

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

***ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ:
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ***

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию
в области информатики и радиоэлектроники в качестве
учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования
по специальностям, закрепленным за УМО*

Минск БГУИР 2013

УДК 514.74(076)
ББК 22.151.5
П75

Авторы:

С. Е. Карпович, И. В. Дайняк, В. В. Жарский,
Е. А. Литвинов, С. М. Аваков, В. П. Огер

Рецензенты:

кафедра высшей математики №1 Белорусского национального
технического университета (протокол №4 от 26 ноября 2012 г.);

директор Республиканского института инновационных технологий
Белорусского национального технического университета,
профессор, доктор технических наук В. Л. Соломахо

Прикладные задачи по высшей математике: Аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие / С. Е. Карпович [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013. – 64 с. : ил.
ISBN 978-985-488-959-7.

Пособие посвящено прикладным задачам по теме «Аналитическая геометрия». В пособии рассмотрены задачи по алгоритмизации исполнительных механизмов параллельной кинематики мехатронных систем методами аналитической геометрии в трехмерном пространстве. Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов технических специальностей.

УДК 514.74(076)
ББК 22.151.5

ISBN 978-985-488-959-7

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ СЕГМЕНТНОГО КОЛЬЦЕВОГО ПРИВОДА И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ	5
Задача 1.1 Прямая задача кинематики.....	9
Задача 1.2 Обратная задача кинематики	18
2 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ШЕСТИ ПОВОРОТНЫХ ПРИВОДОВ И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ ...	26
Задача 2.1 Прямая задача кинематики.....	29
Задача 2.2 Обратная задача кинематики	37
3 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТРЕХ ПЛАНАРНЫХ ПРИВОДОВ И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ ...	45
Задача 3.1 Прямая задача кинематики.....	50
Задача 3.2 Обратная задача кинематики	56
4 ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	63
ЛИТЕРАТУРА	64

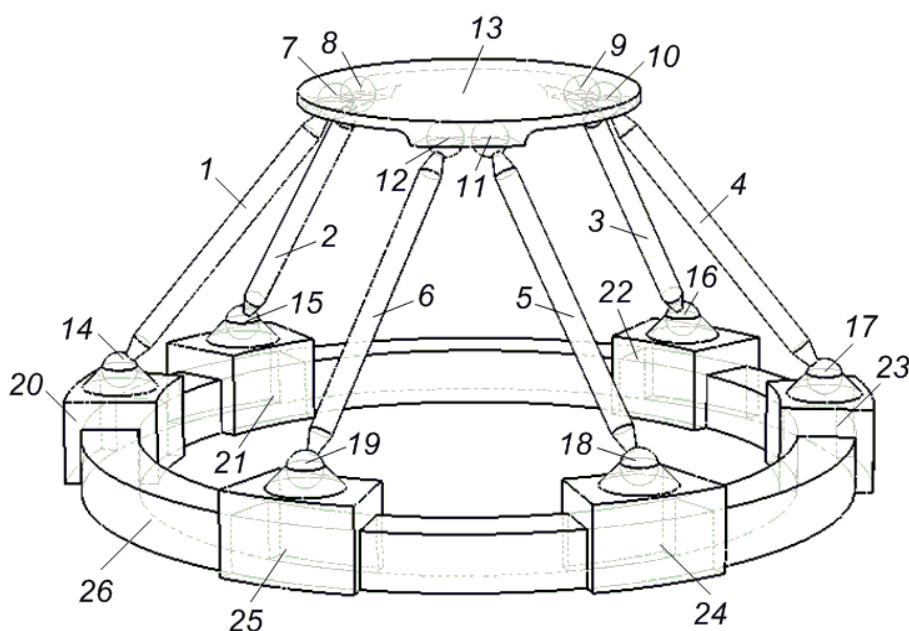
ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие «Прикладные задачи по высшей математике» подготовлено по разделу курса высшей математики «Аналитическая геометрия». Важность таких пособий несомненна, так как уже на ранней стадии изучения математики в техническом университете студент имеет возможность анализировать и решать задачи по алгоритмизации технических объектов изученными математическими методами. Это дает предметно-ориентированное понимание математической сущности законов построения и функционирования технических систем и информационных технологий, быстрое усвоение фундаментальных знаний по математике через прикладные задачи.

В пособии представлены прикладные задачи, сформулированные авторами по результатам исследований, проводимых в учебно-научной лаборатории «Математическое моделирование технических систем и информационные технологии» в направлении разработки и создания мехатронных систем перемещений на основе механизмов параллельной кинематики. Для алгоритмизации математических моделей были использованы методы аналитической геометрии в трехмерном пространстве.

1 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ СЕГМЕНТНОГО КОЛЬЦЕВОГО ПРИВОДА И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ

Система перемещений с шестью степенями свободы – это механо-аппаратно-программный комплекс, включающий исполнительный манипулятор, систему управления и программное обеспечение для формирования программируемых движений. Рассмотрим исполнительный манипулятор такой системы перемещений, показанный на рисунке 1.1.



1, 2, 3, 4, 5, 6 – шатуны; 7, 8, 9, 10, 11, 12 – сферические шарниры;
13 – подвижная платформа; 14, 15, 16, 17, 18, 19 – управляемые подвижные
сегментные модули; 20, 21, 22, 23, 24, 25 – индукторы синхронного
двигателя; 26 – статор синхронного двигателя

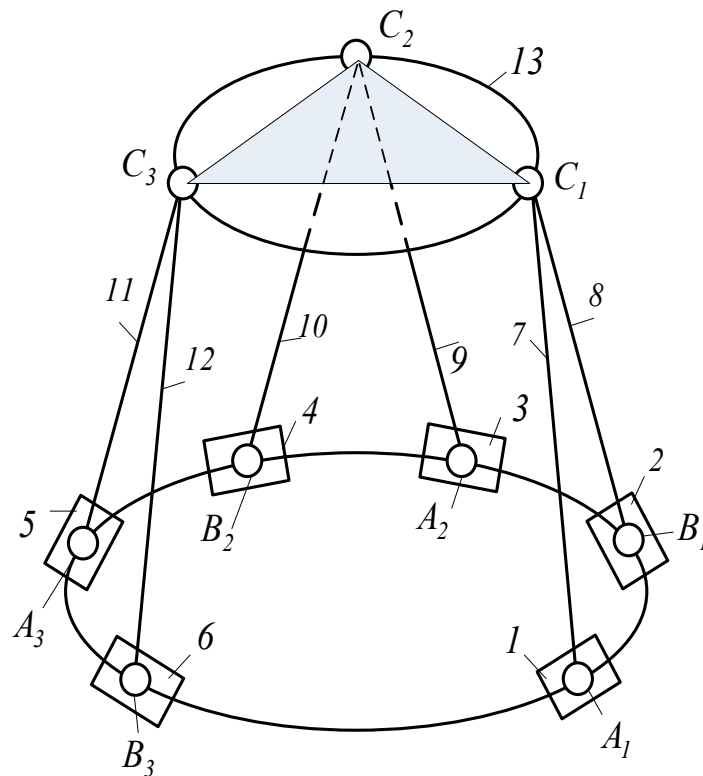
Рисунок 1.1 – Исполнительный манипулятор с шестью степенями свободы

Манипулятор с шестью степенями свободы (см. рисунок 1.1) представляет собой сложную замкнутую пространственную кинематическую цепь, в которой на кольцевой направляющей расположены шесть электромагнитных координатных модулей движения в виде сегментов синхронного двигателя, которые, в свою очередь, параллельными кинематическими цепями приводят в движение платформу с шестью независимыми степенями свободы. Манипулятор состоит из шатунов 1...6, с одной стороны связанных сферическими шарнирами 7...12 с подвижной платформой 13, а с другой стороны связанных сферическими шарнирами 14...19 с шестью управляемыми подвижными сегментными модулями кольцевого сегментного шагового двигателя,

причем подвижные сегментные модули выполнены в виде шести автономно управляемых индукторов 20...25 шагового двигателя, которые установлены на неподвижную направляющую основания статора 26, имеющего замкнутую кольцевую структуру.

Рассматриваемый манипулятор работает следующим образом. При перемещении индукторов 20...25 в соответствии с задаваемыми на входе системы законами их движения по неподвижной направляющей основания статора 26 кольцевого сегментного шагового двигателя через сферические шарниры 14...19, шатуны 1...6 и, соответственно, сферические шарниры 7...12 приводится в движение платформа 13. В зависимости от задаваемых положений индукторов 20...25 платформа 13 принимает однозначно соответствующие им положение и ориентацию в пространстве.

Структурная схема манипулятора, построенного на основе механизма с параллельными кинематическими цепями и связями, представлена на рисунке 1.2.



1, 2, 3, 4, 5, 6 – независимые сегменты привода;

7, 8, 9, 10, 11, 12 – шатуны; 13 – подвижная платформа

Рисунок 1.2 – Структурная схема параллельного механизма многокоординатной системы перемещений

Входными звеньями рассматриваемого параллельного механизма являются подвижные индукторы кругового привода прямого действия с шестью независимыми сегментами 1...6, перемещающиеся по круговой

направляющей неподвижного основания 26, с расположенными на них сферическими шарнирами $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$. Выходным звеном механизма, которое является исполнительным, выступает подвижная платформа 13, задаваемая в виде кольца, на котором находятся сферические шарниры C_1, C_2, C_3 . Таким образом, рассматриваемая система перемещений с шестью степенями свободы (см. рисунок 1.2) представляет собой пространственный механизм, кинематическая цепь которого состоит из 13 подвижных звеньев. Из них ведущими являются звенья $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, которые обеспечивают любое задаваемое перемещение вдоль направляющей статора. Выходным звеном механизма является платформа 13, в рассматриваемом случае в виде треугольной площадки, сложное движение которой соответствует назначению механизма, кинематическому описанию самой технологической операции. В механизме также присутствуют промежуточные подвижные звенья $A_1C_1, B_1C_1, A_2C_2, B_2C_2, A_3C_3, B_3C_3$, называемые шатунами (на рисунке 1.2 – звенья 7...12), которые структурно и кинематически связывают подвижную платформу 13 и ведущие звенья.

В кинематической цепи механизма (см. рисунок 1.2) все подвижные звенья 1, 2, ..., 13 и неподвижное основание связаны в определенном порядке кинематическими парами. Механизм содержит 13 подвижных звеньев, 12 кинематических пар третьего класса и 6 кинематических пар пятого класса; другие кинематические пары отсутствуют. Рассматриваемый исполнительный механизм сохраняет управляемость во всем диапазоне перемещений в рабочей области и структурно обеспечивает возможность реализации сложного движения с шестью степенями свободы подвижной платформы по отношению к неподвижному основанию: тремя линейными и тремя угловыми. Линейные перемещения исполнительной платформы описываются тремя декартовыми координатами x, y, z , а угловые ориентационные движения исполнительной платформы – углами Эйлера φ, θ, ψ , которые задаются с помощью координатных представлений базовых точек системы.

Следует отметить, что представленный параллельный механизм позволяет реализовывать любые поворотные движения платформы вокруг оси, расположенной перпендикулярно базовой плоскости неподвижного основания многокоординатной системы перемещений, что обеспечивает существенное преимущество по сравнению с другими применяемыми подобными параллельными механизмами.

Для кинематического анализа механизма введем следующие системы координат: неподвижную $OXYZ$, связанную с основанием манипулятора, и подвижную $oxuz$, связанную с подвижной исполнительной платформой, как показано на рисунке 1.3.

Геометрические параметры рассматриваемого параллельного механизма представлены на рисунке 1.4.

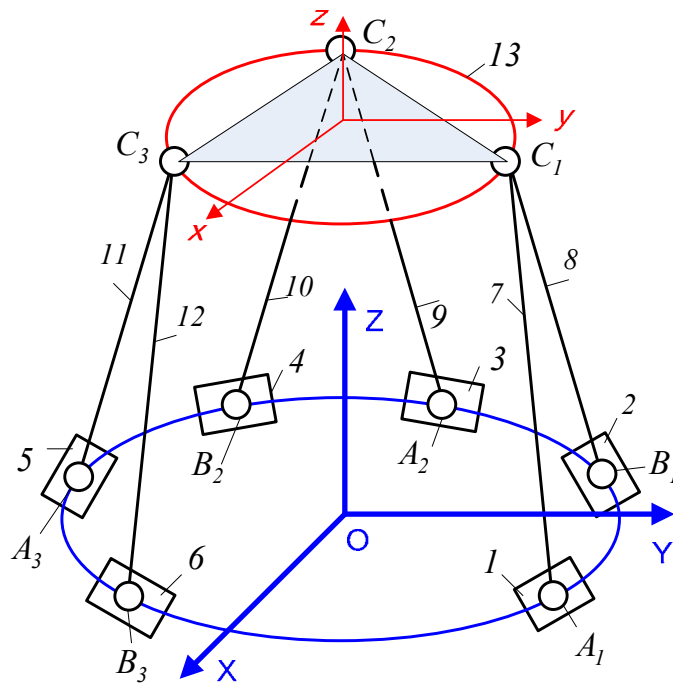


Рисунок 1.3 – Системы координат параллельного механизма

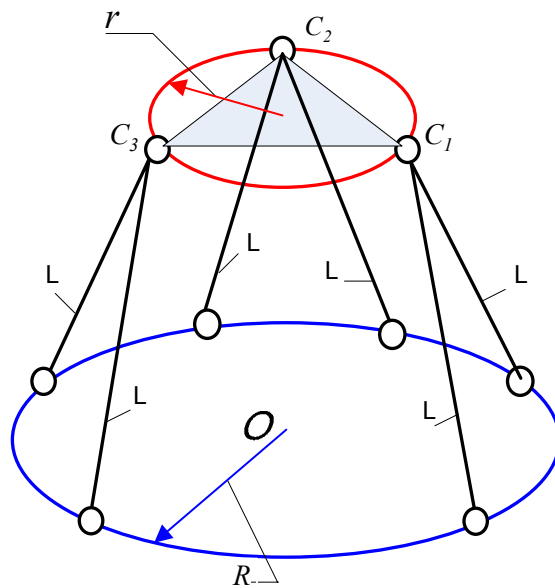


Рисунок 1.4 – Геометрические параметры механизма

Положения подвижных сегментов привода однозначно описываются координатами точек $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, расположенных на окружности радиусом R в плоскости XOY , а положение и ориентация платформы могут быть однозначно заданы координатами точек C_1, C_2, C_3 в системе координат $OXYZ$. При этом точки C_1, C_2, C_3 расположены на окружности радиусом r в системе координат $oxuz$.

Задача 1.1 Прямая задача кинематики

Прямая задача кинематики, как известно, состоит в определении для механизма заданной структуры и геометрии подвижных звеньев законов перемещения исполнительного звена относительно неподвижной системы координат в зависимости от известных законов перемещения входных, или ведущих, звеньев. Решение прямой задачи кинематики, как правило, выполняется вначале в позиционном, а затем в собственно кинематическом представлении с параметрическим заданием законов движения выходного звена или нескольких выходных звеньев в виде функции времени.

Пусть заданы положения точек $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$. Требуется найти соответствующее положение платформы – координаты X, Y, Z начала O системы координат $oxuz$ и ее ориентацию – углы Эйлера φ, θ, ψ по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$.

Решать прямую задачу кинематики будем в два этапа: на первом этапе найдем положения точек C_1, C_2, C_3 , характеризуемых их координатами в неподвижной системе координат $OXYZ$ в зависимости от положения шести подвижных сегментов привода, характеризуемых точками $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$. На втором этапе, зная положения точек C_1, C_2, C_3 , вычислим шесть координат платформы: позицию X, Y, Z и углы Эйлера φ, θ, ψ начала O подвижной системы координат $oxuz$.

Пусть заданы положения сегментов координатами точек A_i и B_i ($i = 1, 2, 3$). При этом примем, что точки A_i и B_i лежат в плоскости XOY и для всех этих точек координата Z будет равна нулю, то есть $A_i(x_{A_i}, y_{A_i}, 0)$ и $B_i(x_{B_i}, y_{B_i}, 0)$, где $i = 1, 2, 3$. Также примем, что длины шатунов механизма – звеньев 7...12 (см. рисунок 1.3) – равны между собой, то есть $A_iC_i = B_iC_i = l$, ($i = 1, 2, 3$). Принятое положение точек C_1, C_2, C_3 относительно системы координат $oxuz$ показано на рисунке 1.5.

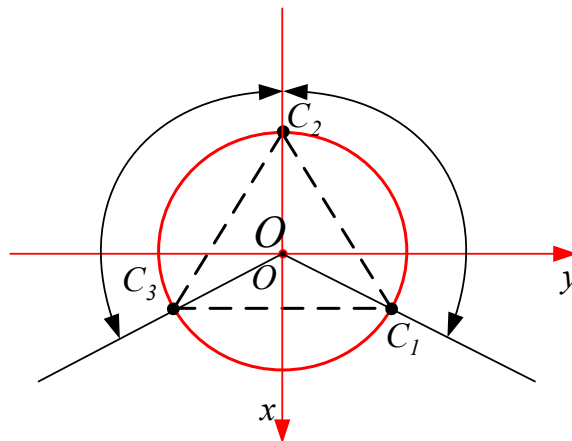


Рисунок 1.5 – Подвижное кольцо в системе координат $oxuz$

Согласно рисунку 1.5, точки C_1, C_2, C_3 имеют следующие координаты:

$$C_1(r, 0, 0); \quad C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right); \quad C_3\left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right), \quad (1.1)$$

а расстояния $C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_1$ будут равны $r\sqrt{3}$.

С учетом того, что треугольники $\Delta A_i C_i B_i$ ($i=1, 2, 3$) всегда остаются равнобедренными, представляется весьма удобным фрагментировать исходный механизм (см. рисунок 1.3) на три отдельных треугольных контура с переменным по длине основанием в каждом из них. В таком случае биссектриса $C_i N_i$ каждого из трех треугольных контуров всегда будет делить основание $A_i B_i$ пополам, и тем самым секущая плоскость, проходящая через биссектрису $C_i N_i$, перпендикулярная плоскости XOY , всегда будет проходить через точку O и ось Z неподвижной системы координат $OXYZ$. Эта ситуация хорошо видна из рисунка 1.6, представляющего собой проекцию всего механизма и его звеньев на плоскость XOY неподвижной системы координат $OXYZ$. Здесь углы α_i ($i=1, 2, 3$) однозначно определяют положение каждого из трех треугольных контуров по отношению к оси OX .

Рассмотрев один из треугольных контуров, например, $\Delta A_1 C_1 B_1$, при известных координатах точек A_1 и B_1 найдем координаты точки N_1 по формулам

$$x_{N_1} = \frac{x_{A_1} + x_{B_1}}{2}; \quad y_{N_1} = \frac{y_{A_1} + y_{B_1}}{2}; \quad z_{N_1} = 0.$$

Тогда получим, что $N_1 C_1 = \sqrt{(A_1 C_1)^2 - (A_1 N_1)^2}$. С учетом принятого ранее обозначения $A_1 C_1 = l$ имеем

$$N_1 C_1 = \sqrt{l^2 - (A_1 N_1)^2},$$

где

$$A_1 N_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_1} - x_{A_1})^2 + (y_{B_1} - y_{A_1})^2}.$$

Из рисунка 1.6 видно, что угол α_1 может быть найден из выражения

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_{N_1}}{ON_1},$$

где $ON_1 = \sqrt{x_{N_1}^2 + y_{N_1}^2}$.

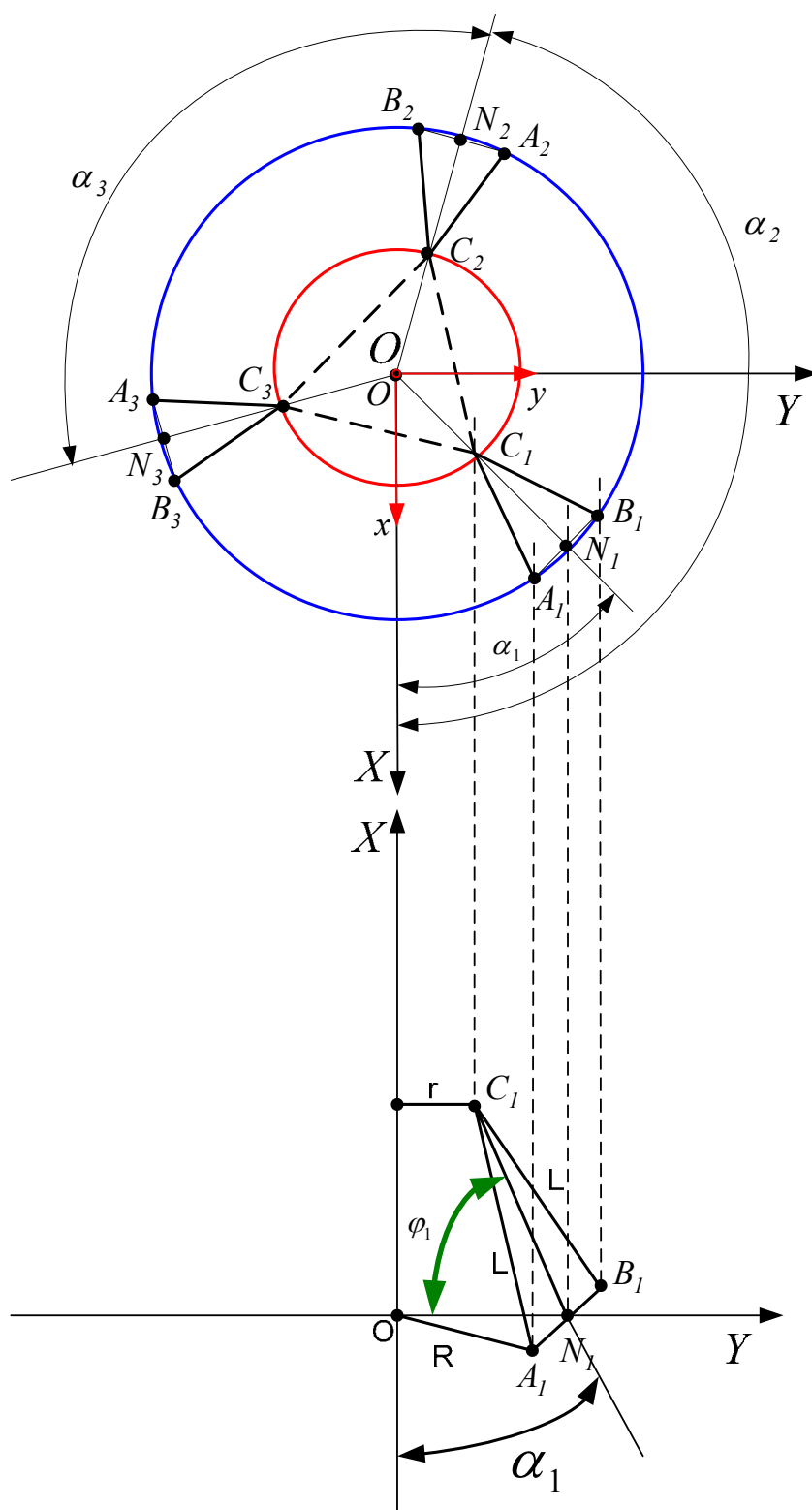


Рисунок 1.6 – Проецирование звеньев механизма на плоскость XOY системы координат $OXYZ$

С учетом однозначного определения α_1 в зависимости от координатной четверти окончательно запишем следующие условия:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos \frac{|x_{N_1}|}{ON_1}, & \text{если } x_{N_1} > 0 \text{ и } y_{N_1} > 0; \\ \alpha_1 &= 180^\circ - \arccos \frac{|x_{N_1}|}{ON_1}, & \text{если } x_{N_1} < 0 \text{ и } y_{N_1} > 0; \\ \alpha_1 &= 180^\circ + \arccos \frac{|x_{N_1}|}{ON_1}, & \text{если } x_{N_1} < 0 \text{ и } y_{N_1} < 0; \\ \alpha_1 &= 360^\circ - \arccos \frac{|x_{N_1}|}{ON_1}, & \text{если } x_{N_1} > 0 \text{ и } y_{N_1} < 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом формируются условия для нахождения углов α_2 и α_3 по исходным выражениям соответственно в виде

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{x_{N_2}}{ON_2}, & \text{где } ON_2 &= \sqrt{x_{N_2}^2 + y_{N_2}^2}; \\ \cos \alpha_3 &= \frac{x_{N_3}}{ON_3}, & \text{где } ON_3 &= \sqrt{x_{N_3}^2 + y_{N_3}^2}. \end{aligned}$$

В соответствии с рисунками 1.3 – 1.6 получим расчетные выражения для координат точек C_1, C_2, C_3 через рассчитанные координаты точек N_1, N_2, N_3 или заданные координаты точек $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ и внутренние углы φ_i наклонов треугольников $\Delta A_i C_i B_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Для точки C_1 имеем

$$\begin{cases} x_{C_1} = x_{N_1} - (N_1 C_1) \cos \varphi_1 \cos \alpha_1; \\ y_{C_1} = y_{N_1} - (N_1 C_1) \cos \varphi_1 \sin \alpha_1; \\ z_{C_1} = (N_1 C_1) \sin \varphi_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $N_1 C_1 = \sqrt{l^2 - (A_1 N_1)^2}$.

Для точки C_2 получим

$$\begin{cases} x_{C_2} = x_{N_2} - (N_2 C_2) \cos \varphi_2 \cos \alpha_2; \\ y_{C_2} = y_{N_2} - (N_2 C_2) \cos \varphi_2 \sin \alpha_2; \\ z_{C_2} = (N_2 C_2) \sin \varphi_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $N_2 C_2 = \sqrt{l^2 - (A_2 N_2)^2}$.

Для точки C_3 аналогично получаем

$$\begin{cases} x_{C_3} = x_{N_3} - (N_3 C_3) \cos \varphi_3 \cos \alpha_3; \\ y_{C_3} = y_{N_3} - (N_3 C_3) \cos \varphi_3 \sin \alpha_3; \\ z_{C_3} = (N_3 C_3) \sin \varphi_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $N_3 C_3 = \sqrt{l^2 - (A_3 N_3)^2}$.

С учетом выражений (1.2) – (1.4) и условия

$$C_1 C_2 = C_2 C_3 = C_3 C_1 = a = \text{const}$$

получаем систему из трех нелинейных уравнений, решение которой позволяет по заданным координатам точек A_i и B_i ($i=1, 2, 3$) найти три угла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, однозначно задающие положение подвижного кольца в пространстве. Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (x_{C_2} - x_{C_1})^2 + (y_{C_2} - y_{C_1})^2 + (z_{C_2} - z_{C_1})^2 = a^2; \\ (x_{C_3} - x_{C_2})^2 + (y_{C_3} - y_{C_2})^2 + (z_{C_3} - z_{C_2})^2 = a^2; \\ (x_{C_3} - x_{C_1})^2 + (y_{C_3} - y_{C_1})^2 + (z_{C_3} - z_{C_1})^2 = a^2, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $a = r\sqrt{3}$.

В результате решения системы (1.5), например, вычислительными средствами среды моделирования MATLAB, получим три угла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. По найденным углам с помощью выражений (1.2) – (1.4) обратной подстановкой находим координаты точек C_1, C_2, C_3 , по которым могут быть вычислены координаты начала o подвижной системы координат $oxuz$ и углы Эйлера, определяющие ее ориентацию, в неподвижной системе координат $OXYZ$.

Положение начала o подвижной системы координат $oxuz$ в системе координат $OXYZ$ из рисунков 1.3 и 1.6 определяется по формулам

$$x_0 = \frac{x_{C_1} + x_{C_2} + x_{C_3}}{3}; \quad y_0 = \frac{y_{C_1} + y_{C_2} + y_{C_3}}{3}; \quad z_0 = \frac{z_{C_1} + z_{C_2} + z_{C_3}}{3}.$$

Теперь найдем углы Эйлера φ, θ, ψ , определяющие ориентацию подвижной системы координат $oxuz$ по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$. Используя координаты точек C_1, C_2, C_3 подвижной платформы в неподвижной системе координат и зная положение точки o , можно найти вектор $\overrightarrow{OC_1} \uparrow \uparrow x$:

$$\overrightarrow{OC_1} = (x_{C_1} - x_0, y_{C_1} - y_0, z_{C_1} - z_0).$$

С учетом того, что

$$|\overrightarrow{OC_1}| = \sqrt{(x_{C_1} - x_0)^2 + (y_{C_1} - y_0)^2 + (z_{C_1} - z_0)^2},$$

получим элементы a_{11}, a_{12}, a_{13} , определяющие направление оси x в неподвижной системе координат:

$$a_{11} = \frac{x_{C_1} - x_0}{|\overrightarrow{OC_1}|}; \quad a_{12} = \frac{y_{C_1} - y_0}{|\overrightarrow{OC_1}|}; \quad a_{13} = \frac{z_{C_1} - z_0}{|\overrightarrow{OC_1}|}.$$

Так как согласно рисунку 1.5 ось y параллельна $\overrightarrow{C_3C_2}$, можно записать выражения для расчета элементов a_{21}, a_{22}, a_{23} , определяющих направление оси y в неподвижной системе координат $OXYZ$:

$$a_{21} = \frac{x_{C_2} - x_{C_3}}{|\overrightarrow{C_2C_3}|}; \quad a_{22} = \frac{y_{C_2} - y_{C_3}}{|\overrightarrow{C_2C_3}|}; \quad a_{23} = \frac{z_{C_2} - z_{C_3}}{|\overrightarrow{C_2C_3}|}.$$

Для нахождения оставшихся трех элементов a_{31}, a_{32}, a_{33} матрицы ориентации системы $oxuz$ в неподвижной системе координат, связанной с неподвижным кольцом, воспользуемся векторным произведением ортов $\vec{i}(a_{11}, a_{12}, a_{13})$ и $\vec{j}(a_{21}, a_{22}, a_{23})$:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i}_0 & \vec{j}_0 & \vec{k}_0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \cdot \vec{i}_0 - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot \vec{j}_0 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \vec{k}_0. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$a_{31} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22});$$

$$a_{32} = (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23});$$

$$a_{33} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Таким образом, получены все элементы матрицы M :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, матрица M , выраженная через углы Эйлера, равна

$$M = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & x_0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & y_0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого получим

$$a_{11} = \cos \varphi \cos \theta;$$

$$a_{21} = \sin \varphi \cos \theta;$$

$$a_{31} = -\sin \theta$$

или

$$\cos \theta = \pm \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}; \quad \sin \theta = -a_{31}.$$

В вычислительном алгоритме можно выбрать знак для $\cos \theta$, возьмем знак «плюс», тогда окончательно для угла θ будем иметь

$$\cos \theta = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}; \quad \sin \theta = -a_{31}.$$

Для расчета угла ψ воспользуемся следующими соотношениями:

$$a_{32} = \cos \theta \sin \psi;$$

$$a_{33} = \cos \theta \cos \psi.$$

С учетом найденного значения $\cos \theta$ получим

$$\sin \psi = \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}; \quad \cos \psi = \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

Для расчета угла φ воспользуемся соотношениями

$$a_{11} = \cos \varphi \cos \theta;$$

$$a_{21} = \sin \varphi \sin \theta.$$

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

Таким образом, зная x_0, y_0, z_0 и углы φ, θ, ψ , с помощью матрицы M однозначно определяется положение подвижной платформы механизма в пространстве по отношению к неподвижному кольцу основания.

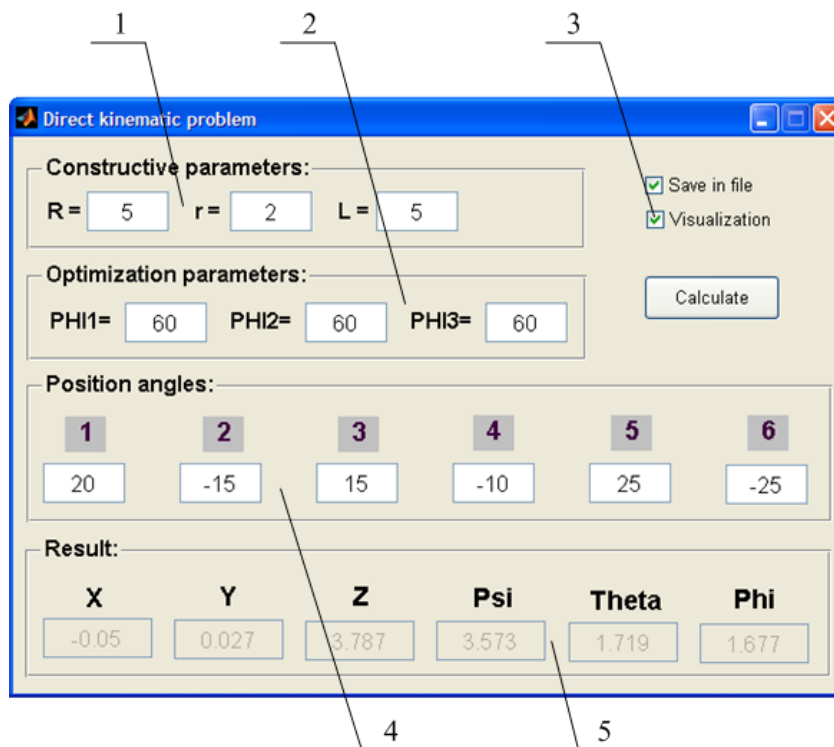
Пример

Рассмотрим случай нахождения положения и ориентации платформы пространственного исполнительного механизма для заданных относительных угловых координат расположения шести подвижных сегментов A_i , B_i ($i = 1, 2, 3$) управляющего привода.

Пусть относительные угловые координаты подвижных сегментов равны $A_1 = -15^\circ$; $B_1 = 15^\circ$; $A_2 = -25^\circ$; $B_2 = 25^\circ$; $A_3 = -20^\circ$; $B_3 = 20^\circ$, а конструктивные параметры механизма $R = 5$ м; $r = 5$ м; $l = 5$ м.

Решение прямой задачи кинематики основывается, в первую очередь, на численном поиске значений углов наклона $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ плоскостей, образованных попарными опорными звеньями механизма, для заданных координат расположения шести подвижных сегментов A_i и B_i ($i = 1, 2, 3$). Затем, используя найденные значения углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, определяются координаты положения x, y, z и ориентации φ, θ, ψ подвижной платформы механизма в пространстве по представленным выше формулам.

Для решения прямой задачи кинематики рассматриваемого пространственного механизма в среде MATLAB/Simulink нами разработана программа, интерфейс которой представлен на рисунке 1.7.



- 1 – конструктивные параметры пространственного механизма;
2 – вектор начальных значений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; 3 – управляющие флажки;
4 – координаты подвижных сегментов привода; 5 – координаты положения и ориентация платформы механизма

Рисунок 1.7 – Интерфейс программы решения прямой задачи кинематики

Система нелинейных уравнений (1.5) в программе представлена совокупностью функциональных уравнений, содержащих переменные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, координаты расположения шести подвижных сегментов привода и конструктивные параметры механизма. Процесс ее решения происходит до тех пор, пока значение оценочной функции, рассчитываемой в процессе итерационного поиска, не станет меньше заданной точности или новые значения переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ будут изменяться каждый раз на величину меньшую, чем заданное предельно допустимое значение.

На заключительном этапе решения прямой задачи кинематики, используя найденные значения переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, по расчетным выражениям определяются координаты положения x, y, z и углы ориентации φ, θ, ψ подвижной платформы механизма в пространстве.

После ввода в программу исходных данных и параметров механизма получаем следующие вычисленные координаты положения и ориентации платформы: $x = 0,0\text{ м}$; $y = -0,001\text{ м}$; $z = 3,869\text{ м}$; $\varphi = 0,28^\circ$; $\theta = 1,255^\circ$; $\psi = 1,491^\circ$. При этом найденные в процессе оптимизационного поиска значения переменных φ_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно равны $\varphi_1 = 54,11$; $\varphi_2 = 56,02$; $\varphi_3 = 54,96$. Для проверки правильности решения прямой задачи кинематики в разработанной программе предусмотрена возможность визуализации текущего решения в виде трехмерного изображения состояния исполнительного механизма, соответствующего расположению шести подвижных сегментов A_i и B_i ($i = 1, 2, 3$) привода (рисунок 1.8).

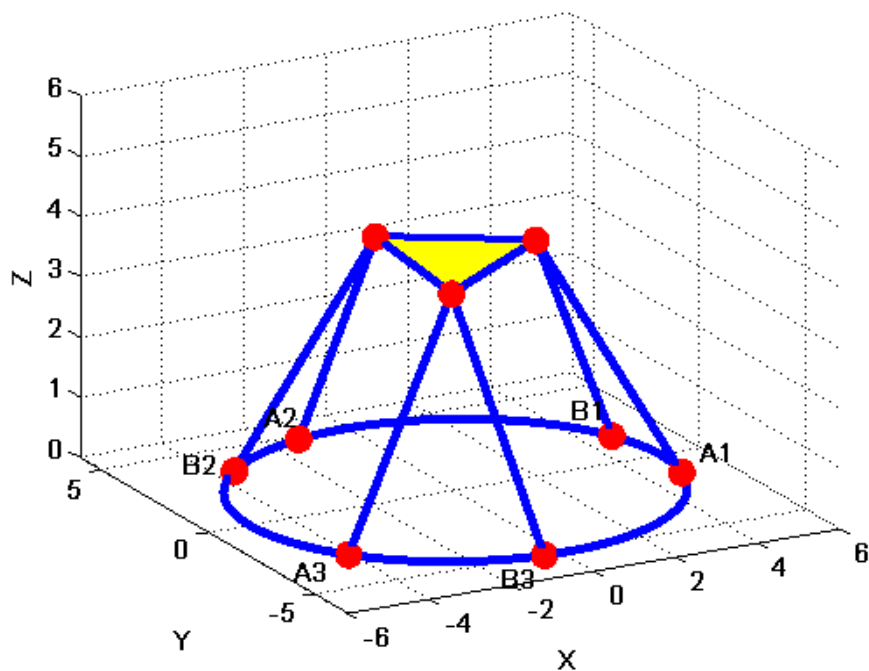


Рисунок 1.8 – Пример визуализации решения прямой задачи кинематики

Задача 1.2 Обратная задача кинематики

Рассмотрим исполнительный пространственный механизм со структурной схемой, представленной на рисунке 1.2. Геометрия звеньев механизма, как показано на рисунках 1.3 и 1.4, определяется радиусом R неподвижного основания, радиусом r подвижного кольца, а также длиной l шести звеньев, соединяющих сферические шарниры A_i и B_i , перемещающиеся на подвижных сегментах по неподвижному кольцу (статору), со сферическими шарнирами C_i ($i = 1, 2, 3$), расположенными на подвижной платформе 13.

Конфигурация и вместе с тем кинематика механизма однозначно определяется положением ведущих звеньев, конструктивно выполненных в виде подвижных управляемых сегментов поворотного привода, законы движения которых в обратной задаче кинематики определяются исходя из заданного положения и ориентации подвижного кольца по отношению к системе координат $OXYZ$, жестко связанной с неподвижным основанием.

Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$, как показано на рисунке 1.9.

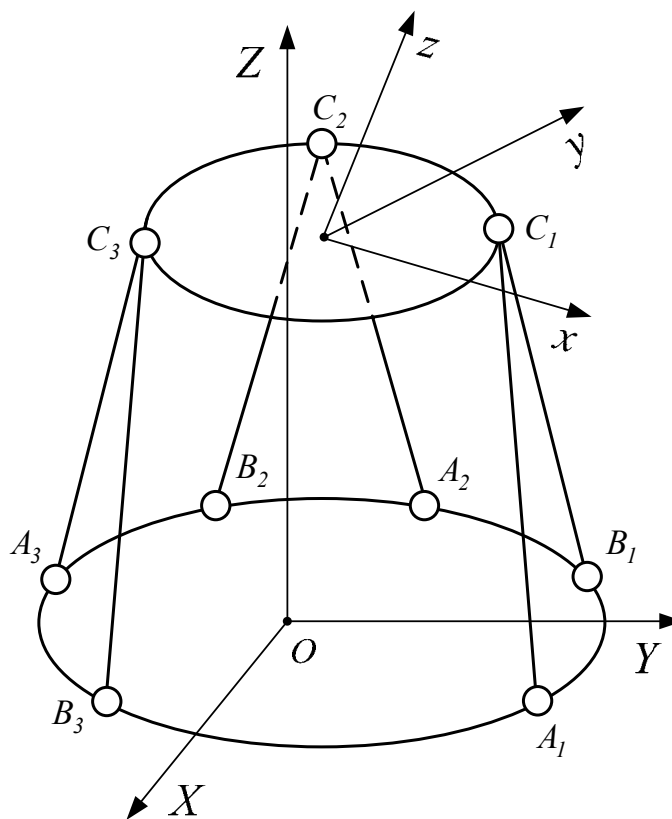


Рисунок 1.9 – Неподвижная $OXYZ$ и подвижная $oxyz$ системы координат механизма

Начало системы координат $OXYZ$ поместим в геометрический центр основания O , оси X и Y направим в плоскости кольца, а ось Z направим из условия правой системы координат. На подвижном кольце выберем

подвижную систему координат $oxyz$, как показано на рисунке 1.9. Принятое расположение координатных осей x и y по отношению к сферическим шарнирам C_1, C_2, C_3 показано на рисунке 1.10.

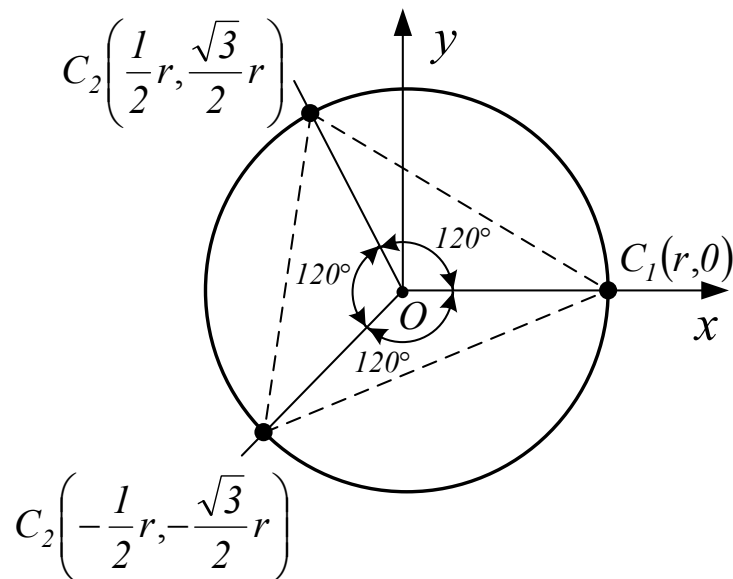


Рисунок 1.10 – Геометрия подвижной платформы C_1, C_2, C_3

С учетом выбранных систем координат $OXYZ$ и $oxyz$ обратная задача кинематики для рассматриваемого механизма может быть сформулирована следующим образом. Необходимо по заданному положению и ориентации подвижной системы шести координат $oxyz$, задаваемым дискретным образом или параметрически, в неподвижной системе координат $OXYZ$ найти положение сегментов $1\dots 6$, определяемых в системе координат $OXYZ$ координатами точек A_i и B_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно.

Положение и ориентацию подвижной системы координат $oxyz$ по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$ будем характеризовать соответственно координатами точки $o(x_0, y_0, z_0)$ и углами Эйлера φ, θ, ψ независимых поворотов, обеспечивающих угловые совмещения подвижной и неподвижной систем координат. Для однозначности решения необходимо принять последовательность этих поворотов, для определенности примем $\varphi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$, то есть сначала осуществляется поворот вокруг оси x на угол φ , затем вокруг оси y на угол θ и, наконец, поворот вокруг оси z на угол ψ . С учетом вышесказанного результирующая матрица поворота определится композицией следующих матричных преобразований:

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (1.6)$$

$$M_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}; \quad (1.7)$$

$$M_{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

С учетом (1.6) – (1.8) окончательно получим результирующую матрицу поворота $M_{\varphi, \theta, \psi}$ в виде

$$\begin{aligned} M_{\varphi, \theta, \psi} &= M_{\varphi} \cdot M_{\theta} \cdot M_{\psi} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перепишем ее в виде следующей матрицы четвертого порядка в однородных координатах:

$$M'_{\varphi, \theta, \psi} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [M_{\varphi, \theta, \psi}] & & 0 \\ & 3 \times 3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрица положения M_0 , которая характеризуется координатами x_0, y_0, z_0 в однородных координатах, запишется в следующем виде:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Тогда полное преобразование, задаваемое положением точки $o(x_0, y_0, z_0)$ и поворотами на углы Эйлера φ, θ, ψ , будет определяться матрицей M следующего вида:

$$M = M_0 \cdot M'_{\varphi, \theta, \psi} = M'_{\varphi, \theta, \psi} \cdot M_0 = \begin{bmatrix} & & & x_0 \\ & [M_{\varphi, \theta, \psi}] & & y_0 \\ & 3 \times 3 & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Таким образом, полученная матрица (1.11) с учетом формул (1.9) и (1.10) представляет собой полное математическое описание положения и ориентации подвижной платформы в неподвижной системе координат $OXYZ$. Положения точек C_1, C_2, C_3 в системе координат $OXYZ$, как следует из рисунка 1.10, могут быть заданы следующими матрицами-столбцами:

$$R_{C_1} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_{C_2} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_{C_3} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пересчет координат точек C_1, C_2, C_3 в неподвижной системе координат $OXYZ$ осуществляется матричным преобразованием

$$R^{(C_i)} = M \cdot R_{C_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

или

$$R^{(C_i)} = \begin{bmatrix} x^{(C_i)} \\ y^{(C_i)} \\ z^{(C_i)} \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ z_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Зная текущее положение в рассматриваемой конфигурации точек C_1, C_2, C_3 , положение точек A_i и B_i ($i=1, 2, 3$) будем искать из условия принадлежности их одновременно окружности радиусом R , уравнение которой имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (1.12)$$

и окружностей как линий пересечений трех сфер радиусом l с центрами соответственно в точках C_1, C_2, C_3 с координатной плоскостью XOY неподвижной системы координат. Для этого сначала построим уравнение линии пересечения с центром в точке C_1 и плоскости XOY .

Уравнение сферы с центром в точке C_1 имеет следующий вид:

$$(x - x^{(C_1)})^2 + (y - y^{(C_1)})^2 + (z - z^{(C_1)})^2 = l^2,$$

а уравнение координатной плоскости XOY имеет вид

$$z = 0.$$

Значит, уравнение искомой линии пересечения может быть окончательно получено в виде

$$(x - x^{(C_1)})^2 + (y - y^{(C_1)})^2 = l^2 - (z^{(C_1)})^2. \quad (1.13)$$

Для нахождения координат точек A_i и B_i , соответствующих рассматриваемому положению точки C_1 , рассмотрим совместно уравнения (1.12) и (1.13):

$$\begin{cases} (x - x^{(C_1)})^2 + (y - y^{(C_1)})^2 = l^2 - (z^{(C_1)})^2; \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases} \quad (1.14)$$

Подставив в первое уравнение системы (1.14) выражение $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, полученное из второго уравнения, получим

$$(x - x^{(C_1)})^2 + (\pm\sqrt{R^2 - x^2} - y^{(C_1)})^2 = l^2 - (z^{(C_1)})^2$$

или, раскрыв скобки, –

$$R^2 + (x^{(C_1)})^2 + (y^{(C_1)})^2 + (z^{(C_1)})^2 - l^2 - 2 \cdot x \cdot x^{(C_1)} = \pm 2y^{(C_1)} \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Обозначив в этом равенстве

$$A = R^2 + (x^{(C_1)})^2 + (y^{(C_1)})^2 + (z^{(C_1)})^2 - l^2,$$

получим следующее соотношение:

$$A - 2 \cdot x \cdot x^{(C_1)} = \pm 2y^{(C_1)} \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Возведем одновременно левую и правую части полученного выражения в квадрат, тогда окончательно получим

$$ax^2 - 2bx + c = 0,$$

где $a = 4(x^{(C_1)})^2 + 4(y^{(C_1)})^2$; $b = 2Ax^{(C_1)}$; $c = A^2 - 4(y^{(C_1)})^2 R^2$.

Из этого квадратного уравнения найдем два значения x , а именно: x_1 и x_2 , соответствующие точкам A_1 и B_1 , по формуле

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac}. \quad (1.15)$$

Координаты y этих точек определяются по формуле

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 - x_{1,2}^2}. \quad (1.16)$$

При этом необходимо учитывать, что выражение (1.16) для каждого из корней x_1 и x_2 дает два значения y , но только одно из них правильное. Выбор

правильного значения y осуществляется проверкой условия равенства расстояния между точками A_1 и C_1 или A_2 и C_2 длине l :

$$\left(x^{(C_1)} - x_{A_1}\right)^2 + \left(y^{(C_1)} - y_{A_1}\right)^2 + \left(z^{(C_1)} - z_{A_1}\right)^2 = l^2$$

и

$$\left(x^{(C_1)} - x_{B_1}\right)^2 + \left(y^{(C_1)} - y_{B_1}\right)^2 + \left(z^{(C_1)} - z_{B_1}\right)^2 = l^2,$$

где $x_{A_1} = x_1$, $x_{B_1} = x_2$, $y_{A_1} = y_1$, $y_{B_1} = y_2$ из формул (1.15) и (1.16) с последующим выбором правильного значения y .

Аналогичным образом определяются координаты пар точек A_2, B_2 и A_3, B_3 , но при этом не всегда рассчитанные значения пар координат (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) ; (x_4, y_4) ; (x_5, y_5) ; (x_6, y_6) будут соответствовать последовательности точек $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, которые должны строго выдерживаться для обеспечения бесколлизийной работы механизма. Поэтому необходима идентификация найденных пар координат точек A_i и B_i ($i=1, 2, 3$) на подвижных сегментах двигателя. Условием бесколлизийной работы при этом может быть отсутствие попарной геометрической интерференции промежуточных звеньев: соответственно 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12 (см. рисунок 1.2).

Пример

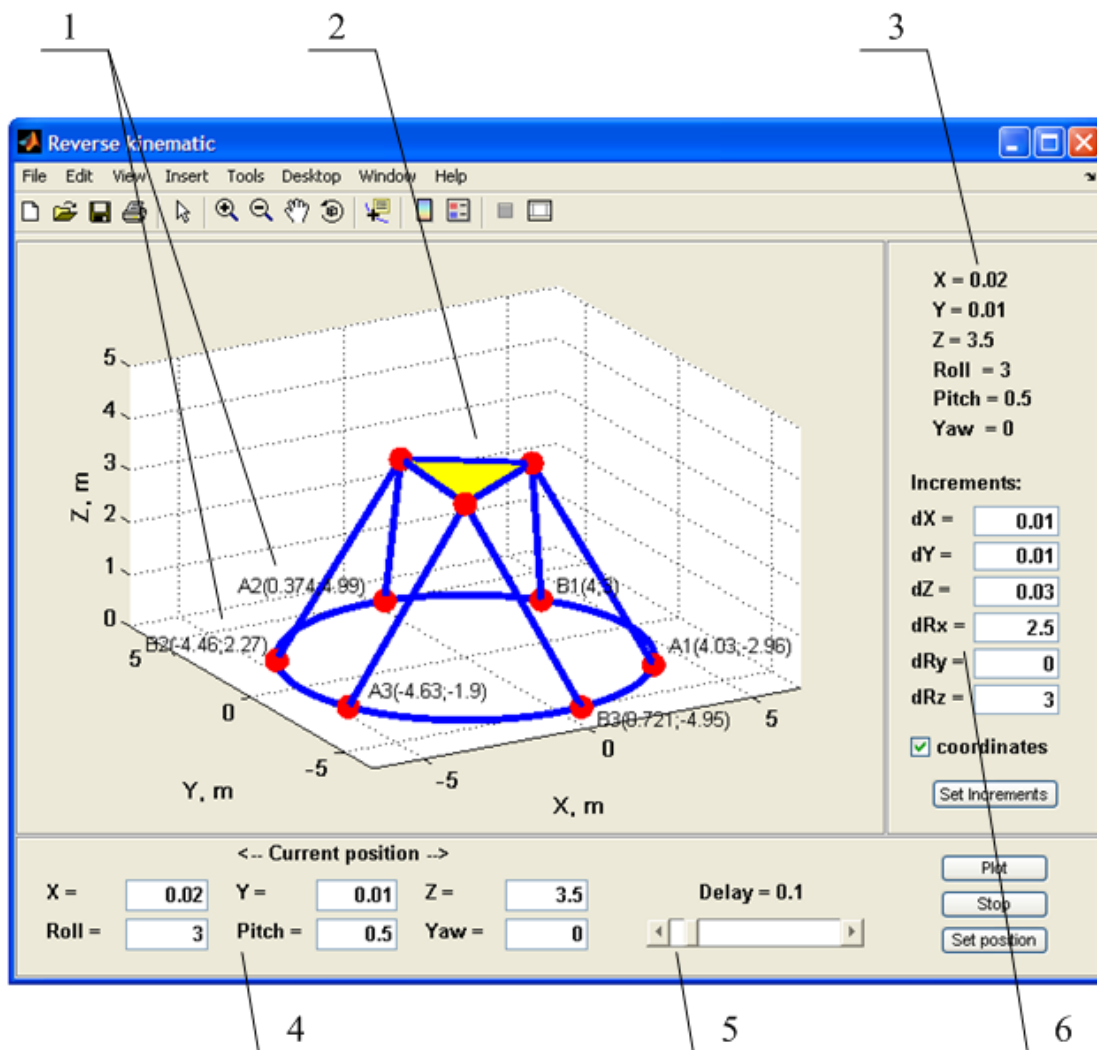
Рассмотрим задачу расчета рабочей области механизма по координатам x, y, z для заданных углов Эйлера φ, θ, ψ .

Пусть заданы начальные положение x_0, y_0, z_0 и ориентация $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$ подвижной платформы. При решении обратной задачи кинематики на первом этапе рассчитываются координаты точек C_1, C_2, C_3 платформы механизма, а затем на основе геометро-аналитического подхода, построенного на аналитической геометрии в трехмерном пространстве и матричных преобразованиях, – возможные координаты точек A_i и B_i , соответствующие позициям подвижных сегментов двигателя, в виде (x_i, y_i) , где $i=1, 2, 3$.

На втором этапе выполняется определение конечных значений координат подвижных сегментов привода – идентификация рассчитанных значений координат (x_i, y_i) точек A_i и B_i , где $i=1, 2, 3$, для строго заданной в пространстве последовательности $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_3$ с целью обеспечения бесколлизийной работы подвижных сегментов привода механизма. При этом может оказаться, что обратная задача кинематики решений не имеет, то есть заданные положение и ориентация платформы не могут быть достигнуты никакими положениями сегментов привода.

Для решения обратной задачи кинематики рассматриваемого исполнительного пространственного механизма в среде моделирования

MATLAB/Simulink нами реализована программа, интерфейс которой приведен на рисунке 1.11.



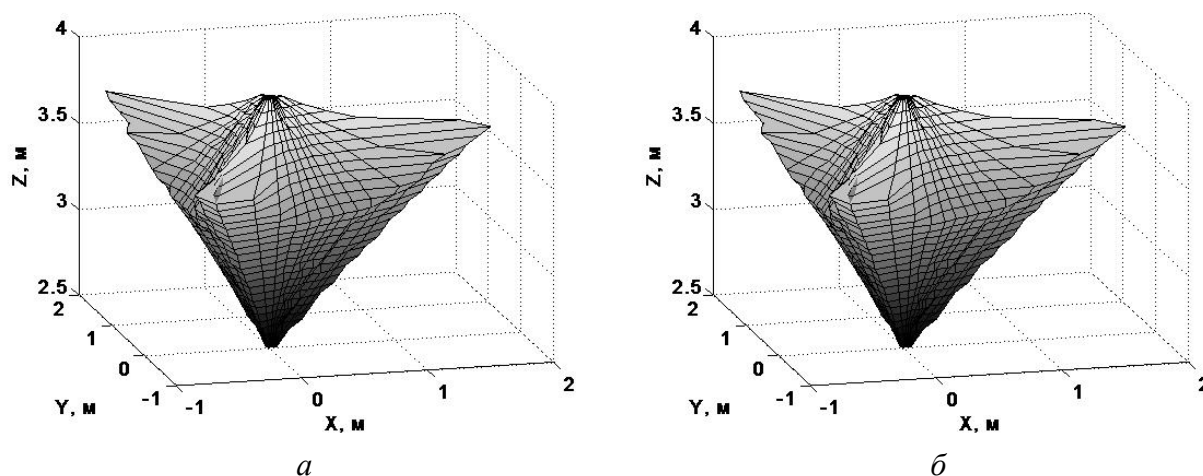
1 – текущие координаты (x, y) подвижных сегментов привода;
 2 – текущее состояние пространственного механизма; 3 – текущие координаты положения и ориентация платформы механизма;
 4 – задаваемые координаты положения и ориентации платформы;
 5 – задержка пошаговой визуализации; 6 – задаваемые инкрементные приращения по координатам положения и ориентации платформы механизма
 Рисунок 1.11 – Интерфейс программы решения обратной задачи кинематики

Представленная на рисунке 1.11 программа позволяет находить решение обратной задачи кинематики для заданных геометрических параметров механизма. При этом каждому такому решению однозначно соответствует пространственное состояние механизма, которое отображается в окне программы по окончании расчетов.

Для построения рабочей области механизма по координатам x, y, z зададимся приращениями $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и будем решать обратную задачу кинема-

тики, изменяя начальные координаты x_0, y_0, z_0 на заданные приращения, например, в плоскостях, параллельных плоскости $z = z_0$, при неизменной ориентации платформы $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$. В результате получим множество точек (x, y, z) , в которых может быть достигнута заданная ориентация платформы $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$.

На рисунке 1.12 представлены примеры рабочих областей, рассчитанных для разных значений углов Эйлера.



a – для углов Эйлера $\varphi_0 = 0, \theta_0 = 0, \psi_0 = 0$;

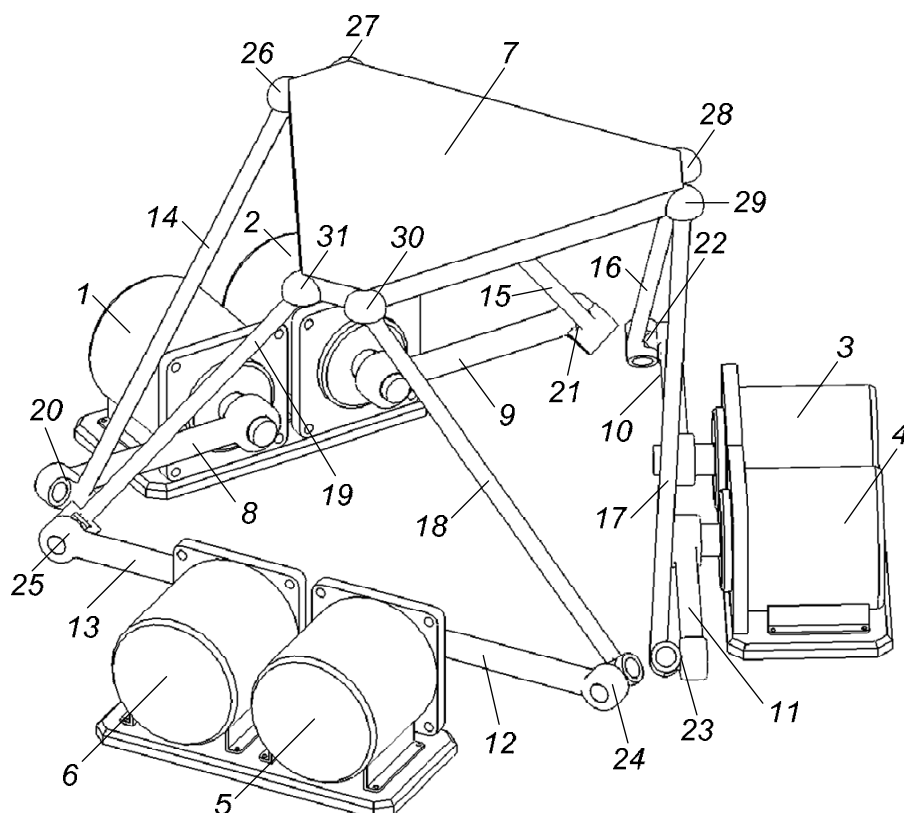
б – для углов Эйлера $\varphi_0 = 0, \theta_0 = 10, \psi_0 = 10$

Рисунок 1.12 – Изображения рабочих областей параллельного механизма

Из рисунка 1.12 следует, что рабочие области параллельного механизма напрямую зависят от углов Эйлера φ, θ, ψ , описывающих ориентацию мобильной платформы в пространстве. Построение рабочих областей позволяет исследовать и правильно оценивать предельные возможности перемещения платформы параллельного механизма в трехмерном пространстве.

2 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ШЕСТИ ПОВОРОТНЫХ ПРИВОДОВ И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ

Рассмотрим систему перемещений с шестью степенями свободы, представленную на рисунке 2.1, которая построена на шести поворотных приводах и механизме параллельной кинематики.



- 1, 2, 3, 4, 5, 6 – поворотные приводы прямого действия;
 7 – подвижная платформа; 8, 9, 10, 11, 12, 13 – входные кривошипы;
 14, 15, 16, 17, 18, 19 – промежуточные шатуны;
 20, 21, 22, 23, 24, 25 – карданные соединения;
 26, 27, 28, 29, 30, 31 – сферические соединения

Рисунок 2.1 – Структурно-кинематическая схема системы перемещений с шестью степенями свободы

Рассмотрим подробно исполнительный механизм системы перемещений, кинематическая схема которого показана на рисунке 2.2.

Механизм состоит из подвижной платформы P , кривошипов r_1, r_2, \dots, r_6 , жестко связанных с вращающимися элементами двигателей в точках O_1, O_2, \dots, O_6 , которые, в свою очередь, посредством сферических карданных шарниров и промежуточных шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 связаны с платформой P . Кривошипы r_1, r_2, \dots, r_6 являются входными звеньями, законы перемещения

которых задаются непосредственно шестью управляемыми поворотными двигателями. Выходное звено механизма – это подвижная платформа P , связанная с входными звеньями посредством шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 , образующих с платформой P сферические кинематические пары A_1, A_2, \dots, A_6 , а с входными звеньями – карданные кинематические пары N_1, N_2, \dots, N_6 .

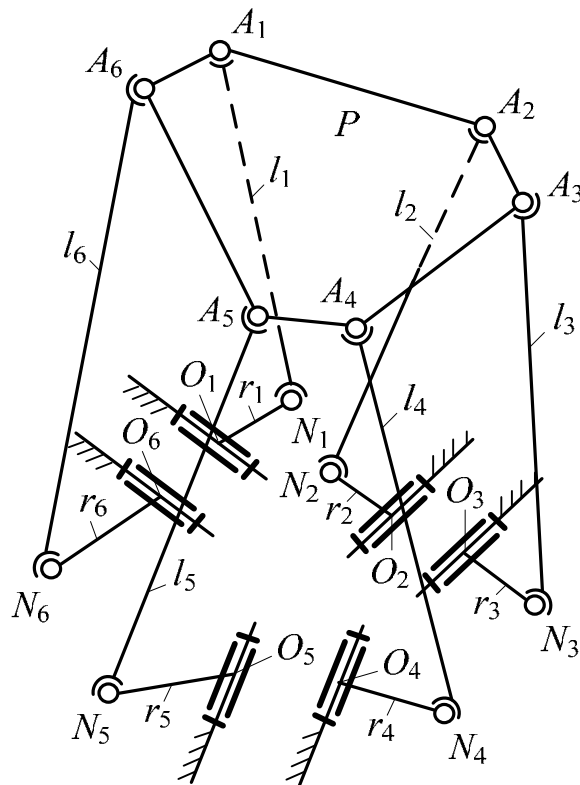


Рисунок 2.2 – Кинематическая схема параллельного механизма

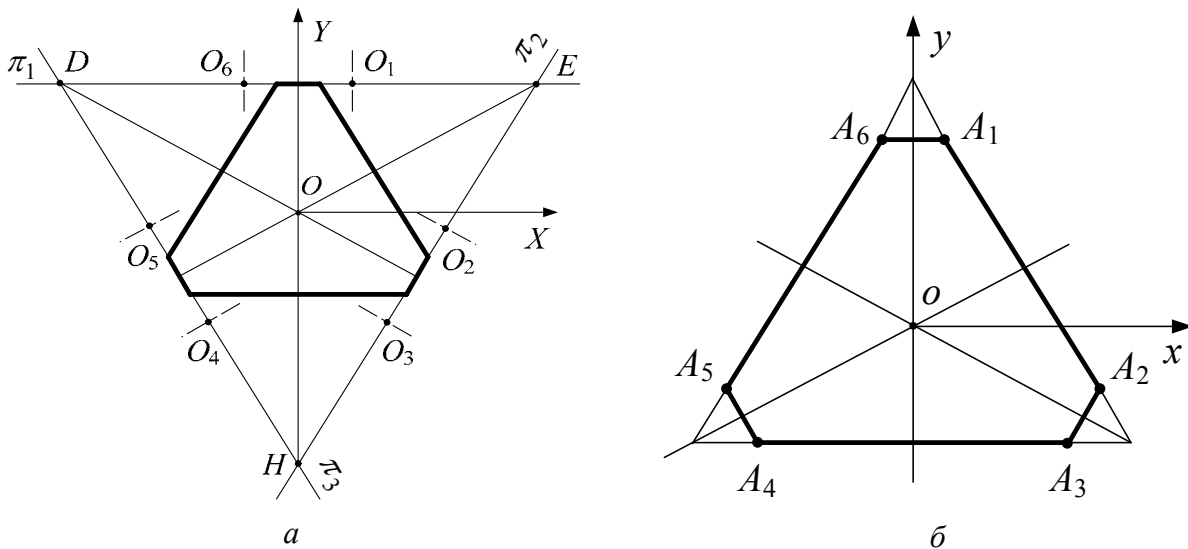
Для кинематического анализа рассматриваемого исполнительного механизма введено две системы декартовых координат с принятыми направлениями осей, как показано на рисунке 2.3:

– неподвижная система координат XYZ , жестко связанная с неподвижным основанием исполнительного механизма (рисунок 2.3, а);

– подвижная система координат xyz , жестко связанная с подвижной платформой P (рисунок 2.3, б).

Плоскость XOY содержит проходящие через точки O_1, O_2, \dots, O_6 оси вращения двигателей, которые попарно параллельны и взаимно расположены под углом 120° в плоскости XOY (рисунок 2.3, а). Начало O системы координат XYZ выбрано в плоскости XOY в точке пересечения медиан равностороннего треугольника DEH , построенного по характерным точкам O_1, O_2, \dots, O_6 осей вращения двигателей, которые в дальнейшем будут определены как базовые точки места сопряжения соответствующих подвижных кривошипов и валов двигателей.

На рисунке 2.3, б точки A_1, A_2, \dots, A_6 – это центры сферических шарниров. Начало o системы координат $хуz$ выбрано на пересечении медиан треугольника, достраиваемого по исходной фигуре платформы $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



a – неподвижная система XYZ ; b – подвижная система $хуz$
 Рисунок 2.3 – Системы координат исполнительного механизма

Геометро-конструктивные параметры основания, определяющие положение характерных точек O_1, O_2, \dots, O_6 осей двигателей, задаются длиной сторон равностороннего треугольника, построенного по этим точкам. Расстояние между параллельными осями соседних двигателей задается величиной $2m$, а расстояния $DE = EH = HD = p$. С учетом этих параметров, в соответствии с рисунком 2.3, а получим математические выражения для определения соответствующих координат точек O_1, O_2, \dots, O_6 в неподвижной (базовой) системе координат XYZ , которые сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Координаты точек O_i в системе координат XYZ

i	1	2	3	4	5	6
x_{O_i}	m	$\frac{1}{4}(p+2m)$	$\frac{1}{4}(p-2m)$	$\frac{1}{4}(-p+2m)$	$\frac{1}{4}(-p-2m)$	$-m$
y_{O_i}	$\frac{1}{2\sqrt{3}}p$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}(-p+6m)$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}(-p-6m)$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}(-p-6m)$	$\frac{1}{4\sqrt{3}}(-p+6m)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}p$
z_{O_i}	0	0	0	0	0	0

Для задания конструктивных параметров подвижной платформы приняты длины сторон $A_1A_6 = A_2A_3 = A_4A_5 = a$ и $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = b$ шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (см. рисунок 2.3, б). С учетом этого, в соответствии с рисунком 2.3, б можно получить расчетные выражения для координат x_{A_i} и y_{A_i} ($i = 1, 2, \dots, 6$) точек A_1, A_2, \dots, A_6 в системе координат xuz , которые сведены в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Координаты точек A_i в системе координат xuz

i	1	2	3	4	5	6
x_{A_i}	$\frac{a}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{a+b}{2}$	$-\frac{a}{2}$
y_{A_i}	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}+b\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(a-b)$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(2a+b)$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(2a+b)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(a-b)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(b+\frac{a}{2}\right)$
z_{A_i}	0	0	0	0	0	0

Положение и ориентацию шестиугольной платформы P будем характеризовать положением и ориентацией системы координат xuz , жестко связанной с самой платформой, в системе координат XYZ через координаты $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$. Причем x, y, z определяют текущее положение начала o подвижной системы координат xuz в неподвижной системе координат XYZ , а φ, θ, ψ – углы Эйлера, описывающие текущее угловое положение системы координат xuz относительно осей системы координат XYZ .

Задача 2.1 Прямая задача кинематики

Прямая задача кинематики исполнительного механизма на шести поворотных двигателях заключается в определении положения (x, y, z) и ориентации (φ, θ, ψ) подвижной платформы относительно абсолютной неподвижной системы координат по заданным геометро-конструктивным параметрам механизма и входным переменным параметрам – обобщенным угловым координатам $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ поворота подвижных элементов (валов) двигателей или кривошипов механизма. То есть в данном случае предметом прямой задачи кинематики является математическое описание пространственного положения механизма как функций времени или другого аналогичного параметра, тем самым устанавливаются аналитические соотношения между пространством обобщенных угловых координат и положением и ориентацией подвижной платформы.

Для рассматриваемого параллельного механизма, структурная схема которого представлена на рисунке 2.2, обобщенными угловыми координатами будут углы поворота $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ валов двигателей, выраженные как углы поворота соответствующих кривошипов $O_1N_1, O_2N_2, \dots, O_6N_6$. Таким образом, при известных углах σ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) положения точек N_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) будут однозначно определяться в неподвижной системе координат XYZ , жестко связанной с основанием механизма. Учитывая то, что плоскости, в которых попарно перемещаются кривошипы O_iN_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), обозначенные на рисунке 2.3, а как π_1, π_2 и π_3 , содержат одинаково расположенные точки O_1 и O_6, O_2 и O_3, O_4 и O_5 , имеют полную симметрию относительно центра O , только развернуты на 120° одна относительно другой, то в расчетах достаточно описать только одну из перечисленных пар точек, а остальные пары точек найти по законам угловой симметрии. Для удобства, но не нарушая математической общности, рассмотрим секущую плоскость π_1 в проекции ее на координатную плоскость XOZ (рисунок 2.4).

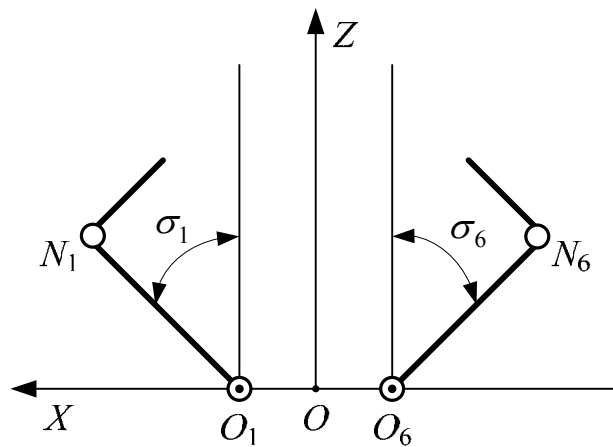


Рисунок 2.4 – Движение кривошипов в плоскости π_1

Отсчет углов σ_1 и σ_6 , определяющих положение соответствующих кривошипов O_1N_1 и O_6N_6 , примем, как показано на рисунке 2.4, от вертикальной линии, параллельной положительному направлению оси Z . Принимая длину всех кривошипов одинаковой и равной r (то есть $O_iN_i = r, i = 1, 2, \dots, 6$), координаты точки N_1 из рисунков 2.3, а и 2.4 равны

$$\begin{aligned} x_{N_1} &= x_{O_1} + r \cdot \sin \sigma_1; \\ y_{N_1} &= y_{O_1}; \\ z_{N_1} &= r \cdot \cos \sigma_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

а координаты точки N_6 равны

$$\begin{aligned}
x_{N_6} &= x_{O_6} - r \cdot \sin \sigma_6; \\
y_{N_6} &= y_{O_6}; \\
z_{N_6} &= r \cdot \cos \sigma_6.
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

Для расчета координат остальных точек (N_2, N_3, N_4, N_5) полученные выражения (2.1) и (2.2) можно использовать как базовые инвариантные выражения в плоскости π_1 , преобразующиеся к другой плоскости (π_2 или π_3) путем поворота плоскости π_1 на угол Ω_i , кратный 120° или $120^\circ + 180^\circ$. В этом случае общие аналитические выражения для расчета координат точек N_i примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_{N_i} &= x_{O_i} - r \cdot \sin \sigma_i \cdot \cos \Omega_i; \\
y_{N_i} &= y_{O_i} + r \cdot \sin \sigma_i \cdot \cos \Omega_i; \\
z_{N_i} &= z_{O_i} + r \cdot \cos \sigma_i = r \cdot \cos \sigma_i,
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

где $i = 2, 3, 4, 5$, или в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_{N_i} \\ y_{N_i} \\ z_{N_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_i & -\sin \Omega_i & 0 & x_{O_i} \\ \sin \Omega_i & \cos \Omega_i & 0 & y_{O_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \cdot \sin \sigma_i \\ 0 \\ r \cdot \cos \sigma_i \\ 1 \end{bmatrix}.
\tag{2.4}$$

Для точек O_i с нечетными номерами индексов в выражениях (2.3) и (2.4) необходимо принять

$$\Omega_1 = 0^\circ; \quad \Omega_3 = 120^\circ; \quad \Omega_5 = 240^\circ.$$

Для точек O_i с четными номерами индексов в выражениях (2.3) и (2.4) необходимо принять

$$\Omega_2 = \Omega_3 + 180^\circ; \quad \Omega_4 = \Omega_5 + 180^\circ; \quad \Omega_6 = \Omega_1 + 180^\circ.$$

Подставляя эти значения углов в (2.3) или (2.4), окончательно получим аналитические выражения для расчета координат всех шести точек N_i , которые сведены в таблицу 2.3.

Конструктивное исполнение рассматриваемого исполнительного механизма может быть аналитически описано векторным условием неизменности в процессе движения длин шатунов $N_i A_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$):

$$\left| \vec{R}^{(N_i)} - \vec{R}^{(A_i)} \right| = l,
\tag{2.5}$$

где $\vec{R}^{(N_i)}$ и $\vec{R}^{(A_i)}$ – радиусы-векторы точек N_i и A_i в декартовой системе координат основания XYZ соответственно.

Таблица 2.3 – Координаты точек N_i

i	x	y	z
1	$x_{O_1} + r \cdot \sin \sigma_1$	y_{O_1}	$r \cdot \cos \sigma_1$
2	$x_{O_2} + \frac{1}{2} r \cdot \sin \sigma_2$	$y_{O_2} + \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \sin \sigma_2$	$r \cdot \cos \sigma_2$
3	$x_{O_3} - \frac{1}{2} r \cdot \sin \sigma_3$	$y_{O_3} - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \sin \sigma_3$	$r \cdot \cos \sigma_3$
4	$x_{O_4} + \frac{1}{2} r \cdot \sin \sigma_4$	$y_{O_4} - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \sin \sigma_4$	$r \cdot \cos \sigma_4$
5	$x_{O_5} - \frac{1}{2} r \cdot \sin \sigma_5$	$y_{O_5} + \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \sin \sigma_5$	$r \cdot \cos \sigma_5$
6	$x_{O_6} - r \cdot \sin \sigma_6$	y_{O_6}	$r \cdot \cos \sigma_6$

Значения координат вектора $\vec{R}^{(N_i)} = (x^{N_i}, y^{N_i}, z^{N_i})$ необходимо находить в зависимости от обобщенных угловых координат σ_i по выражениям, приведенным в таблице 2.3.

Радиус-вектор $\vec{R}^{(A_i)} = (x^{A_i}, y^{A_i}, z^{A_i})$ определяет положение каждой точки A_i , принадлежащей платформе, в системе координат XYZ . Для пересчета координат точек A_i из системы координат платформы в неподвижной системе координат XYZ необходимо воспользоваться матричным равенством

$$\vec{R}^{(A_i)} = M \cdot \vec{R}_{A_i}, \quad M = \begin{bmatrix} & & & x \\ & [M_{\varphi, \theta, \psi}] & & y \\ & 3 \times 3 & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$M_{\varphi, \theta, \psi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

x, y, z – координаты положения платформы в системе координат XYZ ; φ, θ, ψ – углы ориентации платформы.

С учетом того, что $z_{A_i} = 0$, получаем

$$\vec{R}_{A_i} = \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \\ z_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Тогда на основании (2.7) и (2.8) по выражению (2.6) может быть найден вектор $\vec{R}^{(A_i)}$, определяющий положение любой точки A_i , представленной в системе координат XYZ , то есть получим в матричном виде вектор $\vec{R}^{(A_i)}$:

$$\vec{R}^{(A_i)} = \left[x^{(A_i)} \quad y^{(A_i)} \quad z^{(A_i)} \quad 1 \right]^T. \quad (2.9)$$

С учетом (2.7) – (2.9) векторное условие (2.5) для всех шести шатунов параллельного механизма можно записать в скалярном виде:

$$(x^{A_i} - x^{N_i})^2 + (y^{A_i} - y^{N_i})^2 + (z^{A_i} - z^{N_i})^2 = l_i^2, \quad (2.10)$$

где $i = 1, 2, \dots, 6$.

Выполнив подстановку координат x^{A_i} , y^{A_i} , z^{A_i} и x^{N_i} , y^{N_i} , z^{N_i} в выражение (2.10) с учетом (2.6) – (2.9) окончательно получим систему из шести уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^{A_1}, x^{N_1}, y^{A_1}, y^{N_1}, z^{A_1}, z^{N_1}) - l^2 = 0; \\ F_2(x^{A_2}, x^{N_2}, y^{A_2}, y^{N_2}, z^{A_2}, z^{N_2}) - l^2 = 0; \\ F_3(x^{A_3}, x^{N_3}, y^{A_3}, y^{N_3}, z^{A_3}, z^{N_3}) - l^2 = 0; \\ F_4(x^{A_4}, x^{N_4}, y^{A_4}, y^{N_4}, z^{A_4}, z^{N_4}) - l^2 = 0; \\ F_5(x^{A_5}, x^{N_5}, y^{A_5}, y^{N_5}, z^{A_5}, z^{N_5}) - l^2 = 0; \\ F_6(x^{A_6}, x^{N_6}, y^{A_6}, y^{N_6}, z^{A_6}, z^{N_6}) - l^2 = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где функции F_i имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1(x^{A_1}, x^{N_1}, y^{A_1}, y^{N_1}, z^{A_1}, z^{N_1}) = & \\ = (x_{A_1} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + y_{A_1} (-\sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi) + & \\ + z_{A_1} (\sin \varphi \cdot \sin \psi + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi) + x - (x_{O_1} + r \cdot \sin \sigma_1))^2 + & \\ + (x_{A_1} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta + y_{A_1} (\cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi) + & \\ + z_{A_1} (-\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi) + y - y_{O_1})^2 + & \\ + (-x_{A_1} \cdot \sin \theta + y_{A_1} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi + z_{A_1} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi + z - r \cdot \cos \sigma_1)^2; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x^{A_2}, x^{N_2}, y^{A_2}, y^{N_2}, z^{A_2}, z^{N_2}) = & \\
= & (x_{A_2} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_2} (-\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_2} (\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + x - (x_{O_2} + 0,5 \cdot r \cdot \sin\sigma_2))^2 + \\
& + (x_{A_2} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_2} (\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_2} (-\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + y - (y_{O_2} + 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot \sin\sigma_2))^2 + \\
& + (-x_{A_2} \cdot \sin\theta + y_{A_2} \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + z_{A_2} \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + z - r \cdot \cos\sigma_2)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x^{A_3}, x^{N_3}, y^{A_3}, y^{N_3}, z^{A_3}, z^{N_3}) = & \\
= & (x_{A_3} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_3} (-\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_3} (\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + x - (x_{O_3} - 0,5 \cdot r \cdot \sin\sigma_3))^2 + \\
& + (x_{A_3} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_3} (\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_3} (-\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + y - (y_{O_3} - 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot \sin\sigma_3))^2 + \\
& + (-x_{A_3} \cdot \sin\theta + y_{A_3} \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + z_{A_3} \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + z - r \cdot \cos\sigma_3)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4(x^{A_4}, x^{N_4}, y^{A_4}, y^{N_4}, z^{A_4}, z^{N_4}) = & \\
= & (x_{A_4} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_4} (-\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_4} (\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + x - (x_{O_4} + 0,5 \cdot r \cdot \sin\sigma_4))^2 + \\
& + (x_{A_4} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_4} (\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_4} (-\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + y - (y_{O_4} - 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot \sin\sigma_4))^2 + \\
& + (-x_{A_4} \cdot \sin\theta + y_{A_4} \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + z_{A_4} \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + z - r \cdot \cos\sigma_4)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5(x^{A_5}, x^{N_5}, y^{A_5}, y^{N_5}, z^{A_5}, z^{N_5}) = & \\
= & (x_{A_5} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_5} (-\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_5} (\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + x - (x_{O_5} - 0,5 \cdot r \cdot \sin\sigma_5))^2 + \\
& + (x_{A_5} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + y_{A_5} (\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi) + \\
& + z_{A_5} (-\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi) + y - (y_{O_5} + 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot \sin\sigma_5))^2 + \\
& + (-x_{A_5} \cdot \sin\theta + y_{A_5} \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + z_{A_5} \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + z - r \cdot \cos\sigma_5)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6(x^{A_6}, x^{N_6}, y^{A_6}, y^{N_6}, z^{A_6}, z^{N_6}) = & \\
= (x_{A_6} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + y_{A_6} (-\sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi) + & \\
+z_{A_6} (\sin \varphi \cdot \sin \psi + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi) + x - (x_{O_6} - r \cdot \sin \sigma_6))^2 + & \\
+(x_{A_6} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta + y_{A_6} (\cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi) + & \\
+z_{A_6} (-\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi) + y - y_{O_6})^2 + & \\
+(-x_{A_6} \cdot \sin \theta + y_{A_6} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi + z_{A_6} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi + z - r \cdot \cos \sigma_6)^2. &
\end{aligned}$$

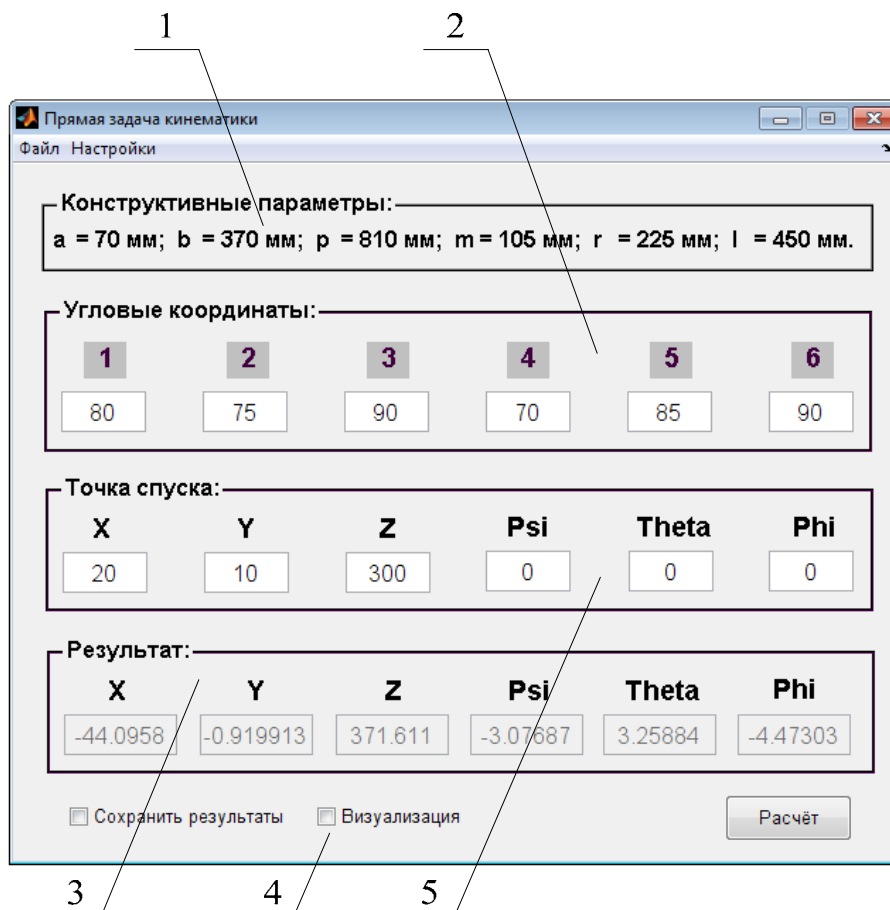
В выражениях (2.11) входные переменные $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и выходные переменные $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ связаны через трансцендентные нелинейные выражения, не позволяющие разрешить выходные переменные в явном виде. Поэтому решение прямой задачи кинематики в сделанной постановке возможно только численными методами с помощью современных математических пакетов программ.

Пример

Решим прямую задачу кинематики для механизма, показанного на рисунке 2.1, для следующих угловых координат кривошипов механизма: $\sigma_1 = 95^\circ$; $\sigma_2 = 80^\circ$; $\sigma_3 = 70^\circ$; $\sigma_4 = 90^\circ$; $\sigma_5 = 85^\circ$; $\sigma_6 = 60^\circ$. В качестве конструктивных параметров примем $a = 70$ мм; $b = 370$ мм; $p = 810$ мм; $m = 105$ мм; $r = 225$ мм; $l = 450$ мм.

Решение прямой задачи кинематики основывается на численном поиске значений $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, определяющих положение и ориентацию платформы исполнительного механизма, для заданных обобщенных угловых координат $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ подвижных элементов управляющих двигателей или кривошипов механизма. Для численного решения системы нелинейных уравнений (2.11) нами был использован пакет Optimization Toolbox, входящий в состав среды моделирования MATLAB, с помощью которого была разработана программа решения прямой задачи кинематики. Интерфейс разработанной нами программы представлен на рисунке 2.5.

Поиск решения (численное решение системы уравнений) в программе начинается от точки спуска, определяемой входным вектором начальных значений $[x_0, y_0, z_0, \varphi_0, \theta_0, \psi_0]$, и ведется в соответствии с выбранным методом оптимизации. Процесс оптимизации происходит до тех пор, пока значение оценочной функции в процессе итерационного поиска не станет меньше заданной точности или новые значения искомых переменных в процессе оптимизации будут изменяться на величину меньшую, чем заданное предельно допустимое значение. В качестве точки спуска были использованы следующие начальные значения: $x_0 = 50$ мм, $y_0 = 50$ мм, $z_0 = 300$ мм, $\psi_0 = 0^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$.



- 1 – конструктивные параметры исполнительного механизма;
 2 – угловые координаты кривошипов; 3 – вычисленные координаты положения и ориентация платформы; 4 – режим визуализации решения; 5 – вектор начальных значений поиска решения

Рисунок 2.5 – Интерфейс программы решения прямой задачи кинематики

При этом точность поиска решения в программе задается в виде параметра, определяющего как предельную точность расчета оценочной функции, так и минимально-допустимые вариации искоемых переменных в процессе итерационного поиска решения.

В результате численного расчета с помощью разработанной программы в среде MATLAB получены следующие результаты, описывающие положение и ориентацию платформы механизма:

$$x = 81,522 \text{ мм}; \quad y = 12,683 \text{ мм}; \quad z = 372,674 \text{ мм};$$

$$\psi = 1,998^\circ; \quad \theta = -8,151^\circ; \quad \varphi = -4,652^\circ.$$

Разработанная программа также позволяет визуализировать полученное решение прямой задачи кинематики для наглядного представления положения и ориентации подвижной платформы механизма. Пример такой визуализации показан на рисунке 2.6.

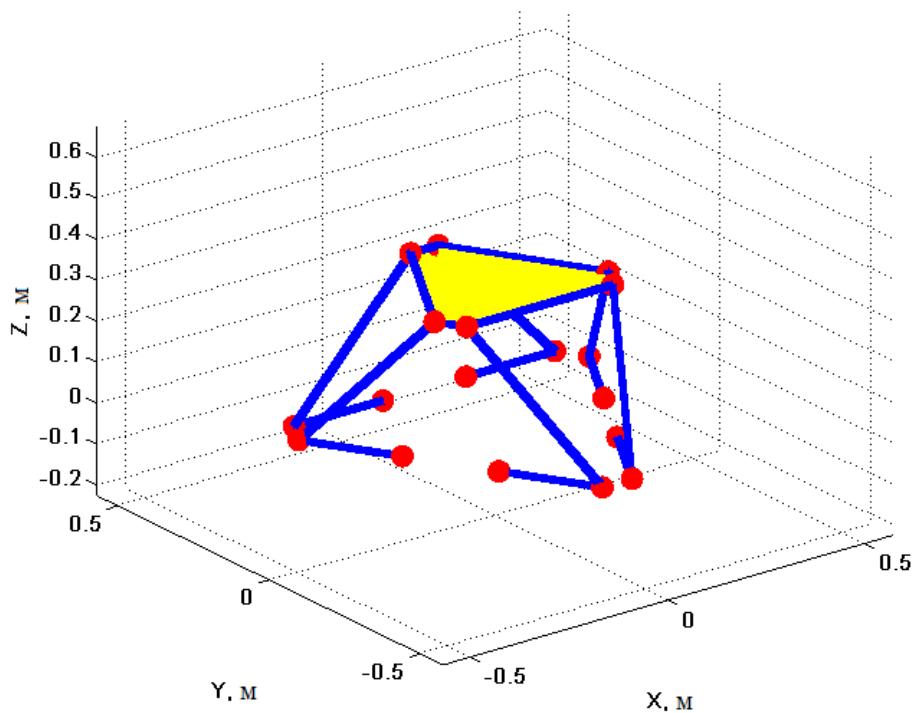


Рисунок 2.6 – Пример визуализации решения прямой задачи кинематики

Необходимо отметить, что при построении программы движений путем решения прямой задачи кинематики в качестве точки спуска целесообразным является использование решения, полученного на предыдущем шаге, так как два последовательных решения (соседние точки траектории) лежат очень близко друг к другу.

Задача 2.2 Обратная задача кинематики

Обратная задача кинематики исполнительного механизма на шести поворотных двигателях (см. рисунок 2.2) заключается в нахождении обобщенных угловых координат ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$) подвижных элементов двигателей или кривошипов механизма, которые обеспечивают заданное положение (x, y, z) и ориентацию (φ, θ, ψ) подвижной платформы в пространстве.

К решению обратной задачи кинематики существует несколько подходов. Наиболее часто используются методы матричной алгебры, итерационные численные методы, геометрические методы, аналитические методы, а также различные их сочетания. Решение обратной задачи кинематики нами осуществлено на базе геометро-аналитического подхода, основанного на аналитической геометрии в трехмерном пространстве и матричных преобразованиях. Предложенный подход позволил получить аналитические уравнения связи входных и выходных переменных, разрешенные в явном виде относительно искомым обобщенных угловых координат $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$, что не удавалось другими методами.

При разработке математической модели решения обратной задачи кинематики учитывалась особенность функционирования рассматриваемого

параллельного механизма, заключающаяся в сохранении одной конфигурации механизма во всем диапазоне угловых перемещений $\sigma_{i_{\min}} \leq \sigma_i \leq \sigma_{i_{\max}}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) кривошипов. Это условие позволило использовать математические методы аналитической геометрии, дающие однозначное решение поставленной задачи в явном виде.

Из рисунка 2.3, *a* видно, что движения кривошипов r_1, r_2, \dots, r_6 осуществляются в секущих плоскостях π_1, π_2, π_3 , уравнения которых следующие.

Плоскость π_1 :
$$y - \frac{1}{2\sqrt{3}}(a + 2b) = 0;$$

плоскость π_2 :
$$-x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{3}(a + 2b) = 0;$$

плоскость π_3 :
$$x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{3}(a + 2b) = 0.$$

В секущих плоскостях π_1, π_2, π_3 кривошипы совершают вращательные движения, угол поворота которых σ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) отсчитывается от вертикальных положений (линий, проходящих через точки O_i параллельно оси Z). На рисунке 2.7 на примере кривошипов, расположенных в плоскости π_1 , показано задание углов σ_1 и σ_6 .

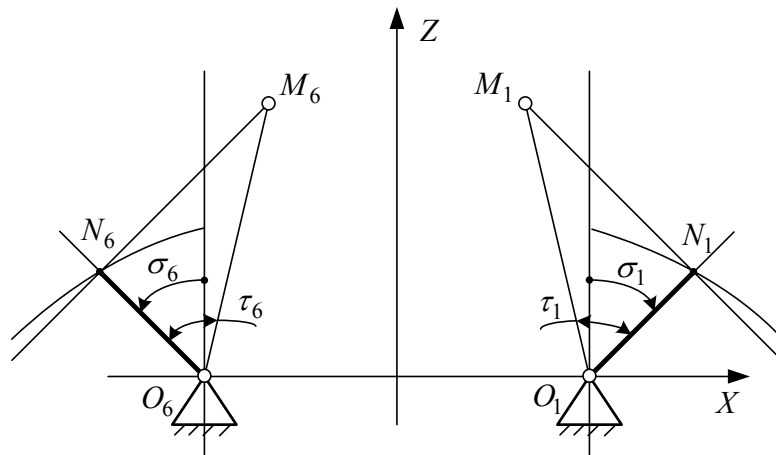


Рисунок 2.7 – Задание углов поворота кривошипов механизма

По сути, рисунок 2.7 представляет собой геометрическую модель нахождения угловых координат кривошипов в зависимости от положения и ориентации рабочей платформы. Точки O_1 и O_6 описывают положение осей вращения двигателей ($O_1O_2 = 2m$), O_1N_1 и O_6N_6 представляют, соответственно, кривошипы r_1 и r_6 , а точки M_1 и M_6 – пересечение перпендикуляров, проведенных из точек A_1 и A_6 соответственно на плоскость π_1 . Углы τ_1 и τ_6 – вспомогательные углы, необходимые для расчета углов σ_1 и σ_6 .

Из рисунка 2.7 видно, что координаты точки M_1 следующие:

$$x_{M_1} = x^{A_1}; \quad y_{M_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a + 2b); \quad z_{M_1} = z^{A_1}.$$

Соответственно, координаты точки M_6 следующие:

$$x_{M_6} = x^{A_6}; \quad y_{M_6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a + 2b); \quad z_{M_6} = z^{A_6}.$$

Координаты остальных точек M_i ($i = 2, 3, 4, 5$) на секущих плоскостях π_2 и π_3 не так очевидны, поэтому ниже представлен их расчет. На основании рисунка 2.7 уравнение секущей плоскости π_2 имеет следующий вид:

$$-x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{3}(a + 2b) = 0 \quad (2.12)$$

или, в виде уравнения плоскости в отрезках, –

$$\frac{x}{\frac{1}{3}(a + 2b)} + \frac{y}{-\frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)} = 1. \quad (2.13)$$

Из уравнений (2.12) и (2.13) следует, что вектор нормали к плоскости π_2 имеет координаты $\vec{n} = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. С учетом этого уравнение проецирующей прямой из точки A_2 или A_3 будет иметь вид:

– для точки A_2 :
$$\frac{x - x^{A_2}}{-1} = \frac{y - y^{A_2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}; \quad (2.14)$$

– для точки A_3 :
$$\frac{x - x^{A_3}}{-1} = \frac{y - y^{A_3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}. \quad (2.15)$$

Рассмотрев совместно уравнения (2.12) и (2.14), а также (2.12) и (2.15), получим координаты точки M_2 :

$$x_{M_2} = \frac{1}{4}x^{A_2} + \frac{\sqrt{3}}{4}y^{A_2} + \frac{1}{4\sqrt{3}}(a + 2b) = \frac{1}{4} \cdot \left(x^{A_2} + \sqrt{3}y^{A_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)\right);$$

$$y_{M_2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3}x^{A_2} + 3y^{A_2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)\right);$$

$$z_{M_2} = z^{A_2}.$$

Соответственно, координаты точки M_3 будут равны

$$\begin{aligned}x_{M_3} &= \frac{1}{4} \cdot \left(x^{A_3} + \sqrt{3}y^{A_3} + \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b) \right); \\y_{M_3} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3}x^{A_3} + 3y^{A_3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b) \right); \\z_{M_3} &= z^{A_3} .\end{aligned}$$

Аналогично, рассмотрев проецирование точек A_4 и A_5 на плоскость π_3 , получим координаты точки M_4 :

$$\begin{aligned}x_{M_4} &= \frac{1}{4} \cdot \left(x^{A_4} - \sqrt{3}y^{A_4} - (b + 2a) \right); \\y_{M_4} &= y^{A_4} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} x^{A_4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}(b + 2a); \\z_{M_4} &= z^{A_4}\end{aligned}$$

и координаты точки M_5 :

$$\begin{aligned}x_{A_5} &= \frac{1}{4} \cdot \left(x^{A_5} - \sqrt{3}y^{A_5} - (b + 2a) \right); \\y_{A_5} &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) y^{A_5} - \frac{\sqrt{3}}{4} x^{A_5} - \frac{1}{4\sqrt{3}}(b + 2a); \\z_{M_5} &= z^{A_5} .\end{aligned}$$

Расстояние от точек A_i до соответствующих плоскостей π_1, π_2, π_3 можно определить по формуле

$$h_i = \frac{|T_1x_{A_i} + T_2y_{A_i} + T_3z_{A_i} + T_4|}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}}, \quad (2.16)$$

где T_1, T_2, T_3 – коэффициенты при переменных x, y, z в уравнениях секущих плоскостей; T_4 – свободные члены в уравнениях плоскостей.

В результате проведенных преобразований получим:

$$\begin{aligned}h_1 &= y^{A_1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(b + 2a); \\h_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^{A_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}y^{A_2} + \frac{1}{3}(b + 2a) \right); \\h_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-x^{A_3} + \frac{1}{\sqrt{3}}y^{A_3} + \frac{1}{3}(b + 2a) \right);\end{aligned}$$

$$h_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^{A_4} + \frac{1}{\sqrt{3}} y^{A_4} + \frac{1}{3}(b + 2a) \right);$$

$$h_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^{A_5} + \frac{1}{\sqrt{3}} y^{A_5} + \frac{1}{3}(b + 2a) \right);$$

$$h_6 = y^{A_6} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(b + 2a).$$

Дальнейшее решение обратной задачи кинематики осуществляется в секущей плоскости π_1 путем нахождения искомым углов σ_1 и σ_6 . Затем аналогично этому выполняется расчет углов σ_2 и σ_3 в секущей плоскости π_2 и углов σ_4 и σ_5 в секущей плоскости π_3 .

Из рисунка 2.7 видно, что углы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ соответственно равны

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_1 - \delta_1, & \text{если } x_M < x_{O_1}; & & \sigma_1 &= \tau_1 + \delta_1, & \text{если } x_M > x_{O_1}; \\ \sigma_2 &= \tau_2 - \delta_2, & \text{при } x_{M_2} < x_{O_2}; & & \sigma_2 &= \tau_2 + \delta_2, & \text{при } x_{M_2} > x_{O_2}; \\ \sigma_3 &= \tau_3 - \delta_3, & \text{при } x_{M_3} > x_{O_3}; & & \sigma_3 &= \tau_3 + \delta_3, & \text{при } x_{M_3} < x_{O_3}; \\ \sigma_4 &= \tau_4 - \delta_4, & \text{при } x_{M_4} < x_{O_4}; & & \sigma_4 &= \tau_4 + \delta_4, & \text{при } x_{M_4} > x_{O_4}; \\ \sigma_5 &= \tau_5 - \delta_5, & \text{при } x_{M_5} > x_{O_5}; & & \sigma_5 &= \tau_5 + \delta_5, & \text{при } x_{M_5} < x_{O_5}; \\ \sigma_6 &= \tau_6 - \delta_6, & \text{если } x_{M_6} < x_{O_6}; & & \sigma_6 &= \tau_6 + \delta_6, & \text{если } x_{M_6} > x_{O_6}, \end{aligned}$$

где

$$\tau_i = \arccos \frac{(O_i M_i)^2 + r_i^2 - l_i^2 + h_i^2}{2(O_i M_i) \cdot r_i};$$

$$O_i M_i = \sqrt{(x_{M_i} - x_{O_i})^2 + (y_{M_i} - y_{O_i})^2 + (z_{M_i} - z_{O_i})^2};$$

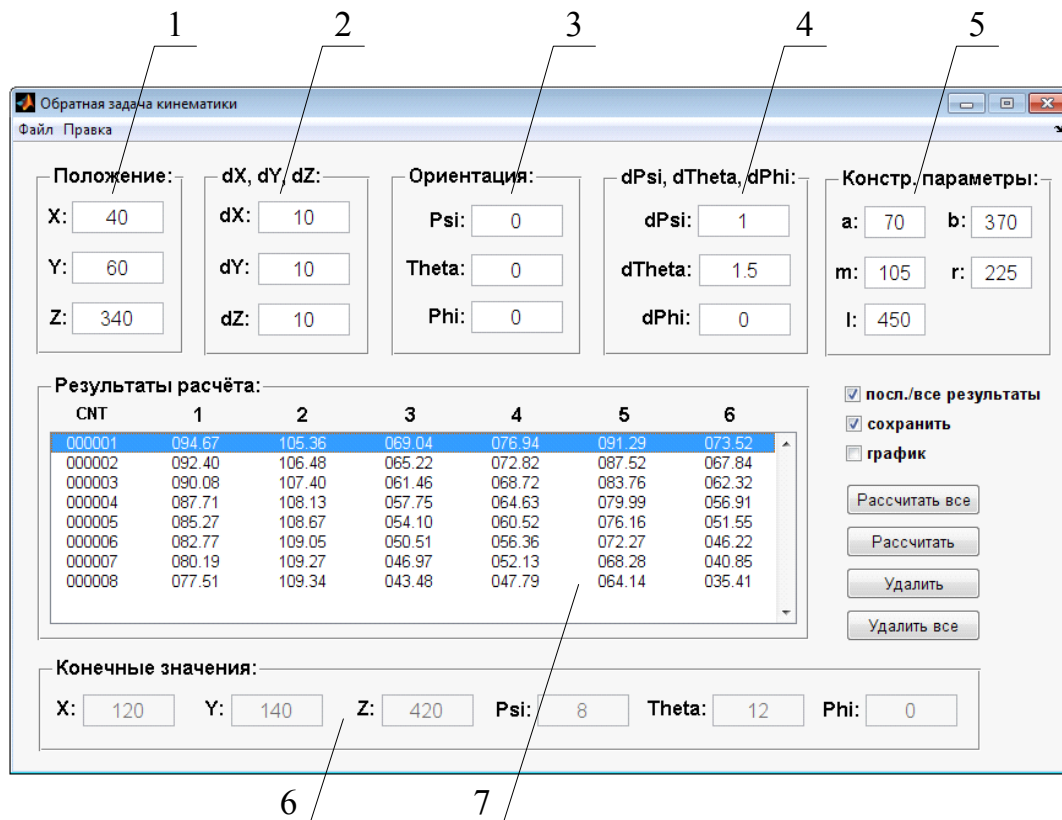
$$\delta_i = \frac{|z^{A_i}|}{O_i M_i}.$$

Таким образом, в результате проведенных математических исследований удалось аналитически, без применения численных методов, решить обратную задачу кинематики для рассматриваемого параллельного механизма и получить вычислительный алгоритм, основанный на явном выражении искомым параметров, формирующих движение кривошипов.

Пример

Рассмотрим случай итерационного поиска положений кривошипов, соответствующих изменению позиции и ориентации платформы из начального состояния $x_0 = 0$ мм; $y_0 = 0$ мм; $z_0 = 340$ мм; $\varphi_0 = 0^\circ$; $\theta_0 = 0^\circ$; $\psi_0 = 0^\circ$ при пошаговых инкрементных приращениях, равных $\Delta x = 5$ мм; $\Delta y = 5$ мм; $\Delta z = 2$ мм; $\Delta\varphi = 0^\circ$; $\Delta\theta = -1^\circ$; $\Delta\psi = 1^\circ$.

На основании описанной выше методики в среде MATLAB нами реализована программа для решения обратной задачи кинематики, интерфейс которой представлен на рисунке 2.8.



1 – положение платформы; 2 – инкрементные приращения по x, y, z ;
 3 – ориентация платформы; 4 – инкрементные приращения по φ, θ, ψ ;
 5 – конструктивные параметры механизма; 6 – конечные ориентация и положение платформы; 7 – рассчитанные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ обобщенных угловых координат

Рисунок 2.8 – Интерфейс программы решения обратной задачи кинематики

В результате расчета по разработанной программе на 27-й итерации конечное состояние платформы будет следующим: $x = 135$ мм; $y = 135$ мм; $z = 394$ мм; $\varphi = 9^\circ$; $\theta = -27^\circ$; $\psi = 27^\circ$. Характер изменения значений обобщенных угловых координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ при перемещении платформы показан на графиках, представленных на рисунке 2.9.

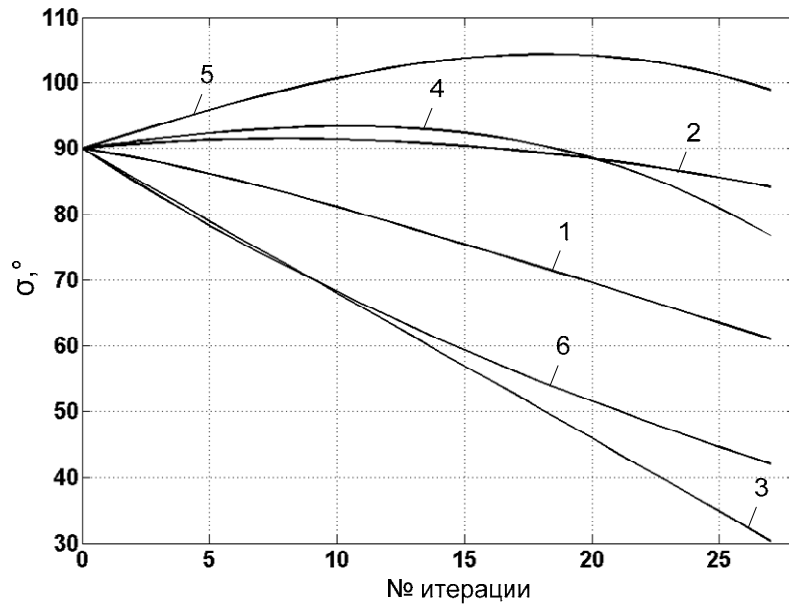


Рисунок 2.9 – Графики изменения обобщенных угловых координат механизма $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$

Как видно из рисунка 2.9, изменение обобщенных угловых координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ может иметь как линейный, так и нелинейный характер.

На рисунке 2.10 для рассматриваемого механизма (см. рисунок 2.1) с конструктивными параметрами $a = 70$ мм, $b = 370$ мм, $m = 105$ мм, $r = 225$ мм, $l = 450$ мм представлены рабочие области.

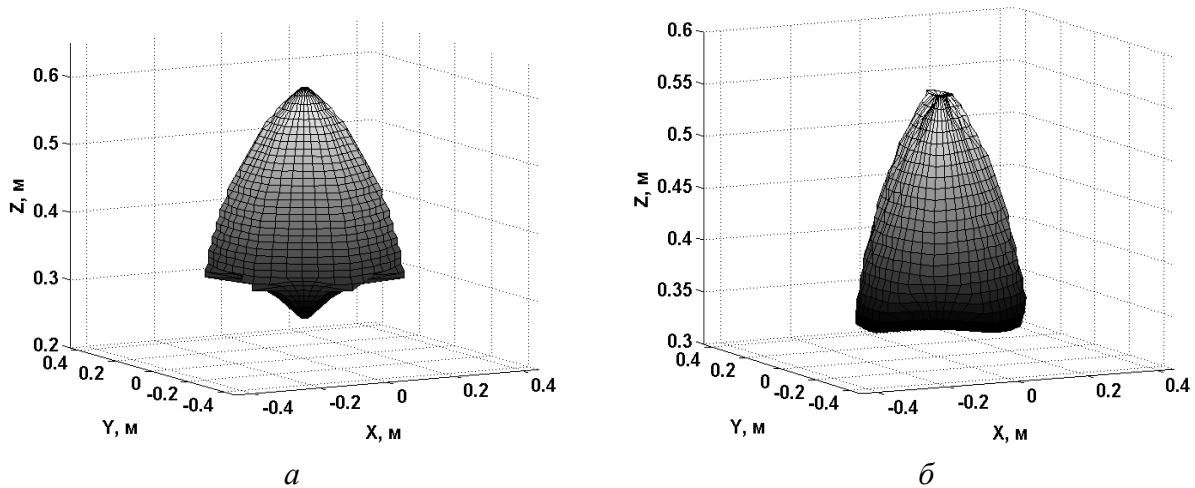


Рисунок 2.10 – Рабочие области исполнительного механизма

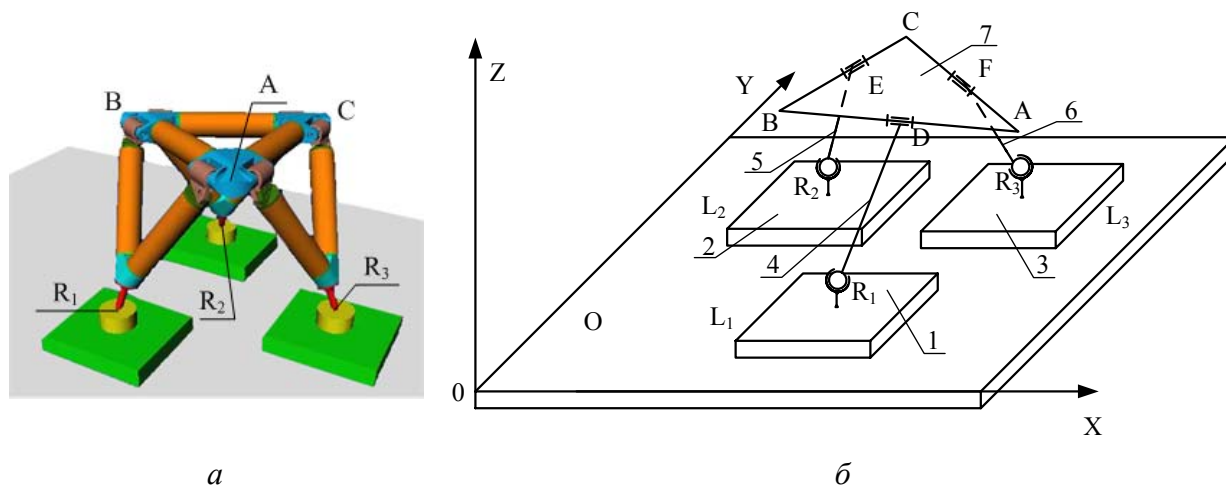
Эти области рассчитаны с помощью разработанной программы для двух случаев ориентации (углов Эйлера) платформы:

- а) $\varphi = 0^\circ, \theta = 0^\circ, \psi = 0^\circ$;
- б) $\varphi = 10^\circ, \theta = 10^\circ, \psi = 10^\circ$.

Из рисунка 2.10 также следует, что рабочие области исполнительного механизма существенно зависят от углов Эйлера φ , θ , ψ , описывающих ориентацию платформы. При этом нужно отметить, что с увеличением или уменьшением углов φ , θ , ψ и форма, и объем рабочей области изменяются в соответствии с кинематическими и конструктивными параметрами механизма. Построение подобных рабочих областей позволяет исследовать и правильно оценивать предельные возможности системы перемещений в трехмерном пространстве.

3 СИСТЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТРЕХ ПЛАНАРНЫХ ПРИВОДОВ И МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКИ

Рассмотрим систему перемещений с шестью степенями свободы, представленную на рисунке 3.1.



*1, 2, 3 – планарные позиционеры;
4, 5, 6 – шатуны; 7 – подвижная платформа;
а – структура; б – кинематическая схема*

Рисунок 3.1 – Система перемещений с шестью степенями свободы

Система перемещений (рисунок 3.1, *а*) представляет собой пространственный механизм, кинематическая цепь которого (рисунок 3.1, *б*) состоит из семи подвижных звеньев ($n = 7$). Из них три входных или ведущих звена 1, 2, 3 в виде индукторов планарных позиционеров, каждый из которых, являясь подвижным элементом соответствующего привода, обеспечивает любое задаваемое сочетание двух ортогональных перемещений по координатам x и y , принимаемым вдоль зубцов в соответствии с нарезкой статора O . Выходным звеном механизма является платформа 7 в виде треугольной площадки, сложное движение которой соответствует назначению механизма, кинематическому описанию самой технологической операции. В механизме также присутствуют промежуточные подвижные звенья 4, 5, 6, называемые шатунами, которые структурно и кинематически связывают подвижную платформу 7 и ведущие звенья 1, 2, 3. В кинематической цепи рассматриваемого механизма все подвижные звенья 1, 2, ..., 7 и неподвижное O связаны в определенном порядке кинематическими парами:

- сферическими R_1, R_2, R_3 , относящимися к парам третьего класса;
- плоскостными L_1, L_2, L_3 , относящимися к парам четвертого класса;
- вращательными D, E, F .

За счет именно такого сочетания кинематических пар и в последовательности, представленной на рисунке 3.1, б, этот механизм позволяет выполнять перемещение подвижной площадки в неподвижной системе $OXYZ$, связанной с неподвижным основанием (статором), с шестью степенями свободы.

Линейные параметры x_p, y_p, z_p и угловые параметры $\varphi_p, \theta_p, \psi_p$ позволяют сформировать матрицу M_{07} четвертого порядка, которая в однородных координатах определяет положение площадки, представленной треугольником ΔABC на рисунке 3.1, б, в неподвижной системе координат $OXYZ$ в виде

$$M_{07} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p \cos \psi_p - & \cos \varphi_p \sin \theta_p + & \sin \varphi_p \sin \theta_p & x_p \\ -\sin \varphi_p \cos \theta_p \sin \psi_p & +\sin \varphi_p \cos \theta_p \cos \psi_p & & \\ -\sin \varphi_p \cos \psi_p - & -\sin \varphi_p \sin \psi_p + & \cos \varphi_p \sin \theta_p & y_p \\ -\cos \varphi_p \cos \theta_p \sin \psi_p & +\cos \varphi_p \cos \psi_p \cos \psi_p & & \\ \sin \theta_p \sin \psi_p & -\sin \theta_p \cos \psi_p & \cos \psi_p & z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

При этом параметры движения площадки $x_p, y_p, z_p, \varphi_p, \theta_p, \psi_p$, входящие в матрицу M_{07} , зависят как от входных параметров $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$, так и от конструктивных параметров схемы механизма и характера кинематических связей в соединениях звеньев.

Для рассматриваемой системы перемещений с шестью степенями свободы для ее системы управления необходимо решать известные в теории механизмов и машин две задачи кинематики: прямую и обратную, которые для рассматриваемого случая формулируются в следующем виде.

Прямая задача кинематики состоит в определении параметров $x_p, y_p, z_p, \varphi_p, \theta_p, \psi_p$ матрицы M_{07} , определяющих положение и ориентацию площадки в пространстве \mathbf{R}^3 , в зависимости от задаваемых ортогональных координат или перемещений индукторов планарных приводов R_1, R_2, R_3 .

Обратная задача кинематики состоит в определении кинематических параметров движения (координат перемещений) приводов планарных позиционеров R_1, R_2, R_3 в зависимости от положения и ориентации площадки, задаваемой матрицей M_{07} .

При решении задач кинематики пространственного механизма системы перемещений с шестью степенями свободы в общем случае вначале необходимо описать его топологию путем задания необходимых систем координат на каждом подвижном звене и отсчетной системы координат на

статоре. Полное описание топологии может быть сведено к заданию следующих систем координат:

- неподвижной (отсчетной) системы координат на рабочей поверхности статора;
- одной или нескольких систем координат, описывающих конфигурацию рабочей платформы, среди которых одна главная, по которой формируется задание на программируемое движение;
- трех систем координат в каждом шаровом шарнире, которые позволяют кинематически связать соответствующие позиционеры и шатуны;
- трех систем координат шатунов и трех систем координат ведущих позиционеров.

Установление связей между системами координат или базисами отдельных звеньев позволяет не только решать прямую и обратную задачи, но и получать любые топологические, геометрические и кинематические характеристики, необходимые при решении задач управления и построения программируемых движений.

Для формализованного матричного представления пространственного механизма рассмотрим его расчетную схему в виде раскрывающегося тетраэдра из треугольников (рисунок 3.2, а). С каждым подвижным треугольником и каждым планарным позиционером свяжем пару ортогональных единичных векторов \vec{e} , расположение которых показано на рисунке 3.2, а.

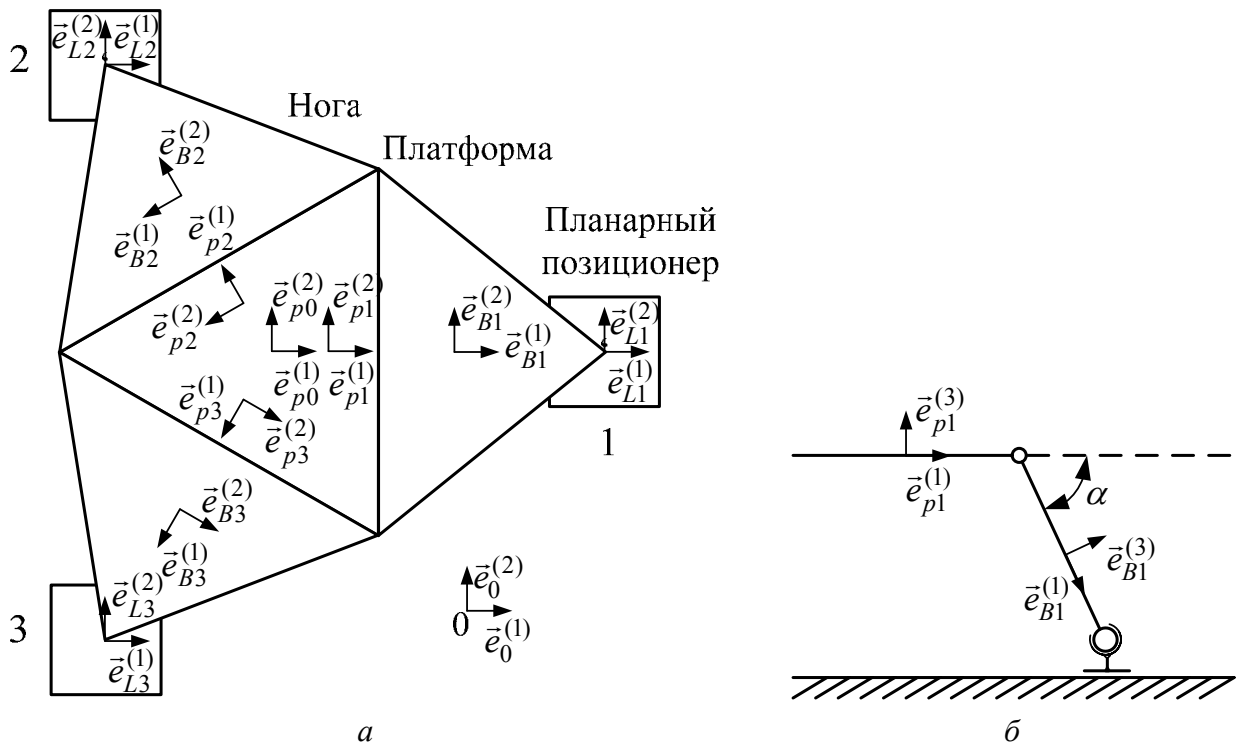


Рисунок 3.2 – Расположение систем координат на звеньях пространственного механизма

Третий единичный вектор, необходимый для задания ориентации звеньев в пространстве \mathbf{R}^3 , является дополняющим до правой тройки векторов двух исходных, показанных на рисунке 3.2, *a*. Таким образом, саму платформу и ее кинематические связи с позиционерами наиболее удобно задавать ортогональными парами $\{\bar{e}_{p0}^{(1)}; \bar{e}_{p0}^{(2)}\}$ – главный базис и $\{\bar{e}_{p1}^{(1)}; \bar{e}_{p1}^{(2)}\}$, $\{\bar{e}_{p2}^{(1)}; \bar{e}_{p2}^{(2)}\}$, $\{\bar{e}_{p3}^{(1)}; \bar{e}_{p3}^{(2)}\}$ – дополнительные базисы, введенные для удобства описания кинематических связей верхнего треугольника 7 и боковых треугольников 1, 2, 3. Боковые треугольники будем характеризовать базисами B_i соответственно $\{\bar{e}_{B1}^{(1)}; \bar{e}_{B1}^{(2)}\}$, $\{\bar{e}_{B2}^{(1)}; \bar{e}_{B2}^{(2)}\}$ и $\{\bar{e}_{B3}^{(1)}; \bar{e}_{B3}^{(2)}\}$. Подвижные планарные позиционеры 1, 2, 3 будем задавать базисами L_i соответственно $\{\bar{e}_{L1}^{(1)}; \bar{e}_{L1}^{(2)}\}$, $\{\bar{e}_{L2}^{(1)}; \bar{e}_{L2}^{(2)}\}$ и $\{\bar{e}_{L3}^{(1)}; \bar{e}_{L3}^{(2)}\}$. В обозначениях базисных векторов верхний индекс указывает на номер базисного вектора в базисе, первый нижний индекс указывает на принадлежность к конкретному типовому звену, а второй нижний индекс указывает на порядковый номер рассматриваемого звена.

Отсчетный базис, связанный с неподвижным статором, обозначим $\{\bar{e}_0^{(1)}; \bar{e}_0^{(2)}\}$. Для описания положений звеньев в шаровых шарнирах был выбран способ, основанный на углах Эйлера, так как он не требует значительной вычислительной процедуры при однозначности представления. Как известно, углы Эйлера φ , θ , ψ описывают три последовательных поворота: собственное вращение φ , задаваемое матрицей E_R , нутацию θ , задаваемую матрицей E_N , и прецессию ψ , задаваемую матрицей E_P . Эти матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_R &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 E_N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \\
 E_P &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

В итоге результирующий поворот координатной системы ноги B_i относительно системы координат соответствующего позиционера L_i запишется в виде следующей матрицы преобразования:

$$E_{B_i, L_i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \psi_i - & \cos \varphi_i \sin \theta_i + & \sin \varphi_i \sin \theta_i \\ -\sin \varphi_i \cos \theta_i \sin \psi_i & +\sin \varphi_i \cos \theta_i \cos \psi_i & \\ -\sin \varphi_i \cos \psi_i - & -\sin \varphi_i \sin \psi_i + & \cos \varphi_i \sin \theta_i \\ -\cos \varphi_i \cos \theta_i \sin \psi_i & +\cos \varphi_i \cos \theta_i \cos \psi_i & \\ \sin \theta_i \sin \psi_i & -\sin \theta_i \cos \psi_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что поворот координатной системы B_i относительно подвижной системы координат статора опишется матрицей $E_{B_i, 0}$, равной матрице E_{B_i, L_i} , то есть $E_{B_i, 0} = E_{B_i, L_i}$. Матричное преобразование из системы координат подвижной платформы 7 в систему координат B_i ног механизма на основании рисунка 3.2, б будет иметь следующий вид:

$$E_{P_i, B_i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & 0 & \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Учитывая выражение (3.4), матричное описание поворота на угол α_i в неподвижной системе координат статора запишется в виде матричного произведения $E_{P_i, 0} = E_{P_i, B_i} \cdot E_{B_i, 0}$, или в развернутом виде

$$E_{P_i, 0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \psi_i \cos \alpha_i - & \cos \varphi_i \sin \theta_i \cos \alpha_i + & \sin \varphi_i \sin \theta_i \cos \alpha_i \\ -\sin \varphi_i \cos \theta_i \sin \psi_i \cos \alpha_i + & +\sin \varphi_i \cos \theta_i \cos \psi_i \cos \alpha_i - & +\cos \beta_i \sin \alpha_i \\ +\sin \theta_i \sin \psi_i \sin \alpha_i & -\sin \theta_i \cos \psi_i \sin \alpha_i & \\ -\sin \varphi_i \cos \psi_i - & -\sin \varphi_i \sin \psi_i + & \cos \varphi_i \sin \theta_i \\ -\cos \varphi_i \cos \theta_i \sin \psi_i & +\cos \varphi_i \cos \theta_i \cos \psi_i & \\ -\cos \varphi_i \cos \psi_i \sin \alpha_i + & -\cos \varphi_i \sin \theta_i \sin \alpha_i - & -\sin \varphi_i \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ +\sin \varphi_i \cos \theta_i \sin \psi_i \sin \alpha_i + & -\sin \varphi_i \cos \theta_i \cos \psi_i \sin \alpha_i - & +\cos \theta_i \cos \alpha_i \\ +\sin \theta_i \sin \psi_i \cos \alpha_i & -\sin \theta_i \cos \psi_i \cos \alpha_i & \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Матричное описание расположения трех ног по отношению к подвижной платформе будем осуществлять матрицей $E_{P_0 i, P_i}$ вида

$$E_{P0i, Pi} = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i & 0 \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где β_i ($i = 1, 2, 3$) – угол, определяющий взаимное расположение трех дополнительных систем координат на подвижной платформе; при этом, исходя из рисунка 3.2, *a* и конструкции системы перемещений, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_2 = 120^\circ$, $\beta_3 = 240^\circ$.

Тогда описание поворотов β_i во вращательных шарнирах, представленное в неподвижной системе координат статора, будет иметь вид

$$E_{P0i,0} = E_{P0i, Pi} \cdot E_{Pi,0}.$$

Ориентацию подвижной платформы P , описываемую через углы Эйлера $\varphi_P, \theta_P, \psi_P$, связывающие систему координат P_0 платформы с неподвижной системой координат статора, можно описать матрицей $E_{P0,0}$:

$$E_{P0,0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_P \cos \psi_P - \cos \varphi_P \sin \psi_P + \sin \varphi_P \sin \theta_P & \cos \varphi_P \sin \psi_P + \sin \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & \sin \varphi_P \sin \theta_P \\ -\sin \varphi_P \cos \theta_P \sin \psi_P + \sin \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & + \sin \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & \cos \varphi_P \sin \theta_P \\ -\sin \varphi_P \cos \psi_P - \sin \varphi_P \sin \psi_P + \cos \varphi_P \sin \theta_P & -\sin \varphi_P \sin \psi_P + \cos \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & \cos \varphi_P \sin \theta_P \\ -\cos \varphi_P \cos \theta_P \sin \psi_P + \cos \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & + \cos \varphi_P \cos \theta_P \cos \psi_P & \cos \theta_P \\ \sin \theta_P \sin \psi_P & -\sin \theta_P \cos \psi_P & \cos \theta_P \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Следует отметить, что матрицы $E_{P01, P1}$, $E_{P02, P2}$, $E_{P03, P3}$ и $E_{P0,0}$ описывают одно и то же преобразование, только через разные ноги механизма. Поэтому, в конечном итоге, соответствующие элементы этих матриц равны, а, значит,

$$E_{P01, P1} = E_{P02, P2} = E_{P03, P3} = E_{P0,0}.$$

Задача 3.1 Прямая задача кинематики

Решение прямой задачи кинематики сводится к нахождению положения главной системы координат платформы в зависимости от положений трех позиционеров, задаваемых в неподвижной системе координат. Решение будем основывать на векторном представлении радиусов-векторов \vec{r}_{Pi} , определяющих в соответствии с рисунком 3.3 положение начала главной системы координат платформы:

$$\vec{r}_{Pi} = x_{Li} \vec{e}_0^{(1)} + y_{Li} \vec{e}_0^{(2)} + c \vec{e}_{Li}^{(3)} - l \vec{e}_{Bi}^{(1)} - d \vec{e}_{Pi}^{(1)}. \quad (3.8)$$

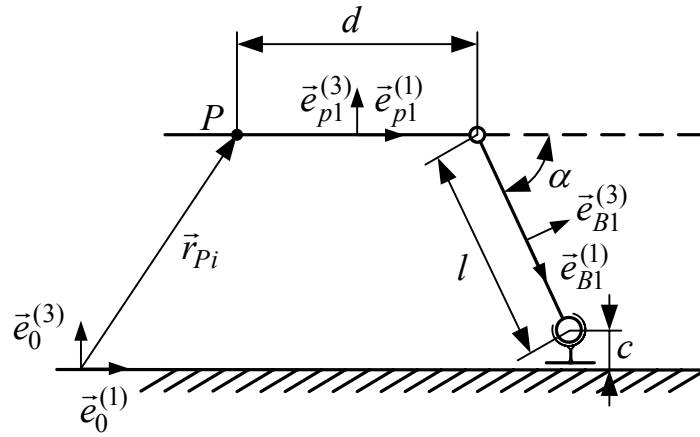


Рисунок 3.3 – Векторная интерпретация прямой задачи кинематики

В развернутом виде выражение (3.8) примет следующий вид:

$$\vec{r}_{Pi} = \begin{bmatrix} x_{Li} \\ y_{Li} \\ 0 \end{bmatrix} + E_{0,Li} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + E_{0,Bi} \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + E_{0,Pi} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) выражения для нахождения трех радиусов-векторов, соединяющих приводы с центром платформы, запишутся так:

$$\vec{r}_{P1} = \vec{r}_{L1} + E_{0,L1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + E_{0,B1} \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + E_{0,P1} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.10)$$

$$\vec{r}_{P2} = \vec{r}_{L2} + E_{0,L2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + E_{0,B2} \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + E_{0,P2} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (3.11)$$

$$\vec{r}_{P3} = \vec{r}_{L3} + E_{0,L3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} + E_{0,B3} \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + E_{0,P3} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

В результате из выражений (3.10) – (3.12) получим 9 уравнений, которые вместе с 9-ю уравнениями ориентации, вытекающими из (3.5), составят 18 уравнений математической модели прямой задачи с 18-ю неизвестными, среди которых 6 параметров $x_P, y_P, z_P, \varphi_P, \theta_P, \psi_P$, описывающих положение и ориентацию платформы в пространстве \mathbf{R}^3 , углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ во вращательных парах и углы Эйлера $\varphi_i, \theta_i, \psi_i$ ($i = 1, 2, 3$) положения звеньев 4, 5, 6 в сферических шарнирах.

Первые девять уравнений составляются на основании условия

$$\vec{r}_{P1} = \vec{r}_{P2} = \vec{r}_{P3} = \vec{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

а остальные девять получим из условия, что матрицы поворота $E_{P01,0}$, $E_{P02,0}$ и $E_{P03,0}$ должны совпадать, то есть

$$E_{P01,0} = E_{P02,0} = E_{P03,0} = E_{P0,0}. \quad (3.14)$$

Решение прямой задачи непосредственно по описанному выше алгоритму в матричном представлении весьма затруднительно, требует дополнительных исследований по математической модели с целью исключения зависимых уравнений и зависимых переменных параметров, описывающих кинематику механизма.

Однако прямая задача кинематики для рассматриваемого пространственного механизма может быть решена на основе матрично-векторного подхода и методов аналитической геометрии. Для этого рассмотрим расчетную геометрическую модель механизма, представленную геометрическим местом точек, характеризующим его текущую конфигурацию. Обозначим подвижную платформу механизма вершинами A , B и C треугольника ΔABC , которые получены пересечением осей соответствующих кинематических подвижностей (рисунок 3.4).

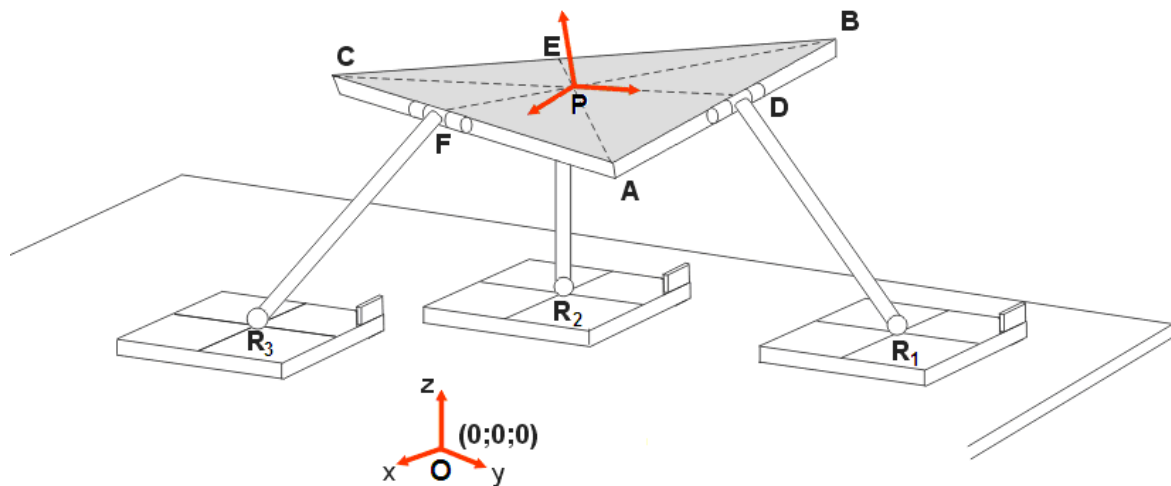


Рисунок 3.4 – Обобщенная модель пространственного механизма

В свою очередь, кинематические подвижности соответствующих треугольных ног системы перемещений с шестью степенями свободы задаются точками D , E , F с соответствующими векторами подвижностей \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CA} . Подвижные звенья механизма в принятой геометрической модели представлены линейными подвижными звеньями DR_1 , ER_2 и FR_3 .

При формировании расчетной математической модели были приняты следующие обозначения:

$$AB = BC = CA = a, \quad DR_1 = ER_2 = FR_3 = l.$$

С учетом этого длины высот или медиан равностороннего треугольника ΔABC будут равны $AE = BF = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. В свою очередь $AP = BP = CP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $DP = EP = FP = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а координаты точек D, E, F будут определяться по формулам

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B}{2}; \\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2}; \\ z_D = \frac{z_A + z_B}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_C}{2}; \\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2}; \\ z_E = \frac{z_B + z_C}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_F = \frac{x_C + x_A}{2}; \\ y_F = \frac{y_C + y_A}{2}; \\ z_F = \frac{z_C + z_A}{2}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Окончательные уравнения связей, накладываемые на точечное представление текущей конфигурации механизма (см. рисунок 3.4), определяемой взаимным расположением кинематических пар и звеньев, будут следующими:

$$\begin{cases} (x_{R1} - x_D)^2 + (y_{R1} - y_D)^2 + (z_{R1} - z_D)^2 = l^2; \\ (x_{R2} - x_E)^2 + (y_{R2} - y_E)^2 + (z_{R2} - z_E)^2 = l^2; \\ (x_{R3} - x_F)^2 + (y_{R3} - y_F)^2 + (z_{R3} - z_F)^2 = l^2; \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2; \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2; \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = a^2; \\ (x_{R1} - x_D) \cdot (x_B - x_A) + (y_{R1} - y_D) \cdot (y_B - y_A) + (z_{R1} - z_D) \cdot (z_B - z_A) = 0; \\ (x_{R2} - x_E) \cdot (x_C - x_B) + (y_{R2} - y_E) \cdot (y_C - y_B) + (z_{R2} - z_E) \cdot (z_C - z_B) = 0; \\ (x_{R3} - x_F) \cdot (x_A - x_C) + (y_{R3} - y_F) \cdot (y_A - y_C) + (z_{R3} - z_F) \cdot (z_A - z_C) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

В уравнениях системы (3.16) координаты точек на подвижной платформе пересчитываются в неподвижную систему координат статора с помощью приведенных выше матричных преобразований. При решении системы (3.16) необходимо учитывать, что в рассматриваемом механизме $z_{R1} = z_{R2} = z_{R3} = 0$ в соответствии с рисунком 3.4.

В результате вместо системы из 18-ти уравнений с 18-ю неизвестными, полученной из условий (3.13) и (3.14), имеем систему (3.16) из 9-ти уравнений с 9-ю неизвестными, в которой и уравнения, и неизвестные являются взаимно независимыми. Это существенно сокращает и упрощает численное решение прямой задачи кинематики, которая имеет входными параметрами 9 координат точек A, B, C , однозначно определяющих положение и ориентацию площадки 7 в пространстве \mathbf{R}^3 .

При необходимости 9 координат точек A, B, C могут быть пересчитаны в 6 независимых параметров движения платформы $x_P, y_P, z_P, \varphi_P, \theta_P, \psi_P$, аналогичных используемым в матрице (3.1). Для этого необходимо получить матрицу четвертого порядка M_{0P} , элементы которой представляют в однородных координатах положение и ориентацию системы координат, связанной с подвижной платформой в точке P (рисунок 3.4). В общем случае матрица M_{0P} имеет следующий вид:

$$M_{0P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_P \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_P \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

где элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) являются направляющими косинусами углов, образованных всеми осями подвижной системы координат, связанной с платформой, с осями неподвижной системы координат статора $OXYZ$; а x_P, y_P, z_P – координаты точки P в неподвижной системе координат $OXYZ$.

По известным координатам точек A, B, C однозначно определяются все элементы матрицы M_{0P} по следующим выражениям:

$$a_{11} = \frac{x_B - x_A}{l_{AB}}; \quad a_{12} = \frac{y_B - y_A}{l_{AB}}; \quad a_{13} = \frac{z_B - z_A}{l_{AB}};$$

$$a_{21} = \frac{x_P - x_C}{l_{CP}}; \quad a_{22} = \frac{y_P - y_C}{l_{CP}}; \quad a_{23} = \frac{z_P - z_C}{l_{CP}};$$

$$a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}; \quad a_{32} = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}; \quad a_{33} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21},$$

где

$$x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \quad z_P = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}, \quad (3.18)$$

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

$$l_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 + (z_P - z_C)^2}.$$

Элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы M_{0P} позволяют рассчитать углы Эйлера $\varphi_P, \theta_P, \psi_P$, однозначно задающие ориентацию подвижной платформы в неподвижной системе координат $OXYZ$, по формулам

$$\begin{aligned} \cos \varphi_P &= \frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}; & \sin \varphi_P &= \frac{a_{32}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}; \\ \cos \theta_P &= a_{33}; & \sin \theta_P &= \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}; \\ \cos \psi_P &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}; & \sin \psi_P &= \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

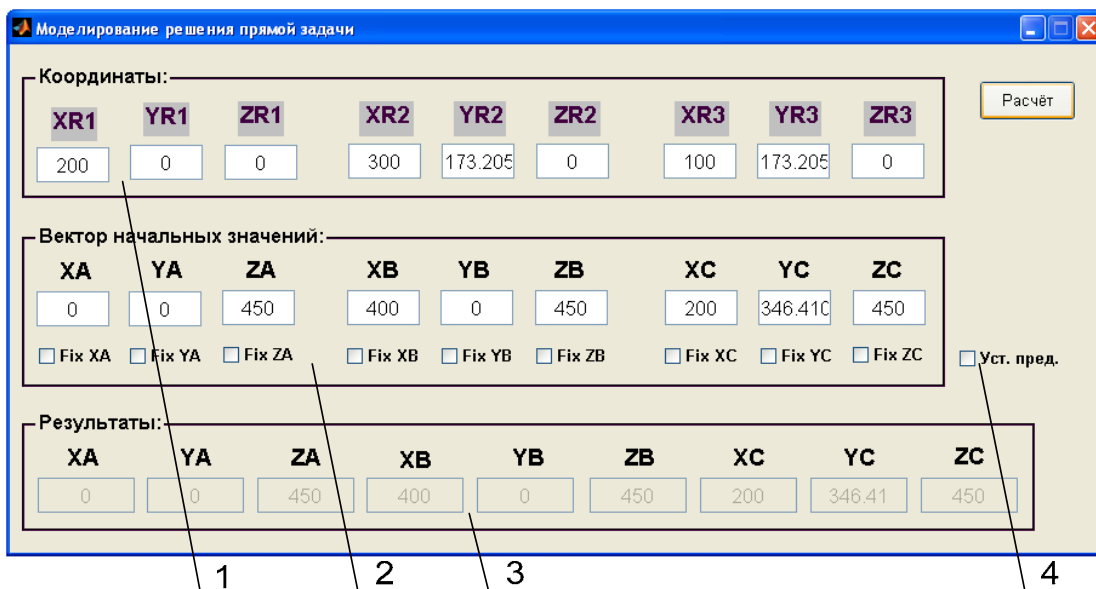
Полученные углы Эйлера и координаты точки P определяют матрицу (3.1), описывающую положение и ориентацию площадки 7 при формировании прямой и обратной задач кинематики для рассматриваемого пространственного механизма.

Пример

В качестве примера рассмотрим задачу вычисления траектории перемещения платформы механизма в координатах $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, представляющих позицию и ориентацию подвижной системы координат $oxuz$, связанной с центром платформы, при заданных функциях движения планарных позиционеров $x_i(t), y_i(t)$, где $i = 1, 2, 3$ – номер позиционера.

Зададимся приращением параметра Δt и представим траектории движения каждого из позиционеров в виде последовательности точек $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ или шагов перемещения $(t_j - t_{j-1})$. Тогда для каждого j -го шага перемещения ($j = 1, 2, \dots, n$) будем иметь набор координат $x_{R1}, y_{R1}, z_{R1}, x_{R2}, y_{R2}, z_{R2}, x_{R3}, y_{R3}, z_{R3}$ планарных позиционеров, для каждого из которых путем численного решения системы уравнений (3.16) получим набор координат угловых точек треугольной платформы $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ механизма. Полученный набор координат полностью описывает положение и ориентацию подвижной платформы в неподвижной системе координат $OXYZ$, связанной со статором механизма, в j -й точке траектории. При этом чтобы получить положение и ориентацию платформы в виде $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, необходимо вычислить координаты геометрического центра платформы по формуле (3.18) и выполнить расчет углов Эйлера на основе формул (3.19).

Для решения прямой задачи кинематики в среде MATLAB нами была разработана программа, интерфейс которой показан на рисунке 3.5. Расчетный алгоритм программы основан на матрично-векторном подходе и методах аналитической геометрии.



1 – координаты позиционеров; 2 – начальные значения для поиска решений; 3 – координаты платформы; 4 – переключатель режима поиска последовательных решений

Рисунок 3.5 – Интерфейс программы решения прямой задачи кинематики

Разработанная программа осуществляет численный поиск решения, который начинается от точки, определяемой входным вектором начальных значений, и ведется в соответствии с заданным методом оптимизации. Система нелинейных уравнений в программе представлена совокупностью функциональных зависимостей, связывающих искомые переменные $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$ с заданными входными координатами $x_{R1}, y_{R1}, z_{R1}, x_{R2}, y_{R2}, z_{R2}, x_{R3}, y_{R3}, z_{R3}$. Процесс решения системы нелинейных уравнений происходит до тех пор, пока значение оценочной функции в процессе итерационного поиска решений не станет меньше заданной точности или изменение значений искомых переменных не будет меньше заданной предельно допустимой величины.

В результате решения прямой задачи кинематики для каждого j -го набора координат позиционеров получаем последовательность точек траектории платформы механизма в виде координат $x_j, y_j, z_j, \varphi_j, \theta_j, \psi_j$. При этом в качестве начального приближения для текущего шага целесообразным является использование решения, полученного на предыдущем шаге, так как два последовательных решения прямой задачи кинематики при построении программируемых движений лежат очень близко друг к другу.

Задача 3.2 Обратная задача кинематики

Решение обратной задачи кинематики сводится к нахождению положений трех двухкоординатных позиционеров по заданному положению главной системы координат (главного базиса) в связанной с подвижной платформой

отсчетной неподвижной системе координат $OXYZ$. При решении рассматриваемой обратной задачи кинематики заданными являются координаты платформы $x_P, y_P, z_P, \varphi_P, \theta_P, \psi_P$, по которым необходимо найти координаты центров соответствующих позиционеров L_i . Для их определения воспользуемся на основании рисунка 3.3 следующим матрично-векторным уравнением:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Li} &= \bar{r}_P + d\bar{e}_{Pi}^{(1)} + l\bar{e}_{Bi}^{(1)} - c\bar{e}_{Li}^{(3)} = \\ &= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} + dE_{Pi,0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + lE_{Bi,0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - cE_{Li,0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$E_{Pi,0} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_P + \beta_i)\cos\psi_P - & \cos(\varphi_P + \beta_i)\sin\psi_P + & \sin(\varphi_P + \beta_i) \times \\ -\sin(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & +\sin(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & \times \sin\theta_P \\ \times \sin\psi_P & \times \cos\psi_P & \\ \\ -\sin(\varphi_P + \beta_i)\cos\psi_P - & -\sin(\varphi_P + \beta_i)\sin\psi_P + & \cos(\varphi_P + \beta_i) \times \\ -\cos(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & +\cos(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & \times \sin\theta_P \\ \times \sin\psi_P & \times \cos\psi_P & \\ \\ \sin\theta_P \sin\psi_P & -\sin\theta_P \cos\psi_P & \cos\theta_P \end{bmatrix};$$

$$E_{Bi,0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i(\cos(\varphi_P + \beta_i) \times & \cos\alpha_i(\cos(\varphi_P + \beta_i) \times & \cos\alpha_i \times \\ \times \cos\psi_P - \sin(\varphi_P + \beta_i) \times & \times \sin\psi_P + \sin(\varphi_P + \beta_i) \times & \sin(\varphi_P + \beta_i) \times \\ \times \cos\theta_P \sin\psi_P) - & \times \cos\theta_P \cos\psi_P) + & \times \sin\theta_P - \\ -\sin\alpha_i \sin\theta_P \sin\psi_P & +\sin\alpha_i \sin\theta_P \cos\psi_P & -\sin\alpha_i \cos\theta_P \\ \\ -\sin(\varphi_P + \beta_i)\cos\psi_P - & -\sin(\varphi_P + \beta_i)\sin\psi_P + & \cos(\varphi_P + \beta_i) \times \\ -\cos(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & +\cos(\varphi_P + \beta_i)\cos\theta_P \times & \times \sin\theta_P \\ \times \sin\psi_P & \times \cos\psi_P & \\ \\ \sin\alpha_i(\cos(\varphi_P + \beta_i) \times & \sin\alpha_i(\cos(\varphi_P + \beta_i) & \sin\alpha_i \times \\ \times \cos\psi_P - \sin(\varphi_P + \beta_i) \times & \times \sin\psi_P + \sin(\varphi_P + \beta_i) \times & \times \sin(\varphi_P + \beta_i) \times \\ \times \cos\theta_P \sin\psi_P) + & \times \cos\theta_P \cos\psi_P) - & \times \sin\theta_P + \\ +\cos\alpha_i \sin\theta_P \sin\psi_P & -\cos\alpha_i \sin\theta_P \cos\psi_P & +\cos\alpha \cos\theta_P \end{bmatrix};$$

$$E_{Li,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В связи с тем, что теоретически каждому положению платформы можно поставить в соответствие восемь конфигураций механизма по положению ног, то необходимо рассчитывать два значения α_{i1} и α_{i2} угла поворота в каждом вращательном шарнире, которые найдутся из условия $z_{Li} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) в следующем виде:

$$\alpha_{i1} = \arcsin \left(\frac{C_\theta(z-l + aS_{\beta\varphi}S_\theta)}{b(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2)} + \frac{S_{\beta\varphi}S_\theta \sqrt{b^2(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2) - (z-l + aS_{\beta\varphi}S_\theta)^2}}{b(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2)} \right);$$

$$\alpha_{i2} = \arcsin \left(\frac{C_\theta(z-l + aS_{\beta\varphi}S_\theta)}{b(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2)} - \frac{S_{\beta\varphi}S_\theta \sqrt{b^2(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2) - (z-l + aS_{\beta\varphi}S_\theta)^2}}{b(S_{\beta\varphi}^2S_\theta^2 + C_\theta^2)} \right);$$

где

$$S_{\beta\varphi} = \sin(\beta_i + \varphi_p); \quad S_\theta = \sin \theta_p; \quad C_\theta = \cos \theta_p.$$

Векторно-матричный способ решения обратной задачи кинематики пространственного механизма основан на описании положения точек R_i через координаты точек A, B, C в векторно-матричном представлении. Для окончательного вычисления искомых координат необходимо решить три системы из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_{R1} - x_D)^2 + (y_{R1} - y_D)^2 + (z_{R1} - z_D)^2}; \\ (x_{R1} - x_D) \cdot (x_B - x_D) + \\ \quad + (y_{R1} - y_D) \cdot (y_B - y_D) + (z_{R1} - z_D) \cdot (z_B - z_D) = 0; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_{R2} - x_E)^2 + (y_{R2} - y_E)^2 + (z_{R2} - z_E)^2}; \\ (x_{R2} - x_E) \cdot (x_C - x_E) + \\ \quad + (y_{R2} - y_E) \cdot (y_C - y_E) + (z_{R2} - z_E) \cdot (z_C - z_E) = 0; \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_{R3} - x_F)^2 + (y_{R3} - y_F)^2 + (z_{R3} - z_F)^2}; \\ (x_{R3} - x_F) \cdot (x_A - x_F) + \\ \quad + (y_{R3} - y_F) \cdot (y_A - y_F) + (z_{R3} - z_F) \cdot (z_A - z_F) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

К сожалению, решать обратную задачу кинематики в постановке, основанной на уравнениях (3.21) – (3.23), приходится численными методами, а использование полученных результатов для построения системы управления системой перемещений крайне затруднительно.

Для решения обратной задачи кинематики нами предлагается метод на основе аналитической геометрии, позволяющий получить однозначные функции, связывающие координаты позиционера с положением и ориентацией платформы. Полученные функции при этом легко преобразуются в параметрические и легко реализуются в системе управления пространственным механизмом.

Идея метода основана на реальной кинематике рассматриваемого механизма, согласно которой, в соответствии с рисунком 3.6, подвижности звеньев DR_1 , ER_2 и FR_3 в кинематических соединениях D , E и F соответственно могут быть описаны подвижными секущими плоскостями CDR_1 , AER_2 и BFR_3 , пересечения которых с неподвижной плоскостью рабочей поверхности статора полностью определяют все множество геометрических мест возможных положений позиционеров, задаваемых на рисунке 3.6 точками R_1 , R_2 , R_3 .

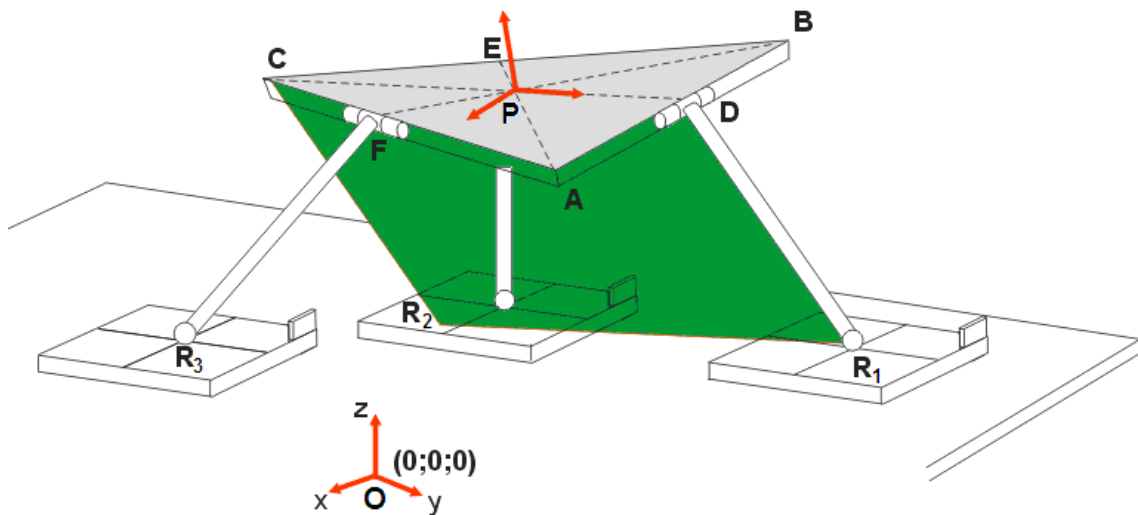


Рисунок 3.6 – Графическая интерпретация метода аналитической геометрии для решения обратной задачи кинематики

Конкретный выбор точек R_1 , R_2 , R_3 на плоскости обеспечивается заданием длин промежуточных звеньев R_1D , R_2E и R_3F . В дальнейшем будем рассматривать случай равных между собой длин, когда $R_1D = R_2E = R_3F$.

Для задания секущих плоскостей в качестве основного математического параметра используется соответствующий вектор нормали, который, как видно из рисунка 3.6, совпадает с соответствующей осью вращения подвижного соединения D, E или F . Так как в рассматриваемой обратной задаче кинематики координаты точек A, B, C принимаются заданными, то в качестве векторов нормали могут быть приняты, соответственно, для подвижного соединения D – вектор \overline{AB} , для E – вектор \overline{BC} , для F – вектор \overline{CA} , которые имеют следующие координаты в базисе, связанном с неподвижным основанием (статором) механизма:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (x_B - x_A, \quad y_B - y_A, \quad z_B - z_A); \\ \overline{BC} &= (x_C - x_B, \quad y_C - y_B, \quad z_C - z_B); \\ \overline{CA} &= (x_A - x_C, \quad y_A - y_C, \quad z_A - z_C).\end{aligned}$$

С учетом известных векторов нормали и известных координат соответствующих точек D, E и F подвижной площадки можно записать уравнения трех секущих плоскостей. Общее уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку D , имеет вид

$$(x - x_D) \cdot (x_B - x_A) + (y - y_D) \cdot (y_B - y_A) + (z - z_D) \cdot (z_B - z_A) = 0$$

или

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

где $A_1 = x_B - x_A$; $B_1 = y_B - y_A$; $C_1 = z_B - z_A$; $D_1 = -A_1x_D - B_1y_D - C_1z_D$.

Для нахождения геометрических мест пересечения секущих плоскостей с неподвижной плоскостью статора необходимо рассмотреть совместно уравнение соответствующей секущей плоскости и уравнение плоскости статора, которое в неподвижной системе координат статора имеет вид $z = 0$. Уравнение прямой линии L_1 пересечения плоскости π_1 с плоскостью статора найдется из условия

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ z = 0, \end{cases}$$

или, в виде общего уравнения, –

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + D_1 = 0. \quad (3.24)$$

Общее уравнение прямой пересечения второй секущей плоскости π_2 с плоскостью статора имеет вид

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + D_2 = 0, \quad (3.25)$$

где $A_2 = x_C - x_B$; $B_2 = y_C - y_B$; $C_2 = z_C - z_B$; $D_2 = -A_2x_E - B_2y_E - C_2z_E$.

А общее уравнение прямой пересечения третьей секущей плоскости π_3 с плоскостью статора имеет вид

$$L_3: A_3x + B_3y + D_3 = 0, \quad (3.26)$$

где $A_3 = x_A - x_C$; $B_3 = y_A - y_C$; $C_3 = z_A - z_C$; $D_3 = -A_3x_F - B_3y_F - C_3z_F$.

При конкретном фиксированном значении l длин звеньев R_1D , R_2E , R_3F координаты точек R_1 , R_2 , R_3 найдутся из решения следующих простых систем уравнений, составленных по выражениям для расчета длин звеньев R_1D , R_2E , R_3F и общих уравнений (3.24) – (3.26) прямых L_1 , L_2 , L_3 :

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_D - x_{R1})^2 + (y_D - y_{R1})^2 + (z_D - z_{R1})^2}; \\ A_1 \cdot x_{R1} + B_1 \cdot y_{R1} + D_1 = 0; \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_E - x_{R2})^2 + (y_E - y_{R2})^2 + (z_E - z_{R2})^2}; \\ A_2 \cdot x_{R2} + B_2 \cdot y_{R2} + D_2 = 0; \end{cases} \quad (3.28)$$

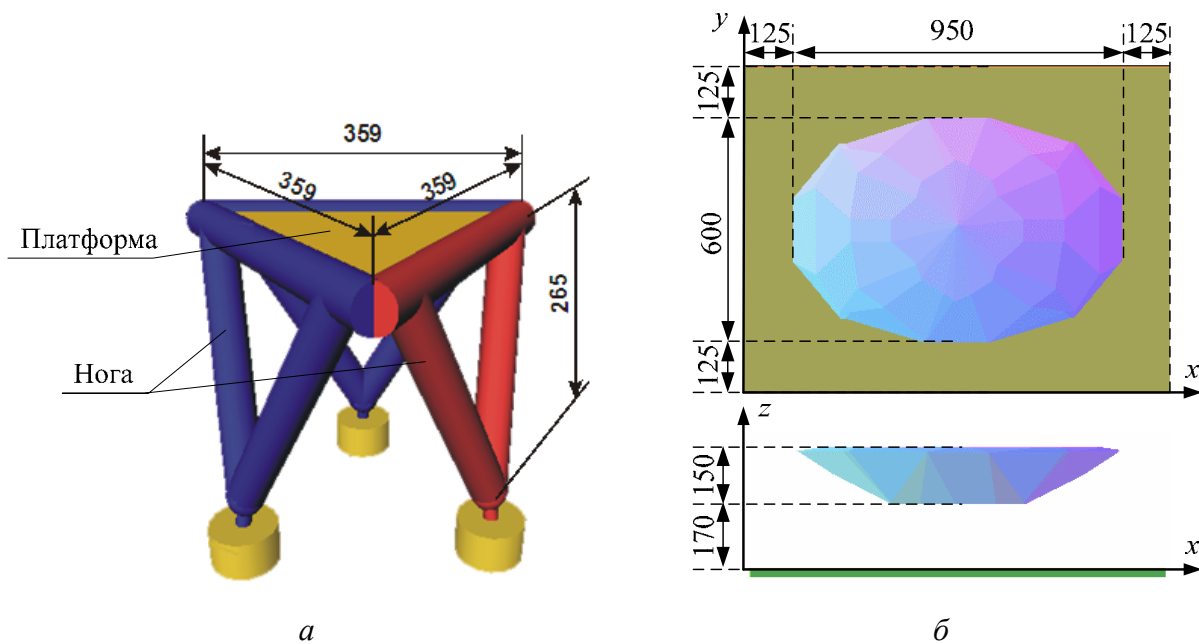
$$\begin{cases} l = \sqrt{(x_F - x_{R3})^2 + (y_F - y_{R3})^2 + (z_F - z_{R3})^2}; \\ A_3 \cdot x_{R3} + B_3 \cdot y_{R3} + D_3 = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Пример

В качестве примера решения обратной задачи кинематики рассмотрим задачу построения рабочей области пространственного механизма, которая заключается в определении достижимых координат центра платформы при заданных конструктивных параметрах механизма.

Пусть пространственный механизм имеет конструктивные параметры, показанные на рисунке 3.7, а.

Определение рабочей области производилось по следующему алгоритму: задавались фиксированные углы Эйлера φ_0 , θ_0 , ψ_0 ориентации платформы и начальные координаты ее центра x_0 , y_0 , z_0 , а затем путем решения обратной задачи кинематики на основе аналитического алгоритма из систем уравнений (3.27) – (3.29) определялись начальные положения планарных позиционеров на статоре. Далее, задавая позиции платформы приращения по координатам x и y в плоскостях, параллельных плоскости статора, выполнялось решение обратной задачи кинематики. Если для текущего положения платформы существовали соответствующие положения планарных позиционеров, то координаты платформы заносились в массив достижимых положений. При этом в расчетах учитывались геометрические размеры планарных позиционеров, размеры статора и конструктивные ограничения величины углов наклона шарниров, связывающих платформу с позиционерами.



a – конструктивные параметры;
б – множество достижимых позиций

Рисунок 3.7 – Рабочая область пространственного механизма

Результаты расчета по описанному алгоритму для конструктивных параметров пространственного механизма, показанных на рисунке 3.7, *а*, представлены на рисунке 3.7, *б*.

Таким образом, предложенный алгоритм решения обратной задачи кинематики для рассматриваемого пространственного механизма позволяет решать широкий спектр задач кинематики, таких как нахождение рабочей области механизма, оценка точности, калибровка пространства и др.

4 ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.1 Для механизма, изображенного на рисунке 1.3, получите в общем виде функцию положения платформы, если положения пяти любых сегментов на кольцевом двигателе фиксированы.

Задача 4.2 Для механизма, изображенного на рисунке 1.3, решите методами аналитической геометрии в явном виде обратную задачу кинематики для случая перемещения платформы вдоль оси Z при условии, что другие ее координаты остаются неизменными, в частности, – нулевыми.

Задача 4.3 Проведите аналитическое исследование перемещения платформы (см. рисунок 1.3) вокруг оси Z при фиксированных значениях других координат, в частности, – нулевых.

Задача 4.4 Решите обратную задачу кинематики для механизма, изображенного на рисунке 1.3, при условии реализации движения платформы с тремя степенями свободы.

Задача 4.5 Решите прямую задачу кинематики для механизма, изображенного на рисунке 2.1, при условии фиксирования положений одного, двух и трех сегментов кольцевого привода.

Задача 4.6 Получите методами аналитической геометрии функции положения платформы для механизма параллельной кинематики, изображенного на рисунке 2.2, если:

- а) механизм реализует движение с пятью степенями свободы;
- б) механизм реализует движение с четырьмя степенями свободы;
- в) механизм реализует движение с тремя степенями свободы.

Задача 4.7 Для механизма, изображенного на рисунке 1.3, найдите величины угловых перемещений кривошипов при перемещении платформы из точки верхнего положения в точку среднего положения.

Задача 4.8 Методами аналитической геометрии исследуйте чистый поворот платформы по угловым координатам φ, θ, ψ для механизмов, изображенных на рисунках 1.3, 2.2 и 3.2.

Задача 4.9 Предложите обобщенный алгоритм решения прямой задачи кинематики при условии реконфигурирования исходного механизма, изображенного на рисунке 2.2, в механизм с тремя степенями свободы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений / С. Е. Карпович [и др.] ; под ред. С. Е. Карповича. – Минск : Технопринт, 2004. – 187 с.
- 2 Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1979. – 286 с.
- 3 Дискретный электропривод с шаговыми двигателями / под общ. ред. М. Г. Чиликина. – М. : Энергия, 1971. – 562 с.
- 4 Золотаревская, Д. И. Аналитическая геометрия / Д. И. Золотаревская. – М. : Либроком, 2010. – 384 с.
- 5 Кадомцев, С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С. Б. Кадомцев. – М. : Физматлит, 2011. – 168 с.
- 6 Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М. : Academia, 2009. – 208 с.
- 7 Карпович, С. Е. Теория построения прецизионных механизмов оборудования производства электронной техники / С. Е. Карпович, А. М. Русецкий, Ю. Ф. Ляшук. – Минск : ГНПКТМ «Планар», 1999. – 261 с.
- 8 Мехатроника / Т. Исии [и др.]. – М. : Мир, 1988. – 318 с.
- 9 Никифоров, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Никифоров, Б. В. Шкода. – М. : Либроком, 2009. – 160 с.
- 10 Основы механики машин и роботов / С. Е. Карпович [и др.]. – Минск : Технопринт, 2002. – 155 с.
- 11 Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. – М. : Наука, 1986. – 103 с.
- 12 Прецизионные координатные системы на основе электропривода прямого действия / С. Е. Карпович [и др.]. – Минск : ГНПКТМ «Планар», 2001. – 198 с.
- 13 Привалов, И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. – М. : Лань, 2008. – 304 с.
- 14 Просветов, Г. М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и решения / Г. М. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 208 с.
- 15 Murray, R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray; Z. Li; S. S. Sastry. – CRC PressINC, 1994. – 456 p.
- 16 Spong, M. Robot dynamics and control / M. Spong, M. Vidyasagav. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. – 327 p.

Учебное издание

Авторы

Карпович Святослав Евгеньевич
Дайняк Игорь Викторович
Жарский Владимир Владимирович и др.

***ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ:
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ***

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Г. С. Корбут*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка: *И. В. Дайняк*