Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Уральский энергетический институт

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано
методическим советом УрФУ
в качестве **учебного пособия** для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
231300 — Прикладная математика
141100 — Энергетическое машиностроение
140400 — Электроэнергетика и электротехника
140100 — Теплоэнергетика и теплотехника
141403 — Атомные станции: проектирование,
эксплуатация и инжиниринг
280700 — Техносферная безопасность

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Э45

Рецензенты:

кафедра высшей и прикладной математики Уральского государственного университета путей сообщения (завкафедрой, д-р физ.-мат. наук проф. **Г. А. Тимофеева**);
д-р физ.-мат. наук, зам. директора ИММ УрО РАН **В. Т. Шевалдин**

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук проф. **А. Н. Сесекин**

Элементы дискретной математики : учебное пособие / Д. С. Ананичев, И. Ю. Андреева, Н. В. Гредасова, К. В. Костоусов. — Екатеринбург : Изд-во Уральского университета, 2015. — 108 с.

Э45

ISBN 978-5-7996-1387-7

В учебном пособии рассматриваются элементы дискретной математики: логические исчисления, предикаты, булевы функции, комбинаторика, теория графов, автоматы и алгоритмы. Приведено решение типовых задач.

Предназначается для студентов всех форм обучения всех специальностей.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

ISBN 978-5-7996-1387-7

1. Логические исчисления

Множество, отношения, функции

Множества

Множество — совокупность объектов (элементов).
Множества A, B, ...
Элементы a, b, c, ...
$a \in A$ a — элемент A (a принадлежит A).
$a \notin A$ a — не элемент A (a не принадлежит A).

Основное свойство множеств

Для любых a и A выполняется ровно одно из двух условий: $a \in A$, $a \notin A$.

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов:
A = {0, 1, 2, 3, ..., 9}.
B = {красный, синий, зеленый}.
C = {борода, шляпа, очки}.
Можно задать лишь конечные множества.

2. Определяющие свойства:
$A = \{x \mid x$ — десятичная цифра$\}$.
$N = \{x \mid x$ — натуральное число$\}$.
$Z = \{x \mid x$ — целое$\}$.
$N_0 = \{x \mid x \in Z, x \geqslant 0\}$.
$Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\}$.
$R = \{x \mid x$ — действительное число$\}$.
$C = \{x \mid x$ — комплексное число$\}$.
$(2,3) = \{x \mid x \in R,\ x^2 - 5x + 6 < 0\}$.

Пример

$1 \in \{1,2,3\}$ — верно.

$1 \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ — не верно.

Элементы множества $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ – это множества (а не числа).

Пример

Рассмотрим $S = \{X \mid X \notin X\}$.

Допустим, что $S \notin S$, тогда элемент S удовлетворяет определяющему свойству множества S, следовательно, $S \in S$. Противоречие. Допустим, что $S \in S$, тогда элемент S не удовлетворяет определяющему свойству множества S, следовательно, $S \in S$. Опять противоречие. Таким образом, S не удовлетворяет основному свойству множества.

Проблема записи определяющим свойством — это чрезмерная сила.

$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ — *пустое множество* — множество без элементов. $\forall a$

U — *универсальное множество* — множество, содержащее все интересующие нас в данный момент элементы. $\forall a \quad a \in \underline{U}$.

$A \subseteq B$ — А подмножество В; В надмножество А, если $\forall a$

$A \not\subseteq B \; \exists a \; a \in A$ и $a \notin B$.

Лемма 1

$\forall A$ 1) $\varnothing \subseteq A$.

2) $A \subseteq A$.

3) $A \subseteq U$.

Доказательство:

1) от противного (о/п).

$\varnothing \not\subseteq A \to \exists a \; a \in \varnothing, \; a \notin A$.

2) очевидно.

3) по определению U.

$A = B$ (A равно B), если множества A и B состоят из одних и тех же элементов.

Замечание

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$$

Операции с множествами

A, B — множества.

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ — пересечение множеств A и B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение множеств A и B.

$x \in A$ или $x \in B$ означает, что выполняется хотя бы одно из двух.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — разность множеств A и B.

$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$ — дополнение до A.

Свойства $\forall$ A, B, C

Коммутативности

1) $A \cup B = B \cup A$ 1′) $A \cap B = B \cap A$

Ассоциативности

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 2′) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Дистрибутивности

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 3′) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Идемпотентности

4) $A \cup A = A$ 4′) $A \cap A = A$

Свойства нуля

5) $A \cup \varnothing = A$ 5′) $A \cap \varnothing = A$

Свойства единицы

6) $A \cup U = U$ 6′) $A \cap U = A$

Свойства дополнения

7) $A \cup \overline{A} = U$ 7′) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Свойство двойного дополнения

8) $\overline{\overline{A}} = A$

Тождества поглощения

9) $A \cup (A \cap B) = A$ 9′) $A \cap (A \cup B) = A$

Законы де Моргана

10) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 10′) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Доказательство 2′:

Докажем $\subseteq$: $\forall x \; x \in (A \cap B) \cap C$

$$(\text{по определению } \bigcap) \rightarrow \begin{cases} x \in A \bigcap B \\ x \in C \end{cases}$$

$$(\text{по определению } \bigcap) \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases}$$

$$(\text{по определению } \bigcap) \rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \bigcap C \end{cases}$$

$(\text{по определению } \bigcap) \rightarrow x \in A \bigcap (B \bigcap C)$.

Докажем $\supseteq$: нужно развернуть стрелки.

Лемма 2

$\forall A, B$ и $A \bigcap B \subseteq A \subseteq A \bigcup B$.

Доказательство: непосредственно следует из определения.

Лемма 3

1) $A \subseteq B$.

2) $A \bigcap B = A$.

3) $A \bigcup B = B$.

Данные условия эквивалентны.

Доказательство:

$1) \rightarrow 2)$:

докажем $\subseteq$: по Лемме 2,

докажем $\supseteq$: $\forall a \begin{Bmatrix} a \in A \\ A \subseteq B \end{Bmatrix} \rightarrow a \in B \rightarrow a \in A \bigcap B$.

$2) \rightarrow 1)$: $A = A \bigcap B$ (по Лемме 2) $\subseteq B$ (по свойству 1').

Лемма 4

$$\forall A, B, C \text{ и } A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \bigcap C \subseteq B \bigcap C \\ A \bigcup C \subseteq B \bigcup C \end{cases} (\text{стабильность} \subseteq \text{относительно} \bigcap \text{и} \bigcup).$$

Доказательство:

$\forall x \; x \in A \bigcap C$ (по определению $\bigcap$)

$$\rightarrow \begin{cases} x \in A \; (\text{по определению} \subseteq) \rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \rightarrow x \in B \bigcap C \\ x \in C \end{cases}$$

$\forall x\ x \in A \cup C\ x \in A \to A \subseteq B \to x \in B$ (по Лемме 2) $\subseteq B \cup C$ или
$x \in C$ (по Лемме 2) $\subseteq B \cup C$.

Следствие из Леммы 4

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases} \to \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \cup C \subseteq B \cup D \end{cases}$$

Доказательство:
$A \cap C$(по Лемме 4) $\subseteq B \cap C$(по Лемме 4) $\subseteq B \cap D$.

Доказательство свойства 4:
По Лемме 1 $A \subseteq A$ вместе с Леммой 3 получаем $A \cup A = A$.

Доказательство свойства 6:
По Лемме 1 $\varnothing \subseteq A$ вместе с Леммой 3 получаем $A \cup \varnothing = A$.

Доказательство свойства 9′:
По Лемме 2 $A \subseteq A \cup B$ вместе с Леммой 3 $A \cap (A \cup B) = A$.

Доказательство свойства 3:
Сначала докажем $\supseteq$:

$A \cap C$ (по Лемме 2) $\subseteq C$.

$B \cap C \subseteq C$

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$(по следствию из Леммы 4) $\subseteq C \cup C$(по свойству 4) $= C$.

$A \cap C$(по Лемме 2) $\subseteq A$(по Лемме 2) $\subseteq A \cup B$.

$B \cap C$(по Лемме 2) $\subseteq B$(по Лемме 2) $\subseteq A \cup B$.

$(A \cap C) \cup (B \cap C)$(по следствию из Леммы 4) $\subseteq (A \cup B) \cup (A \cup B)$
(по свойству 4) $= (A \cup B)$.

$Z = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

$$\left.\begin{array}{l} Z \subseteq C \\ Z \subseteq (A \cup B) \end{array}\right\} \Rightarrow Z(\text{по свойству } 4') = Z \cap Z$$

(по следствию из Леммы 4) $\subseteq (A \cup B) \cap C$.

Теперь докажем $\subseteq$:

$$\forall x\ x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \to x \in A \cap C \subseteq Z.$$

Или

$$\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \to x \in B \cap C \subseteq Z .$$

Булеан B (A) множества A — это множество всех его подмножеств.

Отношения

Упорядоченная пара элементов $x, y : (x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}$.

Основное свойство

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

Доказательство

1-й случай:

$x = y$

$(x, y) = (x, x) = \{\{x\}\} = \{\{z, t\}, \{z\}\} \to \{z, t\}$ —

одноэлементное множество $z = t = \{\{z\}\}$, значит $x = z,\ y = t$.

2-й случай:

$x \neq y$

$\{\{x, y\}, \{x\}\} = \{\{z, t\}, \{z\}\} \Rightarrow \{x, y\} = \{z, t\}$

Отсюда $\{z, t\}$ —

2-элементное множество

$\Rightarrow \{x\} \neq \{z, t\} \to \{x\} = \{z\} \to x = z;\ y \neq x \Rightarrow y = t.$.

Отождествим $(x_1, (x_2, x_3))$ и $((x_1, x_2), x_3)$.

Упорядоченная цепочка элементов $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ — это

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = ((x_1, x_2, ..., x_{n-1}), x_n).$$

Прямое произведение A и *B*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid \forall i \in \{1...n\} a_i \in A_i\}.$$

Чтобы задать отношение, достаточно указать все пары объектов, которые оно связывает.

Бинарное отношение ρ на множествах A и B — это $\rho \subseteq A \times B$.

N-арное отношение ρ — это $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Если $A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$, то $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A^n$ и $\rho \subseteq A^n$ ρ — *n*-местное отношение на A.

Отношение ρ на A:

рефлексивное, если $\forall x \in A \; x\rho x$;

симметричное, если $\forall x, y \in A \; x\rho y \to y\rho x$;

антисимметричное, если $\forall x, y \in A \begin{cases} x\rho y \\ y\rho x \end{cases} \to x = y$;

транзитивное, если $\forall x, y, z \in A \begin{cases} x\rho y \\ y\rho z \end{cases} \to x\rho z$.

Примеры

1) «=» на ***Z***.
2) «≤» на ***Z***.
3) «$\subseteq$» на ***B*** (A).
4) ρ соответствует фразе «...учится в одной группе с...» на множестве всех студентов университета.
5) ρ соответствует фразе «...одного года рождения с...» на множестве всех людей.
6) «|» на ***Z***.
7) «сравнимо по модулю *n*» на ***Z***.
8) «<» на ***Z***.

   $\rho \subseteq A^2$ — эквивалентность, если ρ — рефлексивно, транзитивно, симметрично.
9) A — множество всех направленных отрезков на плоскости.

   $\overrightarrow{AB} \rho \overrightarrow{CD} \Leftarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$ — это эквивалентность.

Вектор — множество всех сонаправленных отрезков одинаковой длины. $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right] = \{\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy} \rho \overrightarrow{AB}\}$.

$\rho \subseteq A^2$ — порядок, если ρ — рефлексивно, антисимметрично.

$R = \{A_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества A, если:

1) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;

2) $\forall i, j,\ i \neq j \to A_i \cap A_j = \varnothing$.

$a \in A\ \left[a_\rho\right] = \{x \mid x \rho a\}$ — класс эквивалентности ρ (класс по порядку ρ элемента a).

$A / \rho = \left\{\left[a\right]_\rho \mid a \in A\right\}$ — фактор множества A по порядку ρ.

Теорема (об отношениях эквивалентности)

1) ρ — эквивалентность на $A \Rightarrow \left\{\left[a\right]_\rho \mid a \in A\right\}$ — разбиение A.

2) $R = \{A_i \mid i \in I\}$ — разбиение A $\Rightarrow \rho : \left[x \rho y \Leftrightarrow \exists i \in I\ \ x \in A_i\ \ и\ \ y \in A_i\right]$ — эквивалентности и $A / \rho = R$.

Доказательство

1) $\bigcup_{a \in A} \left[a\right]_\rho = A$ очевидно $\forall a \in A\ \left[a\right]_\rho \subseteq A$.

$\bigcup_{a \in A} \left[a\right]_\rho \subseteq \bigcup_{a \in A} A = A \quad x \in A$, ρ рефлексивно.

$x \rho x \Rightarrow x \in \left[x\right]_\rho \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} \left[a\right]_\rho$

Разные классы не пересекаются.

$\left[a\right] \neq \left[b\right]$.

О/П.

$$\left[a\right] \cap \left[b\right] \neq \varnothing \Rightarrow \exists c \in \left[a\right] \cap \left[b\right] \to \begin{cases} c \in \left[a\right] \to \begin{cases} c \rho a \to \begin{cases} a \rho c \\ c \rho b \end{cases} \\ c \in \left[b\right] \to \begin{cases} c \rho b \to \begin{cases} a \rho c \\ c \rho b \end{cases} \end{cases} \end{cases} \to a \rho b .$$

$$\forall x : x \in \left[a\right] \to \begin{cases} x \rho a \\ a \rho b \end{cases} \to x \rho b \to x \in \left[b\right], \text{ то есть } \left[a\right] \subseteq \left[b\right].$$

Симметрично $\left[b\right] \subseteq \left[a\right] \Rightarrow \left[a\right] = \left[b\right]$ — противоречие.

2) $\forall x \in A \ \bigcup_{i \in j} A_i \Rightarrow \exists i \in I \ \ x \in A_i$ и $x \in A_i \Rightarrow x \rho x \Rightarrow \rho$ рефлексивно.

ρ очевидно симметрично.

$$\forall x, y, z \in A \begin{cases} x \rho y \\ y \rho z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \exists i \in I \ \ x \in A_i \text{ и } y \in A_i \\ \exists j \in I \ \ y \in A_j \text{ и } z \in A_j \end{cases} \rightarrow i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,$$

но $y \in A_i \cap A_j \Rightarrow i = j \rightarrow \exists x \in A_i$ и $z \in A_i \rightarrow x \rho z$.

$A / \rho = R \ \subseteq \forall a \in A$ (надо показать, что $[a] \in R$) $A = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i \in I \ \ a \in A_i$

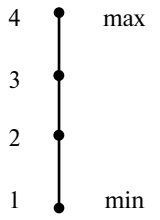
$x \in [a] \rightarrow x \rho a \rightarrow \exists j \ \ x \in A_i$ и $a \in A_j \Rightarrow [i = j]$.

$$\exists i \begin{array}{l} x \in A_i \Rightarrow [a] \subseteq A_i \\ x \in A_i \rightarrow x \rho a \rightarrow x \in [a] \Rightarrow A_i = [a] \Rightarrow [a] = A_i \end{array},$$ то есть $[a] \in R$.

$\supseteq \forall i \in I$ (надо $A_i \in A / \rho$) $a \in A_i \Rightarrow [a] = A_i$.

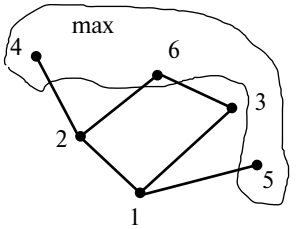
Структуры порядка

1) $\leq$ на $\{1,2,3,4\}$



Будем изображать элементы А точками на плоскости. Пусть они соответствуют элементу x, можно добраться по линиям снизу вверх до точки соответствует $y \Leftrightarrow x \rho y$, полученное изображение и есть структура порядка.

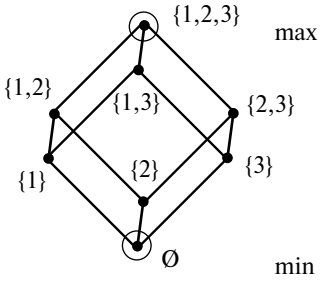
2) $|$ на $\{1,2,3,4,5,6\}$



2,3 — несравнимы.

Наибольшего нет.

3) $\subseteq$ на $\beta(\{1,2,3\})$:



Элемент $x \in A$ наибольший, если $\forall y \in A \; y\rho x$ (x больше всех).

$x \in A$ наименьший, если $\forall y \in A \, x\rho y$.

Элемент $x \in A$ максимальный, если $\forall y \in A \; x\rho y \to x = y$ (нет элемента, > чем x).

$x \in A$ минимальный, если $\forall y \in A \, y\rho x \to x = y$.

Замечание 1

Наибольший — максимальный $\forall b \in P \begin{cases} a\rho b \\ b\rho a \end{cases} \to a = b$.

Замечание 2

Наибольший единственный a_1, a_2 — наибольший $\begin{cases} a_2\rho a_1 \\ a_1\rho a_2 \end{cases} \to a_1 = a_2$.

Операции с отношениями

1) $\cup, \cap, \setminus, -$

Пример

$"<" \cup "=" = "\leq"$

$"\leq" \cap "\geq" = "=" = "$

$"<" \cup ">" = "=" \neq "$

2) $\rho^{-1} = \{(x, y) \mid y\rho x\}$ — обратное к ρ отношение.

$\rho \subseteq A \times B \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq B \times A$

Пример

$"<"^{-1} = ">"$

$"\mid"^{-1} = "\vdots"$

$x \vdots y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in Z$

$"="^{-1} = "="$

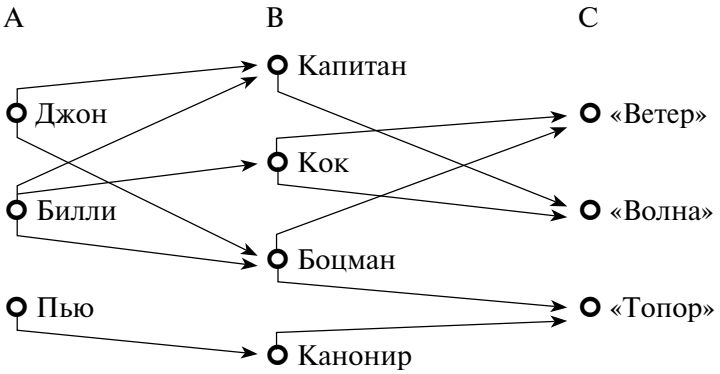
Замечание

$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

3) $\rho \le A \times B \ \ \sigma \subseteq B \times C$

$\rho \cdot \sigma = \{(x, y) \mid \exists\ z \in B \ \ x\rho z,\ z\sigma y\}$ — произведение отношений ρ и σ.

Пусть A — люди, B — должности, C — предприятия. Если ρ соответствует фразе «...способен быть...», σ соответствует фразе «...требуется на...», тогда ρ и σ соответствует фразе «...может наняться на...».



Теорема (о связи свойств и операций)

$\rho \in A \times A$.

1) ρ — рефлексивное $\Leftrightarrow$ «=» $\subseteq$ ρ.

2) ρ — симметричное $\Leftrightarrow \rho^{-1} \subseteq \rho \Leftrightarrow \rho^{-1} = \rho$.

3) ρ — антисимметричное $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq$ «=».

4) ρ — транзитивное $\Leftrightarrow \rho \cdot \rho \subseteq \rho$.

Доказательство:

2) $3 \to 2$ очевидно.

$2 \to 1\ \forall x, y \in A\ \ x\rho y$ (по определению ρ^{-1}) $\to y\rho^{-1}x \to y\rho x$.

$1 \to 3$

докажем $\subseteq$: $(x,y)\subseteq\rho^{-1}\to(y,x)\in\rho\to(x,y)\in\rho$.

докажем $\supseteq$: $(x,y)\in\rho\to(y,x)\in\rho\to(x,y)\in\rho^{-1}$.

3) $\Rightarrow (x,y)\in\rho\bigcap\rho^{-1}\to\begin{cases}(x,y)\in\rho\\(x,y)\in\rho^{-1}\end{cases}\to\begin{cases}x\rho y\\y\rho x\end{cases}\to x=y\to(x,y)\in\text{"}=\text{"}$.

$\Leftarrow \forall x,y\begin{cases}x\rho y\\y\rho x\end{cases}\to\begin{cases}x\rho y\\x\rho^{-1}y\end{cases}\to(x,y)\in\rho\bigcap\rho^{-1}\to x=y$.

4) $\Rightarrow(x,y)\subset\rho\cdot\rho\to\exists z\begin{cases}x\rho z\\z\rho y\end{cases}\to x\rho y\to(x,y)\in\rho$.

$\Leftarrow \forall x,y,z\begin{cases}x\rho y\\y\rho z\end{cases}\to x\rho\cdot\rho z\to x\rho z$.

Функции

$\rho\subseteq A\times B$.

Область определения $\rho: D_\rho=\{a\in A\,|\,\exists b\in B,\ a\rho b\}$.

Область значений $\rho: E_\rho=\{b\in B\,|\,\exists b\in B\ a\rho b\}$.

ρ — всюду определено, если $D_\rho=A$;

ρ — сюръективно, если $E_\rho=B$;

ρ — всюду определено $\forall a\in A\ \exists b\in B\ a\rho b$.

Утверждение 1

$D_\rho=E^{\rho^{-1}}=D_{\rho^{-1}}$.

ρ — всюду определенно $\Rightarrow\rho^{-1}$ сюръективно.

ρ — сюръективно $\Rightarrow\rho^{-1}$ всюду определенно.

Доказательство очевидно.

Утверждение 2

$\rho\subseteq A\times B$, $\sigma\subseteq B\times C$.

ρ,σ — всюду определенно $\Rightarrow\rho\cdot\sigma$ — всюду определенно.

ρ,σ — сюръективно $\Rightarrow\rho\cdot\sigma$ — сюръективно.

Доказательство:
$\forall c \in C \xrightarrow{\sigma - \text{сюръективно}} \exists b \in B$ в $\sigma c \xrightarrow{\rho - \text{сюръективно}} \exists a \in A \; a\rho b \Rightarrow a\rho\sigma c$

$\rho \subseteq A \times B$.

ρ — однозначное $\forall a \in A, b_1, b_2 \in B \begin{cases} a\rho b_1 \\ a\rho b_2 \end{cases} \rightarrow b_1 = b_2$

ρ — инъективное $\forall b \in B,\ a_1, a_2 \in A \begin{cases} a_1\rho b \\ a_2\rho b \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2$.

Утверждение 3

ρ — однозначно $\rightarrow \rho^{-1}$ — инъективно.

ρ — инъективно $\rightarrow \rho^{-1}$ — однозначно.

Утверждение 4

ρ, σ — однозначно $\Rightarrow \rho \cdot \sigma$ — однозначно.

ρ, σ — инъективно $\Rightarrow \rho \cdot \sigma$ — инъективно.

Доказательство:
$\forall a \in A,\ c_1, c_2 \in C$.

$\begin{cases} a\rho\sigma c_1 \rightarrow \exists b_1 \\ a\rho\sigma c_2 \rightarrow \exists b_2 \end{cases} \begin{cases} a\rho b_1, b_1\sigma c_1 \\ a\rho b_2, b_2\sigma c_2 \end{cases} \xrightarrow{\rho - \text{однозначно}} b_1 = b_2 = b$

и $\begin{cases} b\sigma c_1 \\ b\sigma c_2 \end{cases} \xrightarrow{\sigma - \text{однозначно}} c_1 = c_2$.

$\rho \subseteq A \times B$ — функция, если ρ — однозначно и всюду определено.

$\rho : A \rightarrow B$ (ρ — это функция, действующая из множества A в множество B).

(a, b) $\in \rho \Leftrightarrow a\rho b \Leftrightarrow b = \rho(a)$.

ρ — инъективно — функция вложена.
$\rho : A \rightarrow B$.

ρ — сюръективно — функция « отображение на ».
$\rho : A \rightarrow\!\!\succ B$.

Биекция.
$\rho : A \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ B$.

Теорема 1

$f: A \to B$, $g: B \to C$.

f, g — инъективные $\Rightarrow f \cdot g$ — инъективно.

f, g — сюръективные $\Rightarrow f \cdot g$ — сюръективно.

f, g — биекция $\Rightarrow f \cdot g$ — биекция.

Это следует из утверждений 2 и 4.

Теорема 2

$f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A \Rightarrow f$ — биекция.

f — биекция $\Rightarrow f^{-1}$ — биекция.

Это следует из утверждений 1 и 3.

Замечание

Пусть множества A и B — конечные, $\varphi: A \succ\!\!\to\!\!\succ B$, тогда в множествах A и B будет одинаковое количество элементов.

Доказательство

$\forall a \in A \ \exists! \ \alpha \in \varphi \ \alpha = (a, b)$.

В A и φ одинаковое количество элементов.

$\forall b \in B \ \exists! \ \alpha \in \varphi \ \alpha = (x, b)$.

В B и φ одинаковое количество элементов.

$|A|$ — количество элементов в A.

$\varphi: A \succ\!\!\to\!\!\succ B \Rightarrow |A| = |B|$.

Пример

$M_{m,n}$ – множество кратчайших маршрутов между противоположными концами города размером m на n кварталов. Легко проверить, что

$|M_{1,n}| = n + 1 \quad |M_{2,2}| = 6 \quad |M_{m,n}| = ?$

Анаграмма слова — это слово, полученное перестановкой букв.

ПОП → ПОП
ОПП
ППО

$$A_{m,n} = \left\{ \omega \mid \omega - \text{анаграмма слова } \underbrace{\text{ПП...П}}_{n} \ \underbrace{\text{ВВ...В}}_{m} \right\}.$$

Легко проверить, что $|A_{1,n}| = n + 1$, $|A_{2,2}| = 6$. $|A_{m,n}| = ?$

φ — правило:
идем вправо — пишем П;
идем вверх — пишем В.
$\varphi : M_{m,n} \to A_{m,n}$.

$\varphi^{-1} : A_{m,n} \to M_{m,n}$.

По Т2 φ — биекция.
$\left|A_{m,n}\right| = \left|M_{m,n}\right|$.

Пусть $\varphi : A \succ\!\!\to\!\!\succ B$, тогда мощность *A* равна мощности *B*. ($\left|A\right| = \left|B\right|$).

Лемма
$R = \{x_i \mid i \in N\}$ – разбиение X. $\forall i \in N \ \left|x_i\right| < \infty$. Тогда $\left|X\right| = \left|N\right|$.

Доказательство

Занумеруем X_i по очереди, тогда, поскольку $\left|\bigcup_{k=1}^{i-1} X_k\right| < \infty$, процесс дойдет до X_i на конечном шаге для любого *i*.

Пример (Диагональ Кантора)
$\left|N\right| = \left|R\right|$: $a_i \in Z$, $a_{i,j} \in \{0,1,2,...,9\}$.

Доказательство:
о/п: $\left|N\right| \neq \left|R\right| \Rightarrow \exists \varphi : R \succ\!\!\to\!\!\succ R$.

1) $\xrightarrow{\varphi} a_1, a_{11}, a_{12}, a_{13}...$

2) $\xrightarrow{\varphi} a_2, a_{21}, a_{22}...$

3) $\xrightarrow{\varphi} a_3, a_{31}, a_{32}...$

n) $\xrightarrow{\varphi} a_n, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}...$

$Z = 0, b_1, b_2, b_3$.

$b_i \in \{0,1,...,9\} \setminus \{a_{ii}\}$.

φ — сюръективно:
$\exists n \quad Z = \varphi(n)$, но $a_{nn} \neq b_n$ — противоречие.

$\left|A\right| \leq \left|B\right| \Leftrightarrow \exists \varphi : A \succ\!\!\to B$ (или $\exists \ B' \subseteq B \ \varphi : A \succ\!\!\to\!\!\succ B'$).

Теорема

$|A| \le |B|$ — порядок на множестве мощностей.

Доказательство:

$\leqslant$ — рефлексивно $|A| \le |A| \quad \exists A' = A \quad \varepsilon : A \succ\!\!\to\!\!\succ A' \ \forall a \in A \quad \varepsilon(a) = a$.

$\leqslant$ — транзитивно $|A| \le |B|, \ |B| \le |C|$.

$$\begin{cases} \varphi : A \succ\!\!\to B \\ \exists \psi : B \succ\!\!\to C \end{cases} \Rightarrow \varphi_0 \psi : A \succ\!\!\to C \Rightarrow |A| \le |C|.$$

$\leqslant$ — антисимметрично.

Предложение (Теорема Кантора-Бернштейна)

$\varphi : A \succ\!\!\to B, \ \psi : B \succ\!\!\to A \Rightarrow \exists \beta : A \succ\!\!\to\!\!\succ B$.

Доказательство:

$\alpha = \varphi_0 \psi : A \succ\!\!\to A \quad E_\alpha = \alpha(A)$

Строим цепочку множеств $A_0, \ A_1, \ A_2, ...$

$A_0 = A_1 \quad A_1 = \psi(B), \ A_2 = \alpha(A_0), \ A_3 = \alpha(A_1)$.

$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq ... \supseteq D ... A_k = \alpha(A_{k-2})$.

$A_1 = \psi(B) \supseteq A_2 = \psi(\varphi(A)) \ \ B \supseteq \varphi(A)$.

$A_3 = \alpha(\psi(B)) = \psi(\varphi(\varphi(B))) \quad A \supseteq \psi(B)$.

$$D = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \alpha(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \subseteq A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}.$$

Допустим: $x \leftarrow A_{2i} \setminus A_{2i+1} \ \ \alpha(x) \in A_{2i+3} = \alpha(A_{2i+1}) \Rightarrow \exists y \in A_{2i+1} \ \ \alpha(y) = \alpha(x)$ $x \ne y$, это противоречит инъективности α.

$y \in A_{2i+2} \setminus A_{2i+3} \Rightarrow \exists x \in A_{2i} \ \ \alpha(x) = y$.

Если $x \in A_{2i+1}$, то $y = \alpha(x) \in A_{2i+3}$.

Значит $x \notin A_{2i+1}$, то есть $x \in A_{2i} \setminus A_{2i+1}$.

Следовательно, $\alpha(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) = A_{2i+2} \setminus A_{2i+3} \ \ \alpha : A_{2i} \setminus A_{2i+1} \succ\!\!\to\!\!\succ A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}$ что $\forall i \in N_0$.

$$\beta(a) = \begin{cases} \alpha(a), \text{ если } \exists i \in N_0 \ \ a \in A_{2i} \setminus A_{2i+1}, \\ a, \ \text{иначе } \ a \in A_{2i+1} \setminus A_{2i+2} \ \text{ или } \ a \in D. \end{cases}$$

Убедимся, что $\beta : A \succ\!\!\to\!\!\succ A_1$.

Сюръективность: $\forall y \in A$ либо $y \in D \to y = \beta(y)$.

$y = \beta(y) \leftarrow$ либо $y \in A_{2i+1} \setminus A_{2i} \setminus A_{2i} \in N_0$.

$\exists x \in A_{2i-2} \setminus A_{2i-1} \leftarrow$ либо $y \in A_{2i} \setminus A_{2i+1} \in N$.

$\alpha(x) = y$.

Инъективность: $x, y \in A \quad \beta(x) = \beta(y)$.

Либо $\beta(x) \in D \to \beta(y) \in D \Rightarrow x = \beta(x) = \beta(y) = y$,

либо $\exists i \in N_0 \to \beta(x) \in A_{2i+1} \setminus A_{2i} \Rightarrow x = \beta(x) = \beta(y) = y$,

либо $\exists i \in N \to \beta(x) \in A_{2i} \setminus A_{2i+1} \Rightarrow \beta(x) = \alpha(x) = \alpha(y) =$

$$= \beta(y) \xrightarrow{\alpha - \text{инъективно}} x = y.$$

Итак, $\beta : A \succ\!\!\to\!\!\succ A_1$, но $\psi : B \succ\!\!\to\!\!\succ A_1 \Rightarrow \psi^{-1} : A_1 \succ\!\!\to\!\!\succ B$ $\beta \cdot \psi^{-1} : A \succ\!\!\to\!\!\succ \beta$, что и требовалось доказать.

2. Предикаты

Операции над предикатами

Предикат — функция *P* типа: $M^n \to B$, где $B = \{0,1\}$, *M* — произвольное множество, то есть функция *P*, сопоставляющая вектору $(m_1, m_2, ..., m_n)$ значение 0 или 1.

При этом множество M называется предметной областью предиката *P* $(m_1, m_2, ..., m_n)$; $m_1, m_2, ..., m_n$ — предметными переменными, *P* — предикатным символом.

Используется выражение: *n*-местный предикат на множестве M; число *n* называется местностью предиката.

В общем смысле предикатом называется отображение

$$P:\ M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to B,$$

где M_i есть некоторые множества. Прямое произведение $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ будем называть областью определения предиката *P*.

Область истинности предиката P — подмножество $I_p \subseteq M^n$ предметной области предиката *P*, на элементах которого значения предиката равны 1.

Пример

Одноместный предикат *P* (*X*) на множестве натуральных чисел: «при делении на 3 число *X* даёт остаток 2». Область истинности — множество чисел вида $3n + 2 (n = 0,1,2,..)$.

Пример

Двуместный предикат *Q* (*X, Y*): «при делении на 3 число *X* даёт остаток *Y*». Предметная область для *Q* (*X, Y*) — множество пар (*a, b*), где *a* и *b* — натуральные числа, причём $b \in \{0,1,2\}$.

Пример

Трёхместный предикат *R* (*X, Y, Z*): «при делении на *Z* число *X* даёт остаток *Y*». Предметная область — множество троек (*X, Y, Z*), где $X, Y, Z \in N$, $Z \neq 0$, $0 \leq Y < Z$.

Пример

Четырехместный предикат P (λ, L, M, N): «плоскость λ содержит точки L, M, N». Для плоскости λ: $3X - 2Y + 4Z + 7=0$ и точек L (−3, −5, −2), M (5, 13, 1), N (7, −4, −9) предикат P равен 1. Если же вместо точки M взять точку M (2, 6, 0), $P = 0$.

Любому n-арному отношению $R(m_1, m_2, ..., m_n)$ можно взаимно однозначно сопоставить n-местный предикат, который 1 для тех и только тех наборов $(m_1, m_2, ..., m_n)$, для которых выполнено $R(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Кванторы

Над предикатами на М можно производить логические операции и получать новые предикаты. Операции над предикатами есть операции над соответствующими отношениями: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и другие. Состав переменных и предметная область предиката, полученного в результате операции, определяются при этом естественным образом.

Например, $P(X_1, X_2, ..., X_n) \& Q(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = R(X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, где $X_1 \in M_1, X_2 \in M_2, ..., X_n \in M_n$, $Y_1 \in N_1, Y_2 \in N_2, ..., Y_n \in N_n$; среди переменных X_i, Y_j могут быть совпадающие переменные так же, как и среди множеств M_i, и N_j.

Примеры

1. $R(X,Y) = P(X) \& Q(Y)$, $X \in M$, $Y \in M$, X и Y — разные предметные переменные. Область определения двухместного предиката $R(X,Y)$ — множество $S = M^2$.

2. $R(X) = P(X) \& Q(X)$: у предикатов $P(X) \& Q(Y)$ — общая предметная область и одинаковая переменная; $R(X)$ — одноместный предикат на M.

3. $P(X) \to Q(X)$. Это означает: «если выполнено $P(X)$, то выполнено $Q(X)$», т. е. «если (X>2), то (X<5)» или, выражая импликацию через дизъюнкцию «(X>2) ∨ X<5». Можно устранить отрицание «$(X \le 2) \vee (X < 5)$». Отсюда получаем окончательно: «(X<5)».

Если $P(X,Y)$ — двухместный предикат, то фиксирование или конкретизация одной переменной превращает его в одноместный. Пусть, например, $P(X,Y)$ — «число X делится на число Y», определённый на множестве пар

натуральных чисел N, кроме пар $(X,0)$. Тогда $P(X,5)$ — одноместный предикат на N, истинный для всех чисел, кратных 5.

Для предикатов определяются две специфические операции, называемые навешиванием кванторов, которые превращают одноместный предикат $P(X)$ в 0-местный:

Квантор всеобщности — высказывание: «для всех X выполнено $P(X)$», обозначение $\forall X : P(X)$.

Квантор существования — высказывание: «существует X, для которого выполнено $P(X)$», обозначение $\exists X : P(X)$.

Процедура навешивания кванторов на предикат применима к любым предикатам.

Рассмотрим трёхместный предикат $P(X,Y,Z)$, который является истинным для некоторых троек (X,Y,Z). Предикату P можно сопоставить выражения с кванторами $\exists X : P(X,Y,Z)$ и $\exists X : P(X,Y,Z)$; первое означает: «для всякого X выполнено $P(X, Y, Z)$», второе — «существует X такой, что выполнено $P(X, Y, Z)$».

Пусть, например, $P(X, Y, Z) = 3X - 2Y > Z$ с предметной областью — множеством действительных чисел R, область истинности предиката P — полупространство по одну сторону от плоскости $3X - 2Y = Z$. Ему можно сопоставить выражения

$$Q_1(X,Y) = \forall X : 3X - 2Y > Z \text{ и } Q_2(X,Y) = \exists X : 3X - 2Y > Z .$$

Полученные двуместные предикаты зависят от Y и Z, но не зависят от X. Этот факт выражается так: переменная X в указанных предикатах связана квантором, а переменные Y, Z — свободные.

Связанные (свободные) переменные — это переменные, на которые навешены (соответственно — не навешены) кванторы $\forall X$ или $\exists X$.

Смысл связанных и свободных переменных в предикатных выражениях различен. Свободные переменные — это обычные переменные; они могут принимать значения из предметной области; выражение $P(X)$ — переменное высказывание, зависящее от значения X. В то же время выражение $\forall X : P(X)$ не зависит от X и при фиксированных предикате P и предметной области имеет вполне определённое значение: 0 или 1. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной не меняет истинности выражения.

Переменные, являющиеся по существу связанными, встречаются не только в логике. Например, в выражениях $\sum_{X=1}^{10} f(X)$ или $\int_a^b f(X)dX$ переменная X

связана, то есть при фиксированной f первое выражение равно определённому числу $f(1)+f(2)+...+f(10)$, а второе является функцией от a и b.

На предикат с навешенным квантором можно снова навешивать квантор, если у него есть свободные переменные. Если кванторы навешены на все переменные, предикат становится 0-местным, то есть высказыванием.

Пример

Для рассмотренного выше предиката $P(\lambda, L, M, N)$ предикат $\exists\lambda$: $P(\lambda, L, M, N)$ означает, что существует плоскость, содержащая 3 данные точки: L, M, N. Двуместный предикат $\forall L : (\exists\lambda : P(\lambda, L, M, N))$ можно записать короче: $\forall L \exists\lambda : P(\lambda, L, M, N)$, что означает: для любой точки L существует плоскость λ, содержащая эту точку и 2 данные точки: M, N. Наконец, предикат $\forall L : (\forall M : (\forall N : (\exists\lambda : P(\lambda, L, M, N))))$, или $\forall L$: $\forall M$: $\forall N$: $\exists\lambda$: $P(\lambda, L, M, N)$, выражает истинное высказывание о том, что для любых трёх точек существует содержащая их плоскость.

Область действия квантора — выражение, на которое навешивается квантор. Для устранения разночтений оно может быть заключено в скобки.

Примеры

1. $(\forall X : P(X, Y)) \vee Q(X)$.
2. $(\forall X : ((P(X, Y)) \vee Q(X))$.

Предикатные формулы. Тавтологии

Предикатная формула (формула логики предикатов) — формула, содержащая знаки булевых операций и кванторов.

Более точно, в формулах участвуют: символы предметных переменных X, Y, Z, ...; символы предикатов; логические символы $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, ~; символы кванторов.

Предикатной формулой (одновременно определяются понятия свободных и связных переменных) называется выражение, построенное по следующим правилам.

1. Если P — символ предиката, $X_1, X_2, ..., X_t$ — символы переменных (необязательно различных), то $P(X_1, X_2, ..., X_t)$ — предикатная формула; все её переменные свободные.

2. Если A — формула, то $\overline{A}$ — тоже формула с теми же свободными и связанными переменными.

3. Если A, B — формулы и нет переменных, свободных в одной из них и связанных в другой, то $A\&B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$ тоже формулы с теми же свободными и связанными переменными.

4. Если A — формула, содержащая свободную переменную X (и, быть может, другие переменные — свободные и связанные), то выражения $\forall X : A(X)$ и $\exists X : A(X)$ — предикатные формулы; в каждой их них переменная X переходит из множества свободных в множество связанных, т. е. число свободных переменных уменьшается, а число связанных увеличивается на 1. При этом формула A называется областью действия квантора.

В формуле должны быть правильным образом расставлены скобки, определяющие области действия кванторов и порядок выполнения логических и кванторных операций. Однако для сокращения записи могут быть удалены излишние скобки (считается, что знак квантора связывает сильнее, чем знак логической операции), также можно записывать кванторные формулы без знака «:».

Пример

Пусть $P(X,Y) = X \le Y$ для действительных чисел $X, Y \in R$. Это 2-местный предикат с предметной областью на числовой плоскости. Область истинности — полуплоскость, ограниченная биссектрисой | и ||| координатных углов, включающая точки границы. Формулы $\forall X : P(X,Y)$ и $\forall Y : P(X,Y)$ — одноместные предикаты со свободными переменными Y и, соответственно, X. Область истинности — пустое множество, так как не существует ни наибольшего, ни наименьшего среди действительных чисел. Предикат $\exists X : P(X,Y)$ — одноместный со свободной переменной Y. Его область истинности — вся числовая ось, так как какое бы ни было Y, существует меньшее число X.

Рассмотрим тот же предикат $P(X,Y) = X \le Y$ на предметной области натуральных чисел: $X, Y \in N = \{0, 1, 2, ...\}$. Область истинности предиката — целочисленные точки 1-го координатного угла, включая точки оси абсцисс, расположенные над биссектрисой и на ней. Область истинности для предиката $\forall X : P(X,Y)$ — пустое множество, для $\forall Y : P(X,Y)$ область истинности состоит из одного числа 0. Отсюда можно заключить, что предикат $\exists X : (\forall Y : P(X,Y))$ есть истинное высказывание (обе переменные — связанные), поскольку существует наименьшее натуральное число — 0.

Пример

1. Для предиката $P(X,Y) = X \le Y$ формула $P(X,Y) \& P(Y,X)$ выражает предикат $X = Y$. Тот же предикат $P(X,Y)$ может быть выражен через

3-местный предикат на множестве натуральных чисел $Q(S,T,U) = S + T = U$ следующим образом: $P(X,Y) = \exists S : Q(S,X,Y)$, т. е. существует такое *S,* что $X + S = Y$, или $Y - X = S \geq 0$. Формула $\exists S : Q(S,X,Y)$ означает, что *X* — чётное число (*X*=*S*+*S)*. Наконец, формула *P (X, Y)&P (Y, X)* выражает условие *X*<*Y*.

2. Предикат *R (X, Y, Z):* «при делении на *Z* число *X* даёт остаток *Y*» может быть выражен предикатной формулой $\exists k(X = kZ + Y), k \in N$.

Область истинности предиката, выраженного предикатной формулой, определяется областями истинности составляющих и применяемыми в формуле операциями:

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q;\ I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q;\ I_{\neg P} = \overline{I}_P;\ I_{P \to Q} = \overline{I}_P \cup I_Q.$$

Интерпретация — это сопоставление каждому предикатному символу в формуле определённого предиката.

Пусть две формулы *F* и *G* содержат одно и то же множество свободных переменных (может быть пустое).

Формулы *F* и *G* равносильны в данной интерпретации, если они выражают один и тот же предикат (то есть при одинаковых значениях предметных переменных они принимают одинаковые значения).

Пример

Если *P*(*X, Y*) = *X*>*Y*, *Q*(*X, Y*) = *X*>*Y*, то $\overline{P}(X,Y)$ и *Q*(*X, Y*) — равносильные формулы; при других интерпретациях *P* и *Q* эти формулы могут не быть равносильными.

Формулы *F* и *G* равносильны на множестве *M*, если они равносильны во всех интерпретациях на этом множестве.

Пример

$\exists X : P(X)$ и $\forall X : P(X)$ будут равносильны на одноэлементном множестве *M*: если существует подходящий X, то поскольку других значений нет, истинно и второе суждение. На множестве, содержащем более одного элемента, это уже не так.

Формулы *F* и *G* равносильны в логике предикатов, если они равносильны на всех множествах.

В этом случае можно назвать эту равносильность тождеством в логике предикатов, или законом логики предикатов и обозначать $F \equiv G$.

Для предикатных формул сохраняются все равносильности логики высказываний. Кроме того, справедливы такие эквивалентности для кванторных формул.

1. Перенос квантора через отрицание (законы де Моргана для предикатов): $\neg\forall X : A(X) \equiv \exists X : \neg A(X); \neg\exists X : A(X) \equiv \forall X : \neg A(X)$.

2. Вынесение квантора за скобки.

Если формула $A(X)$ содержит свободную переменную X, а формула B не содержит X и в них нет переменных, свободных в одной из формул и связных в другой, то:

$\exists X : (A(X) \& B) \equiv (\exists X : A(X)) \& B;$

$\forall X : (A(X) \& B) \equiv (\forall X : A(X)) \& B;$

$\exists X : (A(X) \vee B) \equiv (\exists X : A(X)) \vee B;$

$\forall X : (A(X) \vee B) \equiv (\forall X : A(X)) \vee B.$

3. Законы коммутативности для одноимённых кванторов.

$\forall X : (\forall Y : A(X,Y)) \equiv \forall Y : (\forall X : A(X,Y));$

$\exists X : (\exists Y : A(X,Y)) \equiv \exists Y : (\exists X : A(X,Y)).$

Коммутативность даёт использовать более короткую запись: $\forall X,Y,Z : P(X,Y,Z)$ или $\exists X,Y : Q(X,Y,Z)$ и т. п.

Отметим различие между логическими интерпретациями формул в логике высказываний и логике предикатов. Простое высказывание допускает два возможных значения, а сложное, составленное из n простых — 2^n. В отличие от высказываний предикат имеет, вообще говоря, бесконечное множество интерпретаций. Во-первых, может быть бесконечной область определения предиката, и предикатному символу можно сопоставить бесконечное множество различных функций. Во-вторых, предикат $P(m_1, m_2, ..., m_n)$ можно рассматривать на различных множествах M.

Многие предикаты, например, выражающие часто встречающиеся отношения, такие как $"=", ">", "<"$ и другие, имеют стандартные обозначения и вполне определенный (или оговорённый в пределах контекста) смысл. С точки зрения истинности для предикатных формул вводятся следующие понятия.

Формула F называется *выполнимой* (*непротиворечивой*), если существует интерпретация, в которой F имеет истинное значение, т. е. область истинности не пуста.

Тождественно истинная (общезначимая) формула, или *тавтология*, — формула, для которой при любой её интерпретации область истинности совпадает с областью определения.

Тождественно ложная (противоречивая) формула — это формула, для которой область истинности пуста.

Обозначение тавтологии: $\vdash F$, тождественно ложной — $\vdash \neg F$.

Формула F общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg F$ не является выполнимой; формула F выполнима тогда и только тогда, когда $\neg F$ не является общезначимой.

Некоторые общезначимые формулы:

1. Если F и G — равносильные в логике предикатов формулы, то $F \sim G$ — общезначимая формула. При этом $I_F = I_G$.

Если $F \to G$ — общезначимая формула, то $I_F \subseteq I_G$.

2. Если Y не входит в формулу $P(X)$, то $\forall X : P(X) \to P(Y)$ и $P(Y) \to \exists X : P(X)$ — общезначимые формулы.

3. Приведённые выше тождества для кванторных формул.

Квантор всеобщности есть обобщение операции конъюнкции, а квантор существования — обобщение дизъюнкции, и тем самым законы де Моргана для предикатов характеризуют взаимную двойственность кванторов $\forall X$ и $\exists X$.

4. $\forall X : (P(X) \& Q(X)) \equiv \forall X : P(X) \& \forall X : Q(X)$.

5. $\exists X : (P(X) \vee Q(X)) \equiv \exists X : P(X) \vee \exists X : Q(X)$.

6. Выше отмечена возможность перестановки одноимённых кванторов т. е. эти эквивалентности — общезначимые формулы.

7. Импликация $\exists X : (\forall Y : P(X,Y)) \to \forall Y : (\exists X : P(X,Y))$ является тавтологией. Однако сложная формула $\forall X : (\exists Y : P(X,Y)) \to \exists Y : (\forall X : P(X,Y))$ уже не является тавтологией.

Теорема о подстановке

Пусть F — тождественно истинная формула логики высказываний. Тогда подстановка вместо её переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ предикатных формул $B_1, B_2, ..., B_n$ такая, что получается правильная предикатная формула, которая даёт общезначимую формулу логики предикатов.

Вопрос о распознавании общезначимости формул логики предикатов относится к предмету теории алгоритмов. Не уточняя пока соответствующих понятий, сформулируем важный результат.

Теорема Черча

Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов установил бы, общезначима она или нет.

Однако в некоторых частных случаях такой алгоритм существует, например, для формул, содержащих только одноместные предикатные символы.

Исчисление предикатов

Метод доказательства формул, содержащих переменные, путём непосредственной подстановки в них предметных констант называется методом интерпретаций, или методом моделей. Подстановка констант позволяет интерпретировать формулу как содержательное утверждение об элементах конкретного множества. Поэтому такой метод, апеллирующий к содержательному смыслу интерпретированной формулы называют семантическим, то есть смысловым. Это удобно при доказательстве выполнимости формул или их неэквивалентности, поскольку и в том, и в другом случае достаточно найти одну подходящую подстановку (интерпретацию).

Метод интерпретации можно применять и для исследования истинности формул на конечных предметных областях, так как если область M конечна, $M=\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, то кванторы выражают конечные формулы логики высказываний:

$$X : P(X,Y) \equiv P(m_1) \& P(m_2) \& ... \& P(m_n),$$
$$X : P(X,Y) \equiv P(m_1) \vee P(m_2) \vee ... \vee P(m_n).$$

В этом случае все кванторные формулы можно заменить указанным способом и получить, содержащие только символы предикатов и логических операций, после чего проверить истинность можно конечным числом подстановок констант.

Для большинства же предметных областей доказательство тождественной истинности формул методом интерпретаций связано с большими трудностями. Поэтому применяется другой приём — аксиоматизация, т. е. построение формальной системы и порождение исследуемых формул из аксиом с помощью процедур вывода.

Как и для исчисления высказываний, для предикатных формул построение исчисления проводится путём указания некоторой совокупности формул, которые называются аксиомами, и заданием правил вывода, позволяющих из общезначимых формул получать общезначимые. Часть аксиом исчисления предикатов совпадает с аксиомами исчисления высказываний.

Приведем две аксиомы исчисления предикатов:

1. $\forall X_\iota (P(X_\iota) \to P(X_j))$, где формула $P(X_\iota)$ не содержит переменной X_j.
2. $P(X_\iota) \to \exists X_j (P(X_j))$ с тем же условием, что и в 1.

Правила вывода (при этом не должны нарушаться требования к правильности формул):

1. Правило modus ponens:

$$\frac{A, (A \to B)}{B}.$$

2а. Правило связывания квантором $\forall$:

$$\frac{B \to A(X_\iota)}{B \to \forall X_\iota A(X_\iota)},$$

где формула B не содержит переменной X_i.

2б. Правило связывания квантором $\exists$:

$$\frac{A(X_\iota) \to B}{\exists X_\iota A(X_\iota) \to B},$$

где формула B не содержит переменной X_i.

3. Переименование связанной переменной: связанную переменную формулы A можно заменить в кванторе и во всех вхождениях в области действия квантора.

Понятия вывода, теоремы, вывода из системы гипотез определяются в исчислении предикатов так же, как в любой аксиоматической теории.

Приведём без доказательства несколько утверждений об исчислений предикатов (A, B, ... — формулы в исчислении).

Теорема 1

Если $A \vdash B$ и существует вывод формулы B из формулы A, использующий только правило modus ponens, то $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Теорема 2

Аксиомы исчисления предикатов — общезначимые формулы.

Теорема 3

Формула, получаемая из общезначимой по любому правилу выхода 1–3, является общезначимой.

Теорема 4

Любая выводимая в исчислении предикатов формула — общезначима.

Теорема 5

Исчисление предикатов непротиворечиво, так как в силу теоремы 4 невозможно вывести одновременно A и $\neg A$.

Определённое выше исчисление предикатов называют узким исчислением предикатов, в отличие от нерассматриваемого расшиненного исчисления, в котором допускаются кванторы не только по предметным переменным, но и по предикатным переменным.

Теорема (Гёделя)

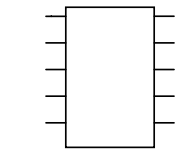
В узком исчислении предикатов всякая общезначимая формула выводима.

3. Булевы функции

Определение и примеры

n-местная *булева функция* (БФ) $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Пример



0 — тока нет, 1– тока нет.
На каждом выходе БФ от входов.

Пример

Сложное предложение. Сегодня вторник, и идет дождь. О каждом предложении можно сказать истинно или ложно. Сопоставим истине — 1, лжи — 0. Сложное предложение — БФ от простых предложений. $Y =$ если $П1$, то $П2$

П1	0	0	1	1
П2	0	1	0	1
Y	1	1	0	1

Если $x = y$, то $0 = 0$.

Для любой БФ $f(x_1, x_2, x_3 ... x_n)$ можно построить таблицу:

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_{n-1}	$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$
0	0	0	...	0	0	α_1
0	0	0	...	0	1	α_2
			...			.
1	1	1	...	1	0	.
1	1	1	...	1	1	.

Лемма о количестве

Количество n-местных БФ равно 2^{2^n}.

Доказательство

Всего $|B|^{|A|}$ функций из А в В). У нас $A=\{0,1\}^n$, $B=\{0,1\}$, $|A|=2^n$.

Пример 1

n=1

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	1	0	1	0

$f_0(x)=0$, $f_3(x)=1$ — константы, $f_1(x)=x$;

$f_2(x)=\overline{x}$ (отрицание x).

Пример 2

n=2, $2^{2^2}=16$

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x,y)=0$, $f_{15}(x,y)=1$ — константы;

$f_3(x,y)=x$;

$f_5(x,y)=y$;

$f_{10}(x,y)=\overline{y}$;

$f_{12}(x,y)=\overline{x}$;

$f_1(x,y)=x\wedge y=xy$ (конъюнкция, умножение, «и»);

$f_7(x,y)=x\vee y$ (дизъюнкция, «или»);

$f_{13}(x,y)=x\to y$ (импликация, «если..., то»);

$f_{11}(x,y)=y\to x$;

$f_9(x,y)=x\leftrightarrow y$ (« эквивалентность, «тогда и только тогда»);

$x\leftrightarrow y=(x\to y)\wedge(y\to x)$;

$f_6(x,y) = x \oplus y$ (сложение по модулю 2);

$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$;

$f_{14}(x,y) = x \mid y$ (штрих Шеффера);

$f_8(x,y) = x \uparrow y$ (стрелка Пирса);

$f_2(x,y) = \overline{f_{13}(x,y)} = \overline{x \to y}$;

$f_4(x,y) = \overline{y \to x}$.

Суперпозиция функций

Если $f(x_1, x_2, x_3 .. x_n)$, $f_1(y_{11}, y_{12}, y_{13} .. y_{1k_1})$ ... $f_2(y_{21}, y_{22}, y_{23} .. y_{2k_3})$ ... $f_n(y_{n1}, y_{n2}, y_{n3} .. y_{nk_n})$, то функция $h(y_{11}, y_{12} \dots y_{nk_n}) =$

$f(f_1(y_{11}, y_{12}, y_{13} .. y_{1k_1}) \dots f_2(y_{21}, y_{22}, y_{23} .. y_{2k_3}) \dots f_n(y_{n1}, y_{n2}, y_{n3} .. y_{nk_n}))$ называется *суперпозицией* этих функций.

Тождества

1. $x \vee y = y \vee x$. $1'. x \wedge y = y \wedge x$.
2. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$. $2'. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Проверить можно с помощью таблицы:

x	Y	z	$x \vee y$	$y \vee z$	$(x \vee y) \vee z$	$x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

3. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ $3'. (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

4. $x \vee x = x$. 4′. $x \wedge x = x$.
5. $x \vee 1 = 1$. 5′. $x \wedge 0 = 0$.
6. $x \wedge 1 = x$. 6′. $x \vee 0 = 0$.
7. $x \vee \bar{x} = 1$. 7′. $x \wedge \bar{x} = 0$.
8. $\bar{\bar{x}} = x$.
9. $(x \wedge y) \vee y = y$. 9′. $(x \vee y) \wedge y = y$.
10. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$. 10′. $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Замечание

Если в тождествах для операций с множествами заменить $\cap$ на $\wedge$, $\cup$ на $\vee$, U на 1, Ø на 0 и отрицание на дополнение, то получим 19 тождеств для БФ.

Проверим Закон де Моргана:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Дизъюнктивная нормальная форма БФ

Обозначение $a^b = \begin{cases} a, & b = 1; \\ \overline{a}, & b = 0. \end{cases}$

Замечание: $a^b = a \leftrightarrow b$.

Лемма 1

Для любой булевой функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ верно тождество $f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$, где дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = 1$.

Доказательство

Пусть при $(x_1, x_2 \cdots x_n) = (b_1, b_2 \cdots b_n)$ левая часть равна 1. В правой части есть дизъюнкт $x_1^{b_1}, x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} f(b_1, b_2 \cdots b_n)$. При $(x_1, x_2 \cdots x_n) = (b_1, b_2 \cdots b_n)$ он равен $b_1^{b_1}, b_2^{b_2} \cdots b_n^{b_n} f(b_1, b_2 \cdots b_n) = 1$. Значит и вся правая часть равна 1.

Пусть при $(x_1, x_2 \cdots x_n) = (b_1, b_2 \cdots b_n)$ левая часть равна 0. Рассмотрим произвольный дизъюнкт из правой части $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$. При $(x_1, x_2 \cdots x_n) = (b_1, b_2 \cdots b_n)$ он равен $b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \cdots b_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$.

Если $\exists i \in \{1 \cdots n\},\ b_i \neq \alpha_i$, то $b_i^{\alpha_i} = 0$, если $\forall i \in \{1 \cdots n\},\ b_i = \alpha_i$, то $f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = f(b_1, b_2 \cdots b_n) = 0$. Т. е. дизъюнкт всегда равен 0. Все дизъюнкты в правой части равны 0, значит вся правая часть равна 0.

Теорема

$\forall\ f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\ \exists! S \leq \{0,1\}^n\ f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \vee x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, где дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in S$.

Доказательство

Для доказательства существования такого множества в силу леммы 1 достаточно положить $S = \left\{(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in \{0,1\}^n \middle| f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = 1\right\}$.

При этом считаем, что пустое множество *S* соответствует нулевой булевой функции *f*.

Для доказательства единственности, заметим, что выражений для правой части столько, сколько множеств $S \subseteq \{0,1\}^n$ т. е. $\left|\beta(\{0,1\}^n)\right| = 2^{\left|\{0,1\}^n\right|} = 2^{2^n}$ и *n*-местных БФ тоже 2^{2^n}. Каждой правой части соответствует ровно одна БФ, и каждой БФ соответствует выражение правой части. Если какой-то БФ соответствует более одного выражения правой части, то на все функции не хватит таких выражений.

Если $f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \vee x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, где дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in S$, то правая часть равенства называется дизъюнктивной нормальной формой функции *f*.

Пример 1

Построим ДНФ для функции $x \to y$: $x \to y = x^{\circ} y^{\circ} \vee x^{0} y^{1} \vee x^{1} y^{1}$

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Проверка

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy$
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1

Пример 2

У нас есть 3 кнопки. Требуется спроектировать устройство, которое выдает сигнал, когда нажаты хотя бы 2 кнопки.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(x,y,z)$ — функция голосования трех. Теперь, если мы обладаем большим запасом деталей, позволяющих вычислять $\wedge$, $\vee$ и $-$, то формула $f(x,y,z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$ позволяет собрать требуемое устройство. При этом потребуется 8 деталей «$\wedge$», 3 детали «$\vee$» и 3 детали «$-$».

Заметив, что $xy\bar{z} \vee xyz = xy(\bar{z} \vee z) = xy$ и $xyz = xyz \vee xyz \vee xyz$, можно сократить количество необходимых деталей:

$$f(x,y,z) = yz \vee xz \vee xy = (y \vee x)z \vee xy$$ (теперь нужно 2«$\wedge$» и 2«$\vee$»).

Полиномы Жегалкина

Теорема о ДНФ говорит о том, что любую БФ можно представить в виде суперпозиции $\wedge$, $\vee$ и $-$.

Система БФ A — *полная*, если любая БФ является суперпозицией функций из A. Например,

из $x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ следует, что $\{\wedge, -\}$ — полная система;

из $x \wedge y = \bar{x} \vee \bar{y}$ следует, что $\{\vee, -\}$ — полная система.

Любая БФ может быть выражена через $\wedge$, $\vee$ и $-$. Но $\bar{x} = 1 \oplus x$, а заменив, таким образом, все отрицания, получим выражение через $1, \oplus$ и $\cdot$.

Эти функции удовлетворяют следующим тождествам:

1. $x \oplus y = y \oplus x$
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
3. $x \oplus 0 = x$
4. $x \oplus x = 0$
5. $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$
6. $xy = yx$
7. $(xy)z = x(yz)$
8. $x \cdot 1 = x$
9. $x \neq 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow xx = 1$

$\Rightarrow$ 9 аксиом двухэлементного поля $\Rightarrow$ <{0, 1}, $\oplus$, $\cdot$> — поле

Раскроем в полученном ранее выражении скобки, получим многочлен. Заметим, что $x \cdot x = x \Rightarrow \forall k \geq 1 \; x^k = x$, т. е. в каждом одночлене каждая переменная стоит в степени 1 или отсутствует. Таким образом, получим тождество вида $f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \sum_{S \subseteq \{1,2 \ldots n\}} \alpha_s \prod_{i \in s} x_i$. Его правая часть называется *полином Жегалкина*.

Теорема

Каждая *n*-местная БФ однозначно (!) представима ($\exists$) в виде полинома Жегалкина.

Доказательство

Существование доказано перед формулировкой теоремы. Докажем единственность. Каждому полиному соответствует ровно одна БФ. Сколько всего полиномов для *n*-местных БФ? Каждый полином определяется вектором

коэффициентов $(\alpha_{\varnothing},\alpha_{\{1\}},\alpha_{\{2\}},\alpha_{\{1,2\}},\alpha_{\{3\}},\alpha_{\{1,3\}},\alpha_{\{2,3\}},\alpha_{\{1,2,3\}}\ldots\alpha_{\{4\}}\ldots\alpha_{\{1,2,\ldots\ldots n\}})$. Таких векторов 2^{2^n}. Таким образом число полиномов от n переменных равно числу n-местных функций. Значит каждой булевой функции соответствует ровно один полином.

Замкнутые классы БФ

Класс БФ C — замкнутый, если каждая суперпозиция функций из C лежит в C.

Лемма

Пусть C — замкнутый класс, содержащий не все БФ, $A \subseteq$ C. Тогда A неполная система.

Доказательство.

Предположим противное. A — полная, тогда есть суперпозиция функций из A, не лежащая в C, что противоречит определению C.

Примеры

1. Все БФ — замкнутый класс.
2. $\{x\}$
3. $\{0,1\}$
4. $\{0,1,x\}$
5. $\{0,1,x,\bar{x}\}$

} Замкнутые классы

Для доказательства достаточно заметить, что $f(y(x)) = h(x)$, т. е. суперпозиция функций от одной переменной является функцией от одной переменной.

6. $\{\vee,-\}$ не замкнутый класс.
7. Все 2-местные БФ — незамкнутый класс.

Важный пример 1

Говорят, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ *сохраняет константу* c, если $f(c,c,\ldots,c) = c$.

Пусть $T_c = \{f \mid f(c,c,\ldots c) = c\}$.

Утверждение 1

T_0 и T_1 — замкнутые классы.

Доказательство.

Пусть $c \in \{0,1\}$. Пусть $f(x_1,\dots x_n) \in T_c$, $f_1(y_{11},\dots y_{1k_1}) \in T_c,\dots$

$f(y_{n1},\dots y_{nk_n}) \in T_c$.

Если $h(y_{11}\dots y_{nk_n}) = f(f_1(y_{11},\dots y_{1k_1})\dots f_n(y_{n1},\dots y_{nk_n}))$, то

$h(c,c,\dots c) = f(f_1(c,c,\dots c),\dots,f_n(c,c,\dots c)) = f(c,c,\dots c) = c.$

Как узнать по таблице $f \in T_0$ или $f \notin T_0$?

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	⋮	0	f_1
0	0	⋮	1	f_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	⋮	0	⋮
1	1	⋮	1	f_n

Для этого необходимо рассмотреть f_1 и f_n.

	$\in T_0$	$\notin T_0$
$\in T_1$	$x, xy, x \vee y$	$1, x \leftrightarrow y, x \to y$
$\notin T_1$	$0, x + y$	$\overline{x}$

Важный пример 2

Функция $g = (x_1,\cdots x_n)$ *двойственная* для $f(x_1,\cdots x_n)$ (обозначение $g = f^*$), если $g(x_1,\cdots x_n) = \overline{f(\overline{x_1},\cdots \overline{x_n})}$.

Например, из $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$ следует $\vee = \wedge^*$.

Если $f(x) = 0$, то $f^*(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{0} = 1$.

Если $f(x) = \overline{x}$, то $f^*(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{\overline{x}} = x$.

f — *самодвойственная*, если $f^* = f$. Пусть $S = \{f \mid f^* = f\}$.

Утверждение 2

S — замкнутый класс.

Доказательство

Пусть $f, f_1 \cdots f_n \in S$. $h = f(f_1(y_{11},\dots y_{1k_1})\dots f_n(y_{n1},\dots y_{nk_n}))$.

$$h^*\left(y_{11},\dots y_{1k_1}\right)=\overline{h(\overline{y_{11}}\dots\overline{y}_{nk_n})}=\overline{f(f_1\left(\overline{y_{11}},\dots\overline{y}_{1k_1}\right)\dots f_n\left(\overline{y_{n1}},\dots\overline{y}_{nk_n}\right))}.$$

$$f_1\left(\overline{y_{11}},\dots\overline{y}_{1k_1}\right)=\overline{f_1\left(y_{11},\dots y_{1k_1}\right)}=\left[\text{т.к. } f_1\cdots f_n\in S\right]=$$

$$=\left(\overline{f_1\left(\overline{y_{11}},\dots\overline{y}_{1k_1}\right)}\dots\overline{f_n\left(\overline{y_{n1}},\dots\overline{y}_{nk_n}\right)}\right)=$$

$$=\left[\text{т.к. } f\in S\right]=f(f_1\left(y_{11},\dots y_{1k_1}\right)\dots f_n\left(y_{n1},\dots y_{nk_n}\right))=h\left(y_{11},\dots y_{nk_n}\right)\Rightarrow h\in S.$$

Как по таблице узнать $f\in S$ или $f\notin S$?

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	⋮	0	α
0	0	⋮	1	β
γ_1	γ_2		γ_n	γ
$\bar{\gamma}_1$	$\bar{\gamma}_2$	⋮	$\bar{\gamma}_n$	$\bar{\gamma}$
1	1	⋮	0	$\bar{\beta}$
1	1	⋮	1	$\bar{\alpha}$

$$\forall x_1,x_2\cdots x_n\quad f\left(\overline{x_1},\overline{x_2}\cdots\overline{x_n}\right)=\overline{f\left(x_1,x_2\cdots x_n\right)}$$

$\in$ S	$\notin$ S
$\bar{x},x,xy\vee xz\vee yz$	$0,1,xy,x\leftrightarrow y,x\to y,x+y,x\mid y$

$$x^*=\bar{\bar{x}}$$

$$f\left(x,y,z\right)=xy\vee xz\vee yz.$$

$$f^*\left(x,y,z\right)=\overline{\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}}=\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\cdot\bar{\bar{x}}\bar{\bar{z}}\cdot\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}=\left(x\vee y\right)\left(x\vee z\right)\left(y\vee z\right)=$$

$$=x\cdot x\cdot y\vee x\cdot x\cdot z\vee x\cdot z\cdot y\vee x\cdot z\cdot z\vee y\cdot x\cdot y\vee y\cdot x\cdot z\vee y\cdot z\cdot y\vee y\cdot z\cdot z=$$

$$=xy\vee xz\vee xyz\vee xz\vee xy\vee xyz\vee yz\vee yz=xy\vee xz\vee yz\vee xyz=xy\vee xz\vee yz.$$

Самодвойственность этой функции можно увидеть и по таблице:

x	y	z	$xy\vee xz\vee yz$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

x	y	z	$xy \vee xz \vee yz$
1	1	0	1
1	1	1	1

Важный пример 3

Пусть

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n) \in \{0,1\}^n$.

Положим по определению $\vec{\alpha} \le \vec{\beta} \Leftrightarrow \forall i \in \{1 \cdots n\} \alpha_i \le \beta_i$.

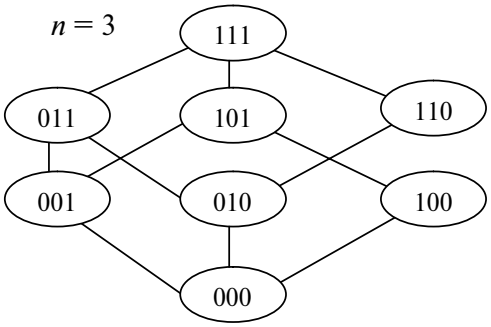
Тогда $\leqslant$ — бинарное отношение на $\{0,1\}^n$

$\leqslant$ рефлексивно,

$\leqslant$ антисимметрично,

$\leqslant$ транзитивно,

$\Rightarrow \leqslant$ — порядок на $\{0, 1\}^n$.



Отметим, что $001 \not\leqslant 110$, $110 \not\leqslant 001$, т. е. эти векторы несравнимы относительно введенного порядка.

Функция $f(x_1, \cdots x_n)$ *монотонная*, если она сохраняет порядок $\leqslant$, т. е.

$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \{0,1\}^n \quad \vec{\alpha} \le \vec{\beta} \Rightarrow f(\vec{\alpha}) \le f(\vec{\beta})$.

Пусть $M = \{f \mid f - \text{монотонная}\}$.

Утверждение 3

M — замкнутый класс.

Доказательство

Пусть $f, f_1 \cdots f_n \in S$. $h = f(f_1(y_{11}, \ldots y_{1k_1}) \ldots f_n(y_{n1}, \ldots y_{nk_n}))$.

Рассмотрим два произвольных вектора

$\vec{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{12} \cdots \alpha_{1k} \alpha_{21}, \alpha_{22} \cdots \alpha_{2k_2 \cdots} \alpha_{n1} \alpha_{n2} \cdots \alpha_{nk_n})$

и $\vec{\beta} = (\beta_{11}, \beta_{12} \cdots \beta_{1k} \beta_{21}, \beta_{22} \cdots \beta_{2k_2 \ldots} \beta_{n1} \beta_{n2} \cdots \beta_{nk_n})$.

Обозначим «части» векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ так:

$\vec{\alpha}_i = \left(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{ik_i}\right)$, $\vec{\beta}_2 = (\beta_{i1}, \beta_{i2} \cdots \beta_{2k_i})$. Тогда

$h(\vec{\alpha}) = f(f_1(\vec{\alpha}_1) \ldots f_n(\vec{\alpha}_n))$, и $h(\vec{\beta}) = f(f_1(\vec{\beta}_1) \ldots f_n(\vec{\beta}_n))$.

Пусть $\vec{\alpha} \le \vec{\beta}$, тогда $\vec{\alpha}_1 \le \vec{\beta}_1, \vec{\alpha}_2 \le \vec{\beta}_2 \cdots \vec{\alpha}_n \le \vec{\beta}_n$. Теперь, в силу произвольности выбранных вектров $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, и следующих очевидных импликаций

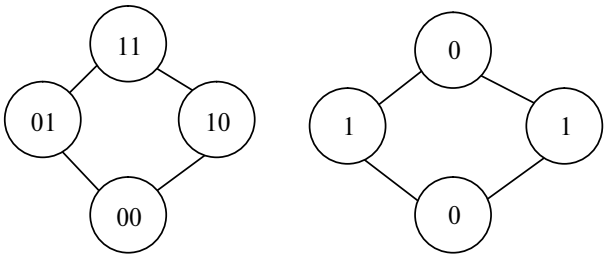
$f_1 \in M, \ldots, f_n \in M \Rightarrow f_1(\vec{\alpha}_1) \le f_1(\vec{\beta}_1) \cdots f_n(\vec{\alpha}_n) \le f_n(\vec{\beta}_n)$

и $f \in M \Rightarrow h(\vec{\alpha}) = f(f_1(\vec{\alpha}_1) \ldots f_n(\vec{\alpha}_n)) \le f(f_1(\vec{\beta}_1) \ldots f_n(\vec{\beta}_n)) = h(\vec{\beta})$,

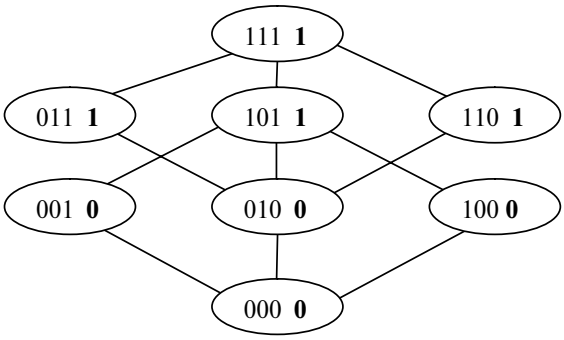
получаем $h \in M$.

$\in M$	$\notin M$
$0, 1, xy, x, x \vee y$, $xy \vee xz \vee yz$	$\bar{x}, x \leftrightarrow y, x \to y, x + y,$

По определению монотонности $f \in M \Leftrightarrow \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}\ \vec{\alpha} \le \vec{\beta} \Rightarrow f(\vec{\alpha}) \le f(\vec{\beta})$, значит $f \notin M \Leftrightarrow \exists \vec{\alpha}, \vec{\beta}\ \vec{\alpha} \le \vec{\beta}$ и $f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta})$. Например, функция $x + y$ не монотонна, поскольку $\vec{\alpha} = (0,1), \vec{\beta} = (1,1), \vec{\alpha} \le \vec{\beta},$ но $0 + 1 > 1 + 1$. На диаграмме отношения порядка это выглядит так, что под некоторым нулем располагается единица:



Проверим функцию голосования трех:



Она — монотонная.

Важный пример 4

$f(x_1,\ldots,x_n)$ линейная, если $\exists a_0, a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}$ $f(x_1,\ldots x_n) = a_0 + a_1 x + \ldots +$ $+ a_n x_n$. Пусть $L = \{f \mid f - \text{линейная}\}$.

Утверждение 4

L — замкнутый класс.

$\in L$	$\notin L$
$\bar{x}, 0, 1, x, x \leftrightarrow y, x + y$	$xy, x \to y, x \mid y, xy \vee xz \vee yz, x \vee y$

Почему это так? Например, xy — это полином Жегалкина, а он единственный (по Теореме), значит в виде многочлена первой степени конъюнкцию представить невозможно. Аналогично, находя полиномы Жегалкина оставшихся функций, доказываем их линейность или нелинейность:

$x \vee y = x + y + xy$;

$x \to y = 1 + x + xy$;

$x \leftrightarrow y = 1 + x + y$;

$x \mid y = 1 + xy$;

$xy \vee xz \vee yz = xy + xz + yz$.

Теорема Поста

Теорема

Система функций A полна тогда и только тогда, когда A не содержится ни в одном из пяти классов: T_1, T_2, S, M, L.

Доказательство. Необходимость доказана в утверждениях 1–4. Докажем достаточность.

1. Лемма о несамодвойственной функции

Подставляя вместо аргументов несамодвойственной функции $\bar{x}$ или x, можно получить константу.

Пусть $f(x_1,\cdots x_n)$ — несамодвойственная функция, тогда найдется вектор $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\in\{0,1\}^n$, что $f(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=f(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_n})$. Пусть $\varphi_i(x)=x$ при $\alpha_i=1$ и $\varphi_i(x)=\bar{x}$ при $\alpha_i=0$. Тогда функция $h(x)=$ $=f(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))$ получена подстановкой $\bar{x}$ или x вместо аргументов f и обладает свойством

$$h(1)=f(\varphi_1(1),\varphi_2(1),\ldots,\varphi_n(1))=f(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=$$
$$=f(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_n})=f(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_n(0))=h(0)\,,$$

значит — это константа.

2. Получение констант (из A)

$A\subsetneq T_0\Rightarrow\exists f_0\in A\setminus T_0$. Если $f_0(1,1,\ldots,1)=0$, то $f_0(x,x,\ldots,x)=\bar{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из A можно получить константу. Вторая константа получается как отрицание первой.

Если $f_0(1,1,\ldots,1)=1$, то $f_0(x,x,\ldots,x)=1$.

$A\subsetneq T_1\Rightarrow\exists f_1\in A\setminus T_1$. Повторяя для f_1 рассуждения, проведенные для f_0, получим либо константу 0, либо обе константы.

3. Получение отрицания (из A и констант)

$A\subsetneq M\Rightarrow\exists f_M\in A\setminus M$. Поскольку f_M немонотонная, найдутся векторы $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\{0,1\}^n$, что $\vec{\alpha}\le\vec{\beta}$, $f_M(\vec{\alpha})=1$ и $f_M(\vec{\beta})=0$. Пусть $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. Обозначим через I множество тех индексов, для которых $\alpha_i=\beta_i$. Пусть $\varphi_i(x)=\alpha_i$ при $i\in I$ и $\varphi_i(x)=x$ в противном случае. Тогда

функция $h(x) = f_M\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right)$ получена подстановкой x или констант вместо аргументов f_M и обладает свойствами:

$h(0) = f_M\left(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0)\right) = f_M\left(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\right) = 1$

и $h(1) = f_M\left(\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots, \varphi_n(1)\right) = f_M(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$, т. е. является отрицанием.

4. Получение умножения (из А констант и отрицания)

$A \subsetneq L \Rightarrow \exists f_L \in A \setminus L$.

Получим сначала нелинейную функцию двух аргументов:

$f_L(x_1 x_2 \cdots x_n) \notin L$;

$f_L(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sum\limits_{S \subseteq \{1 \cdots n\}} \alpha_S \prod\limits_{i \in S} x_i$.

Пусть T — наименьшее по мощности множество $|T| \geq 2$ такое, что $\alpha_T = 1$.

Выберем $i, j \in T, i \neq j$.

Сделаем замену:

$x_i \to x$;

$x_j \to y$;

$x_k \to 1$, если $k \in T \setminus \{i, j\}$;

$x_k \to 0$, если $k \notin T$.

После замены получим БФ от 2-х переменных x и y:

$\psi(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy$. Найдем D.

Пусть из слагаемого $\alpha_S \prod\limits_{k \in S} x_k$ при замене получим xy. Тогда $\alpha_S = 1$, $i, j \in S, |S| \geq 2$. Кроме того, никакое $x_k (k \in S)$ не заменилось на 0, значит $k \in S \Rightarrow k \in T$, т.е. $S \subseteq T$. В силу минимальности Т, получим, $S = T$, т. е. xy получится при замене ровно 1 раз. Следовательно, $D = 1$.

$\psi(x, y) = A + Bx + Cy + xy.$

$\varphi(x, y) = \psi(x + C, y + B) = A + B(x + C) + C(y + B) + (x + C)(y + B) =$

$= A = Bx + BC + Cy + BC + xy + Bx + Cy + BC = A + BC + xy.$

Отсюда $\left(A + BC + \varphi(x, y)\right) = xy.$

Сложения не нужно: $x = 0 + x, x + 1 = \bar{x}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1

В каждой полной системе есть полная подсистема, состоящая из не более, чем 4-х функций.

Доказательство.

Пусть A — полная система.

$f_0 \in A \setminus T_0, f_1 \in A \setminus T_1, f_S \in A \setminus S, f_M \in A \setminus M, f_L \in A \setminus L \Rightarrow \{f_0, f_1, f_S, f_M, f_L\}$— полная.

$f_0(1,\ldots 1) = 1 \to f_1$ не нужна.

$f_0(1\ldots 1) = 0 \to f_0 \notin S \to f_S$ не нужна.

Пример 1

$f_0 = 0$;

$f_1 = 1$;

$f_2 = xy$;

$f_3 = x + y + z$.

	T_0	T_1	S	M	L
f_0	+	–	–	+	+
f_1	–	+	–	+	+
f_2	+	+	–	+	–
f_3	+	+	+	–	+

"+"$-\in$.

"–"$-\notin$.

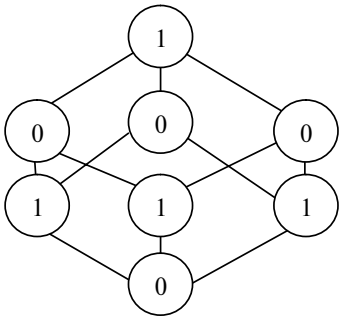
$f_3 : 0+0+0 = 0.$

$f_3 : 1+1+1 = 1.$

$\overline{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}} = 1+(1+x)+(1+y)+(1+z) = x+y+z.$

$(1,0,0) \le (1,1,0).$

$1+0+0 > 1+1+0$.



В каждом столбике есть "–", значит по теореме Поста эта система полная $\{0,1,xy,x+y+z\}$. Любая собственная подсистема этой системы не полная.

Пример 2

Полные системы вида $\{f(x,y)\}$:

x	y	F	$\mid$	$\uparrow$
0	0	1	1	1
0	1	γ	0	1
1	0	γ	0	1
1	1	0	0	0

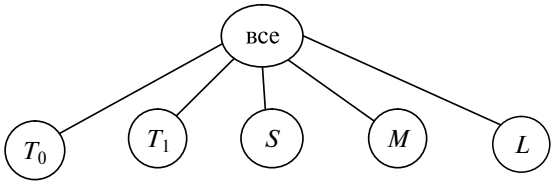
$x \mid y = \overline{xy} = 1 + xy \notin L.$

$x \uparrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} = (1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy \notin L.$

$\{\mid\}, \{\uparrow\}$ — полные.

Следствие 2

T_0, T_1, S, M, L — полный список максимальных по включению замкнутых классов, отличных от множества всех БФ.



Доказательство

Легко убедиться, что для каждой пары из описанных в условии классов найдется функция, лежащая в первом и не лежащая во втором. Например, такие «различающие» функции представлены в следующей таблице:

	$\notin T_0$	$\notin T_1$	$\notin S$	$\notin M$	$\notin L$
$\in T_0$		0	0	$x+y$	xy
$\in T_1$	1		1	$x \leftrightarrow y$	xy
$\in S$	$\bar{x}$	$\bar{x}$		$\bar{x}$	$xy \vee yz \vee xz$
$\in M$	1	0	0		xy
$\in L$	1	0	0	$\bar{x}$	

Рассмотрим $C \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$. Найдется $f \notin C$, значит, $\{f\} \cup C$ не помещается ни в один из классов T_0, T_1, S, M, L, поэтому это полная система, следовательно, множество всех суперпозиций функций этой системы

($<\{f\}\cup C>$) — все БФ. Таким образом, C — максимальный по включению замкнутый класс.

Пусть X — еще один максимальный замкнутый класс.

Тогда X не помещается в T_0, T_1, S, M, L $\Rightarrow <X>$ все БФ.

Пример 3

Пусть у нас имеется большой запас деталей двух типов, вычисляющих следующие трехместные булевы функции:

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Можно ли из этих деталей собрать схему, вычисляющую умножение, и если можно, то как?

Полнота:

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	–	–	–	+
f_2	–	+	–	–	–

$f_1(x,y,z) \notin M$? $f_2(x,y,z) \notin M$?

$(0,0,1) \le (1,1,1)$; $(0,0,0) \le (1,1,0)$;

$f_1(0,0,1) = 1 > 0 = f_1(1,1,1)$; $f_2(0,0,0) = 1 > 0 = f_2(1,1,0)$.

ПЖ $f_1(x,y,z) = y + z$;

ПЖ $f_2(x,y,z) = z + \overline{xyz} = 1 + x + y + xy + xz + yz + xyz$.

ПЖ для f_2 можно найти и непосредственно по таблице (см. выше):

$f_2(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{23}yz + a_{12}xy + a_{13}xz$.

$a_0 = f(0,0,0) = 1$,

$a_0 + a_1 = f(1,0,0) = 0 \Rightarrow a_1 = 1$,

$a_0 + a_2 = f(0,1,0) = 0 \Rightarrow a_2 = 1$,

$a_0 + a_3 = f(0,0,1) = 0 \Rightarrow a_3 = 0$,

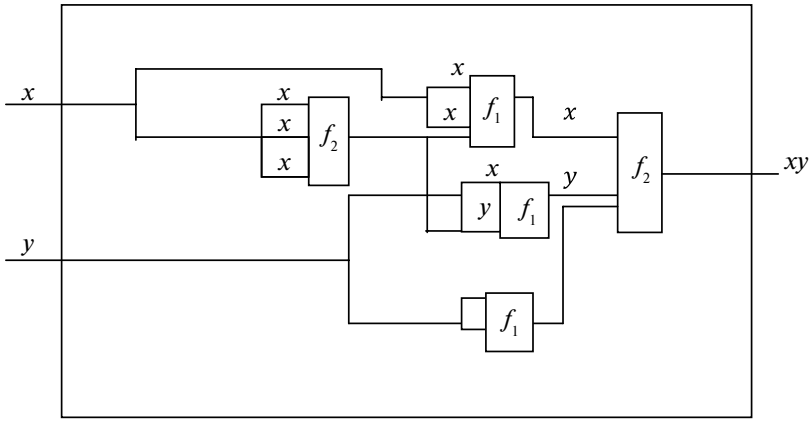
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1,1,0) = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$, и т. д.

Константы:
$1 = f_2(x,x,x)$ и $0 = f_1(x,x,x)$.

Отрицание:
$f_1(0,0,1) = 1$ и $f_1(1,1,1) = 0 \Rightarrow f_1(x,x,1) = \bar{x}$.

Умножение:
$f_2(x,y,0) = 1 + x + y + xy$.

$f_2(\bar{x},\bar{y},0) = 1 + \bar{x} + \bar{y} + \overline{xy} = 1 + (1+x) + (1+y) + (1+x+y+xy) = xy$.



$xy = f_2(f_1(x,x,f_2(x,x,x,)), f_1(y,y,f_2(x,x,x,)), f_1(y,y,y))$.

Пример 4

Всего n-местных БФ $2^{2^n} = \left|\{0,1\}^{\{0,1\}^n}\right|$.

$\left|T_0 \cap \{0,1\}^{\{0,1\}^n}\right| = 2^{2^{n-1}} = \frac{1}{2}2^{2^n}$ (по виду таблицы).

Самодвойственных $\left|S \cap \{0,1\}^{\{0,1\}^n}\right| = 2^{2^{n-1}}$ (по виду таблицы).

Линейных $\left|L \cap \{0,1\}^{\{0,1\}^n}\right| = 2^{2^{n+1}}$ (по определению).

Сколько монотонных?

4. Комбинаторика

Основные правила

Комбинаторика — это есть техника подсчета количества элементов в конечных множествах.

Отметим основные правила данного раздела математики:

1) Правило суммы:

Пусть $R = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ — разбиение A.

Тогда верно равенство $|A| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$.

2) Правило произведения:

Пусть $R = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ – разбиение A. Тогда $\forall i \ |A_i| = m \ |A| = mn.$

Пример

$|A| = m, \ |B| = n \Rightarrow |A \times B| = mn.$

Доказательство

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, а $R = \{\{a_1\} \times B, \{a_2\} \times B, ..., \{a_m\} \times B\}$ – разбиение $A \times B$, тогда $\forall i$ имеется биекция

$\varphi : \{a_i\} \times B \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ B \ \varphi|a;b| = b \Rightarrow |\{a_i\} \times B| = |B| = n \ |A \times B| = mn.$

Пример

$|A| = n \Rightarrow |A^k| = n^k$.

Доказательство

Применим индукцию по *k*:

База индукции: $k = 1 \ |A'| = n = n'$.

Шаг индукции: $|A^{k+1}| = |A^k \times A| = |A^k| n = n^k n = n^{k+1}$.

При построении шага индукции воспользовались равенством из примера, приведенного выше.

Пример

$|A| = m,\ |B| = n \Rightarrow |B^A| = n^m,\ |B^A| = \{\varphi \mid \varphi : A \to B\}$.

Доказательство.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

Каждой функции $\varphi : A \to B$ поставим в соответствие цепочку: $|\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_m)| \in B^m$, вследствие чего будем иметь функцию, которая является биекцией. Тогда, учитывая пример 2, получим следующее равенство: $|B^A| = |B^m| = n^m$.

Элементарные комбинаторные функции

Число размещений из n по k — это количество упорядоченных цепочек длины k различных элементов n элементного множества. Число размещений обозначается следующим образом:

$$A_n^k = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right].$$

Пример

Пусть $n = 4$, $k = 2$ для множества $\{A, B, C, D\}$.

Тогда можно составить следующие размещения из 4 по 2:

AB, *BA*, *CA*, *DA*, *AC*, *BC*, *CB*, *DB*, *AD*, *BD*, *CD*, *DC*. Значит, $A_4^2 = 12$.

Если возьмем множество из 6 элементов и посчитаем аналогично число размещений из 6 по 3, то получим $A_6^3 = 120$.

Приходим к формуле

$$A_n^k = \underset{1}{n}\left(\underset{2}{n-1}\right)\left(\underset{3}{n-2}\right)...\left(\underset{k}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Таким образом, формула для вычисления числа размещений имеет вид:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановка на {1... *n*} — это биекция из X в X. Число перестановок вычисляется по формуле $P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$

Число сочетаний из *n* по *k* — это есть число k — элементарных подмножеств n — элементного множества. Число сочетаний обозначается следующим образом: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Свойства числа сочетаний

1) $C_n^0 = 1,\ C_n^k = 0, k < 0,\ k > n.$

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство

Пусть $|A| = n,\ B \subseteq A, |B| = k \Rightarrow A \setminus B \subseteq A,\ |A \setminus B| = n - k$, то есть $\varphi(B) = A \setminus B$ — биекция между k-элементами и (n-k) — элементами указанных множеств.

3) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство

$|A| = n+1,\ a \in A$. Разобьём все k+1 элементные подмножества множества A на 2 вида:

а) с элементом a; остальные k элементов — из множества $A \setminus \{a\}$. Таких подмножеств будет C_n^k;

б) без элемента a; все k+1 элементов — из множества $A \setminus \{a\}$. Таких подмножеств будет C_n^{k+1}. Свойство доказано.

Треугольник Паскаля

$$\begin{matrix} C_0^0 \\ C_1^0\ C_1^1 \\ C_2^0\ C_2^1\ C_2^2 \\ C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \end{matrix}$$

4) Бином Ньютона.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Доказательство

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n} = \sum x^k y^{n-k}.$$

C_n^k — число k-элементных подмножеств некоторых скобок, из которых берется x n-элементного множества всех скобок.

5) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Для данного свойства приведем два доказательства.

Доказательство I

Пусть

A_n^k — число упорядоченных цепочек длины k.

C_n^k — число неупорядоченных цепочек длины k.

P_k – число способов упорядочения цепочек длины k.

Тогда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Доказательство II

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Каждому $x \subseteq A$ поставим в соответствие X_x следующим образом:

$$X_x|a| = \begin{cases} 1, \ a \in X, \\ 0, \ a \notin U. \end{cases}$$

Тогда

$|x| = k \Leftrightarrow |\text{supp}\, X_x| = k.$

$X_x \leftrightarrow |X_x(a_1), X_x(a_2), ..., X_x(a_n)|$ — это анаграмма слова.

Всего у такого слова $\underbrace{11...1}_{k}\underbrace{00...0}_{n-k}$ $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ анаграмм.

6) Треугольник Паскаля:

```
        0
       /\
      0  0
     /\/\
    0  0  0
   /\/\/\
  0  0  0  0
 /\/\/\/\
0  0  0  0  0
```

Сумма элементов, выделенных полужирным, равна элементу, выделенному полужирным курсивом.

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + ... + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}.$$

Доказательство

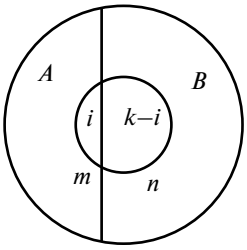
Доказательство проведем с помощью индукции по k:

Б. И. при $k = 0$ $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$.

Ш. И. $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n + C_{n+k+1}^n = C_{n+k+1}^{n+1} + C_{n+k+1}^n = C_{n+k+2}^{n+1}$.

7) $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i \cdot C_n^{k-i}$.

Доказательство



$C_m^i C_n^{k-i}$ множеств пересекающихся с A по i элементам и с B по n-i элементам.

ε — *первообразная* — это есть корень из 1-q степени n, если $\varepsilon^n = 1$.

$\forall k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\varepsilon^k \neq 1$.

Пусть $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$.

Тогда с использованием свойства 4 можно записать следующие равенства:

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + C_n^3\varepsilon^3 + C_n^4\varepsilon + C_n^5\varepsilon^2 + C_n^6 + \ldots,$$

$$\left(1+\varepsilon^2\right)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon^2 + C_n^2\varepsilon^4 + C_n^3 + C_n^4\varepsilon^2 + C_n^5\varepsilon + C_n^6 + \ldots,$$

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 + \ldots.$$

Заметим, что

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon - 1} = \frac{0}{\neq 0} = 0.$$

А теперь, сложив первые три равенства и преобразовав полученную правую часть при помощи четвертой формулы, придем к равенству:

$$\frac{(1+\varepsilon)^n + \left(1+\varepsilon^2\right)^n + 2^n}{3} = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots.$$

Учитывая, что

$\varepsilon^2 = \varepsilon^{-1}$,

получим

$|\varepsilon| = 1 = |\varepsilon^{-1}| \Rightarrow \varepsilon^{-1} = \bar{\varepsilon}$.

$$\left(1+\varepsilon^2\right)^n = \left(1+\bar{\varepsilon}\right)^n = \left(\bar{1}+\bar{\varepsilon}\right)^n = \left(\overline{1+\varepsilon}\right)^n = \overline{(1+\varepsilon)^n}.$$

$$C_n^0 + C_n^3 + \ldots = \frac{2\,\mathrm{Re}(1+\varepsilon)^n + 2^n}{3}.$$

Пусть $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

Тогда

$$(1+\varepsilon)^n = \underbrace{\cos\frac{\pi n}{3}}_{\mathrm{Re}} + i\sin\frac{\pi n}{3},$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = \frac{2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3}}{3}.$$

Число размещений с повторениями — это число способов разместить n одинаковых предметов по k различным большим ящикам.

Обозначение $\tilde{C}_n^k$.

Построим биекцию между раскладками n одинаковых предметов по k различным большим ящикам и словами, составленными из n нулей и k-1 единиц:

$\tilde{C}_{20}^6 = C_{25}^5$,

$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$.

Задача (о кроликах)

В момент $t = 0$ родилась пара кроликов. Кролики два месяца растут, а потом каждый месяц приносят по одной новорожденной паре. Сколько пар кроликов будет через 10 месяцев, 1000 месяцев.

Пусть F_k — количество пар кроликов в момент $t = k$. Тогда

$$F_0 = 1 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow F_n = \underbrace{F_{n-1}}_{\text{старые}} + \underbrace{F_{n-2}}_{\text{новорожденные}}$$

$F_1 = 1$,

$F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ F_7 = 21,\ F_8 = 34,\ \ldots$

Построенная последовательность $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Фибоначчи.

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq R^{\infty}$ — это рекуррентная последовательность, если

$\exists f : R^{\infty} \to R,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n \geq n_0\ \ a_n = f(a_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, a_0, 0, \ldots, 0).$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq R^{\infty}$ — это рекуррентная последовательность порядка m, если

$\exists f : R^m \to R\ \forall n \geq m\ a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-m})$.

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq R^{\infty}$ — это линейная рекуррентная последовательность порядка m, если $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathrm{R},\ \ \forall n \geq m\ a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_n a_{n-m}$ — линейное рекуррентное соотношение порядка m.

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq R^{\infty}$, тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — это есть обыкновенная производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Рассмотрим действия с рядами. Пусть $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Тогда будут справедливы следующие равенства:

1) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$.

2) $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.

3) $f(\alpha x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^{kn}$.

4) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

5) $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$.

Лемма

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ a_0\neq 0\ \left(\exists\ a_0^{-1}\right)$ тогда $\exists\ f^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$.

Доказательство

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n=1.$$

$$a_0b_0=1\to b_0=a_0^{-1}.$$

$$a_0b_1+a_1b_0=0\to b_1=a_0^{-1}(-b_0a_1).$$

$$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0\to b_2=a_0^{-1}\left(-a_1b_1-a_2b_0\right).$$

$$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=0\to b_3=a_0^{-1}\left(-a_1b_2-a_2b_1-a_3b_0\right).$$

.....

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Тогда

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)\cdot\left(1-2x-x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n=$$

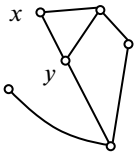
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n-2}^{n}(k+1)b_{n-k}\right)x^n=$$

$$=1+\left(2x1+1(-2x)\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left((n-1)1+n(-2)+(n+1)1\right)x^n=1.$$

5. Теория графов

Определение и задание графа

Приведем пример графа. Важно, какие точки соединены, а какие нет. Это способ изображения любого симметричного бинарного отношения.

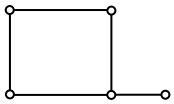


Помеченный граф G — это есть $G = (V, E)$, где V — конечное множество вершин, а $E = \{\{x, y\} \mid x \neq y;\ x, y \in V\} = V^{(2)}$ — множество ребер.

Пример

$G = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}\})$.

Как еще можно задать граф? Матрице бинарного отношения соответствует матрица смежности графика.



Матрица смежности графа — это есть матрица $M = \left(\alpha_{ij}\right)_{n \times n}$, где $n = |V|$, коэффициенты которой находятся следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-я и } j\text{-я вершина — ребро,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Согласно определению, матрица смежности выше приведенного графа имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности графа — это матрица $I = (\beta_{ij})_{n\times m,}$
где $n = |V|$, $m = |E|$, а элементы β определяются следующим образом:

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-вершина принадлежит } j\text{-му ребру,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности выше приведенного графа имеет вид

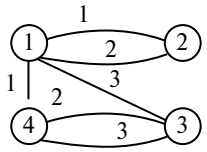
$$I = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\;1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix},$$

где $m = |E|$, $n = |V|$, причем для числа ребер справедлива оценка
$0 \leqslant m \leqslant |V^2| = C_n^{2.}$

Мультиграф — это есть граф $G = (V, E)$, где V — конечное множество вершин, а E — множество ребер с кратностями, т. е. $E \subseteq V^{(2)} \times N$.

Пример

G = ({1,2,3,4}, {({1,2},1), ({1,2},2), ({1,3},3), ({1,4},1), ({3,4},1), ({3,4},2), ({3,4},3)}).



Матрица смежности мультиграфа G есть матрица $M = (\alpha_{ij})_{n\times m}$, где $n = |V|$, $m = |E|$, α_{ij} — количество рёбер, соединяющих i-ю u j-ю вершины.

Матрицы смежности и инцидентности для графа, рассматриваемого в примере, имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} 0\,2\,1\,1 \\ 2\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,2 \\ 1\,0\,2\,0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\;\;1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

Степень вершины v — это есть число ребер, инцидентных данной вершине. Степень вершины v обозначается записью *deg v*.

Лемма о рукопожатиях

$\sum_{v \in V} \deg\ v = 2|E|.$

Доказательство

Сумма степеней всех вершин графа равна числу концов ребер данного графа, а именно:

$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$

Пример

В графе 100 вершин, каждая соединена с 15-ю другими. Сколько в графе ребер?

Ответ: $\frac{100 \cdot 15}{2} = 750.$

$G = (V, E)$ — ориентированный граф (ОРГРАФ (digraph)), если V — конечное множество (вершины), а $E \subseteq V \times V$.

$G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф, если $E \subseteq V \times V \times N$.

Матрица смежности ориентированного графа — это матрица $M = (\alpha_{ij})_{n \times n}$, α_{ij} = количество ребер с началом в i-й вершине и концом в j-й.

Матрица инцидентности ориентированного графа — это матрица

$$I = (\beta_{ij})_{n \times m}, \beta_{ij} = \begin{cases} 1, i\text{-я вершина – начало } j\text{-го ребра}, \\ -1, i\text{-я вершина – конец } j\text{-го ребра}, \\ a \neq \pm 1, i\text{-я вершина – и начало, и конец } j\text{-го ребра}, \\ 0, \text{ иначе}. \end{cases}$$

$\deg_+ v$ — степень исхода вершины v — это число ребер с началом в вершине v.

$\deg_- v$ — степень захода вершины v — это есть число ребер с концом v.

Лемма о рукопожатиях (для орграфов)

$\sum_{N \in V} \deg_+ v = |E| = \sum_{v \in V} \deg_- v.$

Доказательство

Количество начал рёбер = количеству рёбер = количеству концов рёбер.

Операции с множествами

Пусть даны два графа: $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, тогда можно построить следующие графы:

$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$,

$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2)$,

$G_1 \setminus G_2 = (V_1 \setminus V_2,\ E_1 \setminus E_2)$,

$G_1 \setminus G_2 = \left(V_1 \setminus V_2,\ E_1 \setminus E_2 \cap (V_1 \setminus V_2)^{(2)}\right)$.

$H = (U, F)$, $G = (V, E)$ — графы,

$H \subseteq G$ (H подграф G) — если $U \subseteq V$, $F \subseteq E$.

Изоморфизм графов

φ: $V_1 \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ V_2$ — изоморфизм графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, если $\forall u, v \in V_1 \quad \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$.

Замечание

Если картинки графов изображены одинаково, то такая функция есть.

Если между графами G_1 и G_2 существует изоморфизм, то говорят (G_1 изоморфен G_2), пишут — $G_1 \cong G_2$.

Теорема (об изоморфизме)

Отношение изоморфизма есть эквивалентность на множестве графов.

Доказательство.

1) $\cong$ рефлексивно (тождественное отображение — изоморфизм).

2) $\cong$ симметрично:

$G_1 \cong G_2$, то есть $\exists \varphi : \forall V_1 \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ V_2 \ \forall u, v \ \{u, v\} \in E_1 \leftrightarrow \{\varphi^{-1}(n), \varphi^{-1}(v)\} \in E_2$.

Заметим, что φ^{-1}: $V_2 \to V_1$

$\forall a, b \in V_2 \ \varphi^{-1}(a) = u, \ \varphi(u) = a,$

$\varphi^{-1}(b) = v, \ \varphi(v) = b,$

$\{a, b\} \in E_2 \leftrightarrow \{\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\} \in E_2$.

3) $\cong$ транзитивно:

$G_1 \cong G_2$, $G_2 \cong G_3$.

$$\varphi : V_1 \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ V_2 \ \ \forall u, v \ \{u, v\} \in E_1 \leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2,$$

$$\psi : V_2 \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ V_3 \ \ \forall x, y \ \{x, y\} \in E_2 \leftrightarrow \{\psi(x), \psi(y)\} \in E_3,$$

$$\varphi \circ \psi : V_1 \succ\!\!\rightarrow\!\!\succ V_3 \ \ \forall u, v \in V_1 \ \{u, v\} \in E_1 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2 \overset{\psi}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{\psi}{\longleftrightarrow} \{\psi(\varphi(u)), \psi(\varphi(v))\} \in E_3 .$$

Абстрактный граф — это есть класс множества помеченных графов по отношению изоморфизма $\cong$.

Замечание
Одинаковые изображения $\Rightarrow$ один и тот же абстрактный граф.

Пример

G_1 G_2

Данные графы не являются изоморфными, так как имеют разное количество вершин.

G_1 G_2

Предположим, что эти графы изоморфны, и вершине *1* соответствует вершина *a*. Тогда вершинам *b* и *c* должны соответствовать два различных соседа вершины *1* во втором графе. Однако их не существует, и, следовательно, графы неизоморфны.

Эти соображения можно обобщить следующим образом:

Замечание
Если φ изоморфизм G_1 на G_2 то $\forall v \in V_1 \ \deg v = \deg \varphi(v)$.

В связи с этим возникает следующее понятие:

Для графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, упорядоченный набор степеней его вершин, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_i \in N \cup \{0\}$, называется степенной последовательностью графа G.

Замечание

Степенные последовательности изоморфных графов одинаковы.

О сложности алгоритмов

Будем пользоваться интуитивным понятием алгоритма. Каждый алгоритм имеет ВХОД — последовательность битов. Пусть n — длина ВХОДА. Под сложностью алгоритма будем понимать такую функцию t: $N \to N$, что $t(n)$ — это наибольшее число битовых операций, выполняемых алгоритмом при длине входа равной n. Будем интересоваться лишь скоростью роста таких функций.

$f(x) = O(g(x))$, если $\exists c > 0 \, \forall x > 0 \;\; f(x) \le cg(x)$.

$$f(x) \approx g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = O(g(x)) \\ g(x) = O(f(x)) \end{cases}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении *Det*.

Дано: $A = (\alpha_{ij})_{m \times m}, \alpha_{ij} \in \{0,1\}$.

Найти: $Det(A) \;\; MOD2$ (то есть найти $|A|$ над полем {0,1}).

Алгоритм 1 состоит в рекурсивном разложении по 1-й строке:

$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1m} \cdot A_{1m}$,

$t(m) \ge m \cdot t(m-1), \;\; t(m) \ge m!, \;\; t(n) \ge (\sqrt{n})!$

$\forall k \;\; t(n) > n^k$ ($t(n)$ растет быстрее любого многочлена).

Алгоритм 2 позволит решить данную задачу при помощи метода Гаусса.

Проводим элементарными преобразованиями по строкам матрицу к верхнему треугольному виду:

$t(m) \le m + 3m + (m-1)m = m^2 + 3m$,

$t(m) \le m + 3m + (m-1)m + t(m-1)$,

$t(m) \le (m+3)m + t(m-1) \le \ldots$

$$\le t(m) \le (m+3)m + t(m-1) = 2C_{m+1}^2 + C_m^1 + t(m-1) \le$$

$$\le \ldots \le \sum_{k=1}^{m+1} 2C_k^2 + \sum_{k=1}^{m} 2C_k^1 = 2C_{m+2}^3 + 2C_{m+1}^2 = \frac{(m+2)(m+1)m}{3} + (m+1)m =$$

$$= \frac{(m+1)m(m+5)}{3} = O(m^3).$$

В итоге получили, что наибольшее число битовых операций удовлетворяет следующему равенству:

$$t(n) = O\left(n^{\frac{3}{2}}\right).$$

Сложность задачи — это минимальная сложность алгоритма, решающего задачу.

Сложность ADD~n.

Сложность Det между n и $n^{3/2.}$

Замечание

Задача считается простой, если ее сложность есть многочлен от n ($0(n^k)$). Алгоритм эффективный, если $t(n) = 0(n^k)$.

Введем следующие обозначения:

Множество P — множество всех задач, для которых есть эффективный алгоритм.

Множество NP — множество задач, для которых есть алгоритм, который проверяет решение за время $0(n^k)$.

Задача называется *NP-полной задачей* — если наличие алгоритма, решающего ее за время $0(n^k)$, означает, что для любой задачи из NP существует алгоритм решающий ее за время $0(n^k)$.

Теорема Кука

Задача «выполнимость» NP-полна (в нынешнее время известно около 510^3 NP-полных задач).

Вопрос $P = NP$? — это один из вопросов на миллион долларов.

Сложность задачи проверки изоморфизма графов не известна. Легко показать, что эта задача лежит в классе NP. Для нее в настоящее время нет полиномиального алгоритма и не доказано, что эта задача NP-полна.

Маршруты

Маршрут в графе $G=(V,E)$ — это последовательность $v_0\,e_1v_1\,e_2v_2,...,e_nv_n$, $e_i\in E$, $v_i\in V$ такая, что $\forall i\in\{1,...,n\}\ e_i=\{v_{i-1},v_i\}$, v_0 — начало маршрута, v_n — конец маршрута, n — длина маршрута.

Маршрут с началом *u* и концом *v* называется (*u, v*)-маршрутом.

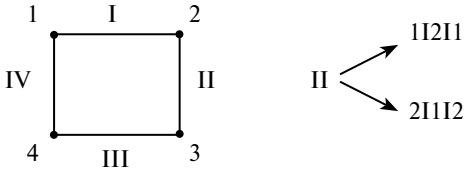
Замечание 1

Последовательность $v_0e_1e_2...e_n$ однозначно определяет маршрут.

Замечание 2

$e_1,e_2,...,e_n$ может уже не определять маршрут.

Пример



Замечание 3

Пусть G — граф (без кратных ребер), тогда $v_0,v_1,v_2,...,v_n$ однозначно определенный маршрут.

Цепь — маршрут без повторяющихся ребер.

Простой маршрут — это маршрут, в котором вершины $v_0,v_1,...,v_{n-1}$ попарно различны и $v_n\notin\{v_1,v_2,...,v_{n-1}\}$.

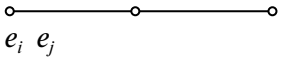
Замечание 4

Каждый простой маршрут, кроме маршрута *veuev*, является цепью.

Доказательство

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что $e_i=e_j\ (i<j)$.

Если $j=i+1$, то $v_{i-1}=v_j=v_{i+1}\Rightarrow i=0, j=1$.



Если $j = i + 1$, то $\{v_{i-1}, v_i\} = \{v_{j-1}, v_j\}$,

$$v_i = \begin{cases} v_j, \\ v_{j-1}. \end{cases}$$

Маршрут называется *циклическим,* если $v_0 = v_n$.

Циклическая цепь — это цикл.

Утверждение 1

Из каждого (u, v) маршрута можно выделить простую (u, v)-цепь $(u \neq v)$.

Доказательство

Пусть дан маршрут:

$u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... v_{n-1} e_n v_n = v.$

Если вершины $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ попарно различны и $v_n \notin \{v_1, ..., v_{n-1}\}$ (то есть $v_0, ..., v_n$ попарно различны), то это уже простой (u, v) маршрут (по замечанию 2).

Если $v_i = v_j$ $(i < j)$, $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_i v_i \cancel{e_{i+1} ... v_j} e_{j+1} ... e_n v_n$.

Получим (u, v)-маршрут меньшей длины путем удаления указанных выше ребра и вершины.

Действуя таким образом, получим конечный процесс, обрывающийся в ситуации, когда маршрут простой.

Утверждение 2

Из каждого цикла можно выделить простой цикл (положительной длины).

Доказательство

Пусть дан маршрут

$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_n v_n = v_0$, $|\{e_1, e_2, ..., e_n\}| = n$, $v_1 \neq v_0 = v_n$,

тогда $v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 ... e_n v_n = v$, $u \neq v$ — это (u, v)-цепь.

Выделим простую (u, v)-цепь (по утверждению 1): $u = u_1 f_2 u_2 f_3 u_3 ... f_m u_m = v$.

Тогда $u = u_1 f_2 u_2 f_3 u_3 ... f_m u_m = v = v_n = v_0$ — цикл, в котором вершины не могут повторяться.

Все пары вершин, кроме (v_0, u_m), — пары разных вершин.

Пример

12421→121

1 I 2 II 4 II 2 I 1 вычеркиванием нельзя получить 1 III 2 II 2 II 1.

Утверждение 3

Объединение двух различных (u, v)-цепей содержит простой цикл.

Доказательство

Даны цепи:

$u = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_n v_n = v,$

$u = u_0 f_1 u_1 f_2 u_2 \ldots f_m u_m = v.$

Пойдем по цепям слева направо. Поскольку они разные, то возможны два случая:

1) $\exists i : e_i \neq f_i.$

2) $\forall i \leq \min\{m,n\}\ e_i = f_i \Rightarrow n > m.$

В случае 2) $v_m e_{m+1} v_{m+1} \ldots e_n v_n = v_m$ — цикл. По утверждениям 2 и 3 можно выделить простой цикл.

Пусть реализуется случай 1). Найдем такое наименьшее i, что $e_i \neq f_i$. Тогда $v_0 = u_0, \ldots, v_{i-1} = u_{i-1} = x\ v_i \neq u_i$.

Найдем на 1-й цепи первую вершину, следующую после вершины x и лежащую на 2-й цепи, назовем ее y. Рассмотрим маршрут $x \xrightarrow{1} y \xrightarrow{2(\text{обратно})} x$.

Заметим, что он является циклом.

Внутри кусков $x \xrightarrow{1} y$ и $y \xrightarrow{2(\text{обратно})} x$ ребра не повторяются, так как это части цепей. Предложение о том, что некоторое ребро e куска $x \xrightarrow{1} y$ встречается на куске $y \xrightarrow{2(\text{обратно})} x$ противоречит выбору y. Рассмотрим вершину перед ребром e. По утверждению 2 можно выделить простой маршрут.

Утверждение 4

Пусть C и D есть два разных цикла с общим ребром e. Тогда $C \cup D \setminus \{e\}$ содержит цикл.

Доказательство

Рассмотрим ребро $e = \{u, v\}$.

Тогда $C \setminus \{e\}$ — это (u, v)-цепь, $D \setminus \{e\}$ — это другая (u, v)-цепь.

По утверждению 3 $(C \setminus \{e\}) \cup (D \setminus \{e\})$ содержит простой цикл

$(C \setminus \{e\}) \cup (D \setminus \{e\}) = (C \cup D) \setminus \{e\}.$

Связность

$G = (V, E)$ — граф, $u, v \in V$.

$u \sim v$ (и связана с V) $\Leftrightarrow$ в G есть (u, v)-маршрут.

$\sim \subseteq V \times V$.

Утверждение

$\sim$ — эквивалентность на V.

Доказательство.

$\sim$ — рефлексивно ($\forall u \in V$ есть (u,u)-маршрут нулевой длины).

$\sim$ — симметрично (каждый маршрут, переписанный в обратном порядке, снова является маршрутом).

$\sim$ — транзитивно (маршруты $(u,v)u(v,\omega)$ можно соединить по вершине v, в результате чего получится (u,ω)-маршрут).

Класс эквивалентности $[v]_\sim$ называется компонентой связности графа G.

Число компонент связности графа G обозначают через $k(G)$.

Утверждение

Следующие условия эквивалентны:

1) $k(G) = 1$,

2) $\exists\, u \in V \quad \forall v \; u \sim v$,

3) $\forall u, v \in V \quad u \sim v$.

Доказательство

$3) \to 2)$ очевидно.

$2) \to 1)$

$V = [u]_\sim \Rightarrow k(G) = 1.$

$1) \to 3)$

$\forall u, v \; \exists \omega \; u \in [\omega]_\sim$, $v \in [\omega]_\sim$,

$$\begin{cases} u \sim \omega \\ v \sim \omega \end{cases} \to \begin{cases} u \sim \omega \\ \omega \sim v \end{cases} \to u \sim v.$$

Ребро e — *мост в графе* G, если $k(G \setminus e) > k(G)$.

Замечание

$\forall e \in E \;\; k(G \setminus e) > k(G).$

Доказательство

$u \sim v \Leftrightarrow$ в G есть (u,v)-маршрут.

$u \approx v \Leftrightarrow$ в графе $G \setminus e$ есть (u,v)-маршрут.

Очевидно $\approx \subseteq \sim$.

$V_{\approx} = \{A_1, A_2, ..., A_m\},$

$V_{\sim} = \{B_1, B_2, ..., B_k\},$

$|A_1| + |A_2| + ... + |A_m| = |V| = |B_1| + |B_2| + ... + |B_k|.$

Тогда

$\forall i, j \;\; i \neq j : B_i \cap B_j = \varnothing, A_i \subseteq B_i \Rightarrow A_i \not\subseteq B_j \; u \forall i \;\; B_i \neq \varnothing \;\; \exists v \in B_i.$

$A_i = [v]_{\approx} \Rightarrow A_i \subseteq B_i$. Это значит, что мы построили инъективное отображение: $\varphi : \{1, ..., k\} \succ\!\!\to \{1, 2, ..., m\} \quad \varphi(i) = (t).$

Значит, $m \geq k$. Таким образом $\forall e \in E$:

1) e — мост $\Rightarrow k(G \setminus e) > k(G),$

2) e — не мост $\Rightarrow k(G \setminus e) = k(G).$

Лемма (о мосте)

1) e — мост $\Rightarrow k(G \setminus e) = k(G) + 1$.

2) e — мост $\Rightarrow e$ не лежит ни в каком цикле G.

3) e не лежит ни в каком цикле $G \Rightarrow e$ — мост.

Доказательство

$e = \{x, y\}.$

Заметим, что $[x]_{\sim} = [x]_{\approx} \cup [y]_{\approx}$.

$\supseteq : [x]_{\approx} \subseteq [x]$, так как $\approx \subseteq \sim \; (z \in [x]_{\approx} \to z \approx x \to z \in [x]_{\sim})$,

$[y]_{\approx} \subseteq [x]_{\sim} \; z \in [y]_{\approx} \to z \approx y \to \begin{cases} y \sim x \\ z \sim y \end{cases} \to z \sim x \to z \in [x]_{\sim}$

$\subseteq : \; z \in [x]_{\sim}$

То есть, в G есть (z, x)-маршрут, если на нем нет e, тогда

$z \approx x \to z \in [x]_{\approx} \to z \in [x]_{\approx} \cup [y]_{\approx}$, но если на этом маршруте есть e, тогда

$z = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_n v_n = x.$

Найдем наименьшее i, такое что $e_i = e$.

$$v_{i-1} \in \{x, y\} \begin{cases} v_{i-1} = x \Rightarrow z \approx x \to z \in [x]_{\approx} \\ v_{i-1} = y \Rightarrow z \approx y \to z \in [y]_{\approx} \end{cases} \Rightarrow z \in [x]_{\approx} \cup [g]_{\approx}.$$

Заметим, что если $[x]_{\approx} \subseteq [x]$, то $[z]_{\approx} = [z]$.

$z \notin [x] \Rightarrow z \neq x \to z \neq y \Rightarrow$ *на* $\forall (z, v)$-маршруте в графе G нет ребра e, то есть каждый (z, v)-маршрут в G является маршрутом в $G \setminus e$, отсюда $k(G \setminus e) = k(G) \Leftrightarrow [x]_{\approx} = [y]_{\approx}$.

А если $[x]_{\approx} \neq [y]_{\approx}$, то $k(G \setminus e) = k(G) + 1$.

Но если e лежит в цикле графа $G \Rightarrow$ в графе $G \setminus e$ есть (x, y)-маршрут, то есть $x \approx y \Rightarrow e$ — не мост.

e не мост $\Rightarrow x \approx y$ и в графе $G \setminus e$ есть (x, y)-маршрут, тогда выделим из него простой маршрут, добавим e и получим цикл с ребром e.

Число реберной связности графа $G\, \varepsilon(G)$ — это есть наименьшее число ребер, которое нужно удалить из графа, чтобы он стал несвязным.

Замечание 1

Граф G — несвязный $\Leftrightarrow \varepsilon(G) = 0.$

Граф G — связный с мостом $\Leftrightarrow \varepsilon(G) = 1.$

Замечание 2

$\varepsilon(G) \leq \min \deg v,\ v \in V.$

Пример

$\varepsilon(P_n) = 1$, так как каждое ребро в цепи — мост.

Если $\varepsilon(C_n) = 2$, мостов нет.

Число вершинной связности графа G ν (G) — это наименьшее число вершин, которое нужно удалить из графа, чтобы он стал несвязным или одновершинным.

Пример

$\nu(k_n) = n - 1.$

Теорема

$\nu(G) \le \varepsilon(G)$.

Доказательство

Пусть граф G несвязный $\Rightarrow \nu(G) = 0 = \varepsilon(G)$.

А теперь пусть G связный граф, тогда возможны следующие случаи.

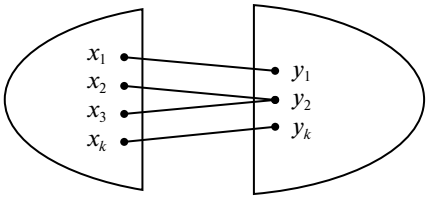
Случай 1: в G есть мост $\Rightarrow \varepsilon(G) = 1$.

Если $V = \{x, y\}$, то удаление вершины x делает граф одновершинным $\nu(G) = 1 = \varepsilon(G)$.

Если $|\nu| > 2$ в $G \setminus e$ $[\![x]\!] > 1$ или $[\![y]\!] > 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{удалим } x, \text{ если } [\![x]\!] > 1 \\ \text{удалим } y, \text{ если } [\![x]\!] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nu(G) = 1 = \varepsilon(G).$$

Случай 2 состоит в том, что в графе G нет моста $\Rightarrow \varepsilon(G) = k > 1$.

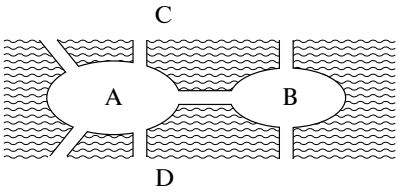


Пусть $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, ..., \{x_k, y_k\}$ — множество рёбер, удаление которого делает граф несвязным. $\forall i \in \{1...k-1\}$ удалим из множества $\{x_i, y_i\}$ одну вершину, не принадлежащую $\{x_k, y_k\}$. Получим либо несвязный граф, либо связный граф с мостом $\{x_k, y_k\}$. Удаление одной вершины делает его несвязным или одновершинным.

$\nu(G) \le k = \varepsilon(G)$.

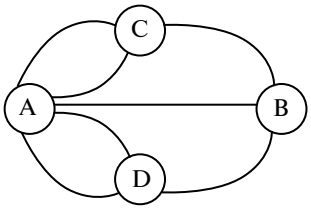
Эйлеровы пути

Задача о Кёнигсбергских мостах:



Можно ли так прогуляться по городу, чтобы пройти по каждому мосту ровно 1 раз?

Пройти = перейти с берега на берег. Поставим в соответствие изображенной выше карте граф, вершины которого — участки суши, а ребрами будут мосты. Полученный таким образом граф является мультиграфом:



Существует ли маршрут для прогулки, который проходит — содержит, по каждому мосту ровно 1 раз? (эквивалентно: существует ли в графе цепь, проходящая через все ребра?)

Данная задача сводится к задаче нарисовать мультиграф одним росчерком.

Эйлерова цепь — это цепь, содержащая все ребра графа.

Эйлеров цикл (ЭЦ) — это есть цикл, содержащий все ребра графа.

Теорема (Эйлера)

Дан граф G без изолированных вершин. Тогда в графе G есть ЭЦ $\Leftrightarrow$

1) G — связный,

2) $\forall v \in V \deg v$ — четная.

Доказательство

$\Rightarrow u, v \in V$ есть (u, v) — маршрут по ЭЦ ((1) выполняется).

Пойдем по ЭЦ, $\forall v \in V$ входим в вершину v столько раз, сколько выходим. $\Rightarrow \deg v$ будет четной.

$\Leftarrow v_0 \in V$, пойдем из вершины v_0, стирая за собой рёбра. Допустим, что пришли в $v \neq v_0$. Зашли в v на 1 раз больше, чем вышли из $v_0 \Rightarrow$ стерли нечетное число инцидентных вершине v рёбер $\Rightarrow$ остались нестертые инцидентные v рёбра.

То есть, если процесс блуждания остановился, то мы в v_0 (и стерли все инцидентные v_0 рёбра). Итак, пройден некоторый цикл P_0. Если все рёбра стерты, то цикл P_0 эйлеров. Пусть остались нестёртые рёбра. Покажем, что на цикле P_0 есть вершина v_1, у которой остались нестертые инцидентные рёбра. Воспользуемся методом от противного: пусть остались лишь рёбра, соединяющие вершины вне $P_0 \Rightarrow$ рёбер между вершинами P_0 и вершинами с нестёртыми рёбрами вообще не было (мы их не стирали). Это противоречит связности.

Замечание

Заметим, что после стирания P_0, у всех вершин по-прежнему чётная степень (стёрли чётное число рёбер у каждой вершины).

Пойдём из вершины v_1, стирая за собой рёбра, аналогично 1-му абзацу построим цикл C_1.

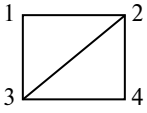
Пусть $P_1 = v_0 \xrightarrow{P_0(\text{начало})} v_1 \xrightarrow{C_1} v_1 \xrightarrow{P_0(\text{конец})} v_0$ — цикл.

Итак, получен новый цикл из вершины v_0 длиной > длины P_0.

Значит, получили процесс увеличения длины цикла, обрывающийся тогда и только тогда, когда цикл будет Эйлеров. Это и есть процесс построения ЭЦ.

Набор цепей покрывает граф, если каждое ребро графа — это ребро какой-то цепи из набора.

Набор цепей ребер не пересекается, если у цепей нет общих рёбер.



{1,2,3,4, 3241} — набор, покрывающий граф.

{123,241} — реберно-непересекающийся набор.

{12,23,34,24,14} — реберно-непересекающийся набор, покрывающий граф.

{214 324} — реберно-непересекающийся набор, покрывающий граф.

Замечание

Эйлерова цепь в одиночку образует реберно-непересекающийся набор, покрывающий граф.

Следствие из Теоремы Эйлера

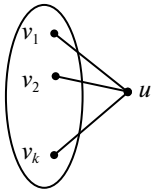
Граф G — связный с k вершинами нечетной степени. Тогда в минимальном (по числу цепей) реберно-непересекающемся наборе, покрывающем граф, будет $k/2$ цепей.

Доказательство

По Лемме о рукопожатиях k — четно.

Пусть граф покрыт l реберно-непересекающимися цепями.

Рассмотрим вершину нечетной степени. Если концы некоторой цепи не лежат в v, то цепь покрывает четное число инцидентных v ребер. Значит, найдется конец цепи, лежащий в вершине v. Количество концов цепей $\geqslant$ количеству вершин нечетной степени, то есть $2l \geq k \Rightarrow l \geq k/2$: $k/2$ цепей всегда достаточно.



$v_1, v_2, ..., v_k$ — вершины нечетной степени.

u — новая вершина, соединим u с $v_i \left(i \in \{1...k\}\right)$ и получим связный граф с четными степенями вершин, по теореме Эйлера в нем есть ЭЦ.

Удалим все вхождения u и все ребра с u, цикл развалится на k/2 частей — цепей, они реберно-непересекающиеся (по определению цикла) и покрывают граф (по определению ЭЦ и по построению графа).

Теорема об оценке числа ребер

$G = (V, E)$ — граф, $|V| = n$, $|E| = m$, k — компонента.

Тогда $n - k \leq m \leq C^2_{n-k+1} = \dfrac{(n-k+1)(n-k)}{2}$.

Доказательство

1) Проведем индукцию по числу ребер:

База индукции:

$m = 0 \Rightarrow$ каждая вершина — компонента $\Rightarrow k = n \Rightarrow n - k = 0 \leq m$.

Шаг индукции:

$m > 0$ для всех графов, в которых $< m$ ребер, неравенство $n - k \leq m$ выполняется.

$e \in E$, либо e — мост $\xrightarrow{\text{Лемма о мосте}} k(G \setminus e) = k(G) + 1$,

либо e — не мост $\xrightarrow{\text{Определение моста и замечание}} k(G \setminus e) = k(G)$.

Тогда

$m(G \setminus e) = m(G) - 1,$

$n(G \setminus e) = n(G).$

По предположению индукции $n(G \setminus e) - k(G \setminus e) \le m(G \setminus e),$

$$n(G) - \begin{bmatrix} k(G)+1 \\ k(G) \end{bmatrix} \le m(G) - 1,$$

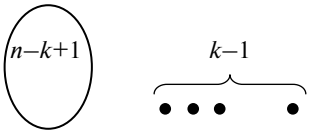
$n(G) - (k(G)+1) \le m(G) - 1,$

$n(G) - k(G) \le m(G) - 1 \le m(G).$

2) Рассмотрим экстремальный пример, то есть граф с *n* вершинами, *k* компонентами и наибольшим (для этих *n* и *k*) числом ребер.

Покажем, что в экстремальном примере не может быть больше двух компонент. Воспользуемся методом от противного. Пусть есть две компоненты: k_1 и k_2, $|k_1| = p$, $|k_2| = q$, $p \ge q > 1$, v — вершина k_2. Удалим все ребра, инцидентные *v*, соединим *v* ребрами со всеми вершинами k_1. В полученном графе столько же вершин и столько же компонент, что и в исходном. Число ребер увеличилось не менее чем на величину $p = q + 1 > 0.$

Получили противоречие с экстремальностью исходного графа. То есть, экстремальный пример имеет вид



большая маленькая

$m \le C^2_{n-k+1}.$

Деревья

Дерево — связный граф без циклов.
Лес — граф без циклов.

Теорема (об эквивалентных определениях дерева)
Для графа G эквивалентны следующие условия:
1) граф G — дерево.
2) G — связный и $m(G) = n(G) - 1$.
3) G — без циклов и $m(G) = n(G) - 1$.
4) $\forall u, v \in V \ \exists!$ простая (u, v) — цепь.
5) G без циклов, $\forall u, v \in V, \{u, v\} \notin E \ G + \{u, v\}$ содержит ровно 1 цикл.

Доказательство
$1) \to 2)$ индукция по числу ребер.

База индукции:
$m(G) = 0 + G$ связный $\Rightarrow n(G) = 1$.

Шаг индукции:
$m(G) > 0$ (для всех деревьев с меньшим числом ребер уже доказано).

$e \in E \xrightarrow[\text{определение дерева}]{\text{Лемма о мосте}} e$ — мост $\xrightarrow{\text{Лемма о мосте}} k(G \setminus e) = k(G) + 1 = 2.$

Пусть T_1 и T_2 — компоненты $G \setminus e$, они деревья и $m(T_1) + m(T_2) = m(G) - 1$, то есть $m(T_1) < m(G)$ и $m(T_2) < m(G)$.

По определению индукции:

$$m(T_1) = n(T_1) - 1, \quad \frac{m(T_2) = n(T_2) - 1}{m(G_1) - 1 = n(G) - 2}, \quad m(G) = n(G) - 1.$$

$2) \to 3)$ Воспользуемся методом от противного:

В графе G есть цикл C, пусть e ребро цикла G. Следовательно, e — не мост.
$k(G \setminus e) = k(G) = 1,$
$n(G \setminus e) = n(G),$
$m(G \setminus e) = m(G) - 1,$
$m(G \setminus e) = m(G) - 1 = n(G) - 2 = n(G \setminus e) - k(G \setminus e) - 1 < n(G \setminus e) - k(G \setminus e).$

Это противоречит теореме об оценке числа ребер.

$3) \to 4)$ Докажем, что граф G связный.

Сначала докажем существование.

Пусть $T_1, T_2, ..., T_k$ его компоненты — деревья (так как $1) \to 2)$ уже доказано). Тогда

$$m(T_1) = n(T_1) - 1$$

$$+$$

$$m(T_2) = n(T_2) - 1$$

$$+$$

$$...$$

$$+$$

$$\frac{m(T_k) = n(T_k) - 1}{n(G) - 1 = m(G) = n(G) - k} \Rightarrow k = 1.$$

Граф G будет связным, то есть $\forall u, v \in V$ (u, v) — маршрут. По утверждению 1-му про маршруты из него можно выделить простую (u, v)-цепь.

Теперь докажем единственность.

Воспользуемся методом от противного: есть 2 разные (u, v)-цепи. По утверждению 3-му про маршруты их объединение содержит цикл (противоречие).

$4) \to 5)$ граф G без циклов? Простой цикл образует две разные цепи:

$G + \{u, v\}$ содержит цикл, $\{u, v\} + (u, v)$ — цепь.

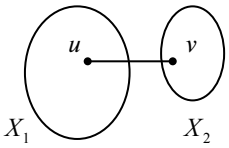
Снова применим метод от противного:

C и D — разные циклы в $G + \{u, v\}$.

$\{u, v\}$ содержатся в C и D.

По утверждению 4-му про маршруты $C \cup D \setminus \{u, v\}$ содержит цикл (противоречие).

$5) \to 1)$ Докажем связность методом от противного.



$u \in X_1$, $v \in X_2$.

$G+\{u,v\}$ содержит цикл с ребром $\{u,v\}$ (так как G без циклов).

Но удаление $\{u,v\}$ разделяет компоненты, то есть $\{u,v\}$ — мост в графе $G+\{u,v\} \xrightarrow{\text{Лемма о мосте}} \{u,v\}$, который не лежит ни в каком цикле (противоречие).

Если в дереве $n>1$, то в нем $\forall v \deg v>0$.

Лист — вершина степени 1 в дереве.

Следствие 1

В каждом дереве (при $n>1$) не менее двух листьев.

Доказательство

Пусть l листьев $\Rightarrow n-l$ имеют степень ≥ 2.

$$2(n-1)=2m=\sum_{v\in V}\deg v=\sum_{v-\text{лист}}\deg v+\sum_{v-\text{не лист}}\deg v\geq l+2(n-l)=2n-l,\ l\geq 2.$$

Остовной подграф графа $G=(V,E)$ — это есть граф $H=(V,F),\ F\subseteq E,$ $k(H)=k(G)$.

Остов (каркас) графа G — есть остовной подграф с минимальным числом ребер.

Замечание

Каждая компонента остова — дерево. Иначе, удалив ребро в цикле, уменьшим число ребер, не изменив числа компонент.

Обратно: Если в остовном подграфе каждая компонента — дерево, то удаление любого ребра увеличивает число компонент связности, то есть то, что остается, — уже не остовной подграф.

Следствие 2

Остовной подграф, у которого каждая компонента — дерево, является остовом.

Доказательство

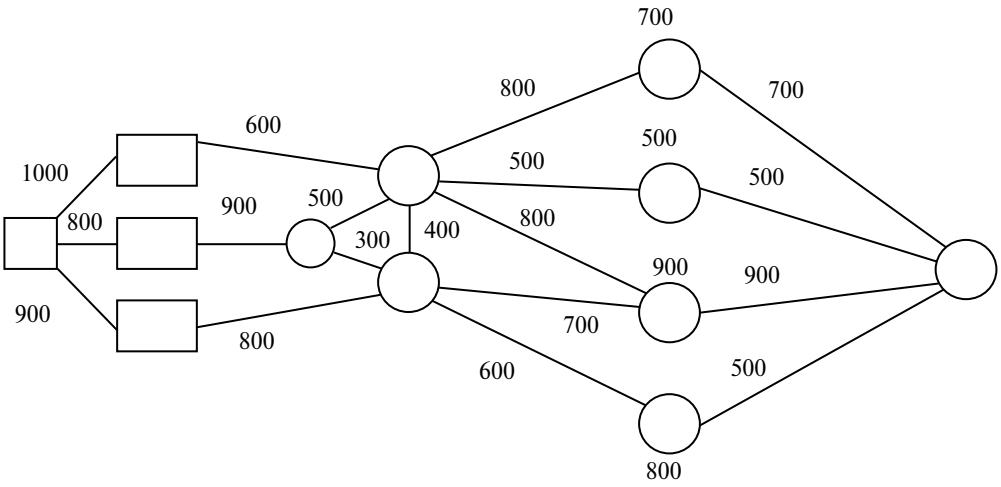
Оценим число ребер в остовном подграфе снизу (по Теореме об оценке) оно $\geq n-k$.

Если в остовном подграфе каждая компонента — дерево, то в ней ребер на 1 меньше, чем вершин, то есть во всем графе ребер $n-k,$ по определению — это остов. Для получения остова из цикла нужно удалить $m-n+k$ ребер.

Циклический ранг графа — это сумма

$\gamma(G)=m(G)+k(G)$.

Потоки в сетях



(G,S,t,c) — сеть, если $G=(V,E)$ — орграф $S,t\in V$, где S — источник, t — сток.

$c: E\to R^{+}$ — функция пропускной способности.

(G,S,t,ω) — сеть S'. Поток f в сети S — это есть функция $f: E\to R^{+}\cup\{0\}$ такая, что выполняются условия:

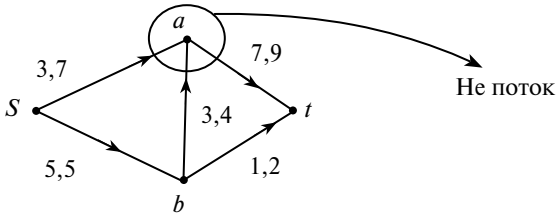
П1: $\forall e\in E\ f(e)\le c(e)$,

П2: $\forall u\in V$.

$$\sum_{\substack{v\in V\\(u,v)\in E}} f(u,v)-\sum_{\substack{v\in V\\(v,u)\in E}} f(v,u)=\begin{cases}0,\ u\ne s,t\\ p\ge 0,\ u=s\\ -p,\ u=t\end{cases}$$

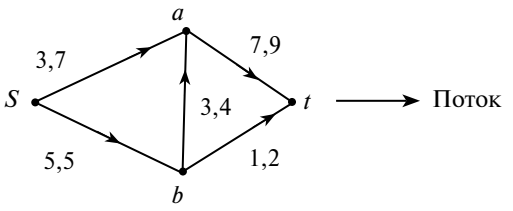
Такую функцию называют потоком. Он вытекает из вершины *s* и втекает в вершину *t*.

Пример



Договоримся записывать поток на ребре и его пропускную способность через запятую, рядом с соответствующей этому ребру стрелкой.

В примере первые цифры не задают поток.



$p = p(f)$ — величина потока, сам поток — это функция.

Сокращение записи:

$A, B \subseteq V$,

$h : E \to R^{+} \cup \{0\}$,

$(A,B) = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \ (x,y) \in E\}$,

$h(A,B) = \sum\limits_{(x,y)\in(A,B)} h(x,y)$,

$(\{s,a\},\{b,t\}) = \{(a,t),(s,b)\}$,

$(\{s,a,b\},\{a,b,t\}) = E$,

$c(\{s,a\},\{b,t\}) = 14$,

$f(\{s,a\},\{b,t\}) = 12$.

П2 представляется как

$$f(\{u\},v) - f(v,\{u\}) = \begin{cases} 0, \ u \neq s,t \\ p, \ u = s \\ -p, \ u = t \end{cases}$$

Разрез в сети — это $(X, \bar{X})$, где $X \subseteq V \ (\bar{X}) = V(X)$.

Лемма о разрезе

(G,S,t,c) — сеть.

Тогда $\forall x \subseteq V \ \ s \in x, \ t \notin x \ \ \forall f$ (f — поток) $P(f) = f(x,\bar{x}) - f(\bar{x},x) \leq c(x,\bar{x})$.

Доказательство. 1) $f(x,V) - f(V,x) = \sum\limits_{x\in X} f(\{x\},V) - f(V,\{x\}) = P(f)$,

$f(x,V) - f(V,x) = f(x,x) + f(x,\bar{x}) - f(x,x) - f(\bar{x},x) = f(x,\bar{x}) - f(\bar{x},x)$.

2) Из П1 $\Rightarrow f(x,\bar{x}) \le c(x,\bar{x})$ по определению потока

$f: E \to R^+ \cup \{0\}$ $\forall e \in E\ f(e) \ge 0,\ f(\bar{x},x) \ge 0,\ -f(\bar{x},x) \le 0$.

Теорема (Форда–Фалкерсона)

$\max P(f) = \min c(x,\bar{x})$, f — поток, $x \subseteq V, S \in x, t \notin x$.

Доказательство

$\max f \le \min c(x,\bar{x})$ (по лемме о разрезе).

Докажем достижимость: возьмем максимальный поток f (то есть поток с наибольшим значением Р). Построим x по правилам:

1) $S \in x$.

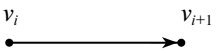
2) $u \in x\ \ f(u,v) < c(u,v) \Rightarrow v \in x$.

3) $u \in x\ \ f(v,u) > 0 \Rightarrow v \in x$.

Заметим, что $t \notin x$.

Будем рассуждать «от противного». Если $t \in x$, то от S до t есть путь, построенный по правилам 1 и 2: $S = v_0, v_1, ..., v_k = t$.

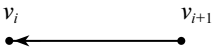
Правило 1:



Попутное ребро

$\Rightarrow f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$.

Правило 2:



Встречное ребро

$f(v_i, v_{i+1}) > 0$.

$\varepsilon_1 = \min(c(e) - f(e)) > 0$, e — попутное.

$\varepsilon_2 = \min f(e) > 0$, e — встречное.

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon,\ e - \text{попутное} \to \forall e \in E\ f'(e) \le c(e), \\ f(e) - \varepsilon,\ e - \text{встречное} \to f': E \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}, \\ f(e),\ e \text{ не входит в найденный } (s,t)\text{-маршрут}. \end{cases}$$

(s, t)-путь, построенный по правилам 1 и 2, — это есть увеличивающий путь, а ε — увеличивающее значение.

Замечание 1

Если в сети с потоком есть увеличивающий путь, то поток можно увеличить.

Замечание 2

Если в сети с потоком нет увеличивающего пути, то поток max (по Теореме Форда-Фалкерсона).

Доказательство

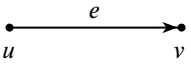
Увеличивающего пути нет $\Rightarrow$ по правилам 1, 2, 3 построим x, $S \in x$, $t \notin x$ и $P(f) = c(x, \bar{x}) \geq \min\{c(x, \bar{x}) \mid x \subseteq V, S \in x, t \notin x\}$.

Значит, $P(f) = \max\{P(f) \mid f - \text{поток}\}$, f — максимальный поток.

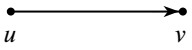
Алгоритм поиска максимального потока

1. Берем какой-нибудь поток (например $\forall e \ f(e) = 0$).
2. Ищем увеличивающий путь. Если нашли, то увеличиваем вдоль него поток на ε (увеличив значение); переход на 2. Иначе стоп, поток максимальный.

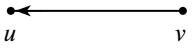
Алгоритм поиска кратчайшего увеличивающего пути



если $f(e) = 0$, то путь попутный — да, встречный — нет;



если $f(e) = c(e)$, то путь попутный — нет, встречный — да;



если $0 < f(e) < c(e)$, то путь может быть и попутным и встречным.

Замечание

В полученном ориентированном графе есть ориентированный (s, t)-путь $\Leftrightarrow$ в исходной сети с истоком есть увеличивающий путь.

Расстояние в графах

Расстояние между вершинами *u* и *v* во взвешенном графе $G((G,\omega))$ — это есть длина кратчайшей (u,v)-цепи. Обозначение: $\rho(u,v)$.

Замечание 1

ρ — метрика на *V*, т. е.

1) $\rho(u,u)=0$,

2) $\rho(u,v)=\rho(v,u)$ –функция симметрична относительно аргументов,

3) $\rho(u,v)+\rho(v,w)\geq\rho(u,w)$.

Доказательство. Некоторая цепь ≥ кратчайшая цепь.

Замечание 2

Расстояние не во взвешенном графе G — это расстояние во взвешенном графе (G,ω), где $\forall e\in E\ \ \omega(e)=1$.

Алгоритм Дейкстры.

Вход: $G=(V,E)$, $\omega: E\to R^{+}$, $u\in V$.

Выход: $\forall v\in V$, $\rho(u,v)$.

Требуется две функции: $d: V\to R^{+}$ (функция текущего расстояния)

и $e: V\to V$ (частичная функция текущего предшественника).

$S\subseteq V$ (список найденных, но не обработанных вершин).

$v\to S$ (вершину *v* поместить в список S).

$v\leftarrow S$ (из S вынимается вершина с наименьшим значением *d* и помещается в переменную *v*).

0) $\forall v\in V\ \ d(v)=+\infty,\ d(u)=0,\ e(v)=NULL,\ u\to S$;

1) Если $S=\varnothing$, то *стоп*;

2) $v\leftarrow S$;

3) $\forall x\in V\ \ x$ — смежна с вершиной *v*.

если $d(x)>d(v)+\omega(v,x)$,

то $d(x)=d(v)+\omega(v,x)$.

$e(x)=v,\ \ x\to S$.

4) Переход на п. 1).
Пусть $M = \min\ d(v)\ v \in S$.

Замечание 1
M не убывает (пока $S \neq \varnothing$).
Доказательство
Очевидно, следует из п. 3) алгоритма.

Замечание 2
$v \to S \Rightarrow d(v) \to M$.

Замечание 3
$\forall v\ d(v)$ — не возрастает.

Замечание 4
Если вершина v удалена из списка S, то v не попадает больше в список.
Доказательство
Очевидно, следует из описания алгоритма.

Лемма 1
Каждая вершина удаляется только один раз. Граф G — связный, шаг 2 (алгоритма) срабатывает ровно $m(G)$ раз.

Доказательство
Из замечаний 1, 2, 3, 4 следует, что шаг 2 срабатывает $\sum m(G)$ раз $\forall v \neq u$. Вначале $d(v) = \infty$, значит, просмотрев какой-нибудь маршрут (u, v), мы поместим v в список S. В силу шага 1 вершина будет удалена.

Замечание 5
Если $d(v) < \infty$, то $d(v)$ — это длина некоторого (v,u) маршрута (а именно, $v, e(v), e^2(v), ..., u$).

Доказательство
Воспользуемся методом от противного. Допустим это не так. Найдем первое выполнение шага 3, когда это нарушается, то есть $d(x)$ — не длина никакого (x, v) — маршрута. Но $d(v)$ — это длина маршрута $v, e(v), e^2(v), ..., u$ $d(x) = d(v) + \omega(v, x)$ и это длина $(v, e(v), e^2(v), ..., u) = x, e(x), e^2(x), ..., u$ (противоречие).

Замечание 6

$\forall v$ в любой момент выполнение алгоритма $d(v) \geq \rho(u,v)$.

Лемма 2. В конце работы алгоритма $\forall v \in V \quad d(v) = \rho(u,v)$.

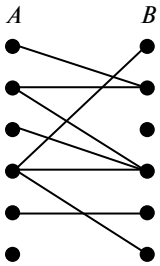
Доказательство. Воспользуемся методом доказательства от противного. Пусть существует такая вершина $v \in V$, что в конце работы алгоритма для этой вершины $d(v) > \rho(u,v)$ (замечание 6). Пусть *v* — самая близкая к вершине *u* вершина с таким свойством. Рассмотрим кратчайший (u,v)-маршрут $u,\ldots,y,v$ $d(y) = \rho(u,y) < \rho(u,v)$. Рассмотрим шаг, на котором вершина *y* вынута из списка и просматриваются её соседи. В этот момент уже в силу замечаний 1, 2, 3, 4 $d(y) = \rho(u,y)$. Вершина *v* — сосед y, в этот момент $d(v) > \rho(u,v) = \rho(u,y) + \omega(y,v) = d(y) + \omega(y,v)$ (в силу Замечания 3), то есть выполняется равенство $d(v) = d(y) + \omega(y,v) = \rho(u,v)$. Получили противоречие.

Леммы 1, 2 дают теорему о корректности алгоритма Дейкстры.

Двудольные графы

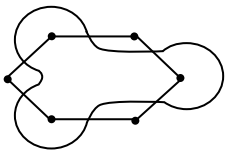
Пример

$A \cap B = \varnothing$, $\rho \subseteq A \times B$.



Граф $G=(V, E)$ двудольный, если $\exists A, B \leq V \quad A \cup B = V$, $A \cup B = \varnothing \forall \{u,v\} \in E$ $u \in A$, $v \in B$ (или наоборот), *A*, *B* — доли графа.

Пример



Двудольный Не двудольный

Теорема Кенига (критерий двудольности)
Граф G — двудольный $\Leftrightarrow$ в G нет циклов нечетной длины.

Доказательство

$\Rightarrow$ Берем ЛЮБОЙ цикл:

$v_0 v_1 v_2 v_3 \ldots v_{n-1} v_n = v_0$,

$A\ B\ A\ B \ldots\ldots\ldots A = A$.

Части A, B, на которые делится двудольный граф, называются долями.

Доля A, где v_0 $\forall k \in N \cup \{0\}$, $v_{2k} \in A$, $v_{2k+1} \in B$, значит, число n — четное.

$\Leftarrow$ Заметим, что если каждая компонента двудольная, то и весь граф двудольный. Очевидно, достаточно доказать $\Leftarrow$ только для связного графа. Выберем вершину $u \in V$ так, что выполняется следующее:

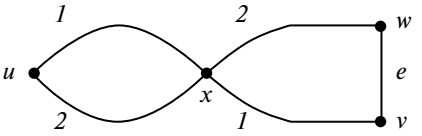
$A = \{v \in V\,(\rho(u,v) - \text{четно})\}$ $B = \{v \in V\,(\rho(u,v) - \text{нечетно})\}$.

Очевидно: $A \cup B = V$ (G — связный), $A \cap B = \varnothing$.

Покажем, что НЕТ ребер внутри частей.

Воспользуемся методом от противного. Вершины w, v лежат в одной части: $e = \{w,v\} \in E$, $\rho(u,v) \equiv \rho(u,w) \pmod 2$.

Найдем кратчайшие маршруты:



x — последняя вершина на первом маршруте из тех, которые лежат и на втором маршруте, а это значит, что на первом пути нет вершин второго маршрута. Второй маршрут простой, так как кратчайший $\Rightarrow x \xrightarrow{1} v \xrightarrow{e} w \xrightarrow{2} x$ — простой цикл. Если $x = v$ и $w \xrightarrow{2} x$ — это снова ребро e, то v — предпоследняя вершина кратчайшего (u,w)-маршрута $\Rightarrow \rho(u,v) + 1 = \rho(u,w)$. А это противо-

речие. То есть цикл всегда есть. Заметим, что длины u, x частей первого и второго маршрутов одинаковы (иначе можно сократить какой-то кротчайший маршрут) и равны $\rho(u,x)$.

Длина найденного цикла равна

$$\rho(u,w)-\rho(u,x)+\rho(u,v)-\rho(u,x)+1=$$

$$=\rho(u,w)+\rho(u,v)-2\rho(u,x)+1.$$

Она будет нечетной (противоречие).

Алгоритм проверки двудольности связного графа

1) Выберем $u \in V$.

2) Измерим $\rho(u,v) \quad \forall v \in V$.

Проверим, если есть $v, w \in V, \rho(u,v)=\rho(u,w)$ и $\{v,w\} \in E$, то граф не двудольный, иначе, граф — двудольный.

Замечание

Шаг 2 можно делать в ходе выполнения шага 1. Проверим корректность шага 2.

Если ..., то ... $\Rightarrow$ находим цикл нечетной длины $\Rightarrow$ так как граф не двудольный.

Иначе $\Rightarrow$ *A* и *B* из доказательства.

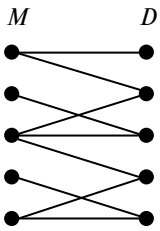
Действительно, v, w в одной части и соединены ребром

$$e \Rightarrow \left(\rho(u,v)-\rho(u,w)\right)=\begin{bmatrix}0,\\1.\end{bmatrix}$$

(из неравенства треугольника).

Но это не равно 0, и это равно 1, так как $\rho(u,v) \equiv \rho(u,w) \pmod 2$ (противоречие).

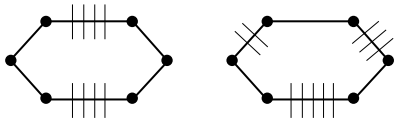
Паросочетание



Паросочетание — множество попарно непересекающихся ребер.

Максимальное паросочетание есть паросочетание, не лежащее ни в каком другом паросочетании.

Пример



Оба парасочетания максимальные.

Наибольшее паросочетание есть паросочетание с наибольшим числом ребер.

Замечание 1

Пусть $\forall e \in E \quad f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ для любого увеличивающего пути $\varepsilon = 1$.

Доказательство

$S \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet t$

На попутных $f < c \Rightarrow f = 0.$

На встречных $f > 0 \Rightarrow f = 1.$

$\varepsilon = \min\left\{\min c(e) = f(e)(e - \text{попутное}),\ \min f(e)(e - \text{встречное})\right\} = 1.$

Замечание 2

Пусть $\forall e \in E\ f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ после изменения потока вдоль ПУТИ

$\forall e \in E\ f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Утверждение

При работе алгоритма поиска максимального потока будет найден поток со свойством $\forall e \in E \quad f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Замечание 3

Пусть в алгоритме есть поток со свойством $\forall e \in E \quad f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ величины p. Тогда множество $\left\{\{u,v\} / u \in A,\ v \in B,\ f(u,v) = 1\right\}$ — паросочетание мощности p.

Доказательство

В каждую вершину A не может втекать больше 1. Из каждой вершины B не может вытекать больше 1. Величина потока через разрез $\left(\{S\} \cup A, B \cup \{t\}\right)$ равна числу ребер, на которых они не равны 1.

Замечание 4

Если в двудольном графе есть паросочетания мощности m, тогда в соответствии ему есть поток величины m со свойством $\forall e \in E \quad f(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Доказательство

Определим нужный поток:

$\forall \{u,v\} \in M \ (u \in A, v \in B), \quad f(s,u) = f(u,v) = f(w,t) = 1,\ P(f) = m$.

Теорема (о корректности алгоритма)

Множество ребер двудольного графа, на которых найденный алгоритм максимального потока не равен 0, если наибольшее паросочетание.

Доказательство

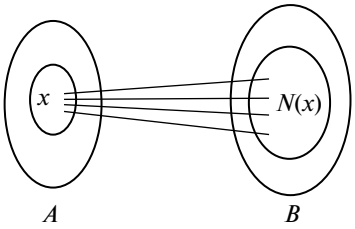
Очевидно, следует из утверждения и замечаний 3 и 4.

Теорема Холла (о трансверсалях). В двудольном графе $G = (A \cup B, E)$ есть паросочетания мощности $|A|$ тогда и только тогда, когда $\forall x \subseteq A \ |N(x)| \geq |x|$.

$|N(x)$ — окружение x, то есть $\left\{v \in V \mid \exists u \in x \ \{u,v\} \in E\right\}|$.

Замечание

В двудольном графе $x \subseteq A \Rightarrow N(x) \subseteq B$.



Доказательство

$\Rightarrow$ Воспользуемся методом от противного. Пусть $\exists x \subseteq A,\ \left|N(x)\right| < |x| \Rightarrow$ любое паросочетание не использует какую-то вершину из x, а значит, и из A.

$\Leftarrow$ Проведем индукцию по длине $|A|$.

База индукции: $|A| = 1,\ \left|N(A)\right| \geq |A| = 1$, то есть ребро с началом в A. Это паросочетание мощности $1 = |A|$.

Шаг индукции: $|A| = m$. Предположим, что для всех двудольных графов, у которых доля A состоит из $<m$ вершин, утверждение доказано.

1-й случай:

$\forall x \subseteq A\ \ \left|N(x)\right| > |x|\ \ a \in A,\ b \in B\ \ e = \{a,b\} \in E$. Строим $G' : A' = A \setminus a$,

$$B' = B \setminus b,\ \forall x' \subseteq A' \subseteq A,\quad N_{G'}(x') = \begin{bmatrix} N_G(x'), \\ N_G(x') \setminus b, \end{bmatrix}$$

$$\left|N_{G'}(x')\right| = \begin{bmatrix} \left|N_G(x')\right| \\ \left|N_G(x')\right| - 1 \geq |x'|. \end{bmatrix}$$

По предложению индукции в графе G' есть паросочетания мощности $|A'| = m - 1$. Вместе с ребром e получим в G паросочетания мощности $m = |A|$.

2-й случай:

$\exists A_0 \subseteq A,\ \left|N(A_0)\right| = |A_0|$.

$G' = G\left(A_0 \cup N(A_0)\right)$.

$G'' = G\left(\bar{A}_0 \cup \overline{N(A_0)}\right)$.

$\forall x \subseteq A_0, N_G(x) = N_{G'}(x) \Rightarrow |x| \leq \left|N_{G'}(x)\right|$ по положению индукции в графе G' есть паросочетания мощности (A_0), $\forall x \subseteq \bar{A}_0$.

$$\cancel{|A_0|} + |x| = |A_0 \cup x| \le |N_G(A_0 \cup x)| = |N_G(A_0) \cup N_{G'}(x)| = \cancel{|N_G(A_0)|} +$$

$$+ |N_{G''}(x)| \Rightarrow |x| \le |N_{G''}(x)|.$$

По предположению индукции в графе G'' есть паросочетания мощности $|\bar{A}_0|$. Объединение двух найденных паросочетаний есть паросочетание мощности $|N|$ в графе *G*.

Следствие

В *G* есть паросочетания мощности $t \Leftrightarrow \forall x \subseteq A,\ t \le |A| + |N(x)| - |x|$.

Доказательство

Добавим в долю *B* еще $|A| - t$ новых вершин, соединив каждую добавленную вершину с каждой вершиной доли *A*. Получим граф G'. В *G* есть паросочетания мощности $t \Leftrightarrow$ (очевидно) в графе G' есть паросочетание мощности $|A|$.

Возьмем в *G* паросочетания мощности *t*. В нем не задействованы $|A| - t$ вершин доли *A*. Соединим каждую из этих незадействованных вершин со своей добавленной вершиной.

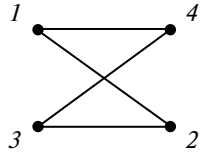
Возьмем в G' паросочетания мощности $|A|$. Удалим из правой доли добавленные вершины (их $|A| - t$). Вместе с ними удалены $\le |A| - t$ ребер паросочетаний. Осталось паросочетание в *G* мощности $\ge t$.

$\forall x \subseteq A,\ |x| \le |N_{G'}(x)| = |A| - t + |N_G(x)|$.

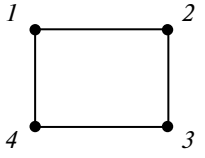
Плоские и планарные графы

Планарный граф G — это граф, который изображен на плоскости без пересечения ребер.

Пример



Не плоский планарный



Плоский планарный

Граф G — планарный граф, если он изоморфен плоскому графу, или G можно изобразить на плоскости без пересечения ребер.

Замечание 1

Любой граф можно уложить в ^{3} из пересечения ребер. Рассмотрим пучок из $|E|$ плоскостей, расположим $\forall$ на прямой пересечения пучка. Каждое ребро — полуокружность в своей плоскости.

Замечание 2

Граф можно уложить на сфере без пересечения ребер $\Leftrightarrow$ G — планарный.

Доказательство

Отрезок AB есть диаметр. Точка B есть единственная точка пересечения сферы и плоскости.

Строим проекцию П на сферу относительно точки A, которую можно взаимно однозначно спроектировать на плоскость.

Замечание 3

Выпуклый многогранник — это плоский граф.

Грань плоского графа — это есть часть плоскости, ограниченная ребрами.

6. Автоматы и языки

Языки

$\sum$ — алфавит (конечный) — множество букв.

$\sum^+$ – множество всех слов.

$<\sum^+,\cdot>$ — свободная полугруппа.

λ — пустое слово.
$\sum^+ \cup \{\lambda\} = \sum^*$.

$<\sum^*,\cdot>$ — свободный моноид.

«Свободный»: $\forall M$ – моноид $\forall \varphi : \sum \to M \; \exists! \hat{\varphi} : \sum^* \to M$ (гомоморфизм):

$\hat{\varphi}(\lambda) = 1, \forall a \in \sum \hat{\varphi}(a) = \varphi(a)$.

Языком называется подмножество свободного моноида.

Примеры
1. Русский язык.
2. Язык программирования.
3. Геном человека — язык, $\sum = \{A, Ц, T, Г\}$.
4. Организм — язык, алфавит — множество аминокислот.
5. Множество простых чисел $(\sum = \{1\})$.

Операции с языками

1° Теоретико-множественные операции:
$\cup, \cap, -, \setminus$
$(L \subseteq \sum^* \Rightarrow \bar{L} = \sum^* \setminus L)$

2° Произведение языков:
$L, K \subseteq \sum^* \Rightarrow L \cdot K = \{uv \,|\, u \in L, v \in K\}$.

Пример
$K = \{a^{2n} \,|\, n \in N\}$.

$K = \{a^{7n} \mid n \in N\}.$

$L \cdot K = \{a^9, a^{11}, a^{13}, a^{15}, a^{16}, a^{17}, a^{18} \cdots\} = \{a^9, a^{11}, a^{13}\} \cup \{a^n \mid n \geq 19\}.$

3° Левое (правое) частное:

$K^{-1}L = \{v \mid \exists u \in K : uv \in L\},$

$LK^{-1} = \{v \mid \exists u \in K : vu \in L\}.$

Пример

$L = \{ab, ba, ab^2\},$

$K = \{a, a^2, b\},$

$K^{-1}L = \{b, a, b^2\}.$

Упрощенные обозначения:

$\{u\} \rightarrowtail u.$

$\{v \mid uv \in L\} = u^{-1}L.$

$L \cup K = K + L.$

$(a + ab)ba(a + b) = \{aba^2, abab, ab^2a^2, ab^2ab\}.$

4° Итерация языка:

$L \subseteq \Sigma^* \Rightarrow L^* = \{\lambda\} \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n (L^0 = \{\lambda\}).$

Примеры

$L = \{a^5, a^8\}.$

$L^* = \{\lambda, a^5, a^8, a^{10}, a^{13}, a^{15}, a^{16}, a^{18}, a^{20}, a^{21}, a^{23}, a^{24}, a^{25}, a^{26}, a^{28} \cdots\}.$

$\Sigma = \{a, b\}.$

$(a + b)^*ab\ (a + b)^*$ — множество всех слов, содержащих ab в качестве подмножества.

u — префикс ω, если $\omega = u \cdot v$;
u — суффикс ω, если $\omega = v \cdot u$;
u — фактор (подслово), если $\omega = v \cdot u$.

Рациональным выражением называется выражение из букв и λ с применением операций +, ·, *.

Автоматы. Распознаватели

Машина получает воздействие (символы конечного алфавита), меняется ее состояние.

Детерминированным конечным автоматом (ДКА) называется тройка: $A = (Q, \Sigma, \delta)$, где Σ — конечный алфавит, Q — множество состояний (конечное), $\delta : Q x \Sigma \to Q$ — функция переходов.

При этом если $\delta(q_1, a) = q_2$ и $\delta(q_2, b) = q_3$, то хотелось бы, чтобы $\delta(q_1, ab) = q_3$, т. е. чтобы δ продолжалась до $\Sigma : Q x \Sigma^* \to Q$ следующим образом:

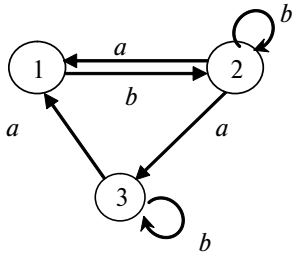
1. $\forall q \in Q : \delta(q, \lambda) = q$;
2. $\forall q \in Q, a \in \sum, u \in \sum^* : \delta(q, ua) = \delta(\delta(q, u), a)$.

Изображение — ориентированный граф с помеченными вершинами и ребрами.

Примеры

1. $Q = \{1, 2, 3\}$, $\sum = \{a, b\}$.

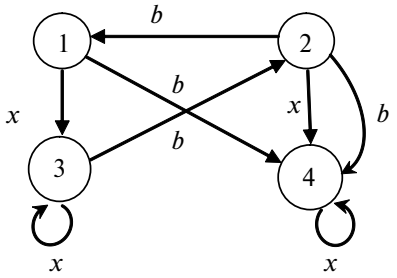
δ	1	2	3
A	2	3	1
b	2	2	3



$A = (Q, \sum, \delta)$

2. Привидение:
Q = {молчит (1), хохочет (2), ухает (3), топает (4)},
Σ = {хлопнуть дверью (*x*), включить музыку (*b*)}.

δ	1	2	3	4
x	3	4	3	4
b	4	1	2	2



Автомат $A=\left(Q,\sum,\delta\right)$ называется синхронизируемым, если

$\exists\omega\in\sum^{*}\ \exists q\in Q:\forall p\in Q:\ \delta\left(p,\omega\right)=q$ (т. е. ω синхронизирует автомат *A*).

Пусть у автомата известно начальное состояние $q_0\in Q$ и выделено множество $T\subseteq Q$ заключительных состояний.

Слово ω принимается автоматом $A=\left(Q,\sum,\delta\right)$, если $\delta\left(q_0,\omega\right)\in T$.

$L\left(A\right)$ — множество всех принимаемых автоматом слов ($L\left(A\right)=$ $=\left\{\omega\middle|\delta\left(q_0,\omega\right)\in T\right\}$) называется языком, распознаваемым автоматом $A=(Q,\sum,\delta,q_0,T)$.

Пятерку $(Q,\sum,\delta,q_0,T)$ иногда называют конечным распознавателем.

Пример

1.

	↓	↑	↑
δ	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2

$q_0=0,$

$T=\{1,2\},$

$A=(Q,\sum,\delta,q_0,T),$

$$L(A)=\left\{\begin{matrix}1,10,01,001,010,100,101,111,0001,0010,\\0100,0101,0111,1000,1010,1011,1101,1110,\ldots\end{matrix}\right\},$$

$$\bar{L}(A)=\{0,00,11,000,011,110,0000,0011,0110,1001,1100,1111\ldots\},$$

$$\omega\in\bar{L}(A)\Leftrightarrow\delta(q_0,\omega)\notin T\Leftrightarrow\delta(0,\omega)=0,$$

$$L_0=\{\omega|\delta(0,\omega)=0\},$$

$$L_1=\{\omega|\delta(0,\omega)=1\},$$

$$L_2=\{\omega|\delta(0,\omega)=2\}.$$

Гипотеза: $\omega\in L_i\Leftrightarrow\overline{\omega_2}\equiv i(mod\,3)$, где $\overline{\omega_2}$ — значение соответствующего ω двоичного числа.

Докажем методом индукции по длине слова:

База индукции. $\delta(0,0)=0$, $\delta(0,1)=1$.

Шаг индукции. Если $\omega=v0\Rightarrow\overline{\omega_2}=2\cdot\overline{v_2}$,

$\overline{v_2}\equiv 0(mod\,3)\Rightarrow\overline{\omega_2}=0(mod\,3)$.

$\overline{v_2}\equiv 1(mod\,3)\Rightarrow\overline{\omega_2}=2(mod\,3)$.

$\overline{v_2}\equiv 2(mod\,3)\Rightarrow\overline{\omega_2}=1(mod\,3)$.

При этом

$v\in L_0\Rightarrow\omega\in L_0$,

$v\in L_1\Rightarrow\omega\in L_2$,

$v\in L_2\Rightarrow\omega\in L_1$.

Случай $\omega=v1$ рассматривается аналогично.

2. Хочется распознавать правильно записанные десятичные числа (без знака). Правильно: 123, 0.10, 1.3, 123,0,0.0. Неверно: ..1,1.,00.1,1.1.1,01. Можно ли построить соответствующий автомат? Более общий вопрос: можно ли с помощью конечного распознавателя распознать любой язык?

Приведем пример языка, дающего отрицательный ответ на заданный вопрос:

$\sum=\{a,b\}$, $L=\{a^nb^n|n\in N_0\}$.

Докажем, что не существует автомата $A: L=L(A)$ методом «от противного»:

Пусть $A=\left(Q,\sum,\delta,q_0,T\right); L=L(A)$.

Рассмотрим элементы $\delta\left(q_0,a\right),\delta\left(q_0,a^2\right),\delta\left(q_0,a^3\right)\cdots$ из Q.

$|Q|<\infty \Rightarrow$ есть повторы, т. е. $\exists i<j:\delta\left(q_0,a^i\right)=\delta\left(q_0,a^j\right)$.

$\delta\left(q_0,a^ib^j\right)=\delta(\delta\left(q_0,a^i\right),b^i)\in T$.

Для слова a^ib^j имеем $\delta\left(q_0,a^ib^j\right)\in T$

и $\delta\left(q_0,a^ib^j\right)=\delta\left(\delta\left(q_0,a^i\right),b^i\right)=\ =\delta\left(\delta\left(q_0,a^j\right),b^i\right)=\delta(q_0,a^jb^i)\Rightarrow a^jb^i\in L$.

Поскольку $i<j$, это противоречит определению L.

Итак, не любой язык можно распознать с помощью конечного автомата.

Язык L называется распознаваемым, если $\exists A=\left(Q,\sum,\delta,q_0,T\right): L=L(A)$.

Моноид переходов конечного автомата

Автомат $A=\left(Q,\sum,\delta\right)$ полностью определён действиями букв.

Каждая буква $a\in\sum$ определяет функцию $\delta(-,a):Q\to Q$.

Функции $Q\to Q$ составляют симметрическую полугруппу $\tau(Q)$. Не только каждая буква из Σ определяет некоторую функцию $\delta(-,a)\in\tau(Q)$, но и каждое слово $\omega\in\sum^*$ дает функцию $\delta(-,\omega)\in\tau(Q)$, определенную следующим образом: $\omega=a_1,a_2\cdots a_n\Rightarrow\delta(-,\omega)=\delta\left(\left(\cdots\delta(\delta(-,a_1),a_2),\cdots\right),a_n\right)$.

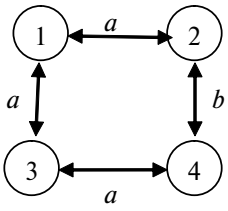
Мы получили полугруппу с единицей (т. е. моноид) $\left\{\delta(-,\omega)\middle|\omega\in\sum^*\right\}$, который обозначается через $M(A)$ и называется моноидом переходов автомата A.

Отображение $\omega\to\delta(-,\omega)$ является гомоморфизмом, и, следовательно, моноид переходов автомата является гомоморфным образом свободного моноида $\sum^*$. Как свободный моноид порождается буквами ($\sum^*=<\sum>$), так и моноид переходов порождается действиями букв:

$M\left(A\right)=<\delta(-,a)|a\in £>$.

Конечный автомат дает пример алгебры унарных операций.

Пример



Моноид переходов:

δ	1	2	3	4
λ	1	2	3	4
a	2	1	4	3
b	3	4	1	2
a^2	1	2	3	4
ab	4	3	2	1
ba	4	3	2	1
b^2	1	2	3	4
aba	3	4	1	2
ab^2	2	1	4	3

Таблица Кели (таблица умножения)

	λ	*a*	*b*	*ab*
λ	λ	*a*	*b*	*ab*
a	*a*	λ	*ab*	*b*
b	*b*	*ab*	λ	*a*
ab	*ab*	*b*	*a*	λ

Моноид в данном примере является группой, которая обычно обозначается как V_4 (четвертая группа Клейна).

Распознавание автоматом и моноидом

Пусть внутри моноида M выбрано подмножество $P \subset M$ и, кроме того, имеется гомоморфизм $\varphi : \sum^* \to M$. Будем говорить, что (M, P, φ) распознает *L,* если $\forall \omega \in \sum^* \omega \in L \Leftrightarrow \varphi(\omega) \in P$ (другими словами, если $L = \varphi^{-1}(P)$).

Утверждение 1. Если *L* распознается автоматом, то *L* распознается моноидом переходов автомата.

Доказательство

Определим гомоморфизм $\varphi: \sum^* \to M(A)$ и множество P следующим образом: $\varphi(\omega)=\delta(-,\omega)$, $P=\varphi(L)$.

"$\Rightarrow$" по определению

"$\Leftarrow$": $\omega \in \sum^* : \varphi(\omega) \in P : \exists v \in L\, \varphi(\omega)=\varphi(v) \Rightarrow \delta(-,\omega)=\delta(-,v)$,

$\delta(q_0,\omega)=\delta(q_0,v) \in T \Rightarrow \omega \in L$.

Утверждение 2. Если L распознается конечным моноидом M, то существует ДКА.

$A: L(A)=L$.

Доказательство

L распознается моноидом M $\Leftrightarrow \exists P \subseteq M, \varphi: \sum^* \to M : L=\varphi^{-1}(P)$.

Строим автомат, полагая Q=M, $\delta(q,a)=q\cdot\varphi(a)$, $q_0=1_M$, $T=P$.

Проверим требуемое условие. Пусть $\omega \in \sum^*$, $\omega=a_1\cdots a_n$.

$\omega \in L \Leftrightarrow \varphi(\omega) \in P \Leftrightarrow \varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n) \in P \Leftrightarrow (1_M \Leftrightarrow \varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n)) \in P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta\left(\delta\left(\ldots\left(\delta(q_0,a_1),a_2\right)\ldots\right)a_n\right) \in P \Leftrightarrow \delta(q_0,\omega) \in P=T \Leftrightarrow \omega \in L(A)$.

Свойства распознаваемых языков

1° L распознаваем $\Rightarrow \bar{L}$ распознаваем.

Если $L(A)=L$ для $A=(Q,\sum,\delta,q_0,T)$, то $\bar{L}=L(A')$ для $A'=(Q,\sum,\delta,q_0,Q\setminus T)$.

2° Если $L \subseteq \sum^*$ распознаваем и $\varphi: A^* \to \sum^*$ — гомоморфизм (шифр простой замены), то $\varphi^{-1}(L)$ распознаваем.

Доказательство

L распознаваем $\Rightarrow \exists M,\ |M|<\infty,\ \propto: \sum^* \to M,\ P \subseteq M : \propto^{-1}(P)=L$.

Тогда гомоморфизм $\varphi^\circ \propto$ распознает $\varphi^{-1}L$. Действительно, проверим, что $(\varphi^\circ \propto)^{-1} P = \propto^{-1} L$:

$\omega \in (\varphi^{\circ} \propto)^{-1} P \Leftrightarrow (\varphi^{\circ} \propto)(\omega) \in P \Leftrightarrow \propto (\varphi(\omega)) \in P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(\omega) \epsilon \propto^{-1} P \Leftrightarrow \varphi(\omega) \epsilon L \Leftrightarrow \omega \in \varphi^{-1} L$.

3° Пусть L — распознаваемый и $K \subseteq \sum^{*}$.

Тогда $K^{-1}L$, LK^{-1} распознаваемы.

Доказательство

L — распознается $\Leftrightarrow \exists M, P \subseteq M, \propto: \sum^{*} \to M$ — гомоморфизм, $L = \propto^{-1} P$.

Рассмотрим $R = \{m | m \in M, \exists k \in K : \propto (k) m \in P\}$.

$\omega \in K^{-1}L \Leftrightarrow \exists k \in K : k\omega \in L \Leftrightarrow \exists k \in K \propto (k\omega) \in P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists k \in K \propto (k) \propto (\omega) \in P \Leftrightarrow \propto (\omega) \in R$.

Значит, (M, $R \subseteq M, \propto: \sum^{*} \to M$) распознает $K^{-1}L$.

Правое частное — аналогично.

4° Пусть L_1, L_2 — распознаваемы. Тогда $L_1 \cap L_2$ распознаваем.

Доказательство

$L_1 \Rightarrow M_1$, $P_1 \subseteq M_1$, $\propto_1: \sum^{*} \to M_1$, $\propto_1^{-1} P_1 = L_1$.

$L_2 \Rightarrow M_2$, $P_2 \subseteq M_2$, $\propto_2: \sum^{*} \to M_2$, $\propto_2^{-1} P_2 = L_2$.

$M = M_1 \text{x} M_2 = \{(m_1, m_2) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$.

$(a,b)(c,d) = (ac, bd)$.

Построим $\propto: \sum^{*} \to M$ (гомоморфизм):

$\propto (\omega) = (\propto_1 (\omega), \propto_2 (\omega))$.

Покажем $\propto^{-1} P = L_1 \cap L_2$, где $P = P_1 \text{x} P_2$.

$$\omega \in \propto^{-1} P \Leftrightarrow \propto (\omega) \in P \Leftrightarrow (\propto_1 (\omega), \propto_2 (\omega)) \in P_1 \text{x} P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \propto_1 (\omega) \in P_1 \\ \propto_2 (\omega) \in P_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in L_1 \\ \omega \in L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \omega \in L_1 \cap L_2 .$$

Прямым произведением конечных автоматов (распознавателей) $A=\left(\left(Q,\sum,\delta\right),q_0,T\right)$, $B=\left(\left(R,\sum,\tau\right),r_0,S\right)$ называется автомат $A\text{x}B=\,=(Q\text{x}R$, $\sum,\propto$, $(q_0,r_0),T\text{x}S)$, где $\propto\left((q,r),a\right)=(\delta\left(q,a\right),\tau(r,a))$.

5° L_1, L_2 распознаваемы $\Rightarrow L_1\cap L_2$ распознаваем.

Доказательство

В силу $L_1\cap L_2=\overline{L_1}\cap\overline{L_2}$, доказываемое утверждение является следствием 1°, 4°.

Замкнутость множества распознаваемых языков относительно произведения и итерации

Утверждение 1. L_1 и L_2 распознаваемы $\Rightarrow L_1L_2$ распознаваем.

Доказательство

Пусть L_1 распознается автоматом $A_1=(Q_1,\sum,\delta_1,q_{01},T_1)$ и L_2 распознается автоматом $A_2=(Q_2,\sum,\delta_2,q_{02},T_2)$.

$\forall a\in\sum\forall\text{p}\in Q_2:\delta_2\left(q_{02},a\right)=p\ \ \forall\text{t}\in T_1$ создаем тройки $\left(t,a,p\right)$,

т. е. строим НКА

$B=(Q_1\cup Q_2,\sum,E,q_{02},F)$,

где $E=\left\{\left(x,a,y\right)\middle|\delta_1\left(x,a\right)=y\right\}\cup\left\{\left(x,a,y\right)\middle|\delta_2\left(x,a\right)=y\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\text{t},\text{a},\text{p}\right)\middle|\text{t}\in T_1\ \&\ \delta_2\left(q_{02},a\right)=p\right\}$,

$$F=\begin{cases}T_2,\lambda\notin L_2,\\T_1\cup T_2,\lambda\in L_2.\end{cases}$$

Проверим, что В распознает L_1L_2.

$\omega\in L_1L_2\Rightarrow\exists u\in L_1,\exists v\in L_2:\omega=uv\Rightarrow$ *в* A_1 есть путь, помеченный и от q_{01} до T_1, в A_2 есть путь, помеченный *v* от q_{02} до T_2. Если $v=\lambda$, то $T_1\subseteq F$, и, прочитав *u* в *B,* можно попасть в T_1. Если же $v\neq\lambda$, то $v=ax,a\in\sum;\delta\left(q_{02},a\right)=p$. Делаем переход из T_1 в *p* по добавленной стрелке, затем читаем в A_2 слово *x* из *p* и приходим в T_2. Таким образом, *v* принимается *B*.

$\omega \in L(B) \Rightarrow$ есть путь, помеченный ω из q_{01} в F. Если путь приводит в T_1, то он не выходит из $A_1 \Rightarrow \omega \in L_1 u T_1 \subseteq F \Rightarrow \lambda \in L_2 \Rightarrow \omega = \omega\lambda \int L_1 L_2$.

Если путь приводит в T_2, то произошел ровно один переход из A_1 в A_2 по некоторому $a \in \sum$, при этом $\omega = u(av)$,

$\delta_1(q_{01}, u) \in T_1 \Rightarrow u \in L_1$,

$\delta_2(q_{02}, av) \in T_2 \Rightarrow av \in L_2$.

Следовательно, $\omega \in L_1 L_2$.

Утверждение 2. L — распознаваемый $\Rightarrow L^*$ — распознаваемый.

Доказательство

Строим $B = (Q \cup \{i\}, \sum, E, \{i\}, \{i\})$,

где $E = \bigcup_{a \in \Sigma} (\{(p,a,q) | \delta(p,a) = q\} \cup \{(i,a,p) | \delta(q_0,a) = p\} \cup \{(q,a,i) | \delta(q,a) \epsilon T\} \cup \{(i,a,i) | \delta(q_0,a) \in T\})$.

$\omega \epsilon L^* \Rightarrow \exists \omega_1, \cdots, \omega_k \epsilon L : \omega = \omega_1 \cdots \omega_k$ либо $\omega = \lambda$.

В последнем случае очевидно, что $\omega \in L(B)$.

Покажем, что для каждого j в B есть путь из i в i, помеченный ω_j.

$|\omega_j| = 1 \Rightarrow \omega_j \in \sum \Rightarrow \delta(q_0, \omega_1) \in T \Rightarrow$ есть петля из i в i, помеченная ω_i.

$|\omega_j| \geq 2 \Rightarrow \omega_j = avb$. Возьмем в А путь, помеченный avb, и заменим в нем шаги: первый — на шаг из i, последний — на шаг в i.

Соединяя найденные пути в один длинный путь из i в i, помеченный ω, получаем искомый путь, т. е. $\omega \in L(B)$.

Обратно, пусть $\omega \in L(B)$, т. е. в В есть путь из i в i, помеченный ω. Разобьем этот путь на такие куски с концами в i, у которых в середине i нет. Рассмотрим некоторый кусок, пусть он помечен словом v.

$|v| = 1 \Rightarrow \delta(q_0, v) \in T$,

$|v| \geq 2 \Rightarrow v = aub \Rightarrow \delta(q_0, aub) \in T$.

В каждом случае $v \in L \Rightarrow \omega \in L^*$.

Рациональность и распознаваемость языков

Теорема Клини

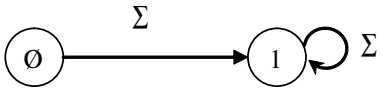
L рационален $\Leftrightarrow$ L распознаваем.

Доказательство

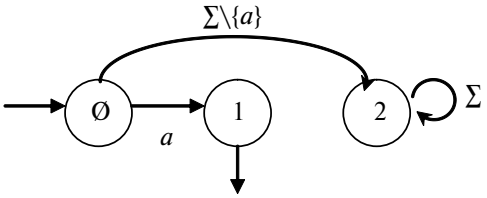
$(\Rightarrow)$

L рационален $\Rightarrow$ L записывается рациональным выражением.

$\{\lambda\}$ распознается следующим автоматом:



$a \in \sum \Rightarrow \{a\}$ распознается автоматом:



L_1, L_2 распознаваемы $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ распознаваем.

L_1 и L_2 распознаваемы $\Rightarrow L_1 L_2$ распознаваем.

L распознаваем $\Rightarrow L^*$ распознаваем.

Далее — индукция по числу операций в рациональном выражении.

$(\Leftarrow)$ $L = L(A), A = (Q, \sum, E, \delta, q_1, T), |Q| = n, Q = \{q_1 \cdots q_n\}$.

Обозначим

$$L(i,j,k) = \left\{\omega \in \sum^* \middle| \delta(i,\omega) = j, \forall u : (\omega = uv, |u| > 0, |v| > 0) \Rightarrow (\delta(i,u) \in \{q_1 \cdots q_{k-1}\})\right\}.$$

Имеем $L(A) = \bigcup\limits_{j:q_j \in T} L(1, j, n+1)$. Для доказательства рациональности этого языка достаточно показать рациональность каждого из объединяемых языков. Индукцей по k покажем, что $\forall\, i, j$ L (i, j, k) рационален.

База индукции:

$L(i,i,1) = \{\lambda\} \cup \{a \in \sum | \delta(i,a) = i\}$ — рациональный язык.

$L(i,j,1) = \{a \in \sum | \delta(i,a) = j\}$ — рациональный язык.

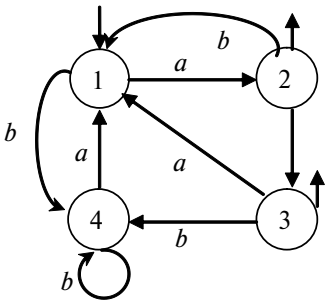
Шаг индукции:

$L(i,j,k+1) = L(i,j,k) \cup L(i,k,k)\big(L(k,k,k)\big)^* L(k,j,k).$

Следствие

1. $L = \{a^n b^n \mid n \in N_0\}$ не является рациональным.
2. L_1, L_2 — рациональные языки $\Rightarrow \overline{L_1}, \overline{L_2}$, $L_1 \cap L_2$ — рациональные языки.

Пример



$$L_i = \left\{\omega \in \sum^* \mid \delta(q_1, \omega) = q_i\right\}$$

$$\begin{cases} L_1 = \lambda + L_4 a + L_3 a + L_2 b \\ L_2 = L_1 a \\ L_3 = L_2 a \\ L_4 = L_3 b + L_1 a + L_4 b \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \lambda + L_4 a + L_1 a^3 + L_1 ab \\ L_4 = L_1 a^2 b + L_1 b + L_4 b \end{cases}$$

Лемма

Пусть $\lambda \neq V$, тогда $L = U + LV \Leftrightarrow L = UV^*$.

Доказательство

$(\Leftarrow)\ U + LV = U + \left(UV^*\right)V = U \cdot \{\lambda\} + U \cdot V + U \cdot V^2 + \cdots = UV^* = L$

$(\Rightarrow)\omega \in L.$

Либо $\omega \in U$, либо $\omega \in LV$.

1. $\omega \in U \Rightarrow \omega \in UV^*$.
2. $\omega \in LV$

Докажем методом «от противного». Предположим, что $\omega \notin UV^*$. Можно считать, что ω — кратчайшее из $L \setminus UV^*$.

Тогда $\omega = \omega_1 v, \omega_1 \in L, v \in V, v \neq \lambda$.

Поскольку $|\omega_1| < |\omega|$, то ω_1 короче самого короткого слова из $L\setminus UV^* \Rightarrow$ $\Rightarrow \omega_1 \in UV^*$. Тогда $\omega \in UV^*$.

Значит, $L \subseteq UV^*$ доказано.

Докажем обратное включение методом «от противного».

Пусть ω — кратчайшее слово из $UV^* \setminus L$.

$\omega = uv_1 \cdots v_k, u \in U, v_j \in V\,(k \geq 0)$.

Если $k = 0$, то $\omega = u \in U \Rightarrow \omega \in L$

Если $k > 0$, то $\omega = \omega_1 v_k$, $v_k \neq \lambda \Rightarrow |\omega_1| < |\omega| \Rightarrow \omega_1 \in L \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \omega_1 v_k \in LV \subseteq L$

Теперь по доказанной лемме из $L_4 = L_1 a^2 b + L_1 b + L_4 b$ следует, что $L_4 =$ $= (L_1 a^2 b + L_1 b) b^* = L_1 (a^2 + \lambda) b b^*$; из $L_1 = \lambda + L_4 a + L_1 a^3 + L_1 ab = \lambda + L_1 (a^2 + \lambda) b b^* a +$ $+ L_1 a^3 + L_1 ab = \lambda + L_1 (\left(a^2 + \lambda\right) b b^* a + a^3 + ab)$ следует, что $L_4 = ((a^2 + \lambda) bb^* a +$ $+ a^3 + ab)^*$. Автомат распознает язык $L_2 + L_3 = L_1 a(\lambda + a) = ((a^2 + \lambda) bb^* a +$ $+ a^3 + ab)^* a\left(\lambda + a\right)$.

Содержание

Учебное издание

Ананичев Дмитрий Сергеевич
Андреева Ирина Юрьевна
Гредасова Надежда Викторовна
Костоусов Кирилл Викторович

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор О. С. Смирнова
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 04.12.2014. Формат $70\times100\ ^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 5,7. Усл. печ. л. 8,7. Тираж 100 экз.
Заказ 1.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru