Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий

В. В. КАТАЛЬНИКОВ
Ю. В. ШАПАРЬ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. В. Катальников, Ю. В. Шапарь

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

*Рекомендовано учебно-методическим советом ИРИТ – РтФ
в качестве **учебного пособия** для студентов, обучающихся по направлениям
230100 «Информатика и вычислительная техника»,
220400 «Управление и информатика в технических системах»,
230400 «Информационные системы и технологии»*

Второе издание, переработанное

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
К29

Рецензенты:

кафедра «Прикладная математика» УрГЭУ, протокол № 6 от 02.05.2012 (завкафедрой доц., канд. физ.-мат. наук Ю. Б. Мельников);
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук Ю. В. Авербух (Институт математики и механики УрО РАН)

Научный редактор – канд. техн. наук И. А. Шестакова

**Катальников, В. В.**

К29 Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В. В. Катальников, Ю. В. Шапарь. – 2-е изд., перераб. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 72 с.
ISBN 978-5-7996-1158-3

В пособии содержатся краткие теоретические сведения и основные понятия теории вероятностей. Для проведения практических занятий по теории вероятностей и математической статистике подобраны задачи разной сложности, а также представлены варианты контрольных работ.

Учебное пособие ориентировано на преподавателей и студентов ИРИТ – РтФ.

Библиогр.: 14 назв.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-5-7996-1158-3

# Оглавление

## Раздел А



## Раздел Б



## Раздел В

## Раздел Г

## Раздел А

# Элементы комбинаторики

*Комбинаторикой* называется раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов конечного множества.

*Размещениями* из $n$ элементов по $m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ называются $m$-элементные комбинации, выбранные из данных $n$ элементов, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений находится по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

*Перестановками* из $n$ элементов называются размещения из $n$ элементов по $n$ элементов. Число перестановок из $n$ элементов рассчитывается по формуле

$$P_n = A_n^n = n!.$$

*Сочетаниями* из $n$ элементов по $m$ называются $m$-элементные комбинации, выбранные из $n$ элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т. е. отличаются только составом элементов). Число сочетаний $C_n^m$ вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Если при упорядоченном выборе $m$ элементов из $n$ элементы возвращаются обратно, то полученные выборки называются размещениями с повторениями. Их число можно вычислить по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Если при неупорядоченном выборе $m$ элементов из $n$ элементы возвращаются обратно (одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т. е. повторяться), то полученные выборки есть сочетания с повторениями, число которых вычисляется по формуле

$$\overline{C}\,_n^m = C\,_{n+m-1}^m.$$

*Правило умножения.* Если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать $n_1$ способами, а второй $n_2$ способами, то оба объекта в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

## Задачи

**1.1.** Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по 5 адресам?

**1.2.** Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3: а) если цифры не повторяются; б) если цифры могут повторяться?

**1.3.** Студентам нужно сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

**1.4.** Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?

**1.5.** В хоккейном туре участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр будет сыграно в турнире?

**1.6.** Из трех классов спортивной школы нужно составить команду из трех человек, взяв по одному ученику из каждого класса. Сколько различных команд можно составить, если в классах соответственно 18, 20 и 22 ученика?

**1.7.** Имеется 5 конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для письма?

**1.8.** На десяти различных жетонах написаны буквы А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Жетоны случайным образом перемешаны и выложены в ряд. Сколькими способами можно получить таким образом слово «МАТЕМАТИКА»?

**1.9.** Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?

**1.10.** Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

**1.11.** Автомобильные номера состоят либо из трех букв и трех цифр, либо из двух букв и четырех цифр. Найти количество таких номеров, если используются 12 букв русского алфавита.

**1.12.** Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 4 офицера и 8 солдат?

**1.13.** В урне 6 белых и 4 черных шара. Сколькими способами можно извлечь 2 белых и 3 черных шара?

**1.14.** В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя?

**1.15.** Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревнованиях?

**1.16.** Сколькими способами 9 одинаковых конфет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

**1.17.** Сколько обыкновенных дробей можно составить из чисел 3, 5, 11, 13,16, 17?

**1.18.** В урне 5 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать: а) 2 шара разных цветов; б) 2 белых шара; в) 2 черных шара?

**1.19.** Есть пятиразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из пяти вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна (правильная) комбинация позволяет открыть замок. Найти число возможных комбинаций.

**1.20.** Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

### Ответы

**1.1.** 120. **1.2.** а) 18; б) 192. **1.3.** 1680. **1.4.** 26. **1.5.** 15. **1.6.** 7920. **1.7.** 20. **1.8.** 24. **1.9.** 20. **1.10.** 21; 4620; 420; 792. **1.11.** 3168000. **1.12.** 224. **1.13.** 60. **1.14.** 5040; 210. **1.15.** 8. **1.16.** 70. **1.17.** 30. **1.18.** 40; 10; 28. **1.19.** $6^5$. **1.20.** $(7!)^2 \cdot 2$.

## Пространство элементарных событий. Алгебра событий

*Случайным* называется событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$.

События, которыми может закончиться опыт, называются *исходами.*

Событие $\Omega$, которое обязательно наступит в данном опыте, называют *достоверным.* Событие $\varnothing$, которое не наступит в данном опыте, называют *невозможным.*

Множество $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^n$ (или $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^\infty$) всех возможных взаимно исключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий (исходов).*

*Суммой (объединением)* двух событий $A$ и $B$ называется новое событие $A+B$, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A$ или $B$.

*Произведением (пересечением)* двух событий $A$ и $B$ называется новое событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении $A$ и $B$ в данном опыте.

*Событие $A$ влечет за собой событие $B$* ($A \subset B$), если в результате наступления события $A$ наступает также событие $B$.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию $A$, если оно состоит в ненаступлении события $A$.

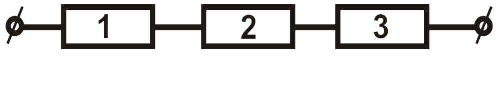
Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление любого другого.

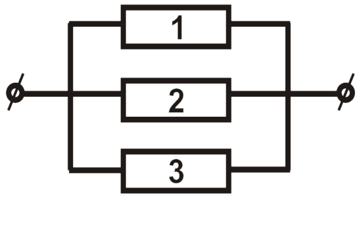
## Задачи

**1.21.** Указать пространства элементарных событий для следующих опытов: а) подбрасывание двух игральных костей; б) стрельба по мишени до первого попадания; в) наблюдение за временем безотказной работы прибора.

**1.22.** Игральную кость бросают один раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные исходы, благоприятные событиям: $A_1$={выпало четное число очков}; $A_2$={выпало не менее 4 очков}; $A_3$={выпало более 6 очков}.

**1.23.** Электрическая цепь составлена по схемам, приведенным на рисунке. Событие $A_i$={элемент с номером $i$ вышел из строя}, $i \in \overline{1,3}$. Событие $B$={цепь вышла из строя}. Выразить события $B$ и $\overline{B}$ через события $A_i$.




**1.24.** Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A_1$={первый студент решил задачу},

$A_2$={второй студент решил задачу}, $A_3$={третий студент решил задачу}. Выразить через события $A_i$, $i \in \overline{1,3}$ следующие события: $A$={все студенты решили задачу}; $B$={задачу решил только первый студент}; $C$={задачу решил хотя бы один студент}; $D$={задачу решил только один студент}.

## Классическое определение вероятности

Пусть производится опыт с $n$ равновозможными исходами, образующими группу несовместных событий. Исходы, которые приводят к наступлению события $A$, называются *благоприятными* событию $A$.

*Вероятностью* события $A$ называется отношение числа $m$ благоприятных исходов к числу $n$ всевозможных исходов данного события:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Данную формулу называют классическим определением вероятности.

### Задачи

**1.25.** Игральную кость бросают дважды. Найти вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков.

**1.26.** Принимаются кодовые комбинации, содержащие шесть неповторяющихся цифр от 1 до 6. Какова вероятность того, что в одной принятой комбинации цифры образуют последовательность 123456?

**1.27.** На карточках написаны буквы: Л, И, Т, Е, Р, А. На стол наудачу по одной выкладывают 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «ТИРЕ»?

**1.28.** Из колоды карт (52 карты) Герман наудачу выбирает три карты. Какова вероятность того, что эти карты – «тройка», «семерка», туз?

**1.29.** В урне 20 шаров с номерами $1, 2, \ldots, 20$. Наудачу выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

**1.30.** Из 12 лотерейных билетов, среди которых 4 выигрышных, берут 6. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один выигрышный?

**1.31.** Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 3?

**1.32.** Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятность того, что в каждой из пачек окажется по два короля.

**1.33.** В первом ящике находятся шары с номерами $1, 2, 3, 4, 5$, во втором – с номерами $6, 7, 8, 9, 10$. Из каждого ящика вынимают по шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не меньше 7; б) равна 11 ?

**1.34.** В лотерейном билете нужно зачеркнуть 6 номеров из 49. Какова вероятность угадать: а) 6 номеров; б) 5 номеров; в) 4 номера; г) 3 номера; д) 2 номера; е) один номер?

**1.35.** В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия приема блока нарушаются, если обе лампы с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых 3 имеют пониженную крутизну. Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух электронных ламп.

**1.36.** Техническое устройство, состоящее из 10 блоков, вышло из строя из-за отказа какого-то блока. Для его отыскания проверяют все блоки по очереди, пока не обнаружится неисправный блок. Определить вероятность того, что проверить придется не менее половины всех блоков.

**1.37.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что это число будет четным?

**1.38.** Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других; в каждую лунку может попасть несколько шариков. Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух оставшихся лунках шариков не будет.

### Ответы

**1.25.** 1/6. **1.26.** 1/720. **1.27.** 1/360. **1.28.** $2,9 \cdot 10^{-3}$, если порядок извлечения карт не важен; $4,8 \cdot 10^{-4}$, если порядок извлечения карт важен. **1.29.** 3/38. **1.30.** 32/33. **1.31.** 1/12. **1.32.** 0,39. **1.33.** а) 1; б) 1/5. **1.34.** $P(k) = C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}/C_{49}^6$, где $k$ – число угаданных номеров. **1.35.** 1/15. **1.36.** 3/5. **1.37.** 2/5. **1.38.** 3/16.

## Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности применимо, если имеется конечное число равновозможных исходов некоторого события. Если же пространство элементарных исходов бесконечно и является всюду плотным множеством, то используется геометрический подход. В его основе вероятности трактуются как «доли» множества благоприятных исходов во множестве всевозможных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{\mu(F_A)}{\mu(F)}.$$

Здесь $\mu(F)$ есть мера фигуры $F$, соответствующей пространству всевозможных исходов, а $\mu(F_A)$ – мера фигуры, соответствующей множеству благоприятных событию $A$ исходов. В качестве меры могут выступать длина, площадь или объем в зависимости от размерности задачи.

Данную формулу называют геометрическим определением вероятности.

## Задачи

**1.39.** Точку бросают наугад в круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Найти вероятность того, что: а) расстояние от точки до центра круга превысит 0,5; б) абсцисса точки будет не больше 0,5; в) точка окажется вне квадрата, вписанного в данный круг.

**1.40.** Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе $\alpha$ радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

**1.41.** В случайный момент времени $x \in [0, T]$ появляется радиосигнал длительностью $t_1$. В случайный момент времени $y \in [0, T]$ включается приемник на время $t_2 < t_1$. Найти вероятность обнаружения сигнала, если приемник настраивается мгновенно.

**1.42.** На отрезке длины $l$ наудачу выбирают две точки $M_1$ и $M_2$. Определить вероятность того, что из полученных трех отрезков можно построить треугольник.

**1.43.** На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки $A$, $B$ и $C$. Какова вероятность того, что треугольник $ABC$ остроугольный?

**1.44.** Самолет, имеющий радиолокационную станцию с дальностью действия $\mathcal{D}$, осуществляет поиск со скоростью $v$ в достаточно большом районе площадью $S$, в любой точке которого может всплыть на время $t$ подводная лодка. Найти вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время $t$ невелико и лодка обнаруживается при попадании в зону действия радиолокатора.

**1.45.** Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками самолетов не менее 5 мин. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 10 ч, а другой в 10 ч 10 мин. Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах $\pm 10$ мин, а второй – в пределах $\pm 5$ мин при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?

**1.46.** В единичный квадрат $[0,1] \times [0,1]$ наугад брошена точка. Пусть $(\xi, \eta)$ – ее координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $t^2 + \xi t + \eta = 0$ действительные.

**1.47.** На отрезке $[a, b]$ наудачу ставят две точки. Пусть $x, y$ – их координаты. Найти вероятности событий $A, B, AB, A + B$, если $A$={расстояние между второй точкой и левым концом отрезка меньше, чем расстояние между первой точкой и правым концом отрезка}; $B$={расстояние между точками меньше половины длины отрезка}.

## Ответы

**1.39.** а) $3/4$; б) $(8\pi + 3\sqrt{3})/12\pi$; в) $1 - 2/\pi$. **1.40.** $\alpha/2\pi$. **1.41.** $1 - 1/2\,(1 - t_2/T)^2 - 1/2\,(1 - t_1/T)^2$. **1.42.** $1/4$. **1.43.** $1/4$. **1.44.** $\left(\pi\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}vt\right)/S$. **1.45.** 0,25. **1.46.** $1/12$. **1.47.** $P(A) = 1/2$; $P(B) = 3/4$; $P(AB) = 3/8$; $P(A + B) = 7/8$.

# Теоремы сложения и умножения вероятностей

*Условной вероятностью события* $A$ по событию $B$ называется вероятность события $A$, вычисленная при условии, что событие $B$ произошло. Условная вероятность определяется формулой

$$P(A/B) = P_B(A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

События $A$ и $B$ называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события называются *зависимыми*. Для независимых событий

$$P(A/B) = P(A), \ P(B/A) = P(B).$$

***Теорема* 1.** *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого (при условии, что первое событие произошло)*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Эта формула легко обобщается на случай любого числа событий. В частности, вероятность произведения трех событий

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$.

***Теорема* 2.** *Вероятность суммы совместных событий* $A$ *и* $B$ *равна*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для несовместных событий $A$ и $B$ вероятность их суммы

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

При вычислении вероятности сложного события бывает удобно пользоваться формулой вычисления вероятности противоположного события:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

## Задачи

**1.48.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Стрелки произвели по одному выстрелу по мишени. Считая попадания в мишень для отдельных стрелков событиями независимыми, найти вероятности следующих событий: $A=$ {ни одного попадания в мишень}; $B=$ {ровно одно попадание в мишень}.

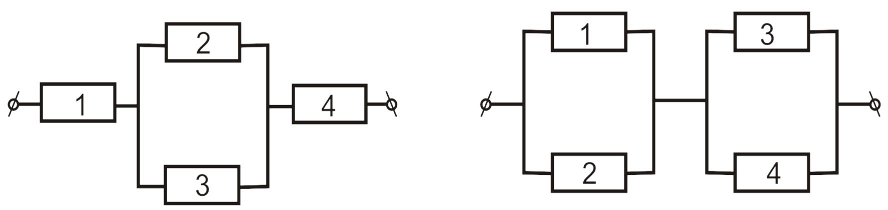
**1.49.** Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,5. По условиям приема события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов.

**1.50.** Самолет, вылетающий на задание, создает радиопомехи, которые с вероятностью 0,4 «забивают» радиосредства системы ПВО. Если радиосредства «забиты», то самолет проходит к объекту необстрелянным, сбрасывает бомбы и поражает объект с вероятностью 0,8. Если радиосредства системы ПВО «не забиты», то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

**1.51.** Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 25 вопросов из 30. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и на один дополнительный вопрос из этих же 30 вопросов.

**1.52.** Студент выполняет тест. Работа состоит из трех задач. Для каждой задачи предложено 5 вариантов ответов, из которых только один правильный. Студент выбирает ответы наудачу. Какова вероятность того, что он пройдет тест, если для этого достаточно верно решить хотя бы две задачи?

**1.53.** На рисунке приведены схемы соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Вычислить вероятность безотказной работы (надежность) каждой схемы, если надежность $k$-го элемента равна $p_k$, $k \in \overline{1,4}$.




**1.54.** За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью $1/4$, выжить с вероятностью $1/4$ и разделиться на две с вероятностью $1/2$. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от ее «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

**1.55.** Стрелку, имеющему пять патронов, разрешено стрелять до первого промаха или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок израсходует не все патроны?

**1.56.** Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания при одном выстреле, предполагая, что попадания при каждом выстреле независимы и равновероятны.

## Ответы

**1.48.** $P(A) = 0,06$; $P(B) = 0,38$. **1.49.** 0,79. **1.50.** 0,464. **1.51.** 0,936. **1.52.** 0,104. **1.54.** Могут существовать 0,1,2,3,4 амебы с вероятностями $11/32$; $4/32$; $9/32$; $4/32$; $4/32$ соответственно. **1.55.** 0,76. **1.56.** 0,7.

# Формула полной вероятности. Формула Байеса

***Теорема* 3.** *Пусть* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *– полная группа попарно несовместных событий (гипотез), т.е.* $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, $H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j$, *совместно с одним из которых происходит событие* $A$. *Тогда справедлива формула полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

При этом $P(H_i)$ называют *априорными* (доопытными) вероятностями гипотез. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

***Теорема* 4.** *Пусть* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *– полная группа гипотез некоторого события* $A$. *Тогда справедлива формула Байеса:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

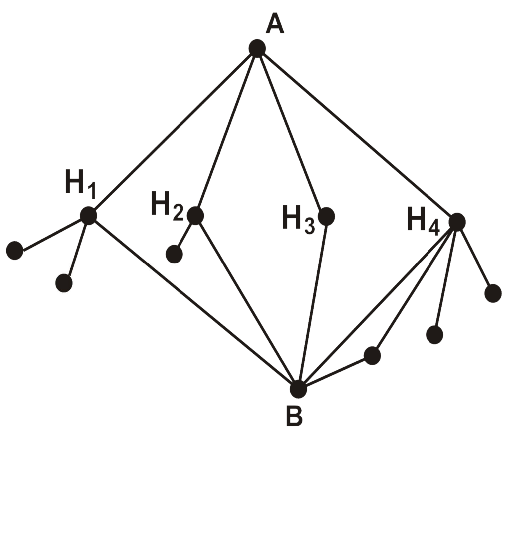
Данная формула позволяет переоценить вероятности гипотез при условии, что событие $A$ произошло. Вероятности $P(H_i/A)$ называются *апостериорными* (послеопытными) вероятностями гипотез.

## Задачи

**1.57.** Вероятности того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета самолета из допусков, равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Если из поля допусков вышли параметры одного блока, то связь не будет установлена с вероятностью 0,25; если двух блоков, то 0,4; если трех, то 0,5. Найти вероятность того, что связь не будет установлена.

**1.58.** Число грузовых машин, проезжающих по шоссе мимо бензоколонки относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, легковая – 0,2. Чему равна вероятность того, что машина, подъехавшая к заправке, грузовая?

**1.59.** На рисунке изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта $A$, выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу. Какова вероятность того, что они попадут в пункт $B$?




**1.60.** Из 10 студентов, сдающих экзамен по теории вероятностей, два студента знают по 20 билетов из 30, один студент знает 15 билетов, остальные знают все билеты. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный из списка студент сдаст экзамен, если знание билета обеспечивает сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а незнание – с вероятностью 0,1?

**1.61.** В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

**1.62.** В первой урне 10 шаров, из которых 8 белых, во второй 20 шаров, из которых 4 белых. Из каждой урны берут наугад по одному шару, а затем из этих двух шаров выбирают наудачу один. Найти вероятность того, что он белый.

**1.63.** По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд равны соответственно 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (0 или 1) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Определить, какая команда было передана.

**1.64.** Военный корабль может пройти вдоль пролива шириной 1 км с минным заграждением в любом месте. Вероятность его подрыва на мине в правой части заграждения шириной 200 м равна 0,3, а на остальной части эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что корабль благополучно пройдет пролив.

**1.65.** Вероятность попадания в цель для трех стрелков равны соответственно $4/5$, $3/4$, $2/3$. Для поражения цели в нее нужно попасть не менее двух раз. В результате одновременного выстрела всех трех стрелков цель была поражена. Какова вероятность того, что в цель попал третий стрелок?

**1.66.** По объекту производится три одиночных (независимых) выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором 0,5; при третьем 0,7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трех попаданий; при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов объект будет выведен из строя.

**1.67.** По каналу связи передается один из сигналов $X_1$ и $X_2$. Сигнал $X_2$ передается в среднем втрое чаще, чем сигнал $X_1$. Вследствие искажения вместо переданного сигнала $X_1$ может быть зафиксирован сигнал $X_2$ и наоборот. При этом $X_1$ искажается в среднем в 10 % случаев, а $X_2$ – в 20 % случаев. По каналу связи передан какой-то сигнал. Какова вероятность того, что на приемнике будет зафиксирован $X_1$? На приемнике зафиксирован сигнал $X_1$. С какой вероятностью этот сигнал и был передан?

**1.68.** Среди наблюдаемых спиральных галактик 23 % принадлежат подтипу $S_a$, 31 % – подтипу $S_b$ и 46 % – подтипу $S_c$. Вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в этих галактиках составляет 0,002; 0,0035 и 0,0055 соответственно. Найти вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в далекой спиральной галактике, подтип которой определить не удается. В некоторой спиральной галактике обнаружена вспышка сверхновой звезды. С какой вероятностью наблюдаемая при этом галактика принадлежит типу $S_a$, $S_b$, $S_c$?

## Ответы

**1.57.** 0,139. **1.58.** 0,429. **1.59.** 7/12. **1.60.** 0,763.
**1.61.** 0,445. **1.62.** 1/2. **1.63.** 11111 с вероятностью 0,78.
**1.64.** 0,3. **1.65.** 0,76. **1.66.** 0,458. **1.67.** 3/8; 3/5.
**1.68.** 0,004075; 0,1129; 0,2663; 0,6208.

# Схема независимых испытаний Бернулли

Пусть проводится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие $A$ наступает с вероятностью $p$ (вероятность успеха) и не наступает с вероятностью $q = 1 - p$ (вероятность неуспеха). Рассмотрим две задачи: точечную и интервальную.

*Точечная задача*: требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из $n$ испытаний число успехов равно $m$.

*Интервальная задача*: найти вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что в серии из $n$ испытаний число успехов $m \in [m_1; m_2]$.

Формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

***Теорема* 5.** *Если число испытаний $n$ велико, вероятность успеха в одном испытании $p$ близка к нулю ($p < 0,1$) и при этом $\lambda = np < 10$, то*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}. \tag{2}$$

***Теорема* 6.** *Если число испытаний $n$ велико, $\lambda = np > 10$, то*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_0), \ \textit{где} \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

***Теорема* 7.** *Если число испытаний $n$ велико, то*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4}$$

*где* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ *– функция Лапласа;* $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$; $i \in \{1; 2\}$.

- Для решения точечной задачи используется формула Бернулли (1), теорема Пуассона (2), локальная теорема Муавра-Лапласа (3).

- Для решения интервальной задачи применяется интегральная теорема Муавра-Лапласа (4).
- Если число испытаний $n$ невелико, то возможно сведение интервальной задачи к нескольким точечным задачам при помощи теоремы сложения вероятностей.

Пусть $m$ – число испытаний, в которых произошло событие $A$. Отношение $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой наступления события* $A$ в данной серии испытаний. Справедлива формула (закон больших чисел в схеме Бернулли)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right).$$

Таблицы значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеются в прил. $1-4$.

### Задачи

**1.69.** По каналу связи передается шесть сообщений. Каждое из сообщений независимо от других искажается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что ровно два сообщения из шести искажены; не менее двух сообщений из шести искажены.

**1.70.** По мишени произведено три выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность $n$ попаданий в мишень, где $n = 0, 1, 2, 3$.

**1.71.** На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде независимых видеоимпульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым импульсом равна 0,25. Вычислить вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 превысит порог; наивероятнейшее число видеоимпульсов, превысивших порог.

**1.72.** Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в нее независимо от других снарядов с вероятностью 0,4. Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0,3; если два снаряда – с вероятностью 0,7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка. Найти вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено 3 снаряда.

**1.73.** В круг вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что из четырех точек, брошенных наугад в данный круг, только одна попадет внутрь квадрата? Каково наиболее вероятное число точек, попавших в квадрат?

**1.74.** Вероятность сбоя в системе при переключении ее режимов равна 0,001. Найти вероятность того, что в 5 000 переключениях будет не менее двух сбоев.

**1.75.** Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1 200 знаков, равна 0,005. Найти вероятность того, что при наборе текста будет допущено: а) 6 ошибок; б) хотя бы одна ошибка.

**1.76.** Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда: а) четверо родились 23 февраля; б) двое родились 1 марта; в) никто не родился 23 июня? (Считать, что в году 365 дней).

**1.77.** В некоторой области имеется 16 200 тракторов. Известно, что в течение сезона в среднем у одной трети тракторов выходит из строя некоторая деталь, которая требует замены. Было заготовлено 5 400 деталей для замены. Какова вероятность того, что этого количества деталей достаточно для обеспечения непрерывной работы в течение сезона? Сколько нужно заготовить деталей, чтобы с вероятностью 0,95 их было достаточно для обеспечения нормальной работы тракторов в течение сезона?

**1.78.** Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности событий: $A$={в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок}, $B$={будет сделано ровно 7 ошибок}.

**1.79.** Вероятность рождения мальчика $p = 0,512$. Вычислить вероятности событий: $A$={среди 100 новорожденных будет 51 мальчик}, $B$={среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек}.

**1.80.** В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 у.е. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1 000 у.е. Найти вероятности событий: $A$={по истечении года работы страховая компания потерпит убыток}, $B$={страховая компания получит прибыль 60 000 у.е.}

**1.81.** Какое минимальное количество раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95, отклонение относительной частоты выпадения герба от вероятности его выпадения не превышало 0,01?

**1.82.** Полагая вероятность рождения мальчика равной 0,52, оценить пределы, в которых с вероятностью 0,95 будет заключено число мальчиков из тысячи новорожденных.

**1.83.** Оценить, в каких пределах с вероятностью $P$ заключено число шестерок, выпадающих при подбрасывании 1 000 игральных костей: а) если $P = 0,95$; б) $P = 0,99$.

**1.84.** При прохождении порога байдарка не получает повреждения с вероятностью 0,6, получает серьезное повреждение с вероятностью 0,3 и полностью ломается с вероятностью 0,1. Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Какова вероятность того, что при прохождении пяти порогов байдарка не будет полностью сломана?

## Ответы

**1.69.** 0,246; 0,345. **1.70.** 0,027; 0,189; 0,441; 0,343.
**1.71.** 0,00422; 2. **1.72.** 0,3952. **1.73.** $p = 2/\pi$; $P_4(1) = 0,122$;

$m_0 = 3$. **1.74.** 0,9596. **1.75.** а) 0,162; б) 0,998. **1.76.** а) 0,09; б) 0,27; в) 0,135. **1.77.** 0,5; 5499. **1.78.** 0,9964; 0,0176. **1.79.** P(A)= 0,0797; P(B)= 0,516. **1.80.** P(A)≈ 0; P(B)=0,05. **1.81.** $n \geqslant 9604$. **1.82.** от 490 до 550. **1.83.** а) (143; 189); б) (136; 196). **1.84** 0,2722.

## Раздел Б

# Дискретные случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство.

*Случайной величиной* называется действительная функция от элементарного события $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, такая, что

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает изолированные (отделенные друг от друга) значения, которые можно занумеровать.

*Рядом распределения* случайной величины $\xi$ называется таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ :

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\ldots$ | $p_n$ |

Здесь $p_i = P(\xi = x_i)$, $i \in \overline{1,n}$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ (условие нормированности).

*Функция распределения* дискретной случайной величины:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{k:\, x_k < x} p_k.$$

*Математическим ожиданием* $M[\xi]$ дискретной случайной величины называется ее среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

*Дисперсией* $D[\xi]$ дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$D[\xi] = M\left[(\xi - M[\xi])^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[\xi])^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2[\xi].$$

*Средним квадратическим отклонением* $\sigma[\xi]$ дискретной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$ оценивает меру разброса значений случайной величины $\xi$ относительно ее центра распределения (группировки) – математического ожидания $M[\xi]$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение называются *числовыми характеристиками* случайной величины.

## Задачи

**2.1.** Задан ряд распределения дискретной случайной величины

| $\xi$ | -1 | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Вычислить числовые характеристики случайной величины $\xi$.

**2.2.** Известно, что случайная величина $\xi$ принимает значения -1; 0 и 1. При этом $M[\xi] = \ 0,1$, $D[\xi] = 0,9$. Найти вероятности, с которыми принимаются значения $\xi$.

**2.3.** Два спортсмена делают по одному броску мяча в корзину. Вероятность попадания в нее первым спортсменом равна 0,5; вторым — 0,4. Найти среднее число попаданий в корзину.

**2.4.** Стрелку выдано четыре патрона. Он производит выстрелы по мишени до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах равны соответственно 0,4; 0,7; 0,6; 0,5. Случайная величина $\xi$ – число израсходованных патронов. Найти ее закон распределения и числовые характеристики.

**2.5.** По заданной функции распределения случайной величины $\xi$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 0,25, & \text{если } 1 < x \leqslant 2; \\ 0,75, & \text{если } 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

вычислить $M[\xi]$ и $D[\xi]$.

**2.6.** Случайная величина $\xi$ задана рядом распределения

| $\xi$ | -2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,08 | 0,4 | 0,32 | 0,2 |

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) вероятности событий $A = \{\xi < \ 2\}$; $B = \{1 \leqslant \xi < 3\}$; $C = \{1 < \xi \leqslant 3\}$; в) построить график функции $F(x)$.

**2.7.** В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения и функцию распределения числа перворазрядников среди выбранных.

**2.8.** Вероятности сдать экзамен по математике на отлично для каждого из троих студентов равны 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть $\xi$ – общее число полученных ими отличных оценок. Вычислить $M[\xi]$.

**2.9.** Артиллерийское орудие производит три выстрела по цели с вероятностями попадания 0,6; 0,7; 0,8 соответственно. Составить закон распределения случайной величины $\xi$ – числа попаданий орудия в цель. Вычислить числовые характеристики этой случайной величины.

**2.10.** Из колоды карт (32 листа) наудачу извлекают три. Составить закон распределения числа тузов среди извлеченных карт.

**2.11.** Независимо испытываются на надежность три прибора. Вероятности выхода из строя каждого прибора одинаковы и равны 0,6. Найти среднее число вышедших из строя приборов.

**2.12.** Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

**2.13.** Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «5», равна 0,2, на «4» – 0,4. Определить вероятности получения им оценок «3» и «2», если известно, что $M[\xi] = 3,7$, где дискретная случайная величина $\xi$ – оценка, полученная студентом на экзамене.

**2.14.** На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 15 лампочек. Для отыскания перегоревшей лампочки проверяются по очереди все лампочки гирлянды. Сколько в среднем придется проверить лампочек, чтобы обнаружить перегоревшую? Какова вероятность того, что для обнаружения перегоревшей лампочки придется проверить не менее половины всех лампочек?

**2.15.** Рабочий обслуживает три автоматические линии, действующие независимо друг от друга. Вероятности того, что в течение смены эти линии потребуют вмешательства рабочего, равны соответственно 0,30; 0,35; 0,40. Найти математическое ожидание и дисперсию числа линий, которые потребуют вмешательства рабочего в течение смены.

**2.16.** В распоряжении монтера имеется 10 новых лампочек; каждая из них с вероятностью $p = 0,05$ имеет дефект. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Пусть случайная величина $\xi$ – число проверенных лампочек. Построить ряд распределения и найти математическое ожидание случайной величины.

**2.17.** Задано распределение дискретной случайной величины $\xi$ :

| $\xi$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,15 | 0,1 |

Построить ряды распределений случайных величин: а) $\eta = 2\,\xi + 3$; б) $\eta = 2\,\xi$; в) $\eta = 3\,\xi^2$ и вычислить их числовые характеристики.

**2.18.** Задано распределение дискретной случайной величины $\xi$:

| $\xi$ | -3 | -1 | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,05 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,15 | 0,05 |

.

Найти распределение случайных величин: а) $\eta = |\xi|$; б) $\eta = \xi^3 + 1$.

## Ответы

**2.1.** $M[\xi] = 1,3$; $D[\xi] = 2,01$. **2.2.** 0,405; 0,09; 0,505. **2.3.** 0,9.

**2.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,42 & 0,108 & 0,072 \end{pmatrix}$; $M[\xi] = 1,852$; $D[\xi] = 0,77$.

**2.5.** $M[\xi] = 2$; $D[\xi] = 0,5$. **2.6.** $P(A) = 0,48$; $P(B) = 0,72$; $P(C) = 0,52$.

**2.7.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,375 & 0,5 & 0,125 \end{pmatrix}$. **2.8.** $M[\xi] = 2,4$; $D[\xi] = 0,46$.

**2.9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,024 & 0,188 & 0,452 & 0,336 \end{pmatrix}$; $M[\xi] = 2,1$; $D[\xi] = 0,61$.

**2.10.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,66 & 0,305 & 0,034 & 0,001 \end{pmatrix}$. **2.11.** $M[\xi] = 1,8; \sigma[\xi] = 0,72$.
**2.12.** 7. **2.13.** $P(3) = 0,3$; $P(2) = 0,1$. **2.14.** 119/15; 8/15.

**2.15.** $M[\xi] = 1,05$; $D[\xi] = 0,6775$. **2.16.** 1,0526.

## Непрерывные случайные величины

*Непрерывной* называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток и для которой существует функция $f(x) = F'(x)$. При этом функция распределения случайной величины $F(x)$ непрерывна.

Функция $f(x)$ называется *плотностью вероятности* (или дифференциальной функцией распределения) и обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geqslant 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$(условие нормированности);

3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$; 4) $P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины:

$$M[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx;$$

$$D[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^2 f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2[\xi].$$

## Задачи

**2.19.** Пусть $f(x)$ – плотность вероятности. Найти значение входящей в определение $f(x)$ постоянной $C$ :

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ C\, e^{-\alpha x}, & \text{если } x > 0; \end{cases} \qquad \alpha > 0;$$

$$2)\ \ f(x) = \frac{C}{1+(x-\alpha)^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**2.20.** Задана плотность вероятности случайной величины $\xi$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{если } x < 0;\ x > 1. \end{cases}$$

Найти постоянную $a$; $F(x)$; числовые характеристики; $P(\xi > 0,5)$.

**2.21.** Существует ли значение $C$ такое, что функция $f(x)$ служит плотностью вероятности? Если существует, то указать его и вычислить соответствующие математическое ожидание и дисперсию:

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} C(1-|x|), & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$$

$$2)\ \ f(x) = Ce^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

**2.22.** Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant \pi/2. \end{cases}$$

Найти постоянную $a$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию случайной величины и вероятность $P(|\,\xi| < \pi/4)$.

**2.23.** Найти плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины по заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \sin^2 x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

**2.24.** Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -1; \\ ax + b, & \text{если } -1 < x \leqslant 2; \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти $a, b$; $f(x)$; $P(0 < \xi < 1/2)$. Построить графики $f(x), F(x)$. Вычислить числовые характеристики случайной величины $\xi$.

### Ответы

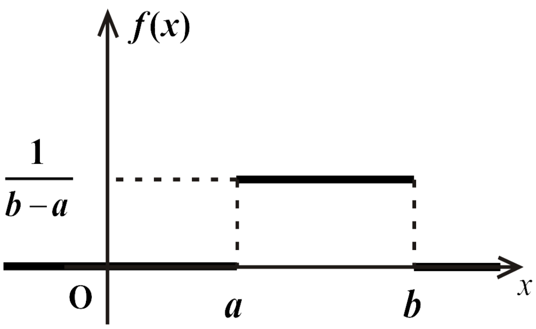
**2.19.** 1) $C = \alpha$; 2) $C = 1/\pi$. **2.20.** $\alpha = 3$; $M[\xi] = 0,25$; $D[\xi] = 0,104$; $P(\xi > 0,5) = 0,875$. **2.21.** 1) $C = 1$; $M[\xi] = 0$; $D[\xi] = 1/6$; 3) $C = 1/2$; $M[\xi] = 0$; $D[\xi] = 2$. **2.22.** $a = 0,5$; $P(|\xi| < \pi/4) = \sqrt{2}/2$; $M[\xi] = 0$; $D[\xi] = \pi^2/4 - 2$.
**2.23.** $M[\xi] = \pi/4$. **2.24.** $a = b = 1/3$; $P(0 < \xi < 1/2) = 1/6$; $M[\xi] = 0,5$; $D[\xi] = 0,75$.

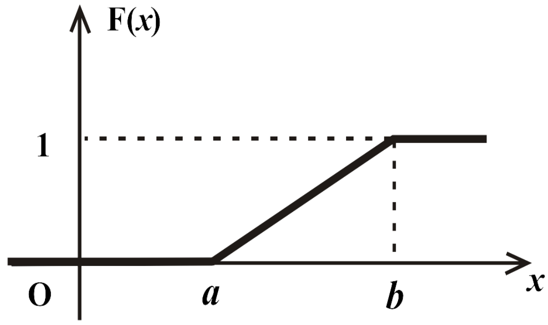
## Примеры непрерывных распределений

Случайная величина $\xi$ имеет *равномерное распределение* на $[a; b]$ (запись: $\xi \in R[a; b]$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b; \\ 0, & \text{если } x > b; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Графики этих функций приведены ниже.



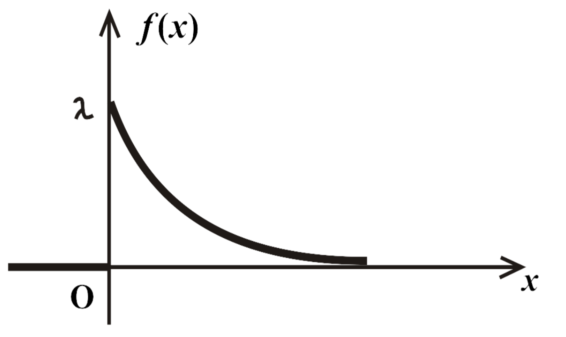

Заметим, что значения $f(x)$ в точках $a$ и $b$ не фиксируются, т.е. можно положить $f(a) = f(b) = 0$ или, например, $f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a}$ и даже как-нибудь иначе. Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины

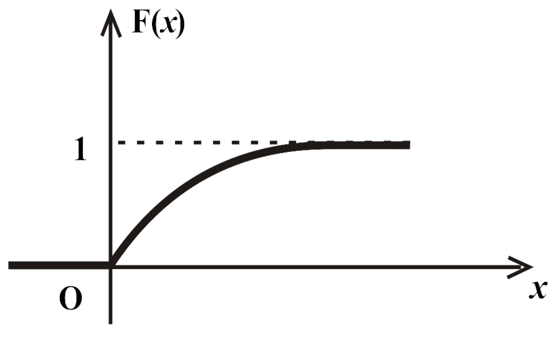
$$M[\xi] = \frac{a+b}{2}; \; D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Случайная величина $\xi$ имеет *экспоненциальное (показательное) распределение* с параметром $\lambda > 0$ (запись: $\xi \in Exp(\lambda)$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Графики этих функций приведены ниже.



Числовые характеристики показательной случайной величины

$$M[\xi] = \frac{1}{\lambda}; \ D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Случайная величина $\xi$ имеет *нормальное (гауссово) распределение* с параметрами $a$ и $\sigma > 0$ (запись: $\xi \in N(a;\sigma)$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} \, dt.$$

Числовые характеристики нормального распределения

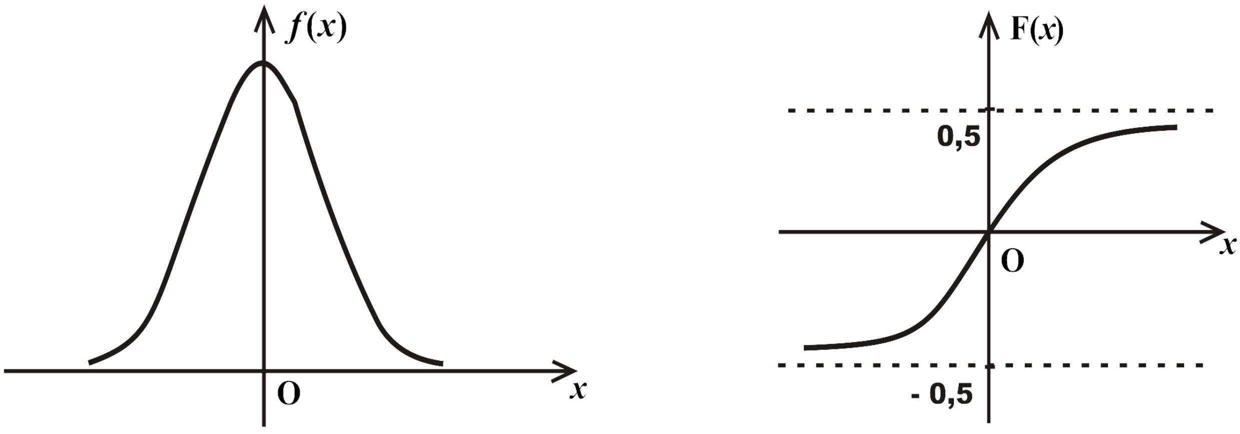
$$M[\xi] = a; \ D[\xi] = \sigma^2.$$

При $a = 0$; $\sigma = 1$ получаем так называемое *стандартное нормальное распределение*. Его дифференциальная и интегральная функции имеют вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$– функция Лапласа $\left(\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt\right)$.

Графики (для $\xi \in N(0;1)$) приведены на рисунке.



В общем случае ($\xi \in N(a;\sigma)$) эти функции равны соответственно

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right); \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

При этом

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

## Задачи

**2.25.** Поезда метро ходят с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, вышедший на платформу в случайный момент времени, будет ожидать поезд не менее трех минут.

**2.26.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в некотором интервале. Построить графики ее функции распределения и плотности вероятности, если известно, что $M[\xi] = 2$; $D[\xi] = 0,75$.

**2.27.** Найти числовые характеристики равномерно распределенной в некотором интервале случайной величины $\xi$, если известны вероятности:

$$1)\ \ P(0 < \xi < 1) = 2/3; \quad P(1 < \xi < 2) = 1/6;$$

$$2)\ \ P(1 < \xi < 2) = 1/6; \quad P(3 < \xi < 4) = 5/12.$$

**2.28.** Пусть $\xi \in Exp(\lambda)$. Найти вероятность попадания случайной величины $\xi$ в интервал $(\alpha,\beta)$, где $\alpha > 0$.

**2.29.** Правило «трех сигм» для экспоненциального распределения: вычислить вероятность $P\left(|\,\xi - M[\xi]| < 3\sqrt{D[\xi]}\right)$, если $\xi \in Exp(\lambda)$.

**2.30.** Время $T$ выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 0,2 \cdot e^{-0,2t}, & \text{если } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(t)$; математическое ожидание и дисперсию случайной величины $T$; вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

**2.31.** Какое событие для случайной величины $\xi \in Exp(\lambda)$ более вероятно: $\xi < M[\xi]$ или $\xi > M[\xi]$?

**2.32.** Пусть случайная величина $\xi$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda$. Найти плотности распределения следующих случайных величин: а) $\sqrt{\xi}$; б) $\xi^2$; в) $\min\{\xi; \xi^2\}$.

**2.33.** Что произойдет с графиком функции распределения случайной величины $\xi$ : а) если к $\xi$ прибавить число 3; б) умножить $\xi$ на число 3?

**2.34.** Пусть $\xi \in N(a; \sigma)$. Известны вероятности $P(\xi > 2) = 0,5$; $P(\xi < 3) = 0,975$. Вычислить $P(1 < \xi < 3)$ и записать плотность распределения вероятности.

**2.35.** Деталь считается стандартной, если отклонение ее размера от проектного не превышает 0,7 мм. Считая, что размер детали – случайная величина, распределенная по нормальному закону $N(a; 0,4)$, найти, сколько годных деталей будет в среднем из 100 выбранных наугад.

**2.36.** Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 мм и математическим ожиданием 0. Определить вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превысит по абсолютной величине 4 мм.

**2.37.** Оценить интервал допустимых отклонений размеров деталей от расчетных (среднее квадратическое отклонение равно

5 мк) так, чтобы с вероятностью не более 0,0027 отклонения размеров изготовленных деталей от расчетных выходили за пределы допустимых значений.

**2.38.** Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84 г/см$^3$. В результате статистических испытаний обнаружено, что практически 99,9 % всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более чем на 0,01 г/см$^3$. Распределение считать нормальным.

**2.39.** Случайная величина $\xi$ подчинена нормальному закону $N(0;\sigma)$. Вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\delta;\delta)$ равна 0,5. Найти $\sigma$ и записать плотность вероятности случайной величины.

**2.40.** Производится три независимых выстрела по цели, имеющей вид полосы (мост, автострада, взлетно-посадочная полоса). Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, равно 16 м. Найти вероятность $p$ попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий: $A$={хотя бы одно попадание в полосу при трех выстрелах}; $B$={не менее двух попаданий в полосу при трех выстрелах}; $C$={ один снаряд попадет в полосу, один ляжет с недолетом и один с перелетом}.

**2.41.** Мгновенные значения амплитуды $X$ принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Релея

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x > 0.$$

Вычислить числовые характеристики $X$.

**2.42.** Для случайной величины $\xi \in N(-2;9)$ вычислить $M[\eta]$, где $\eta = (3-\xi)(\xi+5)$.

### Ответы

**2.25.** 0,4. **2.26.** $\xi \in R(0,5;3,5)$. **2.27.** 1) $M[\xi] = 1/2$; $D[\xi] = 3/16$; 2) $M[\xi] = 14/5$; $D[\xi] = 12/25$. **2.28.** $e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$. **2.29.** 0,982. **2.30.** $F(t) = 1 - e^{-0,2t}$; $M[\xi] = 5$; $D[\xi] = 25$; $P(1 \leqslant T \leqslant 5) = 0,451$. **2.31.** $1-e^{-2}$. **2.32.** а) $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$, $x \geqslant 0$; б) $\frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $x \geqslant 0$; в) $f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x}, & \text{если } x > 1; \\ \frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, & \text{если } x \in [0;1]. \end{cases}$

**2.33.** а) сдвиг вправо на 3 единицы ; б) растяжение вдоль Ox в 3 раза. **2.34.** 0,95. **2.35.** 92. **2.36.** 0,4343.

**2.37.** Не менее 30 мк. **2.38.** 0,898. **2.39.** 1,48.

**2.40.** $p = 0,468$; $P(A) = 0,849$; $P(B) = 0,452$; $P(C) = 0,199$.

**2.41.** $M[X] = \sigma\sqrt{\pi/2}$; $D[X] = \sigma^2(2-\pi/2)$. **2.42.** -66.

## Функции от случайной величины

**2.43.** Случайная величина $X$ распределена равномерно в интервале $(-\pi/2;\pi/2)$. Найти законы распределения случайных величин: а) $Y = \sin X$; б) $Y = \cos X$; в) $Y = |\sin X|$.

**2.44.** Плотность распределения случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \in (0;\pi/2); \\ 0, & \text{если } x \notin (0;\pi/2)\,. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$. Вычислить числовые характеристики случайной величины $Y$.

**2.45.** Радиус круга $R$ – случайная величина, распределенная по закону Релея: $f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ при $r > 0$. Найти закон распределения площади круга радиуса $R$.

**2.46.** Непрерывная случайная величина $X$ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

**2.47.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[0;2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 6\,\xi^2$.

**2.48.** Случайная величина $\xi$ распределена по закону Коши с плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

**2.49.** Дискретная случайная величина $\xi$ задана рядом распределения:

| $\xi$ | $-\pi/3$ | $-\pi/4$ | $0$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Записать закон распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta$.

### Ответы

**2.43.** а) $g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$, $y \in (-1;1)$; б) $g(y) = 2/(\pi\,\sqrt{1-y^2})$, $y \in (0;1)$; в) $g(y) = 2/(\pi\,\sqrt{1-y^2})$, $y \in (0;1)$. **2.44.** $g(y) = \cos\sqrt{y}/(2\,\sqrt{y})$, $y \in \left(0;\pi^2/4\right)$; $M[Y]=(\pi^2-8)/4$; $D[Y]=20-2\pi^2$. **2.45.** $g(s) = 1/(2\pi\sigma^2)\exp(-s/(2\pi\sigma^2))$; $s > 0$. **2.46.** $M[Y] = \lambda/(\lambda+1)$; $D[Y]=\lambda/(\lambda+2)(\lambda+1)^2$. **2.47.** $M[\eta]=8$; $D[\eta]=51,2$.

## Раздел В

# Системы случайных величин (случайные векторы)

*Системой случайных величин (случайным вектором)* называется упорядоченная совокупность случайных величин

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

При $n = 2$ функция распределения двумерного случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$F(x, y) = P(X < x,\, Y < y).$$

Если $X, Y$ – дискретные случайные величины, то

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij},$$

где $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Плотность вероятности непрерывного случайного вектора $(X, Y)$ выражается через функцию распределения формулой $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ и обладает следующими свойствами:

- $f(x, y) \geqslant 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1 \quad$ (условие нормированности);
- $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$;
- $P((X, Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy$.

Для характеристики связи между случайными величинами $X$ и $Y$ служит *корреляционный момент*

$$K_{XY} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Для случайных величин $X$ и $Y$ с конечными дисперсиями

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{XY},$$

или в общем виде

$$D[aX + bY + c] = a^2 D[X] + b^2 D[Y] + 2abK_{XY}.$$

Нормированный корреляционный момент $r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma[X]\sigma[Y]}$ называется *коэффициентом корреляции* случайных величин $X$ и $Y$.

## Задачи

**3.1.** По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Рассматриваются две случайные величины: $X$ – число попаданий; $Y$ – число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей случайного вектора $(X, Y)$. Построить функцию распределения $F(x, y)$.

**3.2.** Двумерное распределение пары случайных целочисленных величин $X$ и $Y$ задается с помощью таблицы

| $X/Y$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 1/8 | 1/12 | 7/24 |
| 1 | 5/24 | 1/6 | 1/8 |

Найти: а) законы распределения $X$ и $Y$; б) условные вероятности $P(Y = 1 \mid X = 0)$ и $P(Y = 1 \mid X = 1)$; в) распределение случайного вектора $(X + Y, XY)$; г) одномерные распределения величин $X + Y$ и $XY$.

**3.3.** Закон распределения системы дискретных случайных величин задан таблицей

| $X/Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,15 | 0,04 | 0,06 |
| 2 | 0,12 | 0,08 | 0,05 | 0,04 |
| 3 | 0,03 | 0,02 | 0,11 | p |

Найти: а) значение $p$; б) одномерные законы распределения компонент $X$ и $Y$; в) вероятности событий $P(X = 1 \mid Y \geqslant 0)$ и $P(X = Y)$.

**3.4.** Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу извлекают 2 шара без возвращения. Описать закон распределения случайного вектора $(X, Y)$ и вычислить коэффициент корреляции $r_{XY}$, если $X$ – число белых шаров в выборке, а $Y$ – число черных шаров в выборке.

**3.5.** На отрезок $[0; a]$ наудачу и независимо брошены две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.
**3.6.** Плотность вероятности случайного вектора $(X, Y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in D; \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Область $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x+2y \leqslant 2\}$. Найти: а) плотность распределения случайной величины $X$; б) вероятность попадания случайной точки $(X, Y)$ в область $D_1 = [1; 3] \times [0; 1]$.
**3.7.** Случайный вектор $(X, Y)$ равномерно распределен внутри квадрата $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$. Записать плотность вероятности случайного вектора, установить зависимость его компонент. Найти: а) плотности распределения компонент $X$ и $Y$; б) коэффициент корреляции $r_{XY}$; в) условные плотности распределения компонент случайного вектора.
**3.8.** Двумерная случайная величина $(X, Y)$ имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y} + e^{-\lambda x - \mu y}, & \text{если } (x,y) \in D; \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0; y \geqslant 0\}$; $\lambda > 0$; $\mu > 0$. Установить, являются ли величины $X$ и $Y$ зависимыми. Найти: а) одномерные распределения этих величин, их математические ожидания и дисперсии; б) вычислить корреляционный момент $K_{XY}$ и коэффициент корреляции $r_{XY}$ вектора $(X, Y)$.
**3.9.** Для случайного вектора $(\xi, \eta)$, корреляционный момент и дисперсии которого равны соответственно $K_{\xi\eta} = -3$; $D[\xi] = 2$; $D[\eta] = 6$. Вычислить: 1) $D[\xi + \eta]$; 2) $D[\xi - \eta]$; 3) $D[-\xi - 2\eta]$; 4) $D[2\xi + 3\eta]$; 5) $D[3\xi - \eta + 2]$; 6) $D[2\xi - 3]$.
**3.10.** Время $T_,$ в течение которого клиент ожидает обслуживания, и само время обслуживания $T_2 -$ две независимые непре-

рывные случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2 \neq \lambda_1$ соответственно. Найти плотность распределения вероятностей общего времени $T = T_1 + T_2$, проведенного клиентом в системе обслуживания.

**3.11.** Известно, что $X$ и $Y$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

**3.12.** Случайное напряжение $U$ распределено по нормальному закону с параметрами $m_U$ и $\sigma_U$. Напряжение $U$ поступает на ограничитель, который оставляет его равным $U$, если $U \leqslant u_0$, и делает равным $u_0$, если $U > u_0 : Z = \min\{U; u_0\}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z$, если $m_U = u_0$.

**3.13.** Число $X$ выбирается наудачу случайным образом из множества $\{1, 2, 3\}$. Затем из того же множества выбирается число $Y \geqslant X$. Построить таблицу распределения случайного вектора $(X, Y)$. Вычислить коэффициент корреляции $r_{XY}$.

**3.14.** Случайная величина $X$ принимает значения 0; 1; 2 с вероятностями 0,2; 0,7; 0,1 соответственно. Не зависящая от нее случайная величина $Y$ принимает значения -1; 0 и 1 с вероятностями 0,3; 0,5; 0,2 соответственно. Описать закон распределения случайного вектора $(X, Y)$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ и вычислить $F(1,5; -0,5)$; $F(0,5; 4)$.

**3.15.** Плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (xy + y^2), & \text{если } (x, y) \in [0; 2] \times [0; 2]; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin [0; 2] \times [0; 2]. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $c$ и вероятность $P(X + Y < 2)$.

**3.16.** Координаты $X$, $Y$ случайной точки на плоскости имеют совместное равномерное распределение внутри прямоугольника

$G = [-1;2]\times[1;2]$. Найти плотность вероятности $f(x,y)$, функцию распределения $F(x,y)$, вероятности попадания случайной точки в прямоугольник $[0,5;1,5]\times[1,5;2,5]$ и круг $x^2+(y-1,5)^2 \leqslant 0,25$.

**3.17.** Плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора $f(x,y) = 1$, если $(x;y)$ лежит внутри треугольника $ABC$, и $f(x,y) = 0$, если $(x;y)$ не лежит внутри треугольника $ABC$. Вершины треугольника: $A(0;0)$; $B(-1;-1)$; $C(1;-1)$. Найти одномерные плотности вероятности $f_X(x)$ и $g_Y(y)$; построить их графики; вычислить $r_{XY}$.

**3.18.** Двумерная случайная величина $(X,Y)$ имеет независимые компоненты, распределенные по закону

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ 1/3, & \text{если } 1/2 < t \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } t \notin [0;2]. \end{cases}$$

Записать двумерную плотность вероятности $(X,Y)$. Вычислить вероятность попадания $(X,Y)$ в область $D$, ограниченную линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

**3.19.** Двумерная случайная величина $(X,Y)$ имеет независимые компоненты, распределенные по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$. Вычислить вероятность $P\left(\log_2\left(Y/(X-1)\right) < 0\right)$.

**3.20.** Плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора $(X;Y)$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+y), & \text{если } (x,y) \in [0;1]\times[0;2]; \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin [0;1]\times[0;2]. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $c$; одномерные плотности вероятности, коэффициент корреляции $X$ и $Y$.

## Ответы

**3.1.**

| $X/Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,25 |
| 1 | 0,75 | 0 |

**3.2.** б) 2/3; 1/4;

в)

| $\xi/\eta$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1/12 | 0 | 1/6 | 0 |
| 1 | 1/8 | 0 | 0 | 0 | 1/8 |

г)

| $X+Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/8 | 1/12 | 1/2 | 1/6 | 1/8 |

| $XY$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/2 | 1/4 | 1/4 |

**3.3.** а) 0,2; в) 0,29. **3.4.**

| $X/Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 2/15 |
| 1 | 0 | 8/15 | 0 |
| 2 | 1/3 | 0 | 0 |

; $r_{XY} = -1$.

**3.5.** $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant 0; \\ (2ta - t^2)/a^2, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant a; \\ 1, & \text{если } t > a. \end{cases}$

**3.6.** а) $f(x) = 1 - x/2$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$; б) $P(D_1) = 0,25$.
**3.7.** а) $f_X(x) = 1 - |x|$, если $|x| \leqslant 1$; $f_Y(y) = 1 - |y|$, если $|y| \leqslant 1$; б) $K_{XY} = r_{XY} = 0$. **3.8.** а) $X \in Exp(\lambda)$; $Y \in Exp(\mu)$. **3.9.** 1) 2; 2) 14; 3) 14; 4) 26; 5) 42; 6) 8. **3.10.** $f_r(z) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right)$, если $z > 0$. **3.11.** $f(z) = z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$, если $z > 0$. **3.12.** $M[Z] = m_U - \sigma_U/\sqrt{2\pi}$; $D[Z] = \sigma_U^2 \cdot (\pi - 1)/2\pi$. **3.13.** $r_{XY} = 0,59$. **3.14.** $c = 3/28$; $P(X+Y < 2) = 3/14$. **3.15.** 1/6; $\pi/12$. **3.17.** $r_{XY} = 0$.
**3.18.** 2/9. **3.19.** $(e^{-\lambda})/2$. **3.20.** $r_{XY} = -0,083$.

# Закон больших чисел

**3.21.** При составлении статистического отчета надо сложить 10 000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до $10^{-3}$. Считая, что ошибки округления независимы и распределены равномерно в интервале $(-0,5 \cdot 10^{-3}; 0,5 \cdot 10^{-3})$, оценить наименьший по длине промежуток, в котором с вероятностью 0,95 будет заключена суммарная ошибка.

**3.22.** Дискретная случайная величина $X$ задана законом распределения

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,15 | 0,3 | 0,25 | 0,2 |

Вычислить вероятность события $A = \{\,|X - M[X]| < 1,5\}$. Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

**3.23.** Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, утверждать, что относительная частота выпадения герба попадет в интервал $(0,4; 0,6)$? Получить искомую оценку, используя: а) неравенство Чебышева; б) считая применимой интегральную теорему Муавра-Лапласа.

**3.24.** Среднее число вызовов за одну минуту на АТС равно 20. Найти вероятности событий $A = \{X \geqslant 20\}$ и $B = \{10 \leqslant X \leqslant 30\}$.

**3.25.** Напряжение на выходах 40 каналов радиотехнического устройства есть независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными 5 В, и дисперсиями, равными 10 В. Найти вероятность того, что суммарное напряжение на выходе: а) будет находиться в пределах от 140 до 200 В; б) превысит 180 В.

**3.26.** Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что при подбрасывании 12 игральных костей сумма очков (случайная величина $X$) отклонится от математического ожидания меньше, чем на 15. Случайные величины $X_i$ – число очков на $i$-й кости ($i \in \overline{1,12}$).

**3.27.** На отрезке $[0;1]$ случайным образом выбрано 100 чисел (то есть рассматриваются 100 независимых средних $X_1, \ldots, X_{100}$, равномерно распределенных на отрезке $[0;1]$). Найти вероятность того, что их сумма заключена между 51 и 60.

### Ответы

**3.21.** $-0,057; 0,057$. **3.22.** 0,7; $p \geqslant 0,33$. **3.23.** а) не менее 1000 раз; б) не менее 127 раз. **3.24.** $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,9742$. **3.25.** а) 0,499; б) 0,841. **3.26.** $P \geqslant 0,844$. **3.27.** 0,3644.

## Раздел Г

# Элементы математической статистики

### Задачи

**4.1.** Восемь независимых измерений расстояния между двумя геодезическими знаками дали следующие результаты: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Систематическая ошибка отсутствует. Найти несмещенную оценку дисперсии ошибок измерения, если: а) длина измеряемого расстояния известна $\overline{X} = 375$ м; б) длина измеряемого расстояния неизвестна.

**4.2.** Результаты измерений, не содержащие систематических ошибок, приведены в таблице в виде сгруппированной выборки

| $i$ | $x_i$ | $n_i$ | $i$ | $x_i$ | $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 114 | 2 | 4 | 117 | 4 |
| 2 | 115 | 5 | 5 | 118 | 3 |
| 3 | 116 | 8 | – | – | – |

,

где $x_i$ и $n_i$ – среднее значение и число элементов в $i$-м разряде соответственно. Определить оценку измеряемой величины и доверительный интервал при доверительной вероятности 0,95, считая ошибки измерения нормальными независимыми величинами.

**4.3.** На основании 100 опытов определено, что в среднем для производства детали требуется время $\overline{t} = 5,5$ с; $\overline{\sigma_t} = 1,7$ с. Допуская, что время для производства детали есть нормальная случайная величина, определить границы, в которых лежат истинные значения для $\overline{t}$ и $\overline{\sigma_t}$ с доверительной вероятностью 0,85 и 0,9 соответственно.

**4.4.** Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 30$ м. Сколько потребуется сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не более 15 м при доверительной вероятности 0,9?

**4.5.** При испытании 10 однотипных приборов зарегистрировано время непрерывной работы каждого прибора (в часах). Результаты наблюдений: 200, 350, 600, 450, 400, 400, 500, 350, 450, 550. Определить оценку математического ожидания $\overline{t}$ времени $T$ безотказной работы прибора и доверительный интервал для $\overline{t}$ при доверительной вероятности 0,9, если случайная величина $T$ имеет экспоненциальное распределение.

**4.6.** Выборка из 50 ламп накаливания первого завода показала среднюю продолжительность времени работы 1 282 ч и $S_1 = 80$ ч. Выборка из 50 ламп накаливания второго завода показала среднюю продолжительность времени работы 1 208 ч и $S_2 = 92$ ч. Предполагая, что время работы ламп имеет нормальное распределение, проверить гипотезу о том, что продукция обоих заводов имеет одинаковое качество при $\alpha = 0,05$.

**4.7.** Средний диаметр для случайной выборки из 65 подшипников, обработанных на станке, равен 0,24 см при среднем квадратическом отклонении $S_1 = 0,02$ см. На следующий день из числа обработанных на этом станке деталей вновь отбирают 65 штук и устанавливают, что их средний диаметр 0,25 см при $S_2 = 0,04$ см.

Приняв $\alpha = 0,05$, выяснить, требует ли переналадки станок.

**4.8.** Используя критерий согласия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$, проверить гипотезу о нормальном распределении для следующих данных:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 102 | 106 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 | 130 |
| 11 | 9 | 14 | 23 | 19 | 11 | 7 | 6 |

**4.9.** Используя критерий согласия Пирсона, проверить (при $\alpha = 0,05$) по выборке гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $0-10$ | $10-20$ | $20-30$ | $30-40$ | $40-50$ | $50-60$ |
| 11 | 14 | 15 | 10 | 14 | 16 |

**4.10.** Используя критерий согласия Пирсона, проверить (при $\alpha = 0,05$) по выборке гипотезу о пуассоновском распределении генеральной совокупности.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 7 | 21 | 26 | 21 | 13 | 7 | 3 | 2 |

## Ответы

**4.1.** а) 814,87 м$^2$; б) 921,24 м$^2$. **4.2.** $\overline{X} = 116,05$ м; $(115,53; 116,57)$. **4.3.** $(5,249; 5,751)$; $(1,525; 1,928)$. **4.4.** Не менее 11 измерений. **4.5.** $\bar{t} = 425$ ч; $(270,7; 779,82)$. **4.6.** Продукция первого завода качественнее. **4.7.** Не требует. **4.8.** Принимается. **4.9.** Принимается. **4.10.** Принимается.

# Лабораторная работа по математической статистике

Используя критерий согласия Пирсона, проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по предложенной выборке. Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Найти доверительный интервал для генерального математического ожидания при неизвестной дисперсии.

**1.**

| $x_i$ | 10,6 | 15,6 | 20,6 | 25,6 | 30,6 | 35,6 | 40,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 8 | 10 | 40 | 22 | 15 | 3 | 2 |

**2.**

| $x_i$ | 100 | 1106 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 6 | 10 | 40 | 20 | 12 | 8 |

**3.**

| $x_i$ | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 10 | 30 | 25 | 15 | 10 | 5 |

**4.**

| $x_i$ | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 40 | 25 | 8 | 4 | 3 |

**5.**

| $x_i$ | 12,4 | 16,4 | 20,4 | 24,4 | 28,4 | 32,4 | 36,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 40 | 25 | 8 | 4 | 3 |

**6.**

| $x_i$ | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 | 135 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 10 | 30 | 25 | 15 | 10 | 5 |

**7.**

| $x_i$ | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 6 | 10 | 40 | 20 | 12 | 8 |

**8.**

| $x_i$ | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 | 135 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 6 | 10 | 40 | 20 | 12 | 8 |

**9.**

| $x_i$ | 12,5 | 13 | 13,5 | 14 | 14,5 | 15 | 15,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 40 | 25 | 8 | 4 | 3 |

**10.**

| $x_i$ | 10,2 | 10,9 | 11,6 | 12,3 | 13 | 13,7 | 14,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 8 | 10 | 60 | 12 | 5 | 3 | 2 |

# Контрольные работы

## *Контрольная работа № 1*

### *Вариант 1*

**1.** На отрезок $[-1; 1]$ бросаются независимо друг от друга две точки; $p$ и $q$ – их координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2px + q = 0$ действительны.
**2.** Стержень длиной 1 м ломается случайным образом в двух точках. Какова вероятность того, что хотя бы одна из получившихся частей будет не более 10 см?

### *Вариант 2*

**1.** На отрезке $[0; 1]$ независимо друг от друга наудачу выбираются две точки. Найти вероятность события $A$={разность координат первой и второй точек меньше 0,5}.
**2.** В квадрат с вершинами $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$ наудачу бросается точка. Пусть $(x, y)$ – ее координаты. Найти при некотором фиксированном значении $0 < z < 1$ вероятность события $B = \{\min\{x, y\} < z\}$.

*Вариант 3*

**1.** Отрезок длины $L$ ломается наугад в двух взятых точках. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник.

**2.** На горизонтальном диаметре круга радиуса $R$ наугад берется точка. Затем через эту точку проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Найти вероятность того, что длина хорды не превосходит $R$.

*Вариант 4*

**1.** Две точки независимо друг от друга наудачу выбираются на отрезке $[0;1]$. Найти вероятность события $A$={сумма координат точек больше удвоенного произведения координат}.

**2.** На верхней полуокружности радиуса $R$ наугад берется точка. Затем через эту точку проводится хорда, перпендикулярная горизонтальному диаметру. Найти вероятность того, что длина хорды не превосходит $R$.

*Вариант 5*

**1.** Две точки независимо друг от друга наудачу выбираются на отрезке $[0;1]$. Найти вероятность события $A$={сумма квадратов координат точек больше 1}.

**2.** Найти вероятность того, что из трех взятых наудачу отрезков длиной не больше $L$ можно построить треугольник.

## *Контрольная работа № 2*

### *Вариант 1*

**1.** В библиотеке на стеллаже в случайном порядке расставлены 10 учебников по экономике и 5 – по математике. Наудачу берут три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников будет по математике.

**2.** При обследовании больного имеется подозрение на одно из заболеваний $H_1$ и $H_2$. Их вероятности равны 0,6 и 0,4 соответственно. Для уточнения диагноза назначается анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция. В случае болезни $H_1$ вероятность положительной реакции равна 0,9, отрицательной – 0,1, а в случае болезни $H_2$ положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ провели дважды, и оба раза реакция оказалась положительной. Требуется найти вероятность каждого заболевания после проделанных анализов.

### *Вариант 2*

**1.** Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле равны соответственно 0,7 и 0,8. В мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

**2.** По линии связи с вероятностями 0,84 и 0,16 соответственно передаются сигналы $A$ и $B$. Из-за помех $1/6$ часть переданных сигналов $A$ искажается и принимается как сигнал $B$, а $1/8$ часть переданных сигналов $B$ принимается как сигнал $A$. Какова вероятность того, что при приеме появится: а) сигнал $A$; б) сигнал $B$? Известно, что принят сигнал $A$. Какова вероятность того, что он же и был передан?

*Вариант 3*

**1.** В ящике 6 катушек белых, 4 катушки черных и 2 катушки красных ниток. Катушки извлекают по одной без возвращения. Найти вероятность того, что катушка с белыми нитками появится раньше, чем катушка с черными нитками.

**2.** Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,5.

*Вариант 4*

**1.** Найти вероятность того, что наудачу взятое натуральное число не делится: а) ни на 2, ни на 3; б) на 2 или на 3.

**2.** Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего равны соответственно 0,2; 0,4 и 0,3.

*Вариант 5*

**1.** Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что он наберет нужный номер не более чем за три попытки.

**2.** Имеется три партии деталей по 20 штук в каждой. Число стандартных деталей в каждой из них равно 20, 15 и 10 соответственно. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали извлечены из третьей партии.

## *Контрольная работа № 3*

### *Вариант 1*

**1.** Дан закон распределения дискретной случайной величины $\xi$ :

| $\xi$ | -2 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,1 | 0,5 | 0,2 |

Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Вычислить числовые характеристики $\xi$ и $P(0 < \xi \leqslant 3)$.

**2.** При каком значении параметра $c$ функция

$$f(x) = \begin{cases} c/x^4, & \text{если } x \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

может быть плотностью распределения непрерывной случайной величины $\xi$? Найти $P(1 < \xi < 5)$.

**3.** Пусть $\xi \in N(5\,;0,5)$. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях хотя бы в одном из них $\xi$ примет значения из интервала $(2;4)$.

**4.** Плотность вероятности случайной величины $\xi$ имеет вид: $f(x) = \cos x$ в интервале $(0;\pi/2)$; $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^3$.

**5.** Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(\xi, \eta)$ : $f(x,y) = 0,25 \sin x \sin y$ в квадрате $[0;\pi] \times [0;\pi]$. Вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти математические ожидания составляющих, их корреляционный момент.

### *Вариант 2*

**1.** Построить ряд распределения числа попаданий в ворота при двух одиннадцатиметровых ударах, если вероятность попадания при одном ударе равна 0,7.

**2.** Функция распределения непрерывной случайной величины $\xi$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\pi/6; \\ a\sin\left(x + \pi/6 + b\right), & \text{если } -\pi/6 < x < \pi/3; \\ 1, & \text{если } x \geqslant \pi/3. \end{cases}$$

Вычислить коэффициенты $a$ и $b$, $P(0 < \xi < \pi/2)$. Указать вид $f(x)$.

**3.** Успеваемость студентов первого курса составляет 80 %. Какова вероятность того, что двое из трех наудачу отобранных студентов окажутся успевающими? Найти математическое ожидание и дисперсию числа успевающих студентов среди 50 наудачу отобранных первокурсников.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 1$; $\sigma = 2$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \operatorname{arctg}\xi$.

**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ распределена равномерно внутри круга $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Доказать, что $\xi$ и $\eta$ – зависимые некоррелированные величины.

### *Вариант 3*

**1.** Монету подбрасывают пять раз. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины $\xi$– числа выпадений герба.

**2.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{4 - x^2}, & \text{если } |x| < 2, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра $c$, функцию распределения $F(x)$ и $P(1 < \xi < 5)$.

**3.** Случайная величина $\xi$ распределена по нормальному закону с параметрами $a$ и $\sigma$. Известно, что $P(\xi > 20) = 0,02$ и $P(\xi < 10) = = 0,31$. Найти $a$ и $\sigma$.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[1;3]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2/2$; вычислить ее числовые характеристики.

**5.** Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(\xi, \eta)$ :

$$f(x,y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

Найти коэффициент $a$. Являются ли величины $\xi$ и $\eta$ зависимыми?

*Вариант 4*

**1.** Дан закон распределения дискретной случайной величины $\xi$ :

| $\xi$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,15 | 0,1 |

Построить ряд распределения случайных величин: а) $\eta = 2\xi$; б) $\eta = \xi^2$.

**2.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0;\ x > 4; \\ x/8, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

Вычислить числовые характеристики случайной величины.

**3.** Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что при трех измерениях детали ошибка, по крайней мере, одного не превосходит по модулю 25 мм.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[0; \pi/4]$ . Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \cos 2x$; вычислить ее числовые характеристики.

**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ распределена равномерно внутри квадрата $[0;1] \times [0;1]$. Написать выражение плотности вероятностей $f(x, y)$. Найти функцию распределения $F(x, y)$.

*Вариант 5*

**1.** Студент должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена равна 0,8, второго – 0,7, третьего – 0,6. Построить ряд распределения числа экзаменов, сданных студентом. Вычислить среднее число сданных экзаменов.

**2.** Функция распределения времени безотказной работы некоторого прибора имеет вид $F(x) = 1 - \exp\left(-x/T\right)$. Найти вероятность безотказной работы прибора за время, большее $T$.

**3.** Случайная величина $\xi$, распределенная равномерно, имеет числовые характеристики $M[\xi] = 2$; $D[\xi] = 3$. Найти функцию распределения случайной величины.

**4.** Случайная величина $\xi$, распределенная нормально, имеет числовые характеристики $a = 10$; $\sigma^2 = 0,04$. Записать плотность распределения случайной величины $\eta = -2\xi + 6$ и найти ее числовые характеристики.

**5.** Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(\xi, \eta)$

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{1,28}\left((x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2\right)\right).$$

Найти коэффициент корреляции величин $\xi$ и $\eta$.

*Вариант 6*

**1.** В урне четыре белых и три черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить ряд распределения числа извлеченных шаров.

**2.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 1/(\pi\sqrt{1-x^2}), & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и числовые характеристики $\xi$.

**3.** Случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a$. Максимальное значение плотности вероятности равно $1/(3\sqrt{7\pi})$. Вычислить $P(|\xi - a| < 40)$.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[-1; 1]$. Записать плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^3$. Найти числовые характеристики $\eta$.

**5.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ зависимы и их коэффициент корреляции $r_{\xi\eta} = -0,9$. Вычислить $M[3\xi - 6\eta + 1]$ и $M[\xi\eta]$, если

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1]; \end{cases} \quad g_\eta(y) = \begin{cases} 1-y, & \text{если } y \in [0; 1]; \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 1]. \end{cases}$$

## *Вариант 7*

**1.** Вероятность того, что расход энергии в течение суток превысит норму, равна 0,3. Записать закон распределения количества дней одной недели, в которые норма превышена. Найти числовые характеристики случайной величины.

**2.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{1-x^2}, & \text{если } |x| < 1; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $c$, функцию распределения $F(x)$ и числовые характеристики случайной величины $\xi$.

**3.** Установить правило «трех сигм» для экспоненциального закона с параметром $\lambda > 0$.

**4.** Случайная величина распределена нормально с параметрами $a = 0$; $\sigma^2 = 1$. Записать плотность распределения случайной величины $\eta = 3\xi - 2$ и найти ее числовые характеристики.
**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ распределена равномерно в круге $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 9$. Написать выражение плотности вероятности $f(x, y)$. Доказать, что $\xi$ и $\eta$ – зависимые некоррелированные величины.

## *Вариант 8*

**1.** Дискретная случайная величина принимает значение $x_1$ с вероятностью 0,3 и значение $x_2$ с вероятностью $p$; при этом $x_1 < x_2$. Найти закон распределения случайной величины, если ее математическое ожидание равно 3,7, а дисперсия равна 0,21.
**2.** Случайная величина $\xi$ имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 8/x^3, & \text{если } x > 2; \\ 0, & \text{если } x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вычислить числовые характеристики случайной величины.
**3.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно. При этом $M[\xi] = 2$, $D[\xi] = 3$. Найти функцию распределения случайной величины.
**4.** Случайная величина $\xi$ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi^2$.
**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ распределена с постоянной плотностью внутри круга $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 9$. Найти плотность вероятности $f(x, y)$ и функцию распределение $F(x, y)$.

*Вариант 9*

**1.** По заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -3; \\ 1/4, & \text{если } -3 < x \leqslant -1; \\ 1/2, & \text{если } -1 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

случайной величины $X$ вычислить числовые характеристики случайной величины $Y = |3X - 5|$.

**2.** Случайная величина $\xi$ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,4$. Найти дифференциальную $f(x)$ и интегральную $F(x)$ функции распределения, а также вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал $(0,25;5)$.

**3.** Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, считая, что стрелять можно неограниченное число раз.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно на отрезке $[-\pi/6;\pi/6]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin 2\xi$ и ее числовые характеристики.

**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ равномерно распределена внутри треугольника с вершинами в точках (0;0), (0;4), (-4;0). Найти плотности вероятности компонент случайного вектора $\xi$; и $\eta$. записать условные плотности вероятности $\xi \mid \eta$ и $\eta \mid \xi$.

*Вариант 10*

**1.** Студент знает 20 вопросов из 25. В билете 3 вопроса. Найти закон распределения числа известных студенту вопросов в билете. Вычислить их среднее значение.

**2.** Дискретная случайная величина принимает значение $x_1$ с вероятностью 0,1 и значение $x_2$ с вероятностью $p$; при этом $x_1 < x_2$. Найти закон распределения случайной величины, если ее математическое ожидание равно 1,8, а дисперсия равна 5,76.

**3.** Случайная величина $\xi$, распределенная нормально, имеет числовые характеристики $a = 6$; $\sigma^2 = 0,09$. Записать плотность распределения случайной величины $\eta = -2\xi + 3$ и найти ее числовые характеристики.

**4.** Случайная величина $\xi$ распределена по закону Коши. Записать закон распределения случайной величины $\eta = \exp(-\xi)$.

**5.** Двумерная случайная величина $(\xi, \eta)$ равномерно распределена внутри эллипса $x^2/9 + y^2/25 = 1$. Доказать, что $\xi$ и $\eta$ являются зависимыми некоррелированными величинами.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

*Вентцель Е. С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.– М.: Высшая школа, 2000.

*Горяинов В. Т.* Статистическая радиотехника: примеры и задачи: учеб. пособие / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов; под ред. В. И. Тихонова.– М.: Советское радио, 1980.

*Задачи по теории вероятностей: методические указания* / Г. М. Бездудный [и др.].–Ростов-на-Дону: РГУ, 2002.

*Ивановский Р. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad: учеб. пособие / Р. И. Ивановский.–СПб.: БХВ-Петербург, 2008.

*Кочетков Е. С.* Теория вероятностей в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская.– М.: Форум: Инфра-М, 2005.

*Краснов М. Л.* Вся высшая математика: учебник. Т. 5.– Изд. 2-е, исправл. / М. Л. Краснов [и др.].–М.: Эдиториал УРСС, 2002.

*Кремлев А. Г.* Математика. Раздел: вероятность: учебн. пособие.– Екатеринбург: УрГУ, 2000.

*Павлов С. В.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие.– М.: РИОР, 2006.

*Письменный Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный.– М.: Айрис-пресс, 2004.

*Просветов Г. И.* Теория вероятностей и математическая статистика : задачи и решения : учеб.-практ. пособие.– М.: Альфа-Пресс, 2009.

*Сборник задач* по высшей математике. 2 курс / Лунгу К. Н. [и др.].– М.: Айрис-пресс, 2004.

*Сборник задач* по математике для втузов : учеб. пособие для втузов / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова.– М.: Физматлит, 2004. – Ч. 4.

*Сборник задач* по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : учеб. пособие.– 3-е изд., перераб. / под общ. ред. А. А. Свешникова.– СПб.: Лань, 2007.

*Теория вероятностей* : сборник домашних заданий / сост. Г. А. Тимофеева. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007.

## Приложение 1

### Таблица биномиальных коэффициентов $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

| **n \ m** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 2 | 1 | – | – | – | – | – | – | – | – |
| **3** | 3 | 3 | 1 | – | – | – | – | – | – | – |
| **4** | 4 | 6 | 4 | 1 | – | – | – | – | – | – |
| **5** | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | – | – | – | – | – |
| **6** | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | – | – | – | – |
| **7** | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | – | – | – |
| **8** | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | – | – |
| **9** | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | – |
| **10** | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

## Приложение 2

### Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0978 | 0963 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

## Приложение 3

### Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0040 | 0080 | 0112 | 0160 | 0199 | 0239 | 0279 | 0319 | 0359 |
| 0,1 | 0398 | 0438 | 0478 | 0517 | 0557 | 0596 | 0636 | 0675 | 0714 | 0754 |
| 0,2 | 0793 | 0832 | 0871 | 0910 | 0948 | 0987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 2258 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2518 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2612 | 2642 | 2673 | 2704 | 2434 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2996 | 3023 | 3051 | 3079 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1,0 | 3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3553 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4430 | 44441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4485 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4700 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 1719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4762 | 4767 |
| 2, | 0,4773 | 4821 | 4861 | 4893 | 4918 | 4938 | 4953 | 4965 | 4974 | 4961 |
| 3, | 0,4987 | 4990 | 4993 | 4995 | 4997 | 4998 | 4998 | 4999 | 4999 | 4999 |

## Приложение 4

## Критические точки распределения $\chi^2$

| **k** $\backslash\ \alpha$ | **0,01** | **0,025** | **0,05** | **0,95** | **0,975** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 6,6 | 5,0 | 3,8 | 0,0039 | 0,00098 |
| **2** | 9,2 | 7,4 | 6,0 | 0,103 | 0,051 |
| **3** | 11,3 | 9,4 | 7,8 | 0,352 | 0,216 |
| **4** | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 0,711 | 0,484 |
| **5** | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 1,15 | 0,831 |
| **6** | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 1,64 | 1,24 |
| **7** | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 2,17 | 1,69 |
| **8** | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 2,73 | 2,18 |
| **9** | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 3,33 | 2,70 |
| **10** | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 3,94 | 3,25 |
| **11** | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 4,57 | 3,82 |
| **12** | 26,2 | 23,3 | 21,0 | 5,23 | 4,40 |
| **13** | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 5,89 | 5,01 |
| **14** | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 6,57 | 5,63 |
| **15** | 30,6 | 27,5 | 25,0 | 7,26 | 6,26 |
| **16** | 32,0 | 28,8 | 26,3 | 7,96 | 6,91 |
| **17** | 33,4 | 30,2 | 27,6 | 8,67 | 7,56 |
| **18** | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 9,39 | 8,23 |
| **19** | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 10,1 | 8,91 |
| **20** | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 10,9 | 9,59 |

*Примечание.* $\alpha$ – уровень значимости,
**k** – число степеней свободы.

*Учебное издание*

**Катальников** Виктор Владимирович,

**Шапарь** Юлия Викторовна

# Теория вероятностей и математическая статистика

Редактор *И. В. Коршунова*
Компьютерный набор *Ю. В. Шапарь*
Компьютерная верстка *Е. В. Суховой*

Подписано в печать 21.04.2014. Формат 60×90/16.
Бумага писчая. Гарнитура Times. Плоская печать.
Усл. печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ № 643.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

*Для заметок*