Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

В.А. Соколов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета
2014

УДК 517.91
С59

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Р. Абдуллаев*
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет);

д-р физ.-мат. наук *А.Н. Румянцев*
(ООО «ИБС Пермь»)

Соколов, В.А.

С59 Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В.А. Соколов. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 194 с.

ISBN 978-5-398-00998-9

Изложены основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены теоремы существования и единственности решения задачи Коши как для одного уравнения, так и для системы уравнений. Детально рассмотрены методы интегрирования различных типов уравнений, проиллюстрированные примерами и задачами. Также изложены основы теории устойчивости линейных дифференциальных систем. Отдельная глава посвящена линейным уравнениям в частных производных первого порядка. В приложения включены дополнительные сведения из матричного исчисления.

Содержание пособия соответствует учебной программе курса обыкновенных дифференциальных уравнений университетов.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и механики ПНИПУ. Также может быть полезно преподавателям, аспирантам и инженерам.

УДК 517.91

ISBN 978-5-398-00998-9

Оглавление

Введение

Учебное пособие представляет собой обработанный и дополненный курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читаемый автором на факультете прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета.

При написании пособия использованы известные учебники и задачники В.В. Степанова [1], Б.П. Демидовича [2], Л.С. Понтрягина [3], И.Г. Малкина [4], И.Г. Петровского [5], Л.Э. Эльсгольца [6], А.Ф. Филиппова [7], Н.М. Матвеева [8], А.М. Самойленко [9].

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 .$$

Функция F предполагается вещественной функцией от своих аргументов, которые также являются вещественными.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения.

Как правило, мы будем рассматривать уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям, появились на рубеже XVI–XVII вв. в области вычислительной математики при создании логарифмических таблиц, а также в механике, оптике и других разделах естествознания. Сам термин «дифференциальное уравнение» ввел Лейбниц в 1676 г. в письме Ньютону.

Простейшее дифференциальное уравнение встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти ее первообразную $y(x)$. Эта задача может быть записана в форме уравнения

$$y' = f(x) ,$$

решение которого, как известно, имеет вид

$$y = \int f(x)dx + C ,$$

где C – произвольная постоянная. Из этой формулы следует, что наше дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, каждое из которых получится, если придать C определенное числовое значение, т.е. задать дополнительное условие, называемое начальным.

В качестве еще одного примера дифференциального уравнения рассмотрим геометрическую задачу: найти кривые, у которых тангенс угла α между касательной и положительным направлением оси OX равен абсциссе точки касания; выделить кривую, проходящую через начало координат.

Пусть $y = f(x)$ – уравнение искомой кривой (рис. В1).

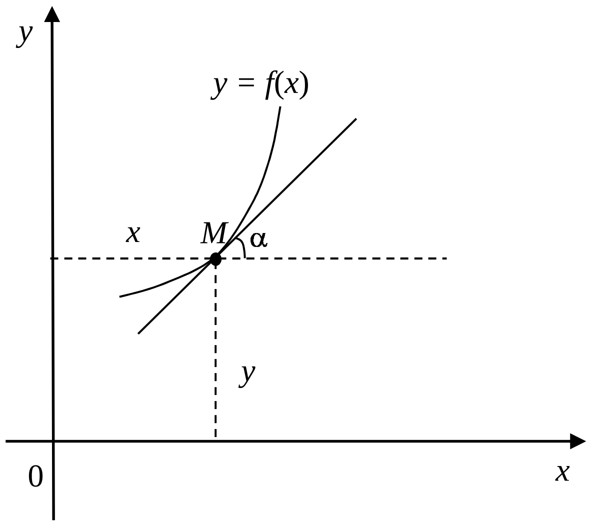

Рис. В1

Тогда $\mathrm{tg}\alpha = y'$. По условию $\mathrm{tg}\alpha = x$. В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x \text{ или } dy = xdx.$$

Проинтегрировав последнее равенство, будем иметь

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяет семейство парабол с вершинами на оси OY. Используем дополнительное условие $y(0) = 0$, откуда $C = 0$. Следовательно, искомой кривой является парабола

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Другие задачи будут рассмотрены позже.

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Определения и общие свойства

Самое общее уравнение указанного типа имеет вид $F(x, y, y') = 0$.

Рассмотрим уравнение, разрешенное относительно производной,

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

и начальное условие

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) вместе с условием (1.2) называется начальной задачей, или задачей Коши.

Определение. Решением, интегралом или интегральной кривой уравнения (1) называется непрерывно-дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению.

Теорема *(существования и единственности решения задачи Коши (1.1)–(1.2)).*

Если в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в ограниченной замкнутой области *D*, содержащей точку (x_0, y_0), то задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение.

Теорема является частным случаем общей теоремы Коши – Пикара, которая будет доказана позже.

Определение. Общим решением уравнения (1.1) называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая условиям:

1) эта функция удовлетворяет уравнению (1.1) при любых константах *C*;

2) каково бы ни было начальное условие (1.2), можно единственным образом определить $C = C_0$ так, чтобы функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяла этому начальному условию (1.2) (предполагается, что точка $(x_0, y_0) \in D$, где выполнены условия теоремы существования и единственности).

Общее решение уравнения (1.1) в неявном виде называется общим интегралом уравнения (1.1):

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Частным решением уравнения (1.1) называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения при $C = C_0$.

Частное решение уравнения (1.1) в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется частным интегралом уравнения (1.1).

Геометрический смысл уравнения I порядка

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

в области D, где выполняются условия теоремы существования и единственности.

Уравнение (1.3) для каждой точки $M(x, y) \in D$ определяет значение производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через точку M.

Таким образом, уравнение (1.3) определяет поле направлений.

С геометрической точки зрения задача интегрирования уравнения (1.3) заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля.

Определение. Изоклиной дифференциального уравнения (1.3) называется геометрическое место точек, для которых выполнено равенство $f(x, y) = k = \text{const}$.

Придавая k различные значения, получим семейство изоклин, по которым можно приближенно построить семейство интегральных кривых.

Пример 1. С помощью изоклин приближенно построить семейство интегральных кривых уравнения

$$y' = x^2 + y^2. \tag{1.4}$$

Изоклинами данного уравнения являются окружности

$$x^2 + y^2 = k \quad (k \geq 0).$$

На рис. 1.1 построены изоклины для $k = \frac{1}{2}$; $k = 1$; $k = 2$. Касательные к интегральным кривым этого уравнения в точках пересечения последних с указанными изоклинами образуют с положительным направлением оси OX соответственно углы $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; arcctg2 и т.д.

Из вида правой части рассматриваемого уравнения ясно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, касается в этой точке оси OX. Очевидно также, что каждое решение этого уравнения есть возрастающая функция оси X на всей действительной оси (см. рис. 1.1)

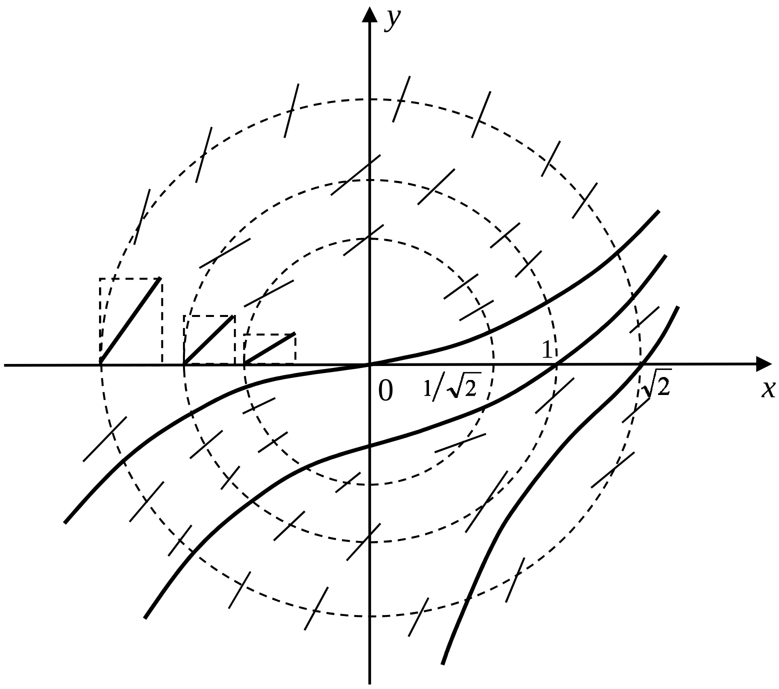

Рис. 1.1

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид

$$y' = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$\text{или} \quad M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (1.5)$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$y' = -\frac{y}{x},\ y(2) = 1.$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C,\ C > 0,$$

$$\text{или } |y| = \frac{C}{|x|}.$$

Используем определение модуля и то, что функция $y = 0$ является решением нашего уравнения. Тогда общее решение примет вид

$$y = \frac{C_1}{x}, \text{ где } C_1 \in (-\infty; +\infty).$$

Найдем C_1, используя начальные условия:

$$x = 2,\ y = 1, \text{ т.е. } C_1 = 2.$$

$y = \frac{2}{x}$ – решение задачи Коши.

Построим изоклины и интегральные кривые данного уравнения (рис. 1.2).

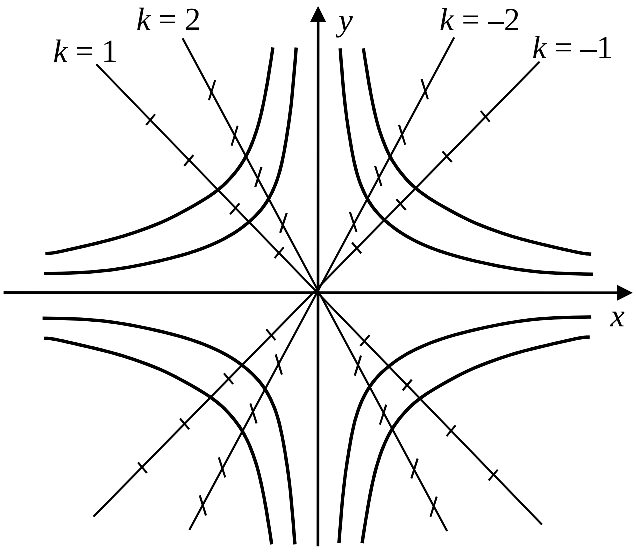

Рис. 1.2

По определению, изоклиной данного уравнения будет линия

$$-\frac{y}{k} = x, \ k = \text{const, или } y = -kx.$$

Рассмотрим случаи:

$k = 1$, $y = -x$;
$k = 2$, $y = -2x$;
$k = -1$, $y = x$;
$k = -2$, $y = 2x$.

Пример 3. Задача о распаде радия.

Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его массе в каждый данный момент времени. Определить закон изменения массы m радия в зависимости от времени, если в начальный момент времени масса радия равна m_0. Определить период полураспада T.

Имеем следующую задачу Коши

$$\frac{dm}{dt} = -km, \ m(0) = m_0 \ \ (k > 0).$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int \frac{dm}{m} = -\int kdt,$$

откуда

$$\ln m = -kt + C,$$

следовательно,

$$m = C_1 e^{-kt}.$$

Используем начальные условия $t = 0$, $m(0) = m_0$,

$$m_0 = C_1, \ m = m_0 e^{-kt}.$$

Из наблюдений известно, что $k = 0{,}000436$ (единица измерения времени - год). Тогда $m = m_0 e^{-0{,}000436t}$.

Найдем период полураспада *T*:

$$t = T, \ m = \frac{m_0}{2},$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436T}, \text{ откуда}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -0{,}000436T \text{ или}$$

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} \approx 1590 \text{ (лет).}$$

Рассмотрим уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными:

$y' = f(ax + by + c)$, , где f – непрерывная функция.

Сделаем замену: $z = ax + by + c$, тогда $y = \dfrac{z - ax - c}{b}$, откуда $y' = \dfrac{z' - a}{b}$ или $\dfrac{z' - a}{b} = f(z)$. Следовательно, $z' = bf(z) + a.$

Разделим переменные

$$\frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

После интегрирования и возвращения к прежней переменной получим общий интеграл указанного уравнения.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Сделаем замену $z = 4x + 2y - 1$.

Тогда $y = \dfrac{z - 4x + 1}{2}$, $y' = \dfrac{z' - 4}{2}$. Уравнение примет вид $\dfrac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}+4} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = \left\{\begin{matrix} z = t^2 \\ dz = 2t \end{matrix}\right\} = \frac{2}{2}\int \frac{tdt}{t+2} = t - 2\ln|t+2| + C \text{, или}$$

$$x = \sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right) + C\,.$$

1.3. Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно x и y, если для любого действительного λ выполняется равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Пример 5.

$f(x,y) = xy - y^2$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cdot \lambda y - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$, здесь $n = 2$.

Определение. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

Пусть $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Тогда $f(x,y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) \equiv \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, и, следовательно, однородное уравнение имеет вид

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Найдем общий интеграл уравнения.

Сделаем замену: $u = \dfrac{y}{x}$, откуда $y = ux$, и потому $y' = u'x + u$. Подставим эти равенства в уравнение (1.6): $u'x + u = \varphi(u)$. Тогда $\dfrac{du}{dx}x = \varphi(u) - u$, или $\displaystyle\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$.

После интегрирования и обратной замены получим общий интеграл уравнения (1.6).

При этом необходимо проверить, не потеряно ли решение при разделении переменных.

Пример 6. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Проверим, является ли уравнение однородным:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 \left(x^2 - y^2\right)} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = f(x, y).$$

Сделаем замену: $\dfrac{y}{x} = u$ или $y = ux$, откуда $y' = u'x + u$, и потому $u'x + u = \dfrac{u}{1-u^2}$. Разделим переменные: $\dfrac{du}{dx}x = \dfrac{u}{1-u^2} - u$ или $\dfrac{du}{dx}x = \dfrac{u^3}{1-u^2}$. Откуда $\dfrac{1-u^2}{u^3}du = \dfrac{dx}{x}$. Следовательно, $\int\dfrac{dx}{x} = \int\dfrac{1-u^2}{u^3}du$, или $\ln C|x| = -\dfrac{1}{2u^2} - \ln|u|$. Поэтому $\ln C|ux| = -\dfrac{1}{2u^2}$.

Сделаем обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$: $\ln C|y| = -\dfrac{x^2}{2y^2}$, т.е. получили общий интеграл. Кроме того, при разделении переменных потеряно решение $y = 0$.

Уравнения, приводящиеся к однородным

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}, \tag{1.7}$$

где a, a_1, b, b_1, c, c_1 – вещественные числа.

Если $c = c_1 = 0$, то (1.7) – однородное уравнение.

Рассмотрим общий случай.

Введем новые переменные $x = \xi + h$, $x = \eta + k$, где h и k – некоторые постоянные. Тогда $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ и уравнение (1.7) принимает вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1 h + b_1 k + c_1},$$

выберем h, k так: $\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0. \end{cases}$

Пусть $\Delta = ab_1 - a_1 b \neq 0$, и h, k определены единственным образом. Тогда $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}$ – однородное уравнение.

Проинтегрировав это уравнение и заменив $\xi = x - h$, $\eta = y - k$, получим общий интеграл уравнения (1.7).

Если $\Delta = ab_1 - a_1 b = 0$, то $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda$, и потому $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$ – уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными: заменим $z = ax+by$, откуда $z' = a + by'$, $y' = \dfrac{z'-a}{b}$. Следовательно, $\dfrac{z'-a}{b} = \dfrac{z+c}{\lambda z + c_1}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 7.

$(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0.$

Данное уравнение приводится к однородному. Для этого вводим новые переменные $x=\xi+h,\ \ y=\eta+k.$

Найдем h, k из системы уравнений

$$\begin{cases} 2h-4k+6=0 \\ h+k-3=0 \end{cases}$$

Получим $h=1,\ k=2$. Подставим в исходное уравнение $x=\xi+1$, $y=\eta+2.$ Получим однородное уравнение $(2\xi-4\eta)d\xi+(\xi+\eta)d\eta=0.$

Положим $\eta=u\xi.$ Тогда $2\xi(1-2\eta)d\xi+\xi(1+u)(ud\xi+\xi du)$ или $(2-3u+u^2)d\xi+\xi(1+u)du=0.$

Разделим переменные $\dfrac{d\xi}{\xi}+\dfrac{1+u}{2-3u+u^2}du=0,$ предполагая $u\neq 1,\ u\neq 2$, или $\dfrac{d\xi}{\xi}+\left(\dfrac{3}{u-2}-\dfrac{2}{u-1}\right)du=0.$

Интегрируя, имеем

$\ln|\xi|+\ln\dfrac{|u-2|^3}{(u-1)^2}=\ln C_1$ или $\xi\dfrac{(u-2)^3}{(u-1)^2}=C.$

Возвращаясь к переменным ξ, η, получим $(\eta-2\xi)^3=C(\eta-\xi)^2$ или, с учетом $\eta=y-2,\ \xi=x-1,\ (y-2x)^3=C(y-x-1)^2$ – общий интеграл.

Функциям $u=1,\ u=2$ в переменных x, y соответствуют решения исходного уравнения $y=x+1,\ y=2x$. Решение $y=2x$ получают из общего при $C = 0$.

Замечание. Указанный метод применим и к уравнению вида

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

где f – непрерывная функция.

1.4. Линейные уравнения и приводящиеся к ним

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1.8}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции на (a, b).

При этом уравнение

$$y' + P(x)y = 0 \tag{1.9}$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим уравнению (1.8). Если же в уравнении (1.8) $Q(x) \neq 0$, то оно называется линейным неоднородным.

Однородное уравнение (1.9) всегда имеет нулевое решение $y \equiv 0$.

Общее решение уравнения (1.9), очевидно, имеет вид

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{1.10}$$

(поскольку является уравнением с разделяющимися переменными).

Найдем общее решение линейного неоднородного уравнения (1.8). Рассмотрим три метода:

1. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Будем искать общее решение уравнения (1.8) в виде (1.10), считая $C = C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.11}$$

Подставим функцию (1.11) в уравнение (1.8):

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Откуда $\dfrac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ или $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Подставив $C(x)$ в равенство (1.11), получим общее решение уравнения (1.8):

$$y = C_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{1.12}$$

Отметим, что общее решение линейного неоднородного уравнения (1.8) состоит из двух слагаемых:

$$\bar{y} = C_1e^{-\int P(x)dx} \text{ и } y^* = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

При этом $\bar{y}$ есть общее решение однородного уравнения (1.9), а y^* – частное решение самого уравнения (1.8), т.е. $y = \bar{y} + y^*$.

Как будет показано в дальнейшем, таким свойством обладает общее решение всякого линейного неоднородного уравнения n-го порядка, а также системы линейных неоднородных уравнений.

2. Метод Бернулли

Будем искать общее решение уравнения (1.8) в виде

$$y = u(x)\cdot v(x) \qquad (1.13)$$

(подстановка Бернулли), где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Подставим функцию (1.13) в уравнение (1.8):

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \qquad (1.14)$$

Найдем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + P(x)v = 0$.

Тогда $\dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$. Откуда $v = Ce^{-\int P(x)dx}$.

Поскольку нам достаточно какой-нибудь отличной от нуля функции $v(x)$, возьмем $v = e^{-\int P(x)dx}$. Подставим эту функцию в уравнение (1.14):

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

или

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

откуда

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Подставив функцию $u(x)$ и $v(x)$ в равенство (1.13), получим общее решение (1.12).

3. Метод Эйлера

Общее решение уравнения (1.8) может быть найдено и с помощью интегрирующего множителя.

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

Умножим обе части уравнения (1.8) на μ:

$$y'e^{\int P(x)dx} + P(x)ye^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

или

$$\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Следовательно, $ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C$, откуда и следует формула (1.12).

Рассмотрим примеры:

Пример 8. Найти решение задачи Коши

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \qquad (1.15)$$

$$y(0) = 3. \qquad (1.16)$$

Найдем сначала общее решение уравнение (1.15), воспользовавшись методом Бернулли. Подставим $y = u(x) \cdot v(x)$ в уравнение (1.15):

$$u'v + v'u - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3. \qquad (1.17)$$

Найдем функцию $v(x)$ так, чтобы

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0.$$

Тогда $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$, откуда $v = (x+1)^2$.

Подставим v в уравнение (1.17):

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \text{ или } du = (x+1)dx.$$

Следовательно, $u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$. Таким образом, общее решение уравнения (1.15) имеет вид

$$y = uv = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}.$$

Найдем решение задачи Коши. Для этого определим C по начальному условию (1.16):

$$3 = C + \frac{1}{2}, \text{ т.е. } C = \frac{5}{2},$$

поэтому

$$y = \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}.$$

Пример 9. Тело массой m движется под воздействием силы тяжести. На него, кроме того, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости. Установить, по какому закону будет изменяться скорость падения тела в зависимости от времени, если в начальный момент времени скорость равна v_0.

Обозначим через $v(t)$ искомую скорость. Тогда по II закону Ньютона будем иметь

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

или согласно условию задачи

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

где g – ускорение свободного падения; k – коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$\frac{dv}{dt}+\frac{kv}{m}=g,$$

причем $v(0)=v_0$, т.е. получили задачу Коши для линейного уравнения. Найдем ее решение.

Интегрирующий множитель согласно методу Эйлера имеет вид

$$\mu=e^{\int\frac{k}{m}dt}=e^{\frac{k}{m}t}$$

(здесь $C = 0$). Умножив обе части данного уравнения на μ, получим

$$\frac{dv}{dt}e^{\frac{k}{m}t}+\frac{kv}{m}e^{\frac{k}{m}t}=ge^{\frac{k}{m}t},$$

$$\text{или}\quad \frac{d}{dt}(ve^{\frac{k}{m}t})=ge^{\frac{k}{m}t}.$$

После интегрирования получим

$$ve^{\frac{k}{m}t}=\frac{m}{k}ge^{\frac{k}{m}t}+C.$$

Следовательно,

$$v=\frac{m}{k}g+Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Используем начальное условие $v(0) = v_0$:

$$v_0=\frac{mg}{k}+C,$$

$$\text{т.е. } C=v_0-\frac{mg}{k}.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

Пример 10. Пусть переменный электрический ток $I=I(t)$ течет по проводнику с коэффициентом индуктивности L и сопротивлением R. Тогда падение напряжения вдоль проводника

$$U=L\frac{dI}{dt}+RI.$$

Найти зависимость между током и временем, если $I(0)=0$ (случай замыкания цепи).

Будем считать U, R и L постоянными. Тогда получим следующую задачу Коши:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{U}{L},\ I(0)=0.$$

Найдем ее решение. Определим сначала общее решение, воспользовавшись методом Лагранжа. Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0.$$

Его общее решение

$$I=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Будем считать $C = C(t)$, тогда

$$C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}-C(t)e^{-\frac{R}{L}t}+C(t)e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U}{L},$$

$$\text{или } C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U}{R},$$

откуда

$$C(t)=\frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C_1.$$

Поэтому

$$I=C_1e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U}{R}.$$

Используем начальное условия $I(0) = 0$:

$$C_1=-\frac{U}{R}.$$

Получим искомую зависимость:

$$I=\frac{U}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Отметим, что при $t \to +\infty$ ток $I\to\frac{U}{R}$, т.е. при достаточно больших t можно считать, что

$$I=\frac{U}{R}\ \text{(закон Ома)}.$$

Пример 11. Простейшая модель одноотраслевой экономики [10]. Обозначим через $x(t)$ объем основных производственных фондов в момент времени t. Будем предполагать, что скорость роста фондов прямо пропорциональна средствам, выделяемым на эти цели, с учетом амортизации фондов в процессе производства:

$$\dot{x}(t)=g(t)-px(t),\ t\in[0;T] \tag{1.18}$$

где $g(t)$ – скорость прироста фондов, обеспечиваемая соответствующими инвестициями: $px(t)$ – скорость выбытия фондов ($p = \text{const}$). Предположим также, что единицы измерения согласованы так, что объемы фондов и инвестиций имеют стоимостное выражение, например в миллиардах рублей, а скорость измеряется в миллиардах рублей в год. Кроме того, будем считать, что известен первоначальный объем основных производственных фондов:

$$x(0) = x_0.$$

Найдем общее решение уравнения (1.18) в форме Коши, воспользовавшись, например, методом Бернулли: $x = uv$.

$$\dot{u}v + u\dot{v} + puv = g(t),$$

$$\dot{u}v + u(\dot{v} + pv) = g(t),$$

$$\dot{v} + pv = 0,$$

откуда

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -pdt,$$

или

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{v(s)} = -p\int_0^t ds.$$

Поэтому $v(t) = e^{-pt}$ (здесь $v(0) = 1$) и, следовательно,

$$\dot{u}e^{-pt} = g(t),$$

или

$$u(t) = \int_o^t e^{ps} g(s)ds + u(0),$$

откуда

$$x(t) = u(t) \cdot v(t) = u(o)e^{-pt} + e^{-pt}\int_0^t e^{ps} g(s)ds.$$

Таким образом, решение указанной задачи Коши имеет вид

$$x(t) = x(o)e^{-pt} + \int_0^t e^{-p(t-s)} g(s)ds$$

(так как $x(0) = u(0) \cdot v(0)$ и $v(0) = 1$).

По этой формуле можно определить объем основных производственных фондов $x(t)$ для любого момента времени $t \in [0; T]$.

Замечание.

Некоторые уравнения I порядка могут быть приведены к линейному уравнению с неизвестной функцией $x = x(y)$.

Например,

$$y' = \frac{A(y)}{B(y)+C(y)x},\ A(y) \neq 0,$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{B(y)+C(y)x}{A(y)},$$

откуда

$$\frac{dx}{dy} - \underbrace{\frac{C(y)}{A(y)}}_{P(y)} x = \underbrace{\frac{B(y)}{A(y)}}_{Q(y)}.$$

Пример 12. Найти общий интеграл уравнения

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$2y\frac{dx}{dy} + y^2 - 2x = 0, \text{ или } \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = -\frac{y}{2},$$

т.е. получили линейное уравнение $x = x(y)$. Его общий интеграл имеет вид

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

Кроме того, имеется частное решение $y = 0$.

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{1.19}$$

где P, Q – непрерывные функции, $n \neq 0; 1$. При $n > 0$ уравнение (1.19) имеет решение $y = 0$. Сведем это уравнение к линейному, разделив обе части на y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)y^{1-n} = Q(x),\ y \neq 0.$$

Сделаем замену $z = y^{1-n}$, $z' = y^{-n} \cdot y'(1-n)$,

$$\frac{y'}{y^n}(1-n) + y^{1-n} \cdot (1-n)P(x) = (1-n)Q(x),$$

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

т.е. получили линейное уравнение относительно $z = z(x)$.

Общее решение уравнения (1.19) может быть также найдено и с помощью подстановки Бернулли без сведения к линейному уравнению.

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y' + xy = x^3y^3$.

Сделаем замену $y = uv$. Получим $u'v + uv' + xuv = x^3u^3v^3$ или $u'v+u(v'+xv)=x^3u^3v^3$, откуда для нахождения функции v получим уравнение $v'+xv=0$, или $\frac{dv}{v}=-xdx$. Проинтегрируем, полагая $C = 0$:

$$\ln|v|=-\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, $v=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда для определения функции u имеем $u'e^{-\frac{x^2}{2}}=x^3u^3e^{-\frac{3}{2}x^2}$, откуда $u'=x^3u^3e^{-x^2}$, или $\frac{du}{u^3}=x^3e^{-x^2}dx$. Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$-\frac{1}{2u^2}=\int x^3e^{-x^2}dx=\int\left(-x^2\right)\cdot\frac{1}{2}d\left(e^{-x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(x^2e^{-x^2}-\int e^{-x^2}dx^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2e^{-x^2}+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right)=-\frac{1}{2}\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right),$$

т.е.

$$-\frac{1}{2u^2}=-\frac{1}{2}\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right).$$

Таким образом,

$$u^2=\frac{1}{x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C}, \text{ или } u=\pm\sqrt{\frac{1}{x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C}}.$$

Окончательно получаем:

$$y=uv=\frac{e^{-x^2/2}}{\pm\sqrt{x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C}}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}.$$

Кроме того, имеется частное решение $y=0$.

Уравнение Дарбу

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)(xdy-ydx)=0, \qquad (1.20)$$

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однородные функции измерений m, а $P(x, y)$ – однородная функция измерения $l\neq m-1$, и, кроме того,

$$M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0.$$

Предположим, что $N(x,y)\neq 0$, тогда, заменяя $y = zx$, сводим уравнение (1.20) к уравнению Бернулли с искомой функцией $x=x(z)$.

Если $N(x,y)\equiv 0$, то получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 14. Найти общий интеграл уравнения

$$xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0.$$

Сделаем замену $y=zx$. Тогда

$$xdx+zx(xdz+zdx)+x(x(xdz+zdx)-zxdx)=0.$$

Разделим на $x(x\neq 0)$:

$$dx+z(xdz+zdx)+(x^2dz+zxdx-zxdx)=0, \text{ или } \left(1+z^2\right)dx+\left(zx+x^2\right)dz=0.$$

Отсюда $\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{z}{1+z^2}x=-\dfrac{1}{1+z^2}x^2$. Получили уравнение Бернулли относительно $x=x(z)$. Его общий интеграл имеет вид

$$\frac{1}{x}=c\sqrt{1+z^2}+z.$$

Сделаем обратную замену $z=\dfrac{y}{x}$: $\dfrac{1}{x}=C\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}+\dfrac{y}{x}$.

Отсюда получим общий интеграл исходного уравнения

$$c\sqrt{x^2+y^2}+y-1=0.$$

Уравнение Риккати

$$y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x), \qquad (1.21)$$

где $P(x),\quad Q(x),\quad R(x)$ – непрерывные функции

Предположим, что известно частное решение уравнения (1.21) $y_1=y_1(x)$, тогда замена $y=y_1+\dfrac{1}{z}$ сводит уравнение (1.21) к линейному относительно z:

$$\underline{y_1'}-\frac{z'}{z^2}=P(x)\left(\underline{y_1^2}+2y_1\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+Q(x)\left(\underline{y_1}+\frac{1}{z}\right)+\underline{R(x)}.$$

Поскольку y_1 – частное решение уравнения (1.21), подчеркнутые слагаемые в сумме дают 0:

$$-\frac{z'}{z^2}=2P(x)y_1\cdot\frac{1}{z}+P(x)\cdot\frac{1}{z^2}+Q(x)\cdot\frac{1}{z}.$$

Следовательно,

$$z'=-2P(x)y_1z-P(x)-Q(x)z,$$

или $z'+\left(2P(x)y_1+Q(x)\right)z=-P(x)$ – линейное уравнение.

Подстановка $y=y_1+z$ сводит уравнение (1.21) к уравнению Бернулли.

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$y'=-y^2+1+x^2.$$

Очевидно, что $y_1 = x$ – частное решение. Сделаем замену $y = x + \dfrac{1}{z}$:

$$1 - \frac{z'}{z^2} = -\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} \right) + 1 + x^2,$$

откуда $z' = 2xz + 1$, или $z' - 2xz = 1$. Воспользуемся методом Бернулли: $z = uv$. Тогда $u'v + uv' - 2xvu = 1$, или $u'v + u(v' - 2xv) = 1$. Найдем v: $v' - 2xv = 0$. Отсюда $v = e^{x^2}$.

Таким образом, $u'e^{x^2} = 1$. Поэтому $u = \int e^{-x^2} dx + C$, и, следовательно,

$$z = e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} dx \right).$$

Сделаем обратную замену и получим искомое общее решение $y = x + \dfrac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx}$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{1.22}$$

Пусть его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$:

$$Mdx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy,$$

причем функции $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны.

В этом случае уравнение (1.22) называется уравнением в полных дифференциалах. Последнее тождество равносильно двум:

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{1.23}$$

Таким образом, $dU = 0$, откуда $U(x,y) = C$.

Найдем признак, по которому для данного уравнения (1.22) можно судить, принадлежит ли оно к классу уравнений в полных дифференциалах. Из равенства (1.23) следует $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, откуда и получаем необходимое условие:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.24}$$

Покажем, что условие (1.24) является также достаточным, а именно: предполагая его выполненным, найдем функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую соотношениям (1.23). Имеем $\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$, откуда, интегрируя по x от x_0 до x и считая y постоянным, получаем:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y). \tag{1.25}$$

Построенная функция (1.25) при всяком φ удовлетворяет первому из соотношений (1.23). Покажем, что при выполнении условия (1.24) можно найти такую функцию $\varphi(y)$, чтобы выполнялось и второе соотношение (1.23). Применяя правило дифференцирования интеграла по параметру, из равенства (1.25) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y).$$

Используя тождество (1.24), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y).$$

Это выражение окажется равным $N(x,y)$, если положить

$$\varphi'(y)=N(x_0,y),$$

откуда одно из значений $\varphi(y)$ есть

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dx.$$

Итак, функция $U(x,y)$ найдена; приравнивая ее произвольному постоянному, получаем общий интеграл уравнения (1.22):

$$U(x,y)\equiv\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=C.$$

В этой формуле предполагается, что точка (x_0,y_0) принадлежит области, где выполнены условия теоремы Коши – Пикара.

Замечание. На практике оказывается проще дифференцировать равенство (1.25) по y и, заменяя $\frac{\partial U}{\partial y}$ известной функцией $N(x,y)$, определить из полученного равенства $\varphi'(y)$, а затем найти φ.

Пример 16.

$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$. Здесь $M=3x^2+6xy^2$, $N=6x^2y+4y^3$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy=\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Условие (1.24) выполнено. $\dfrac{\partial U}{\partial x}3x^2+xy^2$, $U=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$; вычисляем $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y)=\frac{\partial U}{\partial y}-6x^2y=4y^3,\quad \varphi(y)=y^4+C.$$

Общий интеграл $U\equiv x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

Интегрирующий множитель

Если уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.26}$$

не является уравнением в полных дифференциалах и существует функция $\mu=\mu(x,y)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1.26) получается уравнение

$$\mu(Mdx+Ndy)=0 \tag{1.27}$$

в полных дифференциалах, т.е.

$$\mu(Mdx+Ndy)=dU, \tag{1.28}$$

то функция μ называется интегрирующим множителем, а функция U – соответствующим ему интегралом уравнения (1.27). В случае, когда уравнение (1.27) уже есть уравнение в полных дифференциалах, полагают $\mu\equiv 1$.

Если найден интегрирующий множитель μ, то интегрирование данного уравнения сводится к умножению обеих его частей на μ и нахождению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах.

Однако может случиться, что при этом мы теряем некоторые решения данного уравнения или получаем посторонние решения. Первое может иметь место, когда во всех точках некоторой кривой μ обращается в бесконечность, второе – когда μ обращается в нуль.

Если μ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y, то

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет следующему уравнению с частными производными первого порядка:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{1.29}$$

Если заранее известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где ω – заданная функция от x и y, то уравнение (1.29) сводится к обыкновенному (и притом линейному) уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\mu, \tag{1.30}$$

где

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega), \tag{1.31}$$

т.е. дробь слева является функцией от ω.

Решая уравнение (1.30), находим интегрирующий множитель

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega} \ (C = 1). \tag{1.32}$$

В частности, уравнение (1.26) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x $(\omega = x)$ или только от y $(\omega = y)$, если выполнены соответственно условия:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x)\left(\mu = e^{\int \psi(x)dx}\right), \tag{1.33}$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y)\left(\mu = e^{\int \psi(y)dy}\right). \tag{1.33, a}$$

В некоторых случаях интегрирующий множитель μ можно найти, применяя метод выделения полных дифференциалов с помощью известных формул:

$$d(xy) = xdy + ydx; \ d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \text{ и т.д.}$$

Например, рассмотрим уравнение

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0.$$

Разделим обе части на $(-x^2)$ $(x \neq 0)$

$$-\frac{y}{x^2}dx + 4ydy + \frac{dy}{x} = 0$$

или

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} + 4ydy = 0,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0,$$

$\frac{y}{x} + 2y^2 = C$ – общий интеграл

Исходное уравнение имеет также решение $x = 0$.

Рассмотрим другие примеры.

Пример 17. Найти общий интеграл уравнения

$$(1 - x^2 y)dx + x^2 (y - x)dy = 0. \tag{1.34}$$

Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x} = \psi(x), \tag{1.35}$$

т.е. условие (1.33) выполнено. Поэтому

$$\mu = e^{\int \psi(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}. \tag{1.36}$$

Умножая обе части уравнения (1.34) на $\frac{1}{x^2}$, получим

$$(\frac{1}{x^2} - y)dx + (y - x)dy = 0 \tag{1.37}$$

Для контроля вычислений убеждаемся, что это уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя его (непосредственной группировкой членов), находим

$$-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = C. \tag{1.38}$$

Прежде чем считать интегрирование данного уравнения законченным, нужно посмотреть, не обращается ли μ в ∞ или в 0; μ обращается в бесконечность при $x = 0$, и $x = 0$ является решением данного уравнения. В нуль μ не обращается.

Пример 18. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)dx - dy = 0, \tag{1.39}$$

если известно, что для него $\mu = \mu(x^2 - y)$, полагаем в условии (1.31) $\omega = x^2 - y$:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}}{-2x + (\sqrt{x^2 - y} + 2x)} = -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega} \equiv \psi(\omega), \tag{1.40}$$

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega} = e^{-\int \frac{1}{2\omega}d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}. \qquad (1.41)$$

Умножая обе части уравнения (1.39) на $\frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$ и интегрируя находим

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C.$$

Здесь μ обращается в бесконечность в точках кривой $y = x^2$ и, следовательно, $y = x^2$ является решением данного уравнения (1.39).

1.6. Теоремы существования решений уравнения I порядка, разрешенного относительно производной

Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \qquad (1.42)$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad (1.43)$$

Теорема существования и единственности решения задачи (1.42), (1.43) (Теорема Коши – Пикара)

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ ($a > 0$, $b > 0$). Пусть, далее, эта функция удовлетворяет в D условию Липшица ко второму аргументу: существует $N > 0$: $\forall x$: $|x - x_0| \le a$ и $\forall y_1, y_2 : |y_1 - y_0| \le b$ и $|y_2 - y_0| \le b$, что выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|. \qquad (1.44)$$

Тогда задача Коши (1.42), (1.43) имеет единственное решение, определенное и непрерывное для x: $|x - x_0| \le h$, где $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$, причем $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$.

Замечание. Неравенство (1.44) всегда выполнимо, если функция $f(x, y)$ имеет в области D непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Действительно, по теореме Лагранжа имеем $f(x, y_1) - f(x, y_2) =$ $= f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))(y_1 - y_2)$, где $0<\theta<1$, тогда

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le \max_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|=N\left|y_1-y_2\right|.$$

Доказательство.

1. Существование решения задачи Коши (1.42), (1.43).

Построим последовательность приближений к искомому решению (метод Пикара). Для этого отметим, что уравнение (1.42) с начальным условием (1.43) эквивалентно следующему интегральному уравнению, где y – неизвестная функция:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx. \qquad (1.45)$$

Это интегральное уравнение мы и будем решать последовательными приближениями.

За нулевое приближение возьмем постоянное число y_0. Определим первое приближение $y_1(x)$ следующей формулой:

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx. \qquad (1.46,\ a)$$

Поскольку функция под знаком интеграла известна, y_1 вычисляется квадратурой; очевидно, при $x=x_0$ имеем $y_1=y_0$, т.е. первое приближение удовлетворяет начальному условию.

Если $\left|x-x_0\right|\le h$ и $h\le a$, то из формулы (1,46, *a*) получаем

$$\left|y-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le M\cdot\frac{b}{M}=b.$$

Последнее неравенство показывает, что при указанных значениях x y_1 останется в D.

Строим второе приближение $y_2(x)$:

$$y_2=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx. \qquad (1,46,\ б)$$

Под знаком интеграла опять стоит известная функция (так как y_1 уже определено); далее, очевидно, $y_2(x_0)=y_0$, т.е. выполняется начальное условие; затем при $\left|x-x_0\right|\le h$ получаем:

$$\left|y-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh\le b,$$

откуда следует, что y_2 также не выйдет из области D. После того как определено $(n-1)$-е приближение, мы определим n-е приближение формулой

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx, \qquad (1.46,\ n)$$

откуда, допуская, что значения $y_{n-1} \in D$ при $|x - x_0| \le h$, получим $|y_n - y_0| \le Mh \le b$, т.е. n-е приближение также не выходит из той же области. Таким образом, методом полной индукции доказано, что ни одно из последовательных приближений не выйдет из области D, если

$$x_0 - h \le x \le x_0 + h.$$

Теперь нужно показать, что существует предел последовательности y_n

,

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \tag{1.47}$$

и что предельная функция удовлетворяет уравнению (1.42) и начальным условиям. Для того чтобы показать существование предела (1.47) последовательности $\{y_n\}$, достаточно доказать сходимость ряда:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots; \tag{1.48}$$

действительно, n-я частная сумма этого ряда $S_n = y_n$, и если мы докажем, что ряд (1.48) сходится к функции $Y(x)$, то этим самым и будет доказано соотношение (1.47).

Оценим абсолютные величины членов ряда (1.18):

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right| \le M|x_1 - x_0|; \tag{1.49, a}$$

далее

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1) - f(x, y_0)\}dx\right| \le M\left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)|dx\right|.$$

На основании условия Липшица (1.44) подынтегральная функция удовлетворяет неравенству $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \le N|y_1 - y_0|$; подставляя сюда только что найденную оценку для $|y_1 - y_0|$, находим

$$|y_2 - y_1| \le N\left|\int_{x_0}^{x} M|x - x_0|dx\right| = \frac{MN}{1\cdot 2}|x - x_0|^2. \tag{1.49, $б$}$$

Аналогично получим:

$$|y_3 - y_2| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_2) - f(x, y_1)|dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} N|y_2 - y_1|dx\right| \le \frac{MN^2}{1\cdot 2}\left|\int_{x_0}^{x} (x - x_0)^2 dx\right|,$$

и, наконец,

$$|y_3 - y_2| \le \frac{MN^3}{3!}|x - x_0|^3. \tag{1,49, $в$}$$

Докажем, что для любого целого положительного n справедливо неравенство

$$\left|y_n - y_{n-1}\right| \le \frac{MN^{n-1}}{n!}\left|x - x_0\right|^n. \qquad (1{,}49,\ n)$$

Для этого применим метод полной индукции: допустив, что неравенство (1.49, n) справедливо для n, докажем его справедливость для n + 1. Мы имеем:

$$\left|y_{n+1} - y_n\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})\right|dx\right| \le N\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_n - y_{n-1}\right|dx\right|$$

(последнее неравенство получаем на основании условия Липшица). Подставив в последний интеграл вместо $\left|y_n - y_{n-1}\right|$ выражение (1.49n) (отчего неравенство усилится), получаем:

$$\left|y_{n+1} - y_n\right| \le N \cdot \frac{MN^{n-1}}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}\left|x - x_0\right|^n dx\right| = \frac{MN^n}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1},$$

т.е. неравенство (1.49n) справедливо и для $n + 1$. А поскольку данное неравенство оправдывается для $n = 2$ и $n = 3$, то оно верно для каждого натурального числа n. Заменяя еще $\left|x - x_0\right|$ его наибольшим допустимым значением h, мы приходим к заключению, что каждый член ряда (1.48) не превосходит соответствующего члена числового ряда с положительными членами:

$$\left|y_0\right| + Mh + M\frac{Nh^2}{2!} + M\frac{N^2h^3}{3!} + \ldots + M\frac{N^{n-1}h^n}{n!} + \ldots. \qquad (1.50)$$

Применяя к последнему ряду признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{MN^n h^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!MN^{n-1}h^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{Nh}{n+1} = 0 < 1.$$

Итак, ряд (1.50) сходится. Поскольку все члены ряда (1.48) по абсолютной величине меньше членов числового ряда (1.50), то ряд (1.48) не только сходится, но и, в силу критерия Вейерштрасса, сходится равномерно для всех x, удовлетворяющих условию $\left|x - x_0\right| \le h$. Каждый член ряда (1.48) есть непрерывная функция верхнего предела. Следовательно,

$$Y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

существует и является непрерывной функцией от x.

Докажем, что полученная таким образом функция $Y(x)$ удовлетворяет данному уравнению (очевидно, что начальное условие удовлетворено, так как $Y(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y_0$).

Возьмем равенство (1.46n):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$.

Благодаря равномерной непрерывности функции $f(x,y)$ по y в области D мы для любого заренее заданного положительного числа ε можем найти такое $\delta > 0,$ что неравенство

$$|\, f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon$$

будет выполнено для тех пар точек (x,y') и (x,y') области D, для которых выполняется неравенство $|y' - y''| < \delta$ (в силу условия Липшица достаточно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{N}$). Далее из равномерности стремления последовательности y_n к пределу возникает возможность для выбранного δ так подобрать натуральное число n_0, чтобы при $n - 1 > n_0$ для всех значений x в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имело место неравенство

$$|y_{n-1}(x) - Y(x)| < \delta\,.$$

Сопоставляя оба эти неравенства, мы получаем при $n - 1 > n_0$:

$$|\, f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, Y(x))| < \varepsilon.$$

Отсюда следует:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}) dx - \int_{x_0}^{x} f(x,Y) dx \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |\, f(x, y_{n-1}) - f(x,Y)| dx \right| < \varepsilon h\,.$$

Пользуясь произвольностью числа ε, находим

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}) dx = \int_{x_0}^{x} f(x,Y) dx\,.$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (1.46*n*) при $n \to \infty$, получаем тождество

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,Y) dx, \tag{1.51}$$

т.е. функция $Y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.45). Далее функция Y допускает производную по x, так как в правой части тождества (1.51) стоит интеграл от непрерывной функции, допускающий производную по верхнему пределу. Дифференцируя (1.51), получаем

$$\frac{dY}{dx} = f(x,Y),$$

т.е. $Y(x)$ удовлетворяет данному уравнению (1.42). Первая часть теоремы доказана.

2. Единственность решения задачи Коши (1.42), (1.43).

Допустим, что кроме решения $Y(x)$ существует еще другое решение $Z(x)$, удовлетворяющее тому же начальному условию: $Z(x_0) = y_0$. Без ограничения общности можно предположить, что значения x, для которых

$Y(x) \neq Z(x)$, находятся вправо от x_0 в любой близости от точки x_0 (иначе за точку x_0 мы взяли бы ту точку, в любой близости которой значения $Y(x)$ и $Z(x)$ перестают быть равными, или заменили бы x на $-x$).

Покажем, что наше допущение приводит к противоречию. Возьмем некоторое малое постоянное число $\varepsilon > 0$; по предположению, в замкнутом интервале $x_0 \le x \le x_0 + \varepsilon$ не всюду $Y = Z$; следовательно, положительная функция $|Y(x) - Z(x)|$ достигает в этом интервале в некоторой точке ξ своего наибольшего значения $\theta > 0$, причем не может быть $\xi = x_0$, так как при $x = x_0$ обе функции Y и Z равны между собой. Мы имеем:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)dx, \quad Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Z)dx.$$

Вычтем оба тождества одно из другого, придавая x значение ξ и используя при оценке разности условие Липшица:

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \theta \le \int_{x_0}^{\xi} |f(x, Y) - f(x, Z)| dx \le N \int_{x_0}^{\xi} |Y(x) - Z(x)| dx.$$

Мы только усилим последнее неравенство, если под интегралом заменим разность $|Y(x) - Z(x)|$ ее наибольшим значением θ и если интеграл распространим на промежуток $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ вместо промежутка (x_0, ξ). Получим $\theta \le N\varepsilon\theta$, откуда, по предположению $\theta > 0$, находим, что $1 \le N\varepsilon$, что противоречиво, поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, например $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Следовательно, допущение существования второго решения z, удовлетворяющего тому же начальному условию, что Y, приводит к противоречию.

Таким образом, при выполнении условий теоремы существует единственное решение задачи Коши (1.42), (1.43).

Продолжение решения задачи Коши (1.42), (1.43)

Существование решения задачи Коши (1.42), (1.43) доказано только для отрезка $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Покажем, что найденное решение может быть продолжено на всю область Q, где функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y.

Действительно, пусть $x_0^{(1)} = x_0 + h$,

$$y\left(x_0^{(1)}\right) = y_0^{(1)}, \text{ причем } \left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}\right) \in Q.$$

Найдем прямоугольник $D_1 : \left|x - x_0^{(1)}\right| \le a_1$,

$$\left|y - y_0^{(1)}\right| \le b_1 : D_1 \in Q.$$

Пусть $M_1 = \max\limits_{D_1} |f(x,y)|$, тогда по теореме Коши – Пикара существует

$$y\left(x_0^{(1)}\right) = y_0^{(1)}, \tag{1.52}$$

являющееся решением задачи Коши на отрезке $I_1 = \left[x_0^{(1)} - h_1; x_0^{(1)} + h_1\right]$, где $h_1 = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M_1}\right)$.

Середина отрезка I_1 совпадает с концом I в этой точке? оба решения совпадают и равны $y_0^{(1)}$. В силу единственности оба решения будут также совпадать в общей части отрезков I и I_1. Таким образом, найденное решение является продолжением ранее полученного на отрезке I решения на вторую половину отрезка I_1.

Пусть теперь $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1$, $y\left(x_0^{(2)}\right) = y_0^{(2)}$ и точка $\left(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right) \in Q$. Мы можем по начальному условию определить решение на отрезке I_2, имеющего общую половину с I_1, т.е. продолжить решение на вторую половину отрезка I_2 и т.д.

Аналогичное рассуждение может быть проведено и для убывающих значений x.

Таким образом, можно продолжить решение до границы области Q.

Пример. С помощью метода последовательного приближения найти решение задачи Коши

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Эта задача Коши эквивалентна уравнению $y(x) = 1 + \int\limits_0^x y(\tau)d\tau$.

На его основе строим последовательные приближения:

$$y_0 = 1,$$

$$y_1 = 1 + \int\limits_0^x d\tau = 1 + x,$$

$$y_2 = 1 + \int\limits_0^x (1+\tau)d\tau = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3 = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right)d\tau = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

$$\ldots$$

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

$$\ldots.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = e^x = y(x)$.

Теорема существования решения задачи Коши (1.42), (1.43) (Теорема Пеано)

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $D\colon\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b$. Пусть, далее, $M = \max\limits_D |f(x, y)|$. Тогда задача Коши (1.42), (1.43) имеет по крайней мере одно решение, определенное для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

Для доказательства этой теоремы мы применим теорему Арцела и принцип неподвижной точки Шаудера. Введем предварительно следующие определения.

Определение. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

называется равномерно ограниченной на $[a, b]$, если существует число $K > 0$ такое, что для всех натуральных n и любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)| \le K.$$

Определение. Представленная выше последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций называется равностепенно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, и любого натурального n выполняется неравенство

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема Арцела. Из всякой последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на $[a, b]$ функций можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Эта теорема является критерием компактности в пространстве $C\,[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций.

Ее доказательство приведено, например, в [11].

Теорема Шаудера. Если вполне непрерывный оператор F отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество B банахова пространства Y на свою часть, то существует неподвижная точка этого отображения, т.е. такая точка $y \in B$, что $Fy = y$.

Доказательство этой теоремы, а также соответствующие определения также приведены в [11].

Перейдем теперь к доказательству теоремы Пеано, воспользовавшись теоремами Арцела и Шаудера.

Уравнение (1.52) вместе с начальным условием эквивалентно интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau. \qquad (1.53)$$

Рассмотрим оператор *F*, определенный равенством

$$Fy = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

на шаре B: $\|y - y_0\| \le b$ пространства $C[x_0 - h, x_0 + h]$. Покажем, что оператор *F* вполне непрерывен на этом шаре.

Прежде всего, если последовательность $\{y_n(x)\}$, принадлежащая шару $\|y - y_0\| \le b$, равномерно сходится к функции $y(x)$, очевидно, принадлежащей тому же шару, то в силу непрерывности функции $f(x, y)$ имеем $f(x, y_n(x)) \to$ $\to f(x, y(x))$ равномерно на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Отсюда вследствие возможности предельного перехода под знаком интеграла при равномерной сходимости получаем, что $Fy_n \to Fy$, т.е. оператор F непрерывен на шаре $\|y - y_0\| \le b$.

Далее для любого элемента $y(x)$ шара $\|y - y_0\| \le b$ имеем

$$|Fy(x)| \le |y_0| + \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau \right| \le |y_0| + Mh. \qquad (1.54)$$

Если x_1 и x_2 – две любые точки отрезка $[x_0 - h, x_0 + h]$, то

$$|Fy(x_2) - Fy(x_1)| \le \left| \int_{x_1}^{x_2} f(\tau, y(\tau))d\tau \right| \le M|x_2 - x_1|. \qquad (1.55)$$

Неравенства (1.54) и (1.55) в силу теоремы Арцела показывают, что оператор *F* преобразует шар $\|y - y_0\| \le b$ в относительно компактное множество.

Покажем, наконец, что оператор *F* преобразует этот шар в себя. Действительно,

$$|Fy(x) - y_0| = \max_x \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau \right| \le Mh \le M\frac{b}{M} = b.$$

Таким образом, оператор *F* удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Поэтому существует неподвижная точка этого оператора, т.е. такая функция $y(x)$, что

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Это равенство равносильно двум равенствам:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \; y(x_0) = y_0,$$

чем и завершается доказательство теоремы Пеано.

Глава 2. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

2.1. Уравнения первого порядка *n*-й степени

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0\,. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что левая часть уравнения (2.1) является многочленом относительно y' степени n, причем коэффициенты этого многочлена в некоторой области D есть непрерывные функции от x и y, допускающие по y непрерывные частные производные.

$$F(x, y, y') \equiv A_n(x, y)y'^n + A_{n-1}(x, y)y'^{n-1} + \ldots + A_0(x, y) = 0\,. \tag{2.2}$$

Уравнение вида (2.2) называется уравнением первого порядка n-й степени относительно y'. Затем допустим, что в области D коэффициент при старшей степени y', т.е. $A_n(x, y)$, нигде не обращается в нуль. Тогда по основной теореме алгебры уравнение (2.2) для всякой пары значений x, y в рассматриваемой области имеет n решений y' (действительных или мнимых). По теореме о неявных функциях каждое из действительных решений является непрерывной функцией от x и y и имеет конечную частную производную $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$, если для рассматриваемых значений x, y, y' имеем $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ (т.е. если для данных значений x и y уравнение (2.2) относительно y' не имеет кратного корня). Таким образом, во всякой области, в которой $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right| \geq a > 0$, разрешенное относительно y' уравнение (2.2) удовлетворяет условию Липшица.

Итак, пусть в области D уравнение (2.1) имеет k действительных решений ($k \leq n$):

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y), \ldots,\ y' = f_k(x, y)\,. \tag{2.3}$$

Каждое из уравнений (2.3) есть уравнение такого вида, для которого доказано существование единственного решения (теорема Коши – Пикара), проходящего через точку (x_0, y_0); следовательно, уравнение (2.1) допускает в точности k интегральных кривых, проходящих через данную точку (x_0, y_0) области D.

Пример 1.

$$y'^2 + yy' - x^2 - xy = 0.$$

Разрешая относительно y' (или разлагая левую часть на множители), получаем два уравнения: 1) $y'=x$, 2) $y'=-y-x$; обе правые части однозначны и непрерывны во всей плоскости xy; соответственно, имеем два решения

$$1)\ y=\frac{x^2}{2}+C;\ 2)\ y=Ce^{-x}-x+1.$$

Пример 2.

$$y'^2+y^2-1=0.$$

Разрешая относительно y', имеем: $y'=\pm\sqrt{1-y^2}$; в полосе $-1<y<1$ плоскости xOy оба рассматриваемых значения y' действительны и различны, при $|y|>1$ значения y' мнимы, и при $y=\pm 1$ два корня уравнения для y' совпадают. Рассмотрим полосу $-1<y<+1$; через каждую точку (x_0, y_0) проходят два решения y_0': для одного из них значение производной в этой точке $y_0'=+\sqrt{1-y_0^2}$, для другого $y_0'=-\sqrt{1-y_0^2}$. В данном случае в уравнении, разрешенном относительно y', переменные разделяются, и мы имеем:

$$1)\ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx;\ 2)\ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-dx.$$

Получаем решения: 1) $\arcsin y=x+C$, 2) $\arcsin y=-x+C$. Откуда

$$y=\sin(x+C),\quad \left(-\frac{\pi}{2}<x+C<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\sin(-x+C),\quad \left(-\frac{\pi}{2}<-x+C<\frac{\pi}{2}\right).$$

Возьмем начальные условия $x=x_0$, $y=y_0$; для определения произвольного постоянного C получаем уравнения:

$$y_0=\sin(\pm x_0+C),\quad \pm x_0+C=\arcsin y_0,\quad C=\pm x_0+\arcsin y_0.$$

Решения, удовлетворяющие нашему начальному условию:

$$y=\sin[(x-x_0)+\arcsin y_0],\quad -\frac{\pi}{2}<x-x_0+\arcsin y_0<\frac{\pi}{2};$$

$$y=\sin[-(x-x_0)+\arcsin y_0],\quad -\frac{\pi}{2}<-x+x_0+\arcsin y_0<\frac{\pi}{2}.$$

Первое семейство решений представляет семейство дуг синусоид, взятых от точки минимума до точки максимума (исключая концы); все кривые получаются из одной, например

$$y=\sin x,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$$

переносом параллельно оси *Ox*; аналогично, второе семейство есть семейство дуг синусоид, взятых от максимума до минимума; они получаются переносом параллельно оси *Ox* из кривой

$$y = \sin(-x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Через каждую точку полосы $-1 < y < 1$ проходит по одной кривой каждого семейства – возрастающая кривая первого семейства и убывающая – второго.

Расширим теперь область, в которой рассматриваются кривые, добавив обе граничные прямые $y = \pm 1$, на которых условия Липшица не выполняются (у нас $f(x, y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$; производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mp \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ становится бесконечной при $y \to \pm 1$), но правые части уравнений остаются непрерывными. Теперь нам нет необходимости ограничивать изменение аргумента пределами $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Замечая, далее, что $\sin(-x + C) = \sin(x + \pi + C)$, мы можем представить общее решение одной формулой:

$$y = \sin(x + C), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Это семейство полных синусоид, получаемых из одной параллельным переносом вдоль оси *x*; чтобы получить каждую один раз, надо ограничить область изменения произвольного постоянного *C*, например $0 \le C \le 2\pi$. В точках максимума одной полной синусоиды кривая первого семейства переходит в кривую второго, в точке минимума имеет место обратный переход (см. пунктирные кривые на рис. 2.1). Но эти переходы совершаются на прямых $y = \pm 1$, где условия Липшица не выполнены; поэтому, применяя теорему Коши – Пикара, мы не можем связать убывающую и возрастающую дугу синусоиды в одну интегральную кривую; теорема существования дает две отдельные ветви, проходящие через каждую точку полосы (сплошные линии на рис. 2.1).

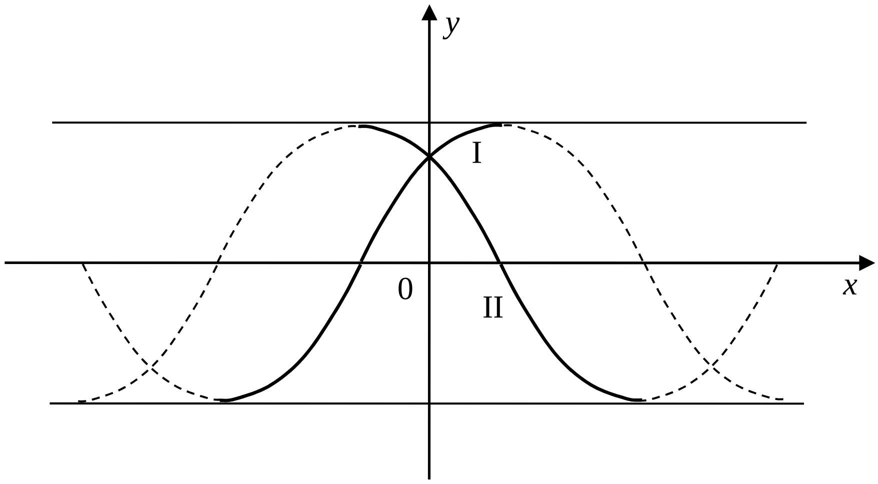

Рис. 2.1

К этому примеру мы вернемся при изучении особых решений.

Отметим, что уравнение (2.1) далеко не всегда может быть разрешено относительно y' и еще реже полученные после разрешения относительно y' уравнения (2.3) легко интегрируются. Поэтому общее решение уравнения (2.1) находят методом введения параметра.

2.2. Метод введения параметра

Рассмотрим различные виды уравнения (2.1).

I. Пусть уравнение (2.1) не содержит явно искомой функции y:

$$F(x, y') = 0. \qquad (2.4)$$

Положим $y' = p$:

$$F(x, p) = 0.$$

Предположим, что уравнение (2.4) может быть разрешено (в элементарных функциях) относительно x:

$$x = \varphi(p). \qquad (2.5)$$

Будем рассматривать p как параметр и выразим y через тот же параметр. Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

или

$$dy = pdx. \qquad (2.6)$$

Но из уравнения (2.5) $dx = \varphi'(p)dp$; подставляя это значение в выражение (2.6), получаем: $dy = p\varphi'(p)dp$, откуда

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C. \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.5) и (2.7) дают параметрическое уравнение семейства интегральных кривых заданного уравнения, зависящих от одного произвольного постоянного C. Иногда можно исключить p из этих уравнений и представить общее решение в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Пример 3.

$$e^{y'} + y' = x.$$

Уравнение не может быть разрешено в элементарных функциях относительно y', но оно является разрешенным относительно x: $x = e^p + p$; далее имеем

$$dy = pdx = p(e^p + 1)dp$$

и, наконец,

$$y = \int p\left(e^{p} + 1\right)dp = e^{p}(p-1) + \frac{p^2}{2} + C.$$

Итак, мы выразили x и y в функции p.

II. Уравнение вида

$$F(y, y') = 0 \tag{2.8}$$

может быть приведено к рассмотренному типу, если считать y независимой переменной, а x – функцией, так как $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$. Если уравнение разрешено относительно y, т.е. имеет вид $y = \varphi(p)$, то непосредственно ясно, что для получения x в функции p надо воспользоваться соотношением $\dfrac{dy}{dx} = p$, откуда

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

и x получается в функции p квадратурой:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C.$$

Пример 4.

$$y = p + \ln p.$$

Имеем:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)dp = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p^2}, \quad x = \ln p - \frac{1}{p} + C.$$

III. **1.** Пусть уравнение (2.1) может быть разрешено (в элементарных функциях) относительно y:

$$y = f(x, y'). \tag{2.9}$$

Введем параметр $y' = p$:

$$y = f(x, p). \tag{2.10}$$

Продифференцируем обе его части по x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Заменив $\dfrac{dy}{dx}$ на p, получим

$$p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx},$$

т.е. уравнение первого порядка относительно $p=p(x)$. Пусть его общее решение есть $p=\varphi(x,C)$. Подставив эту функцию в равенство (2.10), получим общее решение уравнения (2.9): $y=f\left(x,\varphi(x,C)\right)$.

2. Пусть уравнение (2.1) разрешается относительно x:

$$x=f\left(y,y'\right). \tag{2.11}$$

Заменив y' на p, получим

$$x=f\left(y,p\right). \tag{2.12}$$

Дифференцируем обе части уравнения (12) по y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{df}{dy}+\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Поскольку $\dfrac{dy}{dx}=p$, то $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{p}$, и потому

$$\frac{1}{p}=\frac{df}{dy}+\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Таким образом, получим уравнение первого порядка относительно $p=p(y)$. Пусть его общее решение есть $p=\psi(y,C)$. Подставив эту функцию в равенство (2.12), получим общий интеграл уравнения (2.11):

$$x=f\left(y,\psi(y,C)\right).$$

Пример 5.

Решить уравнение

$$y=x+y'-\ln y'.$$

Это уравнение вида (2.10). Вводим параметр $y'=p$.

$$y=x+p-\ln p. \tag{2.13}$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Заменяем $\dfrac{dy}{dx}$ на p:

$$p=1+\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

или

$$p-1=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{p-1}{p}.$$

А. Если $p\neq 1$, то сокращаем на $p-1$:

$$1=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{1}{p}, \text{ или } dx=\frac{dp}{p}, \text{ откуда } x=\ln p+C.$$

Подставим это в (2.13): $y = p + C$.
Таким образом, получим общее решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \ln p + C, \\ y = p + C. \end{cases} \tag{2.14}$$

Исключим параметр p: из первого из уравнений (2.14) имеем $p = e^{x-C}$; подставляя это во второе уравнение, получаем общее решение:

$$y = e^{x-C} + C.$$

Б. Если $p = 1$, то, подставив это в уравнение (2.13), получаем еще одно решение

$$y = x + 1.$$

IV. Уравнение Лагранжа. Изложенные преобразования приводят уравнение, не разрешенное относительно производной, к новому уравнению, которое является разрешенным относительно производной; но это новое уравнение, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Сейчас мы рассмотрим тип уравнений, не разрешенных относительно производных, в применении к которым метод дифференцирования всегда приводит к уравнению, интегрируемому в квадратурах. Это уравнение Лагранжа. Так называется уравнение, линейное относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'), \tag{2.15}$$

где φ, ψ – данные дифференцируемые функции. Вводим параметр $y' = p$:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \tag{2.16}$$

Применяя к уравнению (2.16) метод дифференцирования (так как это – уравнение вида (2.9)), приходим к уравнению:

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Это уравнение является линейным относительно $x = x(p)$ (в предположении $p - \varphi(p) \neq 0$):

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Оно, как известно, интегрируется в квадратурах; решение имеет вид

$$x = C\omega(p) + \chi(p),$$

где, например, $\omega(p) = e^{-\int \frac{\varphi'(p)dp}{\varphi(p) - p}}$. Внося найденное выражение x в данное уравнение, получим выражение вида

$$y = [C\omega(p) + \chi(p)]\varphi(p) + \psi(p).$$

Таким образом, две переменные выражены в функциях параметра p; если исключить этот параметр, получим общий интеграл уравнения Лагранжа в форме $\Phi(x, y, C) = 0$.

Пусть теперь $p - \varphi(p) = 0$. Если это уравнение имеет вещественные решения $p = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то, подставляя их в (2.16) и принимая во внимание, что $\varphi(p_k) = p_k$, получим

$$y = p_k x + \psi(p_k),\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Эти прямые могут оказаться особыми решениями уравнения Лагранжа (см. подразд. 2.3).

Пример 6.

$$y = 2y'x + y'^2.$$

Вводим параметр $y' = p$: $y = 2px + p^2$. Дифференцируем по x, считая p и y функциями x и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p; имеем:

$$p = 2p + 2(x + p)\frac{dp}{dx}.$$

Разрешая относительно $\frac{dx}{dp}$, в предположении $p \neq 0$ находим $\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} - 2$; решение этого уравнения есть $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$. Подставляя это выражение в данное уравнение, находим:

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Итак, мы выразили x и y в функции параметра p и произвольного постоянного C, т.е. получили общее решение в параметрической форме. Пусть теперь $p = 0$. Подставим $p = 0$ в равенство $y = 2px + p^2$ и получим частное решение $y = 0$.

V. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа; оно имеет вид

$$y = y'x + \varphi(y'), \tag{2.17}$$

где φ – дифференцируемая функция, или

$$y = px + \varphi(p). \tag{2.18}$$

Дифференцируем обе части по x; получаем:

$$p = p + \left[x + \varphi'(p)\right]\frac{dp}{dx},\ \text{или}\ \frac{dp}{dx}\left[x + \varphi'(p)\right] = 0.$$

Исследуем оба множителя левой части последнего уравнения. Первый множитель дает дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dx}=0,$$

откуда $p=C$, и общее решение уравнения (17) есть

$$y=Cx+\varphi(C). \tag{2.19}$$

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой в уравнении (2.18) p на произвольное постоянное C. Решение (2.19) геометрически представляет семейство прямых от одного параметра. Приравняем теперь нулю второй множитель $x+\varphi'(p)=0$. Это равенство определяет p как функцию от x; $p=\omega(x)$; если подставить это значение p в уравнение (2.18), то получим:

$$y=x\omega(x)+\varphi[\omega(x)]. \tag{2.20}$$

Можно также подставить значение $x=-\varphi'(p)$ в уравнение (2.18) и получить ту же кривую в параметрической форме:

$$x=-\varphi'(p),\ \ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \tag{2.21}$$

Легко проверить, что кривая (2.20) и (2.21) является интегральной кривой уравнения (2.17); действительно, пользуясь, например, параметрическим представлением (2.21), находим:

$$dx=-\varphi''(p)dp,\ \ dy=[1-p\varphi''(p)+\varphi'(p)]dp=-p\varphi''(p),$$

откуда $\frac{dy}{dx}=p$. Подставляя значения x, y, y' в уравнение (2.17), получаем тождество:

$$-p\varphi'(p)+\varphi(p)=-p\varphi'(p)+\varphi(p).$$

Решение (2.20) или (2.21) не содержит произвольного постоянного; оно не получается из общего решения (2.19) ни при каком постоянном значении C. Действительно, правая часть уравнения (2.19) при любом постоянном C есть линейная функция от x; допустим, что $x\omega(x)+\varphi[\omega(x)]=ax+b$ (a и b – постоянные); дифференцируя, находим:

$$\omega(x)+x\omega'(x)+\varphi'[\omega(x)]\omega'(x)=a.$$

Но по определению функции $\omega(x)$ имеем $\varphi'[\omega(x)]=-x$, и предыдущее равенство обращается в следующее:

$$\omega(x)=a,$$

что противоречит уравнению, определяющему $\omega(x)$. Посмотрим, каково геометрическое значение решения (2.20). Оно получилось путем исключения p из двух уравнений:

$$y=px+\varphi(p),\ \ 0=x+\varphi'(p),$$

или, заменяя p через C (от этого результат не изменится), исключением C из двух уравнений:

$$y = Cx + \varphi(C), \ \ 0 = x + \varphi'(C),$$

причем второе получается из первого дифференцированием по C. Но из дифференциальной геометрии известно, что этот процесс дает огибающую семейства прямых (2.19), представляющего общее решение. Мы скажем, что эта огибающая, т.е. решение (2.20), есть особое решение уравнения Клеро (2.17) (см. подразд. 2.3).

Итак, общее решение уравнения Клеро представляет семейство прямых, особое решение – огибающую.

К уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по какому-либо свойству ее касательной.

Пример 7.

Найти кривую, касательные к которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной 2. Пишем уравнение искомой касательной в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; по условию $ab = 4$, т.е. $b = \frac{4}{a}$, и мы имеем семейство прямых $\frac{x}{a} + \frac{ay}{4} = 1$. Найдем дифференциальное уравнение этого семейства; дифференцируем по x и исключаем a:

$$\frac{1}{a} + \frac{ay'}{4} = 0, \quad a^2 = \frac{-4}{y'}, \quad a = 2\sqrt{-\frac{1}{y'}}, \quad \frac{x\sqrt{-y'}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{-y'}} = 1,$$

или

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}\,.$$

Это уравнение Клеро; его общее решение есть $y = Cx + 2\sqrt{-C}$, но нас интересует особое решение, которое дает искомую кривую. Находим его, дифференцируя последнее равенство по C и исключая C:

$$0 = x - \frac{1}{\sqrt{-C}}, \quad C = -\frac{1}{x^2},$$

откуда $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$, или, окончательно, $xy = 1$ – равносторонняя гипербола.

2.3. Особые решения

При исследовании уравнения Клеро мы встретились с особым решением. В настоящем разделе мы исследуем вопрос о существовании особых решений для довольно широкого класса уравнений и укажем два способа их нахождения.

Мы видели, что, по теореме Коши – Пикара, если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.22}$$

непрерывна в некоторой области и имеет в ней ограниченную производную по y, то через каждую точку (x_0, y_0) области проходит единственная интегральная кривая (свойство единственности); эта кривая входит в семейство от одного параметра (за параметр мы принимали величину y_0) и получается из этого семейства, когда параметр принимает определенное числовое значение. Семейство от одного параметра образует общее решение, каждая интегральная кривая представляет частное решение, и, в силу теоремы единственности, никаких других решений, в частности особых решений, в этом случае не представится.

Определение. Особым решением называется такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т.е. в любой окрестности каждой точки (x, y) особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Теорема Коши – Пикара дает достаточные условия для того, чтобы в некоторой области не существовало особых решений; следовательно, обратно, для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши. Итак, мы можем искать особые решения только в тех точках плоскости xOy, где выполнены условия теоремы Коши. В частности, если правая часть уравнения (2.22) непрерывна во всей рассматриваемой области (как мы будем предполагать всюду в настоящем параграфе), то *особые решения могут проходить только через те точки, в которых не выполняется условие Липшица*. Если $f(x, y)$ всюду имеет конечную или бесконечную производную по y, то условие Липшица не выполняется в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ становится бесконечной. Случай, когда функция f непрерывна и $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна, может представиться, например, для иррациональных функций.

Пример 8.

Рассмотрим уравнение

$$y' = y^{\frac{2}{3}}; \tag{2.23}$$

правая часть $f = y^{\frac{2}{3}}$ определена и непрерывна для всех значений y, но производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси

Ox плоскости *xOy*; интегрируя данное уравнение, находим общее решение: $27y=(x+C)^3$ – семейство кубических парабол; кроме того, уравнение имеет очевидное решение $y=0$, проходящее через точки, где не выполнено условие Липшица; это решение – особое, так как через каждую точку оси *Ox* проходит и кубическая парабола, и эта прямая – единственность не выполнена (рис. 2.2).

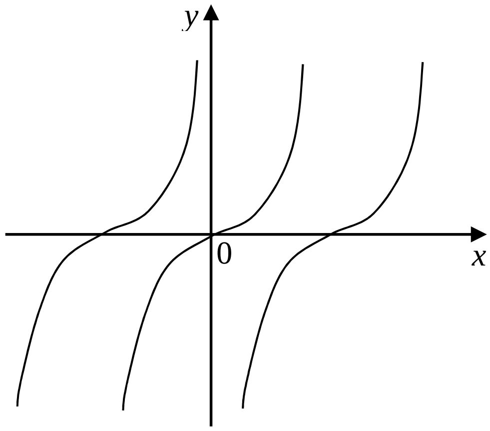

Рис. 2.2

Пример 9.

Вернемся к уравнению

$$y'^2+y^2=1,$$

или

$$y'=\pm\sqrt{1-y^2}$$

Оба значения y' представляют непрерывные функции в области $-1\le y\le 1$, где правая часть определена; производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$; условия теоремы Коши нарушаются на прямых $y=\pm 1$, где $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\infty$; эти прямые могут быть особыми решениями. Легко видеть, что $y=1$ и $y=-1$ суть решения этого уравнения и что эти прямые являются огибающими семейства синусоид $y=\sin(x+C)$, дающего общее решение, т.е. в точках прямых, изображающих решения $y=\pm 1$, единственность не выполнена: через каждую точку, например прямой $y=1$, проходят две интегральные кривые – сама прямая $y=1$ и касающаяся ее (восходящая или нисходящая) ветвь синусоиды; это будут особые решения для обоих уравнений: $y'=+\sqrt{1-y^2}$ и $y'=-\sqrt{1-y^2}$ (см. рис. 2.1 подразд. 2.1).

Замечание

Мы уже отмечали, что из теоремы Коши – Пикара можно вывести только необходимые условия для особого решения. Место тех точек, где условие Липшица не выполнено, если оно является кривой, может представлять особое решение, но может и не представлять его уже потому, что эта кривая, вообще говоря, не представляет решения уравнения. Если, например, вместо уравнения (2.23) взять следующее:

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} + a, \quad a \neq 0,$$

то $y = 0$ по-прежнему есть место точек, где не выполняется условие Липшица, но эта прямая не является решением уравнения, что очевидно из непосредственной подстановки в заданное уравнение.

Итак, чтобы найти особые решения уравнения (2.23), надо найти место точек, где не выполнено условие Липшица (т.е. в случае правой части, выраженной в элементарных функциях, место тех точек, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна); *если это место образует одну или несколько кривых, надо проверить, являются ли эти кривые интегральными кривыми уравнения (2.23) и нарушается ли в каждой их точке свойство единственности; если оба эти условия выполнены, то найденная кривая представляет собой решение.*

Пусть дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.24}$$

будет алгебраическое, n-й степени относительно y', т.е. имеет вид

$$A_n(x, y)y'^n + \ldots + A_1(x, y)y' + A_0(x, y) = 0, \tag{2.24, a}$$

коэффициенты $A_k(x, y)$ мы предполагаем многочленами по y и по x (достаточно было бы допустить, что $A_k(x, y)$ непрерывны по переменным x, y в некоторой области D и допускают в ней частные производные по x и по y). Как уже указывалось ранее, уравнение (2.24) определяет n ветвей многозначной функции:

$$y_i' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{2.25}$$

мы будем рассматривать только действительные ветви (2.25). Все эти ветви являются непрерывными функциями от x и y для тех значений этих переменных, которые не обращают в нуль $A_n(x, y)$.

Посмотрим, как для этих ветвей обстоит дело с условиями Липшица. Для вычисления производной $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial y'}{\partial y}$ воспользуемся уравнением (2.24) и правилом дифференцирования неявной функции, находим:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y'}. \tag{2.26}$$

Поскольку все коэффициенты $A_k(x, y)$ являются дифференцируемыми по y, производная (2.26) конечна и непрерывна всюду, где $A_n \neq 0$ и где знаменатель не равен нулю, т.е. те значения x, y, для которых может не выполняться условие Липшица, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0, \tag{2.27}$$

где после выполнения дифференцирования в левой части вместо y' надо взять одну из функций $f_i(x, y)$, определенную уравнением (2.24). Иначе говоря, чтобы получить уравнение геометрического места тех точек плоскости xOy, где условие Липшица не выполняется, надо исключить y' из уравнений (2.24) и (2.27). В итоге получаем уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{2.28}$$

называемое уравнением дискриминантной кривой.

Каждую функцию $y = \varphi(x)$, получаемую из уравнения (2.28) этой кривой, нужно проверить на то, является ли она решением уравнения (2.24), и если является, то будет ли это решение особым (по определению).

Аналогично решается вопрос об особых решениях уравнения (2.24) более общего, чем алгебраическое относительно y', вида. При этом требуется, чтобы функция $F(x, y, y')$ и ее частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ были непрерывными в рассматриваемой области.

Пример 10. Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{2.29}$$

Ранее (см. пример 2 в подразд. 2.2) было найдено общее решение $y_1 = e^{x-C} + C$. Найдем уравнение дискриминантной кривой:

$$F(x, y, y') = x + y' - \ln y' - y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv 1 - \frac{1}{y'} = 0. \tag{2.30}$$

Исключаем y' из уравнений (2.29), (2.30): $y' = 1$ подставим в (2.29): $y_2 = x + 1$, т.е. получили искомое уравнение дискриминантной кривой. Функция $y_2 = x + 1$ есть решение уравнения (2.29). Будет ли это решение особым (по определению)? Запишем условие касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0), \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1, \\ e^{x_0 - C} = 1. \end{cases}$$

Из второго равенства имеем $x_0 = C$. Подставляем в первое равенство: $1 + x_0 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Следовательно, при каждом x_0 решение $y = y_2(x)$ касается в точке с абсциссой x_0 одной из кривых $y = y_1(x)$ (именно при $C = x_0$), т.е. согласно определению $y_2 = x + 1$ есть особое решение.

Второй метод нахождения особого решения

Определение. Линия L называется огибающей однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается той или иной линии семейства, причем в различных точках линии L ее касаются различные линии данного семейства.

Пример 11.

Рассмотрим семейство окружностей $(x - C)^2 + y^2 = R^2$. Очевидно, что огибающая будет иметь вид $y^2 = R^2$ (рис. 2.3).

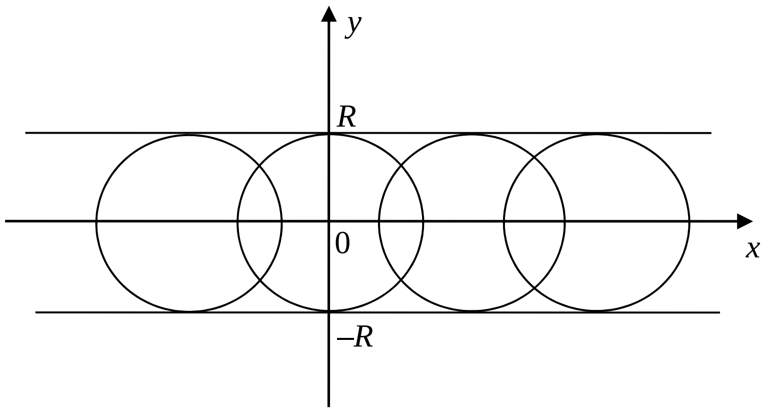

Рис. 2.3

Пусть общий интеграл уравнения (2.24) есть

$$\Phi(x, y, C) = 0. \qquad (2.31)$$

Если семейство кривых, изображаемое уравнением (2.31), имеет огибающую, то эта огибающая:

1) является решением дифференциального уравнения; действительно, в каждой точке огибающей элемент (x, y, y') совпадает с элементом одной из интегральных кривых семейства (2.31); а поскольку интегральные кривые семейства (2.31) суть решения уравнения (2.24), то все элементы огибающей также удовлетворяют этому уравнению, т.е. огибающая есть решение;

2) дает особое решение; действительно, рассмотрим семейство, состоящее из дуг интегральных кривых до точки прикосновения с огибающей; через каждую точку некоторой окрестности огибающей проходит одна такая кривая; эти кривые соответствуют полю, определенному

одной из ветвей (2.25) уравнения (2.31); в точках огибающей единственность нарушается, так как через каждую ее точку проходят две интегральные кривые с общей касательной – сама огибающая и касающаяся ее кривая семейства.

Отсюда правило нахождения особого решения, если известен общий интеграл (2.31), такое же, как для нахождения огибающей: дифференцируем уравнение (2.31) по параметру *C*:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0\,. \tag{2.32}$$

Из уравнений (2.31) и (2.32) исключаем *C*; полученное соотношение

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2.33}$$

(если оно представляет решение) дает особое решение.

Пример 12.

Найти особое решение уравнения $(y')^2 + y^2 = 1$. Ранее было получено общее решение (см. пример 2, в подразд. 2.1) $y = \sin(x + C)$. Найдем огибающую этого семейства кривых, воспользовавшись формулами (2.31), (2.32):

$$\begin{cases} y = \sin(x + C), \\ 0 = \cos(x + C). \end{cases}$$

Исключаем *C*, находим огибающую $y^2 = 1$. Таким образом, особые решения данного уравнения – прямые $y = -1$ и $y = 1$.

Глава 3. Дифференциальные уравнения высших порядков

Самое общее указанного выше типа имеет вид

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Мы будем рассматривать уравнение, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{3.1}$$

и начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ....,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) вместе с условиями (3.2) называется начальной задачей, или задачей Коши.

Определение. Решением уравнения (3.1) называется n раз непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая этому уравнению.

3.1. Теорема существования и единственности

Теорема Коши – Пикара

Пусть функция $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ непрерывна по всем своим аргументам в ограниченной, замкнутой области D $\left|x - x_0\right| \le a$;

$$\left|y^{(k)} - y_0^{(k)}\right| \le b,\ \ k = 0, 1, \dots, n-1\,(a > 0, b > 0).$$

Пусть, далее, эта функция удовлетворяет условию Липшица по аргументам $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в области D, т.е. для любых двух точек $\left(x, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n-1)}\right)$ и $\left(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', ..., \bar{\bar{y}}^{(n-1)}\right)$ из области D выполняется неравенство

$$\left|f\left(x, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n-1)}\right) - f\left(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', ..., \bar{\bar{y}}^{(n-1)}\right)\right| \le K\sum_{k=0}^{n-1}\left|\bar{y}^{(k)} - \bar{\bar{y}}^{(k)}\right|, \quad K > 0.$$

Тогда задача Коши (3.1), (3.2) имеет единственное решение, определенное для $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$, где $h = \min\left(a; \dfrac{b}{M}\right)$, $M = \max\limits_D\left|f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)\right|$.

Эта теорема является следствием теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Сведем уравнение (3.1) к системе n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями.

Для этого, наряду с искомой функцией y, рассмотрим еще $n-1$ вспомогательных функций $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$, связанных с y и между собой соотношениями:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \ldots, \ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}. \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.3) следует, что функция y_k является k-й производной от функции y,

$$y_k = \frac{d^k y_k}{dx^k} = y^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Поэтому $y^{(n)} = \dfrac{dy_{n-1}}{dx}$ и уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, ..., y_{n-1}\right). \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3) и (3.4) представляют систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями $y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$.

Однако система (3.3) и (3.4) имеет ту особенность, что только в последнем уравнении правая часть есть функция от $x, y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ наиболее общего вида; в уравнениях (3.3) правые части имеют специальную форму. В целях наибольшей симметрии и имея в виду, что системы дифференциальных уравнений будут самостоятельным объектом нашего изучения, мы проведем доказательство существования для системы n дифференциальных уравнений первого порядка нормальной формы в наиболее общем виде; при этом для полной симметрии в обозначениях мы вместо обозначений $y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ для искомых функций введем обозначения: $y_1, y_2, ..., y_n$.

Таким образом, мы будем рассматривать систему:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Определение. Решением системы (3.5) называется совокупность непрерывно-дифференцируемых функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, обращающих систему (3.5) в систему тождеств.

Систему (3.5) мы будем рассматривать вместе с начальными условиями:

$$y_k(x_0) = y_k^0 \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.6}$$

Как и в случае уравнения n-го порядка, задача (3.5), (3.6) называется начальной задачей, или задачей Коши.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (3.5), (3.6)

Пусть функции f_k $(k=1,2,\dots,n)$ непрерывны по всем аргументам в ограниченной замкнутой области *D:* $|x-x_0|\le a$; $\left|y_k-y_k^0\right|\le b$ $(k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$. Пусть далее в области D эти функции удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов $y_1, y_2,\dots,y_n$, т.е. для любых двух точек $(x, y_1', y_2',\dots,y_n')$ и $(x, y_1'', y_2'',\dots,y_n'')$ $y_1{}'', y_2{}'',\dots,y_n{}''$ из области D имеют место неравенства:

$$\left|f_k(x,y_1',y_2',\dots,y_n')-f_k(x,y_1'',y_2'',\dots,y_n'')\right|\le K\sum_{i=1}^{n}\left|y_i'-y_i''\right|,\ K>0. \tag{3.7}$$

Тогда задача Коши (3.5), (3.6) будет иметь единственное решение $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$, определенное для $x\in[x_0-h;x_0+h]$, где $h=\min\left(a;\dfrac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{\substack{D\\1\le k\le n}}\left|f_k\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n\right)\right|$.

Замечание. Если функции f_i имеют в области D непрерывные частные производные по y_1, y_2, …, y_n, то по теореме Лагранжа о конечном приращении, имеем:

$$f_i(x,y_1',y_2',\dots,y_n')-f_i(x,y_1'',y_2'',\dots,y_n'')=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_{\bar y_k}\cdot(y_1'-y_1'')+\dots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)_{\bar y_k}\cdot(y_n'-y_n''), \tag{3.8}$$

где знак $(\ )_{\bar y_k}$ показывает, что аргументы y_k $(k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ должны быть заменены через $\bar y_k=y_k'+\theta(y''_k-y_k')$, $0<\theta<1$. В силу непрерывности частные производные являются ограниченными. Мы можем взять наибольшее значение абсолютных величин всех этих производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ в области D за постоянную K и получить из (3.8) неравенство вида (3.7). Таким образом, условие Липшица выполняется при существовании и непрерывности в области D частных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений Пикара и является непосредственным обобщением доказательства теоремы Коши – Пикара для уравнения I порядка.

I. Существование решения задачи Коши (3.5), (3.6).

Вычисляем последовательные приближения одновременно для всех искомых функций. За приближения нулевого порядка берем постоянные $y_i^{(0)}$; далее приближения первого порядка будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})dx \\ &\ldots \\ y_n^{(1)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})dx \end{aligned}\right\}. \qquad (3.9,\ a)$$

Очевидно, что построенные функции являются непрерывными. Покажем, что первое приближения, при $|x - x_0| \le h$, не выходят из области *D*. Действительно,

$$\left|y_i^{(1)} - y_1^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(в силу определения числа h).

Далее определяем вторые приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(2)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})dx \\ &\ldots \\ y_n^{(2)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})dx \end{aligned}\right\}. \qquad (3.9,\ б)$$

Таким образом, m-е приближения определяются через приближения (m – 1)-го порядка такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(m)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})dx \\ &\ldots \\ y_n^{(m)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})dx \end{aligned}\right\}. \qquad (3.9,\ m)$$

Допуская, что (m – 1)-е приближение оказались непрерывными функциями от x, мы видим, что m-е приближения, как неопределенные интегралы от непрерывных функций, также оказываются непрерывными. Легко доказать, что если (m – 1)-е приближение не выходит из области *D* при $|x - x_0| \le h$, то это же имеет место для приближений порядка m. Действительно, в силу предположения о (m – 1)-х приближениях, мы имеем:

$$\left|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\right| \le M \text{ при } |x - x_0| \le h \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и формулы (3.9, m) в таком случае дают

$$\left|y_i^{(m)} - y_1^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b.$$

Поскольку неравенство доказано для $m = 1$, оно справедливо для любого натурального m. Таким образом, все последовательные приближения (3.9, m) принадлежат области D при изменении x в отрезке $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$.

Докажем далее, что последовательные приближения образуют сходящуюся последовательность, т.е. что $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)$ существует (i = 1, 2, …, n).

Для этого, как и в случае одной функции, рассмотрим ряды:

$$y_1^{(0)} + \left(y_i^{(1)}(x) - y_1^{(0)}\right) + \left(y_i^{(2)}(x) - y_1^{(1)}(x)\right) + \ldots + \left(y_i^{(m)}(x) - y_1^{(m-1)}(x)\right) + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.10)$$

Оценим абсолютные величины членов этих рядов, начиная со второго, пользуясь для этой оценки условием Липшица. Имеем:

$$\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})dx\right| \le M|x - x_0|,$$

далее

$$\left|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left[f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\right]dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\right|dx\right|, \qquad (3.11, a)$$

и на основании условия Липшица и полученных оценок для $\left|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}\right|$,

$$\left|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} K(\left|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}\right| + \ldots + \left|y_n^{(1)} - y_n^{(0)}\right|)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} MnK|x - x_0|dx\right| = MnK\frac{|x - x_0|^2}{2} \qquad (3.11, б)$$

(i = 1, 2, …, n).

Допустим, что для члена $y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)$ мы уже получили оценку:

$$\left|y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)\right| \le M(nK)^{(m-2)}\frac{|x - x_0|^{(m-1)}}{(m-1)!} \qquad (3.11, m–1)$$

(i = 1, 2, …, n);

покажем, что аналогичная оценка, с заменой $m - 1$ на m, справедлива для следующего члена. Действительно,

$$\left|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left[f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)})\right]dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)})\right|dx\right| \le \qquad (3.11, m)$$

$$\le K\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{l=1}^{n}\left|y_l^{(m-1)} - y_l^{(m-2)}\right|dx\right| \le M(nK)^{m-1}\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|x - x_0|^{m-1}}{(m-1)!}dx\right| = M(nK)^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!}.$$

Таким образом, мы доказали, что оценка (3.11, m) справедлива для всякого натурального m. Замечая далее, что $\left|x - x_0\right| \le h$, мы видим, что все члены рядов (3.10), начиная со второго, соответственно не больше по абсолютной величине, чем члены знакоположительного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} M\left(nK\right)^{m-1} \frac{h^m}{m!}.$$

Этот последний ряд, как легко проверить, сходится; следовательно, ряды (3.10) сходятся равномерно для значений x в отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$; поскольку их члены есть непрерывные функции, и суммы их будут функциями непрерывными. Обозначим их через $Y_i(x)$ (i = 1, 2, …, n).

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty}(y_i^{(l)} - y_i^{(l-1)}) = \lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x).$$

Докажем, что функции $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ дают искомую систему решений системы дифференциальных уравнений (3.5).

По самому определению $y_i^{(m)}(x)$ мы имеем $y_i^{(m)}(x_0) = y_i^{(0)}$, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_0) = Y_i(x_0) = y_i^{(0)},$$

т.е. предельное функции $Y_i(x)$ удовлетворяют начальным условиям.

Докажем, что эти функции удовлетворяют системе (3.5). В силу равенства (3.9, m) мы можем написать:

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x}\left\{f_i(x, y_1^{(m-1)}(x),\ldots, y_n^{(m-1)}(x)) - f_i(x, Y_1(x),\ldots, Y_n(x))\right\}dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1(x),\ldots, Y_n(x))dx \tag{3.12}$$

(i = 1, 2, …, n).

Оценим абсолютную величину первого интеграла:

$$\begin{aligned} &\left|\int_{x_0}^{x}\left(f_i(x, y_1^{(m-1)},\ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, Y_1,\ldots, Y_n)\right)dx\right| \le \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i(x, y_1^{(m-1)},\ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, Y_1,\ldots, Y_n)\right|dx\right| \le \\ &\le K\left|\int_{x_0}^{x}\left(\left|y_1^{(m-1)} - Y_1\right| + \ldots + \left|y_n^{(m-1)} - Y_n\right|\right)dx\right| \end{aligned} \tag{3.13}$$

(последнее неравенство есть следствие условия Липшица). Поскольку функции $y_i^{(m-1)}(x)$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ сходятся в интервале $\left(x_0 - h; x_0 + h\right)$ равномерно к

$Y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то для любого заранее заданного ε можно найти такое N, что при $m - 1 > N$ для всякого значения x в рассматриваемом интервале выполняются неравенства

$$\left|y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)\right| < \frac{\varepsilon}{nKh} \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и тогда для первого интеграла в формуле (3.12) получается, в силу неравенства (3.13), оценка при $|x - x_0| \le h$:

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left(f_i\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_m^{(m-1)}\right) - f_i\left(x, Y_1, \ldots, Y_n\right)\right)dx\right| < \frac{\varepsilon}{nKh} hnK = \varepsilon.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ предел этого интеграла равен нулю. С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x)$, и равенства (3.12) дают в пределе

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)dx \;\; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дифференцируя обе части по x (производная левой части существует , так как существует производная правой части – производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу), мы получаем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) \;\; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т.е. функции $Y_i(x)$, действительно, удовлетворяют системе (3.5).

II. Единственность решения задачи Коши (3.5), (3.6).

Докажем, что полученное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет единственным. Допустим, что кроме системы решений $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ существует еще одна система решений $Z_1(x)$, $Z_2(x), \ldots, Z_n(x)$, причем $Y_i(x_0) = Z_i(x_0) = y_i^0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и не все $Z_i(x)$ тождественно равны $Y_i(x)$. Таким образом, в силу нашего допущения (непрерывная) функция

$$\Phi(x) = |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| \qquad (3.14)$$

не равна тождественно нулю в отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$. Без ограничений общности мы можем допустить, что $\Phi(x) \ne 0$ при значениях x, сколь угодно близких к x_0 и, например, больших, чем x_0 (если бы при $x_0 \le x \le x_1$ было $\Phi(x) = 0$, а неравенство выполнялось бы впервые для значений x, больших, чем x_1, и сколь угодно близких к нему, то мы заменили бы в последующих рассуждениях x_0 через x_1).

Рассмотрим отрезок $[x_0; x_0 + h_1]$, где h_1 – любое положительное число, меньшее или равное h. По допущению, $\Phi(x) \neq 0$, следовательно, положительные значения в интервале $[x_0; x_0 + h_1]$ для значений x, сколь угодно близких к x_0, значит, при сколь угодно малом h_1. В силу известного свойства непрерывных функций функция (14) достигает своего положительного максимума в отрезке $[x_0; x_0 + h_1]$ для некоторого значения $x = \xi$, где $x_0 < \xi \leq x_0 + h_1$. Поскольку наши функции $Y_i(x)$ и $Z_i(x)$, по предположению, удовлетворяют системе (3.5), мы имеем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i\left(x, Y_1(x), ..., Y_n(x)\right), \ \frac{dZ_i}{dx} = f_i\left(x, Z_1(x), ..., Z_n(x)\right),$$

откуда

$$\frac{d\left(Y_i - Z_i\right)}{dx} = f_i\left(x, Y_1(x), ..., Y_n(x)\right) - f_i\left(x, Z_1(x), ..., Z_n(x)\right) \tag{3.15}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Интегрируя тождества (3.15) в интервале $(x_0; x)$, где x – переменное, принадлежащее отрезку $[x_0; x_0 + h]$, получаем:

$$Y_i(x) - Z_i(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i\left(x, Y_1(x), ..., Y_n(x)\right) - f_i\left(x, Z_1(x), ..., Z_n(x)\right) \right\} dx$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Оценим разности в левых частях этих равенств, пользуясь условиями Липшица и тем, что значение функции (3.14) в отрезке $[x_0; x_0 + h_1]$ меньше или равно θ. Находим:

$$\left|Y_i(x) - Z_i(x)\right| \leq \int_{x_0}^{x} K\left\{\left|Y_1(x) - Z_1(x)\right| + ... + \left|Y_n(x) - Z_n(x)\right|\right\} dx < \int_{x_0}^{x} K\theta dx = K\theta(x - x_0)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Складывая последние неравенства для $i = 1, 2, \ldots, n$, находим:

$$\left|Y_1(x) - Z_1(x)\right| + ... + \left|Y_n(x) - Z_n(x)\right| < Kn\theta(x - x_0) \leq nK\theta h_1 \tag{3.16}$$

для всякого x, удовлетворяющего неравенствам

$$x_0 < x \leq x_0 + h_1.$$

Если мы возьмем, в частности, значение $x = \xi$, то левая часть (3.16) будет равна θ, и мы получим неравенство $\theta < nK\theta h_1$. Оно приводит к противоречию, так как h_1 может быть взято сколь угодно малым, в частности можно взять $h_1 \leq \dfrac{1}{nK}$; тогда правая часть окажется $\leq \theta$, и мы получаем $\theta < \theta$. Это противоречие доказывает единственность решения. Теорема доказана.

Продолжение решения задачи Коши (3.5), (3.6)

Полученное нами решение определено только для интервала $(x_0 - h; x_0 + h)$. Пользуясь языком многомерной геометрии, мы можем сказать, что область D есть параллелепипед $(n+1)$-мерного пространства, прямоугольные координаты точек которого есть $x, y_1, y_2, ..., y_n$; решение $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть интегральной кривой в этом пространстве, проходящей через точку $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right)$. Если хотя бы один из концов полученного отрезка интегральной кривой, соответствующих значениям $x_0 - h$ и $x_0 + h$, еще является внутренним для области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям теоремы, например конец, соответствующий $x = x_0 + h$, то можно взять точку $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_i^{(1)} = y_i(x_0 + h)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ за новую начальную точку и, исходя из нее, определить дальнейший отрезок интегральной кривой при значениях x в некотором интервале

$$\left(x_0^{(1)} - h^{(1)}; x_0^{(1)} + h^{(1)}\right).$$

В силу теоремы единственности эти кривые совпадают в общей части отрезков

$$\left[x_0 - h; x_0 + h\right] \text{ и } \left[x_0^{(1)} - h^1; x_0^{(1)} + h^1\right].$$

Таким образом, мы продолжили наше решение, определив его на большом интервале; это продолжение возможно до тех пор, пока мы не подойдем сколь угодно близко к границе той области, в которой функции f_i являются непрерывными и удовлетворяют условию Липшица по соответствующим аргументам.

Вернемся теперь к уравнению (3.1):

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Определение. Общим решением уравнения (3.1) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и удовлетворяющая двум условиям:

1) эта функция удовлетворяет уравнению (3.1) при любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

2) каковы бы ни были начальные условия (3.2), можно единственным образом определить произвольные постоянные $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, \ldots, C_n = C_n^0$ так, что функция $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. (Предполагается, что точка $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ лежит в области D, где выполняются условия теоремы существования и единственности.)

Определение. Общее решение уравнения (3.1) в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

называется общим интегралом этого уравнения.

3.2. Уравнения *n*-го порядка, разрешаемые в квадратурах

I. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{3.17}$$

легко интегрируется в квадратурах. Действительно, из уравнения (3.17) последовательным интегрированием получаем:

$$y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1, \; y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1(x-x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2} + C_2(x-x_0) + C_3, \;\ldots$$

и, наконец,

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \ldots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n\,\text{раз}} f(x)dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n. \tag{3.18}$$

Формула (3.18) дает общее решение уравнения (3.17); при этом из промежуточных формул очевидно, что формула (3.18) представляет решение такой задачи Коши – найти решение уравнения (3.17), удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$

$$y_0 = C_n, \; y_0' = C_{n-1}, \; \ldots, \; y_0^{(n-2)} = C_2, \; y_0^{(n-1)} = C_1.$$

Пример 1. Найти решение задачи Коши $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Найдем сначала общее решение данного уравнения. Для этого проинтегрируем его два раза (по частям). Получим

$$y' = (x-1)e^x + C_1$$

и далее

$$y = (x-2)e^x + C_1 x + C_2,$$

т.е. общее решение. Найдем теперь решение задачи Коши. Для определения C_1 и C_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ 1 = -2 + C_2, \end{cases} \text{откуда } C_1 = 1, \; C_2 = 3.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y = (x-2)e^x + x + 3.$$

Нетрудно заметить, что первый член правой части в формуле (3.18)

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \ldots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{3.19}$$

представляет частное решение уравнения (3.17), которое вместе со своими производными до (n – 1)-го порядка обращается в нуль при $x = x_0$.

Это выражение (3.19), содержащее n-кратную квадратуру по x, может быть преобразовано к такому виду, где содержится только одна квадратура по параметру.

Начнем со случая n = 2; обозначая для большей ясности переменные интегрирования в двух интегралах различными буквами, имеем:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(z)dz.$$

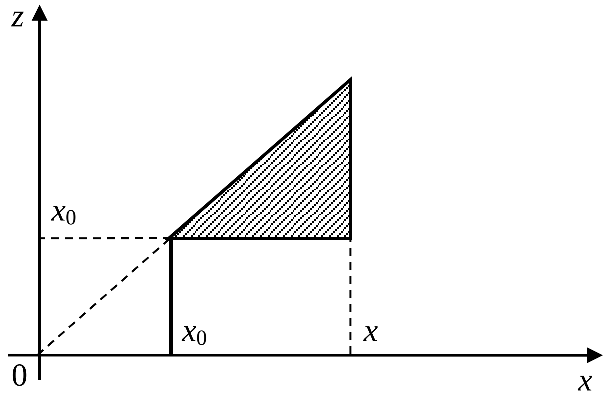

Рис. 3.1

Рассматривая правую часть последнего выражения как двойной интеграл в плоскости xOz, мы видим, что он распространен на площадь заштрихованного треугольника (рис. 3.1). мы можем переменить порядок интегрирования, взяв пределы по x от z до x, а по z – от x_0 до x (формула Дирихле), имеем:

$$y = \int_{x_0}^{x} dz \int_{z}^{x} f(z)dx = \int_{x_0}^{x} f(z)dz \int_{z}^{x} dx = \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)dz.$$

Рассмотрим далее случай n = 3:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

По предыдущему, два внутренних интеграла мы можем заменить одним по параметру z, т.е. написать:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)dz.$$

Интеграл опять распространяется на тот же треугольник плоскости xOz; меняя порядок интегрирования и изменяя пределы, находим:

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}dz\int\limits_{z}^{x}(x-z)f(z)dx=\int\limits_{x_0}^{x}f(z)dz\int\limits_{z}^{x}(x-z)dx=\int\limits_{x_0}^{x}f(z)\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_{x=z}^{x=x}dz=\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}(x-2)^2f(z)dz,$$

переходим к любому n; допустим, что для $n-1$ справедлива формула

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}dx\int\limits_{x_0}^{x}dx...\int\limits_{x_0}^{x}}_{n-1\,раз}f(x)dx=\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{n-2}f(z)dz,$$

тогда получаем:

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}dx\int\limits_{x_0}^{x}dx...\int\limits_{x_0}^{x}}_{n\ раз}f(x)dx=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\int\limits_{x_0}^{x}dx\cdot\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{(n-2)}\cdot f(z)dz=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_{x_0}^{x}f(z)dz.\int\limits_{z}^{x}(x-z)^{n-2}dx=\frac{1}{(n-1)!}.\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)dz,$$

т.е. та же формула справедлива для n. Итак, окончательно имеем для всякого натурального n:

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)dz \tag{3.20}$$

(формула Коши). Формула (3.20) представляет решение уравнения (3.17), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=0,\ y'=0,...,\ y^{(n-1)}=0 \text{ при } x=x_0.$$

Легко, обратно, убедиться дифференцированием в справедливости обоих этих утверждений.

Пример 2.

$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\ln x$; начальные значения $x_0=1,\ y_0,\ y_0',\ y_0''$ – любые числа.

Имеем:

$$y=y_0+\frac{(x-1)}{1}y_0'+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0''+Y,\ \text{где}\ Y=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x}(x-z)^2\ln z dz.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$Y=\frac{1}{2}\left[-\frac{(x-z)^2}{3}\ln z\right]_{z=1}^{z=x}+\frac{1}{6}\int\limits_{1}^{x}\frac{(x-z)^3}{z}dz=\frac{1}{6}\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{x^3}{z}-3x^2+3xz-z^2\right)dz=$$

$$=\frac{1}{6}\left(x^3\ln x-3x^2(x-1)+\frac{3x}{2}(x^2-1)-\frac{x^3-1}{3}\right)=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Мы получили, таким образом, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $Y=0, Y'=0, Y''=0$ при $x=1$. Чтобы получить искомое общее решение, связанное с задачей Коши, мы должны прибавить квадратный трехчлен относительно $x-x_0$; получим:

$$y = y_0 + \frac{(x-1)}{1} y_0' + \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{11}{36} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{18}.$$

Если мы просто желаем получить общее решение (содержащее три производные постоянные), то достаточно заметить, что, в силу произвола выбора значений y_0, y_0', y_0'', коэффициенты при x^2, x и свободный член в последнем выражении являются совершенно произвольными, и мы можем написать искомое общее решение в виде

$$y = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{11}{36} x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0,$$

C_0, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

II. Уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{3.21}$$

Разрешив его относительно $y^{(n)}$, мы приведем его к виду (3.17), и все последующие рассуждения имеют силу. Но иногда удается разрешить это уравнение в элементарных функциях лишь относительно x или, в более общем случае, выразить x и y в функции параметра t; тогда интегрирование уравнения (3.21) может быть тоже сведено к квадратурам, выраженным явно. Пусть параметрические уравнения, эквивалентные уравнению (3.21), есть

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t) \tag{3.22}$$

По определению, $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, или, в наших условиях, $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

далее

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \varphi'(t)dt \int \psi(t)\varphi'(t)dt \text{ и т.д.}$$

(Мы не пишем произвольных постоянных, включая их в знак неопределенного интеграла; если написать их явно, то, например, в выражении для $y^{(n-1)}$ появится член C_1, в выражении для $y^{(n-2)}$ – члены C_2 и $C_1 x$ или $C_1\varphi(t)$ и т.д.)

В результате получим:

$$x = \varphi(t), \quad y = \Phi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

если из этих двух соотношений исключить t, получим общий интеграл уравнения (3.22).

Пример 3.

$$e^{y''} + y'' = x.$$

Здесь разрешение относительно y'' в элементарных функциях невозможно; за параметр t естественно взять y'', и мы получаем параметрическое уравнение: $e^t + t = x$, $y'' = t$. Отсюда

$$dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt = (te^t + t)dt$$

$$y' = \int (te^t + t)dt = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1,$$

далее

$$dy = y'dx = \int \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1)dt$$

$$y = \int y'dx + C_2 = \int \left[(t-1)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + t - 1 + C_1 \right) e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] dt + C_2$$

или

$$y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1 \right) e^t + \frac{t^2}{6} + C_1 t + C_2 .$$

Последняя формула вместе с выражением для x, $x = e^t + t$, дает параметрическое представление общего решения данного уравнения.

III. Уравнение вида

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{3.23}$$

приводится к квадратурам при любом натуральном n.

1. Предположим сначала, что уравнение (3.23) разрешено относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \tag{3.24}$$

Вводим новую функцию z: $z = y^{(n-1)}$; уравнение (3.24) примет вид

$$z' = f(z) .$$

Из этого уравнения получаем с помощью разделения переменных его общий интеграл:

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{f(z)} .$$

Допустим, что это соотношение разрешено относительно z:

$$z = \varphi(x, C_1) .$$

Заменяя z его значением $z = y^{(n-1)}$, получим уравнение (n – 1)-го порядка:

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1) ,$$

которое рассмотрено в п. I.: при его интегрировании появятся еще $(n-1)$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (3.23) в виде

$$y=\underbrace{\int dx\int dx\ldots\int}_{n\ \text{раз}}\varphi(x,C_1)dx+C_2x^{n-2}+C_3x^{n-3}+\ldots+C_{n-1}x+C_n\,.$$

2. Если уравнение (3.23) неразрешимо в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, но мы имеем выражения $y^{(n)}$ и $y^{(n-1)}$ через параметр t:

$$y^{(n)}=\varphi(t),\ y^{(n-1)}=\psi(t),\tag{3.25}$$

то соотношение $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, или $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}$, дает нам $dx=\dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, откуда x получается квадратурой:

$$x=\int\frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}+C_1\,.$$

Далее последовательно находим:

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}\,,$$

$$y^{(n-2)}=\int\frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}+C_2\,,$$

$$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx,\ldots,dy=y'dx$$

и, наконец, $y=\int y'dx+C_n$, т.е. опять представление x и y в функции параметра t и n произвольных постоянных $C_1,C_2,C_3,\ldots,C_n$ следовательно, получено общее решение.

Пример 4.

$$ay''=-(1+y'^2)^{3/2}\,.$$

Согласно изложенной теории, полагая $y'=z$, получаем уравнение первого порядка:

$$a\frac{dz}{dx}=-(\sqrt{1+z^2})^3,\ \text{или}\ -\frac{adz}{(\sqrt{1+z^2})^3}=dx,\ \text{откуда}\ x-C_1=-a\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,.$$

Далее удобно интегрировать в параметрическом виде:

$$z=y'=\mathrm{tg}\varphi,\quad x-C_1=-a\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\varphi^2}}=-a\sin\varphi.$$

Отсюда находим:

$$dy=y'dx=\mathrm{tg}\varphi(-a\cos\varphi d\varphi)=-a\sin\varphi d\varphi,\ y=a\cos\varphi=C_2.$$

Исключая параметр φ, получаем общий интеграл:

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2,$$

представляющий уравнение семейства всех окружностей радиуса a на плоскости.

IV. Уравнение вида

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \qquad (3.26)$$

также интегрируется в квадратурах. Введение нового переменного $z = y^{(n-2)}$ приводит уравнение (3.26) к уравнению второго порядка:

$$F(z'', z) = 0. \qquad (3.27)$$

Если уравнение разрешено относительно z'', т.е. имеет вид

$$z'' = f(z), \qquad (3.28)$$

то один из методов его интегрирования таков: умножив обе части на $2z'$, получаем $2z'z'' = 2f(z)z'$, или в дифференциалах:

$$d\left(z'^2\right) = 2f(z)dz,$$

откуда $z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1$.

Последнее уравнение можно разрешить относительно производной и разделить переменные:

$$\pm\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx,$$

отсюда находим общий интеграл уравнения:

$$\pm\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = x + C_2.$$

Этот интеграл при замене z на $y^{(n-2)}$ получает вид

$$\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0,$$

т.е. уравнение вида (3.21); оно интегрируется, как мы уже знаем, квадратурами, причем это интегрирование дает еще n–2 произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (3.26).

Если уравнение (3.26) дано в не разрешенном относительно $y^{(n)}$ виде, но известно его параметрическое представление

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t), \qquad (3.29)$$

то интегрирование совершается следующим образом. Мы имеем два равенства:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$

связывающих две неизвестные функции от t, а именно – x и y; исключая делением dx, получаем дифференциальное уравнение для $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$$

или, в силу уравнений (3.29),

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)}=\varphi(t)\psi'(t)dt,$$

откуда квадратурой находим $\left(y^{(n-1)}\right)^2$, далее получим:

$$y^{(n-1)}=\pm\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)dt+C}.$$

Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к типу (3.25). Дальнейшие квадратуры введут $n-1$ новых произвольных постоянных.

Пример 5.

$$a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Полагая $y''=z$, приходим к уравнению: $a^2z''=z$; умножим обе части на $2z'$:

$$2a^2z'z''=2zz', \text{ или } 2a^2z'dz'=2zdz.$$

Интегрируя, находим:

$$a^2z'^2=z^2+C_1,\ \pm\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{dx}{a}.$$

Вторая итерация дает:

$$\ln\left(z+\sqrt{z^2+C_1}\right)=\pm\frac{x}{a}+\ln C_2 \text{ или } z+\sqrt{z^2+C_1}=C_2e^{\pm\frac{x}{a}}.$$

Чтобы разрешить последнее уравнение относительно *z*, целесообразно поступать следующим образом: делим 1 на обе части последнего равенства:

$$\frac{1}{z+\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{1}{C_2}e^{\pm\frac{x}{a}},$$

в левой части освобождаемся от иррациональности в знаменателе, затем умножим обе части на $-C_1$; получаем:

$$z-\sqrt{z^2+C_1}=-\frac{C_1}{C_2}e^{\pm\frac{x}{a}}.$$

Складывая это уравнение с исходным и деля его на 2, получаем:

$$z=\frac{C_2}{2}e^{\pm\frac{x}{a}}-\frac{C_1}{2C_2}e^{\pm\frac{x}{a}}.$$

Подставляя $z=y''$ и интегрируя 2 раза, находим:

$$y=Ae^{\pm\frac{x}{a}}+Be^{\pm\frac{x}{a}}+Cx+D,$$

где *A*, *B*, *C*, *D* – произвольные постоянные.

3.3. Уравнения, допускающие понижение порядка

I. Уравнение, не содержащее явно искомой функции

Пусть уравнение n-го порядка не содержит явно искомой функции y; также ее $k-1$ первых производных $y', y'', ..., y^{(k-1)}$, и низшая производная, явно входящая в уравнение, есть $y^{(k)}$ $(1 \le k \le n-1)$.

Уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3.30}$$

Полагая $y^{(k)} = z$, мы заменяем уравнение (30) уравнением:

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0. \tag{3.31}$$

Вместо уравнения n-го порядка мы получили уравнение порядка $n-k < n$. Допустим, что мы сумели найти общий интеграл уравнения (3.31)

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0,$$

или

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0. \tag{3.32}$$

Таким образом, получено уравнение типа (21) (см. п. 2 в подразд. 3.2).

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y''' = \frac{2}{x+l} y'' + (x+1)^3.$$

Это уравнение не содержит явно искомой функции y, а также y'. Делаем замену $y'' = z$. Тогда уравнение принимает вид

$$z' - \frac{2}{x+1} z = (x+1)^3,$$

т.е. является линейным уравнением I порядка.

Проинтегрируем его, например, методом Бернулли:

$$z = \frac{(x+1)^4}{2} + C_1(x+1)^2.$$

Вернемся к искомой функции:

$$y'' = \frac{(x+1)^4}{2} + C_1(x+1)^2,$$

после двукратного интегрирования получим общее решение исходного уравнения:

$$y'' = \frac{(x+1)^6}{60} + C_1 \frac{(x+1)^4}{12} + C_2 x + C_3.$$

II. Пусть уравнение не содержит явно x, т.е. имеет вид

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3.33}$$

Здесь мы проведем такую замену переменных: в качестве новой искомой функции вводим $p = \frac{dy}{dx}$; за независимое переменное принимаем y. Вычисляем в этом предположении производные различных порядков:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Таким образом, вторая производная от y по x выражается через p и $\frac{dp}{dy}$, третья производная выражается через p и его производные не выше второго порядка. Легко доказать методом полной индукции, что $\frac{d^k y}{dx^k}$ выражается через p, $\frac{dp}{dy}$, …, $\frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$. Подставляя выражения для $y'', y''', ..., y^{(n)}$ в новых переменных в уравнение (3.33), получим новое дифференциальное уравнение порядка $n - 1$:

$$F(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0.$$

Если его удастся проинтегрировать, то его общий интеграл

$$\Phi(y, p, C_1, ..., C_{n-1}) = 0 \text{ или } \Phi(y, \frac{dy}{dx}, C_1, ..., C_{n-1}) = 0$$

даст дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируемое в квадратурах.

Пример 7. Найти общий интеграл уравнения

$$2yy'' = y'^2 + 1.$$

Это уравнение не содержит явно независимой переменной x. Полагаем $p(y) = \frac{dy}{dx}$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

и, следовательно, уравнение принимает вид

$$2y\frac{dp}{dy}p = p^2 + 1.$$

Порядок уравнения понижен. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Его общий интеграл

$$p^2 + 1 = C_1 y.$$

Следовательно, после обратной замены имеем:

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим искомый общий интеграл

$$4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2)^2.$$

Глава 4. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно совокупности величин y, $\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^n y}{dx^n}$ (y – искомая функция, x – независимое переменное). Таким образом, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{4.1}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $f(x)$ – известные непрерывные функции для $x \in (a, b)$.

Через L обозначен линейный дифференциальный оператор. Его линейность легко следует из известных правил дифференцирования.

Уравнение (4.1) называется неоднородным линейным уравнением или уравнением с правой частью. Если же «правая часть» (или «свободный член») уравнения, $f(x)$, тождественно равна нулю, то уравнение называется однородным линейным (соответствующим неоднородному уравнению (4.1)):

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{4.2}$$

Для уравнения (4.1) (а следовательно, и уравнения (4.2)) на отрезке $[a;b]$ выполнены все условия теоремы Коши – Пикара. Действительно, записав уравнение (4.1) в виде

$$y^{(n)} = -p_1(x) y^{(n-1)} - p_2(x) y^{(n-2)} - \ldots - p_n y + f(x) \equiv F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = p_n(x), \ \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-i}(x), \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

На отрезке $[a;b]$ непрерывные функции $p_i(x)$ ограничены ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), откуда и следует выполнение условия Липшица; на том же отрезке $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна для любых значений $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Следовательно, в силу теоремы Коши – Пикара существует одно и только одно решение $y(x)$ уравнения (4.1), которое при данном начальном значении $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) принимает значение y_0, в то время как значения производных $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), причем $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – любые заданные числа.

Отметим также, что уравнение (4.2) всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$.

4.1. Свойства линейного однородного уравнения

Теорема 1. Если y_1 и y_2 – частные решения уравнения (4.2), то $y_1 + y_2$ есть также решения этого уравнения.

Доказательство. Поскольку y_1, y_2 – решения, имеем тождества: $Ly_1 = 0$, $Ly_2 = 0$, тогда $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$, что в силу условия равно нулю тождественно. Теорема доказана.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (4.2), то Cy_1 есть также решения этого уравнения (C – любая постоянная).

Доказательство. Очевидно, что $LCy_1 = CLy_1$, а по условию $Ly_1 = 0$, откуда и следует справедливость теоремы.

Следствие. Если $y_1, y_2, ..., y_k$ – частные решения уравнения (4.2), то выражение $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ky_k$ есть также решение уравнения (4.2) (C_1, C_2, …, C_k – любые постоянные).

Определение. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$, определенные в интервале (a, b), называются линейно зависимыми в этом интервале, если существуют постоянные α_1, α_2, …, α_n, не все равные нулю, такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественно соотношение

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0. \tag{4.3}$$

Если не существует таких постоянных α_1, α_2, …, α_n, чтобы равенство (4.3) имело место для всех рассматриваемых значений x (причем предполагается, что не все α_i равны нулю), то функции называются линейно независимыми (в данном интервале).

Рассмотрим примеры:

1) если одна из функций, например $\varphi_n(x)$, равна в данном интервале нулю, то все функции линейно зависимы, так как мы имеем тождество

$$\alpha_n\varphi_n(x) = 0,$$

в котором можно взять $\alpha_n \neq 0$;

2) функции $1, x, x^2, ..., x^n$ линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, а также в любом конечном интервале. Допустив противное, мы получили бы равенство

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0$$

для всех рассматриваемых значений x (не все α_i равны нулю). Между тем написанное равенство есть алгебраическое уравнение степени не выше n; оно может быть справедливым не более как для n значений x.

Рассмотрим n функций от x, имеющих непрерывные производные до (n – 1)-го порядка:

$$y_1, y_2, ..., y_k.$$

Определение. Определитель

$$W[y_1, y_2, ...,. y_n] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского, или вронскианом этих функций.

Теорема 3. Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство. Пусть функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы, т.е. существует тождественное соотношение

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0, \tag{4.4}$$

где не все α_i равны нулю. Без ограничения общности мы можем допустить, что $\alpha_n \neq 0$ (иначе мы изменили бы нумерацию функций). Разрешая соотношение (4.4) относительно y_n, получаем тождество:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_{n-1} y_{n-1} \tag{4.5}$$

$$\left(\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \ i = 1, 2, ..., n-1 \right).$$

Из тождества (4.5) дифференцированием по x получаем:

$$\left. \begin{array}{l} y_n' = \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + ... + \beta_{n-1} y_{n-1}' \\ .... \\ y_n^{(n-1)} = \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} + ... + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{array} \right\} \tag{4.6}$$

Умножим в определителе Вронского первый столбец на $-\beta_1$, второй на $-\beta_2$,…, (n – 1) на $-\beta_{n-1}$ и прибавим к последнему; величина определителя $W(x)$ не изменится, но в силу соотношений (4.5), (4.6) последний столбец нового определителя будет состоять из нулей, откуда следует, что $W \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Если $y_1, y_2, ..., y_n$ есть частные решения однородного уравнения (4.2), то справедлива обратная, притом более сильная теорема.

Теорема 4. Если решения $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (4.2) линейно независимы, то $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Доказательство. Допустим противное: пусть $W(x_0)=0,\quad a<x_0<b$. Обозначим величины y_i при $x=x_0$ через y_{i0} и значения $y_i^{(k)}(x_0)$ – через $y_{i0}^{(k)}$ и составим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + ... + C_n y'_{n0} = 0, \\ ... \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\}. \tag{4.7}$$

Рассматривая в уравнениях (4.7) величины $C_1, C_2, ..., C_n$ как неизвестные, мы получим для определителя системы (4.7) значение $W(x_0)=0$. Следовательно, однородная система (4.7) из n уравнений с n неизвестными имеет систему решений $C_1, C_2, ..., C_n$, причем не все C_i равны нулю. Составим функцию

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n\ , \tag{4.8}$$

в силу следствия теорем 1 и 2 она является решением уравнений (4.2); в силу условий (4.7), мы имеем при $x=x_0$:

$$\tilde{y}(x_0)=0, \tilde{y}'(x_0)=0, ..., \tilde{y}^{n-1}(x_0)=0\ . \tag{4.8, a}$$

Начальные условия (4.9), по теореме существования и единственности, определяют единственное решение уравнения (4.2). Но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y=0$, следовательно, $\tilde{y}(x)\equiv 0, x\in(a,b)$, и мы получаем из равенства (4.8):

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = 0$$

для всякого $x\in(a,b)$, причем не все C_i равны нулю, т.е. функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы против предположения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 3 и 4 можно объединить в следующей формулировке: определитель Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка (4.2), или тождественно равен нулю, или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны.

Определение. Любая система из n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения (4.2) называется фундаментальной системой.

Теорема 5. Для всякого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система.

Доказательство. Действительно, возьмем любую систему таких n^2 чисел a_{ik} (i, k = 1, 2, …, n), чтобы составленный из них определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.9)$$

был отличен от нуля. Определим n частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (4.2) начальными условиями: при $x = x_0$ имеем $y_i = a_{i1}$, $y_i' = a_{i2}, ..., y_i^{(n-1)} = = a_{in}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Определитель (4.9) представляет значение определителя Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ при $x = x_0$. Таким образом, $W(x)$ заведомо не равен нулю при $x = x_0$, в силу теоремы 3, следует, что $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему (Вспомним, что $W(x)$ не равен нулю ни для какого $x \in (a, b)$).

Теорема 6. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.2), то общее решение этого уравнения есть:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n. \qquad (4.10)$$

Доказательство. По определению, решение, содержащее n произвольных постоянных, называется общим, если на него при определенных числовых значениях постоянных получается любое частное решение. А как было указано, в силу теоремы существования и единственности, любое частное решение однозначно определяется начальными условиями: при $x = x_0$

$$y = y_0, y' = y_0', ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \qquad (4.11)$$

где $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – любые числа, и $x \in (a, b)$. Мы докажем, что решение (4.10) есть общее, если покажем, что можно в формуле (11) определить постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (4.11). Для определения постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ мы получаем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + ... + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + ... + C_n y_{n0}' = y_0', \\ \dots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + ... + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{array}\right\} \qquad (4.12)$$

Здесь y_{i0} обозначает значение функции $y_i(x)$ при $x = x_0$; $y_{i0}^{(k)}$ есть значение производной $y_i^{(k)}(x)$ при $x = x_0$. Определитель системы (4.12) есть определитель Вронского, в котором вместо x подставлено x_0, т.е. $W(x_0)$; в силу теоремы 4 $W(x_0) \neq 0$; следовательно, система уравнений (4.12) всегда допускает, и притом единственную, систему решений $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Выражение (4.10), в котором C_k имеет полученные таким образом значения, очевидно удовлетворяет начальным условиям (4.11). Теорема доказана.

Пример 1. Уравнение $y'' - y = 0$ имеет, как легко проверить, два частных решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Для выяснения вопроса об их линейной зависимости или независимости составляем определитель Вронского:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Следовательно, e^x и e^{-x} составляют фундаментальную систему, и общее решение запишется так: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Следствие. $n + 1$ частных решений уравнения (4.2) $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим первые n функций: $y_1, y_2, ..., y_n$.

Возможны 2 случая:

1) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы; тогда теорема справедлива, так как линейное соотношение между n функциями есть частный случай линейного соотношения между $n + 1$ функциями, где постоянный множитель при y_{n+1} равен нулю;

2) функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимы; тогда они образуют фундаментальную систему, через которую выражается линейным образом с постоянными коэффициентами любое частное решение; в частности, для y_{n+1} получим:

$$y_{n+1} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + ... + A_n y_n .$$

Это и есть искомая линейная зависимость. Следствие доказано.

Теорема 7. Если два линейных однородных уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (4.13)$$

$$y^{(n)} + \bar{p}_1 y^{(n-1)} + ... + \bar{p}_{n-1} y' + \bar{p}_n y = 0 \qquad (4.14)$$

имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой, т.е. $p_i(x) \equiv \bar{p}_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Доказательство. Вычитая почленно уравнения (4.13) и (4.14), получаем новое уравнение $(n – 1)$-го порядка:

$$(p_1 - \bar{p}_1) y^{(n-1)} + (p_2 - \bar{p}_2) y^{(n-2)} + ... + (p_n - \bar{p}_n) y = 0 . \qquad (4.15)$$

Если p_1 и $\bar{p}_1$ не тождественно равны между собой, то найдется, в силу их непрерывности, интервал, в котором $p_1 - \bar{p}_1 \neq 0$. Разделив обе части уравнения (4.15) на $p_1 - \bar{p}_1 \neq 0$, мы получим в интервале (α, β) уравнение вида (4.13), т.е. со старшим коэффициентом, равным 1. Очевидно по самому построению уравнения (4.15), что оно допускает те же решения, что уравнения (4.13) и (4.14), т.е. уравнение $(n-1)$-го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, имеет n линейно независимых решений, что противоречит следствию теоремы 6. Следовательно, $p_1(x) \equiv \overline{p}_1(x)$; таким образом, уравнение (4.15) имеет вид

$$(p_2 - \overline{p}_2)y^{(n-2)} + (p_3 - \overline{p}_3)y^{(n-3)} + \ldots + (p_n - \overline{p}_n)y = 0.$$

Повторив предыдущие рассуждения, получим:

$$p_2(x) \equiv \overline{p}_2(x), p_3(x) \equiv \overline{p}_3(x), \ldots, p_n(x) \equiv \overline{p}_n(x).$$

Таким образом, фундаментальная система решений однозначно определяет линейное однородное уравнение (4.13).

4.2. Формула Остроградского – Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное уравнение (4.13). Пусть его фундаментальная система решений есть $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Рассмотрим далее уравнение

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.16)$$

Разлагая его по элементам последнего столбца, где y обозначает искомую функцию, убеждаемся в том, что равенство (4.16) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно функции y. При подстановке вместо y функции y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ мы получаем определитель с двумя равными столбцами. Он тождественно равен нулю; следовательно, уравнение (4.16) допускает частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Коэффициент при $y^{(n)}$ есть $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y]$; он, как нам известно, не обращается в нуль в интервале (a, b). Разделив на него обе части уравнения (4.16), получим уравнение n-го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, а по доказанному такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой. Таким образом, уравнения (4.13) и (4.16) эквивалентны.

Напишем уравнение (16) в развернутом виде:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n y\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Если исходное уравнение было написано в виде

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

то сравнение коэффициентов дает нам тождество

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)} .$$

Легко убедиться в том, что определитель в числителе есть производная от определителя Вронского, стоящего в знаменателе; действительно, производная по x определителя, составленного из функций от x, равна сумме n определителей, из которых у первого в первой строке функции заменены производными, а остальные не заменены, у второго во второй строке функции заменены производными и т.д., у n-го в последней строке функции заменены производными. Применяя это правило дифференцирования к определителю Вронского, мы получим $n-1$ первых слагаемых в виде определителей, имеющих две равные строки, т.е. обращающиеся в нуль, а последнее слагаемое, не равное нулю, есть как раз числитель в выражении для p_1. Итак, мы имеем:

$$p_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

или

$$-p_1(x)dx = \frac{dW(x)}{W(x)},$$

причем

$$W(x_0) = W_0 .$$

Интегрируя в форме Коши, получим:

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \qquad (4.17)$$

Равенство (4.17), определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, носит название формулы Остроградского – Лиувилля. Отметим, что формулу (4.17) в некоторых случаях удобнее использовать в виде

$$W(x)=Ce^{-\int p_1(t)dt}, \qquad (4.18)$$

где C – произвольная постоянная.

Применим формулу Остроградского – Лиувилля к нахождению общего решения уравнения второго порядка:

$$y''+p_1y'+p_2y=0,$$

у которого нам известно одно частное решение y_1. Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1. Составляем $W(y_1, y)$ и пишем его значение по формуле (4.18):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=Ce^{-\int p_1dx}.$$

Получаем для y линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем:

$$y_1y'-y_1'y=Ce^{-\int p_1dx};$$

деля обе части на y_1^2, находим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int p_1dx},$$

откуда y определяется квадратурой

$$y=y_1\left(\int\frac{Ce^{-\int p_1dx}}{y_1^2}dx+C_1\right) \qquad (4.19)$$

Полученное решение содержит два произвольных постоянных и, следовательно, является общим. Итак, если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.

Пример 2. Легко убедиться в том, что уравнение

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

допускает частное решение $y_1=x$. В нашем случае $p_1=\frac{-2x}{1-x^2}$, и формула (4.19) дает:

$$y=x\left(\int\frac{Ce^{\int\frac{2x}{1-x^2}}}{x^2}dx+C_1\right)=x\left(C\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}+C_1\right)=x\left(C\int\left(\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{dx}{1+x}\right)+C_1\right)=$$

$$=x\left(C\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)+C_1\right)=C_1x+C\left(\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}-1\right).$$

Это общее решение данного уравнения.

4.3. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка

Общие свойства

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнения вида

$$Ly\equiv y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=f(x) \tag{4.20}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$Ly=y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=0. \tag{4.21}$$

Теорема. Общее решение уравнения (4.20) есть сумма общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (4.21) и какого-нибудь частного решения y^* уравнения (4.20): $y=\bar{y}+y^*$.

Доказательство. Поскольку y^* есть решение уравнения (4.20), имеем тождество

$$Ly^*=f(x), \tag{4.22}$$

введем новую искомую функцию *z*, полагая

$$y=y^*+z. \tag{4.23}$$

Подставляя выражение (4.23) в уравнение (4.20), имеем в силу свойств линейного оператора:

$$Ly^*+Lz=f(x),$$

принимая во внимание тождество (4.22), получаем отсюда: $Lz=0$ – однородное уравнение, соответствующее (4.20).

Пусть фундаментальная система соответствующего уравнению (4.20) однородного уравнения (4.21) будет:

$$y_1, y_2, ..., y_n.$$

Тогда общее решение уравнения (4.21) имеет вид

$$C_1y_1+C_2y_2+....+C_ny_n.$$

Подставляя это выражение вместо z в формулу (4.23), получаем общее решение неоднородного уравнения (4.20):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + y^* . \qquad (4.24)$$

Действительно, равенство содержит n произвольных постоянных. Далее покажем, что из выражения (4.24) при надлежащем выборе значений постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ получится решение, удовлетворяющее любым начальным данным Коши, т.е. при $x = x_0$, где x_0 – любое значение из интервала (a, b) будем иметь:

$$y = y_0, y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – любая данная система n чисел. Последовательным дифференцированием находим:

$$\left.\begin{aligned} & y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + ... + C_n y'_n + y^{*\prime} \\ & y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + ... + C_n y''_n + y^{*\prime\prime} \\ & ... \\ & y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} + y^{*(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

В выражениях (4.24) и (4.25) надо в левых частях вместо $y, y', ..., y^{(n-1)}$ подставить соответственно $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, а в правых частях во всех функциях дать переменному x значение x_0; получится система n линейных уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, ..., C_n$. Определитель этой системы есть значение определителя Вронского $W(x)$ при $x = x_0$; при этом $W(x_0) \neq 0$, так как система $y_1, y_2, ..., y_n$, по предположению, фундаментальная. Таким образом, для $C_1, C_2, ..., C_n$ получим вполне определенные значения, и решение (4.24), действительно, является общим. Теорема доказана.

Пример 3. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + y = 3x, \ y(0) = 1, y'(0) = -1 .$$

Легко видеть, что частным решением будет $y^* = 3x$. Соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет два линейно независимых частных решения: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. В силу изложенного общее решение будет: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x$. Решим теперь задачу Коши. Имеем $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 3$. Подставляя начальные значения, находим: $C_1 = 1$, $C_2 + 3 = -1$, откуда $C_2 = -4$; искомое решение есть $y = \cos x - 4 \sin x + 3x$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) . \qquad (4.26)$$

Пусть известна фундаментальная система y_1, y_2, …, y_n соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=0. \tag{4.27}$$

Общее решение уравнения будет:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+....+C_ny_n, \tag{4.28}$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные. Выражение (4.28) удовлетворяет уравнению (4.27) и, следовательно, не может удовлетворять уравнению (4.26), пока C_i остаются постоянными. Получим решение уравнения (4.26) в той же форме (4.28), где, однако, $C_1, C_2, ..., C_n$ будут функциями независимого переменного x. Для их определения нужно иметь n уравнений, – одно из них получается из условия, что выражение (4.28) (с переменными C_i) удовлетворяет уравнению (4.26), остальные n – 1 уравнений мы можем задать произвольно; мы их будем задавать таким образом, чтобы выражения для производных от y имели наиболее простой вид.

Дифференцируем равенство (4.28) по x:

$$y'=\left(C_1y_1'+C_2y_2'+....+C_ny_n'\right)+\left(y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+....+y_n\frac{dC_n}{dx}\right)$$

и запишем результат дифференцирования в две группы слагаемых. В качестве первого из числа $n-1$ дополнительных уравнений возьмем уравнение, которое получится, если вторую группу слагаемых приравнять к нулю:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+....+y_n\frac{dC_n}{dx}=0 \tag{4.29$_1$}$$

В таком случае для y' получим выражение:

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2'+....+C_ny_n', \tag{4.30$_1$}$$

которое имеет такой же вид, как и в случае постоянных C_i.

Для нахождения y'' дифференцируем равенство (4.30$_1$) по x; в полученном результате опять приравниваем к нулю слагаемые, содержащие производные функции C_i (это будет второе добавочное уравнение):

$$y_1'\frac{dC_1}{dx}+y_2'\frac{dC_2}{dx}+....+y_n'\frac{dC_n}{dx}=0, \tag{4.29$_2$}$$

и для y'' получится выражение

$$y''=C_1y_1''+C_2y_2''+....+C_ny_n''. \tag{4.30$_2$}$$

Продолжая таким образом n – 1 раз, получим:

$$y_1^{(n-2)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-2)}\frac{dC_2}{dx}+....+y_n^{(n-2)}\frac{dC_n}{dx}=0, \tag{4.29$_{n-1}$}$$

и выражение для $y^{(n-1)}$ будет иметь вид

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} . \qquad (4.30_{n-1})$$

Вычисляем, наконец, $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \left(C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + ... + C_n y_n^{(n)}\right) + \left(y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + ... + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx}\right). \qquad (4.29_n)$$

Подставляя выражения (4.28), (4.30$_1$), …, (4.29$_n$) в уравнение (4.26), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left(y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y\right) + y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + ... + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x).$$

Замечаем, что множители C_i под знаком суммы все равны нулю, так как они являются результатами подстановки в левую часть уравнения (4.27) его решений, получаем последнее уравнение для определения C_i:

$$y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + ... + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x). \qquad (4.30_n)$$

В итоге получаем систему n неоднородных линейных уравнений (4.29$_1$), (4.29$_2$),…, (4.30$_n$) с n неизвестными $\frac{dC_i}{dx}$ (i = 1, 2, …, n).

Определитель этой линейной системы есть определитель Вронского для фундаментальной системы; он не обращается в нуль; следовательно, разрешая ее, мы получим $\frac{dC_i}{dx}$ как известные непрерывные функции от x:

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x),$$

откуда находим:

$$C_i = \int \varphi_i(x) dx + \gamma_i$$

(γ_i – новые произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C_i в выражение (4.28), получим общее решение уравнения (4.26):

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + ... + \gamma_n y_n + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x) dx.$$

Действительно, по самому его образованию это есть решение рассматриваемого уравнения; сумма членов, содержащих множители γ_i, представляет, как мы знаем, общее решение однородного уравнения (4.27), а выражение

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x) dx$$

есть частное решение неоднородного уравнения (4.26).

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \mathrm{tg}^2 x. \tag{4.31}$$

Рассмотрим соответствующее данному однородное уравнение:

$$y'' + y = 0. \tag{4.32}$$

Нетрудно заметить, что частными решениями являются функции $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$. Кроме того, они линейно независимы:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, указанные функции образуют фундаментальную систему решений, а потому общее решение однородного уравнения (4.32) имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{4.33}$$

Будем искать общее решение уравнения (4.31) в виде (4.33), считая C_1 и C_2 функциями от x. Как показано выше, эти функции определяются из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}\cos x + \dfrac{dC_2}{dx}\sin x = 0, \\ -\dfrac{dC_1}{dx}\sin x + \dfrac{dC_2}{dx}\cos x = \mathrm{tg}^2 x. \end{cases}$$

Для нахождения $\dfrac{dC_1}{dx}$ и $\dfrac{dC_2}{dx}$ воспользуемся методом Крамера:

$$\Delta = W(y_1, y_2) = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \mathrm{tg}^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \mathrm{tg}^2 x \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Откуда

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

После интегрирования получаем:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + \gamma_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx = \ln\left| \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + \gamma_2.$$

Подставив эти выражения в равенство (4.33), получим общее решение исходного уравнения (4.31):

$$y=\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x-2+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

где γ_1, γ_2 – произвольные постоянные.

4.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение, линейное однородное n-го порядка с коэффициентом при старшей производной, равным единице:

$$Ly\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (4.34)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ есть действительные числа.

Заметим, что в силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему, т.е. линейно независимых.

Постараемся выяснить, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (4.34) в тождество. Для этого нужно, чтобы по подстановке решения в левую часть уравнения там оказались подобные члены, которые в сумме могли бы дать нуль. Из дифференциального исчисления мы знаем функцию, которая подобна со всеми своими производными в смысле элементарной алгебры; этой функцией является e^{kx}, где k – постоянное. Итак, попытаемся удовлетворить нашему уравнению, полагая

$$y=e^{kx}, \qquad (4.35)$$

где k – постоянное, которое мы можем выбирать произвольно. Дифференцируя по x выражение (4.35) 1 раз, 2 раза, …, n раз, мы получим следующие функции:

$$y'=ke^{kx}, y''=k^2e^{kx},..., y^{(n-1)}=k^{n-1}e^{kx}, y^{(n)}=k^ne^{kx}. \qquad (4.36)$$

Внося выражения (4.35) и (4.36) в левую часть уравнения (4.34), получим:

$$L(e^{kx})=e^{kx}\left(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_{n-1}k+a_n\right). \qquad (4.37)$$

В равенстве (4.37), в правой части, в скобках стоит многочлен n-й степени относительно k с постоянными коэффициентами. Он называется характеристическим многочленом, соответствующим оператору L; обозначим его через $F(k)$:

$$F(k)=k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_{n-1}k+a_n.$$

В этих обозначениях равенство (4.37) кратко запишется так:

$$L(e^{kx})=e^{kx}F(k).$$

Заметим, что характеристический многочлен получается из оператора Ly, если производные различных порядков в этом последнем заменить равными степенями величины k. Если выражение (4.35) есть решение дифференциального уравнения (4.34), то выражение (4.37) должно тождественно обращаться в нуль. Но множитель $e^{kx} \neq 0$; следовательно, мы должны положить:

$$F(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (4.38)$$

Равенство (4.38) есть алгебраическое уравнение с неизвестным k. Оно называется характеристическим уравнением. Если мы в качестве постоянного k в выражении (4.35) возьмем корень k_1 характеристического уравнения (4.38), то выражение (4.37) будет тождественно равно нулю, т.е. $e^{k_1 x}$ будет являться решением дифференциального уравнения (4.34).

Характеристическое уравнение (4.38) есть уравнение n-й степени; следовательно, оно имеет n корней (действительных или комплексных, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность).

I. Пусть корни уравнения (4.38) различны:

$$k_1, k_2, ..., k_n \qquad (4.39)$$

Каждому из корней (4.39) соответствует частное решение дифференциального уравнения (4.34):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ ...,\ y_n = e^{k_n x}. \qquad (4.40)$$

Докажем, что эти решения образуют фундаментальную систему; для этого составим определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \cdots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \cdots & k_n e^{k_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \cdots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + ... + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть известный определитель Вандермонда; он равен

$$(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)...(k_1 - k_n) \cdot (k_2 - k_3)...(k_2 - k_n) \cdot ... \cdot (k_{n-1} - k_n)$$

и, следовательно, не обращается в нуль, если все корни уравнения (4.38) различны. Таким образом, система решений (4.40) является фундаментальной, и общее решение уравнения (4.34) будет:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}, \qquad (4.41)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 5.

$$y'' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение есть $k^2 - 1 = 0$. Отсюда следует, что соответствующие частные решения будут таковы: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Тогда общее решение есть $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Рассмотрим теперь случай комплексных корней. Формально выражение (4.41) до конца решает поставленную нами задачу интегрирования линейного уравнения с постоянными коэффициентами в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения. Но мы рассматриваем уравнения только с действительными коэффициентами; между тем уравнение (4.38) может допускать также комплексные корни. Заметим, что в силу того, что коэффициенты уравнения (4.38) действительны, комплексные корни входят попарно сопряженными, т.е. комплексному корню $k_1 = \alpha + \beta i$ соответствует другой корень $k_2 = \alpha - \beta i$. Если мы напишем решение $\tilde{y}_1$, соответствующее корню k_1, то оно будет иметь вид

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}. \tag{4.42}$$

Выражение (4.42) является, вообще говоря, комплексной функцией действительного переменного *x*.

Для того чтобы получить действительные частные решения уравнения (4.34), отделим в этом выражении действительную часть от мнимой по формуле Эйлера:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тогда в силу свойств линейного дифференциального оператора *L* будем иметь:

$$L\tilde{y}_1 = L(e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x) = L(e^{\alpha x}\cos\beta x) + iL(e^{\alpha x}\sin\beta x) = 0,$$

откуда $L(e^{\alpha x}\cos\beta x) = 0;\ L(e^{\alpha x}\sin\beta x) = 0,$ т.е. комплексному корню $k_1 = \alpha + \beta i$ соответствуют два действительных решения уравнения (4.34):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{4.43}$$

Причем эти решения линейно независимы.

Заметим, что сопряженному корню $k_2 = \alpha - \beta i$ соответствует комплексное решение:

$$\tilde{y}_2 = e^{(\alpha - \beta i)x},$$

которое, очевидно, может быть записано в виде

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

т.е. является (комплексной) линейной комбинацией тех же действительных решений (4.43). Таким образом, мы можем сказать, что паре сопряженных комплексных корней характеристического уравнения (4.38) соответствует два действительных частных решения уравнения (4.34) вида (4.43).

Пример 6.

$$y''' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^3+1=0$, его корни $k_1=-1$, $k_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos x\frac{\sqrt{3}}{2} + C_3\sin x\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

II. Пусть среди корней уравнения (4.38) существуют кратные.

В этом случае количество различных в ряду (4.39) чисел будет меньше n, и, соответственно, число линейно независимых частных решений вида (4.40) будет меньше n; этих решений недостаточно для получения общего решения. Для получения недостающих решений изучим выражение линейного оператора L от произведения двух функций $u\upsilon$.

По формуле Лейбница имеем:

$$(u\upsilon)^{(n)} = u^{(n)}\upsilon + C_n^1 u^{(n-1)}\upsilon' + C_n^2 u^{(n-2)}\upsilon'' + \ldots + C_n^1 u'^{(n-1)} + u\upsilon^{(n)},$$

$$(u\upsilon)^{(n-1)} = u^{(n-1)}\upsilon + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}\upsilon' + C_{n-1}^2 u^{(n-3)}\upsilon'' + \ldots + u\upsilon^{(n-1)},$$

……..

$$(u\upsilon)'' = u''\upsilon + 2u'\upsilon' + u\upsilon'',$$

$$(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon',$$

$$(u\upsilon) = u\upsilon,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Умножая первую строку на 1, вторую на a_1, …, последнюю на a_n и складывая получим:

$$L(u\upsilon) = \upsilon L[u] + \frac{\upsilon'}{1!}L_1[u] + \frac{\upsilon''}{2!}L_2[u] + \ldots + \frac{\upsilon^{(n-1)}}{(n-1)!}L_{n-1}[u] + \frac{\upsilon^{(n)}}{n!}L_n[u]. \qquad (4.44)$$

Здесь введены обозначения:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y,$$

$$L_1(y) = ny^{(n-1)} + (n-1)a_1 y^{(n-2)} + \ldots + 2a_{n-2}y' + a_{n-1}y,$$

$$L_2(y) = n(n-1)y^{(n-2)} + (n-1)(n-2)a_1 y^{(n-3)} + \ldots + 2\cdot 1\cdot a_{n-2}y, \qquad (4.45)$$

$$\ldots$$

$$L_{n-1}(y) = n(n-1)\ldots 2y' + (n-1)(n-2)\ldots 1\cdot a_1 y,$$

$$L_n(y) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot y.$$

Операторы $L_r = 1, 2, \ldots, n$ составлены из L по правилу, аналогичному правилу дифференцирования многочлена, только роль показателей играют указатели порядка производной.

Формула (4.44) применима к любому линейному оператору. Если, в частности, коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть постоянные, то каждому оператору L_r соответствует характеристический многочлен $F_r(k)$, причем легко видеть, что $F_r(k)$ есть r-я производная по k многочлена $F(k)$, соответствующего оператору L:

$$F_r(k) = F^{(r)}(k). \tag{4.46}$$

Вычислим теперь выражение (4.44), если $u = e^{kx}, \upsilon = x^m$, где m – целое неотрицательное число.

Мы получим:

$$L\left[x^m e^{kx}\right] = x^m L\left[e^{kx}\right] + \frac{m}{1} x^{m-1} L_1\left[e^{kx}\right] + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-2} L_2\left[e^{kx}\right] + \ldots + C_m^{m-1} x L_{m-1}\left[e^{kx}\right] + L_m\left[e^{kx}\right]$$

или, поскольку, в силу формулы (4.46)

$$L_r(e^{kx}) = e^{kx} F^{(r)}(k),$$

получим:

$$\begin{gathered} L\left[x^m e^{kx}\right] = \\ = e^{kx}\left\{x^m F(k) + C_m^1 x^{m-1} F'(k) + C_m^2 x^{m-2} F''(k) + \ldots + C_m^{m-1} x F^{m-1}(k) + F^m(k)\right\}. \end{gathered} \tag{4.47}$$

Пусть теперь k_1 есть корень характеристического уравнения (4.38) кратности m_1; тогда, как известно,

$$F(k_1) = 0; \quad F'(k_1) = 0; \ldots F^{(m_1-1)}(k_1) = 0; \quad F^{(m_1)}(k_1) \neq 0 .$$

Если в выражении (4.47) взять показатель m при x меньшим, чем m_1, то все члены в скобке правой части обратятся в нуль; следовательно, мы получаем m_1 частных решений дифференциального уравнения (4.34), соответствующих корню k_1:

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{k_1 x}. \tag{4.48}$$

Аналогично, если имеются другие корни характеристического уравнения, k_2 кратности $m_2, \ldots, k_p$ кратности m_p, $m_i \geq 1$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, и все k_r уже различны, то им будут соответствовать частные решения:

$$\left.\begin{array}{l} e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, x^2 e^{k_2 x}, \ldots, x^{m_2-1} e^{k_2 x}, \\ \ldots \\ e^{k_p x}, x e^{k_p x}, x^2 e^{k_p x}, \ldots, x^{m_p-1} e^{k_p x}. \end{array}\right\} \tag{4.49}$$

Совокупность решений (4.48) и (4.49) даст в общем случае кратных корней n частных решений. Остается доказать, что они линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему.

Допустим, что между этими решениями существует тождественно линейное соотношение

$$\sum_{r=1}^{p}\left(A_0^{(r)} + A_1^{(r)}x + \ldots + A_{m_r-1}^{(r)}x^{m_r-1}\right)e^{k_r x} = \sum_{r=1}^{p}P_r(x)e^{k_r x} = 0, \tag{4.50}$$

где коэффициенты $A_j^{(r)}$ – постоянные. Без ограничения общности можно предположить, что в многочлене $P_p(x)$ по крайней мере один коэффициент отличен от нуля. Разделим обе части этого соотношения на $e^{k_1 x}$:

$$P_1(x) + \sum_{r=1}^{p}P_r(x)e^{(k_r-k_1)x} = 0.$$

Дифференцируя последнее (предполагаемое) тождество m_1 раз по x, мы вместо первого многочлена получим нуль, а все многочлены, стоящие множителями при показательных функциях, заменяются новыми многочленами тех же степеней, и мы получим новое тождество:

$$\sum_{r=2}^{p}Q_r(x)e^{(k_r-k_1)x} = 0. \tag{4.51}$$

Очевидно, что $Q_p(x)$ не равно нулю тождественно. Сумма (4.51) содержит уже $p-1$ слагаемых; продолжая тот же процесс, мы придем, наконец, к тождеству

$$R_p(x)e^{(k_p-k_{p-1})x} = 0. \tag{4.52}$$

Но тождество (4.52) невозможно, так как $e^{(k_p-k_{p-1})x} \neq 0$, а многочлен $R_p(x)$, будучи той же степени, что и $P_p(x)$, имеет по крайней мере один коэффициент отличным от нуля и не тождественно равен нулю.

Доказав линейную независимость частных решений (4.48) и (4.49), мы можем написать общее решение уравнения (4.34) в случае кратных корней в виде

$$y = \sum_{r=1}^{p}G_r(x)e^{k_r x} = 0, \tag{4.53}$$

где $G_r(x)$ есть многочлен степени $m_r - 1$ с произвольными коэффициентами. Число произвольных постоянных в выражении (4.53)

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

т.е. порядку уравнения, как и должно быть.

В случае комплексных кратных корней характеристического уравнения выражение (4.53) неудобно, так как оно окажется комплексной функцией действительного переменного x. Заметим, что комплексные корни войдут попарно сопряженными с одинаковой кратностью. Если корень $k_1 = \alpha + \beta i$

$(\beta \neq 0)$ имеет кратность m_1, то сопряженный корень $k_2 = \alpha - \beta i$ имеет ту же кратность. Соответствующая корню k_1 совокупность решений (4.48) будет:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, xe^{(\alpha+\beta i)x}, ..., x^{m_1-1}e^{(\alpha+\beta i)x}.$$

Отделим в этих выражениях действительные части от мнимых и получим, таким образом, $2m_1$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{m_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{m_1-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Подобные решения могут быть построены для любого из остальных корней. Таким образом, мы всегда получим действительные решения в числе, равном порядку уравнения.

Пример 7.

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение: $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$, его корни: $k_1 = k_2 = 1, k_3 = -1$. Общее решение: $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}$.

Пример 8.

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение: $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$ или $(k^2 + 4)^2 = 0$, его корни: $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$. Общее решение: $y = (C_1 + C_2)\cos 2x +$ $+ (C_3 + C_4 x)\sin 2x$.

4.5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение вида

$$Ly = f(x). \tag{4.54}$$

Общее решение этого уравнения имеет, как известно, вид $y = \bar{y} + y^*$. Метод нахождения общего решения $\bar{y}$ однородного уравнения (4.34) указан выше. Частное решение y^* уравнения (4.54) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Однако, если правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, то y^* определяется без интегрирования, а лишь с помощью алгебраических операций.

Начнем с теоремы, относящейся к любому линейному уравнению с правой частью.

Теорема. Пусть y_1^* и y_2^* соответственно частные решения уравнений:

$$Ly = f_1(x), Ly = f_2(x).$$

Тогда функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ есть частное решение уравнения $Ly = f_1(x) + f_2(x)$. Действительно $L\left(y_1^* + y_2^*\right) = Ly_1^* + Ly_2^*$.

Но, по условию, $Ly_1^* = f_1(x)$, $Ly_2^* = f_2(x)$, откуда $L\left(y_1^* + y_2^*\right) =$ $= f_1(x) + f_2(x)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь линейное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида:

$$Ly = \sum_{r=1}^{p} P_r(x)e^{\alpha_r x},$$ где $P_r(x)$ – многочлены степени $r \geq 0$.

В силу только что доказанной теоремы достаточно уметь находить частное решение уравнения вида

$$Ly = P_m(x)e^{\alpha x}, \tag{4.55}$$

где $P_m(x) = p_m x^m + ... + p_0$ есть многочлен степени $m \geq 0$.

Рассмотрим два случая:

I. α *не является корнем характеристического уравнения* (4.38): $F(\alpha) \neq 0$. Докажем, что в этом случае существует частное решение того же вида, что и правая часть, а именно:

$$y^* = Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{4.56}$$

где $Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0$.

Рассматривая коэффициенты q_m, q_{m-1}, ..., $+q_0$ как неизвестные, покажем, что их можно определить так, чтобы выполнялось следующее тождество по x:

$$L\left(Q_m(x)e^{\alpha x}\right) = P_m(x)e^{\alpha x} \text{ или}$$

$$-e^{\alpha x}L\left(Q_m(x)e^{\alpha x}\right) = P_m(x). \tag{4.57}$$

Вычислим левую часть, применяя формулу (4.47):

$$\begin{gathered} e^{-\alpha x}L(Q_m(x)e^{\alpha x}) = \\ = q_m\{x^m F(\alpha) + C_m^1 x^{m-1}F'(\alpha) + ... + F^{(m)}(\alpha)\} + \\ +q_{m-1}\{x^{m-1}F(\alpha) + C_m^1 x^{m-2}F'(\alpha) + ... + F^{(m-1)}(\alpha)\} + ... \\ ... + q_1\{xF(\alpha) + F'(\alpha)\} + q_0 F(\alpha). \end{gathered} \tag{4.58}$$

Приравнивая выражение (4.58) многочлену $P_m(x)$ и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными q_m, q_{m-1}, ..., q_0:

$$\left.\begin{aligned}
&q_m F(\alpha) = p_m \\
&q_{m-1} F(\alpha) + q_m C_m^1 F'(\alpha) = p_{m-1} \\
&q_{m-2} F(\alpha) + q_{m-1} C_{m-1}^1 F'(\alpha) + q_m C_m^2 F''(\alpha) = p_{m-2} \\
&\ldots \\
&q_{m-r} F(\alpha) + q_{m-r+1} C_{m-r+1}^1 F'(\alpha) + \ldots + q_m C_m^r F^{(r)}(\alpha) = p_{m-r} \\
&\ldots \\
&q_0 F(\alpha) + q_1 F'(\alpha) + q_2 F''(\alpha) + q_3 F'''(\alpha) + \ldots + q_m F^{(m)}(\alpha) = p_0
\end{aligned}\right\} \quad (4.59)$$

Поскольку по условию α не является корнем характеристического уравнения, $F(\alpha) \neq 0$. Система дает возможность последовательно вычислить $q_m, q_{m-1}, \ldots, q_0$:

$$q_m = \frac{p_m}{F(\alpha)},$$

$$q_{m-1} = \frac{1}{F(\alpha)}\left(p_{m-1} - q_m C_m^1 F'(\alpha)\right) = \frac{p_{m-1}}{F(\alpha)} - C_m^1 \frac{q_m}{[F(\alpha)]^2} F'(\alpha) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, мы находим искомое частное решение (4.56) (разрешимость системы (4.59) относительно q_m, q_{m-1}, ..., q_0 можно сразу усмотреть из того, что ее определитель $\left(F(\alpha)\right)^{m+1} \neq 0$.

II. Пусть теперь α *является корнем характеристического уравнения* кратности $r \geq 1$.

Тогда $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Формула (4.47) показывает, что в этом случае $L\left(e^{\alpha x} x^m\right)$ есть произведение $e^{\alpha x}$ на многочлен степени $m - r$. Чтобы получить в результате подстановки в левую часть уравнения $e^{\alpha x}$, умноженное на многочлен степени m, естественно искать частное решение в этом случае в виде

$$y^* = x^r Q_m(x) e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\left(q_m x^{m+r} + q_{m-1} x^{m+r-1} + \ldots + q_0 x^r\right). \quad (4.60)$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.55) и требуя, чтобы (4.60) было решением уравнения, мы приходим к условию

$$e^{-\alpha x} L\left(x^r Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = P_m(x). \quad (4.61)$$

Снова вычисляем левую часть, пользуясь формулой (4,47) и помня, что $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha x} L\left(x^r Q_m(x) e^{\alpha x}\right) &= q_m \left\{x^m C_{m+r}^r F^{(r)}(\alpha) + C_{m+r}^{r+1} x^{m-1} F^{(r+1)}(\alpha) + \ldots + F^{(m+r)}(\alpha)\right\} + \\
&+ q_{m-1} \left\{C_{m+r-1}^r x^{m-1} F^{(r)}(\alpha) + C_{m+r-1}^{r+1} x^{m-2} F^{(r+1)}(\alpha) + \ldots + F^{(m+r-1)}(\alpha)\right\} + \ldots \\
&\ldots + q_1 \left\{C_{r+1}^r x F^{(r)}(\alpha) + F^{(r+1)}(\alpha)\right\} + q_0 F^{(r)}(\alpha).
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в равенство (4.61) и приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (4.61), снова получаем систему $m + 1$ уравнений для определения q_m, q_{m-1}, ..., q_0:

$$\left.\begin{array}{l} C_{m+r}^{r} q_m F^{(r)}(\alpha) = p_m \\ q_{m-1} C_{m+r-1}^{r} F^{(r)}(\alpha) + q_m C_{m+r}^{r+1} F^{(r+1)}(\alpha) = p_{m-1} \\ \ldots \\ q_{m-l} C_{m+r-1}^{r} F^{(r)}(\alpha) + q_{m-l+1} C_{m+r-l+1}^{r+1} F^{(r+1)}(\alpha) + \ldots + q_m C_{m+r}^{r+l} F^{(r+l)}(\alpha) = p_{m-l} \\ \ldots \\ q_0 F^{(r)}(\alpha) + q_1 F^{(r+1)}(\alpha) + \ldots + q_m F^{(r+m)}(\alpha) = p_0 \end{array}\right\} \quad (4.62)$$

Определитель системы (4.62):

$$C_{m+r}^{r} C_{m+r-1}^{r} \cdot \ldots \cdot C_{r}^{r} \left[F^{(r)}(\alpha)\right]^{m+1} \neq 0\,,$$

поэтому все неизвестные q_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$) определяются однозначно, и мы получаем решение вида (4.60).

Итак, мы приходим к следующему результату: частное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида $P_m(x)e^{\alpha x}$ может быть найдено в виде $x^r Q_m(x)e^{\alpha x}$, где $r \geq 0$, есть кратность корня α характеристического уравнения, Q_m есть многочлен той же степени, что P_m.

На практике для нахождения частного решения обычно записывают его в форме (4.56) или (4.60) с неопределенными коэффициентами у многочлена $Q_m(x)$. Подставляя это выражение частного решения в заданное уравнение, сокращая на $e^{\alpha x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают систему линейных уравнений для этих коэффициентов. По доказанному, эта система всегда имеет определенные решения.

Пример 9. Решить уравнение

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Согласно теореме 3 (см. стр. 76) будем искать частные решения двух уравнений: $y''' + y'' = x^2 + 1$ и $y''' + y'' = 3xe^x$. Характеристическое уравнение, очевидно, имеет вид $k^3 + k^2 = 0$, его корни: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$. Рассмотрим сначала первое уравнение; в правой части нет показательного множителя, следовательно, $\alpha = 0$; но нуль есть двукратный корень характеристического уравнения; поэтому мы, согласно изложенному выше, должны искать частное решение в виде $y_1^* = x^2 Q_2(x) = a_2x^4 + a_1x^3 + a_0x^2$. Находим:

$$y_1^{*\prime} = 4a_2x^3 + 3a_1x^2 + 2a_0x,$$

$$y_1^{*''} = 12a_2x^2 + 6a_1x + 2a_0,$$

$$y_1^{*'''} = 24a_2x + 6a_1x.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$24a_2x + 6a_1 + 12a_2x^2 + 6a_1x + 2a_0 = x^2 + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, находим систему уравнений: $12a_2 = 1$; $24a_2 + 6a_1 = 0$; $6a_1 + 2a_0 = 1$. Из нее определяем коэффициенты: $a_2 = \frac{1}{12}$; $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_0 = \frac{3}{2}$; следовательно, $Y_1 = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Переходим ко второму уравнению; здесь $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Ищем частное решение в виде $y_2^* = e^x(b_1x + b_0)$. Находим:

$$y_2^{*'} = e^x(b_1x + b_0 + b_1),$$

$$y_2^{*''} = e^x(b_1x + b_0 + 2b_1),$$

$$y_2^{*(3)} = e^x(b_1x + b_0 + 3b_1),$$

подставляя в уравнение и сокращая на e^x, получаем $b_1x + b_0 + 3b_1 +$ $+ b_1x + b_0 + 2b_1 = 3x$. Приравниваем коэффициенты: $2b_1 = 3$; $2b_0 + 5b_1 = 0$, откуда $b_1 = \frac{3}{2}$; $b_0 = -\frac{15}{4}$. Искомое частное решение: $Y_2 = e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)$. Общее решение данного уравнения:

$$y = C_1e^{-x} + C_2 + C_3x + +\frac{3}{2}x^2 + -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right),$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$Ly = e^{\alpha x}(P_{m_1}^{(1)}\cos\beta x + P_{m_2}^{(2)}\sin\beta x). \tag{4.63}$$

Поскольку $\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$, уравнение (4.63) может быть записано в виде $Ly = \frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta i)x}\left\{P_{m_1}^{(1)} - iP_{m_2}^{(2)}\right\} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-\beta i)x}\left\{P_{m_1}^{(1)} + iP_{m_2}^{(2)}\right\}$. Обозначим $m = \max\{m_1; m_2\}$. По предыдущему, мы должны искать частное решение в виде

$$e^{(\alpha+\beta i)x}Q_m^{(1)}(x) + e^{(\alpha-\beta i)x}Q_m^{(2)}(x), \tag{4.64}$$

если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения; если же $\alpha \mp i\beta$ есть корни характеристического уравнения кратности r, то выражение (4.64) должно быть умножено на x^r. Легко видеть, что из системы уравнений

(4.59) и (4.62) для определения коэффициентов многочлена $Q_m^{(1)}$ соответствующая система для $Q_m^{(2)}$ получается переходом к комплексным сопряженным значениям коэффициентов уравнений; следовательно, коэффициенты многочлена $Q_m^{(2)}$ окажутся комплексными сопряженными с соответствующими коэффициентами многочлена $Q_m^{(1)}$. Поэтому, отделяя действительную часть от мнимой, мы получим: если $Q_m^{(1)}(x) = Q_m^{*}(x) + iQ_m^{**}(x)$, то $Q_m^{(2)}(x) = Q_m^{*}(x) - iQ_m^{**}(x)$. Подставляя эти многочлены в выражение (4.64) и переходя снова от показательных функций к тригонометрическим, находим искомое частное решение:

$$y^* = e^{\alpha x}(2Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x - 2Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x).$$

Это выражение уже не содержит комплексных величин.

В случае, если $\alpha \pm i\beta$ есть корни характеристического уравнения кратности r, предыдущее выражение надо умножить на x^r.

Итак, имеем окончательно: частное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

$$f(x) = e^{\alpha x}\left\{P_{m_1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{m_2}^{(2)}(x)\sin\beta x\right\}$$

можно найти в форме $x^r e^{\alpha x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x)$, где $Q_m^{(1)}$ и $Q_m^{(2)}$ – многочлены степени $m = \max\{m_1; m_2\}$, а $r \geq 0$ есть кратность корня $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения.

На практике опять пишут многочлены $Q_m^{(1)}$ и $Q_m^{(2)}$ с неопределенными коэффициентами, подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты в обеих частях при выражениях вида $x^l\cos\beta x$ и $x^l\sin\beta x$ $(l = r, r+1, ..., r+m)$.

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$, оно имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, поэтому

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Найдем y^*. В нашем случае $f(x) = 2\cos x$. Сравним с $f(x)$ в уравнении (4.63): $\alpha = 0$; $\beta = 1$. Числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Поэтому

$$y^* = A\cos x + B\sin x.$$

Подставляя y^* в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$, получим $A=\frac{2}{5},\ B=\frac{1}{5}$, следовательно,

$$y^*=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}B\sin x.$$

Таким образом, общее решение уравнения таково:

$$y=y^*+\bar{y}=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Пример 11. Решить уравнение

$$y''+4y=\cos 2x.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2+4=0.$$

Его корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Поэтому $\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Правая часть имеет вид $f(x)=\cos 2x$, т.е. $\alpha=0, \beta=2$. Числа $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ являются простыми корнями характеристического уравнения. Поэтому

$$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Подставим y^* в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$. Получим $A=0$, $B=\frac{1}{4}$. Следовательно $y^*=\frac{1}{4}x\sin 2x$. Окончательно

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

4.6. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь некоторые типы линейных уравнений с переменными коэффициентами, которые могут быть приведены к уравнениям с постоянными коэффициентами с помощью замены независимого переменного. Отметим, что уравнение при такой замене остается линейным (подробно этот вопрос изложен в книге [1], глава V).

I. Уравнение Эйлера.

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0, \tag{4.65}$$

где a_1, a_2, …, a_n – действительные постоянные.

Пусть $x\in(0;+\infty)$. В этом случае уравнение (4.65) удовлетворяет всем условиям теоремы Коши – Пикара. Покажем, что замена независимой $x=e^t$ преобразует уравнение (4.65) в уравнение с постоянными коэффициентами.

Вычислим выражения последовательных производных от y по x через производные по t, использовав теоремы о производной сложной функции и производной обратной функции:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt};\;\; \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right);$$

мы замечаем, что выражения первой и второй производной по x содержат множители e^{-t} и e^{-2t}. Допустим, что k-я производная имеет вид

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\alpha_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\ldots+\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}$ – постоянные. Тогда производная (k + 1)-го порядка

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)=e^{-(k+1)t}\left(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^ky}{dt^k}+\ldots-k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),$$

т.е. опять множитель $e^{-(k+1)t}$ впереди, а в скобке – линейная комбинация производных от (k + 1)-го до первого порядка с постоянными коэффициентами. Итак, это свойство доказано для всякого натурального k. Когда мы будем вычисленные нами производные подставлять в уравнение (4.65), нам придется при всяком k умножать $\frac{d^ky}{dx^k}$ на $a_kx^k=a_ke^{kt}$; при этом показательные множители, содержащие t, сократятся, и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример 12.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Замена переменного $x=e^t$ дает $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0$; характеристическое уравнение $k^2+2k+1=0$ имеет равные корни $k_1=k_2=-1$. Общее решение в функции от t:

$$y=e^{-t}(C_1+C_2t),$$

а в функции от x:

$$y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x).$$

Заметим, что в преобразовании уравнения, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, частные решения имеют вид: $e^{kt}=(e^t)^k$; следовательно, в исходном уравнении они имеют вид x^k. Поэтому можно непосредственно задаться этим видом частного решения и подставить его в уравнение (4.65). При этом

$$x^m \frac{d^m\left(x^k\right)}{dx^m} = k(k-1)...(k-m+1)x^k,\ m \le k,$$

внося эти выражения в уравнение (4.65), после сокращения на x^k, получим алгебраическое уравнение n-й степени для определения k:

$$k(k-1)...(k-n+1) + a_1 k(k-1)...(k-n+2) + ... + a_{n-2}k(k-1) + a_{n-1}k + a_n = 0\,. \quad (4.66)$$

Из предыдущих рассуждений очевидно, что уравнение (4.66) совпадает с характеристическим уравнением для дифференциального уравнения в переменном t. Каждому действительному простому корню k уравнения (4.66) соответствует частное решение x^k уравнения (4.65), двойному корню соответствуют два решения x^k и $x^k\ln x$, …, корню кратности r соответствуют r решений x^k, $x^k\ln x$, $x^k(\ln x)^2$, …, $x^k(\ln x)^{r-1}$. Паре простых сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ уравнения (4.66) будут, таким образом, соответствовать два решения уравнения (4.65): $y = x^\alpha\cos(\beta\ln x)$ и $y = x^\alpha\sin(\beta\ln x)$. Если корни $\alpha \pm i\beta$ имеют кратность r, то уравнение (4.65) будет иметь частные решения: $x^\alpha\cos(\beta\ln x)$, $x^\alpha\sin(\beta\ln x)$, …, $x^\alpha(\ln x)^{r-1}\cos(\beta\ln x)$, $x^\alpha\sin(\beta\ln x)$, $x^\alpha(\ln x)\sin(\beta\ln x)$, …, $x^\alpha(\ln x)^{r-1}\sin(\beta\ln x)$.

Пример 13.

$$x^2y'' + 3xy' + 5y = 0.$$

Разыскивая частное решение в форме $y = x^k$, приходим к квадратному уравнению для k: $k(k-1) + 3k + 5 = 0$, или $k^2 + 2k + 5 = 0$. Отсюда $k = -1 \pm 2i$. Общее решение $y = \dfrac{1}{x}\left(C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x)\right)$.

Замечание 1. Уравнение (4.65) можно рассматривать и для $x \in (-\infty;0)$. В этом случае необходимо сделать замену независимой переменной $x = -e^t$.

Замечание 2. Подобно тому как для линейных уравнений с постоянными коэффициентами можно найти частное решение в случае правой части специального вида $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, так и для уравнения Эйлера такое нахождение возможно, если правая часть имеет вид $f(x) = x^\alpha P_n(\ln x)$.

Пример 14. Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3,\ x > 0\,. \quad (4.67)$$

Структура общего решения (как и для всякого линейного уравнения) имеет вид $y = \bar{y} + y^*$. Найдем общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения:

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k(k-1)(k-2)-k(k-1)+2k-2=0 \text{ или}$$

$$(k-1)(k^2-3k+2)=0, \tag{4.68}$$

откуда $k_1=k_2=1, k_3=2$. Тогда $\bar{y}=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2$.

Найдем частное решение y^* уравнения (4.67). Для этого перепишем уравнение (4.68) в виде

$$k^3-4k^2+5k-2=0.$$

По этому уравнению составим левую часть уравнения с постоянными коэффициентами, а правую часть получим из правой части уравнения (4.67) заменой $x=e^t$:

$$\dddot{y}-4\ddot{y}+5\dot{y}-2y=e^{3t}. \tag{4.69}$$

Поскольку $\alpha=3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4.69) ищем в виде $\tilde{y}^*(t)=Ae^{3t}$. Подставляя в уравнение (4.69), находим $A=\dfrac{1}{4}$, следовательно, $\tilde{y}^*(t)=\dfrac{1}{4}e^{3t}$, а частное решение уравнения (4.67) $y^*(t)=\dfrac{1}{4}x^3$. Таким образом, общее решение уравнения (4.67) имеет вид

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3.$$

II. Уравнение Лагранжа.

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=0, \tag{4.70}$$

где a, b, a_1, a_2, …, a_n – действительные постоянные.

Как и в случае уравнения Эйлера, замена независимой переменной $ax+b=e^t$ ($ax+b>0$) приводит уравнение (4.70) к уравнению с постоянными коэффициентами, а потому частное решение уравнения (4.70) следует искать в виде $y=(ax+b)^k$.

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$(x+1)^2y''-2(x+1)y'+2y=0, x>-1.$$

Будем искать частные решения в виде $y=(x+1)^k$. Подставим эту функцию в исходное уравнение:

$$(x+1)^2k(k-1)(x+1)^{k-2}-2(x+1)k(x+1)^{k-1}+2(x+1)^k=0.$$

Разделив обе части на $(x+1)^k$, получим характеристическое уравнение $k(k-1)-2k+2=0$ или, откуда $k_1=1$, $k_2=2$.

Следовательно, общее решение $(k-1)(k-2)=0$ есть

$$y=C_1(x+1)+C_2(x+1)^2.$$

III. Уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0,$$

где n – действительное число.

Пусть $x\in(-1;1)$. Сделаем замену независимого переменного $x=\cos t$. Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

Его общее решение, очевидно, имеет вид

$$y(t)=C_1\cos nt+C_2\sin nt.$$

Возвращаясь к переменной x, находим общее решение исходного уравнения:

$$y(t)=C_1\cos(n\arccos x)+C_2\sin(n\arccos x).$$

Замечание. В случае $x\in(1;+\infty)$ производится замена $x=\mathrm{ch}\,t$, а если $x\in(-\infty;1)$, то $x=-\mathrm{ch}\,t$. В итоге получаем уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0.$$

Глава 5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из n дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, ..., y_n), \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Рассмотрим также начальные условия:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y_n^0. \tag{5.2}$$

Ранее было показано, что если функции $f_k(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области D, содержащей точку $(x, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$, и удовлетворяют в этой области условию Липшица по аргументам $y_1, y_2, ..., y_n$, то задача Коши (5.1), (5.2) имеет единственное решение, определенное для $x \in \in [x_0 - h; x_0 + h]$ (теорема Коши – Пикара).

Дадим теперь определение общего решения системы (5.1).

Определение. Общим решением системы (5.1) называется совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ ... \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{cases} \tag{5.3}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) функции (5.3) удовлетворяют системе (5.1) при любых константах C_1, C_2, …, C_n;

2) каковы бы ни были начальные условия (5.2), можно единственным образом определить $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$ так, что функции (5.3) при таких константах будут удовлетворять этим начальным условиям (5.2).

При этом предполагается, что точка $(x, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$, где выполняются условия теоремы Коши – Пикара.

Частным случаем системы (5.1) является одно уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Как показано выше, введением новых функций:

$$y_1 = y', \; y_2 = y'', ..., \; y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

оно заменится следующей системой n уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y_1,\frac{dy_1}{dx}=y_2,...,\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}\\&\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x,y,y_1,y_2,...,y_{n-1})\end{aligned}\right\}$$

Покажем, что и обратно, нормальная система n уравнений первого порядка (5.1) эквивалентна одному уравнению порядка n.

5.1. Метод исключения неизвестных

Продифференцируем первое из уравнений (5.1) по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменив $\frac{dy_k}{dx}$ через их выражения $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

т.е. выражение вида

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n). \qquad (5.4_2)$$

Полученное уравнение (5.4_2) снова дифференцируем по x; принимая во внимание уравнения (5.1), получим:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}f_2+...+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n,$$

или

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n). \qquad (5.4_3)$$

Продолжая этот процесс, получим далее

$$\frac{d^4y_1}{dx^4}=F_4(x,y_1,y_2,...,y_n) \qquad (5.4_4)$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=F_{n-1}(x,y_1,y_2,...,y_n), \qquad (5.4_{n-1})$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n). \qquad (5.4_n)$$

Предположим, что из системы (A) $n-1$ уравнений, составленной из первого уравнения системы (5.1) и из (5.4_2), (5.4_3), …, (5.4_{n-1}), можно определить $n-1$ величин $y_2, y_3, ..., y_n$ через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$: внося эти выражения в (5.4_n), мы получим уравнение вида:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \right), \tag{5.5}$$

т.е. одно уравнение n-го порядка. Из самого способа его получения следует, что если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ представляют решение системы (5.1), то y_1 удовлетворяет уравнению (5.5). Обратно, если мы имеем решение $y_1(x)$ уравнения (5.5), то, дифференцируя это решение, мы вычислим $\frac{dy_1}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$. Подставим значения, как известные функции от x, в систему (A); мы, по предположению, можем разрешить эту систему относительно $y_2, y_3, ..., y_n$, т.е. получить выражения $y_2, y_3, ..., y_n$ как функции от x. Остается показать, что функции $y_1, y_2, ..., y_n$ удовлетворяют системе (5.1).

Действительно, условие разрешимости системы (A) относительно $y_2, y_3, ..., y_n$ состоит в том, что якобиан $\frac{D(f_1, F_2, ..., F_{n-1})}{D(y_2, y_3, ..., y_n)}$ отличен от нуля при рассматриваемых значениях $y_2, y_3, ..., y_n$. В наших предположениях функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ обращают в тождества все уравнения системы (A); в частности, имеем тождество $\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Дифференцируя это тождество по x, получаем: $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$, но в силу (5.4_2) имеем тождество

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n.$$

Вычитая одно тождество из другого, находим:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0.$$

Аналогично, дифференцируя тождество (5.4_2) по x и вычитая из полученного результата тождество (5.4_3), получим:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0$$

и т.д., наконец,

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1 \right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2 \right) + ... + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n \right) = 0.$$

Замечая, что в силу тождества $\frac{dy_1}{dx} = f_1$ первые члены всех равенств исчезают, и рассматривая оставшиеся равенства как систему $n - 1$ уравнений с $n - 1$ неизвестными $\frac{dy_k}{dx} - f_k$, заключаем (так как по условию определитель системы не равен нулю), что имеют место тождества $\frac{dy_2}{dx} = f_2, ..., \frac{dy_n}{dx} = f_n$, т.е. $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ действительно решения системы (5.1).

Таким образом, при сделанных предположениях интегрирование одного уравнения n-го порядка (5.5) дает возможность путем дифференцирований и разрешений найти решение системы (5.1).

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; используя второе, находим: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, откуда $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; далее из первого уравнения

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Пример 2. Проинтегрировать систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + \sin t, \\ \dot{y} = \frac{x}{2y}. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение: $\ddot{x} = 2y\dot{y} + \cos t$. Заменяя $\dot{y}$ из второго уравнения, получаем $\ddot{x} = x + \cos t$. Найдем $\bar{x} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, а $x^* = -\frac{1}{2}\cos t$. Следовательно, $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$. Из первого уравнения:

$$y^2 = \dot{x} - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

5.2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из n линейных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j = f_i(x), \qquad (5.6)$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ $a_{ij}(x), f_i(x)$ – непрерывные функции. Если не все $f_i(x)$ тождественно равны нулю, то линейная система (5.6) называется неоднородной; если же все $f_i(x) \equiv 0$, то система

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j = 0 \qquad (5.7)$$

называется линейной однородной, соответствующей системе (5.6).

В указанных предположениях соответствующая задача Коши для системы (5.6) (а следовательно, и для системы (5.7)) имеет единственное решение, поскольку выполнены, очевидно, все условия теоремы Коши – Пикара (в области непрерывности функций $a_{ij}(x), f_i(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Свойства линейных однородных систем

Теорема 1. Если совокупность функций $y_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, есть частное решение системы (5.7), то совокупность функций $Cy_k^{(1)}$ (где C – произвольная постоянная) – также частное решение системы.

Теорема 2. Если $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, есть два частных решения системы (5.7), то $y_k^{(1)} + y_k^{(2)}$ – также частное решение системы (5.7).

Справедливость этих теорем следует из основных правил дифференцирования.

Рассмотрим n частных решений системы (5.7):

$$y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.8)$$

Определение. Система функций (5.8) называется линейно независимой на (a; b), если система тождеств

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_i^{(k)} = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.9)$$

(где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – постоянные числа) имеет место на (a; b) лишь в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

В противном случае система (3) называется линейно зависимой на (a; b).

Определение. Определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского функций (5.8).

Теорема 3. Если система функций вида (5.8) линейно независима на (a; b), то $W(x)\equiv 0$ на (a; b).

Доказательство. Рассмотрим равенства (5.9) как систему из n алгебраических уравнений с n неизвестными $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. В силу линейной зависимости функций (5.8) среди чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ найдутся отличные от нуля, а потому определитель системы (5.9) будет равен нулю для каждого $x\in(a;b)$. Следовательно, $W(x)\equiv 0$ на (a; b).

Теорема 4. Если частные решения системы (5.7) функции (5.8) линейно независимы на (a; b), то $W(x)\neq 0$, для каждого $x\in(a;b)$.

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что существует точка $x_0\in(a;b)$ такая, что $W(x_0)=0$. Тогда система (5.9) при $x=x_0$ имеет решение $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\dots,\overline{\alpha}_n$, причем среди чисел $\overline{\alpha}_k$ есть отличные от нуля.

Рассмотрим функцию

$$\overline{y}_i=\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k y_i^{(k)},\ i=1,2,\dots,n. \qquad (5.10)$$

Функция (5.10), очевидно, является решением системы (5.7) и согласно равенствам (5.9) удовлетворяет начальным условиям $\overline{y}_i(x_0)=0$, i = 1, 2, …, n.

В силу теоремы Коши – Пикара система (5.7) имеет только одно решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Тривиальное решение $y_i\equiv 0$, i = 1, 2, …, n, как раз этим условиям удовлетворяет, а потому решение $\overline{y}_i$, i = 1, 2, …, n, совпадает с тривиальным, и из равенств (5.10) следует

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k y_i^{(k)}\equiv 0,\ i=1,2,\dots,n.$$

Следовательно, система функций (5.8) линейно зависима, что противоречит условию. Таким образом, $W(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$.

Теорема 5. Если $W(x_0)\neq 0$ для некоторого $x_0\in(a;b)$, то $W(x)\neq 0$ для любого $x\in(a;b)$.

Для доказательства вычислим производную $W'(x)$, дифференцируя по столбцам:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} \dfrac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \dfrac{dy_1^{(2)}}{dx} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & \dfrac{dy_2^{(1)}}{dx} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & \dfrac{dy_2^{(2)}}{dx} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dfrac{dy_2^{(n)}}{dx} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & \dfrac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & \dfrac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & \dfrac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Заменив в каждом определителе в правой части производные $\dfrac{dy_i^{(k)}}{dx}$ их выражениями из системы (5.7), мы получим, например, для первого слагаемого:

$$-a_{11}\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} y_2^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - \dots$$

$$\dots - a_{1n}\begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_{11}W(x),$$

так как определители, кроме первого, имеют по два равных столбца. Аналогично, второе слагаемое дает $a_{22}W(x)$ …, n-е слагаемое – $a_{nn}W(x)$.

Таким образом,

$$W'(x)=-\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right)W(x), \text{ или } \frac{dW}{W}=-\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right)dx.$$

Кроме того, $W(x_0)=W_0$. Решив эту задачу Коши, получим формулу Остроградского – Лиувилля:

$$W(x)=W_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right)dt}.$$

Из этой формулы и следует, что если $W(x_0)\neq 0$, то $W(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$.

Определение. Любая система вида (5.8) из n линейно независимых частных решений системы (5.7) называется фундаментальной системой решений системы (5.7).

Теорема 6. Если функции (5.8) образуют фундаментальную систему решений системы (5.7), то общее решение системы (5.7) имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.11}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство проводится по определению общего решения системы дифференциальных уравнений.

Замечание. Как и в случае уравнения *n*-го порядка фундаментальная система решений (5.8) однозначно определяет линейную однородную систему (5.7). Если задана линейно независимая система решений (5.8), то задача построения системы однородных линейных уравнений разрешается следующими формулами:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{dy_i}{dx} & \dfrac{dy_i^{(1)}}{dx} & \dfrac{dy_i^{(2)}}{dx} & \ldots & \dfrac{dy_i^{(n)}}{dx} \\ y_1 & y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots, n).$$

Заметим, что коэффициентом при производных $\dfrac{dy_i}{dx}$ является определитель Вронского $W(x)$. Если $W(x)$ не обращается в нуль в интервале $(a; b)$, то, деля на $W(x)$, получаем линейную систему уравнений в нормальной форме.

Пример 3. Найти линейную однородную систему двух уравнений, допускающую следующую систему решений:

$$y_1^{(1)} = e^x \cos x, \quad y_2^{(1)} = e^x \sin x,$$
$$y_1^{(2)} = -\sin x, \quad y_2^{(2)} = \cos x.$$

Искомые уравнения будут:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} & e^x(\cos x - \sin x) & -\cos x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{dy_2}{dx} & e^x(\cos x + \sin x) & -\sin x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

или, развертывая определители по первому столбцу и деля оба уравнения на $W(x) = e^x$, получаем искомую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - \cos^2 x \cdot y_1 + (1 - \sin x \cdot \cos x) y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dx} - (1 + \sin x \cdot \cos x) y_1 - \sin^2 x \cdot y_2 = 0. \end{cases}$$

Системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j = f_i(x), \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.12)$$

Теорема. Если функции (5.8) являются фундаментальной системой решений однородной системы (5.7), а y_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть какое-нибудь частное решение неоднородной системы (5.12), то общее решение системы (5.12) имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)} + y_i^*, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство проводится по определению общего решения системы дифференциальных уравнений.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Снова рассмотрим неоднородную систему (5.12). Пусть функции (5.8) есть фундаментальная система решений однородной системы (5.7), соответствующей системе (5.12). Тогда общее решение системы (5.7) согласно теореме 6 имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.13)$$

Будем рассматривать C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, как неизвестные функции от x. Подберем $C_k(x)$ таким образом, чтобы функции (5.13) являлись решением неоднородной системы (5.12). Для этого продифференцируем равенства (5.13) по x:

$$\frac{dy_i}{dx} = C_1 \frac{dy_i^{(1)}}{dx} + C_2 \frac{dy_i^{(2)}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_i^{(n)}}{dx} + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_i^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx}, \qquad (5.14)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставим выражения (5.13) и (5.14) в систему (5.12). Первые строки правых частей формул (5.14) имеют такой вид, как если бы C_I были постоянными; поскольку $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$ представляют решения однородной системы, то при подстановке эти члены дадут нули; действительно, в результате подстановки в i-е уравнение системы (5.12) получим:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx} + a_{i1}\sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)} + a_{i2}\sum_{k=1}^{n} C_k y_2^{(k)} \ldots + a_{in}\sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)} = f_i(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{dy_i^{(k)}}{dx} + a_{i1}y_1^{(k)} + a_{i2}y_2^{(k)} + \ldots + a_{in}y_n^{(k)} \right) + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = f_i(x),$$

и для определения $\frac{dC_k}{dx}$ получаем линейную систему:

$$\sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = f_i(x), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Определитель системы (5.15) есть $W(x)$, причем $W(x) \neq 0$ в силу теоремы 4. Следовательно, система (5.15) имеет единственное решение $\frac{dC_k}{dx} = \varphi_k(x)$ $k = 1, 2, \ldots, n$, откуда

$$C_k = \int \varphi_k(x)dx + \gamma_k, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

(γ_k – произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C_k в формулы (5.13), получаем общее решение системы (5.12) в виде

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_k y_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)} \int \varphi_k(x)dx, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx} - z = \cos x, \quad \frac{dz}{dx} + y = 1.$$

В примере 1 мы нашли общее решение соответствующей однородной системы: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Подставляем эти значения в данные уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями x. После приведения получим следующую систему:

$$\frac{dC_1}{dx}\cos x + \frac{dC_2}{dx}\sin x = \cos x,$$

$$-\frac{dC_1}{dx}\sin x + \frac{dC_2}{dx}\cos x = 1,$$

откуда, разрешая относительно $\frac{dC_1}{dx}$ и $\frac{dC_2}{dx}$ и затем интегрируя, находим:

$$\frac{dC_1}{dx} = \cos^2 x - \sin x, \; C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cos x + \cos x + \gamma_1,$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \sin x \cos x + \cos x, \; C_2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \sin x + \gamma_2$$

(γ_1 и γ_2 – произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в выражения для y и z, получаем общее решение заданной неоднородной системы:

$$y = \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin x + \frac{x}{2}\cos x + 1,$$

$$z = -\gamma_1 \sin x + \gamma_2 \cos x - \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

5.3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0,\ i = 1, 2, ..., n, \tag{5.16}$$

в которой будем предполагать коэффициенты a_{ij} постоянными. Если систему (5.16) привести к однородному уравнению высшего порядка, то, как легко видеть, получится линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому естественно искать решения системы (5.16) в виде показательных функций. Будем искать частное решение в таком виде:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x},\quad ...,\quad y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{5.17}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ и λ – постоянные, которые нужно определить так, чтобы выражения (5.17) удовлетворяли системы (5.16). Подставляя в систему (5.16) функции (5.17), сокращая на $e^{\lambda x}$ и собирая коэффициенты при $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}+\lambda)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ .... \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn}+\lambda)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} \tag{5.18}$$

Рассматривая (5.18) как систему n линейных однородных уравнений относительно $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, мы замечаем, что для получения нетривиального решения (5.17) мы должны потребовать равенства нулю определителя системы (5.18), т.е. мы приходим к уравнению:

$$\Delta\lambda \equiv \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.19}$$

Наряду с определителем $\Delta\lambda$ нам в дальнейшем придется часто рассматривать матрицу $M(\lambda)$, составленную из тех же элементов:

$$M(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{bmatrix}.$$

Придавая переменному λ значение λ_0, мы получаем матрицу $M(\lambda_0)$.

Уравнение (5.19) есть уравнение n-й степени относительно λ; мы будем называть его характеристическим уравнением. Итак, решение вида (5.17) системы (5.19) может существовать только в том случае, когда λ есть корень характеристического уравнения. Могут представиться два случая:

I. Все *n* корней характеристического уравнения различны.

Пусть эти корни будут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Если один из этих корней λ_j подставить в $\Delta(\lambda)$, то мы получим $\Delta(\lambda_j) = 0$. Покажем, что по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка определителя $\Delta\lambda$ отличен от нуля при $\lambda = \lambda_j$. Действительно, поскольку λ_j есть простой корень уравнения (5.19), то $\left[\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \Delta'(\lambda_j) \neq 0$. Вычислим $\Delta'(\lambda)$:

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}+\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1}+\lambda \end{vmatrix}$$

(в правой части стоит сумма диагональных миноров $(n-1)$-го порядка).

Подставляя вместо λ значение λ_j и вспоминая, что $\Delta'(\lambda_j) \neq 0$, мы получаем в результате, что по крайней мере один из входящих в последнюю сумму диагональных миноров $(n-1)$-го порядка не равен нулю при $\lambda = \lambda_j$. Наше утверждение доказано.

Возвращаемся к системе (5.18), в которой вместо λ подставим λ_j – один из корней характеристического уравнения. Определитель системы равен нулю; следовательно, система имеет отличные от нуля решения $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$. Но по доказанному выше ранг матрицы $M(\lambda_j)$ коэффициентов системы (5.18) равен $(n-1)$; следовательно, неизвестные $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$ определяются с точностью до произвольного множителя пропорциональности (в качестве $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, ..., \gamma_n^{(j)}$ можно взять миноры любой строки определителя $\Delta(\lambda_j)$, для которой они не все равны нулю).

Итак, мы получим (обозначая этот множитель через C_j):

$$\gamma_1^{(j)} = C_j k_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)} = C_j k_2^{(j)}, ..., \gamma_n^{(j)} = C_j k_n^{(j)},$$

где $k_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ известные числа. Итак, корню $\lambda = \lambda_j$ соответствует частное решение системы (5.16) (мы полагаем $C_j = 1$):

$$\gamma_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda j x}, \gamma_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda j x}, ..., \gamma_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda j x}. \tag{5.20}$$

Ясно значение множителя C_j: мы знаем, что если систему частных решений помножить на одно и то же произвольное постоянное, то получим опять решение системы однородных линейных уравнений. Применяя приведенные рассуждения ко всем корням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения, мы получим n частных решений вида (5.20) для $j = 1, 2, \ldots, n$.

После этого мы можем написать общее решение системы (5.16) в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - 2y_1 - 2y_2 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 - 3y_2 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 \\ -1 & -3+\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или } \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Составим систему (5.18) для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} -\gamma_1^{(1)} - 2\gamma_2^{(1)} = 0, \\ -\gamma_1^{(1)} - 2\gamma_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Эта система, очевидно, сводится к одному уравнению $-\gamma_1^{(1)} - 2\gamma_2^{(1)} = 0$. Пусть $\gamma_2^{(1)} = 1$, тогда $\gamma_1^{(1)} = -2$, и, следовательно, $y_1^{(1)} = -2e^x, y_2^{(1)} = e^x$.

Аналогично для $\lambda_2 = 4$ получаем из системы (5.18) одно уравнение $-\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} = 0$. Полагая $\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(2)} = 1$, получим $y_1^{(2)} = e^{4x}, y_2^{(2)} = e^{4x}$.

Таким образом, общее решение системы таково:

$$\begin{cases} y_1 = -2C_1e^x + C_2e^{4x}, \\ y_2 = C_1e^x + C_2e^{4x}. \end{cases}$$

Если среди корней характеристического уравнения (5.19) имеются комплексные сопряженные

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

то соответствующие решения будут иметь вид

$$y_j^{(1)} = k_j^{(1)} e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_j^{(2)} = k_j^{(2)} e^{(\alpha-\beta i)x}, \ j = 1, 2, ..., n.$$

Коэффициенты $k_j^{(1)}, k_j^{(2)}$ тоже окажутся комплексными сопряженными, если взять их равными минорам одной и той же строки определителей $\Delta(\alpha+\beta i), \Delta(\alpha-\beta i)$. Легко убедится в том, что корням $\lambda = \alpha \pm \beta i$ будут соответствовать две системы решений, соответствующих действительной и мнимой части $y_j^{(1)}, y_j^{(2)}$, вида

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \cos\beta x - l_j^{(2)} \sin\beta x), \quad \tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \cos\beta x + l_j^{(2)} \sin\beta x),$$

где $l_j^{(1)}, l_j^{(2)}$ – действительные числа, определяемые из равенств

$$k_j^{(1)} = l_j^{(1)} + il_j^{(2)}, \quad k_j^{(2)} = l_j^{(1)} - il_j^{(2)}.$$

Пример 6.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 7y - z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x}$; подставляя в заданную систему, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \gamma_1(\lambda + 7) - \gamma_2 = 0, \\ 2\gamma_1(\lambda + 7) - \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Условие их совместности дает характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda+7 & -1 \\ 2 & 5+\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -6 + i, \lambda_2 = -6 - i$. Подставляя первый из этих корней в систему для определения γ_1, γ_2, получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \gamma_1(1+i) - \gamma_2 = 0, \\ 2\gamma_1 + (-1+i)\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

из которых одно является следствием другого. Мы можем взять $k_1^{(1)}=1, k_2^{(1)}=1+i$. Первая система частных решений есть

$$y_1^{(1)}=e^{(-6+i)x}, y_2^{(1)}=(1+i)e^{(-6+i)x}.$$

Рассматривая в качестве новой фундаментальной системы решения

$$\tilde{y}_i^{(1)}=\frac{y_i^{(1)}+y_i^{(2)}}{2}, \quad \tilde{y}_i^{(2)}=\frac{y_i^{(1)}-y_i^{(2)}}{2} \quad (i=1,2),$$

находим:

$$\tilde{y}_1^{(1)}=e^{-6x}\cos x, \quad \tilde{y}_1^{(2)}=e^{-6x}\sin x,$$

$$\tilde{y}_2^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x), \quad \tilde{y}_2^{(2)}=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

Общим решением будет:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ y_2 = e^{-6x}\big((C_1+C_2)\cos x + (C_2-C_1)\sin x\big). \end{cases}$$

II. Среди корней уравнения (5.19) есть кратные.

Пусть λ_1 есть m-кратный корень характеристического уравнения. В таком случае значение m-й производной от $\Delta(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ $\Delta^{(m)}(\lambda_1)\neq 0$, и рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что среди миноров порядка $n-m$ определителя $\Delta(\lambda)$ по крайней мере один отличен от нуля при $\lambda=\lambda_1$. Отсюда следует, что для ранга r матрицы $M(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ имеет место равенство $r \geq n-m$. Система линейных алгебраических уравнений (5.18) сводится к r независимым уравнениям. Из теории линейных уравнений известно, что в этом случае в общем решении системы $n-r$ неизвестных остаются произвольными; пусть это будут $\gamma_1=C_1, \gamma_2=C_2, ..., \gamma_{n-r}=C_{n-r}$; остальные r неизвестных $\gamma_{n-r+1}, \gamma_{n-r+2}, ...\gamma_n$ выразятся в виде линейных форм относительно $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$; пусть эти выражения будут:

$$\gamma_j=k_j^{(1)}C_1+k_j^{(2)}C_2+...+k_j^{(n-r)}C_{n-r}$$

$$(j=n-r+1, n-r+2, ..., n).$$

Мы получим такую систему решений, зависящую от $n-r$ произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$:

$$y_1=C_1e^{\lambda_1 x}, \quad y_2=C_2e^{\lambda_1 x}, \quad ..., \quad y_{n-r}=C_{n-r}e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{n-r+1}=(k_{n-r+1}^{(1)}C_1+k_{n-r+1}^{(2)}C_2+...+k_{n-r+1}^{(n-r)}C_{n-r})e^{\lambda_1 x},$$

$$\dots$$

$$y_n=(k_n^{(1)}C_1+k_n^{(2)}C_2+...+k_n^{(n-r)}C_{n-r})e^{\lambda_1 x}.$$

Таким образом, одному корню $\lambda = \lambda_1$ кратности m соответствует $n - r \le m$ частных решений, которые мы получаем, полагая $C_i = 1$ для $i = 1, 2, ..., n - r,$ а все прочие $C_j = 0$ при $j \ne i$:

$$\begin{cases} y_1^{(1)} = e^{\lambda_1 x}, y_2^{(1)} = 0, ..., y_{n-r}^{(1)} = 0, \\ y_{n-r+1}^{(1)} = k_{n-r+1}^{(1)} e^{\lambda_1 x}, ..., y_n^{(1)} = k_n^{(1)} e^{\lambda_1 x}, \\ y_1^{(2)} = 0, y_2^{(2)} = e^{\lambda_1 x}, ..., y_{n-r}^{(2)} = 0, \\ y_{n-r+1}^{(2)} = k_{n-r+1}^{(2)} e^{\lambda_1 x}, ..., y_n^{(2)} = k_n^{(2)} e^{\lambda_1 x}, \\ ... \\ y_1^{(n-r)} = 0, y_2^{(n-r)} = 0, ..., y_{n-r}^{(n-r)} = e^{\lambda_1 x}, \\ y_{n-r+1}^{(n-r)} = k_{n-r+1}^{(n-r)} e^{\lambda_1 x}, ..., y_n^{(n-r)} = k_n^{(n-r)} e^{\lambda_1 x}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Матрица из коэффициентов при $e^{\lambda_1 x}$ в правых частях этих равенств имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & k_{n-r+1}^{(1)} & ... & k_n^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & k_{n-r+1}^{(2)} & ... & k_n^{(2)} \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & k_{n-r+1}^{(n-r)} & ... & k_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Ее ранг, очевидно, равен $n - r$, т.е. между строками системы (5.21) нет линейной зависимости; значит, мы получили систему $n - r$ линейно независимых решений, соответствующих корню $\lambda = \lambda_1$. Если $r = n - m$, т.е. если ранг матрицы $M(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_1$, имеет наименьшее значение, то полученное число решений равно кратности m корня λ_1, и, таким образом, найдены все решения, соответствующие этому корню (если $m = 1$, то $r = n - 1$, $n - r = 1$, и мы возвращаемся к случаю простого корня λ_1, которому соответствует одно решение системы).

Если ранг r матрицы $M(\lambda_1)$ больше $n - m$, то число $n - r$ полученных указанным способом решений будет меньше кратности m корня λ_1, и потому решение, соответствующее этому корню, следует искать в виде

$$\tilde{y}_i = P_{m-n+r}^{(i)}(x) e^{\lambda_1 x}, \; i = 1, 2, ..., n. \tag{5.22}$$

Подставив функции (5.22) в систему (5.16), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов указанных многочленов. Найдем общее решение полученной алгебраической системы. При этом коэффициенты как решение алгебраической системы будут зависеть от m произвольных постоянных.

Пример 7. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Ищем решения в форме $x = k_1 e^{\lambda t}$, $y = k_2 e^{\lambda t}$, $z = k_3 e^{\lambda t}$. Для определения k_1, k_2, k_3 имеем три уравнения:

$$\begin{cases} \lambda k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ -k_1 + \lambda k_2 - k_3 = 0, \\ -k_1 - k_2 + \lambda k_3 = 0. \end{cases}$$

Приравнивая их определитель к нулю, получаем:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2.$$

Корни последнего уравнения есть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Простому корню $\lambda_1 = 2$ соответствует система двух независимых уравнений, например:

$$\begin{cases} 2k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ -k_1 + 2k_2 - k_3 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$k_1 : k_2 : k_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1:1:1.$$

Отсюда получаем первую систему решений, содержащую одно произвольное постоянное:

$$x = C_1 e^{2t},\ y = C_1 e^{2t},\ z = C_1 e^{2t}.$$

Если в матрицу $M(\lambda)$ вставить $\lambda = -1$, то ее ранг окажется равным 1, и три уравнения для определения k_1, k_2, k_3 сведутся к одному:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Если мы положим $k_1 = C_2, k_2 = C_3$, то $k_3 = -(C_2 + C_3)$, и мы получим еще систему решений с двумя произвольными постоянными.

Общим решением будет:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \quad z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}.$$

Мы получим фундаментальную систему решений, так как определитель

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Пример 8. Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + y - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} + 4z - x = 0. \end{cases}$$

Уравнение (5.19) имеет вид

$$0 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2.$$

Решение, соответствующие простому корню $\lambda = 0$, пишем в виде $x = a, y = b, z = c.$ Вставляя эти значения в данную систему, получаем для определения а, b, c три уравнения, которые, согласно общей теории, сводятся к двум независимым, например к уравнениям:

$$a - b = 0,$$

$$b - 4c = 0.$$

Полагая $c = C_1$ (произвольному постоянному), находим систему решений, соответствующую корню $\lambda = 0$:

$$x = 4C_1,$$

$$y = 4C_1,$$

$$z = C_1.$$

Корень $\lambda = -3$ двукратный, т.е. $m = 2$. Матрица $M(-3) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

имеем ранг $r = 2$. Кроме того, $n = 3$. Следовательно, $r > n - m$, поэтому ищем соответствующее этому корню решение в виде:

$$x = e^{-3t}(a_1 + a_2 t),$$

$$y = e^{-3t}(b_1 + b_2 t),$$

$$z = e^{-3t}(c_1 + c_2 t).$$

Подставляя в заданную систему и сокращая на общий множитель e^{-3t}, получаем:

Приравнивая в обеих частях свободные члены и коэффициенты при t, получаем шесть уравнений:

$$\begin{cases} -3a_1 - 3a_2t + a_2 + a_1 + a_2t - b_1 - b_2t = 0, \\ -3b_1 - 3b_2t + b_2 + b_1 + b_2t - 4c_1 - 4c_2t = 0, \\ -3c_1 - 3c_2t + c_2 + 4c_1 + 4c_2t - a_1 - a_2t = 0. \end{cases}$$

$$-2a_1 + a_2 - b_1 = 0, \qquad -2a_2 - b_2 = 0,$$

$$-2b_1 + b_2 - 4c_1 = 0, \qquad -2b_2 - 4c_2 = 0,$$

$$c_1 + c_2 - a_1 = 0, \qquad c_2 - a_2 = 0.$$

$$a_1 = C_3, \quad b_1 = C_2 - 2C_3, \quad c_1 = C_3 - C_2.$$

Из трех уравнений правого столбца получаем: $a_2 = C_2$ (произвольное постоянное), $b_2 = -2C_2$, $c_2 = C_2$. После этого первые три уравнения дают:

Таким образом, общее решение системы будет:

$$x = 4C_1 + C_2te^{-3t} + C_3e^{-3t},$$

$$y = 4C_1 + C_2(-2t+1)e^{-3t} - 2C_3e^{-3t},$$

$$z = C_1 + C_2(t-1)e^{-3t} + C_3e^{-3t}.$$

5.4. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$\frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = f_i(x), \; i = 1, 2, ..., n. \qquad (5.23)$$

Выше показано, что общее решение системы (5.23) имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)} + y_i^*, \; i = 1, 2, ..., n,$$

где $y_i^{(k)}$, $i, k = 1, 2, ..., n$, есть фундаментальная система решений соответствующей однородной системы (5.17), а y_i^* $i = 1, 2, ..., n$ – какое-либо частное решение системы (5.23).

Найдем y_i^* в зависимости от вида функций $f_i(x)$. Поскольку система (5.23) может быть приведена к одному линейному неоднородному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами, то можно воспользоваться соответствующими утверждениями о виде частного решения для указанного уравнения.

I. Пусть $f_i(x) = P_{m_i}^{(i)}(x)e^{\alpha x}$, где $P_{m_i}^{(i)}(x)$ – многочлены степени m_i, $i = 1, 2, ..., n.$ Тогда

1) если α не является корнем характеристического уравнения (5.19), то y_i^* отыскивается в виде $y_i^* = Q_m^{(i)}(x)e^{\alpha x}$, где $Q_m^{(i)}(x)$ – многочлены степени $m = \max\limits_i m_i, \ i = 1, 2, ..., n;$

2) если α является корнем характеристического уравнения (5.19) кратности S, то $y_i^* = Q_{m+S}^{(i)}(x)e^{\alpha x}$, $i = 1, 2, ..., n.$

II. Пусть $f_i(x) = (P_{m_i}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{l_i}^{(2)}(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, $i = 1, 2, ..., n.$ Тогда:

1) если числа $\alpha \pm \beta i$ не является корнями характеристического уравнения (5.19), то

$$y_i^* = \left(\overline{Q}_m^{(i)}(x)\cos\beta x + \overline{\overline{Q}}_m^{(i)}(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x},$$

где $m = \max(m_i, l_i), \ i = 1, 2, ..., n;$

2) если числа $\alpha \pm \beta i$ является корнями характеристического уравнения (5.19) кратности S, то

$$y_i^* = \left(\overline{Q}_{m+S}^{(i)}(x)\cos\beta x + \overline{\overline{Q}}_{m+S}^{(i)}(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Пример 9. Указать вид частного решения y^*, z^* неоднородной системы

$$\begin{cases} y' - 4y + z = e^{3x}(x + \sin x), \\ z' - y - 2z = xe^{3x}\cos x. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -4+\lambda & 1 \\ -1 & -2+\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (\lambda - 3)^2 = 0, \text{ т.е. } \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Найдем сначала вид частных решений y_1^*, z_1^* системы

$$\begin{cases} y' - 4y + z = xe^{3x}, \\ z' - y - 2z = 0, \end{cases}$$

α = 3 является двукратным корнем характеристического уравнения, т.е. $S = 2$. Степень многочлена в правой части m = 1. Поэтому:

$$y_1^* = (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)e^{3x},$$

$$z_1^* = (a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2)e^{3x}.$$

Теперь можно указать вид частных решений y_2^*, z_2^* системы

$$\begin{cases} y' - 4y + z = e^{3x}\sin x, \\ z' - y - 2z = xe^{3x}\cos x. \end{cases}$$

Числа $\alpha \pm \beta i = 3 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, т.е. $S = 0$. Наибольшая степень многочленов в правых частях $m = 1$.

Поэтому

$$y_2^* = (a_3 x + b_3)e^{3x}\cos x + (c_3 x + d_3)e^{3x}\sin x,$$

$$z_2^* = (a_4 x + b_4)e^{3x}\cos x + (c_4 x + d_4)e^{3x}\sin x.$$

Таким образом, y^*, z^* имеют вид

$$y^* = y_1^* + y_2^*,\ \ z^* = z_1^* + z_2^*.$$

Глава 6. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

6.1. Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, ..., y_n), \; (j = 1, ..., n). \tag{6.1}$$

Переходя к матрично-векторным обозначениям

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \equiv \text{colon}(y_1, ..., y_n),$$

$$f(t, \bar{y}) = \text{colon}\left[f_1(t, \bar{y}), ..., f_n(t, \bar{y}) \right]$$

и учитывая, что

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \text{colon}(\dot{y}_1, \cdots, \dot{y}_n),$$

систему (6.1) можно записать в виде матрично-векторного уравнения

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}). \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что для системы (6.2) выполнены условия теоремы Коши – Пикара, т.е. задача Коши для указанной системы с начальным условием $y(t_0) \equiv y_0$ при любом $t_0 \in (a; +\infty)$ имеет единственное решение.

В этом случае имеет место интегральная непрерывность решений системы (6.2): если $y(t)$ $(a < t < b)$ есть решение системы (6.2), то для любых $\varepsilon > 0$ и $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ существует $\delta > 0$ такое, что решение $z(t)$, определяемое начальным условием $z(\gamma) = z_0$, где $\gamma \in [\alpha, \beta]$ и $\|z(\gamma) - y(\gamma)\| < \delta$, будет иметь смысл при $\alpha \le t \le \beta$, причем $\|z(t) - y(t)\| < \varepsilon$ для $t \in [\alpha, \beta]$ (рис. 6.1).

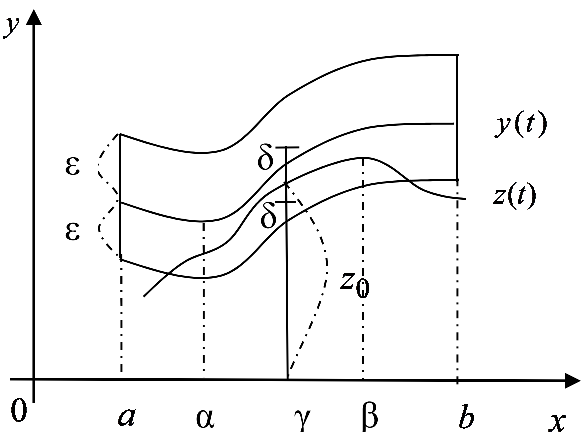

Рис. 6.1

Здесь в качестве нормы вектора можно взять любую из трех норм:

$$\|x\|_{\mathrm{I}} = \max_{1\le j\le n}|x_j|,$$

$$\|x\|_{\mathrm{II}} = \sum_{j=1}^{n}|x_j|,$$

$$\|x\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^{\,2}}.$$

В дальнейшем мы будем использовать также следующие нормы матрицы $A=\lfloor a_{jk}\rfloor$:

$$\|A\|_{\mathrm{I}} = \max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|, \quad \|A\|_{\mathrm{II}} = \max_{1\le k\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|,$$

$$\|A\|_{\mathrm{III}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a^2{}_{jk}\right)^{1/2}.$$

Определение 1. Решение $\bar\eta=\bar\eta(t)$ $(a<t<\infty)$ системы (6.2) называется устойчивым по Ляпунову при $t\to+\infty$ (или, кратко, устойчивым), если для любых $\varepsilon>0$ и $t_0\in(a,+\infty)$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$ такое, что

1) все решения $\bar y=\bar y(t)$ системы (6.2) (включая решение $\bar\eta(t)$), удовлетворяющие условию

$$\|\bar y(t_0)-\bar\eta(t_0)\|<\delta, \tag{6.3}$$

определены в промежутке $t_0\le t<\infty$;

2) для этих решений справедливо неравенство

$$\|\bar y(t)-\bar\eta(t)\|<\varepsilon \text{ при } t_0\le t<\infty. \tag{6.4}$$

Иными словами, решение $\bar\eta(t)$ устойчиво, если достаточно близкие к нему в любой начальный момент t_0 решения $\bar y(t)$ целиком погружаются в сколь угодно узкую ε-трубку, построенную вокруг решения $\bar\eta(t)$ (рис. 6.2).

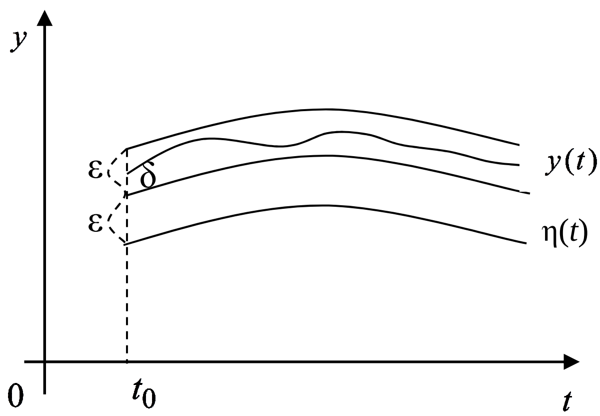

Рис. 6.2

Из неравенств (6.3) и (6.4) следует, что всегда можно выбирать $\delta \le \varepsilon$.

В частности при $\overline{f}(t,0) \equiv \overline{0}$ тривиальное решение (положение равновесия) $\overline{\eta}(t) \equiv \overline{0}$ $(a < t < \infty)$ устойчиво, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из неравенства

$$\left\| \overline{y}(t_0) \right\| < \delta$$

следует неравенство

$$\left\| \overline{y}(t) \right\| < \varepsilon \text{ при } t_0 < t < \infty.$$

Заметим, что из устойчивости нетривиального решения $\overline{\eta}(t)$ не следует его ограниченность; обратно, из ограниченности решения, вообще говоря, не следует его устойчивость.

Определение 2. Если число $\delta > 0$ можно выбрать не зависящим от начального момента $t_0 \in T$, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$, то устойчивость называется *равномерной* в области T.

Определение 3. Решение $\overline{\eta} = \overline{\eta}(t)$ $(a < t < \infty)$ будем называть неустойчивым по Ляпунову, если для некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ и любого $\delta > 0$ существует решение $\overline{y_\delta}(t)$ (хотя бы одно) и момент $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такие, что

$$\left\| \overline{y_\delta}(t_0) - \overline{\eta}(t_0) \right\| < \delta \text{ и } \left\| \overline{y_\delta}(t_1) - \overline{\eta}(t_1) \right\| \ge \varepsilon.$$

Из отрицания определения 1 вытекает, что следует считать также неустойчивым решение $\overline{\eta}(t)$, непродолжаемое при $t \to \infty$, или такое, для которого в любой окрестности точки $\overline{\eta}(t_0)$ найдется точка $\overline{y_0}$, порождающая в момент времени t_0 решение $\overline{y}(t)$, непродолжаемое при $t_0 \le t < \infty$.

Аналогично, тривиальное решение (положение равновесия) $\overline{\eta} \equiv 0$ неустойчиво (рис. 6.3), если для некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, \infty)$ и любого $\delta > 0$ существует решение $y_\delta(t)$ и момент $t_1 > t_0$ такие, что

$$\left\| \overline{y_\delta}(t_0) \right\| < \delta, \quad \left\| \overline{y_\delta}(t_1) \right\| \ge \varepsilon.$$

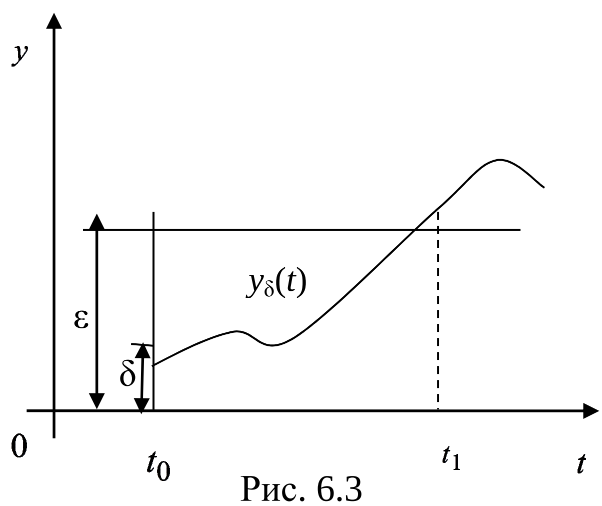

Рис. 6.3

Определение 4. Решение $\bar{\eta}=\bar{\eta}(t)$ $(a < t < \infty)$ называется асимптотически устойчивым при $t \to \infty$, если:

1) это решение устойчиво по Ляпунову и

2) для любого $t_0 \in (a,\infty)$ существует $\Delta=\Delta(t_0)>0$ такое, что все решения $\bar{y}=\bar{y}(t)$ $t_0 \le t < \infty$, удовлетворяющие условию $\left\|\bar{y}(t_0)-\bar{\eta}(t_0)\right\|<\Delta$, обладают свойством

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\bar{y}(t)-\bar{\eta}(t)\right\|=0. \tag{6.5}$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость есть «устойчивость с нагрузкой», т.е. устойчивость при наличии дополнительных условий. В частности, тривиальное решение $\bar{\eta}(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty}\bar{y}(t)=0 \text{ при } \left\|\bar{y}(t_0)\right\|<\Delta .$$

Определение 5. Если решение $\bar{\eta}=\bar{\eta}(t)$ $(a < t < \infty)$ асимптотически устойчиво при $t \to \infty$ и все решения $\bar{y}=\bar{y}(t)$, $t_0 \le t < \infty$, $t_0 > a$, обладают свойством (6.5), (т.е. $\Delta=\infty$), то решение $\bar{\eta}(t)$ называется асимптотически устойчивым в целом.

Замечание. Если решение $\bar{\eta}=\bar{\eta}(t)$ $(a < t < \infty)$ системы (6.2) с непрерывной правой частью устойчиво для какого-либо фиксированного момента $t_0 \in (a,\infty)$, то оно будет устойчиво для любого другого момента $t'_0 \in (a,\infty)$, т.е. является устойчивым в смысле определения 1.

Действительно, пусть при

$$\left\|\bar{y}(t_0)-\bar{\eta}(t_0)\right\|<\delta(\varepsilon,t_0)<\varepsilon. \tag{6.6}$$

имеем

$$\left\|\bar{y}(t)-\bar{\eta}(t)\right\|<\varepsilon \text{ для } t_0 \le t<\infty. \tag{6.7}$$

В силу свойства интегральной непрерывности существует $\delta'=\delta(\varepsilon,t'_0)>0$ такое, что если

$$\left\|\bar{y}(t'_0)-\bar{\eta}(t'_0)\right\|<\delta', \tag{6.8}$$

то

$$\left\|\bar{y}(t)-\bar{\eta}(t)\right\|<\delta(\varepsilon,t_0)=\delta \text{ при } t\in[t'_0,t_0].$$

Поэтому на основании формул (6.6) и (6.7) из неравенства (6.8) вытекает неравенство

$$\left\|\bar{y}(t)-\bar{\eta}(t)\right\|<\varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty.$$

Таким образом, можно ограничиваться проверкой устойчивости решения, а также его асимптотической устойчивости, лишь для некоторого заданного начального момента t_0.

Отсюда также получаем, что если решение $\overline{\eta}(t)$ $(a < t < \infty)$ неустойчиво при $t = t_0$, то оно является неустойчивым для любого другого момента $t_0 \in (a, \infty)$.

В дальнейшем для теорем устойчивости мы, как правило, начальный момент t_0 будем считать фиксированным.

6.2. Устойчивость линейных дифференциальных систем

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) y_k + f_j(t), \quad j = (1, \ldots, n), \tag{6.9}$$

где $a_{jk}(t)$, $f_j(t)$ непрерывны в интервале (a, ∞).

Введя векторно-матричные обозначения

$$\overline{y} = \mathrm{colon}[y_1, \ldots, y_n], \quad A(t) = [a_{jk}],$$
$$f(t) = \mathrm{colon}[f_1(t), \ldots, f_n(t)],$$

систему (6.9) можно записать более просто:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\overline{y} + \overline{f}(t). \tag{6.10}$$

Пусть

$$X(t) = [x_{jk}(t)] \quad (\det X(t) \neq 0) \tag{6.11}$$

являестя фундаментальной матрицей (иными словами, фундаментальной системой решений, записанной в виде $(n \times n)$ матрицы) соответствующей однородной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\overline{x}, \tag{6.12}$$

т.е. матрица, состоящая из n линейно независимых ее решений:

$$\overline{x}^{(1)}(t) = \mathrm{colon}[x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)];$$
$$\ldots$$
$$\overline{x}^{(n)}(t) = \mathrm{colon}[x_{1n}(t), \ldots, x_{nn}(t)].$$

В записи $[x_{jk}(t)]$ первый индекс j обозначает номер координаты, а второй k-номер решения, так что в фундаментальной матрице (6.11) решения располагаются по столбцам.

Покажем, что матрица $X(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t). \tag{6.13}$$

Действительно, так как функция $x_{jk}(t)$ удовлетворяет j-му уравнению системы (6.12), имеем

$$\frac{dx_{jk}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{sk}(t). \tag{6.14}$$

Следовательно, вспоминая правило перемножения матриц, получаем

$$\dot{X}(x) = \left[\frac{dx_{jk}}{dt}\right] = \left[\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_{sk}(t)\right] \equiv A(t)X(t),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при нашем доказательстве не понадобилась неособенность матрицы $X(t)$. Поэтому любая матрица $X(t)$, столбцы которой представляют собой решения линейной однородной системы (6.12), удовлетворяет матричному уравнению (6.13).

Обратно, если $(n \times n)$ матрица $X(t) = [x_{jk}(t)]$ удовлетворяет матричному уравнению (6.13), то столбцы ее

$$\overline{x}^{(k)} = \mathrm{colon}[x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)] \quad (k = 1, \dots, n)$$

представляют решения линейной однородной системы (6.12). Если при этом $\det X(t) \neq 0$, то матрица $X(t)$ является фундаментальной.

Действительно, очевидно, имеем

$$\overline{x}^{(k)}(t) = X(t)\overline{e}_k,$$

где $\overline{e}_k = \mathrm{colon}[0, \dots, 1, \dots, 0]$. Умножая справа на $\overline{e}_k$ уравнение (6.13), получим

$$\frac{d}{dt}[X(t)\overline{e}_k] = A(t)[X(t)\overline{e}_k], \text{ т.е. } \frac{d\overline{x}^{(k)}}{dt} = A(t)\overline{x}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Если $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (6.12), то, как известно, каждое решение этой системы может быть записано в виде

$$\overline{x}(t) = X(t)\overline{c}, \tag{6.15}$$

где $\overline{c} = \mathrm{colon}[c_1, \dots, c_n]$ – некоторая постоянная матрица-столбец.

Пусть решение $\overline{x} = \overline{x}(t)$ удовлетворяет начальному условию $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$. Полагая в тождестве (6.15) $t = t_0$, будем иметь

$$\overline{x}(t_0) = X(t_0)\overline{c};$$

отсюда $\overline{c} = X^{-1}(t_0)\overline{x}(t_0)$. Следовательно,

$$\overline{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\overline{x}(t_0).$$

Вводя матрицу Коши $C(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, получим

$$\overline{x}(t) = C(t, t_0)\overline{x}(t_0). \tag{6.16}$$

В частности, если фундаментальная матрица $X(t)$ нормирована при $t=t_0$, т.е. $X(t_0)=E$, где E – единичная матрица, то формула (6.16) принимает вид

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{x}(t_0). \tag{6.17}$$

Заметим, что матрица Коши не зависит от выбора фундаментальной матрицы $X(t)$. Действительно, если $\tilde{X}(t)$ есть другая фундаментальная матрица системы (6.2), то имеем $\tilde{X}(t)=X(t)C$, где C – постоянная неособенная матрица. Отсюда $\tilde{X}^{-1}(t)=C^{-1}X^{-1}(t)$ и, следовательно,

$$\tilde{C}(t,t_0)=\tilde{X}(t)\tilde{X}^{-1}(t_0)=X(t)CC^{-1}X^{-1}(t_0)=C(t,t_0).$$

Любое решение $\bar{y}=\bar{y}(t)$ неоднородной системы (6.10) может быть записано в виде

$$\bar{y}(t)=\bar{\tilde{y}}(t)+X(t)\bar{c},$$

где $\bar{\tilde{y}}(t)$ – некоторое фиксированное решение ее и $\bar{c}$ – постоянный $(n\times 1)$-вектор. Если $\bar{\tilde{y}}(t)$ таково, что $\bar{\tilde{y}}(t_0)=\bar{0}$, то, очевидно,

$$\bar{c}=X^{-1}(t_0)\bar{y}(t_0)$$

и, следовательно,

$$\bar{y}(t)=\bar{\tilde{y}}(t)+C(t,t_0)\bar{\tilde{y}}(t_0).$$

С другой стороны, общее решение неоднородной системы (6.10) можно найти методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Будем искать указанное решение в виде

$$\bar{y}=X(t)\bar{u}, \tag{6.18}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы (6.12)

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\bar{x}$$

и $\bar{u}=\bar{u}(t)$ – новая неизвестная вектор-функция. Подставляя выражение (6.18) в уравнение (6.10), получим

$$X(t)\frac{d\bar{u}}{dt}+\dot{X}(t)\bar{u}=A(t)X(t)\bar{u}+\bar{f}(t),$$

или, поскольку

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t),$$

будем иметь $X(t)\dfrac{d\bar{u}}{dt}=\bar{f}(t).$

Следовательно, $\bar{u}(t)=\bar{c}+\int\limits_{t_0}^{t}X^{-1}(t_1)\bar{f}(t_1)dt_1.$

Поэтому на основании формулы (6.18) находим

$$\overline{y}(t) = X(t)\overline{c} + \int_{t_0}^{t} C(t,t_1)\overline{f}(t_1)dt_1, \tag{6.19}$$

где $C(t,t_1) = X(t)X^{-1}(t_1)$ – матрица Коши. Для определения произвольного постоянного вектора $\overline{c}$ в формуле (6.19) положим $t = t_0$. Тогда будем иметь

$$\overline{c} = X^{-1}(t_0)\overline{y}(t_0)$$

и, следовательно,

$$\overline{y}(t) = C(t,t_0)\overline{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t,t_1)\overline{f}(t_1)dt_1. \tag{6.20}$$

Это равенство называют формулой Коши.

В частности, если фундаментальная матрица $X(t)$ нормирована при $t = t_0$, т.е. $X(t_0) = E$, то из формулы (6.20) получим

$$\overline{y}(t) = X(t)\overline{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t,t_1)\overline{f}(t_1)dt_1.$$

Из формулы (6.20) вытекает, что неоднородная система (6.10) имеет частное решение

$$\overline{\tilde{y}}(t) = \int_{t_0}^{t} C(t,t_1)\overline{f}(t_1)dt_1,$$

удовлетворяющее условию $\overline{y}(t_0) = \overline{0}$.

Заметим, что если матрица $A(t) = A$ постоянна и $X(t_0) = E$, то

$$X(t)X^{-1}(t_1) \text{ и } X(t - t_1 + t_0)$$

представляют собой фундаментальные матрицы однородной системы (6.12), совпадающие при $t = t_1$. Поэтому

$$X(t)X^{-1}(t_1) \equiv X(t - t_1 + t_0).$$

Следовательно, полагая $t_0 = 0$, получаем, что дифференциальная система

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y} + \overline{f}(t), \tag{6.21}$$

где $A = \text{const}$, имеет общее решение

$$\overline{y}(t) = X(t)\overline{y}(0) + \int_{0}^{t} X(t - t_1)\overline{f}(t_1)dt_1. \tag{6.22}$$

В частности, при $\overline{y}(0) = \overline{0}$ получим, что неоднородная система (6.21) обладает частным решением

$$\overline{\tilde{y}}(t) = \int_{0}^{t} X(t - t_1)\overline{f}(t_1)dt_1.$$

Воспользуемся полученными формулами для изучения устойчивости линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему (6.10) и соответствующую ей однородную систему (6.12).

Определение 6. Линейную систему (6.10) будем называть устойчивой (или вполне неустойчивой), если все ее решения $\bar{y} = \bar{y}(t)$ соответственно устойчивы (или неустойчивы) по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Замечание. Как мы увидим ниже, решения линейных дифференциальных систем либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Подобная терминология не применима к нелинейным дифференциальным системам, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие – неустойчивыми.

Теорема 1. Для устойчивости линейной системы (6.10) при любом свободном члене $\bar{f}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$ соответствующей однородной системы (6.12).

Доказательство.

1. Докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ есть некоторое устойчивое решение неоднородной системы (10). Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $\bar{y} = \bar{y}(t)$ системы (6.10) при $(t_0 \le t < \infty)$ справедливо неравенство

$$\left\| \bar{y}(t) - \bar{\eta}(t) \right\| < \varepsilon, \tag{6.23}$$

если только

$$\left\| \bar{y}(t_0) - \bar{\eta}(t_0) \right\| < \delta. \tag{6.24}$$

Но, как известно,

$$\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - \bar{\eta}(t) \tag{6.25}$$

является решением линейной однородной системы (6.12), причем любое ее решение $\bar{x}(t)$ может быть представлено в виде (6.25).

Таким образом, неравенства (6.23) и (6.24) эквивалентны следующим:

$$\left\| \bar{x}(t) \right\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty, \text{ если только } \left\| \bar{x}(t_0) \right\| < \delta.$$

Отсюда следует, что тривиальное решение $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$ соответствующей однородной системы (6.12) устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Замечание 1. Из доказательства следует, что устойчивость тривиального решения $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$ однородной системы (6.12) вытекает из устойчивости хотя бы одного решения линейной системы (6.10) при каком-нибудь свободном члене $\bar{f}(t)$ (может быть, $\bar{f}(t) \equiv 0$).

2. Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть тривиальное решение $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$ однородной системы (6.12) устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$. Тогда, если $\bar{x} = \bar{x}(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ – произвольное решение однородной системы такое, что

$$\left\|\bar{x}(t_0)\right\| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

то $\left\|\bar{x}(t)\right\| < \varepsilon$ при $t_0 \le t < \infty$.

Следовательно, если $\bar{\eta}(t)$ – некоторое решение неоднородной линейной системы (6.10) и $\bar{y}(t)$ – произвольное решение этой системы, то из неравенства

$$\left\|\bar{y}(t_0) - \bar{\eta}(t_0)\right\| < \delta$$

будет вытекать неравенство

$$\left\|\bar{y}(t) - \bar{\eta}(t)\right\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty.$$

А это значит, что решение $\bar{\eta}(t)$ устойчиво при $t \to +\infty$.

Следствие 1. Линейная дифференциальная система устойчива, когда устойчиво хотя бы одно решение этой системы, и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое решение ее.

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и замечания 1 к ней.

Следствие 2. Линейная неоднородная дифференциальная система устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая однородная дифференциальная система.

Замечание 2. Таким образом, поведение решений линейной неоднородной системы (6.10) с любым свободным членом $f(t)$ в смысле устойчивости такое же, как поведение решений соответствующей однородной системы (6.12).

Действительно для неоднородной системы (6.10) поле интегральных кривых

$$\bar{y}(t) = \bar{\tilde{y}}(t) + X(t)\bar{c},$$

где $\bar{\tilde{y}}(t)$ – частное решение системы (6.10) и $X(t)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы (6.12), топологически эквивалентно (с сохранением близости) полю интегральных кривых

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{c}$$

соответствующей однородной системы (6.12); разница только та, что в первом случае «ось» $\bar{y} = \bar{\tilde{y}}(t)$, вообще говоря, криволинейна (рис. 6.4), а во втором случае ось $\bar{x} \equiv \bar{0}$ прямолинейна (рис. 6.5).

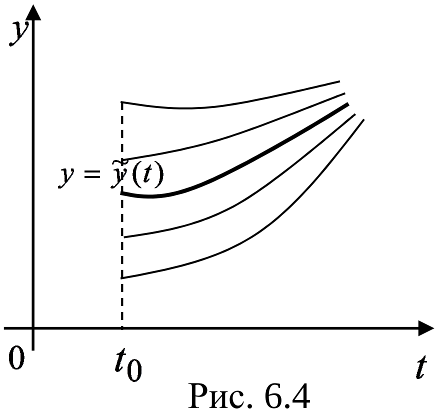

Рис. 6.4

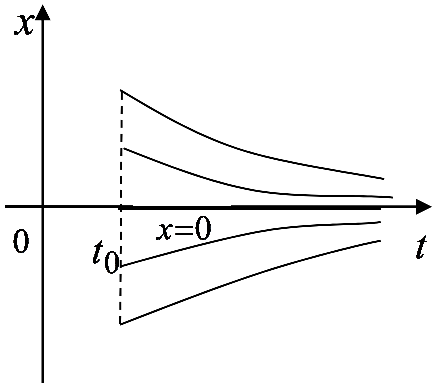

Рис. 6.5

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением устойчивости лишь однородных линейных дифференциальных систем.

Определение 7. Линейную дифференциальную систему (6.10) назовем равномерно устойчивой, если все решения $\overline{y}(t)$ этой системы равномерно устойчивы при $t \to +\infty$ относительно начального момента $t \in (a;+\infty)$.

Теорема 2. Линейная дифференциальная система (6.10) равномерно устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение $\overline{x}_0 \equiv \overline{0}$ соответствующей однородной системы (6.12) равномерно устойчиво при $t \to +\infty$.

Доказательство проводится с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были применены при доказательстве теоремы 1.

Определение 8. Линейную дифференциальную систему (6.10) назовем асимптотически устойчивой, если все решения $\overline{y}(t)$ этой системы асимптотически устойчивы при $t \to +\infty$.

Теорема 3. Линейная дифференциальная система (6.10) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение $\overline{x}_0 \equiv \overline{0}$ соответствующей однородной системы (6.12) асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из того обстоятельства, что разность двух решений линейной неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы (формула (6.25)).

Следствие. Для асимптотической устойчивости линейной неоднородной дифференциальной системы (6.10) при любом свободном члене $\overline{f}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы была асимптотически устойчивой соответствующая однородная система (6.12).

6.3. Устойчивость линейных однородных дифференциальных систем

Рассмотрим однородную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x}. \qquad (6.26)$$

Покажем, что устойчивость системы (6.26) эквивалентна ограниченности всех ее решений.

Теорема 4. Линейная однородная дифференциальная система (6.26) устойчива по Ляпунову тогда, и только тогда, когда каждое решение $\bar{x} = \bar{x}(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ этой системы ограничено на полуоси $t_0 \le t < \infty$.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что ограниченность решений линейной однородной системы достаточна для ее устойчивости.

Пусть любое решение системы (6.26) ограничено на $[t_0, \infty)$.

Рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу

$$X(t) = \left[x_{jk}(t) \right],$$

где $X(t_0) = E$. Поскольку матрица $X(t)$ состоит из ограниченных функций $x_{jk}(t)$, она ограничена, т.е.

$$\|X(t)\| \le M \text{ при } t_0 \le t < \infty,$$

где M– некоторая положительная постоянная, зависящая, вообще говоря, от t_0.

Как известно (6.17), каждое решение $\bar{x} = \bar{x}(t)$ системы (6.26) может быть представлено в виде произведения

$$\bar{x}(t) = X(t)\bar{x}(t_0).$$

Отсюда получаем

$$\|\bar{x}(t)\| \le \|X(t)\| \|\bar{x}(t_0)\| \le M \|\bar{x}(t_0)\| < \varepsilon,$$

если только

$$\|\bar{x}(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Следовательно, тривиальное решение $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$, а значит, в силу теоремы 1 и любое решение системы (6.26) устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Таким образом, система (6.26) устойчива.

2. Докажем теперь, что ограниченность решений линейной однородной системы необходима для ее устойчивости.

Пусть система (6.26) допускает неограниченное на $[t_0, \infty)$ решение $\bar{z}(t)$, где, очевидно, $\bar{z}(t_0) \ne 0$. Фиксируя два положительных числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, рассмотрим решение

$$\bar{x}(t)=\frac{\bar{z}(t)}{\left\|\bar{z}(t_0)\right\|}\frac{\delta}{2}.$$

Очевидно, что

$$\left\|\bar{x}(t_0)\right\|=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

причем в силу неограниченности $\bar{z}(t)$ для некоторого момента $t_1>t_0$ имеем

$$\left\|\bar{x}(t_1)\right\|=\frac{\left\|\bar{z}(t_1)\right\|}{\left\|\bar{z}(t_0)\right\|}\frac{\delta}{2}>\varepsilon.$$

Таким образом, тривиальное решение $\bar{x}_0\equiv\bar{0}$ системы (6.26) неустойчиво по Ляпунову при $t\to+\infty$, а следовательно, на основании теоремы 1 система (6.26) также вполне неустойчива.

Заметим, что здесь неустойчивость системы обнаруживается в усиленной форме, так как положительное число ε произвольно.

Следствие. Если неоднородная линейная дифференциальная система устойчива, то все ее решения или ограничены, или не ограничены при $t\to+\infty$.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=1+t-y$$

допускает неограниченное решение $y_0=t$. Поскольку

$$y(t)=t+y(0)e^{-t},$$

то решение y_0, очевидно, устойчиво и даже асимптотически.

Замечание. Для нелинейной дифференциальной системы из ограниченности ее решений, вообще говоря, не следует устойчивость их.

Пример 2. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\sin^2 x.$$

Интегрируя, будем иметь (рис. 6.6)

$$x=\mathrm{Arcctg}(\mathrm{ctg}x_0-t) \text{ при } x_0\neq k\pi \tag{6.27}$$

$$x=k\pi \text{ при } x_0=k\pi \quad k=(0,\pm1,\pm2,...). \tag{6.28}$$

Все решения (6.27) и (6.28), очевидно, ограничены на $(-\infty,+\infty)$.

Однако решение $x_0=0$ неустойчиво при $t\to+\infty$, так как при любом $x_0\in(0,\pi)$, имеем

$$\lim_{t\to+\infty}x=\pi.$$

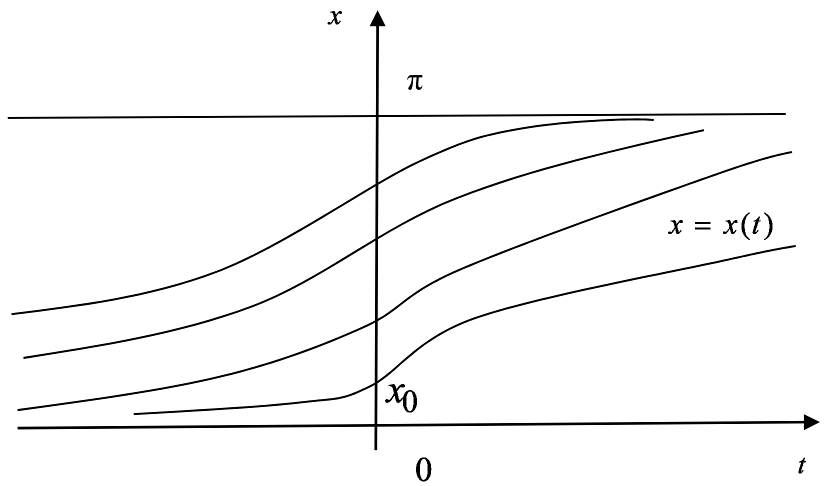

Рис. 6.6

Теорема 5. Линейная однородная дифференциальная система (6.26) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения $\bar{x} = \bar{x}(t)$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$, т.е.

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{x}(t) = \bar{0}. \tag{6.29}$$

Доказательство.

1. Пусть система (6.26) асимптотически устойчива при $t \to +\infty$. Тогда все ее решения, в том числе тривиальное $\bar{x}_0 \equiv \bar{0}$, асимптотически устойчивы при $t \to +\infty$. Следовательно (определение 4), для любого решения $\bar{\xi}(t)$ системы (6.26) имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{\xi}(t) = \bar{0}, \tag{6.30}$$

если только $\left\| \bar{\xi}(t_0) \right\| < \Delta$, где $t_0 \in (a, +\infty)$ произвольно.

Рассмотрим произвольное решение $\bar{x}(t)$, определяемое начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \neq 0$. Положим

$$\bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) \frac{\left\| \bar{x}(t_0) \right\|}{\frac{1}{2}\Delta},$$

где

$$\bar{\xi}(t) = \frac{\bar{x}(t)}{\left\| \bar{x}(t_0) \right\|} \frac{\Delta}{2}.$$

Поскольку решение $\bar{\xi}(t)$, очевидно, удовлетворяет условию

$$\left\| \bar{\xi}(t_0) \right\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

то для него справедливо соотношение (6.30). Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{x}(t) = \bar{0}.$$

Таким образом, необходимость условия теоремы доказана.

2. Пусть условие (6.29) выполнено. Тогда для каждого решения $\bar{x}(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ будем иметь

$$\|\bar{x}(t)\| < 1 \text{ при } T < t < \infty .$$

Поскольку на конечном отрезке $[t_0, T]$ непрерывная вектор-функция $\bar{x}(t)$ ограничена, то любое решение $\bar{x}(t)$ ограничено на полупрямой $[t_0, \infty)$ и, следовательно, на основании теоремы 4 система (6.26) устойчива, причем ее тривиальное решение асимптотически устойчиво. Отсюда в силу теоремы 3 вытекает асимптотическая устойчивость системы (6.26).

Следствие. Асимптотически устойчивая линейная дифференциальная система асимптотически устойчива в целом (по определению 5).

Замечание. Для нелинейной дифференциальной системы стремление к нулю всех решений, вообще говоря, не является достаточным условием для асимптотической устойчивости тривиального решения ее.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - t^2 xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \end{cases} \qquad (t \ge 1),$$

допускающую тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$. Интегрируя, получим

$$\begin{cases} x = c_1 t e^{-c_2^2 t}, \\ y = \dfrac{c_2}{t}, \end{cases}$$

или, полагая $t_0 = 1$, будем иметь

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) t e^{-y^2(t_0)(t-1)}, \\ y(t) = \dfrac{y(t_0)}{t}. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$x(t) \to 0 \text{ и } y(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Однако для любого $\delta > 0$ при $x(t_0) = \delta^2$, $y(t_0) = \delta$ будем иметь

$$x(1 + \frac{1}{\delta^2}) > e^{-1}.$$

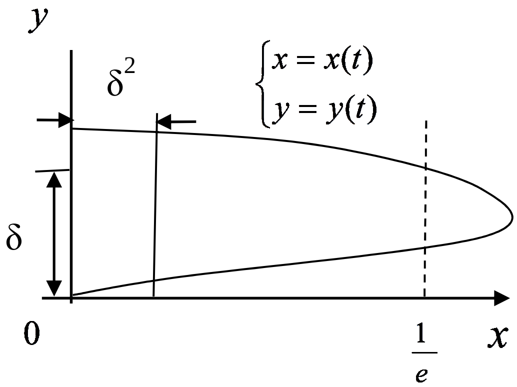

Рис. 6.7

Следовательно, решение $x=0$, $y = 0$ не является устойчивым, а тем более асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$ (рис. 6.7).

6.4. Устойчивость линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}, \tag{6.31}$$

где $A=[a_{jk}]$ – постоянная $(n\times 1)$ – матрица.

Положим

$$\bar{x}=e^{At}\bar{u},$$

тогда, учитывая свойства экспоненциала матрицы (прил. 2), будем иметь

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \equiv e^{At}\frac{d\bar{u}}{dt} + Ae^{At}\bar{u} = Ae^{At}\bar{u},$$

или

$$e^{At}\frac{d\bar{u}}{dt} = 0. \tag{6.32}$$

Поскольку $\det e^{At} = e^{tSpA} \neq 0$, то матрица e^{At} неособенная. Поэтому из (6.32) получаем

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$\bar{u}=\bar{c},$$

где $\bar{c}$ – постоянная $(n \times 1)$-матрица

Таким образом, общее решение системы (6.31) с постоянной матрицей A есть

$$\bar{x}=e^{At}\bar{c}. \tag{6.33}$$

Пусть $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. Из формулы (6.33) имеем

$$\overline{x_0} = e^{At_0}\overline{c},$$

т.е.

$$\overline{c} = e^{-At_0}\overline{x}_0,$$

и, значит,

$$\overline{x} = e^{A(t-t_0)}\overline{x}_0. \tag{6.34}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \le n)$ – собственные значения матрицы A, отвечающие различным клеткам Жордана, и $e_1, \ldots, e_m$ – соответствующие им порядки клеток Жордана. Обозначим через S неособенную матрицу, приводящую матрицу A к жордановой форме:

$$A = S^{-1}\mathrm{diag}[J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m)]S,$$

где $J_p(\lambda_p)$ $(p = 1, \ldots, m)$ – соответствующие клетки Жордана (прил. 1).

Тогда на основании свойств экспоненциала (см. прил. 2) из формулы (6.34) получаем

$$\overline{x}(t) = S^{-1}\mathrm{diag}[\exp(t-t_0)J_1(\lambda_1), \ldots, \exp(t-t_0)J_m(\lambda_m)]S\overline{x}(t_0), \tag{6.35}$$

где

$$\exp[(t-t_0)J_p(\lambda_p)] = e^{\lambda_p(t-t_0)}[E_{e_p} + \frac{(t-t_0)}{1!}I_1^{(p)} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}I_2^{(p)} + \ldots + \frac{(t-t_0)^{e_p-1}}{(e_p-1)!}I_{e_p-1}^{(p)}],$$

где $I_j^{(p)} (j = 1, \ldots, e_p - 1)$ – соответствующие единичные косые ряды.

Теорема 6. Линейная однородная система (6.31) с постоянной матрицей A устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_j = \lambda_j(A)$ матрицы A обладают неположительными вещественными частями

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A) \le 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

причем характеристические корни, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители (т.е. соответствующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).

Доказательство.

1. Докажем сначала достаточность условий теоремы.

Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ – все характеристические корни матрицы A с отрицательными вещественными частями α_j, отвечающие различным клеткам Жордана, и $\lambda_k = i\gamma_k (k = 1, \ldots, q)$ – все характеристические корни матрицы A с вещественными частями, причем $p + q = m$ – общее число клеток Жордана в нормальной форме матрицы A. Тогда в силу формулы (6.35) любое решение системы (6.31) имеет вид

$$\overline{x}(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t + i\sin\beta_j t)\overline{P}_j(t) + \sum_{k=1}^{q}(\cos\gamma_k t + i\sin\gamma_k t)\overline{c}_k, \tag{6.36}$$

где $\overline{P}_j(t)$ – некоторые полиномиальные вектор-функции, степень которых ниже кратности корня λ_j, и $\overline{c}_k$ – постоянные вектор-столбцы. Поскольку $\alpha_j < 0$,

$$e^{\alpha_j t}\,\overline{P_j(t)} \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Кроме того,

$$\left|\cos\gamma_k t + i\sin\gamma_k t\right| = 1.$$

Поэтому из формулы (6.36) вытекает, что каждое решение $\overline{x}(t)$ ограниченно на полуоси $t_0 \le t < \infty$.

Следовательно, на основании теоремы 4 система (6.31) устойчива.

2. Докажем теперь необходимость условий теоремы.

Пусть система (6.31) устойчива. Покажем сначала, что все характеристические корни λ_j матрицы A имеют неположительные вещественные части. Действительно, предположим, что найдется собственное значение $\lambda_s = \sigma + i\tau$ матрицы A такое, что

$$\mathrm{Re}\lambda_s = \sigma > 0.$$

Тогда, как известно, система (6.31) имеет нетривиальное решение вида

$$\overline{\xi} = e^{\lambda_s t}\overline{c},$$

где $\left\|\overline{c}\right\| \ne 0$. Отсюда

$$\left\|\overline{\xi}\right\| = \left|e^{\lambda_s t}\right|\left\|\overline{c}\right\| = e^{\sigma t}\left\|\overline{c}\right\| \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

и, таким образом, решение не ограниченно, что противоречит устойчивости системы. Поэтому

$$\mathrm{Re}\lambda_j \le 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.37}$$

Покажем теперь, что каждый характеристический корень λ_j с нулевой вещественной частью $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ имеет простые элементарные делители.

Действительно, предположим, что матрица A приведена к жордановой форме

$$A = S^{-1}\mathrm{diag}[J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m)]S,$$

где $\det S \ne 0$, причем некоторому характеристическому корню $\lambda_s = i\mu_s\,(\mathrm{Re}\lambda_s = 0)$ соответствует клетка Жордана

$$J_s(\lambda_s) = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}$$

типа $e_s \times e_e$, где $e_s > 1$. Тогда

$$\theta(t) = S^{-1}\mathrm{diag}[0,\dots,e^{tJ_s(\lambda_s)},\dots,0]S \tag{6.38}$$

будет являться матричным решением системы (30), так как

$$\dot{\theta}(t) = S^{-1}\mathrm{diag}[0,\dots,J_s(\lambda_s)e^{tJ_s(\lambda_s)},\dots,0]S = S^{-1}\mathrm{diag}[J_1(\lambda_1),\dots,J_s(\lambda_s),\dots,J_m(\lambda_m)]S\times$$
$$\times S^{-1}\mathrm{diag}[0,\dots,e^{tJ_s(\lambda_s)},\dots,0]S = A\theta(t).$$

Из формулы (6.38) получаем

$$\mathrm{diag}[0,\dots,e^{tJ_s(\lambda_s)},\dots,0] = S\theta(t)S^{-1}.$$

Отсюда, оценивая по норме, будем иметь

$$\left\|\mathrm{diag}[0,\dots,e^{tJ_s(\lambda_s)},\dots,0]\right\| = \left\|e^{tJ_s(\lambda_s)}\right\| \le \|S\|\|\theta(t)\|\left\|S^{-1}\right\|. \tag{6.39}$$

Поскольку

$$e^{tJ_s(\lambda_s)} = e^{\lambda_s t}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{t}{1!} & \cdots & \dfrac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \dfrac{t^{e_s-2}}{(e_s-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

то, воспользовавшись, например, первой нормой при $t \ge 0$, получаем

$$\left\|e^{tJ_s(\lambda_s)}\right\| = e^{\sigma t}\left[1 + \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!}\right] > \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!},$$

где $\sigma = \mathrm{Re}\lambda_s = 0$. Из неравенства (6.39) выводим

$$\|\theta(t)\| \ge \frac{\left\|e^{tJ_s(\lambda_s)}\right\|}{\|S\|\left\|S^{-1}\right\|} > \frac{t^{e_s-1}}{(e_s-1)!\|S\|\left\|S^{-1}\right\|}$$

при $t \ge 0$.

Таким образом, $\|\theta(t)\| \to \infty$ при $t \to \infty$, что невозможно для устойчивой системы.

Теорема доказана.

Замечание. Устойчивая линейная однородная система с постоянной матрицей A равномерно устойчива относительно начального момента $t_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Действительно, поскольку решения устойчивой линейной системы ограничены, имеем

$$\left\| e^{At} \right\| \le c \text{ при } t \ge 0.$$

Пусть $\bar{x}(t)$ – произвольное решение нашей системы. Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\bar{x}(t_0)$$

и, следовательно, при $t \ge t_0$ получаем

$$\left\|\bar{x}(t)\right\| \le \left\|e^{(t-t_0)A}\right\| \left\|\bar{x}(t_0)\right\| \le c\left\|\bar{x}(t_0)\right\| < \varepsilon,$$

если

$$\left\|\bar{x}(t_0)\right\| < \frac{\varepsilon}{c} = \delta,$$

причем число δ не зависит от начального момента t_0. Таким образом, тривиальное решение $\bar{x} \equiv \bar{0}$ равномерно устойчиво при $t \to \infty$, а значит, и все решения этой системы также равномерно устойчивы при $t \to \infty$ (теорема 2).

Теорема 7. Линейная однородная дифференциальная система (6.31) с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_j = \lambda_j(A)$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части, т.е.

$$\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Доказательство.

1. Докажем сначала достаточность условия теоремы. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ $(m \le n)$ – все характеристические корни матрицы A, отвечающие различным клеткам Жордана, причем

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad (j = 1,\ldots,m). \qquad (6.40)$$

Из формулы (6.35) вытекает, что каждое решение системы (6.31) имеет вид

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t}\bar{P}_j(t),$$

где $\bar{P}_j(t)$ – полиномиальные матрицы. Отсюда на основании условия (6.40) получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\bar{x}(t) = \bar{0}$$

и, следовательно, в силу теоремы 5 система (30) асимптотически устойчива.

2. Докажем теперь необходимость условия (39). Пусть система (6.31) асимптотически устойчива. Тогда эта система асимптотически устойчива по Ляпунову, при $t \to \infty$ и, следовательно, на основании теоремы 6 имеем

$$\operatorname{Re}\lambda_j \le 0 \quad (j = 1,\ldots,m). \qquad (6.41)$$

Допустим, что найдется хотя бы один характеристический корень $\lambda_s = i\mu_s$ $(1 \le s \le m)$ такой, что

$$\operatorname{Re}\lambda_s = 0.$$

Тогда система (6.31) имеет решение вида

$$\bar{\xi} = e^{\lambda_s t}\bar{c} \equiv (\cos\mu_s t + i\sin\mu_s t)\bar{c},$$

где $\bar{c}$ – ненулевой вектор-столбец. Поэтому

$$\|\bar{\xi}\| = \|\bar{c}\| \ne 0$$

и, значит, $\bar{\xi} \not\to \bar{0}$ при $t \to \infty$, что противоречит асимптотической устойчивости системы (6.31). Следовательно,

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Теорема доказана полностью.

Замечание. Таким образом, чтобы доказать асимптотическую устойчивость линейной однородной системы (6.31), достаточно убедиться, что все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ее характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

обладают отрицательными вещественными частями. В следующем разделе мы рассмотрим необходимые и достаточные условия, при которых алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корни лишь с отрицательными вещественными частями.

6.5. Условия отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения

Критерий Гурвица

Рассмотрим полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \ (n \ge 1), \tag{6.42}$$

где $z = x + iy$ – комплексное число и $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные или комплексные коэффициенты.

Определение. Полином $f(z)$ степени $n \ge 1$ называется полиномом Гурвица, если все его корни (нули) $z_1, z_2, \ldots, z_n$ обладают отрицательными вещественными частями

$$\operatorname{Re} z_j < 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

т.е. все корни z_j расположены в левой комплексной полуплоскости.

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ полинома $f(z)$ действительны, причем

$$a_0 > 0\ ,\ \ a_n \neq 0. \qquad (6.43)$$

Такой, очевидно, не имеющий нулевых корней полином для краткости будем называть стандартным полиномом степени n $(n \geq 1)$.

Установим простое необходимое условие для полинома Гурвица.

Теорема. Если стандартный полином является полиномом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.

Доказательство. Пусть

$$z_j = -\alpha_j \pm i\beta_j \quad (j = 1, \ldots, p)$$

являются комплекснми корнями $(\beta_j \neq 0)$ полинома Гурвица $f(z)$ (1) и

$$z_k = -\gamma_k \quad (k = 1, \ldots, q)$$

являются действительными корнями этого полинома. В силу определения полинома Гурвица имеем

$$\alpha_j > 0, \quad \gamma_k > 0. \qquad (6.44)$$

Обозначим через σ_j $(j = 1, \ldots, p)$ кратность корня $z_j = -\alpha_j + i\beta_j$; поскольку коэффициенты полинома (6.42) действительны, то сопряженный корень $\bar{z}_j = -\alpha_j - i\beta_j$ имеет ту же кратность σ_j. Пусть кратность действительного корня γ_k $(k = 1, \ldots, q)$ есть s_k.

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{p} 2\sigma_j + \sum_{k=1}^{q} s_k = n.$$

Пользуясь известным разложением полинома $f(z)$ на линейные множители, имеем следующее:

$$f(z) \equiv a_n \prod_{j=1}^{n} (z + \alpha_j - i\beta_j)^{\sigma_j} (z + \alpha_j + i\beta_j)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^{q} (z + \gamma_k)^{s_k},$$

или

$$f(z) \equiv a_n \prod_{j=1}^{n} (z^2 + 2\alpha_j z + \alpha^2{}_j + \beta^2{}_j)^{\sigma_j} (z + \alpha_j + i\beta_j)^{\sigma_j} \prod_{k=1}^{q} (z + \gamma_k)^{s_k}. \qquad (6.45)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной z в правой и левой частях тождества (6.45), получаем, что все коэффициенты полинома $f(z)$ имеют одинаковые знаки. А поскольку в силу условия (6.43) $a_0 > 0$, то

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0. \qquad (6.46)$$

Теорема доказана.

Замечание. Легко показать, что для стандартного полинома второй степени

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2$$

условие теоремы является достаточным, т.е. если

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,$$

то этот полином будет полиномом Гурвица.

Для стандартного полинома степени выше второй из положительности его коэффициентов в общем случае не вытекает, что этот полином есть полином Гурвица.

Пример 4. Полином

$$f(z)=30+4z+z^2+z^3$$

имеет лишь положительные коэффициенты, но не является полиномом Гурвица, так как его корни есть $z_1=-3$, $z_2=1+3i$, $z_3=1-3i$.

Обозначим для краткости через H_n (n = 1, 2,…) совокупность всех стандартных полиномов Гурвица степени n, и пусть

$$H=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$$

есть множество всех стандартных полиномов Гурвица.

Для вывода необходимых и достаточных условий для отношения $f(z)\in H$ введем понятие присоединенных полиномов.

Определение. Полином

$$F(z)=Sf(z),$$

где

$$F(z)=(1+\alpha z)f(z)+f(-z)\ \ldots(\alpha>0),$$

будем называть присоединенным к полиному $f(z)$.

Лемма 1. Полином, присоединенный к стандартному полиному Гурвица, есть стандартный полином Гурвица, т.е. если

$$f(z)\in H_n, \text{ то } F(z)=Sf(z)\in H_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим полином

$$\Phi_\mu(z)=(1+\alpha z)f(z)+\mu f(-z), \tag{6.47}$$

где действительный параметр μ проходит отрезок $0\le\mu\le1$, причем

$$\Phi_1(z)=I(z).$$

Покажем, что корни $z_j(\mu)$ $(j=1,2,\ldots,n+1)$ полинома $\Phi_\mu(z)$ при $\mu\in[0,1]$ расположены в левой полуплоскости $\operatorname{Re}z<0$, т.е. полином $\Phi_\mu(z)$ есть полином Гурвица.

Действительно, прежде всего, полагая

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n,$$

где

$$a_0>0,\ a_1>0,\ \ldots,a_n>0,$$

будем иметь

$$\Phi_\mu(z)=b_0(\mu)+b_1(\mu)z+\ldots+b_n(\mu)z^n+\alpha a_n z^{n+1},$$

где $b_\nu(\mu)$ $(\nu=0,1,2,\ldots,n)$ – линейные функции параметра μ .

Отсюда, учитывая, что $\alpha a_n>0$, получаем

$$\left|\varPhi_\mu(z)\right|>0 \text{ при } |z|\ge R,\ \mu\in[0,1],$$

где R достаточно велико и не зависит от μ .

Следовательно, корни $z_j(\mu)$ заключены внутри достаточно большого конечного круга $|z|<R$ (рис. 6.7) и, значит, являются ограниченными непрерывными функциями параметра μ. При $\mu=0$ полином $\Phi_\mu(z)$ имеет корни, лежащие в левой полуплоскости, т.е.

$$\Phi_0(z)\in H_{n+1}.$$

Пусть теперь при некотором $\hat\mu\in[0,1]$ полином $\Phi_{\hat\mu}(z)$ не является полиномом Гурвица. Тогда по меньшей мере одна из кривых $z_j=z_j(\mu)$ покинет левую полуплоскость и, следовательно, при некотором значении $\hat\mu$ пересечет отрезок мнимой оси $[-Ri,Ri]$. Иными словами, при $\hat\mu\in(0,1]$ полином $\Phi_{\hat\mu}(z)$ имеет мнимый корень β_i, т.е.

$$\Phi_{\hat\mu}(\beta i)\equiv(1+\alpha\beta i)\,f(\beta i)+\hat\mu f(-\beta i)=0.$$

Отсюда

$$|1+\alpha\beta i|\,|f(\beta i)|=\hat\mu\,|f(-\beta i)|. \tag{6.48}$$

Поскольку значения полинома $f(z)$ с действительными коэффициентами в сопряженных точках z и $\bar z$ комплексно сопряжены, т.е.

$$f(\hat z)=\overline{f(z)},$$

то, учитывая, что коэффициенты полинома $f(z)$ действительны и что полином $f(z)$ есть полином Гурвица, будем иметь

$$|f(-\beta i)|=|f(\overline{\beta i})|=|\overline{f(\beta i)}|=|f(\beta i)|\ne 0.$$

Сокращая равенство (6.48) на равные, отличные от нуля величины $|f(\beta i)|$ и $|f(-\beta i)|$, получим

$$|1+\alpha\beta i|=\hat\mu,$$

т.е.

$$1+\alpha^2\beta^2=\hat\mu^2. \tag{6.49}$$

Поскольку

$$\Phi_\mu(0)=(1+\mu)a_0\ne 0,$$

то $\beta\ne 0$ и поэтому равенство (6.49) невозможно при $\hat\mu\in[0,1]$.

Итак,

$$F(z) = \Phi_1(z) \in H_{n+1}.$$

Лемма 2. Для всякого стандартного полинома Гурвица степени $n+1$ существует стандартный полином Гурвица степени n $(n \geq 1)$, по отношению к которому данный полином является присоединенным, т.е. если $F(z) \in H_{n+1}$, то существуют $\alpha > 0$ и $f(z) \in H_n$ такие, что

$$F(z) = Sf(z) \equiv (1+\alpha z) f(z) + f(-z). \tag{6.50}$$

Доказательство. Из функционального уравнения (6.50) имеем

$$F(-z) = (1-\alpha z) f(-z) + f(z). \tag{6.51}$$

Исключая $f(-z)$ из уравнений (6.51) и (6.50), получим

$$\alpha^2 z^2 f(z) = -(1-\alpha z) F(z) + F(-z). \tag{6.52}$$

Пусть

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n+1} z^{n+1}$$

и

$$F(-z) = A_0 - A_1 z + \ldots + (-1)^{n+1} A_{n+1} z^{n+1},$$

где $A_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

Если выбрать

$$\alpha = \frac{2A_1}{A_0} > 0, \tag{6.53}$$

то функция $f(z)$, определяемая формулой (6.52), очевидно, будет полиномом n-й степени. Легко проверить, что

$$Sf(z) = F(z).$$

Докажем, что $f(z) \in H_n$. Рассмотрим полином

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(z) = -(1-\alpha z)F(z) + \mu F(-z) \equiv -(1-\mu)A_0 + (1-\mu)A_1 z + \\ +[\alpha A_1 - (1-\mu)A_2]z^2 + \ldots + \{\alpha A_{n-1} - [1-\mu(-1)^n]A_n\}z^n + \\ +\{\alpha A_n - [1-\mu(-1)^{n+1}]A_{n+1}\}z^{n+1} + \alpha A_{n+1} z^{n+2}, \end{aligned} \tag{6.54}$$

где постоянная α определяется по формуле (6.53) и параметр μ пробегает отрезок $[0, 1]$. Корни этого полинома $z_j = z_j(\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n+2)$ являются ограниченными непрерывными функциями параметра μ на отрезке $[0, 1]$. При $\mu = 0$ один из корней $z_{n+2} = \dfrac{1}{\alpha}$ находится в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, а все остальные корни z_j $((j < n+2))$ – в левой $\operatorname{Re} z < 0$. Такое расположение корней сохраняется при $\mu \in [0, 1)$. Действительно, если бы один из корней z_j перешел из одной полуплоскости в другую, то кривая $z_j = z_j(\mu)$ должна была бы пересечь мнимую ось и при некотором $\hat{\mu} \in (0, 1)$ полином $\Phi_{\hat{\mu}}(z)$ имел бы мнимый корень βi, т.е.

$$-(1-\alpha\beta i)F(\beta i)+\hat{\mu}F(-\beta i)=0,$$

и, следовательно,

$$\left|1-\alpha\beta i\right|\left|F(\beta i)\right|=\hat{\mu}\left|F-\beta i\right|, \tag{6.55}$$

причем $\beta\neq 0$, так как

$$\Phi_{\mu}(0)=-A_0(1-\mu)\neq 0 \text{ при } \mu\neq 1.$$

Отсюда, учитывая, что $F(z)$ – полином Гурвица, и рассуждая аналогично тому, как в лемме 1, будем иметь

$$\left|F(\beta i)\right|=\left|F(-\beta i)\right|\neq 0.$$

Поэтому из неравенства (6.55) выводим

$$\left|1-\alpha\beta i\right|=\hat{\mu}, \text{ т.е. } 1+\alpha^2\beta^2=\hat{\mu}^2,$$

что невозможно при $\alpha>0$ и действительном $\beta\neq 0$.

Из формулы (6.54) вытекает, что при $\mu=1$ полином $\Phi_{\mu}(z)$ имеет двукратный нулевой корень. Пусть корни $z_p(\mu)\to 0$ и $z_q(\mu)\to 0$ при $\mu\to 1-0$. На основании известных соотношений между корнями и коэффициентами полинома при $0\leq\mu<1$ получаем

$$\sum_{j=1}^{n+2}\frac{1}{z_j(\mu)}=\frac{A_1}{A_0},$$

или, переходя к действительным частям, находим

$$\sum_{j=1}^{n+2}\operatorname{Re}\frac{1}{z_j(\mu)}=\frac{A_1}{A_0}. \tag{6.56}$$

Отсюда следует, что один из корней $z_p(\mu)$ и $z_q(\mu)$ при $0\leq\mu<1$ должен иметь положительную вещественную часть, так как в противном случае, при $\mu\to 1-0$, левая часть равенства (6.56) стремилась бы к $-\infty$, а правая оставалась ограниченной и положительной, что, очевидно, невозможно. А поскольку $z_{n+2}(\mu)$ есть единственный корень с положительной вещественной частью при $0\leq\mu<1$, то полагая

$$\operatorname{Re}z_p(\mu)>0, \quad \lim_{\mu\to 1-0}z_p(\mu)=0,$$

получаем $p=n+2$. Без нарушения общности рассуждения можно принять $q=n+1$ и, следовательно,

$$\lim_{\mu\to 1-0}z_{n+1}(\mu)=0.$$

Тогда, учитывая, что

$$\alpha A_1-(1-\mu)A_2\to\alpha A_1\neq 0$$

при $\mu\to 1-0$, будем иметь

$$\lim_{\mu\to 1-0}z_j(\mu)=c_j, \ \operatorname{Re}c_j<0 \ \ (j=1,\ldots,n). \tag{6.57}$$

Поскольку на основании формул (6.52) и (6.54) при $\mu=1$ имеем

$$\Phi_1(z)=\alpha^2z^2f(z),$$

то c_j $(j=1,\ldots,n)$ являются корнями многочлена $f(z)$ и, следовательно,

$$f(z)\in H_n.$$

Замечание. Если

$$F(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_{n+1}z^{n+1}$$

есть стандартный полином степени $n+1$, причем $A_0>0$ и $A_1>0$, то на основании формул (6.52) и (6.53) получаем, что существует стандартный полином $f(z)$ степени n такой, что

$$Sf(z)=F(z).$$

Из лемм 1 и 2 следует, что множество всех стандартных полиномов Гурвица H можно построить, исходя из совокупности стандартных полиномов H_1 первой степени и последовательного применения операции присоединения S. А именно:

$$H_2=SH_1,$$
$$H_3=SH_2=S^2H_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и

$$H=\bigcup_{p=0}^{\infty}S^pH_1.$$

Рассмотрим стандартный полином

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n, \tag{6.58}$$

где $a_0>0$, $a_n\neq 0$ $(n\geq 1)$.

Составим $(n\times n)$-матрицу Гурвица

$$M_f=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \tag{6.59}$$

где принято $a_s=0$ при $s<0$ и $s>n$.

Теорема Гурвица. Для того чтобы стандартный полином (6.58) являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\begin{cases} \Delta_1=a_1>0, \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0, \\ \cdots \\ \Delta_n=a_n\Delta_{n-1}>0 \end{cases} \tag{6.60}$$

его матрицы Гурвица M_f (условие Гурвица).

Доказательство.

Необходимость.

Покажем, что если $f(z) \in H_n$, то условия Гурвица (6.60) выполнены. Для доказательства применим метод математической индукции.

При $n = 1$ имеем

$$f(z) = a_0 + a_1 z,$$

причем, если $f(z) \in H_1$, то $a_0 > 0$ и $a_1 \neq 0$. Поскольку корень $z_1 = -\dfrac{a_0}{a_1} < 0$, то условие Гурвица

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

выполнено.

Пусть теперь для всех полиномов $f(z) \in H_n$ теорема справедлива и $F(z) \in H_{n+1}$. На основании леммы 2 полином $F(z)$ можно рассматривать как присоединенный для некоторого стандартного полинома $f(z) \in H_n$, т.е.

$$F(z) = (1 + 2cz)\, f(z) + f(-z), \tag{6.61}$$

где

$$\alpha = 2c > 0.$$

Положим

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

где

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots, a_n > 0;$$

тогда

$$F(z) = 2\sum_{k=0}^{n+1} [c a_{k-1} + \frac{1 + (-1)^k}{2} a_k] z^k,$$

где $a_{k-1} = a_{n+1} = 0.$

Составляя главный диагональный минор k-го порядка матрицы Гурвица полинома $F(z)$, будем иметь

$$D_1 = 2ca_0 > 0$$

и

$$D_{k+1} = 2^{k+1} \begin{vmatrix} ca_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ ca_2 & ca_1 + a_2 & ca_0 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{2k} & ca_{2k-1} + a_{2k} & ca_{2k-2} & ca_{2k-3} + a_{2k-2} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, вынося за знак определителя общие множители с элементов нечетных столбцов (первого, третьего и т.д.), а затем вычитая из элементов четных столбцов (второго, четвертого и т.д.) соответствующие оставшиеся элементы нечетных и вынося за знак определителя общие множители c преобразованных элементов четных столбцов, находим

$$D_{k+1} = 2^{k+1}c^{k+1}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2k} & a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \cdots \end{vmatrix} = \alpha^{k+1}a_0\Delta_k$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

где Δ_k – главные диагональные миноры матрицы Гурвица M_f полинома $f(z)$.

Поскольку для полинома $f(z) \in H_n$ согласно индукционному предположению выполнены условия Гурвица, то

$$\Delta_k > 0 \ \ (k = 1, \ldots, n).$$

Поэтому, учитывая, что $a_0 > 0$, имеем

$$D_{k+1} > 0 \ \ (k = 0, 1, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

Достаточность.

Покажем, что если для стандартного полинома $f(z)$ выполнены условия Гурвица, то $f(z) \in H_n$.

Для $n = 1$ теорема, очевидно, справедлива, так как если

$$f(z) = a_0 + a_1 z,$$

где $a_0 > 0$ и $\Delta_1 = a_1 > 0$, то корень полинома

$$z_1 = -\frac{a_0}{a_1} < 0.$$

Пусть теперь теорема верна для всех полиномов $f(z) \in H_n$ и

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n+1} z^{n+1}$$

является некоторым стандартным полиномом степени $n+1$, для которого выполнены условия Гурвица:

$$A_0 > 0,\ D_1 = A_1 > 0,\ \ldots, D_{n+1} > 0.$$

В силу замечания к лемме 2 этот полином можно рассматривать как присоединенный к некоторому стандартному полиному

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

$a_0 > 0$ и $a_1 \neq 0$ степени n. Так же как и при доказательстве первой части теоремы, получаем, что главные диагональные миноры Δ_k матрицы Гурвица M_f удовлетворяют соотношениям

$$D_{k+1} = \alpha^{k+1}a_0\Delta_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где $\alpha > 0$. Отсюда

$$\Delta_k > 0 \ \ (k = 1, \ldots, n),$$

т.е. для полинома $f(z)$ выполнены условия Гурвица. А поскольку по предположению теорема верна для всех стандартных полиномов степени *n*, то $f(z) \in H_n$. Таким образом, полином $F(z)$ является присоединенным к стандартному полиному Гурвица $f(z)$, и, следовательно, на основании леммы 1 имеем

$$F(z) \in H_{n+1}.$$

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Если

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \tag{6.62}$$

есть стандартный полином Гурвица, то имеем

$$f(z) = z^n g\left(\frac{1}{z}\right),$$

где

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{6.63}$$

является также стандартным полиномом Гурвица, и обратно.

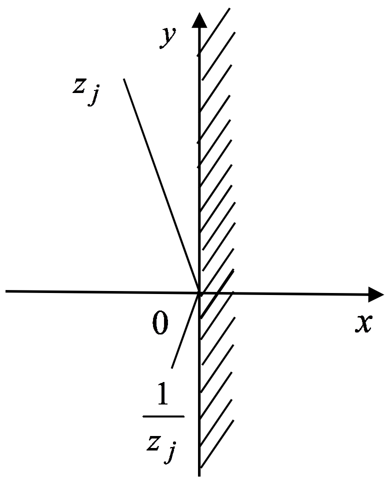

Рис. 6.7

Действительно, если z_j $(j = 1, \ldots, n)$ – корни полинома (6.62) и $\operatorname{Re} z_j < 0$, то $\frac{1}{z_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ – корни полинома (20) и $\operatorname{Re}\frac{1}{z_j} = \frac{\operatorname{Re} z_j}{|z_j|^2} < 0$ (рис. 6.7).

Поэтому условия Гурвица для полинома можно записывать также в виде

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_0 = a_n > 0, \\ \tilde{\Delta}_1 = a_{n-1} > 0, \\ \tilde{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \\ \ldots \\ \tilde{\Delta} n = a_0 \tilde{\Delta}_{n-1} > 0 \end{cases}$$

Замечание 2. Пусть

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \tag{6.65}$$

есть линейная однородная система с постоянной действительной матрицей $A = [a_{jk}]$ и

$$\det(\lambda E - A) = 0 \tag{6.66}$$

является её характеристическим уравнением. В раскрытом виде уравнение (6.66) имеет вид

$$\lambda^n - A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n A_n = 0,$$

где

$$A_1 = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha} = SpA,$$

$$A_2 = \sum_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \det A.$$

Для асимптотической устойчивости системы (6.65) необходимо выполнение следующих условий:

$$-A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \ldots, (-1)^n A_n > 0.$$

В частности, должно быть

$$\mathrm{Sp}A < 0,\ (1-)^n \det A > 0. \qquad (6.67)$$

Если система (6.65) – второго порядка $n = 2$, то условия (6.67) также достаточны для её асимптотической устойчивости.

В общем случае для асимптотической устойчивости системы (6.65) необходимо и достаточно выполнение условий Гурвица:

$$\tilde{\Delta}_1 = -A_1 > 0,$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} -A_1 & 1 \\ -A_3 & A_2 \end{vmatrix} = -A_1A_2 + A_3 > 0,$$

....

$$\tilde{\Delta}n = (-1)^n A_n \tilde{\Delta}_{n-1} > 0.$$

Пример 5. Для полинома

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r,$$

где p, r, q действительны, условия Гурвица есть

$$\begin{cases} r > 0, \\ \Delta_1 = q > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} q & r \\ 1 & p \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = 1 * \Delta_2 > 0, \end{cases}$$

т.е.

$$q > 0,\ 0 < r < pq.$$

Таким образом, в пространстве коэффициентов область $0pqr$ полиномов Гурвица ограничена положительной частью координатной плоскости $r = 0$ и гиперболическим параболоидом $r = pq$ (рис. 6.8).

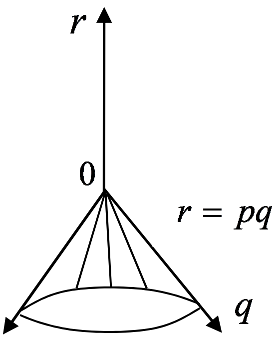

Рис. 6.8

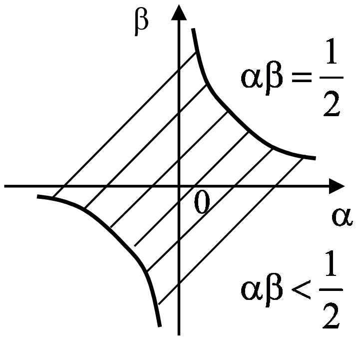

Рис. 6.9

Пример 6. Определить область асимптотической устойчивости для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - y + \alpha z, \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta y - z, \end{cases} \tag{6.68}$$

где α и β – действительные параметры.

Характеристическое уравнение для системы (6.68) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -\alpha & 0 \\ -\beta & \lambda+1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\lambda+1)[\lambda^2 + 2\lambda + (1 - 2\alpha\beta)] = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -1$, а по теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -2, \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 - 2\alpha\beta. \end{cases}$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ и $\mathrm{Re}\lambda_3 < 0$, если $1 - 2\alpha\beta > 0$. Поэтому асимптотическая устойчивость будет иметь место, если $1 - 2\alpha\beta > 0$, т.е. $\alpha\beta < \frac{1}{2}$ (рис. 6.9).

Критерий Михайлова

Если степень полинома $f(z)$ сравнительно большая, то применение критерия Гурвица становится затруднительным ввиду необходимости подсчета определителей высоких порядков. В это случае для определения расположения корней $z_1,\ldots,z_n$ полинома $f(z)$ на комплексной плоскости иногда оказывается более удобными геометрические признаки, эквивалентные критерию Гурвица. Мы здесь изложим один из них, так называемый частотный критерий А.В. Михайлова.

Пусть

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n \tag{6.69}$$

есть стандартный полином степени n $(n\geq 1)$, т. е. коэффициенты $a_0,\ldots,a_n$ действительны, $a_0>0$ и $a_n\neq 0$. Кривая

$$\omega=f(i\omega),$$

где ω – действительный положительный параметр $(0\leq\omega\leq+\infty)$ и $i=\sqrt{-1}$, называется годографом Михайлова функции $f(z)$.

Докажем одну лемму, из которой непосредственно следует принцип Михайлова.

Лемма. Пусть $f(z)$ – стандартный полином степени n, не имеющий чисто мнимых корней. Тогда угол поворота против хода часовой стрелки ненулевого вектора $f(i\omega)$ при $(0\leq\omega\leq+\infty)$

$$\Phi=\frac{\pi}{2}(n-2m), \tag{6.70}$$

где m – число корней полинома $f(z)$ с положительной вещественной частью $(0\leq m\leq n)$, с учетом их кратностей.

Обратно, если справедлива формула (6.70), то на положительной полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ расположено точно m корней полинома $f(z)$, где каждый корень считается столько раз, сколько составляет его кратность.

Доказательство.

1. Пусть стандартный полином $f(z)$ (6.69) степени n имеет всего $2p$ комплексно-сопряженных корней $\alpha_j\pm i\beta_j$ $(j=1,\ldots,p;\alpha_j\neq 0,\beta_j>0)$ и q действительных корней γ_k $(k=1,\ldots,q;\gamma_k\neq 0)$, где каждый корень считается столько раз, сколько составляет его кратность, т.е.

$$2p+q=n.$$

В частном случае, возможно $p=0$ или $q=0$.

Разлагая полином $f(z)$ на линейные множители и учитывая, что ввиду действительности его коэффициентов комплексно-сопряженные множители могут быть попарно объединены, получим

$$f(z)=a_n\prod_{j=1}^{p}(z-\alpha_j+i\beta_j)(z-\alpha_j-i\beta_j)\prod_{k=1}^{q}(z-\gamma_k).$$

Отсюда

$$f(i\omega)=a_n\prod_{j=1}^{p}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)(i\omega-\alpha_j i\beta_j)\prod_{k=1}^{q}(i\omega-\gamma_k). \qquad (6.71)$$

Интересующий нас угол поворота вектора $f(i\omega)$, очевидно, составляет

$$\Phi=\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(i\omega),$$

где Δ_Γ обозначает приращение соответствующей функции вдоль годографа Михайлова Γ, когда параметр ω изменяется от 0 до $+\infty$. Поскольку при $0\le\omega\le+\infty$ все множители произведения (6.71) ненулевые, в силу известных теорем об аргументе произведения имеем

$$\Phi_p=\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} a_n+\sum_{j=1}^{p}\Delta_\Gamma[\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)+\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{k}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg}(i\omega-\gamma_k), \qquad (6.72)$$

где под $\operatorname{Arg} z$ понимается некоторая непрерывная ветвь многозначной функции $\arg z+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ и $\arg z$ – главное значение аргумента: $-\pi<\arg z\le\pi$). Для определенности будем считать, что при $\omega=0$ аргументы всех слагаемых формулы (6.72) равны их главным значениям.

Очевидно,

$$\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} a_n=0. \qquad (6.73)$$

Пусть

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)\big|_{\omega=0}=\arg(-\alpha_j+i\beta_j)=\varphi_j \quad (0<\varphi<\pi).$$

Тогда

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\big|_{\omega=0}=\arg(-\alpha_j-i\beta_j)=\arg\overline{(-\alpha_j-i\beta_j)}=-\varphi_j.$$

Поэтому

$$\left\{\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)+\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\right\}\big|_{\omega=0}=0 \quad (j=1,\ldots,p). \qquad (6.74)$$

Поскольку $\beta_j>0$, то при увеличении параметра ω, как ясно из геометрических соображений, $\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)$, оставаясь в пределах от 0 до π, будет монотонно возрастать, если $\alpha_j<0$, и монотонно убывать, если $\alpha_j>0$; при этом

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)\big|_{\omega=+\infty}=\lim_{\omega\to+\infty}\arg(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)=$$
$$=\lim_{\omega\to+\infty}[\arg i\omega+\arg(1-\frac{\alpha_j-i\beta_j}{i\omega})]=\frac{\pi}{2} \quad (j=1,\ldots,p) \qquad (6.75)$$

при $\alpha_j\ne0$.

Рассмотрим теперь поведение $\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)$ при $\omega>0$.

Если $\omega=\beta_j-0>0$, то получаем

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\Big|_{\omega=\beta_j-0}=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\arg(-\alpha_j-i\varepsilon\omega)=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_j<0,\\ \pi \text{ при } \alpha_j>0.\end{cases}$$

Если же $\omega\geq\beta_j+0$, то в силу свойства непрерывности Arg$z$ следует положить

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)=\begin{cases}\arg(i\omega-\alpha_j-i\beta_j) \text{ при } \alpha_j<0,\\ -2\pi+\arg(i\omega-\alpha_j-i\beta_j) \text{ при } \alpha_j>0.\end{cases}$$

Отсюда

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\Big|_{\omega=+\infty}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, \text{ при } \alpha_j<0,\\ -\dfrac{3\pi}{2}, \text{ при } \alpha_j>0.\end{cases} \tag{6.76}$$

Таким образом, из формул (6.75) и (6.76) находим

$$\left\{\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)+\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\right\}\Big|_{\omega=+\infty}=\begin{cases}\pi \text{ при } \alpha_j<0,\\ -\pi \text{ при } \alpha_j>0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\Delta_{\Gamma}[\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)+\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)]=$$

$$=\left\{\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j+i\beta_j)+\operatorname{Arg}(i\omega-\alpha_j-i\beta_j)\right\}\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}=\begin{cases}\pi \text{ при } \alpha_j<0,\\ -\pi \text{ при } \alpha_j>0.\end{cases}\quad (j=1,\ldots,p). \tag{6.77}$$

Пусть теперь $z_k=\gamma_k$ – ненулевой действительный корень полинома $f(z)$. Имеем

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\gamma_k)\Big|_{\omega=0}=\arg(-\gamma_k)=\begin{cases}0 \text{ при } \gamma_k<0,\\ \pi \text{ при } \gamma_k>0,\end{cases}$$

и

$$\operatorname{Arg}(i\omega-\gamma_k)\Big|_{\omega=+\infty}=\lim_{\omega\to+\infty}\arg(i\omega-\gamma_k)=\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_{\Gamma}\operatorname{Arg}(i\omega-\gamma_j)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, \text{ при } \gamma_k<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ при } \gamma_k>0.\end{cases}\quad (k=1,\ldots,q). \tag{6.78}$$

Из формул (6.77) и (6.78) вытекает, что каждый корень с отрицательной вещественной частью стандартного полинома $f(z)$ обеспечивает при $0\leq\omega\leq+\infty$ поворот вектора $f(i\omega)$ в среднем на $+\dfrac{\pi}{2}$, а каждый корень этого полинома с положительной вещественной частью создает при $0 \le \omega \le +\infty$ поворот вектора $f(i\omega)$ в среднем на $-\frac{\pi}{2}$.

Пусть m – число корней нашего стандартного полинома $f(z)$ с положительной вещественной частью. Тогда число корней этого полинома с отрицательной вещественной частью ввиду отсутствия чисто мнимых корней равно $n-m$. Поэтому для суммарного поворота вектора $f(i\omega)$ при $0 \le \omega \le +\infty$ получаем следующее выражение:

$$\Phi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m(-\frac{\pi}{2}) = (n-2m)\frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь для стандартного полинома $f(z)$ степени n без чисто мнимых корней угол поворота при $0 \le \omega \le +\infty$ вектора $f(i\omega)$ определяется формулой (6.70) и $\tilde{m}$ – число его корней с положительной вещественной частью. Тогда согласно доказанному имеем

$$\Phi = \frac{\pi}{2}(n-2\tilde{m}). \quad (6.79)$$

Сравнивая формулы (6.79) и (6.70), получаем

$$\tilde{m} = m,$$

т.е. в этом случае полином $f(z)$ имеет в точности m корней на положительной полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Лемма доказана полностью.

Критерий Михайлова

Для того чтобы стандартный полином $f(z)$ (6.69), не имеющий чисто мнимых корней, являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота против хода часовой стрелки вектора $f(i\omega)$ при $0 \le \omega \le +\infty$ составлял бы

$$\Phi = \frac{\pi}{2}n, \quad (6.80)$$

где n – степень полинома $(n \ge 1)$.

Действительно, полагая $m = 0$ в формуле (6.70), получим соотношение (6.80).

Следствие. Если для стандартного полинома степени n имеет место неравенство

$$\Phi < \frac{\pi}{2}n,$$

то $f(z)$ не является полиномом Гурвица.

Замечание. Если стандартный полином $f(z)$ есть полином Гурвица степени n, то, как следует из формулы (6.72), вектор $f(i\omega)$ при $0 \le \omega \le +\infty$ монотонно поворачивается против хода часовой стрелки на угол $\frac{n\pi}{2}$.

Поскольку $f(0)=a_0>0$, годограф Γ Михайлова полинома $f(z)$, выходя из точки a_0 положительной полуоси $\operatorname{Re} z>0$, при $0 \le \omega \le +\infty$ будет последовательно пересекать полуоси $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z<0$, …, проходя через n квадрантов.

Обратно, если годограф Γ Михайлова стандартного полинома $f(z)$ степени n без чисто мнимых корней, выходя из точки $f(0)=a_0>0$ положительной полуоси $\operatorname{Re} z>0$, при $0 \le \omega \le +\infty$ последовательно по одному разу пересекает $n-1$ полуосей $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z<0$, …, асимптотически стремясь к n-й по счету полуоси, то угол поворота вектора $f(i\omega)$, очевидно, равен $\frac{n\pi}{2}$ и, следовательно, полином $f(z)$ есть полином Гурвица. на практике это обстоятельство можно проверить, построив график годографа Γ полинома $f(z)$.

Пример 7. Пользуясь критерием Михайлова, получить условия Гурвица для полинома

$$f(z)=z^3+pz^2+qz+r$$

(p, q, r действительны). Имеем

$$f(i\omega)=(-p\omega^2+r)+i\omega(-\omega^2+q).$$

Отсюда точки пересечения годографа $\Gamma(0 \le \omega \le \infty)$ полинома $f(z)$ с полуосями $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re} z<0$ последовательно суть $i\omega_k$ $(k=0,1,2)$, где

$$\omega_0=0,\ \omega_1=\sqrt{\frac{r}{p}},\ \ \omega_2=\sqrt{q}.$$

Поскольку ω_1 и ω_2 должны быть действительны,

$$\frac{r}{p}>0 \text{ и } q>0. \qquad (6.81)$$

Далее имеем

$$f(i\omega_0)=r,$$

$$f(i\omega_1)=i\sqrt{\frac{r}{p}}\left(q-\frac{r}{p}\right),$$

$$f(i\omega_2)=-(pq-r).$$

Отсюда, учитывая направления векторов $f(i\omega_k)$ $(k=0,1,2)$ для случая полинома Гурвица, находим

$$r>0,\ \ q-\frac{r}{p}>0,\ \ pq-r>0. \qquad (6.82)$$

Кроме того, полагая $\operatorname{Arg} f(i\omega)=0$ при $\omega=0$, очевидно, получаем

$$\lim_{\omega\to+\infty}\operatorname{Arg} f(i\omega)=\frac{3\pi}{2}.$$

Объединяя неравенства (6.81) и (6.82), получим искомые условия Гурвица:

$$p>0,\ q>0,\ 0<r<pq,$$

что согласуется с результатами, полученными ранее (см. пример 5).

6.6. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\psi_i(t,x_1,\dots,x_n),\quad t\ge t_0,\quad i=1,\dots,n, \tag{6.83}$$

где a_{ij} – постоянные, а $\psi_i(t,x_1,\dots,x_n)$ – непрерывные по t и x_k $(k=1,\dots,n)$ функции при $t\ge t_0$, $\|x\|<\varepsilon_0$, удовлетворяющие неравенству

$$|\psi_i(t,x_1,\dots,x_n)|\le\gamma(x)\|x\|,\ i=1,2,\dots,n, \tag{6.84}$$

причем положительная функция $\gamma(x)\to 0$ при $\|x\|\to 0$, а $\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

В этом случае система уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ j=1,2,\dots,n, \tag{6.85}$$

называется системой первого приближения для системы (6.83).

Теорема Ляпунова. Если все собственные числа матрицы $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\dots,n,$ системы (6.85) имеют отрицательные действительные части, а функции $\psi_i(t,x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяют неравенствам (6.84), то нулевое решение системы (6.83) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно собственное число матрицы A имеет положительную действительную часть, а функции $\psi_i(t,x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяют неравенствам (6.84), то нулевое решение системы (6.83) неустойчиво.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [4].

Рассмотрим примеры.

Пример 8. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases}\dot x=\sqrt{4+4y}-2e^{x+y},\\ \dot y=\sin ax+\ln(1-4y),\quad a=\text{const}.\end{cases}$$

Решение. Выделяя линейную часть функций по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{cases}\dot x=-2x-y+\psi_1(x,y),\\ \dot y=ax-4y+\psi_2(x,y),\end{cases}$$

где функции ψ_1 и ψ_2 очевидно удовлетворяют неравенствам (6.84).
Находим собственные числа матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

При $a > 1$ корни комплексные. $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -3 < 0$, а при $-8 < a \le 1$ корни вещественные отрицательные, значит, в этих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво.

При $a < -8$ один корень положителен, значит, нулевое решение неустойчиво.

При $a = -8$ имеем $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -6,$ и вопрос об устойчивости не решается с помощью изложенной теоремы.

Пример 9. Исследовать устойчивость положений равновесия математического маятника с трением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0\,, \quad k > 0.$$

Решение. Уравнение движения маятника эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - 2ky. \tag{6.86}$$

Положения равновесия этой системы определяются из уравнений $y = 0,\ \sin x + 2ky = 0.$ Отсюда $x = \pi n,\ y = 0,\ n \in Z$. В силу периодичности правых частей системы уравнений (6.86) по x достаточно исследовать устойчивость двух ее решений: $x = 0,\ y = 0$ (решение соответствует нижнему положению равновесия маятника).

Линеаризуем систему уравнений (6.86) в окрестности точки (0, 0). Для этого выделим из функций $\sin x$ ее линейную часть:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Система первого приближения, соответствующая уравнениям (6.86), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \ \frac{dy}{dt} = -x - 2ky.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов для этой системы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Поскольку по условию $k>0$, действительные части корней этого уравнения отрицательны. Следовательно, решение $x=0$, $y=0$ уравнений (6.86) асимптотически устойчиво.

Исследуем теперь устойчивость верхнего положения равновесия маятника, т.е. устойчивость решения $x=\pi$, $y=0$ системы уравнений (6.86). Поскольку в окрестности точки $x=\pi$ справедливо разложение

$$\sin x = -(x-\pi)+\frac{(x-\pi)^3}{3!}-\dots,$$

систему первых приближений, соответствующую уравнениям (6.86), запишем следующим образом:

$$\frac{d(x-\pi)}{dt}=y,\ \ \frac{dy}{dt}=(x-\pi)-2ky.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов этой системы определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -2k-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \ \lambda^2+2k\lambda-1=0.$$

Корни данного уравнения действительны и имеют разные знаки, поэтому решение $x=\pi$, $y=0$ уравнений (6.86) (верхнее положение маятника) неустойчиво.

Пример 10. Доказать, что если $\alpha<0$ и $2\alpha<\beta<-\alpha$, то решение $x=y=z=0$ системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\alpha x-\cos y+e^{\beta z},\\ \dfrac{dy}{dz}=\beta\sin x+\ln(1+\alpha y)-xz^2,\\ \dfrac{dz}{dt}=x^2\cos z+\beta y+\sin\alpha z\end{cases}$$

асимптотически устойчиво.

Решение. Линеаризуя в окрестности точки $x=y=z=0$ правые части данной системы, запишем уравнения первого приближения:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x+\beta z,\ \ \frac{dy}{dt}=\beta x+\alpha y,\ \ \frac{dz}{dt}=\beta y+\alpha z. \qquad (6.87)$$

Характеристическое уравнение системы уравнений (6.87) имеет вид

$$\lambda^3-3\alpha\lambda^2+3\alpha^2\lambda-\alpha^3-\beta^3=0. \qquad (6.88)$$

Для определения значений параметров α и β, при которых действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, воспользуемся критерием Гурвица. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} -3\alpha & 1 & 0 \\ -\alpha^3-\beta^3 & 3\alpha^2 & -3\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^3-\beta^3 \end{pmatrix}.$$

Условия отрицательности действительных частей корней уравнения (6.88) запишем в виде системы неравенств:

$$-3\alpha > 0, \quad -9\alpha^3+\alpha^3+\beta^3 > 0, \quad -\alpha^3-\beta^3 > 0.$$

Данная система неравенств эквивалентна следующей: $\alpha < 0$, $\beta - 2\alpha > 0$, $\alpha + \beta < 0$, т.е. $\alpha<0$, $2\alpha<\beta<-\alpha$.

Следовательно, если параметры α, β таковы, что $\alpha < 0$ и $2\alpha < \beta < -\alpha$, т.е. удовлетворяют условию задачи, то тривиальное решение $x = y = z = 0$ исходных уравнений асимптотически устойчиво.

Глава 7. Линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть искомая функция z зависит от нескольких независимых переменных: $x_1, x_2, ..., x_n\ (n \geq 2)$.

Уравнение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и частные производные от искомой функции, называется уравнением с частными производными. Оно имеет вид

$$F\left(z, x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^k z}{\partial x_1^k}, ...\right) = 0.$$

Здесь F – данная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения с частными производными.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с n независимыми переменными может быть написано в форме

$$F\left(z, x_1, x_2, ..., x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

7.1. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

Рассмотрим уравнение вида

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{7.1}$$

где $X_1, X_2, ..., X_n$ – данные функции независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ (мы их будем предполагать непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области), а f обозначает искомую функцию. Это уравнение называется линейным однородным уравнением в частных производных. Решением уравнения (7.1) называется дифференцируемая функция от $x_1, x_2, ..., x_n$, которая при подстановке в уравнение (7.1) обращает его в тождество. Запишем, наряду с дифференциальным уравнением в частных производных (7.1), систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричном виде:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = ... = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{7.2}$$

Задачи интегрирования уравнения (7.1) и системы уравнений (7.2) есть задачи эквивалентные. Справедлива следующая теорема (доказательство приведено в [1]):

Левая часть любого первого интеграла системы (7.2) есть решение уравнения (7.1); обратно, всякое решение уравнения (7.1), приравненное произвольной постоянной, дает первый интеграл системы (7.2).

Найдем вид наиболее общей функции, удовлетворяющей уравнению (7.1). Для этого заметим такое свойство оператора $X[f]$. Пусть $\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k)$ есть некоторая дифференцируемая функция своих аргументов, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда легко видеть, что

$$X\left[\Phi\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k\right)\right] = \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2} X[\psi_2] + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_k} X[\psi_k]. \quad (7.3)$$

Пусть теперь

$$\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = C_1, \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = C_2, ..., \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = C_{n-1} \quad (7.4)$$

есть некоторая определенная система (независимых) интегралов системы уравнений (7.2), определенная в некоторой области D

По указанной теореме $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ являются частными решениями уравнений (7.1), т.е. мы имеем тождества:

$$X[\psi_1] = 0,\ X[\psi_2] = 0,\ ...,\ X[\psi_{n-1}] = 0. \quad (7.5)$$

Возьмем теперь произвольную (дифференцируемую) функцию Φ от аргументов $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k). \quad (7.6)$$

В силу свойства (7.3), будем иметь тождественно:

$$X[\Phi] = 0,$$

т.е. выражение (7.6) является решением уравнения (7.1).

Таким образом, мы встречаемся при изучении уравнения в частных производных со следующим фактом: решение такого уравнения может содержать произвольные функции, тогда как решения обыкновенных дифференциальных уравнений заключали лишь произвольные постоянные. Нашей ближайшей задачей будет установить, что выражение (7.6) является общим решением уравнения (7.1), а также выяснить, какие дополнительные данные нужно ввести, чтобы из бесконечного множества решений, даваемых выражением (7.6), выделить одно определенное решение (задача Коши).

Докажем, что формула

$$f = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k), \quad (7.7)$$

где Φ есть произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, дает общее решение уравнения (7.2), т.е. в этой формуле содержится любое частное решение.

Пусть какое-нибудь решение уравнения (7.1) в области D есть $f = \Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда имеем тождественно $X[\Psi] = 0$, или, в раскрытой форме,

$$X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \tag{7.8}$$

Поскольку $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$, по предположению, есть решения, то имеют место тождества (7.5), которые в раскрытом виде перепишутся следующим образом:

$$X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7.9}$$

Система уравнений (7.8) и (7.9) для определения n функций $X_1, X_2, ..., X_n$ есть линейная однородная; она допускает не равные нулю решения, и, следовательно, определитель этой системы (тождественно) равен нулю. Этот определитель есть якобиан от функций ψ, $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$.

Итак, мы имеем:

$$\frac{D(\Psi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \equiv 0. \tag{7.10}$$

Отсюда, в силу основной теоремы о якобианах, следует, что между функциями $\Psi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ существует функциональная зависимость, т.е. для всех значений $x_1, x_2, ..., x_n$ в рассматриваемой области имеет место равенство (тождественно относительно $x_1, x_2, ..., x_n$):

$$F(\Psi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}) = 0. \tag{7.11}$$

Заметим, что в функциональном определителе, стоящем в левой части равенства (7.10), заведомо один из миноров первой строки не равен тождественно нулю; действительно, если система (7.2) имела неособые начальные значения

$$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, ..., x_n = x_n^0,$$

причем $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то, в предположении, что в системе (7.2) x_n взято за независимое переменное, и первые интегралы имеют вид $\psi_i = x_i^0 \ (i = 1, 2, ..., n-1)$ при значениях переменных, близких к начальным,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, ..., x_{n-1})} \neq 0.$$

Отсюда следует, в силу той же основной теоремы о якобианах, что соотношение (7.11) может быть разрешено относительно функции Ψ, и мы получаем:

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}).$$

Итак, всякое решение уравнения (7.1) дается (в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$) формулой (7.7). Теорема доказана. Можно сказать, что формула (7.7) дает общее решение уравнения (7.1).

Замечание. Из доказательства полученной теоремы можно вывести такое следствие: между любыми n решениями $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ уравнения (7.1) существует функциональная зависимость $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = 0$; если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ независимы, то функция Φ не обращается в рассматриваемой области в тождественный нуль, так как уравнение может быть разрешено относительно φ_n.

Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Для уравнения

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{7.12}$$

решим задачу Коши: найти решение уравнения $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ такое, чтобы

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0\right) = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right), \tag{7.13}$$

где x_n^0 – заданное число, $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ – заданная (дифференцируемая) функция своих аргументов.

Мы предположим, что φ определена для значений $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ в окрестности значений $x_1^0, x_2^0, ..., x_{n-1}^0$, причем точка$\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ не является особой точкой для системы (7.2); далее допустим, что $X_n\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \neq 0$.

При этих предположениях система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0\right) = \overline{\psi}_1, \\ &\psi_2\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0\right) = \overline{\psi}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_{n-1}\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0\right) = \overline{\psi}_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

где ψ_i являются независимыми интегралами системы (7.2), а $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}$ – новые переменные, может быть в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ разрешена относительно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

Пусть соответствующие формулы будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}\right), \\ x_2 &= \omega_2\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (7.15)$$

При этом, когда $\overline{\psi}_i$ принимают значения

$$\overline{\psi}_i^0 = \psi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

соответствующие функции ω_i принимают значения $x_i^0 \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$. При наличии частных производных у функций ψ_i функции ω_i также являются дифференцируемыми. Покажем, что искомое решение уравнения (7.12), удовлетворяющее начальному условию (7.13), есть

$$\begin{gathered} f = \varphi(\omega_1\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}\right), \omega_2\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}\right), ..., \\ \omega_{n-1}\left(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}\right)). \end{gathered} \qquad (7.16)$$

Действительно, во-первых, выражение (7.16), являясь функцией от частных решений ψ_i, само является решением уравнения (7.12); далее, если положить $x_n = x_n^0$, то величины ψ_i обращаются в $\overline{\psi}_i$, в силу формул (7.14). Но по формулам (7.15) $\omega_i\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}\right)$ равны величинам $x_i \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$; поэтому из формулы (7.16) получаем: при $x_n = x_n^0$ $f = \varphi\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}\right)$, т.е. условие (7.13) выполнено.

Из построения решения очевидно, что оно однозначно определено начальными данными (7.13).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ... = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Независимая система ее первых интегралов есть

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \frac{x_2}{x_n} = C_2, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1} \quad \left(x_n \neq 0\right).$$

Общее решение данного уравнения есть

$$f = \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

т.е. наиболее общая однородная функция n переменных нулевого измерения (обращение теоремы Эйлера об однородных функциях для функций нулевого измерения).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0$$

(искомая функция обозначена буквой z).

Соответствующая система обыкновенных уравнений сводится к одному уравнению:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

и имеет место интеграл $x^2 + y^2 = C$. Общее решение данного уравнения $z = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$, где φ есть произвольная функция, геометрически представляет любую поверхность вращения с осью вращения $0z$. Задача Коши: $z = f(x)$ при $y = 0$, где f есть данная функция; ее решение: функция ψ есть $x^2 + y^2$, следовательно, функция $\overline{\psi}$ есть x^2, откуда $x = \sqrt{\psi}$; искомое решение: $z = f\left(\sqrt{\psi}\right) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

7.2. Линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка

1. Обозначим искомую функцию через z, независимые переменные через $x_1, x_2, ..., x_n$.

Названное в заголовке уравнение имеет вид

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \qquad (7.17)$$

где $P_1, P_2, ..., P_n, R$ – функции (непрерывные и непрерывно дифференцируемые) от $x_1, x_2, ..., x_n$, z. Линейные однородные уравнения (7.12) являются частным случаем уравнений типа (7.17), когда правая часть $R \equiv 0$ и когда коэффициенты $P_1, P_2, ..., P_n$ при производных не зависят от искомой функции.

Уравнение вида (7.17) может быть приведено к однородному линейному уравнению следующим образом. Мы будем искать удовлетворяющую уравнению (7.17) функцию z от независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ в неявном виде:

$$V\left(z, x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0, \qquad (7.18)$$

так что искомой функцией будет V.

Из формулы (7.18) получаются значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Внося эти выражения в данное уравнение (7.17), умножив обе части на $\frac{\partial V}{\partial z}$ (мы предполагаем, очевидно, этот множитель не равным тождественно нулю и рассматриваем окрестность точки, где он не обращается в нуль) и перенося все члены в левую часть, получаем соотношение

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{7.19}$$

Из вывода соотношения (7.19) следует: в предположении, что (7.18) определяет z как решение уравнения (7.17), соотношение (7.19) должно удовлетворяться тождественно по $x_1, x_2, ..., x_n$, при условии, что вместо z подставлено его значение, определенное формулой (7.18). Если мы потребуем больше, а именно – чтобы искомая функция V удовлетворяла соотношению (7.19) тождественно относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ и z (т.е. рассматривая в уравнении (7.19), наряду с $x_1, x_2, ..., x_n$, также и z как независимое переменное), то (7.19) окажется линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка с искомой функцией V и $n+1$ независимыми переменными $x_1, x_2, ..., x_n$, z. Очевидно, каждое решение этого уравнения (7.19), содержащее z, будучи приравнено к нулю, дает соотношение (7.18), которое определит функцию z от $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющую данному уравнению (7.17). Заметим, что мы наложили дополнительное ограничение, потребовав, чтобы соотношение (7.19) выполнялось тождественно относительно $x_1, x_2, ..., x_n$, z; поэтому мы не можем утверждать заранее, что указанным приемом получим все решения уравнения (7.17). Мы еще вернемся к этому вопросу.

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую линейному уравнению в частных производных (7.19):

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}. \tag{7.20}$$

Эта система n уравнений имеет n независимых первых интегралов; пусть это будут:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_0(z, x_1, ..., x_n) = C_0, \\ \psi_1(z, x_1, ..., x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(z, x_1, ..., x_n) = C_{n-1}. \end{array}\right\} \tag{7.21}$$

Общее решение уравнения (7.19) имеет вид

$$V = \Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция. Из предыдущего вывода следует, что *уравнение*

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = 0 \tag{7.22}$$

определяет (если удовлетворяются условия теоремы существования для неявных функций) *z как функцию от* $x_1, x_2, ..., x_n$, *причем эта функция удовлетворяет данному уравнению* (7.17).

Пример 3. Найти решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf,$$

где m – постоянное.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая этому уравнению в частных производных, есть

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{mf};$$

система первых интегралов

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \quad \frac{f}{x_n^m} = C_n.$$

Решение, содержащее произвольную функцию Φ, будет:

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{f}{x_n^m}\right) = 0.$$

Разрешая относительно последнего аргумента и затем относительно *f*, получим:

$$f = x_n^m \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

где Ψ – произвольная функция. Это – полное обращение теоремы Эйлера об однородных функциях (см. пример 4).

2. Формула (7.22) решения дифференциального уравнения (7.17) выведена при дополнительном требовании, чтобы уравнение (7.19) удовлетворялось функцией *V* тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Посмотрим, насколько общей является эта формула, т.е. какие частные решения в ней заключаются.

Пусть

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{7.23}$$

есть какое-либо решение уравнения (7.17). Возьмем в системе первых интегралов уравнений (7.20) в качестве произвольных постоянных начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$; эта система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\psi_0(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = z_0,\\&\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

Подставим в левые части равенств (7.24) вместо z его выражение (7.23); для получившихся функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ введем обозначения:

$$\psi_k(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial\psi_k}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Замечая, что функции $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ удовлетворяют уравнению (7.19), мы получаем после подстановки в соответствующие тождества на место z его выражения (7.23) систему тождеств:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j\left(\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n\right)\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} + R(\phi, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi_k}{\partial z} = 0$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{7.25}$$

Поскольку, по предположению, (7.23) есть решение уравнения (7.17), то имеем тождество

$$\sum_{j=1}^{n} P_j\left(\varphi, x_1, \ldots, x_n\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - R(\varphi, x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Умножаем последнее равенство последовательно на $\frac{\partial\psi_0}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$, …, $\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial z}$ и прибавляем к соответствующим равенствам (7.25). В силу определения функций Ψ_k и их производных по x_j получаем:

$$P_1\left(\phi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n\right)\frac{\partial\psi_k}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\phi, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi_k}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Таким образом, $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ являются системой n решений уравнения в частных производных с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$P_1\left(\varphi, x_1, \ldots, x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\varphi, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Отсюда, в силу замечания, существует тождественная по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависимость между $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$:

$$\Phi(\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0 \tag{7.26}$$

Следовательно, существует такая функция $\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$, что по подстановке в нее вместо z выражения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы получаем тождественно нуль. Таким образом, любое решение z при указанных условиях относительно коэффициентов P_i и R удовлетворяет соотношению вида (7.22). В этом смысле (7.22) *определяет общее решение*.

Заметим, что в противоположность однородному линейному уравнению в частных производных мы могли здесь доказать представимость при помощи формулы (7.22) частных решений лишь при выполнении коэффициентами уравнения добавочных условий непрерывности частных производных от коэффициентов и необращения в нуль одновременно всех коэффициентов P_i. Если эти условия не выполнены, уравнение (7.17) может иметь решения, не входящие в формулу (7.22), они соответствуют обращению в нуль левой части (7.19) не тождественно, а лишь в силу соотношения $V = 0$. Такие решения называются *специальными*.

Пример 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1 + \sqrt{z - x - y}) + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Уравнение (7.19) имеет здесь вид

$$(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + 2\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений есть

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Первые интегралы: 1) $z - 2y = C_1$; 2) из интегрируемой комбинации $\frac{dy}{1} = \frac{dz - dy - dx}{-\sqrt{z - x - y}}$ имеем $y + 2\sqrt{z - x - y} = C_2$. Общее решение получается из соотношения

$$\Phi\,(z - 2y,\, y + 2\sqrt{z - x - -y}) = 0.$$

Но данное уравнение имеет еще решение $z = x + y$. Если выражение $V = z - x - y$ подставить в левую часть уравнения для V, мы получим $-\sqrt{z - x - y} = -\sqrt{V}$; это выражение обращается в нуль только в силу равенства $V = 0$. В данном примере в точках специального решения производные от коэффициентов перестают быть ограниченными.

3. Пусть в начальной точке $\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_n^0$ мы имеем

$$P_n\,(\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0) \neq 0.$$

Тогда в системе (7.20) можно взять x_n за независимое переменное. Систему первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений (7.20) возьмем в виде, данном формулами (7.24), причем начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ изменяются в окрестности значений $\overline{z}_0, \overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0$, а x_n изменяется в окрестности $\overline{x}_n^0$.

Решим для уравнения (7.17) задачу Коши: найти решение этого уравнения, которое при $x_n = \overline{x}_n^0$ обращается в данную дифференцируемую функцию [определенную в окрестности значений $(\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_{n-1}^0)$]:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Подставим в интегралы (7.24) вместо x_n начальное значение x_n^0, результат обозначим через $\overline{\psi}_i$, имеем:

$$\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n^0) = \overline{\psi}_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7.27}$$

Разрешим уравнения (7.27) относительно $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$z = \varphi_0(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$
$$x_i = \varphi_i(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставим в эти формулы вместо x_n числовое значение $\overline{x}_n^0$ и заменим $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ через $\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}$. Получим выражение вида:

$$\left.\begin{aligned} &z = \omega_0(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ &x_i = \omega_i(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Легко видеть, что формулы (7.28) есть результат решения уравнений (7.27) относительно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Решение задачи Коши дается формулой

$$\begin{aligned} &V(z, x_1, \ldots, x_n) \equiv \omega_0(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) - \\ &-\varphi\left[\omega_1(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\right] = 0. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Докажем прежде всего, что уравнение (7.29) определяет z как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в окрестности значений $\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_n^0$. Для этого достаточно показать, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\substack{z = \overline{z}_0 \\ x_i = \overline{x}_i^0}} \neq 0.$$

Вычисляем эту производную:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z}+\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial \phi}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z}+\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}\right).$$

Согласно формулам (7.28) мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_0}\right)_{\substack{x_n=x_n^0\\ z=z_0\\ x_i=x_i^0}}\equiv\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \overline{\psi}_0}\right)_{\substack{z=z_0\\ x_i=x_i^0}}=1;$$

аналогично $\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_i}\right)_0\equiv\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_0=0,$ а также $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_j}\right)=1$ или 0, в зависимости от того, имеем ли $i=j$ или $i\neq j$.

Далее получим:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right)_0=1,\ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)_0=0\ \ (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Итак,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0=1;$$

следовательно, эта производная не обращается в нуль в окрестности точки $(\overline{z}_0,\overline{x}_1^0,\ldots,\overline{x}_n^0)$, и формула (7.29) определяет z как функцию от $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Поскольку формула (7.29) является специальным видом уравнения (7.22), то полученная из нее функция z есть решение уравнения (7.17). Наконец, легко видеть, что она решает поставленную задачу Коши. Действительно, при $x_n=\overline{x}_n^0$ функции ψ_i обратятся в $\overline{\psi}_i(i=0,1,2,\ldots,n-1)$, в силу равенств (7.27); функции $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ от этих аргументов ввиду равенств (7.28) дадут соответственно $z,x_1,\ldots,x_{n-1}$, и мы получим: $z=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ при $x_n=\overline{x}_n^0$.

Таким образом, формула (7.22) (при надлежащем выборе первых интегралов) дает все частные решения, определяемые начальными данными Коши.

Само построение показывает, что решение задачи Коши – единственное в классе решений, удовлетворяющих условиям непрерывной дифференцируемости и одновременного необращения в нуль коэффициентов уравнения в точках решения.

Пример 5. Для уравнения примера 4 § 7.2 найти решение, удовлетворяющее данным Коши:

$$z=2x \text{ при } y=0.$$

Исходим из первых интегралов $\psi_0 \equiv z-2y=C_1$, $\psi_1 \equiv y+2\sqrt{z-x-y}=C_2$. Подставляя значение $y=0$, получаем:

$$z=\bar{\psi}_0, \quad 2\sqrt{z-x}=\bar{\psi}_1, \text{ откуда } z=\bar{\psi}_0, \quad x=\bar{\psi}_0-\frac{\bar{\psi}_1^2}{4}.$$

Подставляя эти значения в данное начальное уравнение и заменяя $\bar{\psi}_i$ через ψ_i, получим искомое решение:

$$\psi_0-2\psi_0+\frac{\psi_1^2}{2}=0,$$

или $2\psi_0-\psi_1^2=0$. Иначе:

$$2z-4y-y^2-4y\sqrt{z-x-y}-4z+4x+4y=0,$$

или

$$4y\sqrt{z-x-y}=4x-2z-y^2,$$

откуда

$$z=2x+\frac{3}{2}y^2-2y\sqrt{x-y+\frac{y^2}{2}}$$

(знак минус перед радикалом, как это следует из проверки, соответствует знаку плюс перед радикалом в данном уравнении).

4. Геометрический смысл линейного неоднородного уравнения с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим уравнение

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R.$$

В этом случае система трех переменных x, y, z допускает простое истолкование – как координаты точки трехмерного пространства. Эта интерпретация поможет нам глубже проникнуть в факты, связанные с линейным уравнением в частных производных. Введем обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\equiv p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\equiv q$$

и напишем уравнение в виде

$$Pp+Qq=R, \tag{7.30}$$

где P, Q, R – заданные (дифференцируемые) функции от x, y, z.

Искомое решение $z=f(x,y)$ представляет собой уравнение поверхности (интегральная поверхность), p и q – угловые коэффициенты ее касательной плоскости в точке с координатами (x, y, z).

Уравнение этой плоскости есть

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \qquad (T)$$

Уравнение (7.30) относит каждой точке пространства вектор

$$(P, Q, R). \qquad (V)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку (x, y, z) в направлении, даваемом векторным полем, есть

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}. \qquad (D)$$

Уравнение в частных производных (7.30) показывает, что прямая (D) лежит в плоскости (T).

Кривые в пространстве, которые в каждой точке касаются соответствующего вектора (P, Q, R) и вообще называются векторными кривыми, для уравнения (7.30) *называются характеристическими кривыми, или характеристиками*. Их дифференциальные уравнения есть

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (7.31)$$

Мы покажем, что *каждая интегральная поверхность составляется из характеристик*. Действительно, поставим себе задачу: найти на данной интегральной поверхности $z = f(x, y)$ такие кривые, которые в каждой точке касаются вектора (V); очевидно, для проекций этих кривых на плоскость (x, y) мы получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$, где в правой части надо заменить z через функцию $f(x, y)$. Но мы можем добавить еще одно дифференциальное уравнение; действительно, при перемещении по поверхности дифференциалы связаны соотношением

$$dz = p dx + q dy,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} = p + q\frac{Q}{P} = \frac{Pp + Qq}{P}.$$

В силу уравнения (7.30) это дает $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, т.е. мы пришли к дифференциальным уравнениям характеристик (7.31). Заметим, что *система* (29) *может быть проинтегрирована без знания интегральной поверхности*, и мы получим *семейство характеристик от двух параметров*, обладающее тем свойством, что через каждую точку (x_0, y_0, z_0) пространства (точнее, той области, где выполнены условия существования и единственности решения) проходит одна характеристическая кривая. Если взять два первых интеграла системы (7.31):

$$u(x,y,z)=a,\ v(x,y,z)=b, \tag{7.32}$$

то характеристики определятся как линии пересечения двух семейств поверхностей (7.32). Обратно, если на некоторой поверхности с непрерывно изменяющейся касательной плоскостью через каждую точку поверхности проходит лежащая на ней характеристика, то эта поверхность есть интегральная; в самом деле, в каждой ее точке вектор (*V*) лежит в плоскости (*T*), т.е. удовлетворяется уравнение (7.30).

Теперь ясно, как построить интегральные поверхности; для этого достаточно из семейства характеристик (7.32) из двух параметров выделить семейство от одного параметра по некоторому закону, притом так, чтобы полученная поверхность имела непрерывно изменяющуюся касательную плоскость, а для этой цели достаточно установить между параметрами a и b одно произвольное соотношение

$$\Phi(a,b)=0,$$

где Φ – дифференцируемая функция.

Исключая из этого соотношения и из уравнений (7.32) a и b, мы получаем уравнение интегральной поверхности:

$$\Phi\left[u(x,y,z),v(x,y,z)\right]=0.$$

Список литературы

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 468 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 319 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Интеграл-Пресс, 1998. – 208 с.
8. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 414 с.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.
10. Максимов В.П. О некоторых обобщениях обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задачах и их приложениях к задачам экономической динамики // Вестник Пермского государственного технического университета. Математика и прикладная математика. – 1997. – № 4. – С. 103–121.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Жорданова форма матрицы

Пусть $A=[a_{ik}]$ – квадратная матрица порядка *n* и

$$\Delta(\lambda)\equiv\det(\lambda E-A)=0 \qquad (\text{П}1.1)$$

есть ее характеристическое или вековое уравнение. В раскрытом виде имеем

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

Обозначим через λ_p $(p=1,\dots,n)$ корни характеристического уравнения (П1.1) (характеристические корни или собственные значения матрицы *A*). Можно доказать, что с помощью преобразования подобия

$$J=SAS^{-1} \qquad (\text{П}1.2)$$

$(\det S\neq 0)$ матрица *A* может быть приведена к квазидиагональной форме Жордана

$$J=\operatorname{diag}[J_1(\lambda_1),\dots,J_m(\lambda_m)]\ (m\leq n),$$

где

$$J_p(\lambda_p)=\begin{vmatrix}\lambda_p & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p\end{vmatrix}=\lambda_p E_{e_p}+I_1^{(e_p)}\quad (p=1,\dots,m;\ e_1\geq 1,\dots,e_m\geq 1)$$

есть так называемые клетки Жордана, причем каждому характеристическому корню λ_p кратности α_p соответствует одна или несколько клеток Жордана размерами $e_p^{(1)},\dots,e_p^{(r)}$ такие, что

$$e_p^{(1)}+\dots+e_p^{(r)}=\alpha_p.$$

Легко убедиться, что каждой клетке Жордана $J_p(\lambda_p)$ порядка e_p с точностью до нулевого скалярного множителя отвечает один и только один собственный вектор матрицы *A*, имеющий в надлежащем базисе вид

$$x_p=\operatorname{colon}(0,\dots,0,\xi_p,0,\dots,0),$$

где $\xi_p\in E_{e_p}$ и

$$J_p(\lambda_p)\xi_p=\lambda_p\xi_p\ (\xi_p\neq 0),$$

причем различным клетками Жордана соответствуют линейно независимые собственные векторы. Поэтому постоянная r, так называемая степень вырождения соответствующего собственного значения λ_p, представляет собой максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы A, соответствующих λ_p.

В общем случае $r \le \alpha_p$. Если степень вырождения характеристического корня λ_p равна его кратности, т.е. $r = \alpha_p$, то, очевидно, $e_p^{(1)} = \ldots = e_p^{(r)} = 1$. Таким образом, в этом случае все соответствующие клетки Жордана будут содержать по одному элементу (простые клетки).

Поскольку

$$\lambda E = S^{-1} \lambda S \text{ и } A = S^{-1} J S,$$

то характеристический полином $\Delta(\lambda)$ может быть представлен в виде

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{e_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{e_m} \qquad (e_1 + \ldots + e_m = n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – характеристические числа матрицы A, соответствующие различным клеткам Жордана (не обязательно различные между собой).

Множители $(\lambda - \lambda_p)^{e_p}$ $(p=1,\ldots,n)$ называются элементарными делителями матрицы A, а натуральные числа e_p (т.е. размеры (порядки) клеток Жордана) – показателями элементарных делителей, соответствующих характеристическому числу λ_p или линейному множителю $\lambda - \lambda_p$.

Если все характеристические числа λ_p имеют простые элементарные делители ($e_p = 1$), то матрица Жордана J будет чисто диагонального вида:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

При этом числа λ_p не обязательно различны. Это обстоятельство, например, имеет место для симметрической матрицы.

Заметим, что, вообще говоря, характеристические числа λ_p – комплексные, и, следовательно, в общем случае как матрица преобразования S, так и матрица Жордана J имеют комплексные элементы. Если ограничиться действительными преобразованиями, то соответствующая модифицированная матрица Жордана будет иметь более сложный вид.

Можно доказать, что форма Жордана обладает свойством единственности, т.е. данную матрицу с помощью преобразования подобия (П1.2) можно привести только к единственной форме Жордана, с точностью до порядка клеток, и, в частности, размеры набора клеток Жордана не зависят от выбора матрицы *S*. Например, форма Жордана матрицы *A* будет полностью определена, если упорядочить ее характеристические числа λ_p $(p=1,...,m)$, а клетки Жордана, соответствующие одному и тому же характеристическому числу, расположить в порядке возрастания их размеров.

Пусть существует неособенная матрица $T(\det T \neq 0)$ такая, что

$$B = TAT^{-1}.$$

Отсюда

$$A = T^{-1}BT. \qquad (\text{П}1.3)$$

Теорема 1. Подобные матрицы имеют одинаковые формы Жордана (с точностью до порядка клеток).

Доказательство. Действительно, из формулы (П1.3) имеем

$$\lambda E - A = T^{-1}(\lambda E - B)T,$$

отсюда

$$\det(\lambda E - A) = \det T^{-1} \det(\lambda E - B) \det T = \det(\lambda E - B)$$

и, следовательно, характеристические полиномы матриц *A* и *B*, а значит, и их собственные значения $\lambda_p\,(p=1,...,n)$ совпадают между собой.

Кроме того, если $A = S^{-1}JS$, где J – форма Жордана, то

$$B = TAT^{-1} = TS^{-1}JST^{-1} = (ST^{-1})^{-1}J(ST^{-1}).$$

Таким образом, J – также форма Жордана матрицы *B*.

Следствие. Собственные значения $\lambda_p\,(p=1,...,n)$ матрицы *A* и ее элементарные делители $(\lambda - \lambda_p)^{e_p}$ $(p=1,...,m)$ являются инвариантами для преобразований подобия (П1.3).

Отметим еще один полезный результат.

Теорема 2. Верхняя треугольная $(n \times n)$ матрица

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & \gamma_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \equiv E\lambda + \Gamma, \qquad (\text{П}1.4)$$

где первый косой ряд отличен от нуля, т.е.

$$\gamma_{12}, \gamma_{23}, ...\gamma_{n-1,n} \neq 0, \qquad (\text{П}1.5)$$

подобна соответствующей клетке Жордана

$$J(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}=\lambda E+I_1. \qquad (\text{П}1.6)$$

Доказательство. Покажем, что существует неособенная матрица $S=\left[s_{jk}\right]$ такая, что

$$S^{-1}(\lambda E+\Gamma)S=\lambda E+I_1,$$

где I_1 – первый единичный косой ряд, или

$$\Gamma S=SI_1. \qquad (\text{П}1.7)$$

Положим

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,n-1} & 0 \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\Gamma S=\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12}s_{22} & \dots & \sum\limits_{p>1}\gamma_{1p}s_{p,n-1} & \gamma_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{p>2}\gamma_{2p}s_{p,n-1} & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad SI_1=\begin{bmatrix} 0 & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & s_{22} & \dots & s_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приравнивая в силу (П1.7) соответствующие элементы вторых диагоналей матриц SI_1 и ΓS, будем иметь

$$\begin{cases} s_{11}=\gamma_{12}s_{22}, \\ s_{22}=\gamma_{23}s_{33}, \\ \dots \\ s_{n-1,n-1}=\gamma_{n-1,n}. \end{cases}$$

Учитывая условие (П1.5), получим

$$\begin{cases} s_{11}=\gamma_{12}\gamma_{23}\dots\gamma_{n-1,n}\neq 0, \\ s_{22}=\gamma_{23}\dots\gamma_{n-1,n}\neq 0, \\ \dots \\ s_{n-1,n-1}=\gamma_{n-1,n}\neq 0. \end{cases} \qquad (\text{П}1.8)$$

Приравнивая соответствующие элементы третьих диагоналей матриц SI_1 и ΓS, находим

$$\begin{cases} s_{12} = \gamma_{12}s_{23} + \gamma_{13}s_{33}, \\ s_{23} = \gamma_{23}s_{34} + \gamma_{24}s_{44}, \\ \ldots \\ s_{n-2,n-1} = \gamma_{n-2,n-1}s_{n-1,n} + \gamma_{n-2,n}. \end{cases} \tag{П1.9}$$

где $s_{n-1,n} = 0$. Отсюда последовательно определяются элементы $s_{j,j+1}$ $(j \geq 1)$.

Аналогично находятся все остальные элементы матрицы *S*. Поскольку на основании (П1.8) имеем $\det S = s_{11}s_{22}\ldots s_{n-1,n-1} \neq 0,$ то матрица не особенная и, следовательно, теорема доказана.

Следствие 1. Если матрица *A* имеет вид

$$A = S^{-1}\mathrm{diag}[K_1(\lambda_1),\ldots,K_m(\lambda_m)]S,$$

где $\det S \neq 0$ и $K_p(\lambda_p)$ $(p=1,\ldots,m)$ – верхние треугольные матрицы специальной формы

$$K_p(\lambda_p) = \begin{bmatrix} \lambda_p & \gamma_{12}^{(p)} & \ldots & \gamma_{1n}^{(p)} \\ 0 & \lambda_p & \ldots & \gamma_{2n}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{bmatrix},$$

то числа λ_p $(p=1,\ldots,m)$ есть собственные значения матрицы *A*, причем если

$$\gamma_{12}^{(p)}\ldots\gamma_{n-1,n}^{(p)} \neq 0 \ (p=1,\ldots,m),$$

то размеры клеток $K_p(\lambda_p)$ представляют собой показатели элементарных делителей матрицы *A*.

Следствие 2. Всякую квадратную матрицу *A* с помощью преобразования подобия $B = SAS^{-1}$ можно привести к почти диагональному виду

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $b_{jk} \leq \varepsilon$ при $j \neq k$ и ε– сколь угодно мало.

Действительно, матрица *A* подобна матрице

$$J = \mathrm{diag}[J_1(\lambda_1),\ldots,J_m(\lambda_m)],$$

где $\lambda_p\,(p=1,...,m)$ $(m\leq n)$ – характеристические корни матрицы A и $J_p(\lambda_p)$ $(p=1,...,m)$ – соответствующие клетки Жордана. Поскольку в силу теоремы 2 имеем

$$J_p(\lambda_p)\sim K_p(\lambda_p)\ \ (p=1,...,m),$$

где

$$K_p(\lambda_p)=\begin{bmatrix}\lambda_p & \varepsilon & ... & 0\\ 0 & \lambda_p & ... & 0\\ ... & ... & ... & \varepsilon\\ 0 & 0 & ... & \lambda_p\end{bmatrix},$$

то, очевидно, матрица A подобна матрице

$$B=\mathrm{diag}[K_1(\lambda_1),...,K_m(\lambda_m)],$$

обладающей нужным свойством.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Экспоненциал матрицы

Пусть $X = (x_{jk})$ – квадратная матрица порядка n.

Определение. Под экспоненциалом квадратной матрицы X понимается матричная функция

$$\exp X \equiv e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}. \tag{П2.1}$$

Матричный ряд (П2.1) сходится для любой квадратной матрицы X и при том абсолютно. Действительно, составляя соответствующий ряд норм, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} \le \|E\| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} < \infty, \tag{П2.2}$$

что и доказывает наше утверждение.

В частности, на основании формулы (П2.2), используя I или II нормы, где $\|E\| = 1$, имеем

$$\left\|e^X\right\| \le \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X\|^p}{p!} = e^{\|X\|}.$$

Пусть матрицы X и Y перестановочны, т.е.

$$XY = YX.$$

Докажем основное свойство экспоненциала матрицы

$$e^X e^Y = e^{X+Y}. \tag{П2.3}$$

Действительно, в силу абсолютной сходимости разложения (П2.1) имеем

$$e^X e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \frac{Y^q}{q!}.$$

Положим

$$p + q = s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots);$$

тогда

$$q = s - p \ge 0, \text{ т.е. } p \le s,$$

и, следовательно,

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{s} \frac{X^p}{p!} \frac{Y^{s-p}}{(s-p)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^{s} C_s^p X^p Y^{s-p}, \tag{П2.4}$$

где

$$C_s^p = \frac{s!}{p!(s-p)!}$$

есть число сочетаний из s элементов по p. Поскольку матрицы X и Y перестановочны, то

$$\sum_{p=0}^{s} C_s^p X^p Y^{s-p} = (X+Y)^p.$$

Отсюда на основании формул (П2.4) и (П2.1) получаем

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}(X+Y)^s = e^{X+Y},$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (П2.3), в частности, находим

$$(e^X)^{-1} = e^{-X}. \qquad \text{(П2.5)}$$

Отметим еще одно свойство экспоненциала матрицы. Если X_1 – квадратная матрица, подобная матрице X, т.е.

$$X_1 = SXS^{-1} \quad (\det S \neq 0),$$

то имеем

$$e^{X_1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(SXS^{-1})^p = S\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} X^p\right) S^{-1} = Se^X S^{-1},$$

т.е.

$$\exp(SXS^{-1}) = S(\exp X)S^{-1}. \qquad \text{(П2.6)}$$

Нормальная форма экспоненциала матрицы

Пусть A – квадратная матрица. Рассмотрим экспоненциал более общего вида

$$e^{At}, \qquad \text{(П2.7)}$$

где t – числовой множитель (параметр). Обозначим через

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \; (m \leq n)$$

собственные значения матрицы A, отвечающие различным клеткам $J_1(\lambda_1), \ldots, Jm(\lambda_{m1})$ ее канонической формы Жордана, и пусть $e_1, \ldots, e_m$ соответственно порядки этих клеток. Тогда

$$A = S^{-1} \operatorname{diag}[J_1(\lambda_1), \ldots, Jm(\lambda m)]S,$$

где S – некоторая неособенная матрица $(\det S \neq 0)$.

Воспользовавшись формулой (П2.1) и учитывая известные свойства квазидиагональных матриц, имеем

$$e^{At} = \exp\{tS^{-1} \operatorname{diag}[J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m)]S\} = S^{-1} \operatorname{diag}[e^{tJ_1(\lambda_1)}, \ldots, e^{tJ_m(\lambda_m)}]S. \qquad \text{(П2.8)}$$

Поскольку

$$J_q(\lambda_q) = \lambda_q E_q + I_1^{(q)} \quad (q = 1, \ldots, m),$$

где E_q – единичная матрица порядка q и $I_1^{(p)}$ – ее первый единичный косой ряд, то

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}(\lambda_q E_q + I_1^{(q)})^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!(p-r)!} \lambda_q^{p-r} I_r^{(q)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{I_r^{(q)} t^r}{r!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!}. \qquad (\text{П}2.9)$$

Как известно,

$$I_r^{(q)} = [I_1^{(q)}]^r = 0 \text{ при } r \geq e_q,$$

причем

$$\sum_{p=r}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!} = e^{\lambda_q t}.$$

Поэтому из формулы (П2.9) окончательно получаем

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{J_q t} \sum_{r=0}^{e_q - 1} \frac{t^r}{r!} I_r^{(q)} \quad (q = 1, ..., m), \qquad (\text{П}2.10)$$

где $I_0^{(q)} = E_q$.

Формулы (П2.8) и (П2.10) и дают нормальную форму матрицы.

Замечание. Из формул (П2.8) и (П2.10) при $t = 1$ вытекает, что если $\lambda_q (q = 1, ..., m)$ – собственные значения матрицы A, то e^{λ_q} являются собственными значениями матрицы e^A, причем, так как $e^{\lambda_q} \neq 0$, порядки соответствующих клеток Жордана матриц A и e^A одинаковы.

Пример. Написать нормальный вид матрицы e^{tA}, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица A в данном случае есть клетка Жордана, то на основании формулы (П2.4) получаем

$$e^{tA} = e^{2t}(E + \frac{t}{1!} I_1 + \frac{t^2}{2!} I_2) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Из формул (П2.8) и (П2.10) можно получить оценку нормы матрицы e^{At}.

Пусть

$$\alpha = \max_q \operatorname{Re} \lambda_q(A).$$

Используя I или II норму, на основании формулы (П2.8) при $t \geq 0$ получаем

$$\left\| e^{At} \right\| \leq \left\| S^{-1} \right\| \max_q \left\| \exp t J_q(\lambda_q) \right\| \left\| S \right\| \leq c \max_q \left| e^{\lambda_q t} \right| \sum_{r=0}^{e_q - 1} \frac{t^r}{r!} \leq c e^{\alpha t} P(t), \qquad \text{(П2.11)}$$

где $P(t)$ – некоторый целый полином степени $k = \max_q (e_q - 1)$.

Так как при любом ε > 0 имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{P(t)}{e^{\varepsilon t}} = 0,$$

то из формулы (П.2.11) находим

$$\left\| e^{At} \right\| \leq c e^{(\alpha + \varepsilon) t} \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \infty, \qquad \text{(П2.12)}$$

где $c = c(\varepsilon)$ – некоторая положительная постоянная.

Оценка вида (П2.12) имеет место также и для III нормы.

Отметим, что если характеристические числа матрицы A, обладающие наибольшими вещественными частями α, имеют простые элементарные делители, то при $t \geq 0$ справедлива улучшенная оценка:

$$\left\| e^{At} \right\| \leq c e^{\alpha t}. \qquad \text{(П2.13)}$$

Некоторые свойства экспоненциала матрицы

Найдем $\det e^{At}$. На основании формулы (П2.8) получаем

$$\det e^{At} = \det S^{-1} \det e^{tJ_1(\lambda_1)} \ldots \det e^{tJ_m(\lambda_m)} \det S = \prod_{q=1}^{n} \det e^{tJ_q(\lambda_q)}.$$

Поскольку в силу формулы (П2.10), очевидно, имеем

$$\det e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{eJ_q t} \quad (q = 1, \ldots, m),$$

то

$$\det e^{At} = \exp\left(t \sum_{q=1}^{m} e_q \lambda_q\right), \text{ где } e_1 + \ldots + e_m = n. \qquad \text{(П2.14)}$$

Собственные значения λ_q являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - A) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \det A = 0. \qquad (\text{П}2.15)$$

Поскольку выражение $\sum_{q=1}^{m} e_q \lambda_q$, очевидно, представляет собой сумму всех корней уравнения (П2.15), где каждый корень берется слагаемым столько раз, сколько составляет его кратность, то

$$\sum_{q=1}^{m} e_q \lambda_q = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = SpA.$$

Таким образом, из формулы (П2.14) имеем

$$\det e^{At} = e^{tSpA},$$

где

$$SpA = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \text{ – след матрицы } A.$$

Найдем производную матричной функции e^{At} по параметру t. Поскольку элементы матрицы

$$e^{At} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} t^p \qquad (\text{П}2.16)$$

представляют собой целые функции от t, то законно почленное дифференцирование ряда (П2.16) по t и, следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A^p}{(p-1)!} t^{p-1} = Ae^{At} = e^{At} A. \qquad (\text{П}2.17)$$

Из формулы (П2.17) следует, что матрица

$$X(t) = e^{At}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

причем $X(0) = E$.

В более общем случае, если $(n \times n)$-матрица $X(t) \in C^1$ коммутирует со своей производной $X'(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left[e^{X(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left[X(t)\right]^p\right\} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!}\left[X(t)\right]^{p-1} X'(t) =$$

$$= e^{X(t)} X'(t) = X'(t) e^{X(t)}.$$

Учебное издание

СОКОЛОВ Владимир Александрович

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор и корректор *Е.И. Герман*

Подписано в печать 10.09.2014. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 12.25. Тираж 20 экз. Заказ № 156/2014.

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.