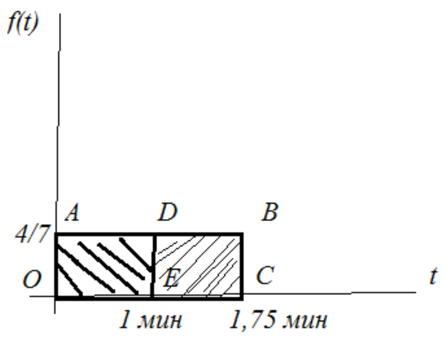
$$= \frac{b^2-2ba+a^2}{\mathbf{12}} = \frac{(b-a)^2}{\mathbf{12}}. \blacktriangleleft$$

Мисал: 13. Шаардын көчөсүндө орнотулган светофордо автоматтык түрдө 1 минута жашыл жарык, артынан 45 секунда кызыл жарык, андан кийин кайрадан 1 минута кызыл жарык, артынан 45 секунда кызыл жарык күйүп турган процесс уланып турат. Бир калыпта иштеген светофордун иштөө режиминен кабары жок, жолго күтүүсүз чыккан автомашинанын светофордон токтобой өтүү мүмкүнчүлүк ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► Айталы T – “Светофордун жарыктарын алмашуу мезгилин 1 айлампасын толук камтыган интервал ичинде, автомашинанын светофордон өтүүсүн убакыт моменттерин” көрсөткөн кокустук чоңдук болсун. Жарыктардын алмашуу мезгилин 1 айлампасы $1\text{ мин} + 45\text{ сек} = \left(1+\frac{3}{4}\right)\text{ мин} = \frac{7}{4}$ мин убакытка созулат. Демек T кокустук чоңдугу, убакыттын $t \in \left[0,\ \frac{7}{4}\right]$ сегментинде кармалган маанилерди кабыл алууга мүмкүнчүлүгү бар жана $[a,\ b] = \left[0,\ \frac{7}{4}\right]$ сегментинде бир калыпта бөлүштүрүлгөн. $a = 0,\ b = \frac{7}{4}$ болгондуктан, (20) берилишти эске алып, T кокустук чоңдуктун бөлүштүрүү функциясын

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } t < 0 \text{ болсо,} \\ \dfrac{1}{\frac{7}{4}-0} = \dfrac{4}{7}, & \text{эгерде } 0 \le t \le \dfrac{7}{4} \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } t > \dfrac{7}{4} \text{ болсо} \end{cases}$$

көрүнүштө жазабыз. Мындан бизге керектүү убакыттарда, бөлүштүрүү функциясы $f(t) = \frac{4}{7}$ болорун көрөбүз. Анын графиги 10 – чиймеде сызылган.



10 – чийме

Т кокустук чоңдугунун маанилеринин $\left[0,\ \frac{7}{4}\right]$ аралыгындагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгы ОАВС тик бурчтугунун аянтына

$S_{\text{OABC}} = 1{,}75 \cdot \frac{4}{7} = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = 1$

барабар. Ал эми автомашинанын жашыл жарыкта өтүү мүмкүнчүлүгү, Т кокустук чоңдук $(0,\ 1)$ аралыгындагы маанилерди кабыл алган учурларда болуп, ыктымалдыгы OADE тик бурчтугунун аянтына

$S_{\text{OADE}} = 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ барабар болот. Демек автомашинанын светофордон токтобой өтүү ыктымалдыгы $\text{P}(0 < t < 1) = \frac{S_{\text{OADE}}}{S_{\text{OABC}}} = \frac{4}{7}$. ◄

Бөлүштүрүүнүн нормалдуу закону:

$\boldsymbol{Def-7}$. *Эгерде X кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү тыгыздыгы*

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}} \cdot \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x-a})^{2}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\delta}^{2}}} \quad (-\infty < x < +\infty, \qquad \boldsymbol{\sigma} > 0) \qquad (21)$$

функциясы менен берилсе, анда X кокустук чоңдугун ормалдуу бөлүштүрүлгөн деп атайбыз. Мында X кокустук чоңдук $\boldsymbol{\sigma}$ *–* ***орточо квадраттык чоңдугуна,*** $\boldsymbol{a}$ *– математикалык күтүүсүнө ээ деп алынат.*

X кокустук чоңдугунун $(\alpha,\ \beta)$ интервалдагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгы

$$\text{P}(\alpha < \text{X} < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (22)$$

санына барабар. Мында $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx - \text{Лапластын функциясы.} \quad (23)$$

Нормалдуу бөлүштүрүлгөн X кокустук чоңдугунун $a -$ математикалык күтүүдөн четтөөсүнүн абсолюттук чоңдугу, ε санынан ашып кетпөөсүн ыктымалдыгы

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \qquad (24)$$

санына барабар болот.

Мисал: 14. Конференцияга даярдык учурунда, кайчы менен диаметри $d_0 = 5$ см болгон тегерек эмблемаларды кыркып даярдоо талап кылынган. X кокустук чоңдугу кыркуу учурунда кетирилген так эместиктердин ченемдери болсун. Эгерде X кокустук чоңдугу нормалдуу бөлүштүрүү закону менен берилип, математикалык күтүүсү $a = d_0 = 5$ см, орточо квадраттык четтөөсү $\sigma = 0{,}05$ см болсо, анда

а) диаметри 4,8 см ден 5 см ге чейинки болуп даярдалган эмблемалардын процентин;

б) 0,1 см дан ашыкча каталык менен кыркылган эмблемаларды жараксыз деп алып, жараксыз эмблемалардын процентин тапкыла.

Чыгаруу: ► а) X кокустук чоңдугунун маанилеринин $[4{,}8\,,\ 5]$ аралыгында кармалып туруу ыктымалдыгын эсептейбиз. $a = 5,\quad \alpha = 4{,}8,\ \beta = 5,\ \sigma = 0{,}05$ болгондуктан, (22) формуласын пайдаланып:

$$P(4{,}8 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5 - 5}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}8 - 5}{0{,}05}\right) = \Phi(0) - \Phi(-4)$$

ээ болобуз. Лапластын функциясын жуп экендигинен $\Phi(-4) = \Phi(4)$,

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0, \qquad \Phi(4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx 0{,}499968$$

келип чыгып, X кокустук чоңдугунун көрсөтүлгөн аралыкта болуу ыктымалдыгы $P(4{,}8 < X < 5) = \Phi(0) - \Phi(4) \approx 0{,}499968 \approx 0{,}50$ болору келип чыгат. Бул дээрлик 50% процент эмблемаларда, диаметрлер 4,8 см менен 5 см аралыгында болгондой кыркылганын көрсөтөт.

б) A – “эмблема жараксыз” окуясына карама – каршы $\bar{A}$ – “эмблема жарактуу” окуясын алалы. $\bar{A}$ окуясы, X кокустук чоңдугун эмблема 0,1 см ден ашыкча эмес каталык менен кыркылган маанилерди кабыл алган учурларга туура келет. Математикалык күтүүдөн четтөө $\varepsilon = 0{,}1$ санынан ашпай турганын эске алып, (24) формуласынан

$$P(\bar{A}\,) = P(|X - 5| \leq 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = 2\Phi(2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \approx$$

$\approx 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$ болорун табабыз.

Демек $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(|X - 5| \leq 0{,}1) \approx 1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$ болуп, эмблемалардын 4,56% проценти 0,1 см ден ашыкча каталык менен кыркылганын көрсөтөт.◄

Мисал: 15. Системалык ката кетирбей, унду таразага тартып упаковкалайлы. Айталы, X кокустук чоңдугу кокусунан кетирилген каталыктарды болсун. X нормалдуу бөлүштүрүү закону менен бөлүштүрүлүп, орточо квадраттык четтөөсү $\sigma = 20$ гр болгон кокустук чоңдук болсун дейли. Таразага тартууда абсолюттук чоңдугу боюнча 10 граммдан ашпаган каталыктарга жол коюу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ► Тараза тартууда кокусунан кетирилген каталыкты X кокустук чоңдугу деп алабыз. Системалык каталык күтүлбөйт деп болжолдонгондуктан, кокустук чоңдуктун орточо арифметикалык маанилери нормага дал келип, математикалык күтүүсү $a = 0$ болот. Математикалык күтүүдөн четтөө $\varepsilon = 10$ гр, орточо квадраттык четтөө $\sigma = 20$ гр деп алып, Лапластын функциясынын таблицадагы маанисин пайдаланып, (24) формуладан

$$P(|X - \mathbf{0}| \leq \mathbf{10}) = 2\Phi\left(\frac{10}{20}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) == \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 2 \cdot 0{,}1915 =$$

$= 0{,}383$ табабыз. Мындан $P(|X| \leq \mathbf{10}) \approx 0{,}383$ болору келип чыгат.◄

Бөлүштүрүүнүн көрсөткүчтүү закону:

$\boldsymbol{Def - 8}$. *Эгерде X кокустук чоңдугунун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү тыгыздыгы*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x < 0 \text{ болсо,} \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{эгерде } x \geq 0 \text{ болсо} \end{cases} \qquad (25)$$

көрүнүштөгү функция менен берилсе, анда X кокустук чоңдугун бөлүштүрүүнүн көрсөткүчтүү закону менен берилген деп айтабыз.
Мында $\lambda > 0$ саны, бөлүштүрүүнүн параметри деп аталат.

Бөлүштүрүүнүн көрсөткүчтүү закону менен берилген X кокустук чоңдугунун математикалык күтүүсү менен орточо квадраттык четтөөсү дал келишип:

$$M[X] = \sigma[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad (26)$$

формуласы боюнча эсептелет.

Мисал: 16. X кокустук чоңдугу бөлүштүрүүнүн көрсөткүчтүү

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x < 0 \text{ болсо}, \\ 0{,}5e^{-0{,}5x}, & \text{эгерде } x \geq 0 \text{ болсо} \end{cases}$$

закону менен берилген. X кокустук чоңдугунун маанилеринин (2, 4) интервалдагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу: ▶ Кокустук чондуктун (α, β) интервалдагы маанилерди кабыл алуу ыктымалдыгын (16) формуласы

$$\mathrm{P}(\alpha \leq \mathrm{X} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \text{менен,} \quad \mathrm{P}(2 \leq \mathrm{X} < 4) = \int_{2}^{4} 0{,}5e^{-0{,}5x}dx =$$

$$= -\int_{2}^{4} e^{-0{,}5x}d(-0{,}5x) = -e^{-0{,}5x}\Big|_2^4 = -(e^{-0{,}5\cdot 4} - e^{-0{,}5\cdot 2}) = e^{-1} - e^{-2} \approx$$

$\approx 0{,}3678 - 0{,}1353 = 0{,}2325$ эсептеп чыгабыз. ◀

Мисал: 17. Студент X кокустук чоңдугун ыктымалдыктарын бөлүштүрүү тыгыздыгы, көрсөткүчтүү бөлүштүрүү закону боюнча: $x < 0$ болсо $f(x) = 0$, ал эми $x \geq 0$ болсо $f(x) = \mathrm{C}e^{-\lambda x}$ функциялары менен берилгенин билгени менен, C – туруктуу санын канча экендигин унутуп калган. C – параметрин тапкыла.

Чыгаруу: ▶ C туруктуу параметрин табуу үчүн, ыктымалдыктарды бөлүштүрүүнүн

$$\mathbf{2}^{\circ}. - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \text{же } x \in (a, b) \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx = 1 \text{ касиетин}$$

пайдаланабыз. $x \geq 0$ болгондо $f(x) = \mathrm{C}e^{-\lambda x}$, демек

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{C}e^{-\lambda x}dx = -\frac{\mathrm{C}}{\lambda}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-\lambda x}d(-\lambda x) = -\frac{\mathrm{C}}{\lambda}\lim_{b\to+\infty} e^{-\lambda x}\Big|_0^b =$$

$= -\frac{\mathrm{C}}{\lambda}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda b} - -e^{-0}\right) = -\frac{\mathrm{C}}{\lambda}\left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{0}\right) = -\frac{\mathrm{C}}{\lambda}(0-1) = \frac{\mathrm{C}}{\lambda}$ болот. Анда $\mathbf{2}^{\circ}$ боюнча $\frac{\mathrm{C}}{\lambda} = 1$ болушу керек. Мындан $\mathrm{C} = \lambda$ болорун табабыз. ◀

§14. Математикалык статистиканын элементтери боюнча негизги түшүнүктөр.

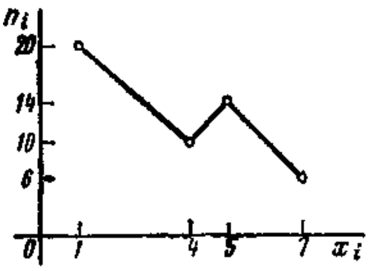
Статистика предмети, кайсы бир окуялардын болуп өтүүсүнө байкоолорду, ченөөлөрдү жүргүзүү менен, алардын болуп өтүү жыштыгына же статистикалык ыктымалдыгына жараша, окуялардын болуп өтүүсүнө баа берүү ыкмаларын үйрөтөт.

X кокустук чоңдугунун аткарылуусуна байкоолорду жана өлчөөлөрдү жүргүзүп, топтолгон маалыматтардын натыйжасында, ченөөлөрдө X кокустук чоңдугу кабыл алган $X = x_i$ маанилерге карата, статистикалык материалдардын таблицасы түзүлөт:

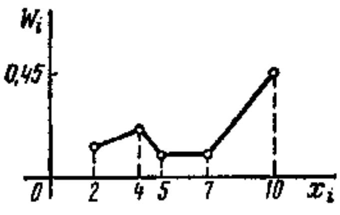
1- таблица.

i	1	2	3	…	i	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n

Мында i өлчөөлөр менен байкоолордун саны, ал эми x_i байкоолор менен өлчөөлөрдүн мааниси. **Бул таблица жөнөкөй статистикалык катар** деп аталат. Байкоолор менен өлчөөлөрдүн $X = x_i$ маанилери өзгөргөн көрсөткүчтөрдү (a_0, a_1), $(a_1, a_2), \dots, (a_{\mu-1}, a_\mu)$ сыяктуу интервалдарга бөлөлү. Айталы (a_{k-1}, a_k) интервалында X чоңдугу m_k жолу болуп өтсүн. Анда (a_{k-1}, a_k) интервалына туура келген салыштырмалуу **статистикалык ыктымалдык же жыштык** $\frac{m_k}{n} = p_к^*$ саны менен ченелет. Албетте, алардын ыктымалдыктарынын суммасы $\sum p_к^* = 1$ болот.



11 – чийме



12 – чийме

Статистикалык жыштыкты геометриялык жол менен графикте көрсөтүүгө да болот.

Мисал: 1. ► берилген X:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

тандоо боюнча жыштык полигонун түзөлү. Ал үчүн x_i менен n_i лерди координаттык окторго жайгаштырып,

координаталары (x_i ; n_i) болгон чекиттерди сызыктар менен туташтырабыз. Натыйжада (11 – чийме) жыштыктын бөлүнүү гистограммасы деп аталган графикти тургузабыз.
Ошондой эле

x_i	20	40	65	80
ω_i	0,1	0,2	0,3	0,4

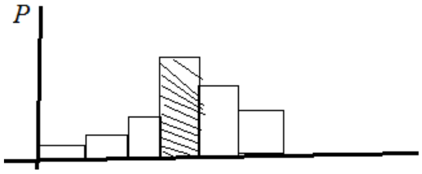
тандоосунун жыштык
полигону (12 – чийме) түзүлөт. ◄

Жогорудагыдай тандоолордун натыйжасында, көрсөтүлгөн интервалдарда Х чоңдугунун маанилерин **бөлүштүрүү таблицасы** түзүүгө болот:

2 – таблица.

интервалдар	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	…	$(a_{\kappa-1}, a_\kappa)$	…	$(a_{\mu-1}, a_\mu)$
m_k	m_1	m_2	…	m_k	…	m_μ
p_κ^*	p_1^*	p_2^*		p_κ^*		p_μ^*

Мындай бөлүштүрүү таблицасы, Х кокустук чоңдугу боюнча **статистикалык маалыматтарды группалаштыруу** деп аталат. Группалаштырууну графикте көрсөтүүгө да болот. Ал үчүн, Декарттык координаталар системасынын абциссасында ($0x$ огун) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\kappa$, … a_μ чекиттерин белгилеп, $[a_{\kappa-1}, a_\kappa]$ кесиндилерине бөлүштүрөбүз. Ченөөлөрдө Х кокустук чоңдугунун бул аралыктагы маанилерди кабыл алуусун статистикалык p_κ^* ыктымалдыктары, негизи $[a_{\kappa-1}, a_\kappa]$ кесиндисинин узундугу, бийиктиги p_κ^* болгон тик бурчтуктардын аянттары болот. Бөлүштүрүү таблицасы 13 – чиймедей графикте көрсөтүлөт. Бул **график статистикалык гистограмма** деп аталат.
Статистикалык маалыматтарды группалаштыруу жана гистограммалары аркылуу бөлүштүрүүнүн жакындаштырылган статистикалык функциясы курулат.



$a_0 a_1 \ldots a_{\kappa-1} a_\kappa \ldots$

13 – чийме

Топтолгон материалдарды талдоонун кийинки баскычындагы ченөөдө, Х кокустук чоңдугу $(a_{\kappa-1}, a_\kappa)$ интервалынын тең ортосу болгон $\tilde{x}_k$ маанисин m_k жолу кабыл алат деп эсептейбиз. Бул учурда жогорудагы статистикалык маалыматтарды группалаштыруунун негизинде төмөндөгүдөй таблица түзүлөт:

3 – таблица.

$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	…	$\tilde{x}_k$	…	$\tilde{x}_\lambda$
m_k	m_1	m_2	…	m_k	…	m_λ
p_k^*	p_3^*	p_2^*	…	p_k^*	…	p_λ^*

Маалыматтарды мындай бөлүштүрүү, $(a_{к-1}, a_к)$ интервалы жетишерлик кичине болуп, анын ичинде турган бардык x_k маанилерди бири–биринен айырмаланбай тургандай жакын деп, бардык x_k маанилерин, ортодогу абциссасы $\tilde{x}_k$ болгон маани менен алмаштыруу аркылуу ишке ашырылат.

Ченелүүчү чоңдукка дал келүүчү тандалма маанини аныктоо:

Айталы, кайсы бир Х чоңдугу, ченөөлөрдүн жыйынтыгында n сандагы: Х: $x_1, x_2, x_3,$ ..., x_n жекече маанилерди кабыл алсын дейли. Анда аныкталуучу чоңдукка **дал келүүчү тандалма маани** деп, бардык ушул n маанилердин арифметикалык орточосун айтышат. Аны

$$\boldsymbol{m_x^* = \frac{\sum x_i}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)} \qquad (1)$$

көрүнүштө эсептешет. Мында $\boldsymbol{m_x^*}$ **статистикалык орточо тандалма маани** деп аталат. Эгерде ченөөлөрдүн саны эбегейсиз көбөйүп кетсе, анда (1) формуласын ордуна

$$\boldsymbol{m_x^*} = \frac{\tilde{x}_1 m_2 + \tilde{x}_2 m_2 + \cdots + \tilde{x}_k m_k + \cdots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{\boldsymbol{n}}$$

формуласын же болбосо, $\boldsymbol{n}$ санына мүчөлөп бөлүп жиберип, $\frac{m_k}{n} = p_к^*$ эске алып, **орточо салмактанган тандоо** деп аталуучу $\boldsymbol{m_x^*}$

$$\boldsymbol{m_x^*} = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k p_к^* \qquad (2)$$

санын, ченелүүчү Х чоңдугуна дал келүүчү маани катарында кабыл алабыз.

Ыктымалдыктар теориясында Чебышевдин теоремасы деп аталган ырастоодо белгиленгендей, сыноолор $(n \to \infty)$ эбегейсиз чоңойгондо статистикалык орточо жыштык, ыктымалдыктары боюнча Х кокустук чоңдугунун дисперсиясына умтулуп жакындап барат же пределдик абалда жетет. Ошондуктан **статистикалык дисперсияны** да карайбыз:

$$D^* = \frac{\sum(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{m_x^*})^2}{\boldsymbol{n}}, \qquad (\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}). \qquad (3)$$

Эгерде 3 – таблицадагы маалыматтар колдонулса, анда **статистикалык (тандалма) дисперсияны**

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - \boldsymbol{m_x^*})^2 p_к^* \qquad (3)$$

көрүнүштө эсептейбиз. Бул формула жогоруда ыктымалдыктарда каралган ($7^Б$) формуласына окшош экендигин байкап, дисперсия байкалуучу кокустук чоңдуктун маанилеринин чачыроо ченин көрсөтөрүн эстей кетебиз.

Мисал: 2. Кокусунан тандалган 100 студенттердин боюнун узундуктарын ченөөлөрдүн натыйжасында, алардын узундуктары $[154, 182]$ кесиндисиндеги маанилерди кабыл алары белгилүү болуп таблицада төмөндөгүдөй бөлүштүрүлдү:

X – Боюнун узундугу:	154 – 158 см	158 – 162 см	162 – 166 см	166 – 170 см	170 – 174 см	174 – 178 см	178 – 182 см
Студенттердин саны $-m_k$:	10	14	26	28	12	8	2
Статистикалык жыштык $\frac{m_k}{n} = p_к^*$:	$\frac{10}{100} = 0{,}1$	$\frac{14}{100} = 0{,}14$	$\frac{26}{100} = 0{,}26$	$\frac{28}{100} = 0{,}28$	$\frac{12}{100} = 0{,}12$	$\frac{8}{100} = 0{,}08$	$\frac{2}{100} = 0{,}02$

Студенттердин боюнун узундуктарын тандалма орточосун жана тандалма дисперсиясын тапкыла.

Чыгаруу ► Студенттердин боюнун узундуктары кокустук чоңдуктар болушат. Алар жайгашкан

$[154, 158\,], \ [158, 162\,\,], \ [162, 166], \dots, [174, 178], \ [178,182]$

аралыктардын тең ортосун $\tilde{x}_1 = \frac{154+158}{2} = 156$, $\tilde{x}_2 = 160$, $\tilde{x}_3 = 164$,

$\tilde{x}_4 = 168$, $\tilde{x}_5 = 172$, $\tilde{x}_6 = 176$, $\tilde{x}_7 = 180$ алып, статистикалык орточо тандалмасын

$$\boldsymbol{m}_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_2 + \tilde{x}_2 m_2 + \cdots + \tilde{x}_k m_k + \cdots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{\boldsymbol{n}} =$$

$$= \frac{156 + 160 + 164 + 168 + 172 + 176 + 180}{7} = \frac{1346}{7} = 168$$

табабыз. Демек 100 студенттердин боюнун статистикалык орточосу 168 см деген жыйынтык чыгарабыз.

(3) формула боюнча тандалма (статистикалык) дисперсия

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - \boldsymbol{m}_x^*)^2 p_\kappa^* = (\tilde{x}_1 - \boldsymbol{m}_x^*)^2 p_1^* + (\tilde{x}_2 - \boldsymbol{m}_x^*)^2 p_2^* + \cdots +$$

$$+ (\tilde{x}_7 - \boldsymbol{m}_x^*)^2 p_7^* = (156 - 168)^2 \cdot 0{,}1 + (160 - 168)^2 \cdot 0{,}14 +$$

$$+(164 - 168)^2 \cdot 0{,}26 + (168 - 168)^2 \cdot 0{,}28 + (172 - 168)^2 \cdot 0{,}12 +$$

$$+(176 - 168)^2 \cdot 0{,}08 + (180 - 168)^2 \cdot 0{,}02 = 12^2 \cdot 0{,}1 + 8^2 \cdot 0{,}12 +$$

$$+4^2 \cdot 0{,}26 + 0^2 \cdot 0{,}28 + 4^2 \cdot 0{,}12 + 8^2 \cdot 0{,}08 + 12^2 \cdot 0{,}02 = 14{,}4 + 7{,}68 +$$

$+4{,}16 + 0 + 1{,}92 + 5{,}12 + 2{,}88 = 36{,}16$ аныкталат. ◄

Бөлүштүрүү законун параметрлерин аныктоо. Ляпунов менен Лапластын теоремалары:

Айталы кокустук чоңдукту ченегенде $\bar{x}$ мааниси келип чыксын. Ал эми кокустук чоңдуктун өзүнүн чыныгы чоңдугу a, ченөөдөгү каталык δ болсун дейли. Анда бул чоңдуктардын арасында

$$\delta = \bar{x} - a \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = a + \delta \qquad (4)$$

байланышы орун алат.

Көптөгөн тажрыйбаларда жүргүзүлгөн байкоолордо белгилүү болгондой, адатта приборлордун кемчилдиктеринен же ченөөдөн – ченөөгө чейинки өзгөрүлүп кетүүдөн кетирилген бирдей турактуу кичине каталыктарды жана одоно кетирилген каталыктарды жойгондон кийинки ченөөдөгү каталыктар, борбору координата башталмасында жайгашкан **бөлүштүрүүнүн нормалдуу законуна баш ийет.**

Эгерде кокустук чоңдук чоң сандагы кокустук чоңдуктардын суммасы болсо, анда кайсы бир чектөөлөрдү эске алуу менен, бул сумма бөлүштүрүүнүн нормалдуу законуна баш ийет. Бул ырастоо **Ляпуновдун теоремасы** менен берилген.

Теорема (Ляпуновдун). *Эгерде көз каранды эмес* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ *кокустук чоңдуктары, математикалык күтүүсү* a *(*$a = 0$ *деп алуу деле жалпылыкты бузбайт), дисперсиясы* σ^2 *болуп, бирдей бөлүштүрүү закону менен берилсе, анда* n *чектелбей чоңоюп өскөндө,*

$\bar{y}_n = \frac{\underbrace{\sum \bar{x}_i}_{1 \le i \le n}}{\sigma\sqrt{n}}$ *суммасынын бөлүштүрүү закону, нормалдуу бөлүштүрүү законунан дээрлик айырмаланбайт.*

Мында σ кокустук чоңдуктун **орточо квадраттык четтөөсү** $\left(\sigma = \sqrt{D[\bar{y}_n]} \Leftrightarrow \sigma^2 = D[\bar{y}_n]\right)$, ал эми кокустук чоңдуктун нормалдашуу деңгээли, $M[\bar{y}_n] = 0$ жана $D[\bar{y}_n] = 1$ болгонго чейинки тактыкта деп түшүнүлөт.

Ляпуновдун теоремасынын практикалык маанисин көрсөтөлү. Мисалы, берилген чоңдукту ченөөдөгү четтөөнү көрсөткөн кокустук чоңдукту карайлы. Бул четтөөлөр, ар бири четтөөнүн кайсы бир түзүүчүлөрү болгон көптөгөн факторлордун жалпыланган таасири астында пайда болушат. Мисалы, атылган снаряддын бутадан четтөөсү: мээлөөчүнүн кемчилдигинен, аралыкты туура эмес алуудан, замбиректи жана снарядды жасоодо кетирилген кемчилдиктерден турган түзүүчү кокустук чоңдуктарды жалпылоо менен аныкталат. Чынын айтканда четтөөнүн бардык түзүүчүлөрүн, кала берсе түзүүчүлөр болушкан кокустук чоңдуктарын бөлүштүрүү закондорун, аягына чейин аныктоо мүмкүн эмес. Ошондой болсо да Ляпуновдун теоремасы, берилген чоңдуктун ченөө маанилери болушкан кокустук чоңдуктун жалпы четтөөсү, нормалдуу бөлүштүрүү законуна баш ийет деп айтууга мүмкүнчүлүк берет.

Ошентип Ляпуновдун теоремасы боюнча, кайсы бир чоңдукту ченөөлөрдүн натыйжасы, $\bar{x}_i$ лердин ар бири бирдей бир бөлүштүрүү законуна ийген $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ кокустук чоңдуктары болушса, анда алардын арифметикалык орточосу болгон

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$$

кокустук чоңдугу, n жетишерлик чоңойгон учурда, нормалдуу бөлүштүрүү законунан дээрлик айырмаланбаган бөлүштүрүү законуна баш ийерин ырастайт.

Бул теорема кайсы бир кошумча шарттар аткарылганда, бирдей бөлүштүрүү закону менен берилген кокустук чоңдуктардын суммасы үчүн да туура болуп эсептелет. Адатта мындай кошумча шарттар, практикада каралган кокустук чоңдуктардын баарында аткарылып келет, ошондуктан кошулуучу чоңдуктардын саны 10 го жеткен учурда, алардын суммасы тажрыйбаларда ырасталгандай, нормалдуу бөлүштүрүлгөн кокустук чоңдук деп алынат.

Математикалык күтүү менен дисперсияны жакындаштырып $\bar{a}$ жана $\bar{\sigma}^2$ деп белгилейли. Анда $\bar{\delta}$ жана $\bar{x}$ кокустук чоңдуктарынын ;жакындаштырылган бөлүштүрүү закондорун

$$f(\delta) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\sigma}^2}} \qquad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\bar{\sigma}^2}} \qquad (6)$$

көрүнүштөрдө эсептеп табууга болот. $\bar{a}$ параметри мурда $m_x^* = \frac{\sum x_i}{n}$ арифметикалык орточолорду (1) формулада табылгандай эле, тажрыйбада алынган x_i ченемдери аркылуу, Чебышевдин ырастоосу боюнча:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (7)$$

көрүнүштө аныкталат.

σ параметрин (3) – формула $\sigma \equiv D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - \boldsymbol{m_x^*})^2 p_к^*$ менен эмес,

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{a})^2}{n-1} \qquad (8)$$

формуласы менен эсептөөнү туура деп далилдөөсүз эле кабыл алабыз. (3) формуладан айырмаланып, (8) формулада практикалык эсептөөлөрдө 1 ге жакын болгон $\frac{n}{n-1}$ көбөйтүндүсү бар $\left(\frac{n}{n-1} \approx 1\right)$.

Мисал: 3. Жогоруда 2 – мисалда каралган кокустук чоңдуктун табылган ченемдерин пайдаланып, анын бөлүштүрүү законун жазгыла.

Чыгаруу ► $n = 100$ студенттердин боюнун статистикалык орточосу $\boldsymbol{m_x^*}$ =168, статистикалык дисперсиясы $D^* = 36{,}16$ болгонун билебиз.

$\bar{a} = \boldsymbol{m}_{x}^{*} = 168, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D^* = \frac{100}{99} \cdot 36{,}6 \approx 36{,}97 \approx 37 \Rightarrow \sigma = \sqrt{36{,}97} \approx 6$ болушуп, (6) формула боюнча

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\bar{\sigma}^2}} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-168)^2}{74}}$$

бөлүштүрүү функциясына ээ болобуз. ◀

Кокустук чоңдуктардын α дан кем эмес, β дан ашыкча эмес жолу пайда болуу окуяларын ыктымалдыгы **Лапластын теоремасы** менен аныкталат:

Теорема. Эгерде n жолку көз каранды эмес сыноолордун ар биринде А окуясынын аткарылуу ыктымалдыгы бирдей р − санын барабар болсо, анда А окуясынын α менен β аралыгында m жолу аткарылуу ыктымалдыгы

$$\mathrm{P}(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - n\mathrm{p}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - n\mathrm{p}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{npq}}\right)\right] \qquad (9)$$

формуласы менен эсептелет. Мында $q = 1 - p$.

Мисал: 4. Тигүү цехинде тигилген кийимдердин стандартка жооп бербей калуу ыктымалдыгы $\mathrm{p} = 0{,}01$ санына барабар. Тигилген 1 000 көйнөктүн арасынан 20 көйнөктүн стандартка туура келбей калуусун ыктымалдыгын тапкыла.

Чыгаруу ▶ Биздин учурда $n = 1\,000$, $\mathrm{p} = 0{,}01$, $q = 1 - p = 0{,}99$, $\alpha = 0$, $\beta = 20$ болушуп:

$$\frac{\beta - n\mathrm{p}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{npq}} = \frac{20 - 1000 \cdot 0{,}001}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}99}} = \frac{20 - 10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9{,}9}} = 2{,}25,$$

$$\frac{\alpha - n\mathrm{p}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{npq}} = \frac{0 - 1000 \cdot 0{,}001}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}99}} = \frac{0 - 10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9{,}9}} = -2{,}25$$

келип чыгып, (9) формуладан

$$\mathrm{P}(0 \le m \le 20) = \frac{1}{2}[\Phi(2{,}25) - \Phi(-2{,}25)] = \frac{1}{2}[\Phi(2{,}25) + \Phi(2{,}25)] =$$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\Phi(2{,}25) = \Phi(2{,}25)$ ээ болобуз. Лапластын таблицасынан карап: $\mathrm{P}(0 \le m \le 20) = \Phi(2{,}25) \approx 0{,}9985$ ыктымалдыгын табабыз. ◀

№ 1 – ТИРКЕМЕ: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясын маанилери Лапластын асимптотикалык $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),\ x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ формуласына карата

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

№ 2 – ТИРКЕМЕ: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$ дин маанилери.

Мында $\lambda = np$ (Пуассондун бөлүштүрүүсүнө карата)

m	$\lambda=0,1$	$\lambda=0,2$	$\lambda=0,3$	$\lambda=0,4$	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,6$	$\lambda=0,7$	$\lambda=0,8$	$\lambda=0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

m	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$	$\lambda=6$	$\lambda=7$	$\lambda=8$	$\lambda=9$	$\lambda=10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

№ 3 – ТИРКЕМЕ: Лапластын $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ функциясын маанилери. Лапластын

$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ **интегралдык формуласын эсептөөгө карата. Мында** $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3883	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4881
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	04988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,9	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Назаров М. Н., Максудов Р. М. Ыктымалдыктар теориясынын башталышы боюнча окуу усулдук колдонмо. – Фрунзе: КМУ, 1987. 32 б.

2. Назаров М.Н. Мектеп математикасынын илимий негиздери. – Фрунзе: Мектеп, 1981. 120 б.

3. Байгазиев К. Комбинаториканын элементтери. – Ош: “ЖЧ Кагаз ресурстары”, 2016. 130 б.

4. Турсунов Д.А. Дискреттик математиканын негиздери. – Ош: ОшМУ, 2009. 96 б.

5.Мамаюсупов М. Ш. Жогорку математика боюнча окума ” (I – бөлүк). – Ош: ЖЧ “Кагаз иштери”,
2011. 286 б. (**www.okuma.kg,** Мин. грифи Буй. №99/1, 24.02.12) .

6. Мамаюсупов М. Ш. Жогорку математика боюнча окума (II – бөлүк). – Ош: ЖЧ “Кагаз иштери”,
2011. 336 б. (**www.okuma.kg,** Мин. грифи Буй. №99/1, 24.02.12).

7. Мамаюсупов М. Ш. Жогорку математика боюнча окума (III – бөлүк). – Ош: «Book-дизайн», 2014. 288 б. (Мин. грифи Буй. №1107/1, 25.12.14).

8. Мамаюсупов М. Ш. Математиканы эмне үчүн окуу керек? (Макала, www.okuma.kg).

9. Рафатов Р., Асанов А., Мамаюсупов М. Жогорку математика боюнча окума (IV– бөлүк). – Ош: «Book-дизайн», 2014. 256 б. (**www.okuma.kg,** Мин. грифи Буй. №1107/1, 25.12.14).

10. Рафатов Р., Асанов А., Мамаюсупов М. Жогорку математика боюнча окума (V – бөлүк). – Ош: «Book-дизайн», 2014. 380 б. (**www.okuma.kg,** Мин. грифи Буй. №1107/1, 25.12.14).

11. Сопуев У. А. Жогорку математика. – Ош: “Кагаз Ресурстары”, 2014. 170 б.

12. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: Выс. Школа, 1972. 368 с.

13. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. – М: Выс. Школа, 1979. 400 с.

14. Золотаревская Д. И. Теория вероятностей. М: «УРСС», 2003, 168 с.

15. Грес П.В. Математика для гуманитариев: [Учеб. пособие для вузов] М.: Юрайт, 2000. 112 с.

16. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Гуманитариям о математике . – М: “Агар”, 1999. 330 с.

17. Р. Г, Пиотровский, К. Б. Бектаев, А.А. Пиотровская. Математическая лингвистика. – М: Выс.Школа,1977. 380 с.

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

Байсалов Джоомарт Усубакунович

МАТЕМАТИКА КУРСУ

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика

кафедрасы менен И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университетинин Педагогика институтунун чечимдери менен (№9, 29.06.18.)

окуу китеби катарында басмага сунушталган.

Басууга 24.07.18 берилип, Book - дизайнда көбөйтүлгөн, электрондук варианты "Агартуу Академиясы" фондунун **www.okuma.kg** – электрондук китепканасына коюлуп, акысыз окууга жана көчүрүп алууга уруксат берилет.

Көлөмү 221 б. Саны 100 даана.