ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.Д. Кац

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 66.012–52:51 (075.8)

ББК 32.965в6я73

А 65

Кац М.Д.

А 65 Математические основы теории управления: учебное пособие для практической и самостоятельной работы / М.Д. Кац. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 107 с.

В учебном пособии приведены основные положения методов линейной алгебры и теории идентификации систем, их применение для решения задач управления. Приведены примеры решения задач, варианты заданий для практической и самостоятельной работы.

Пособие подготовлено на кафедре автоматизации теплоэнергетических процессов теплоэнергетического факультета ТПУ и предназначено для студентов специальности 220301 – Автоматизация технологических процессов и производств (энергетика).

УДК 66.012–52:51 (075.8)

ББК 32.965в6я73

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор ТГУ

Ю.И. Параев

Доктор технических наук, профессор

С.В. Шидловский

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для выработки студентами навыков применения математического аппарата в теории автоматического управления. Пособие состоит из трех разделов.

В первом разделе приведены основы методов линейной алгебры и их применение для решения задач управления (определение устойчивости линейных систем автоматического управления, нахождение экстремумов функционалов оптимальных систем).

Во втором разделе рассматриваются методы решения дифференциальных уравнений звеньев и систем.

Третий раздел пособия посвящен основам теории идентификации систем управления.

В пособии приведены необходимые справочные материалы к каждому занятию, прилагаются варианты заданий на работу. Ссылки на формулы, таблицы, графики даны в пределах каждого раздела.

Выполнение практических заданий предполагает широкое использование средств вычислительной техники от инженерных микрокалькуляторов до персональных компьютеров.

Учебное пособие может быть полезным не только студентам специальности 220301 – Автоматизация технологических процессов и производств (энергетика), но и всем изучающим применение математического аппарата к решению прикладных задач теории автоматического управления.

1. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Практическое занятие №1

Основные положения

Матрица – это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Такая таблица, состоящая из m строк и n столбцов, называется $m \times n$ матрицей. Числа или любые объекты, расположенные в клетках матрицы, называются ее элементами. Величины m и n называются порядками матрицы.

Две матрицы, имеющие одинаковое число m строк и одинаковое число n столбцов, называются матрицами одинакового размера.

Различают следующие типы матриц: прямоугольная, квадратная, столбец, строка, диагональная (у которой отличны от нуля элементы главной диагонали), верхняя треугольная (ненулевые элементы расположены на главной диагонали и над ней), нижняя треугольная (ненулевые элементы расположены на главной диагонали и под ней), единичная (диагональная матрица с единицами по главной диагонали).

Рассмотрим операции над матрицами.

1. **Сложение (вычитание) матриц.**

Суммой (разностью) матриц *A* и *B* одинакового типа называется матрица C того же типа, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц *A* и *B*.

2. **Умножение матрицы на число**.

Произведением матрицы *A* на число λ называется матрица *C* того же типа, что и *A*, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы *A* на число λ. Возможно сделать и обратную операцию: упростить элементы матрицы вынесением за матрицу общего множителя.

3. Умножение матрицы на матрицу.

Произведением матрицы *A* размера $(m1 \times n1)$ на матрицу *B* размера $(m2 \times n2)$ называется матрица *C* размера $(m1 \times n2)$, элементы которой определяются по формуле:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n1} a_{i,k} \times b_{k,j}, \quad (i=1,2....m1;\ j=1,2...n2). \tag{1.1}$$

Умножение матриц возможно в случае, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.

4. **Операция транспонирования матрицы.**

Операция транспонирования заключается в перемене местами строк и столбцов с сохранением их номеров.

Пример 1

Из элементов $(a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a)$ составить:

a) квадратную матрицу и произвести ее упрощение вынесением общего множителя;

b) нижнюю треугольную матрицу размера (3×3) из любых элементов списка.

Решение

Квадратная матрица имеет одинаковое количество строк и столбцов. Поэтому производим заполнение матрицы D исходными элементами:

$$D = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ 4a & 5a & 6a \\ 7a & 8a & 9a \end{bmatrix}.$$

Матрицу D можно упростить вынесением общего множителя (а) за знак матрицы:

$$D = a \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Составляем нижнюю треугольную матрицу. Заполняем главную диагональ и ниже ее элементами списка; вверху от главной диагонали ставим нули:

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4a & 2a & 0 \\ 5a & 6a & 3a \end{bmatrix}.$$

Пример 2

Выполнить действия:

$$6 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение

Приоритетность операций над матрицами остается такой же, как и с числами: сначала умножение матриц на соответствующие числа, затем вычитание результирующих матриц.

Производим следующие действия:

1) умножаем число на первую матрицу:

$$6\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 9 & 4 & 0\\ 6 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 30\\ 54 & 24 & 0\\ 36 & 30 & 6\end{bmatrix};$$

2) умножаем число на вторую матрицу:

$$2\times\begin{bmatrix}-5 & 8 & 4\\ 6 & 3 & 3\\ 8 & 9 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 16 & 8\\ 12 & 6 & 6\\ 16 & 18 & 4\end{bmatrix};$$

3) производим операцию вычитания матриц:

$$\begin{bmatrix}6 & 18 & 30\\ 54 & 24 & 0\\ 36 & 30 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10 & 16 & 8\\ 12 & 6 & 6\\ 16 & 18 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 2 & 22\\ 42 & 18 & -6\\ 20 & 12 & 2\end{bmatrix}.$$

Пример 3

Найти произведение матриц по формуле умножения:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$

Решение

1) Проверяем возможность умножения матриц; первая матрица имеет размерность (2×2), а вторая (2×3). Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно, умножение матриц возможно.

2) Согласно (1.1), имеем:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{2} a_{i,k} \times b_{k,j}\,, \quad (i=1,2;\; j=1,2,3), \tag{1.2}$$

где $c_{i,j}$-элементы результирующей матрицы C.

3) запишем выражение (2) в развернутом виде и произведем расчет элементов матрицы C:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k1} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} = 2\times1+3\times3=11;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k2} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} = 2\times2+3\times4=16;$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} \times b_{k3} = a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} = 2\times1+3\times2=8;$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k1} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} = 5\times1+1\times3=8;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k2} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} = 5\times2+1\times4=14;$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \times b_{k3} = a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} = 5\times1+1\times2=7.$$

4) Окончательно получим:

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

Задания практического занятия № 1

1. Из предложенных элементов составить матрицы: квадратную, столбец, строку, верхнюю треугольную, нижнюю треугольную.
2. Вычислить элементы результирующей матрицы.
3. Произвести умножение двух матриц по формуле (1.1).
4. Вынести общий множитель за знак матрицы.

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
1	(9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1)	$2\cdot\begin{bmatrix}4&1&5\\8&3&9\\0&1&3\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}-1&8&4\\1&2&3\\8&7&9\end{bmatrix}$	$\begin{matrix}4&5&6\end{matrix}\times\begin{bmatrix}9\\8\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a&3a&5a&6a\\4b&5c&7d&8e\\3&8&7&4\\3k&2k&2k&k\end{bmatrix}$
2	(a; b; c; d; e; f; g; i; k)	$\begin{bmatrix}1&3&4\\5&8&7\\9&2&6\end{bmatrix}:4+5\cdot\begin{bmatrix}-1&8&9\\4&0&5\\8&8&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3\\7&9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8&4\\3&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}18&4&22&28\\38&2&4&56\\78&34&6&8\\10&30&42&88\end{bmatrix}$
3	(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)	$6\cdot\left(\begin{bmatrix}1&3&8\\9&4&5\\1&8&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&5\\9&3&2\\0&4&7\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}3&-2\\5&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a&4a&8a&4a\\10d&2d&14d&2d\\c&6d&4a&3a\\6d&fa&at&ca\end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
4	(i; 2i; 3i; 4i; 5i; 6i; 7i; 8i; 9i)	$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 16 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times 5 + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & - \\ 6 & - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 & 38 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 7 & 14 \\ 22 & 4 & 5 & 10 \\ 28 & 16 & 9 & 2 \end{bmatrix}$
5	(2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18)	$\left(\begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 12 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 18 & 9 & 3 & 0 \\ 21 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$
6	(sin(x); sin(2x); sin(3x); sin(4x); sin(5x); sin(6x); sin(7x);	$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -3 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) : 4$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9a & 3 & 6 & 12 \\ 14 & 6b & 9ab & 15 \\ 12b & 15 & 3a & 6b \\ 9 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
7	(-1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9)	$\left(2 \times \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 8 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \times 4$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 14 & 16 \\ 18 & 23 & 24 & 20 \\ 8 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
8	(a; 2a; 3a; 4a; 5a; 6a; 7a; 8a ;9a)	$4\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\6 & 2 & 7\\8 & 9 & 3\end{bmatrix}-2\times\begin{bmatrix}0 & 2 & 5\\4 & 1 & 6\\8 & 8 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8 & 8\\4 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3 & 12 & 3 & 0\\6 & 14 & 9 & 3\\9 & 20 & 6 & 6\\6 & 2 & 3 & 6\end{bmatrix}$
9	(1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17)	$8\times\left(\begin{bmatrix}4 & 8 & 9\\1 & 7 & 5\\8 & 4 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 9 & 8\\2 & 8 & 5\\9 & 5 & 3\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8 & 3 & 4 & 0\\10 & 5 & 6 & 14\\8 & 6 & 2 & 0\\10 & 7 & 4 & 2\end{bmatrix}$
10	(f(x); 2f(x); 3f(x); 4f(x); 5f(x); 6f(x); 7f(x); 8f(x); 9f(x))	$12\times\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\8 & 2 & 6\\7 & 7 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 4 & 5\\8 & 3 & 6\\-5 & 0 & 4\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}9 & 9\\8 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8 & 1 & 2 & 6\\10 & 7 & 4 & 2\\12 & 6 & 10 & 4\\2 & 9 & 4 & 6\end{bmatrix}$
11	(x; x^2; x^3; x^4; x^5; x^6; x^7; x^8; x^9)	$\begin{bmatrix}15 & 18 & 19\\10 & 11 & 8\\14 & 7 & 6\end{bmatrix}-3\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\8 & 0 & 9\\4 & 4 & 3\end{bmatrix}$	$3\quad 8\quad 9\times\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}18 & 3 & 22 & 28\\38 & 1 & 4 & 16\\6 & 8 & 4 & 10\\12 & 13 & 10 & 6\end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
12	(1; 2; 3; 4;; 6; 7; 8; 9)	$4\times\begin{bmatrix}-1 & 8 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 8 & 7 & 9\end{bmatrix}-2\times\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 8 & 3 & 9\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9 & 11 & 3 & 6\\ 0 & 3 & 9 & 15\\ 18 & 9 & 27 & 6\\ 21 & 2 & 9 & 15\end{bmatrix}$
13	(a; b; c; d; e; f; g; k; l)	$5\times\begin{bmatrix}9 & 2 & 6\\ 5 & 8 & 7\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 8 & 4\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 8 & 9\end{bmatrix}\times 4$	$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a & 3 & 6a & 7a\\ 2c & 7b & 4a & 9a\\ 3a & 6b & 8c & 2d\\ 9a & 3a & 7a & 3a\end{bmatrix}$
14	(i; 2i; 3i; 4i; 5i; 6i; 7i; 8i; 9i)	$7\times\left(\begin{bmatrix}1 & 8 & 7\\ 9 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 5\\ 9 & 3 & 1\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}4\\ 9\\ 8\end{bmatrix}\times\begin{matrix}5 & 9 & 1\end{matrix}$	$\begin{bmatrix}18 & 38 & 5 & 12\\ 3 & 6 & 14 & 16\\ 22 & 4 & 0 & 62\\ 8 & 14 & 5 & 2\end{bmatrix}$
15	(a; a^2; a^4; a^6; a^8; a^{10}; a^{12}; a^{14}; a^{16})	$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 8 & 4\\ 8 & 10 & -5\end{bmatrix}\times 4-\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\\ 9 & 4 & -5\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9 & 6a & 2 & 3b\\ 3 & 1a & 3 & 2c\\ 7 & 2b & 9a & 5\\ 8a & 4a & 9a & 0\end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
16	(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_9)	$8\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -5 & 8\\ -3 & 1 & 6\\ -5 & 6 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}10 & 15\\ 25 & 30\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ 8 & 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 & 19 & 28 & 32\\ 15 & 2 & 36 & 49\\ 64 & 8 & 12 & 20\\ 4 & 13 & 3 & 1\end{bmatrix}$
17	(1; 2; 3; 4;; 6; 7; 8; 9)	$\left(\begin{bmatrix}8 & 5 & 4\\ 0 & 8 & 3\\ 5 & 3 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}\right)\times 3$	$\begin{bmatrix}4 & 4\\ 8 & 12\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 15 & 25 & 35\\ 30 & 45 & 55 & 50\\ 65 & 85 & 20 & 10\\ 0 & 100 & 95 & 110\end{bmatrix}$
18	(9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1)	$8\times\left(\begin{bmatrix}7 & 6 & 7\\ 4 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 5 & 9\\ 6 & 8 & 8\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}8 & 6\\ 9 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}81 & 8 & 25 & 54\\ 18 & 72 & 45 & 63\\ 0 & 7 & 81 & 90\\ 18 & 5 & 9 & 27\end{bmatrix}$
19	(2; 3; 4; 7; 8 ;9; 4; 5; 10)	$-2\times\begin{bmatrix}8 & 8 & 2\\ 6 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 7\end{bmatrix}-4\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 6 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 9\\ 6 & 9 & 3 & 12\\ 2 & 3 & 5 & 4\end{bmatrix}$

1.2. Матричные операции

Практическое занятие № 2

Основные положения

Операции над столбцами и строками матрицы

Любую матрицу можно представить в виде матрицы-строки или матрицы-столбца . Для этой цели обозначим i-ю строку матрицы A через $a_{(i)}$ и j-й столбец – через $a^{(j)}$. Тогда любую $(m\times n)$- матрицу можно представить как столбец из m ее строк или как строку из n ее столбцов:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{(1)} \\ a_{(2)} \\ \cdots \\ a_{(m)} \end{bmatrix}=\left[a^{(1)}, \quad a^{(2)}, \quad \cdots, \quad a^{(n)}, \right].$$

Это позволяет упростить операцию умножения матрицы A $(m\times n)$ на матрицу B $(n\times r)$. Для этой цели представляем матрицу A в виде матрицы-строки, а матрицу B в виде матрицы-столбца. Результирующую матрицу C $(m\times r)$ также можно представить как столбец из m ее строк или как строку из r ее столбцов:

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{21} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{(1)} \\ c_{(2)} \\ \cdots \\ c_{(m)} \end{bmatrix}=\left[c^{(1)}, \quad c^{(2)}, \quad \cdots, \quad c^{(r)} \right].$$

При представлении результирующей матрицы C в виде столбца элементы ее i-й строки вычисляются по формуле:

$$c_{(i)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{(k)}, \quad k=1,2\cdots,n. \tag{1.3}$$

При представлении результирующей матрицы C в виде строки элементы ее j-го столбца определяются выражением:

$$c^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a^{(k)} \cdot b_{kj}, \quad k = 1, 2 \cdots, n. \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) и (1.4) дают одинаковый результат. Ими удобнее пользоваться, когда одна из матриц-сомножителей разреженная (содержит много нулевых элементов).

Умножение на диагональную матрицу

Определенный интерес представляет случай, когда одна из матриц-сомножителей является диагональной. Предположим, что следует перемножить матрицы A и B. В этом случае воспользуемся следующими правилами:

а) если матрица A диагональная, следует строки матрицы B умножить на соответствующий диагональный элемент матрицы A;

б) если матрица B диагональная, следует столбцы матрицы A умножить на соответствующий диагональный элемент матрицы B;

в) если обе матрицы A и B диагональные, следует перемножить соответствующие диагональные элементы матриц.

Степени матрицы

В теории матричных операций используется понятие степени матрицы. Произведения одинаковых квадратных матриц A можно записать как ее степень: $A \cdot A = A^2$. Как и для чисел, для матричных степеней имеют место обычные свойства:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}; \; ((A^p)^q = A^{p+q},$$

где p и q – целые положительные числа.

Никакая степень числа, отличного от нуля, не может равняться нулю. Для определенного вида матриц можно найти такой показатель r, что $A^r = 0$. Матрица A с таким свойством называется нильпотентной. Например, матрица с одинаковыми числами на наддиагонали и остальными нулевыми элементами является нильпотентной:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При умножении этой матрицы саму на себя ее ненулевые элементы смещаются на следующую наддиагональ и при $r=n$ все элементы становятся нулевыми.

Многочлены от матрицы

Многочлен, у которого в качестве независимого переменного стоит матрица, называется матричным многочленом:

$$f(A)=a_0 \cdot E+a_1 \cdot A+\cdots+a_m \cdot A^m, \qquad (1.5)$$

где: $a_0, a_1,\ldots,a_m$ – вещественные или комплексные коэффициенты ; *E*– единичная матрица ; *f(A)*– результирующая матрица .

Для вычисления матричного многочлена (1.5) следует выполнить последовательно все операции согласно их приоритета: возвести матрицу A в соответствующую степень; умножить на коэффициенты a_i (*i*=0,1, …, m) на соответствующие матрицы и сложить полученные результаты. Результатом матричного многочлена будет матрица *f(A)* того же размера, что и матрица A. Правила действий над матричными многочленами подобны соответствующим правилам для обычных (скалярных) многочленов. Так, если $f(x)=g(x)\pm h(x)$, то $f(A)=g(A)\pm h(A)$. Если $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, то $f(A)=g(A)\cdot h(A)$.

Прямая сумма квадратных матриц

К матричным операциям также относится прямая сумма квадратных матриц:

$$C=A\oplus B.$$

Операция прямой суммы матриц сводится к присоединению правого нижнего угла матрицы $A\,(m\times m)$ к первому верхнему углу матрицы $B\,(n\times n)$ и заполнение остальных клеток таблицы результирующей матрицы $C\,((m+n)\times(m+n))$ нулями.

Кронекерово произведение прямоугольных матриц

Эта операция может выполняться над матрицами любых размеров:

$$C = A\otimes B.$$

Операция кронекерова произведения матрицы $A\ (m\times n)$ и $B\ (p\times g)$ выражается матрицей $D\ (mp\times ng)$, элементы которой получаются перемножением соответствующего элемента a_{ij} матрицы A на матрицу B:

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot B & a_{12}\cdot B & \cdots & a_{1n}\cdot B \\ a_{21}\cdot B & a_{22}\cdot B & \cdots & a_{2n}\cdot B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\cdot B & a_{m2}\cdot B & \cdots & a_{mn}\cdot B \end{bmatrix}.$$

Пример 1

Представляя матрицу A в виде строки и матрицу B в виде столбца, произвести умножение матриц $A\times B$:

$$\mathrm{A}(3\times 3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix};\quad B(3\times 4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Делаем проверку условия совместимости матриц A и B (при умножении число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B). В нашем случае это равенство выполняется, следовательно, умножение матриц возможно.
2. Представляем матрицу B в виде матрицы-столбца:

$$B(3\times 4)=\begin{bmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \\ b_{(3)} \end{bmatrix}, \quad \text{где: } \left.\begin{aligned} b_{(1)} &= (2,0,0,3) \\ b_{(2)} &= (0,1,0,0) \\ b_{(3)} &= (-3,0,4,0) \end{aligned}\right\} \text{ – строки матрицы } \quad B.$$

3. Представляем результирующую матрицу C в виде матрицы-столбца:

$$C(3\times 4)=\begin{bmatrix} c_{(1)} \\ c_{(2)} \\ c_{(3)} \end{bmatrix}.$$

4. Воспользуемся формулой (1.3):

$$c_{(i)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{(k)}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\cdot b_{(k)}=a_{i1}\cdot b_{(1)}+a_{i2}\cdot b_{(2)}+a_{i3}\cdot b_{(3)},\ i=1,2,3.$$

5. Производим расчет для каждой строки результирующей матрицы:

$$c_{(1)}=a_{11}\cdot b_{(1)}+a_{12}\cdot b_{(2)}+a_{13}\cdot b_{(3)}=$$

$$=2\cdot(2,0,0,3)+(-1)\cdot(0,1,0,0)+4\cdot(-3,0,4,0)=(-8,-1,16,6);$$

$$c_{(2)}=a_{21}\cdot b_{(1)}+a_{22}\cdot b_{(2)}+a_{23}\cdot b_{(3)}=$$

$$=(-1)\cdot(2,0,0,3)+1\cdot(0,1,0,0)+3\cdot(-3,0,4,0)=(-11,1,12,3);$$

$$c_{(3)}=a_{31}\cdot b_{(1)}+a_{32}\cdot b_{(2)}+a_{33}\cdot b_{(3)}=$$

$$=(-3)\cdot(2,0,0,3)+2\cdot(0,1,0,0)+(-2)\cdot(-3,0,4,0)=(0,0,-8,-9);$$

6. Записываем результирующую матрицу C:

$$\text{C}=\begin{bmatrix} -8 & -1 & 16 & 6 \\ -11 & 1 & 12 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Пример 2

Возвести в степень 2 матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение

Операция возведения в степень идентична операции умножения матрицы саму на себя:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Любым способом умножения матриц получаем результат:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}.$$

Пример 3

Произвести умножение матриц A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение

Матрица A является диагональной. Для умножения диагональной матрицы A на матрицу B следует строки матрицы B умножить на диагональные элементы матрицы A:

$$C = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 0\cdot 1 & 4\cdot 1 \\ 5\cdot 3 & 3\cdot 3 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 5 & 4\cdot 5 & 5\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 15 & 9 & 6 \\ 5 & 20 & 25 \end{bmatrix}.$$

Пример 4

Вычислить значение матричного многочлена:

$$f(A)=5E+4A+2A^2\ , \qquad \text{где} \quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Решение

1. Вычисляем значение матрицы A^2 (см. пример 2):

$$A^2=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем: $$2A^2=2\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 20\\ 30 & 44\end{bmatrix}.$$

3. Вычисляем: $$4A=4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}.$$

4. Производим расчет: $$5E=5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем значение матричного многочлена:

$$f(A)=5E+4A+2A^2=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14 & 20\\ 30 & 44\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 28\\ 42 & 65\end{bmatrix}.$$

Пример 5

Найти прямую сумму и кронекерово произведение матриц A и B:

$$A=\begin{bmatrix}x & 2x^2\\ 3x & 4x\end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

Решение

Согласно определению прямой суммы, имеем:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} x & 2x^2 & 0 & 0 \\ 3x & 4x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

Согласно определению кронекерова произведения, записываем результирующую матрицу:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} x \cdot B & 2x^2 \cdot B \\ 3x \cdot B & 4x \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot a & x \cdot b & 2x^2 \cdot a & 2x^2 \cdot b \\ x \cdot c & x \cdot d & 2x^2 \cdot c & 2x^2 \cdot d \\ 3x \cdot a & 3x \cdot b & 4x \cdot a & 4x \cdot b \\ 3x \cdot c & 3x \cdot d & 4x \cdot c & 4x \cdot d \end{bmatrix}.$$

Задания практического занятия № 2

Варианты заданий. Часть 1

1. Вычислить произведения матриц представлением матриц-сомножителей в виде матрицы-строки и матрицы-столбца.
2. Вычислить произведение матриц, если одна из них диагональная.
3. Определить степень нильпотентной матрицы, при которой она станет нулевой.

№ варианта	Задания		
	1	2	3
1.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 1 (продолжение)

№ варианта	Задания		
	1	2	3
2.	$\begin{bmatrix}5&6&5\\8&4&2\\1&8&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&8&9&2&7\\6&3&6&9&7\\6&2&5&8&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&5&7&2\\9&0&1&2\\5&6&7&8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix}8&2&7&7&2\\8&7&1&8&9\\9&1&9&8&9\\8&7&4&8&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&6&9\\8&1&7\\7&8&6\\0&4&6\\4&1&7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&9&6&1\\6&2&1&9\\1&9&6&3\\1&9&7&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix}7&4&4&9\\6&9&3&2\\4&5&7&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&1\\9&8\\5&2\\2&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&5&4&3\\2&1&0&1\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix}7&8&9&2\\2&5&6&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8&3&2\\0&8&5\\4&8&9\\2&7&6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&3&4\\5&6&7&8\\0&1&2&3\\4&5&6&7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix}4&7&9&7\\6&2&5&8\\5&8&3&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7&5\\2&3\\3&4\\8&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&2&1&4\\6&7&5&8\\1&0&2&3\\5&6&7&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix}5&9&9\\9&9&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\6&7\\9&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&1&2&4\\6&8&5&7\\3&2&0&4\\7&6&4&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 1 (продолжение)

№ Варианта	Задания 1	Задания 2	Задания 3
8.	$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 9 \\ 9 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 7 \\ 8 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
12.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 9 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 5 \\ 8 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 7 & 1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 8 \\ 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$
14.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 1 (продолжение)

№ варианта	Задания 1	2	3
15.	$\begin{bmatrix}5&6&5\\8&4&2\\1&8&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&8&9&2&7\\6&3&6&9&7\\6&2&5&8&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&1&2&4\\6&8&5&7\\3&2&0&4\\7&6&4&5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&8&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix}8&3&7\\8&5&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&3\\4&8\\4&6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&4&5&6\\1&0&3&6\\8&9&1&2\\0&1&3&5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}$
17.	$\begin{bmatrix}8&2&7&7&2\\8&7&1&8&9\\9&1&9&8&9\\8&7&4&8&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&6&9\\8&1&7\\7&8&6\\0&4&6\\4&1&7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&0&1&2\\5&0&7&8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&9\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
18.	$\begin{bmatrix}9&1&2\\2&1&9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6&1\\3&6\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&9&6&1\\6&2&1&9\\1&9&6&3\\1&9&7&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\9&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix}5&2&1\\8&5&7\\2&3&9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&1\\8&4\\4&9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&0&1&2\\5&6&7&8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
20.	$\begin{bmatrix}6&3&3&6\\4&9&3&3\\1&1&6&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&9&2\\5&2&4\\2&1&1\\0&8&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&9&6&1\\6&2&1&9\\1&9&6&3\\1&9&7&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 2.

4. Вычислить матричный многочлен $f(A) = A^2 + 3A + E$.
5. Найти кронекерово произведение матриц.
6.Найти прямую сумму матриц.

№ вариан-та	Задания		
	4	5	6
1.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin x & \sin 2x) \\ 1 & \cos x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
2.	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & 3b \\ c & 2k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} f & r \\ a & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin t & t \\ 5t & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} f(x) & f(2x) \\ f(3x) & f(4x) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & c & d \\ i & f & g \\ k & n & m \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & h \\ u & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} fc & pq \\ zs & \mathrm{c}h \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 6 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & d \\ t & e \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & c & d \\ l & f & g \\ k & l & m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b & b^3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 2 (продолжение)

№ варианта	Задания		
	4	5	6
8.	$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 6 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin(t) & i \\ 5i & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & c & d \\ l & f & g \\ k & l & m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & l \\ f & g \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} i & 5i \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
12.	$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i & 5i \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & l \\ f & g \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ tg(x) & ctg(x) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & c & d \\ l & f & g \\ k & l & m \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 2. Часть 2 (продолжение)

№ варианта	Задания		
	4	5	6
15	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ 2x & 4y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ 2x & 4y \end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ tg(x) & ctg(x) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c & h \\ u & d \end{bmatrix}$
17.	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & d \\ t & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} f(x) & f(2x) \\ f(3x) & f(4x) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
18.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin(X) & \cos(X) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sin t & t \\ 5t & 0 \end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & c & d \\ i & f & g \\ k & n & m \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} za & cs \\ bd & hf \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin X & cosX \\ tgX & CtgX \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$
21.	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & v \\ m & k \end{bmatrix}$
22.	$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i & 5i \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d & g \\ q & l \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.3. Методы вычисления определителей

Практическое занятие № 3

Основные положения

Метод вычисления определителя по формуле

Определителем (детерминантом) n-го порядка квадратной матрицы $A(n \times n)$ называется алгебраическая сумма всех возможных произведений ее элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Причем знак каждого слагаемого определяется числом инверсий в перестановках из первых и вторых индексов членов сомножителей.

Общая формула расчета определителя выражается:

$$\det A = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_n} (-1)^t \cdot a_{1,j1} \cdot a_{2,j2} \cdots a_{n,jn}, \qquad (1.5)$$

где j – индексы столбцов определителя; t – число инверсий в перестановке индексов столбцов.

Недостатком данного метода является его громоздкость. При вычислении определителей выше третьего порядка резко возрастает объем вычислений.

Метод вычисления определителя разложением его по элементам строки или столбца

Метод основан на теореме: любой определитель можно представить в виде суммы произведений элементов произвольной его строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения $A_{i,j}$:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{k,i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),. \qquad (1.6)$$

Под алгебраическим дополнением **($A_{i,j}$)** определителя D понимается дополнительный минор к элементу $a_{i,j}$:

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \bar{M},$$

где i, j – номера строки и столбца элемента.

Разложение определителя по элементам столбца или строки проще всего, когда в этой строке или столбце имеется единственный ненулевой элемент. Тогда определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение. К такому виду можно преобразовать определитель путем операций над его строками или столбцами, используя его основные свойства.

Метод вычисления определителей приведением его к треугольному виду

Наиболее просто вычисляется определитель диагональной и треугольной матрицы. Он равен произведению его диагональных элементов. Метод заключается в преобразовании исходного определителя путем элементарных операций, основанных на свойствах определителя, к диагональной или треугольной форме.

Метод единственного деления

Алгоритм метода состоит в следующих операциях:

а) в определителе выбирается ненулевой ведущий элемент a_{11}, который в качестве общего множителя выносится из строки (или столбца). Эта строка называется ведущей;

б) из каждой строки вычитается ведущая строка, умноженная на первый элемент данной строки;

в) разлагая определитель по элементам ведущей строки (столбца), получаем произведение вынесенного множителя на определитель (*n-1*) порядка, элементы которого находятся по формуле:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1} \cdot a_{1j}}{a_{11}} \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n)$$

где: a'_{ij} – элементы определителя (*n-1*) порядка; a_{ij} – элементы исходного определителя;

г) далее расчет повторяется с пункта а) и продолжается n шагов, пока не получим значения определителя как произведение его ведущих элементов. Достоинством этого метода является его хорошая программируемость на ЭВМ.

Метод вычисления определителя Вандермонда

Определитель вида

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ ... & .. & .. & .. & .. \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

называется определителем Вандермонда.

Рекуррентная формула для его вычисления имеет вид:

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\ldots(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}). \quad (1.7)$$

Метод вычисления определителя вида:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ y & 1 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Определители можно рассчитать по следующему рекуррентному соотношению:

$$\Delta_n = (1-x)\cdot\frac{(1-x)^{n-1}\cdot y - (1-y)^{n-1}\cdot x}{y-x} + (1-y)^{n-1}\cdot x, \quad (1.8)$$

где x, y – соответствующие элементы определителя.

Метод расчета определителя разложением матрицы на две треугольные

Метод разложения квадратной матрицы на произведение двух треугольных матриц базируется на следующей теореме: если квадратная матрица имеет отличные от нуля диагональные миноры, то ее можно разложить на произведение двух треугольных матриц (верхней и нижней). Это разложение будет единственным, если диагональным элементам одной из треугольных матриц заранее дать отличные от нуля значения.

Искомые элементы треугольных матриц *T₁ и R₂* находим следующим образом.

1. Пусть $A = T_1 \cdot R_2$, где

$$R_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

2. Задаем диагональные коэффициенты матрицы R_2, отличные от нуля, например, $r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1$.

3. Перемножаем треугольные матрицы между собой:

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \cdot r_{12} & t_{11} \cdot r_{13} \\ t_{21} & t_{21} \cdot r_{12} + t_{22} & t_{21} \cdot r_{13} + t_{22} \cdot r_{23} \\ t_{31} & t_{31} \cdot r_{12} + t_{32} & t_{31} \cdot r_{13} + t_{32} \cdot r_{23} + t_{33} \end{bmatrix}.$$

4. Приравнивая соответствующие элементы матрицы-произведения элементам матрицы *A*, получаем систему уравнений, из которой можно найти искомые коэффициенты треугольных матриц-сомножителей:

$$\begin{array}{lll} t_{11} = a_{11}; & t_{11} \cdot r_{12} = a_{12}; & t_{11} \cdot r_{13} = a_{13}; \\ t_{21} = a_{21}; & t_{21} \cdot r_{12} + t_{22} = a_{22}; & t_{21} \cdot r_{13} + t_{22} \cdot r_{23} = a_{23}; \\ t_{31} = a_{31}; & t_{31} \cdot r_{12} + t_{32} = a_{32}. & t_{31} \cdot r_{13} + t_{32} \cdot r_{23} + t_{33} = a_{33}; \end{array} \qquad (1.9)$$

Примечание. Если задавать диагональные элементы матрицы T_2 равными единице, то определитель матрицы *A* будет равен произведению диагональных элементов матрицы T_1.

Пример 1

Вычислить определитель по формуле:

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Подсчитываем возможные инверсии индексов столбцов всех членов определителя (табл.1.1).

Таблица 1.1 – Расчет числа инверсий в перестановках определителя

Возможные перестановки индексов столбцов	Число инверсий (t)
[1, 2, 3]	0
[2, 3, 1]	2
[3, 1, 2]	2
[3, 2, 1]	3
[1, 3, 2]	1
[2, 1, 3]	1

2. Для определителя третьего порядка записываем формулу расчета (1.5) в развернутом виде:

$$\det A = (-1)^0 \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + (-1)^2 \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + (-1)^2 \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} +$$
$$+(-1)^3 \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + (-1)^1 \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + (-1)^1 \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3}.$$

3. Подставляем числовые выражения и вычисляем определитель:

$$\det A=1\cdot 5\cdot 9+2\cdot 6\cdot 7+3\cdot 4\cdot 8-3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 6\cdot 8-2\cdot 4\cdot 9=0.$$

Пример 2

Вычислить определитель методом разложения его по элементам строки (столбца):

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение

1. Выбираем строку (столбец) разложения. В нашем примере производим разложение определителя по элементам первой строки.
2. Записываем разложение определителя по формуле (1.6) и производим расчет:

$$\det B = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 75.$$

Пример 3

Вычислить определитель методом единственного деления:

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 14 \\ 10 & 4 & 16 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение

1. В качестве ведущего элемента выбираем первый элемент первой строки a_{11}=2;
2. Выносим его за знак определителя, производя деление элементов первой строки на a_{11}:
3.

$$\det C = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 10 & 4 & 16 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Из второй строки вычитаем первую, умноженную на первый элемент второй строки (a_{21}=10):

$$\det C = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 10-10 & 4-90 & 16-70 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & -86 & -54 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Из третьей строки вычитаем первую, умноженную на первый элемент третьей строки (a_{31}=8):

$$\det C = 1\times\begin{vmatrix} 1. & 9 & 7 \\ 0 & -86 & -54 \\ 8-8 & 6-72 & 3-56 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & -86 & -54 \\ 0 & -66 & -53 \end{vmatrix}.$$

6. Разлагаем определитель по элементам первого столбца:

$$\det C = 1\times 1\times\begin{vmatrix} -86 & -54 \\ -66 & -53 \end{vmatrix}.$$

Если бы определитель был более высокого порядка, мы бы взяли в качестве ведущего элемента a_{11}= – 86 и повторили расчет, начиная с пункта 2 . В нашем случае мы просто вычислим определитель и получим окончательный результат:

$$\det C = 1\times\ (-86)\times(-53)-(-66)\times(-54)\ = 944\,.$$

Пример 4

Вычислить определитель Вандермонда по рекуррентному соотношению:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение

Для определителя третьего порядка записываем рекуррентную формулу (1.7) и получаем результат:

$$\det V = \ a_2 - a_1 \ \times \ a_3 - a_1 \ \times \ a_3 - a_2 \ = \ 2-5 \ \times \ 3-5 \ \times \ 3-2 \ = 6\,.$$

Пример 5

Вычислить определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

Учитывая, что $x = 3$ и $y = 5$, используем рекуррентную формулу (1.8):

$$\Delta_3 = (1-3)\cdot\frac{(1-3)^2\cdot 5-(1-5)^2\cdot 3}{5-3} + (1-5)^2\cdot 3 = 76\,.$$

Пример 6

Вычислить определитель методом разложения исходной матрицы на две треугольные:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

1. Введем обозначения: $A = T_1 \cdot R_2$,

где: $$T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}; \qquad R_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

2. Задаем диагональные коэффициенты матрицы R_2 равные единице:

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1.$$

3. Для нахождения коэффициентов матриц используем систему уравнений (1.9):

$$\begin{array}{lll} t_{11} = a_{11}; & t_{11} \cdot r_{12} = a_{12}; & t_{11} \cdot r_{13} = a_{13}; \\ t_{21} = a_{21}; & t_{21} \cdot r_{12} + t_{22} = a_{22}; & t_{21} \cdot r_{13} + t_{22} \cdot r_{23} = a_{23}; \\ t_{31} = a_{31}; & t_{31} \cdot r_{12} + t_{32} = a_{32}; & t_{31} \cdot r_{13} + t_{32} \cdot r_{23} + t_{33} = a_{33}; \end{array}$$

4. Решаем систему алгебраических уравнений методом подстановки:

$$\begin{array}{lll} t_{11} = 1; & t_{11} \cdot r_{12} = 2; & t_{11} \cdot r_{13} = 2; \\ t_{21} = 3; & t_{21} \cdot r_{12} + t_{22} = 2; & t_{21} \cdot r_{13} + t_{22} \cdot r_{23} = -4; \\ t_{31} = 2; & t_{31} \cdot r_{12} + t_{32} = -1; & t_{31} \cdot r_{13} + t_{32} \cdot r_{23} + t_{33} = 1; \end{array}$$

5. Таким образом, имеем:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 0.75 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Вычисляем определители от каждой треугольной матрицы:

$$\det T_1 = 1 \cdot (-4) \cdot 0.75 = -3;$$

$$\det R_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

7. Вычисляем искомый определитель:

$$\det A = \det T_1 \cdot \det R_2 = -3 \cdot 1 = -3.$$

Задания практического занятия № 3. Часть 1.

Произвести вычисления определителей следующими методами:

1. По выражению (1.5).
2. Разложением определителя по элементам строки или столбца.
3. Приведением определителя к треугольному виду.
4. Методом единственного деления.

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
1.	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
6.	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & 8 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
8.	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 8 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & 8 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
12.	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & 8 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
14.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
15.	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 1 & 8 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
17.	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
18.	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Задания практического занятия № 3. Часть 2.

Произвести вычисления определителей следующими методами:

5. По первому рекуррентному соотношению (1.7).
6. По второму рекуррентному соотношению (1.8).
7. Разложением исходной матрицы на две треугольные.

№ варианта	Задания		
	5	6	7
1.	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 2 (продолжение)

№ варианта	Задания		
	5	6	7
2.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 3 \\ -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 6 & 49 & 48 \\ 5 & 35.5 & 45 \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 & -49 & -56 \\ -1 & 0 & -8 \\ 6 & 45 & 53 \end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 & -49 & -56 \\ 1 & 15 & 8 \\ 6 & 45 & 57 \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & 1`5 & 16 \\ 5 & 38 & 46 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 24 \\ 2 & 5 & 26 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 2 (продолжение)

№ варианта	Задания		
	5	6	7
8.	$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 34 \\ 4 & 11 & 56 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 6 & 22 & 44 \\ 8 & 31 & 72 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 21 & 42 \\ 4 & 19 & 63 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 24 \\ 1 & 6 & 31 \\ 4 & 19 & 84 \end{bmatrix}$
12.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 24 \\ 1 & 4 & 22 \\ 4 & 14 & 75 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 28 \\ 4 & 18 & 71 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия № 3. Часть 2 (продолжение)

14.	$\begin{bmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&3&3\\5&1&3&3\\5&5&1&3\\5&5&5&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2&8\\1&7&34\\8&14&65\end{bmatrix}$
15.	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&3&9&27\\1&5&25&125\\1&7&49&343\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&7&7&7\\2&1&7&7\\2&2&1&7\\2&2&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&4&8\\1&3&-1\\3&12&-20\end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix}1&2&4&8\\1&4&16&64\\1&6&36&216\\1&8&64&512\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&3&3\\5&1&3&3\\5&5&1&3\\5&5&5&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4&24&-16\\1&-5&-1\\5&-24&-12\end{bmatrix}$
17.	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&9&81&729\\1&7&49&343\\1&5&25&125\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&7&7&7\\2&1&7&7\\2&2&1&7\\2&2&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4&-24&-16\\1&-7&1\\4&-18&-49\end{bmatrix}$
18.	$\begin{bmatrix}1&8&64&512\\1&4&16&64\\1&1&1&1\\1&9&81&729\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&3&3\\5&1&3&3\\5&5&1&3\\5&5&5&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-8&16&32\\1&-3&2\\4&-2&-55\end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix}1&2&4&8\\1&9&81&729\\1&5&25&125\\1&7&49&343\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\4&1&2&2\\4&4&1&2\\4&4&4&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-8&16&32\\-1&1&2\\-6&19&35\end{bmatrix}$
20.	$\begin{bmatrix}1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&5&25&125\\1&7&49&343\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&7&7&7\\2&1&7&7\\2&2&1&7\\2&2&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&12&24\\1&4&22\\4&14&75\end{bmatrix}$

1.4. МАТРИЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Практическое занятие №4

Основные положения

Методы вычисление ранга матрицы

В теории матричных вычислений широко используется понятие ранга матрицы. Натуральное число r называется рангом матрицы A, если у нее имеется минор порядка r, отличный от нуля, а все имеющиеся миноры порядка $(r+1)$ и выше равны нулю.

Метод преобразования матрицы в каноническую форму. При помощи элементарных операций, не изменяющих ранга матрицы, приводят исходную матрицу к канонической матрице:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы равен числу единиц, стоящих по наддиагонали или на поддиагонали. Напомним, что преобразованиями, не изменяющими ранга матрицы, являются:

1) перестановка двух любых столбцов (строк) матрицы;
2) умножение столбца (строки) на число, не равное нулю;
3) прибавление к одному столбцу (строке) линейной комбинации других столбцов (строк).

Метод окаймления. Метод заключается в определении максимального порядка r ненулевого минора матрицы A и равенства нулю окаймляющих его миноров порядка $(r+1)$.

Линейная зависимость вектор-столбцов

В теории автоматического управления приходится иметь дело с множеством различных сигналов (входные, выходные, возмущения и т.д.). Для компактной записи их можно объединять в виде вектор - столбцов.

Пусть имеются m- вектор - столбцов порядка $(n \times 1)$:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots\cdots \\ a_{n2} \end{vmatrix}; \quad \ldots\ldots; \quad Am = \begin{vmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots\cdots \\ a_{nm} \end{vmatrix}.$$

и m скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Умножим вектора A_i на скаляры λ_i и сложим между собой. В результате получим вектор-столбец C, который дает интерпретацию суммарного сигнала по данному каналу.

Вектор-столбцы A_i называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ одновременно не равные нулю, что линейная комбинация из произведений скаляров на вектор-столбцы равна нулю:

$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + ... + \lambda_m \cdot A_m. \tag{1.10}$$

В общем случае для проверки условия линейной зависимости следует решить систему n уравнений с m неизвестными λ_i:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + ... + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + ... + a_{2m}\lambda_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + ... + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Для ее решения применим метод Гаусса, идея которого состоит в том, что путем последовательного исключения неизвестных система уравнений превращается в ступенчатую эквивалентную систему.

Для приведения системы уравнений к ступенчатому виду используются следующие преобразования:

- перестановка любых двух уравнений;
- умножение обеих частей уравнений системы на одно и тоже число;
- прибавление к обеим частям данного уравнения соответствующих частей другого уравнения.

При решении системы однородных линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а исходную матрицу коэффициентов системы, выполняя преобразования над ее строками. Для того, чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных $rang\, A < m$). В таблице 1.2 показаны возможные случаи и варианты решений однородной системы алгебраических уравнений. Если количество неизвестных равно количеству уравнений, система (1.11) является определенной и решается обычным способом. Если количество неизвестных больше количества уравнений, система является неопределенной. Для ее решения определяем базисный минор, разделяем неизвестные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ на главные, которые следует определить, и свободные, которые предварительно задаем равными нулю или единице.

Таблица 1.2 – Возможные варианты решений однородной системы алгебраических уравнений

Варианты решений	Результат
Число уравнений (n) равно числу неизвестных (m)	Система имеет нетривиальное решение при det A= 0
Число уравнений меньше числа неизвестных (n< m)	Система имеет нетривиальное решение
Число уравнений равно числу неизвестных и $\det A \neq 0$	Система имеет тривиальное решение

Методы обращения матриц

Значение обратной матрицы столь велико в различных приложениях, что она заслуживает подробного рассмотрения. Напомним, что обратная матрица A^{-1} существует для матрицы A, определитель которой не равен нулю.

Метод обращения матрицы по формуле. Выведена формула для обращения матрицы:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}, \tag{1.12}$$

где A^{-1} – обратная матрица; $\tilde{A}^T$ - присоединенная матрица, элементы которой получаются заменой элементов транспонированной матрицы A^t их алгебраическими дополнениями; $\det A$ – определитель матрицы A.

Недостатком этого метода является его громоздкость, так как он требует вычисления определителя n-го порядка и n определителей $(n-1)$ порядка.

Метод неопределенных коэффициентов. Метод разработан на основе следующих положений.

Обозначим обратную матрицу A^{-1} через X. Тогда из соотношения $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E} = 1$ имеем:

$$A \cdot X = 1. \tag{1.13}$$

Запишем (1.13) в развернутом виде:

$$A \cdot \left[x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(n)} \right] = \left[e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots, e^{(n)} \right], \tag{1.14}$$

где $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ – столбцы искомой обратной матрицы; $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ – столбцы единичной матрицы.

Представляем выражение (1.14) как n систем уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} Ax^{(1)} = e^{(1)} \\ Ax^{(2)} = e^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax^{(n)} = e^{(n)} \end{cases}. \tag{1.15}$$

Решение каждой из этих уравнений дает столбец искомой обратной матрицы A^{-1}.

Метод исключения при обращении матриц. Уравнение $AX = 1$ можно решить относительно $X = A^{-1}$ преобразованием матрицы A к единичной при условии соблюдения равенства правых и левых частей уравнения. Для этой цели выполним следующие операции.

1. Разделим элементы первой строки матрицы A на a_{11} и прибавим к остальным строкам первую строку, умноженную соответственно на $-a_{i1}$ (i=2,3,...,n). В результате получим $a_{11} = 1$, а остальные элементы первого столбца обратятся в ноль.
2. Вторую строку разделим на новое значение a'_{22} и прибавим соответственно к остальным строкам эту строку, умноженную соот-

ветственно на $-a_{i2}$ (i=2,3,..., n). В результате получим $a''_{22}=1$, а остальные элементы второго столбца равны нулю. Через n шагов матрица A преобразуется в единичную матрицу.

3. На k-ом шаге строки матрицы A', полученной на предыдущем шаге (k-1), преобразуются следующим образом:

4.

$$a''_k=\frac{1}{a'_{kk}}a'_{(k)} \quad a''_{(i)}=a'_{(i)}-\frac{a'_{i,k}}{a'_{k,k}}\cdot a'_{(k)}\ , \text{(i=1,...n; i} \neq k).$$

Эти преобразования можно представить как умножение матрицы A' слева на некоторую матрицу V_k того же порядка, что и A':

$$A''=V_k\cdot A'.$$

Это произведение можно записать как:

$$a''_{(i)}=\sum_{s=1}^{n}\upsilon_{i,s}\cdot a'_{(s)}.$$

Сравнивая (16) и (18) , находим:

$$\vartheta_{k,k}=\frac{1}{a'_{k,k}};\upsilon_{ik}=-\frac{a'_{ik}}{a_{kk}};\upsilon_{ii}=1,\ \text{(i=1,2...n} \ , i\neq k).$$

Остальные элементы матрицы равны нулю.

Отсюда следует , что матрица V_k ,соответствующая преобразованию матрицы А на к-ом шаге имеет вид:

$$V_k=\begin{bmatrix} 1 & \dots & -\frac{a'_{ik}}{a'_{kk}} & & \\ & \ddots & \frac{1}{a'_{kk}} & & \\ & & \dots & & \\ & & -\frac{a'_{nk}}{a_{kk}} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что произведение таких матриц для k=1, 2,..., n

$$V = V_1 \cdot V_2 \ldots V_k = A^{-1}$$

осуществляет преобразование матрицы A к единичной матрице.

Чтобы равенство $AX = 1$ не нарушалось при умножении A на V слева, необходимо правую часть также умножить на V:

$$V \cdot A \cdot X = V \cdot E.$$

Это означает, что над строками единичной матрицы в правой части уравнения в процессе его преобразования необходимо выполнить те же операции, что и над строками матрицы A.

Это удобно реализовать, оперируя над строками расширенной матрицы $[A,1]$ и выбирая в качестве опорных элементов диагональные элементы матрицы A. В итоге получаем обратную матрицу A^{-1}, расположенную в последних столбцах матрицы [A,1].

Как побочный результат получаем определитель матрицы A, равный произведению значений опорных элементов на соответствующих шагах преобразования матрицы$[A,1]$.

Метод обращения матрицы разложением ее на две треугольные. В основе метода лежит способ разложения матрицы на две треугольные матрицы (раздел 1.3). Полученные треугольные матрицы обращаются любыми методами. После чего находится произведение обратных треугольных матриц.

Применение методов линейной алгебры для решения задач управления

Исследование устойчивости АСР. Критерии Гурвица, Льенара-Шипара. Под устойчивостью линейной системы понимают ее способность возвращаться к исходному состоянию после снятия возмущающих воздействий. С точки зрения устойчивости системы могут быть устойчивыми, неустойчивыми и нейтральными.

Для исследования устойчивости можно воспользоваться двумя методами: прямым и косвенным. Прямой метод предусматривает получение переходного процесса экспериментальным путем на действующей установке, что требует больших затрат времени на проведение эксперимента. Косвенные методы позволяют судить об устойчивости системы без экспериментального определения переходных процессов. Такими методами являются алгебраические критерии устойчивости Гурвица и Льенара-Шипара.

Критерий Гурвица формулируется следующим образом: для устойчивости линейной системы автоматического регулирования необходимо и достаточно, чтобы при положительных коэффициентах уравнения главные диагональные миноры определителя Гурвица были положительны.

Определитель Гурвица имеет вид:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Правило составления определителя Гурвица:

- по главной диагонали записываем элементы, начиная с a_{n-1} и заканчивая a_0;
- ниже от главной диагонали записываем элементы с последовательно возрастающими индексами;
- выше от главной диагонали записываем элементы с последовательно убывающими индексами;
- если число индекса превышает n или меньше нуля, в матрице ставятся нули.

Критерий Льенара-Шипара формулируется следующим образом: Если все коэффициенты характеристического уравнения системы автоматического управления положительны, то для ее устойчивости достаточно положительности всех главных миноров определителя Гурвица с четными или с нечетными индексами.

Применение методов линейной алгебры для решения задач оптимального управления

В ряде задач управления требуется найти максимум или минимум некоторой функции. Такой класс задач называется оптимизацией статических режимов.

В качестве иллюстрации рассмотрим метод нахождения экстремума функции нескольких переменных.

Пусть f(X) является скалярной функцией n переменных, где $X = x_1, x_2, \cdots x_n$. Требуется определить ее точки экстремума X*. Для этой цели определим вектор-градиент, составленный из частных производных функции:

$$\nabla_x f(X) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю вектора-градиента функции $\nabla_x f(X)_{ix=X^*} = 0$, или в развернутом виде:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}|_{ix=x^*=0} = 0; \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}|_{ix=x^*=0} = 0; \cdots \frac{\partial f(X)}{\partial x_n}|_{ix=x^*=0} = 0.$$

Достаточное условие вытекает из знакоопределенности матрицы Гесса, которая имеет вид:

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \cdot \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Достаточным условием минимума функции f(X) является положительная определенность матрицы Гесса. Это означает: **все** главные миноры матрицы Гесса должны быть строго положительными.

Достаточным условием максимума функции f(X) является отрицательная определенность матрицы Гесса. Это означает: четные главные миноры матрицы Гесса должны быть положительными, а нечетные – отрицательные.

Если условия положительной и отрицательной определенности не выполняются, а все главные миноры отличны от нуля, то исследуемая функция не имеет экстремума.

При обращении в ноль главных миноров матрицы Гесса вопрос о наличии экстремума в исследуемой точке решается сложнее с вычислением производных более высокого порядка.

Пример 1

Вычислить ранг матрицы A приведением ее к канонической матрице:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&2\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

Решение

Над матрицей выполнены следующие преобразования. Вычитаем:

1) первый столбец из четвертого;
2) третий столбец из второго;
3) четвертый столбец из второго.

Получаем:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&2\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{3}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Количество единиц по диагонали равно трем; поэтому ранг матрицы равен r=3.

Пример 2

Путем элементарных преобразований привести исходную матрицу к ее ступенчатому виду, выделяя наибольший минор, отличный от нуля:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}.$$

Решение

Над матрицей проведены следующие преобразования:

1) первая строка матрицы умножается на (-2) и складывается со второй;

2) первая строка матрицы умножается на (-1) и складывается с последней;
3) вторая строка матрицы умножается на (-2) и складывается с третьей;
4) нулевая строка вычеркивается.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}\xrightarrow{1}\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}\xrightarrow{2}\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-1&5&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{3}$$

$$\xrightarrow{3}\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{4}\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\end{bmatrix}.$$

Оставшаяся матрица содержит миноры второго порядка. Делаем перебор возможных вариантов миноров. Если хотя бы один из них отличен от нуля, ранг матрицы будет равен двум. Строки такой матрицы называются линейно независимыми, их число равно рангу матрицы, т. е. rang A=2.

Пример 3

Вычислить ранг матрицы методом окаймления:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{bmatrix}.$$

Решение

1. Выделяем ненулевой элемент матрицы, например, на пересечении первой строки и третьего столбца Δ_1=3 (ранг матрицы равен $rang\ A\geq 1$);
2. Выделяем миноры Δ_2, который содержат (окаймляют) Δ_1 и рассчитываем определители:
3.

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-2\neq 0;\quad \Delta_{12}=\begin{vmatrix}3&-2\\5&1\end{vmatrix}=13\neq 0;\quad \Delta_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\5&7\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Если хотя бы один из определителей не равен нулю, ранг матрицы равен двум ($rang\ A \geq 2$).

3. Выделяем миноры третьего порядка, которые содержат (окаймляют) Δ_2 и рассчитываем определители Δ_3:

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Поскольку миноры третьего порядка равны нулю, ранг матрицы равен 2.

Пример 4

Найти значения λ, при которых вектор - столбцы линейно зависимы:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} -4 \\ -6 \\ -8 \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \\ 17 \end{vmatrix}; \quad A_4 = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \end{vmatrix}.$$

Решение

1. Согласно (1.11) из элементов столбцов составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot\lambda_1 - 4\cdot\lambda_2 + 5\cdot\lambda_3 + 3\cdot\lambda_4 = 0 \\ 3\cdot\lambda_1 - 6\cdot\lambda_2 + 4\cdot\lambda_3 + 2\cdot\lambda_4 = 0 \\ 4\cdot\lambda_1 - 8\cdot\lambda_2 + 17\cdot\lambda_3 + 11\cdot\lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

2. Записываем матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}.$$

3. Рассчитываем ранг матрицы A.

Для этой цели последовательно выполняем действия:

1) вычитаем из первой строки вторую строку;
2) первый столбец умножаем на 3 и складываем со вторым столбцом;
3) первый столбец умножаем на 4 и складываем с третьим столбцом;
4) выносим общий множитель (3) за знак определителя;
5) вычитаем элементы третьей строки из четвертой строки;
6) отбрасываем нулевую строку.

Получаем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{4} 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{5} 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{6}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2. Ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных – система имеет нетривиальное решение.

4. Система уравнения запишется:

$$\begin{cases} (-1) \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 7 \cdot \lambda_3 + 5 \cdot \lambda_4 = 0 \end{cases}.$$

5. Выбираем ненулевой базисный минор, например, на пересечении первой и второй строк, второго и третьего столбца:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 14 \neq 0.$$

Тогда за базисные неизвестные принимаем λ_2 и λ_3, а за свободные – λ_1 и λ_4.

6. Выражаем базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} \lambda_3 = -\dfrac{5}{7} \cdot \lambda_4 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \lambda_1 - \dfrac{1}{7}\lambda_4 \end{cases}.$$

7. Записываем общее решение системы:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dfrac{1}{2}\lambda_1 - \dfrac{1}{7}\lambda_4 \\ -\dfrac{5}{7}\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{bmatrix},$$

где λ_1 и λ_4 любые действительные числа.

8. Записываем фундаментальную систему решений, задавая λ_1=1 и $\lambda_4 = 0$, а затем λ_1=0 и $\lambda_4 = 1$:

λ_1	λ_4	λ_2	λ_3
1	0	1/2	0
0	1	-1/7	-5/7

9. Делаем проверку полученного решения согласно (1.10):

$$1\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}+0,5\cdot\begin{bmatrix}-4\\-6\\-8\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}5\\4\\17\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};$$

$$0\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\begin{bmatrix}-4\\-6\\-8\end{bmatrix}+\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\begin{bmatrix}5\\4\\17\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Пример 5

Произвести обращение матрицы $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&8&9\end{bmatrix}$ по формуле (1.12).

Решение

1. Производим проверку возможности обращения матрицы. Для этой цели производим расчет определителя, например, разложением по элементам первой строки матрицы:

$$\det A=1\cdot\begin{bmatrix}5&6\\8&9\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}4&6\\2&9\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}4&5\\2&8\end{bmatrix}=1(45-48)-2(36-12)+3(32-10)=15.$$

Поскольку определитель не равен нулю, обращение матрицы возможно.

2. Производим транспонирование матрицы: $A^T=\begin{bmatrix}1&4&2\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}.$

3. Рассчитываем элементы присоединенной матрицы. Заменяем каждый элемент транспонированной матрицы его алгебраическим дополнением:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{bmatrix}5&8\\6&9\end{bmatrix}=(45-48)=-3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = -(18 - 24) = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = (12 - 15) = -3.$$

Аналогичным образом рассчитываем алгебраические дополнения второй и третьей строк транспонированной матрицы. В результате получаем присоединенную матрицу вида:

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Производя деление каждого элемента присоединенной матрицы на величину определителя, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/15 & 6/15 & -3/15 \\ -24/15 & 3/15 & -6/15 \\ 22/15 & -4/15 & -3/15 \end{bmatrix}.$$

Пример 6

Методом неопределенных коэффициентов обратить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Обозначим $A^{-1}=X$, имеем:

$$A \cdot X = E. \qquad (1)$$

2. Распишем X в виде матрицы- строки:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \end{bmatrix} \quad где\; x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}; \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}.$$

3. Выражение (1) запишется:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\text{где } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} \end{bmatrix}; \; e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot x^{(1)} = e^{(1)} \\ A \cdot x^{(2)} = e^{(2)} \end{cases}. \tag{3}$$

$$\text{Или: } \begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & (4) \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. & (5) \end{cases}$$

5. Производим умножение матриц слева от знака равенства в (4) и (5):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{21} \\ 4 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & (6) \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{22} \\ 4 \cdot x_{12} + 6 \cdot x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & (7) \end{cases}.$$

6. Приравниваем соответствующие строки выражения (6). Получаем систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{21} = 1 \\ 4 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{21} = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x_{11}=0{,}6;\; x_{21}= -\,0{,}4.$$

7. Аналогичным образом решаем уравнение (7):

$$\begin{cases} 3\cdot x_{12} + 2\cdot x_{22} = 0 \\ 4\cdot x_{12} + 6\cdot x_{22} = 1 \end{cases}, \quad \text{откуда } x_{12} = -0{,}2;\ x_{22} = 0{,}3.$$

8. Тогда обратная матрица запишется:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Пример 7

Обратить матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ методом исключения.

Решение

1. К матрице A присоединяем справа единичную матрицу того же размера. Получаем расширенную матрицу $C = A,1$:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Воспользуемся для этого процедурой, несколько напоминающий метод единственного деления (см. практическое занятие 1.3). Принимаем в качестве опорного элемента a_{11}. Делим на него элементы первой строки. Вычитаем из второй строки первую строку, умноженную на первый элемент второй строки матрицы; вычитаем из третьей строки первую строку, умноженную на первый элемент третьей строки матрицы.

В результате получаем:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 7 & 1,5 & 1 & 0 \\ 0 & 6,5 & -1 & 2,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. В качестве опорного элемента принимаем $c_{22} = 1,5$. Делим на него элементы второй строки. Вычитаем из первой строки вторую строку, умноженную на второй элемент первой строки; вычитаем из третьей строки вторую строку, умноженную на второй элемент третьей строки матрицы.

В результате получаем преобразованную матрицу:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,333 & 0 & -0,0335 & 0 \\ 0 & 1 & 4,667 & 1 & 0,667 & 0 \\ 0 & 0 & -31,333 & -4 & -4,333 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. В качестве ведущего элемента принимаем $c_{33} = -31,333$. Делим на него элементы третьей строки. Вычитаем из первой строки третью строку, умноженную на третий элемент первой строки; вычитаем из второй строки третью строку, умноженную на третий элемент второй строки матрицы.

В результате получаем преобразованную матрицу:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,298 & -0,011 & -0,074 \\ 0 & 1 & 0 & 0,404 & 0,021 & 0,149 \\ 0 & 0 & 1 & 0,128 & 0,138 & -0,032 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица получилась в трех последних столбцах. При правильных вычислениях первые три столбца дают единичную матрицу. Как побочный результат имеем также определитель матрицы *A*, равный произведению тех значений опорных элементов, которые они принимают на соответствующих шагах матрицы $A,1$:

$$\det A = 2 \cdot 1,5 \cdot (-31,333) = -94.$$

Пример 7

Определить устойчивость АСР алгебраическими критериями Гурвица и

Льенара-Шипара по дифференциальному уравнению замкнутой системы:

$$5 \cdot \frac{d'''y}{dt^3} + 9 \cdot \frac{d''y}{dt^2} + 7 \cdot \frac{d\ \ y}{dt} + 6 \cdot y = 9 \cdot \frac{dx}{dt} + 4 \cdot x.$$

Решение

1. Под устойчивостью системы понимают свойство системы возвращаться к первоначальному состоянию после прекращения внешнего возмущения. Математически это описывается однородным дифференциальным уравнением замкнутой АСР:

$$5 \cdot \frac{d'''y}{dt^3} + 9 \cdot \frac{d''y}{dt^2} + 7 \cdot \frac{d\ \ y}{dt} + 6 \cdot y = 0.$$

2. Составляем определитель Гурвица согласно (1.15):

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляем главные миноры определителя Гурвица:

$$\Delta_1 = 9 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 33 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \Delta_2 = 198 > 0.$$

4. Система автоматического управления устойчивая, поскольку коэффициенты дифференциального уравнения положительны и определители, составленные как главные миноры матрицы Гурвица, положительны.

5. Определим устойчивость системы с помощью критерия Льенара-Шипара. Система устойчивая, поскольку коэффициенты дифференциального уравнения положительны, и определители с нечетными индексами, составленные как главные миноры матрицы Гурвица, тоже положительны.

Пример 8

Исследовать на экстремум функцию $f(x_1,x_2)=3\cdot x_1^3-x_1+x_2^3-3\cdot x_2^2-1$.

Решение

1. Находим компоненты вектор-градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=9\cdot x_1^2-1; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=3\cdot x_2^2-6\cdot x_2.$$

2. Приравниваем их к нулю:

$$9\cdot x_1^2-1=0; \qquad 3\cdot x_2^2-6\cdot x_2=0.$$

3. Решаем первое уравнение:

$$9\cdot x_1^2-1=0; \qquad x_{1,1}=\frac{1}{3}; \quad x_{1,2}=-\frac{1}{3}.$$

4. Решаем второе уравнение:

$$3\cdot x_2^2-6\cdot x_2=3\cdot x_2(x_2-2)=0; \quad x_{2,1}=0; \quad x_{2,2}=2.$$

5. Записываем точки стационарности, в которых возможен экстремум функции:

$$1)\quad x_1=\frac{1}{3}, \qquad x_2=0; \qquad 2)\quad x_1=\frac{1}{3}, \qquad x_2=2;$$

$$3)\quad x_1=-\frac{1}{3}, \qquad x_2=0; \qquad 4)\quad x_1=-\frac{1}{3}, \qquad x_2=2;$$

6. Составляем матрицу Гесса и находим ее элементы:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\cdot\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\cdot\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\cdot\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\cdot\partial x_2} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\cdot\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(9\cdot x_1^2-1)=18\cdot x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(3 \cdot x_2^2 - 6 \cdot x_2) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(9 \cdot x_1^2 - 1) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(3 \cdot x_2^2 - 6 \cdot x_2) = 6 \cdot x_2 - 6;$$

7. Для первой точки стационарности рассчитываем матрицу Гесса:

$$\begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 \cdot 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Главные миноры: $\Delta_1 = 6 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -36 < 0.$

Таким образом, матрица Гесса не является ни положительно, ни отрицательно определенной, т. е. первая точка не имеет экстремума.

8. Во второй точке матрица Гесса положительно определена (минимум):

$$\begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 \cdot 2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = 6 > 0; \Delta_2 = 36 > 0.$$

В третьей точке матрица Гесса отрицательно определена (максимум):

$$\begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 6 \cdot 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = -6 < 0; \quad \Delta_2 = 36 > 0.$$

9. В четвертой точке матрица Гесса не является ни положительно ни отрицательно определенной, следовательно, экстремума нет:

$$\begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 6 \cdot 2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = -6 < 0; \quad \Delta_2 = -36 > 0.$$

Задания практического занятия № 4

1. Вычислить ранг матрицы: приведением ее к каноническому виду, к ступенчатому виду, методом окаймления (по заданию преподавателя).
2. найти значения λ, при которых вектор-столбцы матрицы А линейно зависимы.
3. Произвести обращение матрицы: по формуле, методом неопределенных коэффициентов, методом исключения, методом разложения матрицы на две треугольные (по заданию преподавателя).
4. По дифференциальному уравнению системы $a_3 \cdot y'''(t) + a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0$ определить устойчивость АСР с помощью критериев Гурвица и Льенара-Шипара.
5. Исследовать на экстремум функцию.

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
1.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$	5	8	9	1	$f(x,y) = 1 - 5x^3 - 2x + y^2 + 4y$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
2.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$	3	1	4	9	$\lambda^2 + 4 = 0$
3.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 6 & 49 & 48 \\ 5 & 35{,}5 & 45 \end{bmatrix}$	1	2	3	6	$f(x,y) =$ $= 5x - 5x^3 +$ $+3y^2 + 4y - 1$
4.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 & -49 & -56 \\ -1 & 0 & -8 \\ 6 & 45 & 53 \end{bmatrix}$	4	8	1	2	$f(x,y) =$ $= 6x^3 - 4x +$ $+5y^2 + 4y$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
5.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{matrix} -7 & -49 & -5 \\ 1 & 15 & 8 \\ 6 & 45 & 57 \end{matrix}\right.$	5	6	8	9	$f(x,y)=$ $=8-9x^3-$ $-4x+2y^2+4y$
6.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & 15 & 16 \\ 5 & 38 & 46 \end{bmatrix}$	1	9	8	7	$f(x,y)=$ $=1-5x^3-$ $-2x+y^2+4y$
7.	$\left[\begin{matrix} 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -4 & 5 \end{matrix}\right.$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 24 \\ 2 & 5 & 26 \end{bmatrix}$	2	1	3	5	$f(x,y)=$ $=7-4x^3-$ $-3x+2y^2+5y$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
8.	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 34 \\ 4 & 11 & 56 \end{bmatrix}$	4	6	3	1	$f(x,y) =$ $= 7x^3 - 3x +$ $+2y^2 + 4y - 6$
9.	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 6 & 22 & 44 \\ 8 & 31 & 72 \end{bmatrix}$	2	3	5	8	$f(x,y) =$ $= 3x^3 - 6x +$ $+2y^2 + 4y - 6$
10.	$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 21 & 42 \\ 4 & 19 & 63 \end{bmatrix}$	9	8	7	6	$f(x,y) =$ $= 4x^3 - 2x +$ $+y^2 + 4y + 8$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
11.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 24 \\ 1 & 6 & 31 \\ 4 & 19 & 84 \end{bmatrix}$	8	1	5	9	$f(x,y) =$ $= 5x^3 - 4x +$ $+ y^2 + 4y + 6$
12.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 24 \\ 1 & 4 & 22 \\ 4 & 14 & 75 \end{bmatrix}$	7	4	2	1	$f(x,y) =$ $= 8x^3 - 8x +$ $+ 2 \cdot y^2 + 5 \cdot y + 9$
13.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 28 \\ 4 & 18 & 71 \end{bmatrix}$	6	5	4	3	$f(x,y) =$ $= x^3 - 7x +$ $+ 3 \cdot y^2 + y + 5$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варирианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
14.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & 34 \\ 8 & 14 & 65 \end{bmatrix}$	5	2	3	4	$f(x,y) =$ $= x^3 - x +$ $+6 \cdot y^2 + 12y + 4$
15.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 12 & -20 \end{bmatrix}$	4	8	1	2	$f(x,y) =$ $= -y^3 - 2y +$ $+6 \cdot x^2 + 12x + 8$
16.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 & 24 & -16 \\ 1 & -5 & -1 \\ 5 & -24 & -12 \end{bmatrix}$	3	4	5	6	$f(x,y) =$ $= 4y^3 - y +$ $+3x^2 + 18x + 5$

Варианты практического занятия № 4 (продолжение)

№ варианта	Задания							
	1	2	3	4				5
				a_3	a_3	a_3	a_3	
17.	$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -1 & -7 \\ 7 & 6 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -24 & -16 \\ 1 & -7 & 1 \\ 4 & -18 & -49 \end{bmatrix}$	2	1	3	5	$f(x,y) =$ $= y^3 - 3y +$ $+x^2 + 16x + 9$
18.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 & 16 & 32 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -55 \end{bmatrix}$	1	3	4	6	$f(x,y) =$ $= 2y^3 - 6y +$ $+2x^2 + 20x + 1$
19.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 24 \\ 1 & 4 & 22 \\ 4 & 14 & 75 \end{bmatrix}$	6	8	3	1	$f(x,y) =$ $= 2y^3 - 6y +$ $+2x^2 + 20x + 1$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ И СИСТЕМ

При изучении систем автоматического управления рассматриваются динамические и статические режимы. При изучении динамических (неустановившихся) режимов математическим аппаратом является аппарат дифференциальных уравнений.

Уравнения, которые кроме неизвестной функции одной или нескольких переменных содержит также производные от этой функции, называются дифференциальными уравнениями. Если неизвестные функции зависят от одного переменного, дифференциальные уравнения называются обыкновенными, в противном случае – уравнениями в частных производных.

При построении математической модели возможно разбиение системы на отдельные звенья и их математическое описание. Совокупность уравнений отдельных звеньев и уравнений связи между ними образует систему n уравнений, описывающую систему управления в целом.

Теория матриц оказалась эффективным средством исследования и решения систем дифференциальных уравнений. Среди них наиболее простыми являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система таких уравнений, в которые неизвестные функции и их производные входят линейно.

В дальнейшем мы будем рассматривать системы уравнений первого порядка и ограничимся случаем, когда эти системы разрешены относительно производных. Такие системы называют нормальными. Линейная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x_1(t)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}_{11}\cdot x_1(t) + a_{12}\cdot x_2(t) + \ldots + a_{1n}\cdot x_n(t) + g_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}\,x_n(t)}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}_{n1}\cdot x_1(t) + a_{n2}\cdot x_2(t) + \ldots + a_{nn}\cdot x_n + g_n(t) \end{cases}, \qquad (2.1)$$

где $x_1(t), x_2(t),\ldots x_n(t)$ – неизвестные функции от независимой переменной t, которые надо определить; $a_{11}, a_{12,\ldots} a_{nn}$ – коэффициенты системы; $g_1(t), g_2(t),\ldots, g_n(t)$ – функции, которые определены и непрерывны на некотором интервале $(a < t < b)$; n – порядок системы.

Если для любого $t \in (a,b)$ функции $g_i\ (t)=0\ \ (i=1, 2,....n\ )$, то система дифференциальных уравнений называется однородной; в противном случае – неоднородной.

Совокупность функций:

$$x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t), \tag{2.2}$$

определенных и дифференцируемых на интервале ($a,\ b$), называется решением системы (2.1) на интервале ($a\ ,b$), если они обращают уравнения (2.1) в тождества, справедливые при всех значениях t из интервала (a,b). Графической интерпретацией полученного решения будет поверхность в (n+1) -мерном пространстве $(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$, называемая интегральной.

Задача нахождения решения $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ при $t=t_0$ называется задачей Коши.

Решение (2.2), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется частным решением.

Система (2.1) может быть записана в векторной форме:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + G(t), \tag{2.3}$$

где $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{21} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$;, $G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$,

где $x(t)$ – вектор неизвестных функций; A – матрица коэффициентов системы; $G(t)$ – вектор правой части системы дифференциальных уравнений.

2.1. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое занятие № 5

Основные положения

В матричной форме однородная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t). \tag{2.4}$$

Согласно методу Эйлера общее решение $X(t)$ системы (2.4) в матричной форме записывается:

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X_0, \tag{2.5}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы; X_0 –вектор начальных условий.

Фундаментальную матрицу системы можно получить из следующего выражения:

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1}, \tag{2.6}$$

где H – модальная матрица системы; $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица собственных значений матрицы А.

Порядок решения системы дифференциальных уравнений

1. Записываем матрицу коэффициентов системы дифференциальных уравнений:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{21} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Составляем характеристическое уравнение системы $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$, где E – единичная матрица.
3. Находим характеристические числа системы (2.4) (корни характеристического уравнения). Различают три вида корней характеристического уравнения.

Все корни λ_i различны и вещественные.

Вектор-столбцы $h^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ модальной матрицы системы H находятся из решения однородной системы алгебраических уравнений:

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot h^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Или в развернутом виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i) \cdot h_{i1} + a_{12} \cdot h_{i2} + \ldots + a_{1n} \cdot h_{in} = 0 \\ a_{21} \cdot h_{i1} + (a_{22} - \lambda_i) \cdot h_{i2} + \ldots + a_{2n} \cdot h_{in} = 0 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1} \cdot h_{i1} + a_{n2} \cdot h_{i2} + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i) \cdot h_{in} = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Другим более простым вариантом нахождения вектор-столбцов модальной матрицы является взятие в качестве компонент вектора $h^{(i)}$ алгебраических дополнений элементов первой строки определителя $|A - \lambda \cdot E|$ при соответствующем численном значении λ_i.

Среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни.

Выделяют два случая:

а) если для корня λ_k кратности $к$ имеются m линейно независимых собственных векторов $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(m)}$, причем $m=k$, то этому корню λ_k соответствует решение вида:

$$x(t) = c_1 \cdot h^{(1)} e^{\lambda_k t} + c_2 \cdot h^{(2)} e^{\lambda_k t} + ... + c_m \cdot h^{(m)} e^{\lambda_k t}, \qquad (2.8)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

б) если для корня λ_k кратности k имеется m линейно независимых собственных векторов, причем $m<k$, то решение следует искать в виде многочлена степени k-m, умноженного на $e^{\lambda_k t}$:

$$x_1(t) = P^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k \cdot t}; \; x_2(t) = Q^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k \cdot t}; ...; x_m(t) = S^{(m-k)}(t) \cdot e^{\lambda_k} \qquad (2.9)$$

где $P^{(m-k)}(t), Q^{(m-k)}(t), \ldots, S^{(m-k)}(t)$ – алгебраические полиномы с неизвестными коэффициентами; λ_k – кратный корень.

Для нахождения неизвестных коэффициентов полиномов $P^{(m-k)}(t), Q^{(m-k)}(t), \ldots, S^{(m-k)}(t)$, следует выполнить подстановку выражений (2.9) в исходную систему (2.4).

Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов. Причем количество коэффициентов, равное кратности корня k, являются произвольными, а остальные коэффициенты выражаются через них.

Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни. Для получения решения воспользуемся следующими положениями.

Если коэффициенты системы (2.4) вещественные, то решение выражается только через вещественные функции. Вещественная и мнимая часть комплексного решения, соответствующая корню $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$, являются линейно-независимыми решениями.

Для корня $\lambda = \alpha + i\beta$ частное решение системы имеет вид:

$$x_1(t) = h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}; \quad x_2(t) = h_2 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}; \ldots; \quad x_n(t) = h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Пусть:

$$x_{11}(t) = \mathrm{Re}\left[h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right], \qquad x_{21}(t) = \mathrm{Im}\left[h_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right],$$

. . . .

$$x_{1n}(t) = \mathrm{Re}\left[h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right], \qquad x_{2n}(t) = \mathrm{Re}\left[h_n \cdot e^{(\alpha+i\beta)t}\right].$$

Тогда решение за счет комплексных корней выразится через два найденных линейно-независимых решения:

$$x_1(t) = c_1 \cdot x_{11} + c_2 \cdot x_{21}; \qquad x_2(t) = c_1 \cdot x_{21} + c_2 \cdot x_{22}; \ldots; \tag{2.10}$$

$$x_n(t) = c_1 \cdot x_{1n} + c_2 \cdot x_{2n}.$$

Решения, соответствующие корню $\lambda = \alpha - i\beta$, будут линейно зависимыми, поэтому учитывать их не нужно.

Таким образом, определив для каждого корня характеристического уравнения λ_i соответствующие решения, как указано в пунктах1-3, и сложив их, получим общее решение системы (2.4).

Пример 1

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 8x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 9x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 4x_1 - 6x_2 - x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix}$.

Решение

Система однородная.

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 5 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу (А- λЕ):

$$(A-\lambda\cdot E)=\begin{bmatrix}4-\lambda & -8 & 5\\ 5 & -9-\lambda & 1\\ 4 & -6 & -1-\lambda\end{bmatrix}.$$

3. Составляем характеристическое уравнение *det* |*A-λE* |=0:

$$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0\,.$$

4. Находим корни характеристического уравнения:
$\lambda_1=-1;\quad \lambda_1=-2;\quad \lambda_1=-3$ (корни вещественные, разные).

5. Собственные векторы $h_i\quad (i=1,2,3)$ находим в виде алгебраических дополнений элементов первой строки определителя $\det(A-\lambda\cdot E)$:

$$h^{(i)}=k_i\cdot\begin{bmatrix}\Delta_{1,1}\\ \Delta_{1,2}\\ \Delta_{1,3}\end{bmatrix}=k_i\cdot\begin{bmatrix}\lambda^2+10\cdot\lambda+15\\ 5\cdot\lambda+9\\ 4\cdot\lambda+6\end{bmatrix}.$$

6. В последнее выражение производим подстановку численных значения λ_i:

$$\lambda_1=-1:\qquad h^{(1)}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_1\cdot\begin{bmatrix}+6\\ 4\\ 2\end{bmatrix};$$

$$\lambda_2=-2:\qquad h^{(2)}=k_2\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_2\cdot\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -2\end{bmatrix};$$

$$\lambda_3=-3:\qquad h^{(3)}=k_3\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1^2+10\cdot\lambda_1+15\\ 5\cdot\lambda_1+9\\ 4\cdot\lambda_1+6\end{bmatrix}=k_3\cdot\begin{bmatrix}-6\\ -6\\ -6\end{bmatrix},$$

где k_1,k_2,k_3 – произвольные коэффициенты, не равные нулю.

7. Принимаем k_i таким образом, чтобы упростить столбцы модальной матрицы: $k_1 = 0,5;\quad k_2 = -1;\quad k_3 = -\frac{1}{6}$.

8. С учетом этого модальная матрица запишется:

$$H = \left[h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Произведем расчет обратной матрицы H^{-1}:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Рассчитываем элементы фундаментальной матрицы:

$$\Phi(t) = H \cdot \varphi(t) \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{(-1)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(-2)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-3)t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -3 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \\ 2 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \\ e^{-t} + 2e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t} & -e^{-t} - 4e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t} & 2e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t} \end{bmatrix}.$$

11. Получаем решение данной системы согласно выражению $X(t) = \Phi(t) \cdot X_0$:

$$x_1(t) = (3 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{01} + (-3 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{02} + \\ + (e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{03};$$

$$x_2(t) = (2 \cdot e^{-t} + e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{01} + (-2 \cdot e^{-t} - 2e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{02} + \\ + (e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{03};$$

$$x_3(t) = (e^{-t} + 2e^{-2 \cdot t} - 3e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{01} + (-e^{-t} - 4e^{-2 \cdot t} + 5e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{02} + \\ + (2e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}) \cdot x_{03},$$

где x_{01}, x_{02}, x_{03} – элементы вектора начальных условий.

Пример 2

Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 - x_2 - 6x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ x_{0,3} \end{bmatrix}$.

Решение

Система однородная.

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -1 & -6 \\ -8 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу $(A - \lambda E)$:

$$(A - \lambda \cdot E) = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{bmatrix}.$$

5. Составляем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0\,.$$

7. Находим корни характеристического уравнения:

$\lambda_1=2$; $\lambda_2=\lambda_3=1$; (корни вещественные: два из них кратные).

8. Для корня $\lambda_1=2$ найдем частное решение вида:

$$x_1(t)=h^{(1)}{}_1\cdot e^{2t};\quad x_2(t)=h^{(1)}{}_2\cdot e^{2t}\quad x_3(t)=h^{(1)}{}_3\cdot e^{2t}\,.$$

Для этого найдем собственный вектор $h^{(1)}$. Это можно сделать двумя способами:
а) решить систему однородных алгебраических уравнений (2.7), подставляя значение корня $\lambda_1=2$:

$$\begin{cases}-6\cdot h_{11}+2\cdot h_{12}+5\cdot h_{13}=0\\ 6\cdot h_{11}-3\cdot h_{12}-6\cdot h_{13}=0\\ -8\cdot h_{11}+3\cdot h_{12}+7\cdot h_{13}=0\end{cases};$$

б) вычислением алгебраических дополнений элементов первой строки определителя *det* |*A-λE* | с подстановкой значения корня $\lambda_1=2$:

$$h^{(1)}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{13}\end{bmatrix}=k_1\cdot\begin{bmatrix}\lambda^2-8\cdot\lambda+9\\ 6\cdot\lambda-6\\ 10-8\lambda\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-3\\ 6\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}.$$

Тогда частное решение для значения корня $\lambda_1=2$ запишется:

$$x_1^{\lambda=2}(t)=1\cdot e^{2t};\quad x_2^{\lambda=2}(t)=-2\cdot e^{2t};\quad x_3^{\lambda=2}(t)=2\cdot e^{2t}.\qquad(2.11)$$

9. Найдем частное решение для корня λ=1 (кратности 2):

1) определим число линейно независимых собственных векторов. При подстановке значения корня λ=1 в выражение *(A-λE)* получим матрицу:

$$(A-\lambda\cdot E)=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ее порядок n равен 3 , ранг r= 2, найденный известными методами. Число линейно независимых собственных векторов равно $m=n-r=1$. Корень λ=1 имеет кратность k=2.

Так как $m<k$, то решение следует искать в виде произведения многочлена степени k-m=1 на $e^{1\cdot t}$:

$$x_1(t)=P^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(a_1+a_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t};\quad x_2(t)=Q^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(b_1+b_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t};$$

$$x_3(t)=S^{(1)}(t)\cdot e^{1\cdot t}=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^{1\cdot t}.$$

Для нахождения коэффициентов a_i, b_i, c_i (i=1,2) делаем подстановку полученных выражений в исходную систему (2.4).

Сокращая на $e^{1\cdot t}$ правую и левую часть уравнений, имеем:

$$\begin{cases} a_2\cdot t+a_1+a_2=(-4a_2+2b_2+5c_2)\cdot t-4a_1+2b_1+5c_1 \\ b_2\cdot t+b_1+b_2=(6a_2-b_2-6c_2)\cdot t+6a_1-b_1-6c_1 \\ c_2\cdot t+c_1+c_2=(-8a_2+3b_2+9c_2)\cdot t-8a_1+3b_1+9c_1 \end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем систему уравнений:

Так как кратность корня λ=1 равна 2, будем считать известными два коэффициента c_1 и c_2 . Остальные неизвестные коэффициенты выразим через них. Решая систему, находим: $a_2=c_2$; $a_1=c_1+c_2$; $b_2=0$; $b_1=3\cdot c_2$.

$$\begin{cases} -5\cdot a_2+2\cdot b_2+5\cdot c_2=0, & (t^1) \\ -5\cdot a_1+2\cdot b_1+5\cdot c_1=a_2, & (t^0) \\ 6\cdot a_2-2\cdot b_2-6\cdot c_2=0, & (t^1) \\ 6\cdot a_1-2\cdot b_1-6\cdot c_1=b_2, & (t^0) \\ -8\cdot a_2+3\cdot b_2+8\cdot c_2=0, & (t^1) \\ -8\cdot a_1+3\cdot b_1+8\cdot c_1=c_2. & (t^0) \end{cases}$$

Частное решение для кратного корня λ=1 принимает вид:

$$x_1^{\lambda=1}(t)=(c_1+c_2+c_2\cdot t)\cdot e^t;\ x_2^{\lambda=1}(t)=3\cdot c_2\cdot e^t;$$
$$x_3^{\lambda=1}(t)=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^t. \tag{2.12}$$

Общим решением исходной системы будет сумма решений (2.11), умноженного на c_3, и (2.12):

$$x_1(t)=x_1^{\lambda=1}(t)+x_1^{\lambda=2}(t)=(c_1+c_2+c_3\cdot t)\cdot e^t+c_3\cdot e^{2t};$$
$$x_2(t)=x_2^{\lambda=1}(t)+x_2^{\lambda=2}(t)=3\cdot c_2\cdot e^t-2\cdot c_3\cdot e^{2t};$$
$$x_3(t)=x_3^{\lambda=1}(t)+x_3^{\lambda=2}(t)=(c_1+c_2\cdot t)\cdot e^t+2\cdot c_3\cdot e^{2t},$$

где c_1, c_2, c_3, – постоянные интегрирования, находящиеся из начальных условий.

Пример 3

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5\cdot x_1-x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+5\cdot x_2 \end{cases}$$

с начальными условиями $X_0=\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$.

Решение

1. Составляем матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Составляем лямбда-матрицу (А- λЕ):

$$A = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

3. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 26 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = 5 \pm i \quad \text{(корни комплексно сопряженные).}$$

4. Для корня $\lambda = 5 + i$ найдем собственный вектор $h^{(1)}$. Для этой цели делаем подстановку в матрицу $(A - \lambda E)$ значения этого корня и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -i \cdot h_{11} - h_{12} = 0 \\ h_{11} - i \cdot h_{12} = 0 \end{cases}.$$

Эти два уравнения линейно зависимы. Поэтому для нахождения h_{11} и h_{12} можно воспользоваться любым уравнением системы. Пусть $h_{11} = 1$. Тогда из первого уравнения $h_{12} = -i$.

5. Частное решение запишется следующим образом (последние преобразования по формуле Эйлера):

$$x_1(t) = 1 \cdot e^{(5+i) \cdot t} = h_1 \cdot e^{(5+i)t} = e^{5t} \cdot e^{it} = e^{5t} \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t));$$

$$x_2(t) = h_2 \cdot e^{(5+i)t} = -i \cdot e^{(5+i) \cdot t} = -i \cdot e^{5t} \cdot e^{it} = e^{5t} \cdot (\sin(t) - i \cdot \cos(t)).$$

Так как данная система имеет вещественные коэффициенты, то решение, соответствующее корню $\lambda = 5 - i$, можно не искать – оно будет комплексно сопряженным с найденным решением.

6. Записываем решение в вещественной форме. Для этой цели выделяем в комплексном решении x_1 и x_2 два вещественных линейно-независимых решения, отделяя в них вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} x_{11} = \mathrm{Re}(x_1) = e^{5t} \cdot \cos(t) \\ x_{12} = \mathrm{Re}(x_2) = e^{5t} \cdot \sin(t) \end{cases}$$ (первое частное решение);

$$\begin{cases} x_{21} = \mathrm{Im}(x_1) = e^{5t} \cdot \sin(t) \\ x_{22} = Im(x_2) = -e^{5t} \cdot \cos(t) \end{cases}$$ (второе частное решение).

7. Общее решение выражается через два найденных линейно-независимых решения (c_1 и c_2 определяются вектором начальных условий):

$$x_1 = c_1 \cdot x_{11} + c_2 \cdot x_{12} = e^{5t} \cdot (c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t));$$
$$x_2(t) = c_1 \cdot x_{12} + c_2 \cdot x_{22} = e^{5t} \cdot (c_1 \cdot \sin(t) - c_2 \cdot \cos(t)).$$

Задания практического занятия № 5

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$.

Требуется:
решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$, $x_2(t)$ $x_3(t)$.

Варианты практического занятия № 5

Варианты задания	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	x_{10}	x_{20}	x_{30}
1.	-4	-3	-2	0	0	1	6	5	2	1	1	2
2.	8	2	-1	0	1	-1	-6	-4	1	1	2	0
3.	-2	2	-1	0	-5	-1	-6	-4	1	1	2	0

Варианты практического занятия № 5 (продолжение)

Варианты задания	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	x_{10}	x_{20}	x_{30}
4.	-2	2	-1	6	0	-1	2	-4	1	1	2	0
5.	-4	-3	-2	0	0	1	6	5	2	1	0	2
6.	9	2	1	-6	5	1	7	-4	1	1	1	2
7.	-1	0	4	3	2	1	1	1	6	1	0	2
8.	1	2	-1	8	1	-1	1	-4	1	1	0	0
9.	2	1	-1	1	-1	-1	-1	1	2	1	0	2
10.	-8	-2	1	0	-1	1	6	4	-1	0	0	2
11.	-4	-3	-2	0	0	1	6	5	2	1	0	2
12.	-2	2	1	0	-5	-1	-6	-4	1	1	0	1
13.	-2	2	-1	6	0	-1	2	-4	1	2	1	2
14.	-1	0	4	3	2	1	1	1	6	1	1	2
15.	-8	-2	1	0	-1	1	6	4	-1	1	1	2
16.	2	1	-1	1	-1	-1	-1	1	2	2	1	2
17.	1	2	-1	8	1	-1	1	-4	1	1	1	2
18.	9	2	1	-6	5	1	7	-4	1	1	2	1
19.	-2	2	-1	6	0	-1	2	-4	1	1	2	1
20.	8	2	-1	0	1	-1	-6	-4	1	1	2	1

2.2. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практическое занятие № 6

Основные положения

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + G(t). \tag{2.13}$$

Решение системы (2.13) состоит из суммы двух решений: общего решения однородной системы уравнений (см. раздел 2.1) и частного решения. Рассмотрим методы нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Этим методом можно построить общее решение неоднородной системы (2.13) , исходя из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Согласно методу Лагранжа частное решение системы (2.13) получается в виде:

$$X(t) = e^{A\cdot t}\cdot X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot G(\tau)\cdot d\tau. \tag{2.14}$$

Полученный результат рассматривается как сумма решений соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений и частного решения неоднородной системы.

Метод неопределенных коэффициентов

Частное решение неоднородной линейной системы возможно получить этим методом, если функция $G(t)$ представлена в виде произведения экспоненциальной функции на алгебраический полином (или на гармоническую функцию).

1. Элементы вектора $G(t)$ можно представить в виде произведения полинома степени m на экспоненциальную функцию:

$$g_k(t) = P_k^{m_k}\cdot e^{v\cdot t},\quad (k=1,2,\ldots,n),$$

где $P_k^{m_k}(t) = a_{0k} + a_{1k}\cdot t + \cdots + a_{mk}\cdot t^{m_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ полином степени m.

Частное решение в этом случае отыскивается в виде:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = Q_k^{z+s}(t)\cdot e^{v\cdot t}\quad (k=1,2,\ldots,n), \tag{2.15}$$

где $Q_k^{z+s}(t)$ – полиномы степени $(m+s)$ с неизвестными коэффициентами; $z = \max(m_k)$ $k = 1,2,n$ – максимальная степень полинома $g_k(t)$; v – экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$; s –коэффициент.

Величина s находится из следующих условий:

а) $s=0$, если v не является корнем характеристического уравнения однородной системы;

б) $s=k$ (k – кратность корня), если v является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения (7) в систему (6) и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

2 . *Элементы вектора $G(t)$ представлены в виде произведения полиномов степени m_k, n_k на гармонические функции:*

$$g_k(t) = e^{\alpha t}\left[R_k^{m_k}(t)\cdot\cos(\beta t) + W_k^{n_k}(t)\cdot\sin(\beta t)\right]. \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Частное решение запишется в этом случае:

$$x_k^{\text{частн}}(t) = e^{\alpha t}\left[P_k^{z+s}(t)\cdot\cos(\beta t) + Q_k^{z+s}(t)\cdot\sin(\beta t)\right], \tag{2.16}$$

где P_k^{z+s}, Q_k^{z+s} – полиномы степени ($z+s$) с неизвестными коэффициентами; $z = \max(m_k, n_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, – максимальная степень полинома $g_k(t)$; $(\alpha + i\beta)$ – экспоненциальная степень полинома $g_k(t)$; s – коэффициент.

Величина s находится из следующих условий:

а) $s=0$, если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения однородной системы;

б) $s=k$ (k – кратность корня), если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения однородной системы.

Неизвестные коэффициенты полиномов определяются путем подстановки выражения (2.15) или (2.16) в систему дифференциальных уравнения (2.13) и приравниванием коэффициентов при подобных членах уравнений.

Пример 1

Найти общее решение системы методом Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2\cdot X_2 + 3\cdot t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2\cdot X_1 + 4 \end{cases}$$

с нач. усл.: $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$.

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:
а) матрица коэффициентов

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 2 \cdot i; \qquad \lambda_2 = -2 \cdot i \quad \text{(корни мнимые)};$$

д) модальная матрица:

$$H = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

е) фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} i(e^{(2 \cdot i) \cdot t} + e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) & -(e^{(2 \cdot i) \cdot t} - e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) \\ (e^{(2 \cdot i) \cdot t} - e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) & i(e^{(2 \cdot i) \cdot t} + e^{(-2 \cdot i) \cdot t}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix};$$

ж) общее решение однородной системы:

$$\mathrm{X}_{общ}(t)=\begin{bmatrix} x_{1,0}\cdot\cos 2t - x_{2,0}\sin 2t \\ x_{1,0}\cdot\sin 2t + x_{2,0}\cdot\cos 2t \end{bmatrix}.$$

2. Находим частное решение системы по формуле (2.14), преобразовывая ее следующим образом:

$$X(t)=\Phi(t)\cdot\int_0^t \varPhi^{-1}(\tau)\cdot G(\tau)d\tau.$$

Для этого производим следующие операции:

а) обращаем матрицу $\varPhi$(t):

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix};$$

б) перемножаем матрицы $\varPhi^{-1}$(t) и G(t):

$$\Phi^{-1}(\tau)\cdot G(\tau)=\begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3\tau \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\tau\cos 2\tau+4\cdot\sin 2\tau \\ 3\tau\cdot\sin 2\tau+4\cdot\cos 2\tau \end{bmatrix};$$

в) берем интеграл от полученного вектор-столбца (по частям):

$$\int_0^t \Phi(\tau)\cdot G(\tau)d\tau=\int_0^t \begin{bmatrix} 3\tau\cdot\cos 2\tau+4\cdot\sin 2\tau \\ 3\tau\cdot\sin 2\tau+4\cdot\cos 2\tau \end{bmatrix}\cdot d\tau=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot t\cdot\cos 2t-\frac{5}{4}\cos 2t \\ \frac{3}{2}\cdot\cos 2t+\frac{5}{4}\cdot\sin 2t \end{bmatrix};$$

г) умножаем фундаментальную матрицу на полученный интегрированием вектор и вычисляем частное решение системы:

$$x_{\text{част}}(t)=e^{At}\cdot\int_0^t e^{-A\tau}\cdot g(\tau)\cdot d\tau=\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{5}{4}\cos 2t+\frac{3}{2}\sin 2t+\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}\cdot\cos 2t \end{bmatrix}$$

После перемножения матриц имеем:

$$x_{\text{частн}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}\cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t \end{bmatrix};$$

с) общее решение системы записывается как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения:

$$\text{X}(t) = \text{X}_{\textit{общ}}(t) + \text{X}_{\textit{частн}}(t) = \begin{bmatrix} x_{1,0} \cdot \cos 2t - x_{2,0} \cdot \sin 2t \\ x_{1,0} \cdot \sin 2t + x_{2,0} \cdot \cos 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cdot \cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \cdot \sin 2t + \frac{3}{2} \cdot t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x_{1,0} + \frac{5}{4}) \cdot \cos 2t - x_{2,0} \cdot \sin 2t - \frac{5}{4} \\ (x_{1,0} + \frac{5}{4}) \cdot \sin 2t + x_{2,0} \cdot \cos 2t + \frac{3}{2} \cdot t \end{bmatrix}.$$

Пример 2

Найти общее решение системы методом неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

с начальными условиями $\text{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$.

Решение

1. Находим общее решение однородной системы уравнений:

а) матрица коэффициентов:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

б) характеристическая матрица:

$$\left|\mathrm{A}-\lambda E\right|=\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & -1-\lambda\end{bmatrix};$$

в) характеристическое уравнение:

$$\Delta=(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)+2=\lambda^2-1+2=\lambda^2+1=0;$$

г) корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1=i;\quad \lambda_2=-i, \qquad \text{(корни мнимые)};$$

д) для нахождения решения однородной системы находим собственный вектор, соответствующий корню $\lambda_1=i$. Для этой цели составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}(1-\lambda)\cdot h_1-2\cdot h_2=0\\ h_1-(1+\lambda)\cdot h_2=0\end{cases};$$

е) поскольку уравнения линейно зависимы, принимаем одну из переменных в виде произвольной константы ($h_1=2$) и находим другую переменную $h_2=1-i$;

ж) собственный вектор равен:

$$h^{(1)}=\begin{bmatrix}2\\ 1-i\end{bmatrix};$$

з) тогда составляющие решения однородной системы имеют вид:

$$x_1(t)=2\cdot e^{i\cdot t};\qquad x_2(t)=(1-i)\cdot e^{i\cdot t};$$

ж) преобразуем экспоненциальные функции по формуле Эйлера, производим разделение вещественной и мнимой части составляющих решения и находим общее решение однородной системы:

$$x_1^{\text{общ}}(t) = 2 \cdot c_1 \cdot \cos t + 2 \cdot c_2 \cdot \sin(t);$$

$$x_2^{\text{общ}}(t) = (c_1 - c_2) \cdot \cos(t) + (c_1 + c_2) \cdot \sin(t),$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

2. Частное решение неоднородной системы найдем по методу неопределенных коэффициентов.

Имеем $g_1(t) = 3;\quad g_2(t) = 1$. Это полиномы степеней $m_1 = m_2 = 0$.

Тогда степень полинома решения $z = m_{\max} = 0$. Коэффициент $v = 0 \neq \lambda_i$, следовательно, s=0. Поэтому частное решение отыскиваем в виде полиномов нулевого порядка:

$$x_1^{(1)} = a;\quad x_2^{(1)} = b.$$

Подставляя $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ в неоднородную исходную систему (2.13), находим коэффициенты частного решения:

$$a=1,\ b=2.$$

3. Решением системы является сумма общего и частного решений:

$$x_1(t) = 2 \cdot C_1 \cdot \cos(t) + 2 \cdot C_2 \cdot \sin(t) + 1;$$

$$x_2(t) = (C_1 - C_2) \cdot \cos(t) + (C_1 + C_2) \cdot \sin(t) + 2.$$

Задание практического занятия № 6

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + g_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + g_2 \end{cases}$$

с начальными условиями $\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$.

Требуется: решить систему уравнений и построить графики зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Варианты практического занятия № 6

Варианты задания	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	g_1	g_2	x_{10}	x_{20}
1.	-3	4	1	0	e^{3t}	$-e^{3t}$	1	2
2.	-5	1	-2	1	e^{3t}	$-e^{3t}$	0	1
3.	6	2	-4	2	sin(t)	-cos(t)	0	2
4.	4	-2	5	2	cos(2t)	- cos(2t)	1	2
5.	-5	-2	-8	2	sin(2t)	- cos(2t)	3	2
6.	2	8	4	2	$(3t)^2$	-(-2t)	4	0
7.	-3	-5	7	-2	e^{-7t}	$-5e^{-7t}$	5	1
8.	9	2	-7	6	sin(5t)	- cos(5t)	3	1
9.	-8	-2	-7	6	e^{6t}	$-e^{6t}$	3	4
10.	-1	3	-5	6	cos(2t)	-2 sin(2t)	3	5
11.	-4	3	1	5	cos(t)	-2 sin(-t)	2	-2
12.	-8	-4	2	-3	$(8t)^2$	-3	-1	0
13.	7	2	-4	8	e^{5t}	$-te^{5t}$	4	-3
14.	3	2	-1	5	2 cos(4t)	-sin(4t)	1	-1
15.	-1	-8	5	4	e^{7t}	$-e^{7t}$	5	2
16.	-8	4	-2	6	cos(3t)	- sin(3t)	1	3
17.	1	2	-2	5	cos(6t)	- sin(6t)	2	1
18.	5	3	2	4	cos(2t)	- sin(2t)	1	1
19.	-3	4	1	0	e^{t}	$-te^{t}$	1	2
20.	-5	1	-2	1	$3e^{-t}$	$-te^{-t}$	0	1

3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Практическое занятие № 7

Основные положения

При рассмотрении физической системы как объекта проектирования, контроля или управления все переменные, характеризующие систему можно разделить на три множества (рис.3.1):

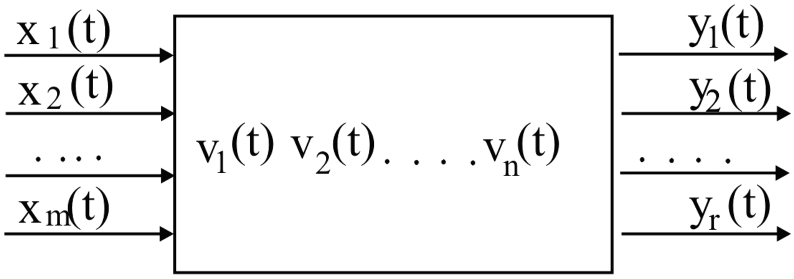

Рис.3.1. Переменные, характеризующие систему

1) входные переменные $x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$, характеризующие внешние воздействия на вход системы;
2) переменные состояния $v_1(t), v_2(t),\ldots, v_n(t)$ – внутренние (промежуточные) переменные, совокупность которых полностью характеризует свойства системы;
3) выходные переменные $y_1(t), y_2(t),\ldots, y_r(t)$, представляющие реакции на внешние воздействия и состояния системы, которые интересны для исследователя.

Сама система в общем виде представляется "черным ящиком" с m входами и r выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора:

– входной (задающий) вектор $X(t) = x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$;

– вектор состояния $V(t) = v_1(t), v_2(t),\ldots, v_n(t)$;

– выходной вектор $Y(t) = y_1(t), y_2(t),\ldots, y_r(t)$.

Векторное представление позволяет рассматривать систему с одним обобщенным входом, переменной состояния и одним обобщенным выходом (рис.3.2).

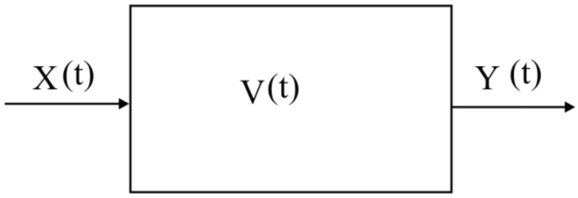

Рис. 3.2. Переменные системы в матричной форме

Непрерывные линейные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать при помощи двух матричных уравнений:

1) уравнением состояния:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \cdot V(t) + B \cdot X(t), \tag{3.1}$$

где: A – матрица системы; $V(t)$ – вектор переменных состояния системы; $B(t)$ – матрица управления;

2) выходным уравнением:

$$Y(t) = C(t) \cdot V(t) + D(t) \cdot X(t) \tag{3.2}$$

где: $C(t)$ – матрица выхода; $D(t)$ – матрица входа;

Если элементы этих матриц зависят от времени, то система называется линейной нестационарной (или параметрической).

Если элементы матриц *A, B, C, D* выражаются постоянными числами, то система называется линейной стационарной.

Дальнейшее рассмотрение понятий управляемости и наблюдаемости проведем на примере линейных стационарных систем.

Понятия управляемости и наблюдаемости систем впервые введены Р. Е. Калманом.

Система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $V(t_0)$ в момент времени $t=t_0$ в любое желаемое состояние $V(t_1)$ за конечный интервал времени $\tau = (t_1 - t_0)$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $X(t)$, где $t \in (t_0, t_1)$.

Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость призывает, чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаемая, если ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система не наблюдаема.

Система называется идентифицируемой, если по измерениям координат состояния можно определить ее матрицу A.

Для определения управляемости и наблюдаемости систем разработаны различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Критерий Гильберта управляемости и наблюдаемости систем

Критерий Гильберта используется для исследования управляемости и наблюдаемости линейной системы, представленной в канонической форме.

Достоинством критерия Гильберта по сравнению с другими методами является более полное отражение физических свойств исследуемой системы. Однако, применимость этого критерия ограничена только системами с различными собственными значениями матрицы коэффициентов.

Критерий требует предварительного приведения уравнений системы к канонической форме. Эта форма удобна тем, что в ней отсутствует взаимосвязь между переменными состояния.

Канонические преобразования заключаются в следующем.

Применим в уравнении состояния (3.1) линейное преобразование к переменной $X^*(t)$:

$$X(t) = H \cdot X^*(t).$$

Матрицей преобразования является модальная матрицы H. Из предыдущего выражения получаем:

$$X^*(t) = H^{-1} \cdot X(t). \tag{3.3}$$

Аналогичным образом преобразуем переменную $V^*(t)$:

$$V(t) = H \cdot V^*(t).$$

Откуда:

$$V^*(t) = H^{-1} \cdot V(t)\,. \qquad (3.4)$$

Преобразованный вектор состояния $V^*(t)$ является линейной комбинацией *n* компонент вектора $V(t)$. С учетом (3.3) и (3.4) выражение (3.1) преобразуется следующим образом:

$$H \cdot \frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = A \cdot H \cdot V^*(\mathrm{t}) + B \cdot X(\mathrm{t})\,. \qquad (3.5)$$

Разделим правую и левую части уравнение (3.6) на матрицу H:

$$\frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot V^*(\mathrm{t}) + H^{-1} \cdot B \cdot X(\mathrm{t})\,.$$

Обозначая через $A^* = H^{-1} \cdot A \cdot H$ и $B^* = H^{-1} \cdot B$, получаем уравнение состояния в канонической форме:

$$\frac{dV^*(\mathrm{t})}{dt} = A^* \cdot V^*(\mathrm{t}) + B^* \cdot X(\mathrm{t}). \qquad (3.6)$$

В новых координатах матрица системы A^* преобразуется к диагональной или жордановой форме. По ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы A.

Аналогичным образом производим каноническое преобразование выходного уравнения. Производя подстановку (3.3) в уравнение (3.2), получаем:

$$Y^*(t) = C^*(t) \cdot V^*(t) + D(t) \cdot X(t) \qquad (3.7)$$

где $C^* = C \cdot H$ – преобразованная матрица входа.

При проведении преобразований надлежит учесть следующие замечания:

1) указанное преобразование возможно только в том случае, когда существует матрица H^{-1} ; собственные значения: λ_1, λ_2,…, λ_n матрицы A различные;

2) ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией других переменных состояния;

3) матрица A и преобразованная матрицы A^* имеют одинаковые собственные значения: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Преобразованное уравнение состояния (3.6) можно записать в виде системы n скалярных уравнений:

$$\frac{dV_i^*}{dt} = \lambda_i \cdot V_i^* + b^*_{(i)} \cdot X_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.8}$$

где λ_i – собственные значения матрицы A; $b_{(i)}$ $-i$ -тая строка матрицы B*.

Как видно из выражения (3.8), система будет управляемой, если все переменные *V*(t)* зависят от входных воздействий. Это означает, что переменные состояния *V*(t)* не содержат свободных (неуправляемых компонентов). Очевидным условием полной управляемости системы является отсутствие нулевой строки в матрице B^*, т. е. все строки $b_{(i)}$ должны быть ненулевыми векторами- строками.

Система полностью наблюдаема по критерию Гильберта, если ни один из столбцов матрицы $C^*(t) = C(t) \cdot H$ не является нулевым. Если по крайней мере один столбец матрицы *C*(t)* нулевой, то система становится не полностью наблюдаемой.

Критерий управляемости и наблюдаемости системы Р. Е. Калмана

Критерий основан на полиномиальном разложении матрицы $e^{A \cdot t}$.

Применимость этого критерия не ограничена системами, с различными собственными значениями матрицы A. Несомненным достоинством этого критерия является отсутствие расчетов собственных значений, собственных векторов, а также отсутствие последующего преобразования уравнений состояния, что может представлять значительный объем вычислений.

Система полностью **управляема**, если n независимых скалярных уравнений удовлетворяют матричному уравнению. Иначе говоря, система полностью управляема, если матрица

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

имеет ранг n, где n – порядок системы.

Для расчета наблюдаемости систем используется выходное уравнение системы. Для полной наблюдаемости системы требуется, чтобы n столбцов матрицы

$$L^T = \left[C^T, \quad A^T \cdot C^T, \quad (A^T)^2 \cdot C^T, \quad ...., \quad (A^T)^{n-1} \cdot C^T \right], \tag{3.10}$$

где индекс T означает операцию транспонирования, были линейно независимы. То есть, матрица L^T имела ранг n, где n – порядок системы.

Пример 1

Определить управляемость системы с заданными параметрами по критерию Гильберта $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $C = 1 \quad 1$.

Решение

1. Производим расчет матрицы $\lambda E - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

2. Для определения собственных значений матрицы A вычислим коэффициенты характеристического многочлена и приравняем его к нулю:

$$\det |\lambda \cdot E - A| = \lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 5 = 0.$$

3. Вычисляем корни характеристического многочлена:

$$\lambda_1 = -1; \qquad \lambda_2 = 5.$$

4. Вычисляем модальную матрицу H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем обратную матрицу H^{-1}:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Делаем проверку правильности диагонализации матрицы A:

$$\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы Λ стоят собственные значения матрицы A. Следовательно, процедура диагонализации выполнена правильно.

7. Рассчитываем матрицу:

$$B^* = H^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Так как на состояние v_1 не влияет входной сигнал управления, система не полностью управляема.

Пример 2

Определить управляемость системы по критерию Калмана, заданной следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Составляем матрицу $M = B, \quad AB$. Для этой цели рассчитываем произведение матриц:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 76 \end{bmatrix}.$$

и записываем соответствующие столбцы матрицы M:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 61 \\ 7 & 76 \end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем ранг матрицы M:

$$rang(M) = 2.$$

Так как ранг равен порядку уравнения n=2 система управляемая.

Пример 3

Определить наблюдаемость системы с заданными параметрами по критерию Гильберта:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad C = 1 \quad 1 \; .$$

Решение

1. Производим расчет матрицы $\lambda E - A$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

2. Для определения собственных значений матрицы A вычислим коэффициенты характеристического многочлена и приравняем его к нулю

$$\det |\lambda \cdot E - A| = \lambda^2 - 7 \cdot \lambda + 22 = 0.$$

3. Вычисляем корни характеристического многочлена:

λ_1= -1; λ_2=5.

4.Вычисляем модальную матрицу *H:*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисляем обратную матрицу H^{-1}:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Делаем проверку правильности диагонализации матрицы *A*:

$$A^{*} = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы A^{*} стоят собственные значения матрицы *A*. Следовательно, процедура диагонализации выполнена правильно.

7. Рассчитываем матрицу $C^{*} = C \cdot H$:

$$C{*} = \;1 \quad 1\; \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \;0 \quad 3\; .$$

Поскольку первый столбец матрицы C^{*} равен нулю, система не полностью наблюдаема.

Пример 4

Определить наблюдаемость системы по критерию Калмана, заданной следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение

1. Транспонируем матрицы C и A:

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Находим произведение матриц:

$$A^T \cdot C^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

3. Составляем матрицу L^T:

$$L^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T \cdot C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}.$$

2. Рассчитываем ранг матрицы L^T:

$$rang\ L^T = 2.$$

Так как он равен порядку системы, она наблюдаема.

Задания практического занятия № 7

Определить управляемость или наблюдаемость системы с заданными параметрами :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}.$$

Варианты заданий практического занятия № 7

№ варианта	a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
1.	2	3	4	5	1	1	1	1	Управляемость по Гильберту
2.	3	7	9	5	2	1	2	1	Наблюдаемость по Гильберту

Варианты заданий практического занятия № 7 (продолжение)

№ варианта	a	b	c	d	e	f	g	h	Критерий расчета
3.	3	8	7	5	2	2	1	1	Управляемость по Калману
4.	3	7	9	1	2	1	2	1	Наблюдаемость по Калману
5.	1	5	4	1	2	1	0	1	Управляемость по Гильберту
6.	3	0	9	5	2	1	0	1	Наблюдаемость по Гильберту
7.	1	0	2	5	0	1	0	1	Управляемость по Калману
8.	3	2	0	1	2	1	2	1	Наблюдаемость по Калману
9.	2	2	0	1	2	1	2	0	Наблюдаемость по Калману
10.	2	3	4	1	0	2	1	1	Управляемость по Гильберту
11.	5	1	4	1	0	2	1	1	Управляемость по Гильберту
12.	3	2	0	1	2	1	2	0	Наблюдаемость по Гильберту
13.	5	1	5	1	0	2	1	1	Наблюдаемость по Калману
14.	1	0	9	1	2	1	1	0	Управляемость по Гильберту
15.	5	0	2	5	0	1	0	1	Наблюдаемость по Гильберту
16.	1	0	9	1	2	1	1	0	Наблюдаемость по Гильберту
17.	5	0	2	5	0	1	0	1	Управляемость по Калману
18.	5	2	4	1	1	0	0	1	Наблюдаемость по Гильберту
19.	5	0	8	5	5	1	8	0	Управляемость по Калману
20.	9	0	2	8	0	1	0	1	Наблюдаемость по Гильберту

Список литературы

1. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е. – Киев: Техника, 1977. – 728 с.
2. Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления. / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов. – В 3-х т. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. –Т.1. – 552 с.
3. Лотош М.М. Основы теории автоматического управления. Математические методы / А.Л. Шустер. – М.: Наука,1992. – 288 с.
4. Гроп Д . Методы идентификации систем. – М.: Мир , 1979. – 302 с.
5. Ротач В. Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами. – М.: Энергоатомиздат,1985. – 366 с.

Марк Давыдович Кац

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Научный редактор,
кандидат технических наук,
доцент В.С. Андык

Редактор

Подписано к печати ________________. Формат 60x84/16
Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл. печ. л.____. Уч.-изд.л._______ .
Заказ . Тираж 150 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета
Сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANGE по стандарту
ISO 9001:2000
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30