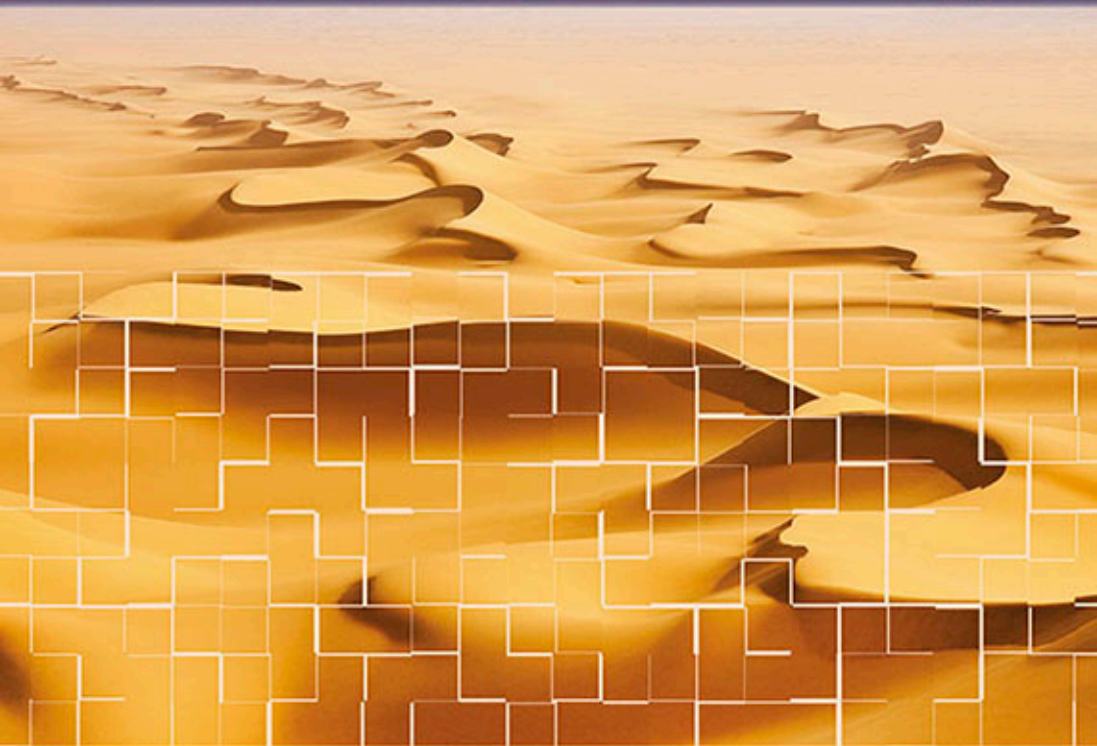


Р. Темам, А. Миранвиль

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД



ИЗДАТЕЛЬСТВО

**БИНОМ**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

# **MATHEMATICAL MODELING IN CONTINUUM MECHANICS**

SECOND EDITION

**Roger Temam**

*Université Paris-Sud, Orsay and Indiana University*

**Alain Miranville**

*Université de Poitiers*



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**



Р. Темам, А. Миранвиль

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

2-е издание (ЭЛЕКТРОННОЕ)

Перевод  
2-го английского издания

И. О. Арушаняна

под редакцией  
Г. М. Кобелькова



Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2014

УДК 519.8(075.8)+531(075.8)  
ББК 22.25я73  
Т32

*Серия основана в 2009 г.*

**Темам Р.**

Т32 Математическое моделирование в механике сплошных сред [Электронный ресурс] / Р. Темам, А. Миранвиль ; пер. с англ. — 2-е изд. (эл.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 320 с. : ил. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-9963-2312-8

Курс лекций по механике сплошных сред, прочитанный авторами для математиков-аспирантов первого года обучения. Помимо подробного описания фундаментальных разделов механики сплошных сред, книга содержит результаты, полученные в некоторых смежных дисциплинах, таких как магнитная гидродинамика, горение, геофизическая динамика жидкостей и газов, а также теория линейных и нелинейных волн.

Для инженеров, ученых и студентов, специализирующихся в указанных предметных областях.

УДК 519.8(075.8)+531(075.8)  
ББК 22.25я73

**По вопросам приобретения обращаться:**  
**«БИНОМ. Лаборатория знаний»**  
**Телефон: (499) 157-5272**  
**e-mail: [binom@Lbz.ru](mailto:binom@Lbz.ru), <http://www.Lbz.ru>**

ISBN 978-5-9963-2312-8

© Cambridge University Press 2000, 2005  
First published 2000  
Second edition published 2005  
© БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вниманию читателя предлагается книга Алена Миранвиля и Роджера Темама «Математическое моделирование в механике сплошных сред». Работы одного из авторов книги, крупного французского математика Роджера Темама, хорошо известны отечественным специалистам по уравнениям в частных производных, механике, теории экстремальных задач по ряду переведенных на русский язык книг (Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981; Темам Р. Математические задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1991; Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979).

Настоящая книга по подбору материала и стилю изложения отличается от перечисленных монографий. Наряду с широтой охватываемого материала следует отметить подробность и последовательность изложения каждой темы. Авторы стремятся аккуратно отследить весь путь от начальных определений до конечного результата. При этом от читателя не требуется знаний, выходящих за рамки классического курса математического анализа.

Книга охватывает ряд важных разделов механики сплошной среды, таких как фундаментальные законы динамики, физика жидкостей и газов, механика твердого тела, волновые явления. При этом она ни в коей мере не является учебником по механике. Скорее она отражает взгляды авторов на математические подходы к решению ключевых задач из разных разделов механики сплошной среды.

Отдельно следует отметить главы, относящиеся к построению моделей, описывающих динамику океана, а также математические модели биологических процессов.

Каждая глава снабжена набором задач с указаниями по их решению, что делает гораздо более эффективным самостоятельное изучение материала для читателей с различным уровнем подготовки. Кроме того, подобный подход позволяет использовать отдельные ее разделы в качестве самостоятельных спецкурсов как для студентов, так и для аспирантов.

Как отмечают сами авторы, книга неоднородна по содержанию и математическому языку. Это объясняется широтой охватываемого материала и сложившимися стандартами в определенных предметных областях.

Книга окажется полезной для студентов старших курсов и аспирантов, а также специалистов, интересующихся вопросами применения математики в прикладных науках.

*Г. М. Кобельков*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой расширенную версию курса лекций по механике сплошных сред, прочитанных авторами математикам-аспирантам первого года обучения. Помимо подробного описания фундаментальных разделов механики сплошных сред, книга содержит результаты, полученные в некоторых смежных дисциплинах, таких как магнитная гидродинамика, горение, геофизическая динамика жидкостей и газов, а также теория линейных и нелинейных волн. Книга рассчитана на широкий круг читателей: математиков (ученых и студентов), специализирующихся в указанных предметных областях, инженеров и исследователей.

Материал, рассматриваемый в книге, находится на стыке математики и некоторых важных прикладных разделов науки. Подчеркнем, что это не книга математической направленности: ее математический язык прост, а от читателей требуется знание только основных понятий математического анализа и линейной алгебры. В то же время эта книга не учебник по механике сплошных сред: хотя она и содержит подробное, но сжатое описание ряда разделов механики, в ней не затрагиваются многие результаты, которые носят фундаментальный характер и которые, однако, не так необходимы в приложениях (например, инвариантность по отношению к системам отсчета, присутствующая некоторым механическим величинам, или же согласованность некоторых определений). Читателя, заинтересованного в этих результатах, мы отсылаем к замечательным книгам по механике, указанным в библиографии к первой части нашей книги. И наконец, в силу ограниченности объема, книга не носит энциклопедического характера, а отдельные ее разделы могут служить темами солидных книг. В целом мы полагаем, что наша книга, являющаяся итогом наших многолетних исследований и основанная на нашем опыте преподавательской работы, окажется весьма полезной для ученых, желающих уменьшить разрыв между математикой и прикладными науками, обычно обусловленный терминологическими барьерами и различиями в методиках проведения научных исследований.

Ядро книги составляют фундаментальные разделы механики сплошных сред: описание движения тел, фундаментальный закон динамики, тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа, определяющие соотношения, внутренняя энергия и первый принцип термодинамики, ударные волны и соотношения Рэнкина–Гюгонно, введение в механику невязких и вязких ньютоновских



жидкостей, вводное рассмотрение линейной упругости и вариационных принципов, а также введение в нелинейную упругость.

Кроме указанных разделов книга содержит достаточно подробные вводные сведения о нескольких важных родственных разделах, которые могут служить темами отдельных книг: магнитная гидродинамика, горение, геофизическая динамика жидкостей и газов, теория колебаний, линейная акустика, а также теория нелинейных волн и солитонов, основанная на уравнениях Кортевег де Фриза и Шрёдингера. Книга может служить основой для годичного курса лекций, ориентированных на старшекурсников или же аспирантов первого года обучения. Некоторые ее части могут быть использованы для односеместрового курса лекций по основам механики сплошных сред или в составе специальных курсов.

Второе издание книги расширено указаниями к выполнению упражнений, что полезно для проведения классных занятий, и новой главой по нелинейной упругости, а также несколькими добавлениями и исправлениями, предложенными читателями первого издания. В частности, книга значительно улучшилась в результате учета замечаний рецензентов, в первую очередь замечаний Дж. Данвуда и Дж. Дж. Телега. Авторы выражают также признательность Ф. Сьярле за полезные комментарии. Новая глава по нелинейной упругости основана на его ставшей классической книге. И наконец, мы сердечно благодарны Жаку Ламинье, Эрику Симонне, Дьоке Виросоетизно и Терезе Бунге за существенную помощь в подготовке книги к изданию.

*Роджер Темам  
Ален Миранвиль  
Июнь 2004 г.*

## О СИСТЕМЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Система обозначений, принятая в настоящей книге, неоднородна. Отчасти это сделано намеренно, а отчасти — поскольку у нас не было другого выхода. Действительно, разработчик математической модели обычно должен соблюдать или по крайней мере приспособливаться к обозначениям, общепринятым в конкретной предметной области, и тем самым должен быть приучен к определенной гибкости. Другая причина состоит в том, что в книге рассматриваются различные предметные области, а потому невозможно выбрать систему обозначений, соответствующую «всем стандартам».

Кроме того, при выборе обозначений мы преследовали цель упростить процесс их написания от руки, избегая по возможности стрелок над символами, полужирных шрифтов, подчеркиваний или надчеркиваний. В каждой главе книги всегда ясно, что обозначает любой используемый символ в данном контексте.

Хотя принятая в книге система обозначений и не выдержана в строгих рамках, тем не менее она содержит многократно повторяющиеся символы.

Ниже мы приводим обозначения, использованные в нескольких главах книги.

$\Omega$  или  $\mathcal{O}$  (возможно, с индексами): область в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ ,

$x = (x_1, x_2)$  или  $(x_1, x_2, x_3)$ : точка в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ ; обозначается также через  $(x, y)$  или  $(x, y, z)$ ,

$a = (a_1, a_2)$  или  $(a_1, a_2, a_3)$ : начальное положение в лагранжевых переменных,

$t$ : время,

$u = (u_1, u_2)$  или  $(u_1, u_2, u_3)$ , или  $v$  или  $w$ : векторы в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ ; обозначаются также через  $(u, v)$  или  $(u, v, w)$ ,

$AB$  (или  $\overrightarrow{AB}$  для выделения): вектор из  $A$  в  $B$ ,

$u$  или  $U$ : скорость,

$u$ : вектор перемещений,

$\gamma$ : ускорение,

$m$ : масса,

$f, F$ : силы; обычно  $f$  — объемные силы и  $F$  — поверхностные силы,

$\rho$ : плотность,

$g$ : гравитационная постоянная; используется также в уравнении состояния для жидкостей,

$T$  или  $\theta$ : температура,

$\sigma$ : тензор напряжений Коши (обычно),

$n$ : единичный вектор внешней нормали к границе открытого множества  $\Omega$  или  $\mathcal{O}$ ,  $n = (n_1, n_2)$  или  $n = (n_1, n_2, n_3)$ .

Кроме того, мы используем следующие классические символы и обозначения:

$\delta_{ij}$ : символ Кронекера, равный 1, если  $i = j$ , и 0, если  $i \neq j$ ,

$\varphi_{,i}$ : частная производная  $\partial\varphi/\partial x_i$ .

Используется правило суммирования по повторяющимся индексам: когда какой-либо индекс (например,  $j$ ) повторяется в математическом символе или в произведении таких символов, мы добавляем эти выражения для  $j = 1, 2, 3$ . Следовательно,

$$\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \sigma_{ij} \cdot n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j.$$

ЧАСТЬ I

---

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

---

# ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ: ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА

## 1.1. ДЕФОРМАЦИИ

Цель механики состоит в изучении и описании движения материальных систем. Язык механики весьма близок языку теории множеств в математике, поскольку нас интересуют материальные тела или системы, которые состоят из материальных точек или частиц вещества. Материальная система заполняет некоторую часть (или подмножество) окружающего пространства ( $\mathbb{R}^3$ ), а положение материальной точки задается точкой в  $\mathbb{R}^3$ ; некоторая часть материальной системы называется подсистемой.

Далее мы в основном будем рассматривать материальные тела, которые занимают некоторую область пространства, понимаемую как связанное открытое множество. Здесь мы не будем останавливаться на механически важном случае тонких тел, которые моделируются поверхностями (например, пластинами или оболочками) или линиями (например, балки или тросы). Моделирование движения таких систем неизбежно влечет за собой формулирование гипотез, которые весьма похожи на обсуждаемые в настоящей книге.

Материальная система занимает область  $\Omega_0$  в  $\mathbb{R}^3$  в некоторый заданный момент времени  $t_0$ . После деформации эта система занимает уже другую область  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^3$  (представим себе жидкость или теннисный мяч). Материальная точка, начальное положение которой определялось точкой  $a \in \Omega_0$ , после трансформации будет находиться в точке  $x \in \Omega$ .

Таким образом, деформация может быть охарактеризована следующим отображением (см. рис. 1.1):

$$\Phi: a \in \Omega_0 \mapsto x \in \Omega.$$

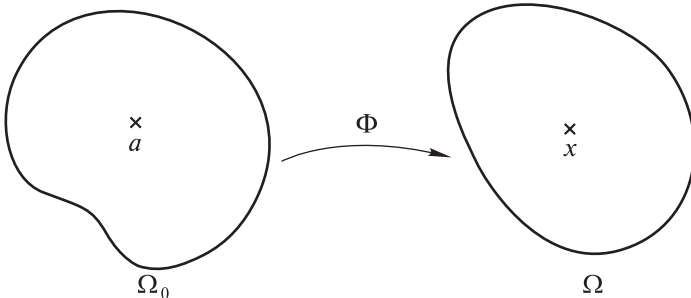


Рис. 1.1. Отображение  $\Phi$

Предполагая, что количество вещества сохраняется в процессе деформации, мы приходим к следующей естественной гипотезе:

*Функция  $\Phi$  является взаимно однозначным отображением из  $\Omega_0$  в  $\Omega$ .*

Далее будем предполагать, что  $\Phi$  и обратная к ней функция принадлежат по крайней мере классу  $C^1$ . В действительности же мы будем предполагать, что  $\Phi$  обладает любой требуемой гладкостью.

### Предположение о регулярности

Предположение о регулярности функции  $\Phi$  носит общий характер: мы предполагаем, что все вводимые нами функции обладают регулярностью, необходимой для выполнения таких операций, как интегрирование по частям, дифференцирование интегралов, зависящих от параметра, и др. Это всегда имеющееся в виду предположение будет ослаблено только в главе 6 при изучении ударных волн, которые соответствуют появлению поверхностей разрывов. В этом случае мы предполагаем, что отображение  $\Phi$  принадлежит к кусочному классу  $C^1$ . Последнее предположение может быть также ослаблено при изучении других явлений, которые мы здесь не рассматриваем, таких как сингулярные вихри в случае жидкостей и газов, дислокации в случае твердых тел или столкновения твердых тел.

Пусть  $\text{grad } \Phi(a) = \nabla \Phi(a)$  — матрица с элементами  $(\partial \Phi_i / \partial a_j)(a)$ . Ее называют матрицей Якоби отображения  $a \mapsto x$  и иногда обозначают через  $Dx/Da$ . Поскольку функция  $\Phi^{-1}$  дифференцируема, якобиан  $(\nabla \Phi)$  преобразования  $a \mapsto x$  обязательно отличен от нуля. Далее будем предполагать, что якобиан строго положителен; отрицательный знак соответствует нефизическому случаю изменения ориентации, когда, образно говоря, левая перчатка становится правой. Позже мы рассмотрим ту роль, которую играет линейное касательное отображение в точке  $a$  по отношению к формуле Тейлора

$$\Phi(a) = \Phi(a_0) + \nabla \Phi(a_0) \cdot (a - a_0) + o(|a - a_0|).$$

Мы также введем тензор дилатации для изучения деформации «малых» тетраэдров.

### Перемещение

**Определение 1.1.** *Отображение  $u : a \mapsto x - a = \Phi(a) - a$  называют перемещением;  $u(a)$  — это перемещение частицы  $a$ .*

### Элементарные деформации

Остановимся на описании некоторых типичных элементарных деформаций.

#### а) Жесткие деформации

Перемещение называют жестким (в этом случае мы уже не говорим о деформациях), когда расстояние между любыми двумя точками сохраняется:

$$d(a, a') = d(x, x'), \quad \forall a, a' \in \Omega_0.$$

Здесь  $x = \Phi(a)$ ,  $x' = \Phi(a')$ . Сказанное эквивалентно следующему предположению:

$\Phi$  — это изометрия из  $\Omega_0$  на  $\Omega$ ,

иными словами, область  $\Omega_0$  не включена в аффинное подпространство, размерность которого меньше или равна 2:

$\Phi$  — это аффинное преобразование  
(параллельный перенос + вращение).

В этом случае имеем

$$x = L \cdot a + c, \quad c \in \mathbb{R}^3, \quad L \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R}^3), \quad L^{-1} = L^T,$$

и

$$u(a) = (L - I)a + c,$$

где  $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^3)$  — пространство ортогональных матриц в  $\mathbb{R}^3$ .

б) *Линейное сжатие или удлинение*

Типичным примером удлинения является линейное растяжение эластичного стержня или линейной пружины.

Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — канонический базис в  $\mathbb{R}^3$ . Равномерное удлинение в направлении  $e = e_1$  определяется соотношениями

$$x_1 = \lambda a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3$$

при  $\lambda > 1$ . Если  $0 < \lambda < 1$ , то этот случай соответствует всестороннему сжатию линейной пружины или эластичного стержня. Тогда перемещение имеет вид  $u(a) = [(\lambda - 1)a_1, 0, 0]$  и

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I.$$

в) *Деформация сдвига*

Рассмотрим простой сдвиг в двух ортогональных направлениях. Например, такие деформации имеют место при разрыве листа бумаги.

Сдвиг в направлении  $e_1$ , параллельном  $e_2$ , имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \rho a_2, \\ x_2 = a_2 + \rho a_1, \\ x_3 = a_3, \end{cases}$$

где  $\rho > 0$ ; следовательно, перемещение принимает вид

$$u(a) = \begin{pmatrix} \rho a_2 \\ \rho a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I.$$

*Примечание 1.1.* Ниже мы увидим, что в некотором смысле общая деформация может быть представлена в виде надлежащей последовательности рассмотренных элементарных деформаций.

## 1.2. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ

Цель кинематики состоит в изучении движения системы относительно некоторого наблюдателя, называемого системой отсчета.

Здесь мы должны ввести два новых понятия.

- Непрерывный параметр  $t$ , соответствующий времени, что подразумевает выбор хронологии или, другими словами, способ измерения времени<sup>1)</sup>.
- Система линейных координат, или система отсчета, «связанная» с наблюдателем. В аффинном пространстве эта система определяется ее началом координат и тремя ортонормальными базисными векторами  $e_1, e_2$  и  $e_3$ .

**Определение 1.2.** Система отсчета определяется выбором хронологии и системой координат<sup>2)</sup>.

Хронология фиксируется раз и навсегда, однако в дальнейшем мы будем рассматривать несколько систем отсчета в зависимости от наших целей.

Движение рассматриваемой системы наблюдается в течение временного интервала  $I \subset \mathbb{R}$ . В некоторый момент времени  $t \in I$  система занимает область  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ . Движение определяется геометрически семейством деформационных отображений в зависимости от времени  $t \in I$  (см. рис. 1.2). Пусть  $\Phi(t, t_0)$  — диффеоморфизм

$$a \in \Omega_{t_0} \mapsto x = \Phi(a, t, t_0) \in \Omega_t,$$

который отображает положение  $a$  в момент времени  $t_0$  в положение  $x$  в момент времени  $t$ . Сформулируем следующие естественные гипотезы:

- $\Phi(t_0, t_0) = I$ ,
- $\Phi(t', t) \circ \Phi(t, t_0) = \Phi(t', t_0)$ ,
- отображения  $(t, a) \mapsto \Phi(a, t, t_0)$  принадлежат по крайней мере классу  $C^1$  (за исключением случая ударных волн).

<sup>1)</sup>С чисто математической точки зрения, например, не выглядит абсурдным заменить  $t$  на  $t^3$ , однако это заменило бы понятие временного интервала, а момент времени  $t = 0$  играл бы особую роль, что вовсе не так.

<sup>2)</sup>Мы больше не будем останавливаться на этих важных понятиях, которые могут привести, в зависимости от интересующей точки зрения, к неклассической механике (например, к механике теории относительности или к квантовой механике).



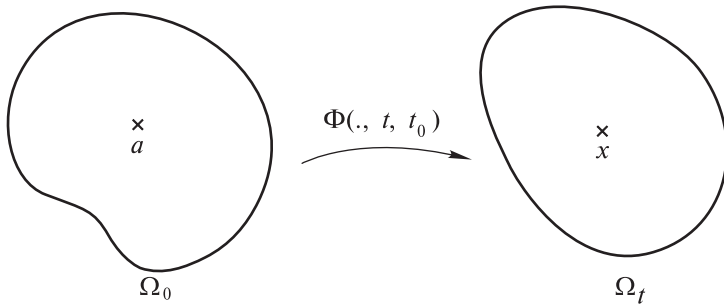


Рис. 1.2. Движение системы

**Определение 1.3.** Материальная система представляет собой твердое тело тогда и только тогда, когда отображения  $\Phi(t, t')$  являются изометриями при всех  $t$  и  $t'$ .

### Явное представление движения

Пусть  $t_0$  — момент времени начала отсчета и точка  $O$  — начало координат системы отсчета в аффинном пространстве. Положение материальной точки  $M$  в каждый момент времени  $t$  определяется вектором  $\vec{OM}$ . Тем самым можно расписать

$$\vec{OM} = x = \Phi(a, t, t_0),$$

или, опустив  $t_0$ ,

$$\vec{OM} = x = \Phi(a, t).$$

### Траектория частицы

Рассмотрим частицу, определенную своим положением  $a$  в момент времени  $t_0$ . Траекторией частицы является кривая  $\{\Phi(a, t, t_0)\}_{t \in I}$ . Пусть  $T$  — временной интервал, в течение которого наблюдается движение.

### Скорость частицы

Скорость материальной точки  $M$ , занимающей положение  $x$  в момент времени  $t$ , представляет собой вектор

$$U = U(x, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t, t_0).$$

*Примечание 1.2.* Конечно, производные мы рассматриваем относительно заданной системы отсчета и, тем самым, скорость рассматривается относительно той же системы отсчета.

**Свойство 1.1.** Вектор  $U$  не зависит от момента времени начала отсчета  $t_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $M$  — частица, занимающая положение  $x$  в момент  $t$ , положение  $a$  в момент  $t_0$  и положение  $a'$  в момент  $t'_0$  ( $t > t_0 > t'_0$ ). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = x = \Phi(a, t, t_0) = \Phi(a', t, t'_0)$$

и

$$a = \Phi(a', t_0, t'_0).$$

Таким образом,

$$x = \Phi[\Phi(a', t_0, t'_0), t, t_0] = \Phi(a', t, t'_0),$$

где  $a'$ ,  $t_0$  и  $t'_0$  фиксированы. Положим

$$\begin{aligned} h(t) &= \Phi[\Phi(a', t_0, t'_0), t, t_0], \\ \ell(t) &= \Phi(a', t, t'_0). \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $(dh/dt) = (d\ell/dt)$ , что и приводит к нужному результату.

### Ускорение частицы

Ускорение материальной частицы  $M$ , занимающей положение  $x$  в момент  $t$ , является вектором

$$\gamma = \gamma(x, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a, t, t_0).$$

**Свойство 1.2.** Вектор  $\gamma$  не зависит от момента начала отсчета времени  $t_0$ . Доказательство этого свойства проводится по той же схеме, что и доказательство свойства 1.1.

*Примечание 1.3.* Конечно, векторы  $U$  и  $\gamma$  зависят от системы отсчета и от выбранной хронологии.

В разд. 1.3 мы увидим, почему предпочтительнее применять запись  $U(x, t)$  и  $\gamma(x, t)$  вместо  $U(a, t)$  и  $\gamma(a, t)$ .

### Линии тока

Линии тока определяются в момент времени  $t$ . Они представляют собой линии, у которых касательная в каждой точке параллельна вектору скорости в этой точке.

Пусть  $U(x, t)$  — вектор скорости в момент  $t$  при  $x \in \Omega_t$ . Тогда вычисление линий тока эквивалентно решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{U_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{U_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{U_3(x_1, x_2, x_3, t)}.$$

На практике эта система редко может быть решена явно при помощи аналитических методов. Однако ее численное решение на компьютере может быть легко найдено. В случае компьютерного моделирования течений эти уравнения многократно решаются численно для вычисления линий тока с целью визуализации течения (например, для мультипликационной съемки).

*Примечание 1.4.* Следует отличать линии тока от траекторий. Однако в случае стационарного движения, определяемого ниже, линии тока и траектории совпадают.

### 1.3. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ: ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

#### Лагранжево описание движения системы (описание при помощи траекторий)

До сих пор мы использовали лагранжево описание движения. Оно состоит в задании траектории каждой частицы, начиная с начального положения (например, с момента времени  $t = 0$ ):

$$x = \Phi(a, t) = \Phi(a, t, 0), \quad a \in \Omega_0.$$

Поле скоростей и поле ускорений являются векторными полями  $(\partial\Phi/\partial t)(a, t)$  и  $(\partial^2\Phi/\partial t^2)(a, t)$  соответственно.

Это описание слишком общо для многих практических целей и поэтому, как правило, не используется, хотя и оказывается очень полезным для математического анализа и в некоторых специальных случаях. В целом мы предпочитаем использовать эйлерово описание движения.

#### Эйлерово описание движения системы (описание при помощи поля скоростей)

При этом описании задано поле скоростей  $U = U(x, t)$  в каждый момент времени  $t$ , где  $U(x, t)$  — скорость материальной частицы, занимающей положение  $x$  в момент  $t$ .

Теоретически по этому полю скоростей мы можем восстановить траектории и перейти к лагранжевому описанию посредством решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U(x, t), \\ x(0) = a, \end{cases}$$

решением которых является  $x = x_a(t) = \Phi(a, t)$ . Аналогичным образом мы можем вычислить линии тока посредством решения относительно  $x$  следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{U_1} = \frac{dx_2}{U_2} = \frac{dx_3}{U_3},$$

рассматривая  $t$  как фиксированный параметр.

**Определение 1.4.** Движение является установившимся, или стационарным, тогда и только тогда, когда  $\Omega_t = \Omega_0$  для всех  $t$ , а эйлерово поле скоростей не зависит от  $t$ , т. е.  $U(x, t) \equiv U(x)$  для всех  $t$ .

Подчеркнем тот факт, что тело, совершающее стационарное движение, не находится в состоянии покоя.

Как было сказано выше, траектории и линии тока стационарного течения совпадают.

**Производные Эйлера и Лагранжа**

Рассмотрим частицу  $M$ , занимающую положение  $a$  в момент  $t = 0$  и положение  $x$  в момент  $t$ . Функция  $f = f(M, t)$ , связанная с частицей  $M$  (например, ее скорость, ускорение или другие физические величины, определяемые ниже), может быть представлена в процессе движения двумя различными способами:

$$f(M, t) = g(a, t) \quad \text{или} \quad f(M, t) = h(x, t),$$

где  $x = \Phi(a, t)$ ; другими словами, можно записать

$$h(\Phi(a, t), t) = g(a, t).$$

**Определение 1.5.**

1. Эйлеровыми производными функции  $f$  называются величины

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x, t), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t).$$

2. Лагранжевыми производными функции  $f$  называются величины

$$\frac{\partial g}{\partial a_i}(a, t), \quad \frac{\partial g}{\partial t}(a, t).$$

В инженерной механике производная  $(\partial g / \partial t)(a, t)$  обозначается через  $dh/dt$  или  $Dh/Dt$  (или  $df/dt$ , или  $Df/Dt$ ) и иногда называется полной производной функции  $f$ .

Из соотношения

$$h(\Phi(a, t), t) = g(a, t)$$

закключаем, что

$$\frac{\partial g}{\partial a_j}(a, t) = \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} = \frac{\partial h}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial a_j}(a, t),$$

где мы использовали правило суммирования по повторяющимся индексам.

**Свойство 1.3.** Имеет место соотношение:

$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + (U \cdot \nabla)h.$
--

*Доказательство.* Легко видеть, что

$$\frac{\partial g}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial h}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \left( U_k \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial t} \right)(x, t).$$

### Применение к вычислению ускорения в эйлеровом представлении

Здесь мы рассмотрим случай, когда за функцию  $f$  принимается скорость. Тогда

$$h(x, t) = U(x, t) = U[\Phi(a, t), t] = g(a, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(a, t) = \frac{Dh}{Dt}(a, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [U(\Phi(a, t), t)], \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 U_i(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i}(x, t)$$

или

$$\gamma = \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U.$$

Эта формула носит фундаментальный характер в механике жидкостей и газов, в которой эйлерово выражение для ускорения широко используется.

*Примечание 1.5.* Хотя это далеко не бесспорно, мы, как правило, используем эйлерово представление для жидкостей и газов, а лагранжево представление — для твердых тел.

## 1.4. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА: СПИРАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

**Предложение 1.1.** Для того чтобы поле  $U(x, t)$ ,  $x \in \Omega_t$ , было полем скоростей твердого тела в момент времени  $t$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$(x - x') \cdot [U(x, t) - U(x', t)] = 0 \quad (1.1)$$

для любых  $x$  и  $x' \in \Omega_t$  на всем рассматриваемом интервале времени  $I$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две материальные точки системы, занимающие положения  $a$  и  $a'$  в момент  $t_0$  и положения  $x$  и  $x'$  в момент  $t, t \in I$ .

Имеем

$$\|x - x'\|^2 = \|\Phi(a, t) - \Phi(a', t)\|^2.$$

Эта величина остается постоянной, равной  $\|a - a'\|^2$ , для  $t \in I$ , тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt} \|x - x'\|^2 = 0.$$

Поскольку  $x = \Phi(a, t)$  и  $x' = \Phi(a', t)$ , имеем

$$\begin{aligned} [\Phi(a, t) - \Phi(a', t)] \cdot \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a', t) \right] &= 0, \\ (x - x') \cdot [U(x, t) - U(x', t)] &= 0, \end{aligned}$$

что приводит нас к условию (1.1).

Ниже приводится предложение 1.2, которое дает полезную характеристику поля скоростей  $U(x) = U(x, t)$  и позволяет проверять условие (1.1) в некоторый заданный момент времени.

**Предложение 1.2.** Условие (1.1) удовлетворяется для любых  $x$  и  $x' \in \Omega$  тогда и только тогда, когда существует вектор  $b \in \mathbb{R}^3$  и антисимметричная матрица  $B$  такие, что

$$U(x) = Bx + b, \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.2}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$U(x) = \omega \wedge x + b, \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где  $\omega$  — вектор, состоящий из компонент  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

**Доказательство.** Покажем, что из условия (1.2) следует условие (1.1). Прежде всего отметим, что

$$U(x') = U(x) + B(x' - x) = U(x) + \omega \wedge (x' - x).$$

Следовательно,

$$[U(x) - U(x')] \cdot (x - x') = [B(x - x')] \cdot (x - x') = 0,$$

поскольку  $Bu \cdot u = 0$  для всех  $u \in \mathbb{R}^3$ .

Обратно, покажем, что из условия (1.1) следует условие (1.2). Для простоты изложения предположим, что  $0 \in \Omega$  и  $b = U(0)$ . Пусть

$$V(x) = U(x) - U(0) = U(x) - b.$$

Тогда

$$V(x) \cdot x = 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Поскольку

$$[U(x) - U(e_i)] \cdot (x - e_i) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

получим

$$[V(x) - V(e_i)] \cdot (x - e_i) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

откуда в силу (1.4) имеем

$$V(x) \cdot e_i = -V(e_i) \cdot x, \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Поэтому

$$V(x) = \sum_{i=1}^3 [V(x) \cdot e_i] e_i = -\sum_{i=1}^3 [V(e_i) \cdot x] e_i,$$

следовательно,

$$V_i(x) = \sum_{j=1}^3 b_{i,j} x_j,$$

где

$$b_{i,j} = -V(e_i) \cdot e_j = -V_j(e_i).$$

Отсюда заключаем, что

$$b_{i,i} = -V(e_i) \cdot e_i = 0,$$

$$b_{i,j} = -V(e_i) \cdot e_j = V(e_j) \cdot e_i = -b_{j,i}.$$

Предложение 1.2 доказано.

*Примечание 1.6.* Для заданного векторного поля величины  $U$ ,  $\omega$  и  $b$  единственны. Действительно,

$$\omega \wedge x + b = \omega' \wedge x + b', \quad \forall x \in \Omega,$$

откуда при  $x = 0$  имеем  $b = b'$ . Аналогично, из  $(\omega - \omega') \wedge x = 0, \forall x \in \Omega$ , следует  $\omega - \omega' = 0$ .

Теперь введем специальный класс векторных полей в  $\mathbb{R}^3$ , который играет важную роль в этом разделе механики. Используемая ниже терминология обычно не используется инженерами, однако удобна, как мы это увидим ниже: такие векторные поля появляются в связи со скоростями твердых тел, силами, импульсом и ускорением.

**Определение 1.6.** *Спиральным векторным полем называется векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ , удовлетворяющее условию (1.1) или, что то же самое, условию (1.2). Соответствующий вектор  $\omega$  называется образующим (или линейно образующим) спирального векторного поля, а  $U(x_0)$  является результирующим (или кинетическим) импульсом в точке  $x_0$ ;  $\{U(x_0), \omega\}$  являются образующими элементами в точке  $x_0$ .*

Спиральное векторное поле характеризуется своими образующими элементами в любой заданной точке. Действительно, для любых  $x$  и  $x'$

$$U(x') = U(x) + \omega \wedge (x' - x). \quad (1.6)$$

Заметим, что в силу (1.6) функция  $U(x)$  постоянна вдоль линии, параллельной вектору  $\omega$ .

*Однородное спиральное векторное поле* — это спиральное векторное поле, для которого  $\omega = 0$ ; тогда, в силу (1.6), имеем  $U(x') = U(x)$  для всех  $x'$  и  $x$ . Другим частным случаем спирального векторного поля является *вращательный момент*: это спиральное векторное поле, для которого скалярное произведение  $U(x) \cdot \omega$  (которое не зависит от  $x$ , см. следующий подраздел) обращается в нуль. Можно показать (доказательство этого факта оставляем в качестве упражнения), что для любого неоднородного спирального векторного поля существует единственная линия  $\Delta$  (называемая *осью* этого поля), вдоль которой вектор  $U(x)$  параллелен линии  $\Delta$ . Вращающий момент является спиральным векторным полем, для которого  $U(x) = 0$  для всех  $x \in \Delta$ .

### Операции над спиральными векторными полями

Пусть  $[\mathcal{T}] = \{U(x)\}_{x \in \Omega}$  и  $[\tilde{\mathcal{T}}] = \{\tilde{U}(x)\}_{x \in \Omega}$  — спиральные векторные поля, такие что:

$$U(x') = U(x) + \omega \wedge (x' - x),$$

$$\tilde{U}(x') = \tilde{U}(x) + \tilde{\omega} \wedge (x' - x).$$

а) *Сумма и произведение на скаляр*

Определим сумму  $[\mathcal{T}] + [\tilde{\mathcal{T}}]$  и произведение  $\lambda[\mathcal{T}]$  посредством их образующих элементов в любой точке  $x_0$ :

$$[\mathcal{T}] + [\tilde{\mathcal{T}}] : \{U(x_0) + \tilde{U}(x_0), \omega + \tilde{\omega}\},$$

$$\lambda[\mathcal{T}] : \{\lambda U(x_0), \lambda \omega\}.$$

Легко видеть, что это определение не зависит от  $x_0$ . Кроме того, используя линейное отображение

$$[\mathcal{T}] \xrightarrow{\varphi_x} (\text{образующие элементы в точке } x),$$

закключаем, что пространство рассматриваемых полей изоморфно по отношению к  $\mathbb{R}^6$ . Можно показать, что любое спиральное векторное поле является суммой однородного спирального векторного поля и вращающего момента (указание: используйте ось спирального векторного поля).

б) *Топология*

Определим сходимость последовательности спиральных векторных полей как сходимость их образующих элементов в одной точке. Заметим, что сходимость этих элементов в одной точке приводит к сходимости в любой точке. Существенно, что эта топология определена в  $\mathbb{R}^6$ .



в) *Дифференцирование*

Пусть  $[\mathcal{T}(t)], t \in I$  — семейство спиральных векторных полей, зависящих от параметра  $t \in I$  и определенных их образующими элементами редукции в точке  $x_0: \{U(x_0, t), \omega(t)\}$ . Тогда определим операцию

$$\frac{d[\mathcal{T}]}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathcal{T}(t + \Delta t)] - [\mathcal{T}(t)]}{\Delta t},$$

являющуюся спиральным векторным полем, образующие элементы которого в точке  $x_0$  имеют вид

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial t}(x_0, t), \frac{d\omega}{dt}(t) \right\}.$$

г) *Скалярное произведение двух спиральных векторных полей*

Пусть  $[\mathcal{T}]$  и  $[\tilde{\mathcal{T}}]$  — спиральные векторные поля, элементами которых в точке  $x$  являются  $[U(x), \omega]$  и  $[\tilde{U}(x), \tilde{\omega}]$ . Положим

$$[\mathcal{T}] \cdot [\tilde{\mathcal{T}}] = U(x) \cdot \tilde{\omega} + \tilde{U}(x) \cdot \omega.$$

Эта величина не зависит от выбора точки  $x$ . Действительно, пусть  $x'$  — какая-либо другая точка; тогда

$$\begin{aligned} & [U(x') - U(x)] \cdot \tilde{\omega} + [\tilde{U}(x') - \tilde{U}(x)] \cdot \omega = \\ & = [\omega \wedge (x' - x)] \cdot \tilde{\omega} + [\tilde{\omega} \wedge (x' - x)] \cdot \omega = \\ & = [x' - x, \tilde{\omega}, \omega] + [x' - x, \omega, \tilde{\omega}] = 0. \end{aligned}$$

*Примечание 1.7.* Определенное выше скалярное произведение двух спиральных векторных полей является билинейным произведением, но не положительно определенной формой в пространстве  $\sim \mathbb{R}^6$ . Действительно, имеем соотношение

$$[\mathcal{T}] \cdot [\mathcal{T}] = 2U(0) \cdot \omega,$$

правая часть которой может быть положительной, отрицательной или даже равной нулю при соответствующем выборе  $[\mathcal{T}]$ .

*Примечание 1.8.* Выше мы определили спиральное векторное поле, связанное с полем скоростей твердого тела. Ниже мы введем спиральные векторные поля, соответствующие другим физическим величинам, таким как силы, импульс и ускорение.

### Структура спирального векторного поля

Если вектор  $\omega$  обращается в нуль, то векторное поле  $U = U(x)$  является константой.

Было бы интересно описать структуру векторного поля  $U(x)$ , когда образующий вектор  $\omega$  спирального векторного поля не обращается в нуль. Для этого мы будем искать ось  $\Delta$ , называемую осью спирального векторного поля, вдоль

которой вектор  $U(x)$  параллелен вектору  $\omega$ . Начнем с поиска такой точки  $x_0$  в плоскости, содержащей 0 и ортогональной вектору  $\omega$ . Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= U(x_0) \wedge \omega = U(0) \wedge \omega + (\omega \wedge x_0) \wedge \omega, \\ 0 &= U(0) \wedge \omega + |\omega|^2 x_0 - (\omega \cdot x_0)\omega; \end{aligned}$$

поскольку  $\omega \cdot x_0 = 0$ , получаем

$$x_0 = |\omega|^{-2} [\omega \wedge U(0)].$$

Для любой другой точки  $x \in \Delta$ , получим

$$\begin{aligned} 0 &= U(x) \wedge \omega = U(x_0) \wedge \omega + [\omega \wedge (x - x_0)] \wedge \omega, \\ 0 &= U(x_0) \wedge \omega + |\omega|^2 (x - x_0) - [\omega \cdot (x - x_0)]\omega; \end{aligned}$$

поскольку  $U(x_0) \wedge \omega = 0$  и

$$x - x_0 = |\omega|^{-2} \{[\omega \cdot (x - x_0)]\omega\},$$

а точка  $x$  принадлежит оси  $\Delta$ , параллельной вектору  $\omega$ , приходим к заключению, что ось  $\Delta$  является осью спирального векторного поля.

Таким образом, для любой точки  $x$  мы можем сравнивать  $U(x)$  и  $U(x')$ , где  $x'$  — ортогональная проекция точки  $x$  на ось  $\Delta$ . Отсюда заключаем, что векторное поле  $U(x)$  обладает спиральной симметрией; другими словами, это поле инвариантно относительно вращения вокруг оси  $\Delta$  и относительно переноса, параллельного оси  $\Delta$ , а это означает, что вращение и параллельный перенос, отображающие точку  $x$  в точку  $x'$ , также отображают векторное поле  $U(x)$  в  $U(x')$ .

### 1.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБЪЕМНОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

При рассмотрении материальной системы, движение которой мы описали выше, часто необходимо вычислять производную по времени от интегралов вида

$$K(t) = \int_{\Omega_t} C(x, t) dx,$$

где  $C = C(x, t)$  — заданная скалярная функция.

Здесь и далее выражение *множество, которое двигается вместе с потоком*, означает семейство множеств  $\Omega_t$ , где  $t$  принадлежит временному интервалу  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega_t = \Phi(\Omega_0, t)$ , а  $\Phi$ ,  $\Omega_0$  и  $\Omega_t$  удовлетворяют ранее введенным предположениям.

Для вычисления производной от  $K(t)$  сначала мы напомним следующий результат.

**Лемма 1.1 (дифференцирование детерминанта).** Пусть  $S = S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \in I$ , — семейство линейных операторов такое, что  $\det S(t) \neq 0$  для любого  $t \in I$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} [\det(S(t))] = \det[S(t)] \cdot \operatorname{tr} \left[ \frac{dS}{dt}(t) S^{-1}(t) \right].$$

**Доказательство.**

1. Напомним процедуру дифференцирования детерминантной функции.

Пусть  $f(S) = \det S$ . Функция  $f$  является полиномиальной функцией от коэффициентов оператора  $S$ ; следовательно, функция  $f$  дифференцируема и, по определению, ее дифференциал  $f'(S)$  удовлетворяет соотношению

$$f'(S) \cdot T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(S + \lambda T) - f(S)}{\lambda} \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{\det(S + \lambda T) - \det(S)}{\lambda} \right\}$$

для всех матриц  $T$ . Для вычисления выписанного предела запишем

$$\det(S + \lambda T) = \det[S_1 + \lambda T_1, \dots, S_n + \lambda T_n],$$

где  $S_i$  и  $T_i$  есть  $i$ -е вектор-столбцы матриц  $S$  и  $T$ . Разложим этот детерминант следующим образом:

$$\det(S_1, \dots, S_n) + \lambda k + O(\lambda^2) \quad (\text{при } \lambda \rightarrow 0).$$

Оставим в качестве упражнения для читателя проверку равенства

$$k = f'(S) \cdot T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} A_{ij} = \operatorname{tr}(T \cdot (\operatorname{cof} S)^T),$$

где  $A = (\operatorname{cof} S)$  — матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями<sup>1)</sup> матрицы  $S$ , а  $(\operatorname{cof} S)^T$  — транспонированная матрица. Напоминаем, что

$$(\operatorname{cof} S)^T = (\det S) S^{-1}.$$

Тогда в точке  $S$ , в которой  $\det S \neq 0$ , дифференциал детерминанта может быть записан в виде

$$f'(S) \cdot T = \operatorname{tr}(TS^{-1}) \det S.$$

2. Приложение.

Применяя цепное правило дифференцирования, получим:

$$\frac{d}{dt} \det[S(t)] = f'[S(t)] \cdot \frac{dS}{dt}(t) = \det[S(t)] \cdot \operatorname{tr} \left[ \frac{dS}{dt}(t) S^{-1}(t) \right].$$

Теперь мы можем доказать следующий результат.

<sup>1)</sup>Напомним, что алгебраическим дополнением  $S_{ij}$  матрицы  $S$  является умноженный на  $(-1)^{i+j}$  детерминант матрицы, полученной вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $S$ .

**Предложение 1.3.** Пусть  $C = C(x, t)$  — функция, принадлежащая классу  $C^1$  при  $x \in \Omega_t$  и  $t \in I$ . Пусть  $U$  и  $\Phi$  принадлежат классу  $C^1$  относительно  $t$  и относительно  $x$  и  $a$  соответственно. Тогда

$$\frac{dK}{dt}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(CU)(x, t) dx, \quad (1.7)$$

$$\frac{dK}{dt}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t} dx + \int_{\Gamma_t} CU \cdot n d\Gamma, \quad (1.8)$$

где  $\Gamma_t$  — граница множества  $\Omega_t$  и  $n$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma_t$ .

**Доказательство.**

1. Сначала рассмотрим случай, когда  $C \equiv 1$  и  $K(t) = \operatorname{vol} \Omega_t$ . Выполним в интеграле замену переменных  $x = \Phi(a, t)$ . Пусть  $\det \nabla_a \Phi > 0$ ; тогда

$$\int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_0} \frac{D\Phi}{Da} da = \int_{\Omega_0} \det(\nabla_a \Phi) da.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_a \Phi) da = \\ &= \int_{\Omega_0} \operatorname{tr} \left[ \nabla_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot (\nabla_a \Phi)^{-1} \right] \det(\nabla_a \Phi) da = \int_{\Omega_t} \operatorname{tr} \left[ \nabla_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot (\nabla_a \Phi)^{-1} \right] dx. \end{aligned}$$

Можно записать, что

$$\begin{aligned} U_i(x, t) &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(a, t), \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(x, t) &= \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t \partial a_k} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

откуда

$$(\nabla_x U)_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left( \nabla_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{i,k} \cdot (\nabla_a \Phi)^{-1}_{k,j}.$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{div} U = \operatorname{tr}(\nabla_x U) = \operatorname{tr} \left[ \left( \nabla_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \cdot (\nabla_a \Phi)^{-1} \right],$$

что дает равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} U dx.$$

2. Общий случай. Выполняя аналогичные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) dx &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (C(\Phi(a, t), t) \det(\nabla_a \Phi)) da = \int_{\Omega_0} \frac{\partial C}{\partial t} \cdot \det(\nabla_a \Phi) da + \\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \cdot \det(\nabla_a \Phi) da + \int_{\Omega_0} C \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_a \Phi) da = \\ &= \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x_j} U_j + C \operatorname{div} U \right) dx = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} (CU) \right) dx. \end{aligned}$$

Откуда следует доказательство предложения 1.3.

*Примечание 1.9.* Предложение 1.3 сформулировано для области  $\Omega_t$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $\Gamma_t$  и перемещающейся вместе с потоком; следовательно,  $U = U(x, t)$  — скорость границы  $\Gamma_t$ . Уравнение (1.8) можно распространить на случай зависящей от времени области  $\Omega_t$ , которая не обязательно перемещается вместе с потоком (т. е.  $\Omega_t$  не совпадает с  $\Phi(\cdot, t)\Omega_0$ , при любом  $t > 0$ ). В этом случае уравнение (1.8) применяется с заменой  $U = U(x, t)$  на заданную скорость границы  $\Gamma_t$  области  $\Omega_t$ . Доказательство этого факта аналогично вышеприведенному. Указанное обобщение уравнения (1.8) используется в гл. 6.

*Примечание 1.10.* Выражение *множество, которое движется вместе с потоком* (см. начало разд. 1.5) применимо также и на случай поверхностей, кривых, точек и других видов множеств. Иногда в данном контексте используется выражение *двигающийся совместно*.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Для случая сплошной среды рассмотрим поле скоростей, заданное в эйлеровом представлении в виде

$$U = (U_1, U_2, U_3) = (\sin t, \cos t, \alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

Вычислить линии тока и траектории.

2. Показать, что поле ускорений  $\gamma$  в эйлеровом представлении имеет вид

$$\gamma = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |U|^2 + (\operatorname{curl} U) \wedge U.$$

3. Для случая некоторого материала рассмотрим поле скоростей в эйлеровом представлении

$$U = (x_2 x_3, -x_1 x_3, kt + k_0), \quad k, k_0 \in \mathbb{R}.$$

а) Вычислить траектории и указать их вид при  $k = 0$  и  $k_0 \neq 0$ .

б) Выписать лагранжево представление движения.

в) Вычислить ускорение в лагранжевом и эйлеровом представлениях при  $k = 0$ .

4. Пусть движение сплошной среды задано в лагранжевом представлении на временном интервале  $(0, t)$  в виде

$$x_1 = a_1 \cos \omega t - a_2 \sin \omega t,$$

$$x_2 = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t,$$

$$x_3 = a_3,$$

где  $\omega \in \mathbb{R}$ .

а) Показать, что якобиан отображения  $a \mapsto x = \Phi(a, t)$  не обращается в нуль.

б) Выписать эйлерово представление движения.

в) Выписать траектории и линии тока.

5. (Дополнение к векторному анализу.) Показать, что

$$(i) \det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \\ = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A}.$$

$$(ii) \vec{A} \wedge (B \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}.$$

Здесь  $\vec{A}, \vec{B}$  и  $\vec{C}$  — векторы из  $\mathbb{R}^3$ .

6. Показать, что

$$\operatorname{div}(\Psi u) = \nabla \Psi \cdot u + \Psi \operatorname{div} u,$$

$$\operatorname{curl}(\Psi u) = \nabla \Psi \wedge u + \Psi \operatorname{curl} u,$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} u = -\Delta u + \nabla \operatorname{div} u,$$

$$\operatorname{div}(u \wedge v) = v \cdot \operatorname{curl} u - u \cdot \operatorname{curl} v,$$

$$\operatorname{curl}(u \wedge v) = u \operatorname{div} v - v \operatorname{div} u + (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v,$$

где  $\Psi$  — скалярная функция на  $\mathbb{R}^3$ , а  $u$  и  $v$  — векторные функции.

7. Напомним формулу Грина

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial \Omega} u \cdot n \, d\Gamma.$$

Здесь  $\Omega$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^d$  с регулярной границей  $\partial \Omega$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_d$  и  $d\Gamma$  — поверхностная мера на  $\partial \Omega$ .

Из формулы Грина вывести соотношения

$$(i) \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial \Omega} u \cdot n_i \, d\Gamma,$$

$$(ii) \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$\text{где } \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i,$$

$$(iii) \int_{\Omega} (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) \, dx = \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) \, d\Gamma,$$

$$(iv) \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{curl} v \, dx = \int_{\Omega} v \cdot \operatorname{curl} u \, dx - \int_{\partial \Omega} (u \wedge v) \cdot n \, d\Gamma,$$

где  $u$  и  $v$  — скалярные функции на  $\mathbb{R}^d$  в случаях (i), (ii) и (iii) и векторные функции в случае (iv).

# ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

## 2.1. ПОНЯТИЕ МАССЫ

Цель этой главы состоит в обобщении хорошо известных законов механики для одной материальной точки  $f = m\gamma$  на случай сплошных сред. После того как мы ввели понятие ускорения, необходимо ввести понятие массы и силы.

В этом разделе мы рассмотрим материальную систему  $S$  в движении. Эта система занимает область  $\Omega_{t_0}$  в момент времени  $t_0$  и область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ . Введем понятие массы, основываясь на следующей гипотезе:

*для каждой материальной системы  $S$  и для каждого момента времени  $t$  существует положительная мера  $\mu_t$  на  $\Omega_t$ , называемая распределением масс.*

Ниже в большинстве случаев мы будем предполагать, что мера  $\mu_t$  регулярна относительно меры Лебега  $dx$ ; другими словами, предполагаем, что существует функция  $\rho = \rho(x, t)$  такая, что

$$d\mu_t(x) = \rho(x, t) dx,$$

где  $\rho$  — плотность системы в точке  $x$  в момент времени  $t$  (здесь мы используем эйлерово представление движения). Как обычно, предполагается, что функция  $\rho$  достаточно гладкая (по крайней мере принадлежит классу  $C^1$  по  $x$  и  $t$ ).

Существуют другие важные случаи, которые мы здесь не рассматриваем: для пластин и оболочек мера  $\mu_t$  определена на поверхности  $\Sigma_t$ ; для балок и струн мера  $\mu_t$  определена на кривой  $\Gamma_t$  и регулярна относительно дуговой меры; для точечных масс мера  $\mu_t$  является линейной комбинацией дираковских масс. Все эти случаи могут быть изучены при помощи методов, аналогичных тем, которые мы будем применять ниже.

Читатель-математик в целом знаком с теорией меры; для остальных достаточно рассматривать  $d\mu_t(x)$  как удобное обозначение для одной из упомянутых мер  $\rho(x, t)dx$ ,  $\rho(x, t)d\Sigma_t(x)$ ,  $\rho(x, t)d\Gamma_t(x)$  или для дираковских масс. Ниже мы используем только элементарные результаты теории меры.

### Сохранение массы

Сформулируем следующую гипотезу сохранения масс:

*для любых  $t$  и  $t'$  выполнено*

$$\mu_{t'} = \Phi(\cdot, t', t)\mu_t,$$

что означает: в момент времени  $t'$  распределение масс представляет собой образ распределения масс в момент времени  $t$ , полученный отображением  $\Phi(t', t) = \Phi(\cdot, t', t)$  (в смысле образа меры, полученного отображением). В терминах объемной плотности сказанное означает, что

$$\rho'(x', t') = \rho(\Phi(x, t', t), t) \cdot \frac{Dx'}{Dx}. \quad (2.1)$$

**Определение 2.1.** Полная масса системы в момент времени  $t$  представляет собой интеграл  $m = \int_{\Omega_t} d\mu_t(x)$ . Если  $d\mu_t(x) = \rho(x, t) dx$ , то

$$m = \int_{\Omega_t} d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx.$$

Аналогично, если материальная подсистема  $S'$  занимает область  $\Omega'_t \subset \Omega_t$  в момент времени  $t$ , то масса подсистемы  $S'$  — это интеграл

$$\int_{\Omega'_t} d\mu_t(x).$$

*Примечание 2.1.* В соответствии с гипотезой сохранения массы, масса системы постоянна:

$$\int_{\Omega_t} d\mu_t(x) = \int_{\Omega_{t'}} d\mu_{t'}(x')$$

для любых  $t$  и  $t'$ . Сказанное можно сформулировать в более общем виде: если  $\varphi = \varphi(x')$  — достаточно регулярная функция, определенная на  $\Omega_{t'}$ , то по определению образа меры имеем

$$\int_{\Omega_{t'}} \varphi(x') d\mu_{t'}(x') = \int_{\Omega_t} \varphi[\Phi(t', t)(x)] d\mu_t(x).$$

**Определение 2.2.** Центр масс или центр инерции материальной системы  $S$  в момент времени  $t$  представляет собой точку  $G_t$ , определенную соотношением

$$OG_t = \frac{\int_{\Omega_t} x d\mu_t}{\int_{\Omega_t} d\mu_t}.$$

*Примечание 2.2.* Легко проверить, что определение центра масс  $G_t$  не зависит от выбора точки  $O$ .

Точка  $G = G_t$  не обязательно является материальной точкой, перемещающейся вместе с потоком. Тем не менее если  $x_G(t) = OG_t$ , то мы можем определить скорость и ускорение центра масс следующим образом:

$$v(G) = \frac{d}{dt} x_G(t), \quad (2.2)$$

$$\gamma(G) = \frac{d^2}{dt^2} x_G(t) = \frac{dv(G)}{dt}. \quad (2.3)$$



Ясно, что  $x_G(t)$  — центр масс (или барицентр) векторов  $x$  для меры  $d\mu_t(x)$ . Ниже мы увидим, что  $v(G_t)$  и  $\gamma(G_t)$  являются центрами масс (или барицентрами) скоростей и ускорений точек системы  $S$  (или  $\Omega_t$ ) для той же самой меры.

**Следствие гипотезы сохранения массы: уравнения неразрывности в эйлеровых переменных**

*Предложение 2.1.* Рассмотрим материальную систему  $S$ , которая занимает область  $\Omega_t$  в момент времени  $t \in I$ . Тогда для любых  $x \in \Omega_t$  и  $t \in I$  имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0,$$

где  $\rho(x, t)$  — объемная плотность и  $U(x, t)$  — скорость частицы, которая занимает положение  $x$  в момент  $t$ .

*Доказательство.* Если  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ , то согласно гипотезе сохранения массы имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} d\mu_t(x) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} \rho(x, t) dx \text{ (в силу предложения 1.3) } = \\ &= \int_{\Omega'_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) \right] dx. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых  $\Omega'_t \subset \Omega_t$  выполнено равенство

$$\int_{\Omega'_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) \right] dx = 0,$$

откуда следует<sup>1)</sup>, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0$$

для любых  $(x, t) \in \Omega_t \times I$ .

*Примечание 2.3.* Для некоторых материалов (например, для несжимаемых однородных жидкостей, см. часть 2) плотность  $\rho$  постоянна в пространстве и во времени; тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} U = 0.$$

<sup>1)</sup> Пусть  $g$  — непрерывная функция в  $\bar{\Omega}$ , такая, что  $\int_{\Omega'} g(x) dx = 0$  для всех  $\Omega' \subset \Omega$ ; тогда функция  $g$  есть тождественный нуль, что легко проверить. Это свойство мы будем неоднократно использовать.

**Предложение 2.2.** Пусть  $S$  — трехмерная материальная система, которая занимает область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ , и пусть  $C$  — функция, принадлежащая классу  $C^1$  по  $x$  и  $t$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{DC}{Dt} (x, t) \rho(x, t) dx,$$

где  $(D/Dt) = (\partial/\partial t) + U \cdot \nabla$  — конвективная (или материальная, или полная) производная.

**Доказательство.** Согласно предложению 1.3 имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx &= \\ &= \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} \rho + C \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla C \cdot \rho U + C(\nabla \rho) \cdot U + C \rho \operatorname{div} U \right) (x, t) dx. \end{aligned}$$

Поскольку (см. предложение 2.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot U + \rho \operatorname{div} U = 0,$$

получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + U \cdot \nabla C \right) \rho dx = \int_{\Omega_t} \frac{DC}{Dt} \rho dx.$$

Предложение 2.2 может быть переформулировано следующим образом.

**Следствие 2.1.** Имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} \frac{DC}{Dt} d\mu_t(x).$$

*Примечание 2.4.* Из следствия 2.1 заключаем, что скорость центра масс материальной системы  $S$  задается соотношением

$$v(G_t) = \frac{1}{\int_{\Omega_t} d\mu_t(x)} \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial x}{\partial t} + (U \cdot \nabla)x \right] d\mu_t(x).$$

Поскольку  $\partial x / \partial t = 0$  и  $(U \cdot \nabla)x = U$ ,

$$v(G_t) = \frac{\int_{\Omega_t} U d\mu_t(x)}{\int_{\Omega_t} d\mu_t(x)}. \quad (2.3')$$

Аналогично, дифференцируя второй раз, найдем ускорение центра масс:

$$\gamma(G_t) = \frac{\int_{\Omega_t} \gamma d\mu_t(x)}{\int_{\Omega_t} d\mu_t(x)}. \quad (2.4)$$

Следовательно, как это отмечалось выше, хотя  $x_G(t)$  — это центр масс (барицентр) для меры  $d\mu_t(x)$ , мы видим, что  $v(G_t)$  и  $\gamma(G_t)$  являются центрами масс (барицентрами) и функций распределения скоростей  $U(x, t)$ , и ускорений  $\gamma(x, t)$  для той же самой меры  $d\mu_t(x)$ .

### 2.1.1. Сохранение массы в лагранжевых переменных

Выпишем уравнение сохранения массы для случая лагранжева представления движения системы. Имеем

$$\rho(x, t) = \rho[\Phi(a, t), t] = \sigma(a, t),$$

где  $\sigma$  — объемная плотность, выраженная в лагранжевых переменных. Если  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ , то

$$\int_{\Omega'_t} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega'_{t_0}} \sigma(a, t) J(a, t) da,$$

где  $J = \det \nabla_a \Phi$ . Поскольку

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'_{t_0}} \sigma(a, t) J(a, t) da = 0, \quad \forall \Omega'_{t_0} \subset \Omega_{t_0},$$

получаем

$$\sigma(a, t) J(a, t) = \text{Const} = \sigma(a, 0).$$

Таким образом, мы пришли к представлению гипотезы сохранения массы в лагранжевых переменных. Если жидкость однородна и несжимаема (см. примечание 2.3), то

$$J(a, t) \equiv 1.$$

Это условие редко используется и менее удобно, чем бездивергентное условие, полученное в эйлеровых переменных. Это же замечание верно и для уравнения сохранения массы в случае сжимаемой жидкости.

### Кинетическая энергия системы относительно системы отсчета

Рассмотрим материальную систему  $S$ , которая занимает область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ . Кинетическая энергия системы в момент времени  $t$  задается в виде<sup>1)</sup>

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} |U(x, t)|^2 d\mu_t(x),$$

где  $U$  — поле скоростей в соответствующей системе отсчета.

### Количество движения, момент количества движения и соответствующее спиральное векторное поле

Теперь введем два важных спиральных векторных поля, связанных с материальной системой: *спиральное векторное поле количества движения и спиральное векторное поле ускорений*.

Пусть материальная система  $S$  находится в движении. Для каждого момента времени  $t$  следующим образом определим спиральное векторное поле

<sup>1)</sup>Здесь и далее  $|U|$  означает евклидову норму вектора  $U$ .

количества движения: его образующими элементами в точке  $O$  начала системы отсчета являются

- количество движения системы:  $R = \int_{\Omega_t} U(x, t) d\mu_t(x)$ ,
- момент количества движения в точке  $0$  системы:  
 $\sigma(0) = \int_{\Omega_t} x \wedge U(x, t) d\mu_t(x)$ .

Момент количества движения в точке  $z$  задается в виде

$$\sigma(z) = \sigma(0) + R \wedge z,$$

где  $R = mv(G_t)$  — количество движения,  $\{\sigma(z)\}_z$  — спиральное векторное поле количества движения и

$$\sigma(z) = \int (x - z) \wedge U(x, t) d\mu_t(x). \quad (2.5)$$

### Ускорение и соответствующее спиральное векторное поле

Аналогичным образом определим спиральное векторное поле ускорений материальной системы  $S$  в момент времени  $t$ : его образующими элементами в точке  $0$  являются

- динамическая равнодействующая системы:  $R' = \int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x)$ ,
- динамическое количество движения в точке  $0$ :  
 $\delta(0) = \int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x)$ .

Динамическое количество движения в точке  $z$  задается соотношением

$$\delta(z) = \delta(0) + R' \wedge z = \int_{\tau_t} (x - z) \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x),$$

где  $R' = m\gamma(G_t)$  — динамическая равнодействующая и  $\{\delta(z)\}_z$  — спиральное векторное поле ускорений системы в момент времени  $t$ .

*Примечание 2.5.* Рассмотрим две непересекающиеся системы  $S$  и  $S'$ . Тогда спиральное векторное поле количества движения и спиральное векторное поле ускорений системы  $S \cup S'$  являются суммами соответствующих полей систем  $S$  и  $S'$  (этот результат непосредственно следует из аддитивного свойства интегралов относительно областей интегрирования).

**Предложение 2.3.** В заданной системе отсчета спиральное векторное поле ускорений системы является производной по времени ее спирального векторного поля количества движения.

*Доказательство.* Из предложения 2.2 следует, что  $R' = (dR/dt)$ . Следовательно, достаточно проверить, что  $\delta(0) = (d\sigma(0)/dt)$ . Действительно, основываясь на гипотезе сохранения массы и лагранжевых переменных, получим

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_0} \Phi(a, t) \wedge \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(a, t) d\mu_0(a) = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \Phi(a, t) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t) d\mu_0(a) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \wedge U(x, t) d\mu_t(x) = \frac{d}{dt} \sigma(0). \end{aligned}$$

## 2.2. СИЛЫ

Рассмотрим две непересекающиеся материальные системы  $S$  и  $S'$ , находящиеся в движении. Сделаем следующие предположения о силах, действующих на систему  $S$  со стороны системы  $S'$ :

*в каждый момент времени  $t$  силы, действующие на систему  $S$  со стороны системы  $S'$ , представляются векторной мерой  $d\varphi_t(x)$  (или, что то же самое, тремя скалярными мерами) области  $\Omega_t$ .*

Как и в случае масс, введем четыре типа мер.

- Меры, которые регулярны относительно  $dx$ . В этом случае

$$d\varphi_t(x) = f(x, t) dx, x \in \Omega_t,$$

где  $f = (f_1, f_2, f_3)$ . Тогда можно сказать, что  $f$  — объемная плотность сил, действующих на систему  $S$  со стороны системы  $S'$  в момент времени  $t$ .

- Меры на поверхности  $\Sigma_t$ , которые регулярны относительно поверхностной меры  $d\Sigma_t$ .
- Меры на кривой  $\Gamma_t$ , которые регулярны относительно дуговой меры  $d\ell_t$ .
- Меры, сконцентрированные в точке, что соответствует случаю сосредоточенной силы.

Здесь мы рассмотрим все четыре случая, которые могут встретиться в случае трехмерных сплошных сред.

Что касается массы, читатель, незнакомый с теорией меры, может рассматривать  $d\varphi_t(x)$  как удобное обозначение одного из силовых полей или их комбинаций.

Силы, рассматриваемые в механике, весьма разнообразны: сила тяготения, электромагнитные силы, контактные силы (т. е. силы, являющиеся результатом контакта двух тел и сосредоточенные на поверхности контакта) и др.

### Соответствующие спиральные векторные поля

Существует естественный способ связать спиральное векторное поле с силами, действующими на систему  $S$  со стороны системы  $S'$ : это поле, образующими элементами которого в точке  $0$  являются  $\int_{\Omega_t} d\varphi_t(x)$  и  $\int_{\Omega_t} x \wedge d\varphi_t(x)$ . Образующие элементы в любой другой точке  $z$  имеют вид  $\int_{\Omega_t} d\varphi_t(x)$  и  $\int_{\Omega_t} (x - z) \wedge d\varphi_t(x)$ . Говорят, что  $\int_{\Omega_t} d\varphi_t(x)$  является *равнодействующей сил*, действующих на  $S$  со стороны  $S'$ , а  $\int_{\Omega_t} (x - z) \wedge d\varphi_t(x)$  является результирующим количеством движения в точке  $z$ .

*Примечание 2.6* (предположение аддитивности). Пусть  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S$  — непересекающиеся материальные системы, находящиеся в движении. Сделаем естественное предположение о том, что мера, связанная с силами, действующими на  $S$  со стороны  $S_1 \cup S_2$ , является суммой мер, связанных с силами, действующими на  $S$  со стороны  $S_1$  и  $S_2$ . Аналогично, мы можем предположить, что

мера, связанная с силами, действующими на  $S_1 \cup S_2$  со стороны  $S$ , является суммой мер, связанных с силами, действующими на  $S_1$  со стороны  $S$  и на  $S_2$  со стороны  $S$ .

Следствием примечания 2.6 является тот факт, что спиральное векторное поле для сил, действующих на  $S$  со стороны  $S_1 \cup S_2$ , составляет сумму спирального векторного поля для сил, действующих на  $S$  со стороны  $S_1$  и  $S_2$ . Аналогично, спиральное векторное поле для сил, действующих на  $S_1 \cup S_2$  со стороны  $S$ , — это сумма спирального векторного поля для сил, действующих на  $S_1$  со стороны  $S$  и спирального векторного поля для сил, действующих на  $S_2$  со стороны  $S$  (этот результат является следствием аддитивности интегралов относительно областей интегрирования).

*Примечание 2.7.* В случае материальной точки, занимающей положение  $M_t$  в момент времени  $t$ , количество движения в  $M_t$  спирального векторного поля внешних сил, приложенных к этой точке, очевидным образом обращается в нуль. Таким образом, соответствующее спиральное векторное поле полностью характеризуется равнодействующей силой  $F = F_t$  и количеством движения, равным 0 в  $M_t$ .

## 2.3. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ И ЕГО ПЕРВОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определим внешние силы, действующие на материальную систему  $S$ , как силы, действующие на нее со стороны окружающего пространства (т. е. дополнения к  $S$ ).

**Фундаментальный закон динамики:** *существует по крайней мере одна система отсчета  $\mathcal{R}$ , называемая галилеевой, такая, что в каждый момент времени  $t$  и для любой материальной системы  $S$  спиральные векторные поля ускорений системы  $S$  и внешних сил, действующих на  $S$ , совпадают.*

Другими словами, для любой системы  $S$  в каждый момент времени  $t$  в галилеевой системе отсчета имеем

$$\int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} U(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} d\varphi_t(x), \quad (2.6)$$

$$\int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \wedge U(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} x \wedge d\varphi_t(x). \quad (2.7)$$

Здесь мы сохранили прежние обозначения и использовали тот факт, что спиральное векторное поле ускорений является производной по времени от спирального векторного поля количества движения и что начало 0 галилеевой системы отсчета фиксировано.

Фундаментальные уравнения (2.6) и (2.7) носят название **закона сохранения количества движения и закона сохранения момента количества движения**. Теорема 2.1, приводимая ниже, по-другому формулирует закон сохранения количества движения.

*Примечание 2.8.* Фундаментальный закон не имеет силы, если система отсчета не является галилеевой. Такие системы отсчета не слишком часто используются в механике сплошных сред и обычно применяются в небесной механике, метеорологии, океанографии или в механике твердых тел. В этом случае необходимо добавить к спиральным векторным полям для внешних сил некоторые другие поля, связанные с ускорениями (см. разд. 2.5).

Из фундаментального закона динамики следуют несколько важных результатов.

**Следствие 2.2 (принцип действия и противодействия).** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — непересекающиеся материальные системы. Тогда спиральное векторное поле  $[\mathcal{F}_{12}]$ , связанное с силами, действующими на  $S_2$  со стороны  $S_1$ , противоположно спиральному векторному полю  $[\mathcal{F}_{21}]$ , соответствующему силам, действующим на  $S_1$  со стороны  $S_2$  :

$$[\mathcal{F}_{12}] = -[\mathcal{F}_{21}].$$

*Доказательство.* Пусть  $S = S_1 \cup S_2$ . В силу замечания 2.6 внешние силы, действующие на  $S_1$ , состоят из сил, действующих на  $S_1$  со стороны  $S_2$  (их спиральное векторное поле есть  $[\mathcal{F}_{21}]$ ), и сил, действующих на  $S_1$  со стороны дополнения к системе  $S$  (их спиральное векторное поле обозначается через  $[\mathcal{F}_{e1}]$ ). Аналогично, внешние силы, действующие на  $S_2$ , состоят из сил, действующих на  $S_2$  со стороны  $S_1$  (их спиральное векторное поле есть  $[\mathcal{F}_{12}]$ ), и сил, действующих на  $S_2$  со стороны дополнения к системе  $S$  (их спиральное векторное поле обозначается через  $[\mathcal{F}_{e2}]$ ).

Используя результаты разд. 2.2, из фундаментального закона получим

$$[\mathcal{A}_S] = [\mathcal{F}_{e1}] + [\mathcal{F}_{e2}],$$

где  $[\mathcal{A}]$  — величины спирального векторного поля ускорений. Аналогично имеем

$$[\mathcal{A}_{S_1}] = [\mathcal{F}_{e1}] + [\mathcal{F}_{21}],$$

$$[\mathcal{A}_{S_2}] = [\mathcal{F}_{e2}] + [\mathcal{F}_{12}].$$

Поскольку  $[\mathcal{A}_S] = [\mathcal{A}_{S_1}] + [\mathcal{A}_{S_2}]$  (см. примечание 2.5), после суммирования двух последних уравнений получим

$$[\mathcal{F}_{12}] + [\mathcal{F}_{21}] = 0.$$

**Следствие 2.3 (фундаментальный закон статики).** Если материальная система  $S$  неподвижна (находится в состоянии равновесия) относительно галилеевой системы отсчета, то спиральное векторное поле, соответствующее внешним силам, приложенным к  $S$ , обращается в нуль.

*Примечание 2.9.* Последний результат имеет силу и в том случае, когда движение системы прямолинейно и равномерно относительно галилеевой системы отсчета.

*Примечание 2.10.* В случае материальной точки  $M$  фундаментальный закон динамики принимает вид

$$m\gamma = F,$$

где  $\gamma$  — ускорение точки  $M$  и  $F$  — внешняя сила, действующая на точку  $M$  (см. примечание 2.7). Поскольку все импульсы обращаются в нуль в точке  $M$ , из фундаментального закона динамики невозможно получить других уравнений; другими словами, последнее выписанное уравнение эквивалентно фундаментальному закону в случае материальной точки.

**Теорема 2.1 (движение центра масс).** Движение центра масс материальной системы  $S$  эквивалентно движению материальной точки, масса которой равна общей массе системы и на которую действует сила, равная равнодействующей внешних сил, действующих на систему  $S$ .

*Доказательство.* Пусть  $m = \int_{\Omega_t} d\mu_t(x)$ . Согласно уравнению (2.4) имеем

$$\begin{aligned} m\gamma(G_t) &= \int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x), \\ &= \text{динамическая равнодействующая сила системы } S, \\ &= \text{равнодействующая внешних сил на систему } S. \end{aligned}$$

Из этой теоремы вытекает следствие, важное для описания галилеевых систем.

**Следствие 2.4.** В случае галилеевых систем движение центра масс изолированной системы прямолинейно и равномерно.

Это следствие мы используем в разд. 2.5 для описания некоторых галилеевых систем. Под изолированной системой мы понимаем такую систему  $S$ , к которой внешние силы не приложены.

## 2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ К СИСТЕМАМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И К ТВЕРДЫМ ТЕЛАМ

### Системы материальных точек

Пусть дано множество материальных точек  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (такая ситуация имеет место, например, при изучении электромагнитных сил или при изучении движения планет). Фундаментальный закон динамики применительно к  $M_i$  принимает вид

$$m_i \gamma_i = F_i + \sum_{k \neq i} F_{ki}, \quad (2.8)$$

где  $F_i$  — внешняя сила, действующая на  $M_i$  со стороны точки  $M_k$ . Фундаментальный закон динамики в приложении к  $M_j$  и к  $M_i \cup M_j$  приводит



к соотношениям

$$m_i \gamma_i = F_i + \sum_{k \neq i} F_{ki}, \quad m_j \gamma_j = F_j + \sum_{k \neq j} F_{kj},$$

$$m_i \gamma_i + m_j \gamma_j = F_i + F_j + \sum_{k \neq i, k \neq j} F_{ki} + \sum_{k \neq i, k \neq j} F_{kj}.$$

Сравнивая выписанные соотношения, заключаем, что

$$F_{ji} + F_{ij} = 0. \quad (2.9)$$

Аналогично, для результирующего импульса в точке  $O$  имеем

$$OM_i \wedge F_{ji} + OM_j \wedge F_{ij} = 0, \quad (2.10)$$

откуда, согласно уравнению (2.8), следует, что вектор  $F_{ij}$  параллелен вектору  $M_i M_j$ :

$$M_i M_j \wedge F_{ij} = 0. \quad (2.11)$$

Соотношение (2.9) выводится так же, как и уравнение (2.8), применением фундаментального закона к  $M_i$ ,  $M_j$  и  $M_i \cup M_j$ . Для результирующего импульса в точке  $O$  имеем

$$OM_i \wedge m_i \gamma_i = OM_i \wedge F_i + OM_i \wedge \sum_{k \neq i} F_{ki},$$

$$OM_j \wedge m_j \gamma_j = OM_j \wedge F_j + OM_j \wedge \sum_{k \neq j} F_{kj},$$

$$OM_i \wedge m_i \gamma_i + OM_j \wedge m_j \gamma_j =$$

$$= OM_i \wedge F_i + \sum_{k \neq i, k \neq j} OM_i \wedge F_{ki} + OM_j \wedge F_j + \sum_{k \neq i, k \neq j} OM_j \wedge F_{kj}.$$

Из этих трех последних соотношений следует уравнение (2.9). Конечно, уравнения (2.8) и (2.9) следуют также из принципа действия и противодействия.

### Аналитическое выражение фундаментального закона

В случае одной материальной точки  $M$  уравнение (2.7) принимает вид

$$m \gamma = F. \quad (2.12)$$

Предположим, например, что  $F$  есть функция от  $x$ ,  $\dot{x} = dx/dt$ , и  $t$ ,  $F = F(x, \dot{x}, t)$ . Тогда

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t), \quad (2.13)$$

что эквивалентно системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений для трех компонент вектора  $x(t) = OM(t)$ . Классическая задача механики состоит в следующем: при известном положении  $x(0)$  точки  $M$  в момент времени  $t = 0$  и известной скорости  $\dot{x}(0)$  этой точки при  $t = 0$  определить последующее движение  $x(t)$  точки  $M$  при  $t > 0$ . Если функция  $F$  достаточно гладкая, что всегда предполагается, то существование и единственность решения уравнения (2.13) при заданных  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  следуют из классических теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений (решение задачи Коши).

Рассмотрим случай двух материальных точек  $M_1$  и  $M_2$ , который можно обобщить на случай нескольких материальных точек. Если предположить, что силы  $F_1, F_2$  и  $F_{12}$  имеют вид функций  $F_1(x_1, \dot{x}_1, t)$ ,  $F_2(x_2, \dot{x}_2, t)$ , и  $F_{12}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)$ , то (2.7) можно записать в форме

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_1(x_1, \dot{x}_1, t) - F_{12}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t), \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_2(x_2, \dot{x}_2, t) + F_{12}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Здесь  $x_i(t) = OM_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . При заданных  $x_1(0)$ ,  $\dot{x}_1(0)$ ,  $x_2(0)$  и  $\dot{x}_2(0)$  и при условии достаточной гладкости функций  $F_1, F_2$  и  $F_{12}$  существование и единственность решения системы (2.14) следуют из классических теорем для задачи Коши в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В заключение отметим, что в случае нечетного числа материальных точек и при разумных предположениях о силах *фундаментальный закон динамики позволяет нам показать, что движение таких систем целиком определяется знанием внешних и внутренних сил, начального положения системы и начальной скорости*. Цель последующих глав состоит в доказательстве аналогичных результатов для непрерывных систем, однако такая задача гораздо более сложна для сплошных сред и выходит за рамки данной книги. В частности, *обыкновенные дифференциальные уравнения* должны быть заменены *уравнениями в частных производных*, которые значительно сложнее для изучения и решения. Некоторые такие уравнения, которые встречаются ниже, приводят ко многим нерешенным математическим задачам (см. замечания об уравнениях в частных производных в механике, которые приведены в приложении к книге).

## Твердые тела

Рассмотрим твердое тело  $S$ , центр масс (или центр инерции) которого обозначим через  $G$ . Первое следствие из фундаментального закона динамики сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.2 (теорема о моменте количества движения).** Пусть  $\Delta$  — ось, фиксированная в галилеевой системе отсчета  $\mathcal{R}$ . Тогда

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \delta_\Delta = m_\Delta,$$

где  $\sigma_\Delta = \sigma(A) \cdot k$  — момент количества движения относительно оси  $\Delta$ ,  $m_\Delta = m_A \cdot k$ ,  $m_A$  — импульс внешних сил в точке  $A$ ,  $A \in \Delta$ ,  $k$  — единичный вектор оси  $\Delta$  и  $\sigma(A)$  — момент количества движения в точке  $A$ .

**Доказательство.** Из предложения 2.3 следует, что

$$m_O = \frac{d}{dt} \sigma(O) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \wedge U(x, t) d\mu_t.$$

Аналогично в точке  $A$  ( $OA = x_A$ ) имеем

$$m_A = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge U(x, t) d\mu_t(x).$$

Следовательно,

$$m_\Delta = m(A) \cdot k = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} [(x - x_A), U(x, t), k] d\mu_t(x).$$

Теорема доказана.

Движение твердого тела описывается шестью параметрами и шестью скалярными уравнениями, записанными в проекции на некопланарные оси и соответствующими теореме о движении центра инерции и теореме о моменте количества движения.

### Тензор инерции в точке $A$

Пусть  $S$  — твердое тело и  $A$  — фиксированная точка этого тела. Тогда момент количества движения в точке  $A$  записывается в виде

$$\sigma_A = \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge U(x, t) d\mu_t(x),$$

где  $OA = x_A$ . Поскольку  $S$  — твердое тело,

$$U(x, t) = U(x_A, t) + \omega \wedge (x - x_A)$$

для некоторого  $\omega \in \mathbb{R}^3$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge U(x_A, t) d\mu_t(x) + \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge [\omega \wedge (x - x_A)] d\mu_t(x) = \\ &= mAG \wedge U(x_A, t) + \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge [\omega \wedge (x - x_A)] d\mu_t(x), \end{aligned}$$

где  $G$  — центр масс тела  $S$ .

Отображение

$$J_A : \omega \mapsto \int_{\Omega_t} (x - x_A) \wedge [\omega \wedge (x - x_A)] d\mu_t(x) \quad (2.15)$$

является линейным оператором и называется тензором инерции тела  $S$  в точке  $A$  (это понятие не зависит от выбора системы отсчета).

Если  $S$  — однородное тело (т. е. мера массы  $d\mu_t$  пропорциональна объему:  $d\mu_t(x) = \rho dx$ , где  $\rho$  — постоянная плотность) и если  $O \equiv A$  — фиксированная точка в  $S = \Omega_0$ , то

$$\begin{aligned} J_0(u) \cdot v &= \rho \int_{\Omega_0} [x \wedge (u \wedge x)] \cdot v \, dx = \rho \int_{\Omega_0} [|x|^2 u - (x \cdot u)x] \cdot v \, dx \\ &= \rho \int_{\Omega_0} [|x|^2 (u \cdot v) - (x \cdot u)(x \cdot v)] \, dx = J_0(v) \cdot u. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Таким образом,  $(u, v) \mapsto J_0(u) \cdot v$  — билинейная симметричная форма. Далее,  $J_0$  целиком определяется величинами

$$(J_0)_{ij} = J_0(e_i) \cdot e_j,$$

где  $(e_1, e_2, e_3)$  — канонический базис в  $\mathbb{R}^3$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (J_0)_{ii} &= \rho \int_{\Omega_0} (|x|^2 - x_i^2) \, dx, \\ (J_0)_{ij} &= -\rho \int_{\Omega_0} x_i x_j \, dx, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

В частности, если  $G$  — центр масс тела  $S$  и  $\Delta$  — ось, содержащая  $G$ , то

$$\sigma_G = J_G(\omega), \quad \sigma_\Delta = J_G(\omega) \cdot k,$$

где  $k$  — единичный вектор оси  $\Delta$ .

## 2.5. ГАЛИЛЕЕВЫ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ДЛЯ НЕГАЛИЛЕЕВОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Начнем со следующих замечаний в отношении кинематики.

### Сравнение скоростей и ускорений в двух различных системах отсчета

Рассмотрим две различные системы отсчета  $\mathcal{R}_f$  и  $\mathcal{R}_m$  с одной и той же хронологией. Для движущейся точки  $M = M(t)$  сравним скорости и ускорения относительно этих систем отсчета  $\mathcal{R}_f$  и  $\mathcal{R}_m$ .

Две системы отсчета играют некоторую симметричную роль, однако для удобства будем полагать, что система  $\mathcal{R}_f$  фиксирована, а система  $\mathcal{R}_m$  движется. Скорости и ускорения точки  $M$  относительно систем  $\mathcal{R}_f$  и  $\mathcal{R}_m$  называют абсолютными и относительными соответственно и обозначают через  $U_f, \gamma_f$  и  $U_m, \gamma_m$ .

Таким образом, пусть задана система отсчета  $\mathcal{R}_f$  с центром  $O_f$  и базисом  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и система отсчета  $\mathcal{R}_m$  с центром  $O_m$  и базисом  $f_i = f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; эти базисы связаны соотношениями

$$f_i(t) = a_{ij}(t)e_j,$$

где принято правило суммирования по повторяющимся индексам. Положение точки  $M = M(t)$  в системе отсчета  $\mathcal{R}_m$  определяется вектором

$$O_m M(t) = x_i(t)f_i(t).$$

Скорость точки  $M$  относительно системы  $\mathcal{R}_f$  задается соотношением

$$U_f = \frac{dO_f M(t)}{dt} = U_f(O_m) + \dot{x}_i(t)f_i(t) + x_i(t)\dot{f}_i(t),$$

где  $U_f(O_m) = (dO_f O_m)/(dt)$  — абсолютная скорость точки  $O_m$  и  $\dot{u}$  — производная от  $u$  по  $t$ . Это соотношение можно переписать в форме

$$U_f = U_m + U_e, \tag{2.17}$$

где  $U_m = \dot{x}_i(t)f_i(t)$  — относительная скорость точки  $M$  в системе  $\mathcal{R}_m$  и  $U_e = U_f(O_m) + x_i(t)\dot{f}_i(t)$ . Легко проверить, что  $U_e$  есть скорость в системе  $\mathcal{R}_f$  точки, которая фиксирована в  $\mathcal{R}_m$  и совпадает с точкой  $M$  в момент времени  $t$ . Эту скорость называют скоростью переноса точки  $M$  (при движении системы  $\mathcal{R}_m$  относительно системы  $\mathcal{R}_f$ ). Аналогично, ускорение точки  $M$  в системе  $\mathcal{R}_f$  задается в виде

$$\gamma_f = \frac{d^2 O_f M}{dt^2} = \gamma_f(O_m) + \ddot{x}_i(t)f_i(t) + 2\dot{x}_i(t)\dot{f}_i(t) + x_i(t)\ddot{f}_i(t),$$

где  $\gamma_f(O_m) = (d^2 O_f O_m)/(dt^2)$  — абсолютное ускорение точки  $O_m$ . Последнее соотношение можно переписать в форме

$$\gamma_f = \gamma_m + \gamma_c + \gamma_e, \tag{2.18}$$

где  $\gamma_m = \ddot{x}_i(t)f_i(t)$  — относительное ускорение точки  $M$  в системе  $\mathcal{R}_m$ ,  $\gamma_c = 2\dot{x}_i(t)\dot{f}_i(t)$  — кориолисово ускорение и  $\gamma_e = \gamma_f(O_m) + x_i(t)\ddot{f}_i(t)$  — переносное ускорение точки  $M$  (при движении системы  $\mathcal{R}_m$  относительно системы  $\mathcal{R}_f$ ). Это ускорение является ускорением в системе  $\mathcal{R}_f$  точки, которая фиксирована в  $\mathcal{R}_m$  и совпадает с точкой  $M$  в момент времени  $t$ .

Если  $\{U(x_0), \omega\}$  — спиральное векторное поле, соответствующее полю скоростей системы  $\mathcal{R}_m$  при ее движении относительно системы  $\mathcal{R}_f$ , то

$$\dot{f}_i = \omega \wedge f_i$$

и

$$\ddot{f}_i = \dot{\omega} \wedge f_i + \omega \wedge (\omega \wedge f_i).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\gamma_c &= 2\omega \wedge U_m, \\ \gamma_e &= \gamma_f(O_m) + \dot{\omega} \wedge O_m M + \omega \wedge (\omega \wedge O_m M).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Среди других интересных случаев отметим случай, когда система  $\mathcal{R}_m$  совершает равномерное поступательное движение относительно системы  $\mathcal{R}_f$ , при этом  $\gamma_f = \gamma_m$ .

### Фундаментальный закон в негалилеевой системе отсчета

Пусть  $\mathcal{R}_m$  — негалилеева система отсчета, а  $\mathcal{R}_f$  — галилеева система отсчета. Можно записать фундаментальный закон в системе  $\mathcal{R}_m$  при условии, что под ускорением понимается относительное ускорение в  $\mathcal{R}_m$ . Кроме того, к внешним силам мы добавим силы, которые направлены противоположно ускорениям  $\gamma_c$  и  $\gamma_e$ , а именно силы, определенные мерами  $-\gamma_c d\mu_t$  и  $-\gamma_e d\mu_t$ . Тогда заключаем, что

*спиральное векторное поле, соответствующее ускорению материальной системы в негалилеевой системе отсчета, является суммой таких полей, которые соответствуют внешним силам, действующим на материальную систему, и силам инерции, обусловленным кориолисовым ускорением и ускорением фиксированной точки.*

### Галилеевы системы отсчета

Используем следствие 2.4 для определения галилеевых систем отсчета. Из сказанного выше следует, что если система отсчета галилеева, то любая другая система отсчета, которая совершает равномерное поступательное движение относительно первой системы, также галилеева, поскольку ускорения  $\gamma_c$  и  $\gamma_e$  равны нулю в силу соотношения (2.18).

Основываясь на следствии 2.4, теперь рассмотрим несколько примеров систем отсчета, которые с приемлемой степенью приближения (в зависимости от решаемой задачи) можно рассматривать как галилеевы.

Если предположить, что силы, действующие на солнечную систему со стороны звезд, пренебрежимо малы, то можно считать, что солнечная система изолирована. Тогда система отсчета с центром, совпадающим с центром масс солнечной системы, и с неподвижными осями относительно солнечной системы является галилеевой. Такие галилеевы системы отсчета используются в небесной механике. Если же предположить, что силы, действующие на Землю со стороны звезд и планет, пренебрежимо малы, то система отсчета с центром, совпадающим с центром Земли, и с неподвижными относительно звезд осями также является галилеевой. Такие галилеевы системы используются, например, в метеорологии и океанографии. В инженерных задачах механики (например, движение транспортных средств или роботов) предполагается, что силы, возникающие вследствие вращения Земли (см. гл. 12, разд. 12.1), и силы, действующие со стороны звезд и планет, пренебрежимо малы. Тогда

система отсчета, связанная с Землей (т. е. неподвижная относительно Земли), может рассматриваться как галилеева для указанных задач.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать движение материальной точки с массой  $m$  под действием гравитации, если известны ее начальное положение и скорость.
2. Вычислить центр масс полукруга  $D$  с радиусом  $R$ .
3. Рассмотреть движение материальной точки с массой  $m$ , которая движется без трения по вертикально расположенному кругу с радиусом  $R$ . Положение этой материальной точки определяется углом  $\theta$  между соответствующим радиусом и вертикалью.
4. Рассмотрим тело  $\Omega$ , ограниченное поверхностью  $\partial\Omega$ , на которую действуют силы с поверхностной плотностью  $-\rho\vec{n}d\Sigma$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали,  $\rho = \rho(x_3)$  — линейная функция от  $x_3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Выписать спиральное векторное поле, соответствующее этим силам.

## ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ КОШИ И ПИОЛЫ–КИРХГОФА: ПРИЛОЖЕНИЯ

Эта глава является центральной для механики сплошных сред. Наша цель состоит в моделировании и в изучении сил сцепления (или внутренних сил), действующих на материальную систему  $S$ , или, другими словами, сил, действующих на часть системы  $S$  со стороны другой части системы  $S$ . Наше исследование приведет к определению тензора напряжений Коши и к уравнениям статики и динамики, которые следуют из применения фундаментального закона динамики.

Тензор напряжений Коши выражается в эйлеровых переменных. Его аналогом, выраженным в лагранжевых переменных, является тензор Пиолы–Кирхгофа, который рассматривается в последнем разделе этой главы.

### 3.1. ГИПОТЕЗЫ О СИЛАХ СЦЕПЛЕНИЯ

Пусть  $S$  — материальная система. Пусть  $S = S_1 \cup S_2$  — некоторое разбиение системы  $S$ , а  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — области, занимаемые подсистемами  $S_1$  и  $S_2$  в некоторый заданный момент времени. В разд. 3.1 и 3.2 предполагается, что время фиксировано; тем самым в выписываемых формулах время явным образом не используется. Предположим, что общая граница  $\Sigma$  областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (см. рис. 3.1) достаточна регулярна.

Примем следующие предположения, введенные Коши, относительно сил, действующих на  $S_1$  со стороны  $S_2$ .

- (Н1) *Силы, действующие на  $S_1$  со стороны  $S_2$ , являются контактными; это означает, что они могут быть представлены векторной мерой  $d\varphi$ , сосредоточенной на  $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .*
- (Н2) *Мера  $d\varphi$  абсолютно непрерывна относительно поверхностной меры  $d\Sigma$ :*

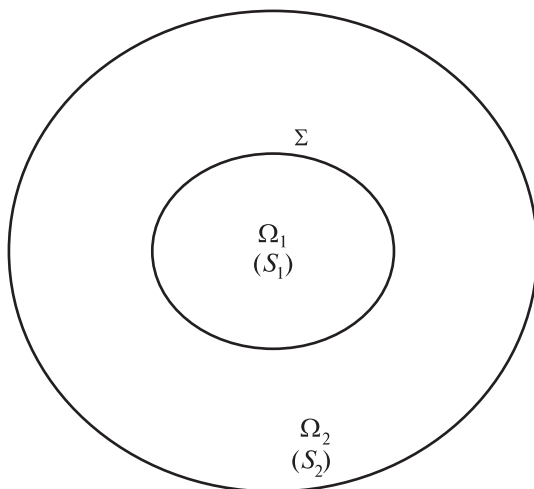
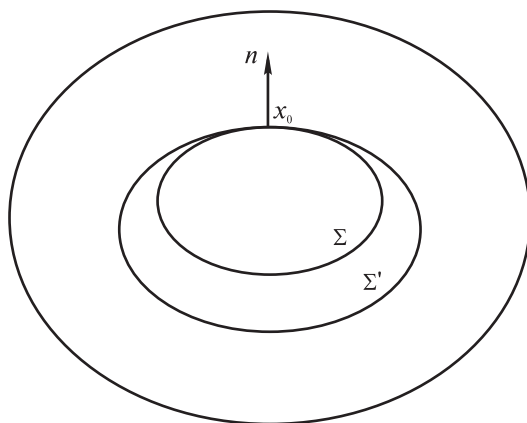
$$d\varphi = T d\Sigma,$$

где  $T$  — поверхностная плотность сил.

- (Н3) *Функция  $T$  зависит только от точки  $x$  из  $\Sigma$  и от единичной нормали  $n$  к  $\Sigma$  в точке  $x$ :*

$$T = T(x, n).$$



Рис. 3.1. Область  $\Omega$ Рис. 3.2.  $T$  зависит только от  $n$ 

Таким образом, в случае разбиения  $S$  в виде двух разбиений  $\Sigma = S_1 \cup S_2$  и  $\Sigma = S'_1 \cup S'_2$  (см. рис. 3.2) заключаем, что функция  $T(x_0, n)$  имеет одно и то же значение в точке  $x_0$  для этих разбиений.

В общем случае разбиения мы видим, что функция  $T$  определена для любого  $x \in \Omega$  и любого  $n \in \mathbb{R}^3$ , такого, что  $|n| = 1$ . Тогда можно сделать следующие минимальные предположения относительно регулярности.

(Н4) При фиксированном  $n$  функция  $x \mapsto T(x, n)$  непрерывна.

Первым следствием фундаментального закона динамики (более точно, принципа действия и противодействия) является следующее предложение.

**Предложение 3.1.** Для любого  $x \in \Omega$  и любого  $n \in \mathbb{R}^3$ ,  $|n| = 1$ , выполнено равенство

$$T(x, n) = -T(x, -n).$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \Omega$  и  $n \in \mathbb{R}^3$ ,  $|n| = 1$ . Рассмотрим две подсистемы  $S_1$  и  $S_2$  в  $S$ , разделенные плоскостью  $\Sigma$ , перпендикулярной к  $n$  (см. рис. 3.3). Пусть  $[\mathcal{F}_{ij}]$  – спиральное векторное поле для сил, действующих на  $S_j(\Omega_j)$  со стороны  $S_i(\Omega_i)$ . Тогда, согласно принципу действия и противодействия, имеем

$$[\mathcal{F}_{12}] + [\mathcal{F}_{21}] = 0.$$

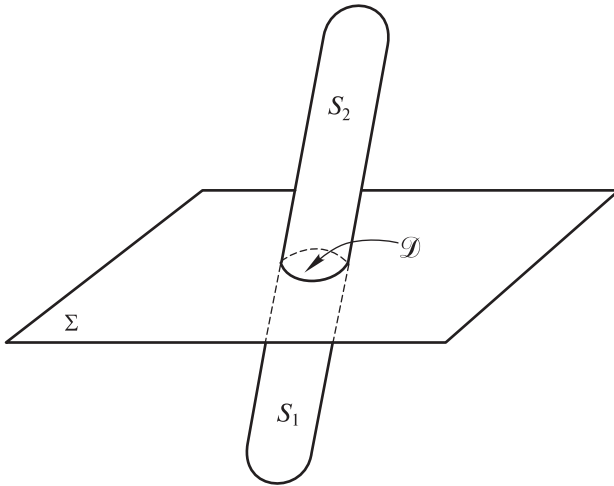


Рис. 3.3. Действие и противодействие

Следовательно, в силу гипотез (Н1) и (Н2) получим

$$\int_{\mathcal{D}} T(x, n) d\Sigma + \int_{\mathcal{D}} T(x, -n) d\Sigma = 0,$$

где  $\mathcal{D} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Отсюда заключаем, что

$$\int_{\mathcal{D}} [T(x, n) + T(x, -n)] d\Sigma = 0, \quad \forall \mathcal{D} \subset \Sigma,$$

откуда

$$T(x, n) + T(x, -n) = 0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

**Определение 3.1.** Вектор  $T(x, n)$  называется вектором напряжений в точке  $x$  для направления  $n$ . Далее,  $T_n(x, n) = T(x, n) \cdot n$

является нормальным напряжением в точке  $x$  для направления  $n$ , а  $T_t(x, n) = T(x, n) - nT_n(x, n)$  является касательным напряжением в точке  $x$  для направления  $n$ .

Говорят, что материал подвергается растяжению, когда  $T_n > 0$ , и сжатию, когда  $T_n < 0$ .

*Примечание 3.1.* Следствием предложения 3.1 является равенство

$$T(x, -n) \cdot (-n) = T(x, n) \cdot n$$

для всех  $x \in \Omega$  и  $n \in \mathbb{R}^3$ ,  $|n| = 1$ . Таким образом,  $T_n(x, n)$  зависит только от направления вектора  $n$ .

### 3.2. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ КОШИ

Для изучения функции  $T(x, n)$ , где  $x \in \Omega$ ,  $n = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $|n| = 1$ , предположим для простоты, что  $x = 0$  — начало ортонормированной системы координат. Пусть  $e_1, e_2$  и  $e_3$  — единичные векторы осей  $0x_1, 0x_2$  и  $0x_3$ . Положим

$$T(0, e_i) = \sigma_{ji}e_j.$$

Таким образом, для любой точки  $x$  (включая  $x = 0$ ) мы ввели в рассмотрение матрицу с элементами  $\sigma_{ij}(x)$ .

Пусть область  $S_1$  — тетраэдр с вершиной  $0$  и основаниями  $A_1, A_2, A_3$  (см. рис. 3.4), перпендикулярными вектору  $n$ . Если  $h > 0$  — расстояние от  $0$  до плоскости  $A_1A_2A_3$ , то уравнение плоскости принимает вид

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = h.$$

Тетраэдр  $A_1A_2A_3$  выбран таким образом, что  $n_i > 0, i = 1, 2, 3$ .

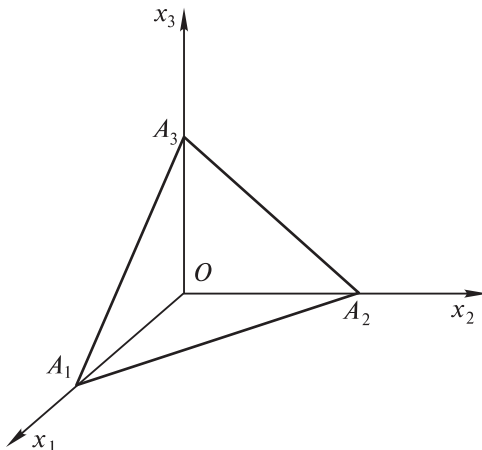


Рис. 3.4. Система  $S_1$

Пусть  $d\varphi$  — мера, связанная с внешними силами, действующими на  $S$ . Пусть  $\gamma$  — ускорение в галилеевой системе отсчета и  $d\mu$  — распределение масс в  $S_1$ . В применении к системе  $S_1$  фундаментальный закон динамики принимает вид

$$\int_{\Omega_1} \gamma(x) d\mu(x) = \int_{\Omega_1} d\varphi(x) + R,$$

где  $\Omega_1$  — область, которую занимает  $S_1$ , а  $R$  — равнодействующая сил, действующих на  $S_1$  со стороны  $S_2 = S \setminus S_1$ . Согласно гипотезам Коши получим

$$\begin{aligned} R &= \int_{0A_2A_3} T(x, -e_1) dx_2 dx_3 + \int_{0A_1A_2} T(x, -e_3) dx_1 dx_2 + \\ &+ \int_{0A_1A_3} T(x, -e_2) dx_1 dx_2 + \int_{A_1A_2A_3} T(x, n) d\Sigma. \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{0A_2A_3} T(x, -e_1) dx_2 dx_3 = - \int_{0A_2A_3} T(x, e_1) dx_2 dx_3.$$

Поскольку функции  $x \mapsto \sigma_{ij}(x)$  непрерывны,

$$T(x, e_1) = \sigma_{j1}(x)e_j = [\sigma_{j1}(0) + o(1)]e_j,$$

где  $o(1)$  стремится к 0 при стремлении  $h$  к 0. Следовательно,

$$\int_{0A_2A_3} T(x, e_1) dx_2 dx_3 = \text{area}(0A_2A_3) [\sigma_{j1}(0)e_j + o(1)].$$

Поскольку  $\text{area}(0A_2A_3) = n_1 \cdot \text{area}(A_1A_2A_3)$ , где  $n_1$  — косинус угла между нормальными  $n$  и  $e_1$  к треугольникам  $A_1A_2A_3$  и  $0A_2A_3$ ,

$$\frac{1}{\text{area}(A_1A_2A_3)} \int_{0A_2A_3} T(x, e_1) dx_2 dx_3 = n_1 [\sigma_{j1}(0)e_j + o(1)].$$

Поступая таким же образом для граней  $0A_1A_3$  и  $0A_1A_2$  тетраэдра  $\Omega_1 = \Omega_1(h)$  и затем для треугольника  $A_1A_2A_3$ , получим

$$\int_{A_1A_2A_3} T(x, n) d\Sigma = \text{area}(A_1A_2A_3) [T(0, n) + o(1)].$$

В общем случае имеем

$$\begin{aligned} R &= R(h) = \text{area}(A_1A_2A_3) [T(0, n) - n_i \sigma_{ji}(0)e_j + o(1)] = \\ &= O(h^2) [T(0, n) - n_i \sigma_{ij}(0)e_j + o(1)]. \end{aligned}$$

Поскольку все функции регулярны,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1(h)} \gamma(x) d\mu(x) - \int_{\Omega_1(h)} d\varphi(x) &= \int_{\Omega_1(h)} [\gamma(x)\rho(x) - f(x)] dx = \\ &= [\gamma(0)\rho(0) - f(0)]O(h^3). \end{aligned}$$

После деления на  $h^2$  получим при  $h \rightarrow 0$ , что

$$T(0, n) = \sigma_{ji}(0)n_i e_j. \quad (3.1)$$

Для любого вектора  $n$ ,  $|n| = 1$  и  $n_i > 0$ , это соотношение легко обобщить на случай, когда  $n_i$  имеют произвольные знаки. Эта формула позволяет определить линейный оператор  $\sigma = \sigma(x)$  (или, более точно,  $\sigma = \sigma(x, t)$ ):

$$\sigma : n = (n_1, n_2, n_3) \mapsto \sigma \cdot n = \sigma_{ji} n_i e_j.$$

Тот факт, что это определение не зависит от заданной системы отсчета, здесь предполагается и не доказывается (напомним, что  $\sigma_{ji} = T(0, e_i) \cdot e_j$ ). Тогда получим

$$T(x, n) = \sigma_{ij}(x)n_j e_i \quad \text{для любых } x \text{ и } n. \quad (3.2)$$

Следствием соотношения (3.2) является следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Вектор напряжений в точке  $x$  для направления  $n$  является линейной функцией от компонент вектора  $n$ .

Таким образом, мы имеем линейный оператор, определенный даже в случае, когда вектор  $n$  не единичный:

$$n \mapsto T(x, n) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ji}(x)n_i e_j = \sum_{i,j=1}^3 [T(x, e_i) \cdot e_j] e_j n_i,$$

где  $n = \sum_{i=1}^3 n_i e_i$ . Этот оператор называют *тензором напряжений Коши* в точке  $x$  и обозначают  $\sigma(x)$  или  $\sigma(x, t)$ , если снова ввести в рассмотрение время.

Как обычно, предполагаем, что тензор напряжений  $\sigma = \sigma(x, t)$  является регулярной функцией (по крайней мере из класса  $\mathcal{C}^1$  по  $x$  и  $t$ ).

*Примечание 3.2.* Поскольку ранее мы предположили, что тензор  $\sigma$  не зависит от ортогональной системы отсчета, мы не будем обсуждать инвариантность  $\sigma$  при замене системы отсчета по отношению к инвариантности сил (в частности, при замене галилеевой системы отсчета). Сказанное весьма важно для следующего раздела, однако мы отсылаем читателя по этому вопросу к специализированной литературе.

### 3.3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Снова введем переменную времени  $t$ :  $\sigma = \sigma(x, t)$ . Цель этого раздела состоит в записи фундаментального закона динамики с использованием тензора на-

пряжений. Здесь мы выпишем уравнения количества движения. В разд. 3.4 мы получим уравнения момента количества движения.

**Теорема 3.2.** *Рассмотрим тело с массовой плотностью  $\rho(x, t)$ , на которое действуют внешние силы с объемной плотностью  $f(x, t)$ . Тогда*

$$\rho \gamma_i = f_i + \sigma_{ij,j}, \quad (3.3)$$

где

$$\sigma_{ij,j} = \sigma_{ij,j}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega_t, \quad t \in I.$$

**Доказательство.** Пусть  $S' \subset S$  заполняет объем  $\Omega'_t$  в момент времени  $t$ ,  $\bar{\Omega}'_t \subset \Omega_t$  и  $\Gamma'_t = \partial\Omega'_t$ . Внешние силы, действующие на  $S'$ , представляют собой объемные силы, определенные мерой  $f dx$ , и контактные силы, действующие на  $S'$  со стороны  $S \setminus S'$  и определенные мерой  $T d\Gamma$ , сконцентрированной на  $\Gamma'_t$  (в соответствии с гипотезами разд. 3.2). Следовательно, согласно фундаментальному закону динамики, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'_t} \rho(x, t) \gamma_i(x, t) dx &= \int_{\partial\Omega'_t} T_i(x, n) d\Gamma + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx = \\ &= \int_{\partial\Omega'_t} \sigma_{ij}(x) \cdot n_j d\Gamma + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx = \\ &= (\text{используем формулу Стокса}) = \\ &= \int_{\Omega'_t} \sigma_{ij,j}(x) dx + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx. \end{aligned}$$

И наконец,

$$\int_{\Omega'_t} (\rho(x, t) \gamma_i(x, t) - \sigma_{ij,j}(x, t) - f_i(x, t)) dx = 0$$

для всех  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ . Таким образом, подынтегральное выражение обращается в нуль.

В эйлеровых координатах имеем

$$\gamma_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

Из приведенных выше соотношений приходим к следующим фундаментальным уравнениям механики сплошных сред:

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij,j} + f_i, \quad (3.4)$$

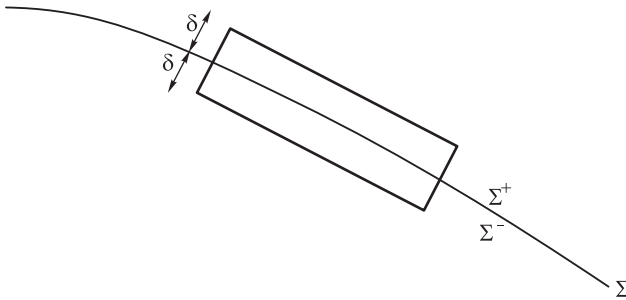
$$i = 1, 2, 3.$$

**Уравнения равновесия**

Если материальная система находится в состоянии равновесия, то  $U = 0$  и уравнения (3.4) принимают вид

$$\sigma_{ij,j}(x) + f_i(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

*Примечание 3.2 (непрерывность вектора напряжений и граничных условий).* В гл. 5 мы покажем, что тензор напряжений не обязательно непрерывен на границе между двумя средами. Вектор напряжений  $T(x, n)$ , однако, непрерывен при условии, что ускорение и силы остаются ограниченными на границе между двумя сплошными средами, что всегда имеет место, за исключением случая ударных волн. Чтобы доказать непрерывность вектора  $T(x, n)$ , мы применим фундаментальный закон динамики к области  $\Omega_\delta$  (см. рис. 3.5) и устремим  $\delta$  к 0. Подробные рассуждения мы здесь опустим.



**Рис. 3.5.** Область  $\Omega_\delta$

В механике сплошных сред непрерывность вектора  $T(x, n)$  приводит к интересным граничным условиям. Например, если на  $S$  действуют силы  $F$  с поверхностной плотностью на границе  $\Gamma_t$ , то

$$F(x) = T(x, n) = \sigma(x) \cdot n(x) \quad \text{на } \Gamma_t = \partial\Omega_t.$$

**3.4. СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ**

В разд. 3.3 мы использовали уравнения количества движения, вытекающие из фундаментального закона динамики, для доказательства теоремы 3.2. Теперь мы используем уравнения момента количества движения для следующей теоремы.

**Теорема 3.3.** Тензор напряжений  $\sigma$  симметричен:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  для всех  $i, j$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную область  $\Omega' \subset \Omega$  и выпишем уравнение момента количества движения в форме

$$\int_{\Omega'} x \wedge (\rho\gamma - f) dx = \int_{\partial\Omega'} x \wedge T(x, n) d\Gamma = \int_{\partial\Omega'} x \wedge [\sigma(x) \cdot n] d\Gamma.$$

Здесь мы предполагаем, что внешними силами являются объемные силы, определенные мерой  $f dx$ . Первая компонента выписанного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} [x_2(\rho\gamma_3 - f_3) - x_3(\rho\gamma_2 - f_2)] dx &= \int_{\partial\Omega'} (x_2\sigma_{3j}n_j - x_3\sigma_{2j}n_j) d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j}) dx = \int_{\Omega'} (\delta_{2j}\sigma_{3j} + x_2\sigma_{3,j,j} - \delta_{3j}\sigma_{2j} - x_3\sigma_{2,j,j}) dx, \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, равный 1, если  $i = j$ , и 0 в противном случае. Следовательно,

$$\int_{\Omega'} [\sigma_{32} - \sigma_{23} + x_2(\sigma_{3,j,j} - \rho\gamma_3 + f_3) - x_3(\sigma_{2,j,j} - \rho\gamma_2 + f_2)] dx = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega'} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dx = 0, \quad \forall \Omega' \subset \Omega$$

и

$$\sigma_{32} = \sigma_{23}.$$

Из последних двух компонент получим

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

### Следствия

1. Для любых  $n, n'$  имеем  $T(x, n) \cdot n' = T(x, n') \cdot n$ .

2. Две квадратичные формы  $\sigma_{ij}\xi_i\xi_j = \pm 1$  называются поверхностями напряжения. Заметим, что  $\sigma_{ij}(x)\xi_i\xi_j$  не является положительно определенной квадратичной формой; например, мы уже видели, что выражение  $T_n = (\sigma \cdot n) \cdot n$  может быть как положительным, так и отрицательным.

3. Собственные векторы тензора  $\sigma(x)$  называются главными направлениями напряжений в точке  $x$ : это векторы  $n$ , такие, что вектор  $T(x, n)$  параллелен векторам  $n$ , т. е.

$$\sigma(x) \cdot n = \lambda n.$$

Другими словами,  $n = n(x)$  является собственным вектором тензора  $\sigma(x)$ . Поскольку тензор  $\sigma = \sigma(x)$  симметричен, в каждой точке  $x$  существуют по крайней мере три главных направления для напряжений, которые взаимно ортогональны (диагонализация вещественной симметричной матрицы).



4. Девиатор тензора  $\sigma$  (в частности, тензора напряжений) — это тензор  $\sigma^D = \sigma - rI$ , где  $r$  выбирается таким, что  $Tr \sigma^D = 0$ ; следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma^D &= \sigma - \frac{1}{3}(Tr \sigma)I, \\ \sigma_{ij}^D &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Сферическая часть этого уравнения  $\sigma^S$  представляет собой разность  $\sigma^S = \sigma - \sigma^D = \frac{1}{3}\sigma_{kk}I$ .

### Примеры

Рассмотрим несколько классических элементарных примеров тензоров напряжения.

1. Сферический тензор напряжений — это тензор  $\sigma$ , пропорциональный единичному тензору:

$$\sigma = -pI.$$

2. Тензор одноосных напряжений в направлении  $e_1$  в точке  $x$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &\neq 0; \\ \sigma_{ij} &= 0, \quad (i, j) \neq (1, 1).\end{aligned}$$

3. Тензор касательных напряжений в двух ортогональных направлениях  $0x_1$  и  $0x_2$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &\neq 0; \\ \sigma_{ij} &= 0, \quad (i, j) \neq (1, 2).\end{aligned}$$

### 3.5. ТЕНЗОР ПИОЛЫ–КИРХГОФА

Как сказано в примечании 1.5 гл. 1, эйлерово представление чаще используется для жидкостей и газов, тогда как лагранжево представление чаще используется для твердых тел, хотя это вовсе не обязательно.

Здесь мы выразим тензор напряжений, а также уравнения (3.3)–(3.5) в лагранжевых переменных. Рассмотрим материальную систему, занимающую область  $\Omega_0$  в момент времени  $t_0$  и область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ ; как и в гл. 1, запишем

$$x = \Phi(a, t), \quad a \in \Omega_0, \quad x \in \Omega_t.$$

Используя обозначения, которые будут введены повторно в гл. 5, будем обозначать матрицу Якоби  $\nabla_a \Phi = Dx/Da$  (см. гл. 1) через  $\mathbf{F}$ .

Тензор напряжений Коши  $\sigma = \sigma(x, t)$  ранее был определен через эйлерову переменную  $x$ . В случае лагранжевой переменной  $a$  вводится тензор  $\bar{\sigma}$ ,

$$\bar{\sigma}(a, t) = \sigma(\Phi(a, t), t), \quad (3.6)$$

который, однако, не дает удобную форму уравнений (3.3)–(3.5).

Введем тензор Пиолы–Кирхгофа  $\Pi$  из следующих соображений. Вернемся к ситуации, которая иллюстрируется на рис. 3.4, зафиксируем время  $t$  и введем прообраз  $\Phi(\cdot, t)$ , который дает сходную геометрию в  $\Omega_0$  (см. рис. 3.6). Пусть  $n_t$  — единичный вектор нормали к  $\Sigma_t$ , направленный от  $\Omega_{1t}$  к  $\Omega_{2t}$ , и  $n_0$  — единичный вектор нормали к  $\Sigma_0$ , направленный от  $\Omega_{10}$  к  $\Omega_{20}$ . В момент времени  $t$  результирующая сил, действующих на  $S_1$  со стороны  $S_2$ , имеет вид

$$\int_{\Sigma_t} \sigma(x, t) \cdot n_t(x, t) \, d\Gamma_t(x). \tag{3.7}$$

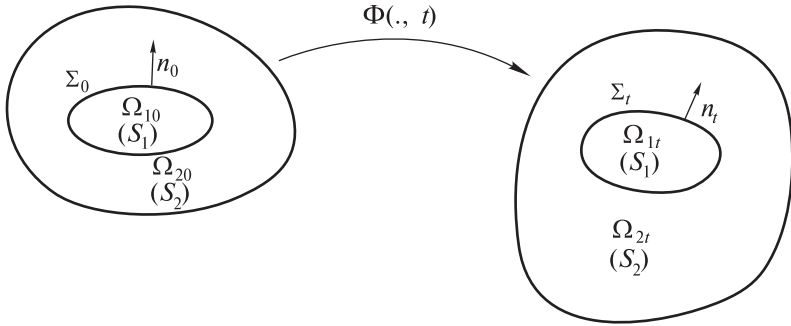


Рис. 3.6. Разбиение  $S = S_1 \cup S_2$  системы  $S$  в моменты времени 0 и  $t$

Будем искать тензор (если он существует)  $\Pi = \Pi(a, t)$ , определенный в некоторый момент времени  $t$  и такой, что в момент времени  $t$  силы сцепления, действующие на  $S_1$  со стороны  $S_2$ , могут быть выражены в форме

$$\int_{\Sigma_0} \Pi(a, t) \cdot n_0(a, t) \, d\Gamma_0(a). \tag{3.8}$$

Это выражение имеет силу для любого разбиения  $S = S_1 \cup S_2$  (и, тем самым, для любой регулярной поверхности  $\Sigma_0$  внутри области  $\Omega_0$ ).

Для поиска этого тензора нам нужна следующая формула замены переменных для интеграла (3.7) (эта формула будет доказана в приложении к гл. 5):

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \sigma(x, t) \cdot n_t(x, t) \, d\Gamma_t(x) &= \\ &= \int_{\Sigma_0} \sigma(\Phi(a, t), t) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot n_0(a, t) [\det \mathbf{F}(a, t)] d\Gamma_0(a). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь символ «точка» означает произведение операторов (или произведение матриц в заданном базисе). Заключаем, что искомым тензор имеет следующий вид (переменные  $a$  и  $t$  опускаем и используем обозначения (3.6)):

$$\Pi = (\det \mathbf{F}) \bar{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T. \tag{3.10}$$

Выписанный тензор называют первым тензором Пиолы–Кирхгофа. Поскольку тензоры  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  симметричны, в общем случае тензор  $\Pi$  не симметричен, но удовлетворяет соотношению

$$\Pi \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \Pi^T. \quad (3.11)$$

Введем второй тензор Пиолы–Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \Pi = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T,$$

который уже является симметричным.

Вместо того чтобы выразить уравнения (3.3)–(3.5) через переменные  $a$  и  $t$  при помощи замены переменных  $x = \Phi(a, t)$  и тензора  $\Pi$ , мы непосредственно запишем фундаментальный закон динамики для  $S_1$ ,  $\forall S_1 \subset S$ , в предположении, как и в разд. 3, о том, что существуют силы с объемной плотностью  $f = f(x, t)$  на  $S$ . Тогда для результирующей силы получим

$$\int_{\Omega_{1t}} \rho(x, t) \gamma(x, t) dx = \int_{\Omega_{1t}} f(x, t) dx + \int_{\Sigma_t} \sigma(x, t) \cdot n_t(x, t) d\Gamma_t(x).$$

Имеем  $\gamma = \partial^2 \Phi / \partial t^2$ . Пусть

$$\rho_a(a, t) = \rho(\Phi(a, t), t) \det \mathbf{F}(a, t),$$

$$f_a(a, t) = f(\Phi(a, t), t) \det \mathbf{F}(a, t).$$

Замена переменных — это элементарная операция для объемных интегралов. Для поверхностного интеграла на  $\Sigma_t$  мы используем (3.9). Тогда приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{10}} \rho_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} da &= \int_{\Omega_{10}} f_a da + \int_{\Sigma_0} \Pi \cdot n_0 d\Gamma_0, \\ \int_{\Omega_{10}} \rho_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} da &= \int_{\Omega_{10}} f_a da + \int_{\Omega_0} \text{Div}_a \Pi da, \end{aligned}$$

где  $\text{Div}_a \Pi$  — вектор,  $i$ -я компонента которого равна  $\sum_{j=1}^3 \partial \Pi_{ij} / \partial a_j$  и  $\Omega_{10} \subset \Omega_0$ . Следовательно, аналогом соотношения (3.3) в случае лагранжевой переменной является следующее соотношение:

$$\rho_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = f_a + \text{Div}_a \Pi \quad \text{в } \Omega_0. \quad (3.12)$$

В статике аналог уравнения (3.5) принимает вид

$$f_a + \text{Div}_a \Pi = 0 \quad \text{в } \Omega_0. \quad (3.13)$$

Нет необходимости выписывать аналог уравнения (3.4), поскольку ускорение весьма просто выражается в лагранжевых переменных.

Мы можем также выписать фундаментальный закон динамики для  $S_1$ , используя равенство количеств движения, и опять получим (3.11); оставим эти выкладки в качестве упражнения для читателя.

Уравнения (3.12) и (3.13) представляют фундаментальный закон в его наиболее общей форме для непрерывной среды в лагранжевых переменных.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть тензор напряжений для сплошной среды задан в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda + \mu\delta_{ij}, \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0.$$

Вычислить нормальные напряжения и главные направления.

2. Выполнить упражнение 1 для

$$\sigma = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

3. Показать, что фундаментальный закон равновесия для сплошной среды с тензором напряжений  $\sigma$  может быть записан в виде

$$\int_A f_{ext} \cdot \theta dx + \int_{\partial A} (\sigma n) \cdot \theta d\Sigma = 0$$

для любой подобласти  $A \subset \Omega$  и любого векторного поля  $\theta(M) = u + v \wedge \overrightarrow{OM}$ ,  $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ , где  $f_{ext}$  — внешние силы.

4. Пусть тензор напряжений  $\sigma$  задан в произвольном базисе. Вывести соотношения на компоненты  $\sigma_{ij}$ , такие, что тензор  $\sigma$  станет тензором одноосных напряжений.

5. Рассмотрим тело, имеющее форму цилиндра с осью  $(0; \vec{e}_3)$  и с радиусом  $a$ , ограниченное плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$ . Это тело находится в состоянии равновесия под действием сил, приложенных только к основаниям  $S_0(x_3 = 0)$  и  $S_1(x_3 = h)$ .

а) Пусть в каждой точке цилиндра тензор напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = k(7x_1^2 + x_2^2 - c_1 a^2), \\ \sigma_{23}^{(1)} = 6kx_1x_2, \quad \sigma_{33}^{(1)} = c_2 k(h - x_3)x_1, \end{aligned}$$

где  $k$ ,  $c_1$  и  $c_2$  — константы.

- (i) Найти размерность  $k$ . Вычислить константы  $c_1$  и  $c_2$ .
- (ii) Описать объемные силы, действующие на цилиндр.

б) Пусть в каждой точке цилиндра тензор напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(2)} = \sigma_{13}^{(1)} + c_3 x_2, \\ \sigma_{23}^{(2)} = \sigma_{23}^{(1)} + c_4 x_1, \quad \sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{33}^{(1)}, \end{aligned}$$

где  $c_3$  и  $c_4$  — константы. Описать объемные силы, действующие на цилиндр.

## РЕАЛЬНАЯ И ВИРТУАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ

Цель этой главы — ввести понятия реальной и виртуальной мощности, развиваемой силами, а также рассмотреть некоторые приложения. Сначала мы рассмотрим весьма простые случаи материальной точки и системы материальных точек (разд. 4.1). Затем обратимся к более сложным случаям (разд. 4.2), прежде чем определим и изучим мощность внутренних сил в случае сплошной среды (разд. 4.3). Такой подход в конечном итоге приведет нас к теореме о виртуальной мощности и к теореме о кинетической энергии.

С точки зрения механики, эта глава не дает много нового материала, но позволяет по-другому провести полезный анализ уже введенных концепций и понятий.

### 4.1. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Прежде чем мы рассмотрим случай системы материальных точек, начнем наше обсуждение со случая одной материальной точки. Все, что мы будем говорить об одной точке или даже о системе точек, носит простой и местами даже наивный, но поучительный характер.

#### Случай одной материальной точки

**Определение 4.1.** Пусть к материальной точке  $M$  приложена сила  $F$ . Зададим систему отсчета. Тогда реальная мощность, развиваемая силой  $F$ , выражается скалярным произведением  $F \cdot U$ , где  $U$  — скорость точки  $M$  в момент времени  $t$  в заданной системе отсчета.

Если система отсчета является галилеевой и  $F$  — равнодействующая сила, приложенная к точке  $M$ , а  $m$  — масса точки  $M$ , то в силу фундаментального закона динамики имеем

$$m\gamma \cdot U = F \cdot U;$$

иными словами,

$$\frac{d}{dt} \frac{m|U|^2}{2} = F \cdot U. \quad (4.1)$$

**Теорема 4.1 (теорема о кинетической энергии).** В галилеевой системе отсчета производная по времени от кинетической энергии материальной точки

$M$  в каждый момент времени равна мощности, развиваемой равнодействующей силой, приложенной к  $M$ .

**Определение 4.2.** Пусть  $V$  — вектор в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , называемый виртуальной скоростью точки  $M$ . Тогда виртуальная мощность, развиваемая силой  $F$  в момент времени  $t$  для этой скорости  $V$ , выражается скалярным произведением  $F \cdot V$ .

Легко видеть, что соотношение  $m\gamma = F$  выполнено тогда и только тогда, когда  $m\gamma \cdot V = F \cdot V$  для всех  $V \in \mathbb{R}^3$ . Таким образом, фундаментальный закон динамики эквивалентен следующему принципу:

В галилеевой системе отсчета виртуальная мощность внешних сил, приложенных к материальной точке  $M$ , в каждый момент времени равна виртуальной мощности ускорения точки  $M$ , которая определяется так же, как и виртуальная мощность силы.

### Случай системы материальных точек $M_1, \dots, M_n$

Пусть дана система  $n$  материальных точек  $M_1, \dots, M_n$ . Применяя фундаментальный закон динамики к этой системе, получим следующие уравнения:

$$m_i \gamma_i = F_i + \sum_{j=1}^n F_{ji},$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad F_{ij} \wedge M_i M_j = 0.$$

Здесь предполагается, что  $F_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$ .

**Определение 4.3.** Пусть  $S$  — система  $n$  материальных точек  $M_1, \dots, M_n$  и пусть  $V_1, \dots, V_n$  — векторы из пространства  $\mathbb{R}^3$ , называемые виртуальными скоростями точек  $M_1, \dots, M_n$ . Виртуальная мощность всех сил, приложенных к системе  $S$ , для этого поля виртуальных скоростей имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left\{ F_i \cdot V_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ji} \cdot V_i \right\} \quad \left( = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i V_i \right).$$

**Определение 4.4.** Говорят, что поле виртуальных скоростей  $V_i, i = 1, \dots, n$  придает жесткость системе  $S$  тогда и только тогда, когда это поле является спиральным векторным полем (подобно полю скоростей в случае твердого тела).

**Теорема 4.2 (теорема о виртуальной мощности в случае  $n$  точек).** В галилеевой системе координат и в случае придающего жесткость поля виртуальных скоростей виртуальная мощность внешних сил, приложенных к системе из  $n$  материальных точек, в каждый момент времени равна виртуальной мощности ускорения.

Сейчас мы приведем доказательство теоремы о виртуальной мощности и сделаем несколько важных примечаний.

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i \cdot V_i &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ji} \cdot V_i = \\ &= \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (F_{ji} \cdot V_i + F_{ij} \cdot V_j). \end{aligned}$$

Из равенства  $F_{ij} = -F_{ji}$  следует, что

$$F_{ji} \cdot V_i + F_{ij} \cdot V_j = F_{ji} \cdot (V_i - V_j) = F_{ji} \cdot (\omega \wedge M_i M_j)$$

для некоторого вектора  $\omega$ , поскольку поле виртуальных скоростей придает жесткость системе. Следовательно,

$$F_{ji} \cdot V_i + F_{ij} \cdot V_j = (M_i M_j \wedge F_{ji}) \cdot \omega = 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n m_i \gamma_i \cdot V_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i.$$

Теорема доказана.

*Примечание 4.1.*

1. Как и в случае одной материальной точки, в случае  $n$  материальных точек теорема о виртуальной мощности эквивалентна фундаментальному закону динамики. Получим этот результат двумя способами. Первый из них состоит в применении этой теоремы к каждой точке  $M_i$ , поскольку теорема применима к любой системе материальных точек. Таким образом, получим  $m_i \gamma_i \cdot V = F_i \cdot V + \sum_{j \neq i} F_{ji} \cdot V$  для каждого вектора  $V$  и, следовательно, приходим к фундаментальному закону для системы  $S$  материальных точек. Второй способ не такой легкий, но представляет интерес. Применим теорему о виртуальной мощности к системе  $S$ . Известно, что

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i \cdot V_i$$

для каждого поля виртуальных скоростей, которое придает жесткость системе  $S$ . Сначала положим  $V_i = V$  для всех  $i$ , что дает равенство  $\sum_{i=1}^n m_i \gamma_i = \sum_{i=1}^n F_i$  (теорема о сохранении количества движения). Пусть теперь  $V_i = \omega \wedge OM_i$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot (\omega \wedge OM_i) = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i \cdot (\omega \wedge OM_i).$$

Таким образом,

$$\omega \cdot \sum_{i=1}^n OM_i \wedge F_i = \omega \cdot \sum_{i=1}^n OM_i \wedge m_i \gamma_i$$

для любого  $\omega$ , откуда

$$\sum_{i=1}^n OM_i \wedge F_i = \sum_{i=1}^n OM_i \wedge m_i \gamma_i,$$

что означает сохранение момента количества движения в точке  $O$ .

2. Если поле виртуальных скоростей не придает жесткость системе  $S$ , то

$$\sum_{i=1}^n m_i \gamma_i \cdot V_i = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot V_i$$

есть виртуальная мощность внешних сил, приложенных к  $S$ , и

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ji} \cdot V_i$$

есть виртуальная мощность внутренних сил, приложенных к  $S$ .

3. Виртуальная мощность внутренних сил системы из  $n$  материальных точек не зависит от системы отсчета (это замечание важно, например, в термодинамике). Чтобы пояснить это замечание, нам необходим результат гл. 2, разд. 2.5, в котором проводится сравнение скоростей и ускорений для двух различных систем отсчета. Более того, нам необходимо описать и сравнить поля виртуальных скоростей относительно двух различных систем отсчета. Здесь мы опустим требуемое доказательство. Важно также заметить, что в случае поля виртуальных скоростей, придающего жесткость материальной системе, виртуальная мощность внутренних сил обращается в нуль (пока это было доказано только для системы материальных точек).

## 4.2. МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА: СКОРОСТИ, ПРИДАЮЩИЕ ЖЕСТКОСТЬ

Пусть  $S$  — материальная система, занимающая область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ ,  $t \in I$ .

**Определение 4.5.** Поле виртуальных скоростей системы  $S$  в момент времени  $t$  представляет собой векторное поле, определенное на  $\Omega_t : \{V(x), x \in \Omega_t\}$ .



*Примечание 4.2.*

1. Пока мы не делаем никаких предположений относительно регулярности поля  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$ . На практике мы всегда выбираем поля скоростей, которые обладают определенными свойствами регулярности.

2. Легко видеть, что пространство полей виртуальных скоростей может быть снабжено структурой векторного пространства.

**Определение 4.6.** В момент времени  $t$  поле виртуальных скоростей  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$  придает жесткость системе  $S$ , если это поле является спиральным векторным полем  $[\mathcal{V}]$ .

*Примечание 4.3.* Пространство виртуальных скоростей, придающее жесткость системе  $S$  в момент времени  $t$ , может быть снабжено структурой векторного пространства.

**Определение 4.7.** Рассмотрим две материальные системы  $S$  и  $S'$ . Силы, действующие на  $S$  со стороны  $S'$ , представляются векторной мерой  $d\varphi_t(x)$ , сосредоточенной в области  $\Omega_t$ , которую занимает система  $S$  в момент времени  $t$ . Определим виртуальную мощность сил, действующих на  $S$  со стороны  $S'$ , для поля виртуальных скоростей  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$ , как величину

$$\int_{\Omega_t} V(x) d\varphi_t(x).$$

Легко проверить, что виртуальная мощность аддитивна относительно  $S$  и  $S'$  (предполагается, что  $S \cap S' = \emptyset$ ) и что эта мощность линейно зависит от полей виртуальных скоростей.

Легко также видеть, что если поле виртуальных скоростей придает жесткость материальной системе, то виртуальная мощность сил, действующих на  $S$  со стороны  $S'$ , представляется скалярным произведением

$$[\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{V}],$$

где  $[\mathcal{F}]$  — спиральное векторное поле, связанное с силами, действующими на  $S$  со стороны  $S'$  (см. гл. 2, разд. 2.2).

**Определение 4.8.** Виртуальная мощность ускорений представляется в виде

$$\int_{\Omega_t} \gamma(x, t) \cdot V(x) d\mu_t(x),$$

где  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$  — поле виртуальных скоростей.

*Примечание 4.4.* Если поле виртуальных скоростей придает жесткость системе  $S$ , то мощность ускорений выражается скалярным произведением двух спиральных векторных полей, одно из которых связано с ускорениями, а другое — с полем виртуальных скоростей.

Теперь сразу получаем следующий результат.

**Теорема 4.3 (теорема о виртуальной мощности).** Пусть заданы галилеева система отсчета, некоторая материальная система  $S$  и поле виртуальных скоростей, которое придает жесткость системе  $S$ . Тогда в каждый момент времени  $t$  виртуальная мощность внешних сил, действующих на  $S$ , равна виртуальной мощности ускорений системы  $S$ :

$$[\mathcal{A}] \cdot [\mathcal{V}] = [\mathcal{F}_e] \cdot [\mathcal{V}].$$

*Примечание 4.5.* В случае галилеевой системы отсчета легко показать, что теорема о виртуальной мощности эквивалентна фундаментальному закону динамики. Доказательство этого факта сводится к простым преобразованиям спиральных векторных полей.

**Поля виртуальных скоростей, придающие жесткость разбиению материальной системы**

Следующий уровень обобщения достигается после введения нижеследующих определений. Рассмотрим разбиение материальной системы  $S$  на подсистемы  $S_1, \dots, S_N$ , такие, что  $S_i \neq \emptyset$  для любого  $i$ , а  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , если  $i \neq j$  и  $\bigcup_{i=1}^N S_i = S$ .

**Определение 4.9.** Пусть  $\Omega_t$  — область, которую занимает система  $S$  в момент времени  $t$ . Тогда поле виртуальных скоростей  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$  придает жесткость разбиению  $\{S_i\}_{i=1, \dots, N}$  системы  $S$  тогда и только тогда, когда поле  $V|_{S_i}$  придает жесткость подсистеме  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Пусть  $[\mathcal{F}_i]$  — спиральное векторное поле для сил, действующих на  $S_i$  со стороны дополнения к  $S$ , и  $[\mathcal{F}_{ji}]$  — спиральное векторное поле для сил, действующих на  $S_i$  со стороны  $S_j$ . Пусть  $\mathcal{A}_i$  — спиральное векторное поле, связанное с ускорениями подсистемы  $S_i$ . Тогда, применяя теорему о виртуальной мощности к подсистеме  $S_i$ , получим

$$[\mathcal{A}_i] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}] = [\mathcal{F}_i] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}] + \sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{F}_{ji}] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}],$$

где  $[\mathcal{V}^{(i)}]$  — спиральное векторное поле, связанное с полем  $V|_{S_i}$ . Следовательно,

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^N [\mathcal{F}_i] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{F}_{ji}] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}] = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующий результат.

**Теорема 4.4 (теорема о виртуальной мощности в случае придания жесткости разбиению материальной системы).** Пусть  $S$  — материальная система,  $\{S_i, i = 1, \dots, N\}$  — разбиение системы  $S$  и  $V$  — поле виртуальных скоростей на  $S$  в момент времени  $t$ , придающее жесткость разбиению. Тогда виртуальная мощность  $\mathcal{P}_a$  галилеевых ускорений системы  $S$  равна

сумме виртуальной мощности внешних сил, действующих на  $S$ , и виртуальной мощности внутренних сил, действующих на  $S$  и рассматриваемых здесь как действующие на  $S_j$  со стороны  $S_i$ :

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N [\mathcal{F}_i] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}], \quad \mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{F}_{ji}] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}]. \tag{4.4}$$

В (4.4) предполагается, что  $[\mathcal{F}_{ii}] = 0$  и  $[\mathcal{V}^{(i)}]$  — спиральное векторное поле, соответствующее полю скоростей на  $S_i$ .

*Примечание 4.6.* Вообще говоря, поле реальных скоростей не в состоянии придать жесткость системе  $S$ . Следовательно, реальная мощность внутренних сил не обращается в нуль. Такая реальная мощность (или виртуальная мощность для поля скоростей, которое не придает жесткость) рассматривается в разд. 4.3 на основе результатов гл. 3 (в частности, понятия тензора напряжений). После этого, достигнув конечной цели данной главы, мы дадим более общую формулировку теоремы 4.4.

### 4.3. ВИРТУАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Выше мы показали, что соотношения (4.3) и (4.4) задают виртуальную мощность внутренних сил системы  $S$  для поля виртуальных скоростей  $V$ , которое придает жесткость произвольному конечному разбиению  $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$  системы  $S$ ; здесь  $[\mathcal{V}^{(i)}]$  — спиральное векторное поле, соответствующее полю скоростей на  $S_i$ .

Чтобы обобщить соотношения (4.3) и (4.4), определим и  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  для более общих полей виртуальных скоростей. Для этого получим новое выражение для правой части соотношения (4.3). В свою очередь, это новое выражение естественным образом приводит к новому определению для  $\mathcal{P}_{\text{int}}$ .

Рассмотрим прежнее разбиение и предположим, что  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega = \emptyset$ . Здесь подсистема  $S_i$  занимает область  $\Omega_i$ , а  $S$  занимает область  $\Omega$ , так что  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  — разбиение области  $\Omega$ . Тогда имеем

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{F}_{ji}] \cdot [\mathcal{V}^{(i)}] = \int_{\Omega_i} C(x) \cdot V^{(i)}(x) dx,$$

где  $C(x)$  — вектор с компонентами  $\sigma_{\ell k, k}$ . Чтобы доказать выписанное равенство, рассмотрим сначала его правую часть. Поскольку  $V^{(i)}(x) = V^{(i)}(x_0) + (x_0 - x) \wedge \omega^{(i)}$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_i} C(x) \cdot V^{(i)}(x) dx &= \\
 &= \int_{\Omega_i} C(x) \cdot \left[ V^{(i)}(x_0) + (x_0 - x) \wedge \omega^{(i)} \right] dx = \\
 &= V_\ell^{(i)}(x_0) \cdot \int_{\Omega_i} \sigma_{\ell k, k}(x) dx + \omega^{(i)} \cdot \left( \int_{\Omega_i} (x - x_0) \wedge C(x) dx \right) = \\
 &= (\text{для простоты положим } x_0 = 0) = \\
 &= V_\ell^{(i)}(0) \cdot \int_{\partial\Omega_i} \sigma_{\ell k} \cdot n_k d\Gamma + \omega^{(i)} \cdot \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} -\sigma_{2k, k} x_3 & +\sigma_{3k, k} x_2 \\ -\sigma_{1k, k} x_3 & +\sigma_{3k, k} x_1 \\ -\sigma_{1k, k} x_2 & +\sigma_{2k, k} x_1 \end{pmatrix} dx.
 \end{aligned}$$

Имеет место равенство

$$-\sigma_{2k, k} x_3 + \sigma_{3k, k} x_2 = -(\sigma_{2k} x_3)_{,k} + \sigma_{2k} \delta_{3k} + (\sigma_{3k} x_2)_{,k} - \sigma_{3k} \delta_{2k}.$$

Поскольку  $\sigma_{2k} \delta_{3k} - \sigma_{3k} \delta_{2k} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$ , проведя те же рассуждения относительно двух других компонент вектора  $C$ , получим

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_i} C(x) \cdot V^{(i)}(x) dx &= \\
 &= V^{(i)}(0) \cdot \int_{\partial\Omega_i} T(x, n) d\Gamma + \omega^{(i)} \cdot \int_{\partial\Omega_i} \begin{pmatrix} -\sigma_{2k} x_3 n_k & +\sigma_{3k} x_2 n_k \\ -\sigma_{1k} x_3 n_k & +\sigma_{3k} x_1 n_k \\ -\sigma_{1k} x_2 n_k & +\sigma_{2k} x_1 n_k \end{pmatrix} d\Gamma = \\
 &= V^{(i)}(0) \cdot \int_{\partial\Omega_i} T(x, n) d\Gamma + \omega^{(i)} \cdot \int_{\partial\Omega_i} x \wedge T(x, n) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Выписанное соотношение представляет собой скалярное произведение поля  $[V^{(i)}]$  на спиральное векторное поле, связанное с  $\sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{F}_{ji}]$ , что соответствует действиям на  $S_i$  со стороны  $S \setminus S_i$ . Легко видеть, что это соотношение — левая часть доказываемого равенства.

Пусть теперь  $\Omega_i$  имеет общую границу  $\Sigma'_i$  с  $\partial\Omega$ , тогда  $\partial\Omega_i = \Sigma'_i \cup \Sigma_i$ , где  $\Sigma_i = \cup_{j \neq i} (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N [\mathcal{F}_{ji}] \cdot [V^{(i)}] &= \\
 &= (\text{виртуальная мощность сил, действующих на } S_i \text{ со стороны } S \setminus S_i) = \\
 &= \int_{\Sigma_i} T(x, n) \cdot V^{(i)}(x_0) d\Gamma + \omega^{(i)} \cdot \int_{\Sigma_i} (x - x_0) \wedge T(x, n) d\Gamma = \\
 &= \int_{\Sigma_i} T(x, n) \cdot \left[ V^{(i)}(x_0) + \omega^{(i)} \wedge (x - x_0) \right] d\Gamma = \\
 &= \int_{\Sigma_i} T(x, n) \cdot V(x) d\Gamma = \\
 &= \int_{\partial\Omega_i} T(x, n) \cdot V(x) d\Gamma - \int_{\Sigma'_i} T(x, n) \cdot V(x) d\Gamma = \\
 &= \int_{\Omega_i} C(x) \cdot V(x) dx - \int_{\Sigma'_i} T(x, n) \cdot V(x) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Суммируя выписанные соотношения по  $i$ , приходим к следующей теореме.

**Теорема 4.5.** *Виртуальная мощность внутренних сил материальной системы  $S$  для виртуального поля скоростей  $V$ , которое придает жесткость конечному разбиению системы  $S$ , в момент времени  $t$  имеет вид*

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \sigma_{ij,j}(x,t) V_i(x) dx - \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij}(x,t) n_j(x) V_i(x) d\Gamma. \quad (4.5)$$

Поскольку уравнение (4.5) не зависит от заданного разбиения (каким бы мелким оно ни было), это выражение мы примем как определение виртуальной мощности внутренних сил для любого поля виртуальных скоростей, определенного на  $\Omega_t$  и достаточно регулярного, чтобы выписанное выражение имело смысл.

Дадим другое выражение для  $\mathcal{P}_{\text{int}}$ . Пусть  $V$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^1$  относительно  $x$  на  $\Omega_t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \int_{\Omega_t} \sigma_{ij,j} V_i dx - \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} n_j V_i d\Gamma = \\ &= (\text{согласно формуле Стокса}) = \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} V_i n_j d\Gamma - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} V_{i,j} dx - \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} n_j V_i d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \frac{V_{i,j} + V_{j,i}}{2} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(V) dx, \quad (4.6)$$

где  $\varepsilon_{ij}(V) = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i})$ .

**Определение 4.10.** *Виртуальная мощность внутренних сил системы  $S$  для поля виртуальных скоростей  $V = V(x)$ , определенного на  $\Omega_t$ , в момент времени  $t$  выражается соотношениями (4.5) или (4.6).*

### Виртуальная мощность системы

Теперь сформулируем теорему о виртуальной мощности для общего поля виртуальных скоростей, которое не обязательно придает жесткость разбиению системы  $S$ .

Предположим, например, что внешние силы, действующие на  $S$ , вызваны

- объемным распределением сил с объемной плотностью  $f$  и
- поверхностным распределением сил с поверхностной плотностью  $T(x, n) = \sigma \cdot n = F$ .

Тогда мы можем доказать следующий результат.

**Теорема 4.6 (общая теорема о виртуальной мощности).** Пусть  $S$  — материальная система. В каждый момент времени  $t$  виртуальная мощность ускорения системы  $S$  относительно галилеевой системы отсчета представляет собой сумму виртуальной мощности внешних сил, действующих на  $S$ , и внутренних сил, действующих на  $S$ :

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}. \tag{4.7}$$

*Доказательство.* Имеем (см. гл. 3), что

$$\rho\gamma = f + C,$$

где  $C$  — вектор с компонентами  $\sigma_{ij,j}$ . Следовательно, виртуальная мощность ускорения имеет вид

$$\int_{\Omega_t} \rho\gamma \cdot V \, dx = \int_{\Omega_t} C \cdot V \, dx + \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx.$$

Из (4.5) следует, что

$$\int_{\Omega_t} C \cdot V \, dx + \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx = \mathcal{P}_{\text{int}} + \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} n_j V_i \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx,$$

а сумма  $\int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} n_j V_i \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx$  равна мощности  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  внешних сил, приложенных к  $S$ , откуда имеем равенство

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_t} F \cdot V \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx,$$

поскольку  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  на  $\Gamma_t$ . Теорема доказана.

*Примечание 4.7* (вариационные формулировки). Из (4.6) и (4.7) заключаем, что

$$\int_{\Omega_t} \rho\gamma \cdot V \, dx + \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(V) \, dx = \int_{\Omega_t} f \cdot V \, dx + \int_{\partial\Omega_t} F \cdot V \, d\Gamma \tag{4.8}$$

для любого поля виртуальных скоростей, определенного на  $\Omega_t$ , или, что то же самое, для любого векторного поля  $\{V(x), x \in \Omega_t\}$ . Выписанное соотношение похоже на вариационные формулировки, используемые в математическом анализе и в численном анализе для задач, возникающих в механике. Эти вариационные формулировки даются выбором конкретных векторных полей  $V$  и использованием законов зависимости напряжений от деформаций, которые мы рассмотрим в гл. 5. В разд. 15.5 гл. 15 мы вернемся к вариационным формулировкам.

*Примечание 4.8.* В данной книге (за исключением гл. 11 и 12) мы неявно предполагаем, что внутренние силы системы являются силами сцепления, введенными в гл. 3. При рассмотрении других физических или химических явлений могут быть приняты во внимание силы другого характера: например, внутренние электромагнитные силы в магнитной гидродинамике (некоторые понятия введены в гл. 11) или же внутренние источники или стоки тепла вследствие химических реакций (см. обсуждение явлений горения в гл. 12).

#### 4.4. РЕАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ: ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Реальная мощность сил или ускорений может быть определена так же, как и виртуальная мощность заменой  $V(x)$  на  $U(x, t)$  в каждый момент времени  $t$ .

Введя это понятие, сформулируем следующую теорему.

**Теорема 4.7 (теорема о кинетической энергии).** Производная по времени от кинетической энергии материальной системы в галилеевой системе отсчета в каждый момент времени равна сумме реальных мощностей внешних и внутренних сил, приложенных к системе  $S$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что реальная мощность ускорений равна производной по времени от кинетической энергии. Используя лагранжево представление движения  $x = \Phi(a, t)$ , можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} |U(x, t)|^2 d\mu_t(x) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t) \right|^2 d\mu_0(a) = \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a, t) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t) d\mu_0(a) = \int_{\Omega_t} \gamma(x, t) \cdot V(x, t) d\mu_t(x), \end{aligned}$$

что доказывает теорему.

*Примечание 4.9.* В гл. 2 (см. (2.6) и (2.14)) мы сравнили скорости относительно двух разных систем отсчета<sup>1)</sup>. Из этого сравнения следует, что реальная мощность внутренних сил не зависит от системы отсчета и является физической (термодинамической) величиной, присущей этим силам<sup>2)</sup>.

#### УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим три горизонтальные линейные пружины  $R_1, R_2$  и  $R_3$ , которые соединены последовательно слева направо (массой пружин пренебрегаем). Левый конец  $A_0$  пружины  $R_1$  и правый конец  $A_3$  пружины  $R_3$  фиксированы. Материальные точки  $M_1$  и  $M_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены в концах  $A_1$  и  $A_2$  (общих для  $R_1$  и  $R_2$  и для  $R_2$  и  $R_3$ ) соответственно. Пружина  $R_i$  порождает силу, равную  $-k_i l_i$ , пропорциональную ее удлинению  $l_i$  ( $k_i > 0, l_i > 0$  или  $l_i < 0$ ).

<sup>1)</sup>См. также теорему 5.1 гл. 5.

<sup>2)</sup>См. также гл. 6, разд. 6.1.

а) Сформулировать теорему о виртуальной мощности для каждой из материальных точек  $M_1$  и  $M_2$ , а затем для системы, состоящей из этих двух материальных точек.

б) Рассмотреть то же упражнение для случая, когда пружины расположены вертикально.

**2.** (См. также упражнение 5 гл. 13). Тело, находящееся в движении, занимает область  $\Omega = \Omega_t$ . На части  $\Gamma_0$  границы области действуют неизвестные силы. На  $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  действует сила с поверхностной плотностью  $F = F(a, t)$ . Кроме того, на все тело действуют силы с объемной плотностью  $f = f(x, t)$ . Сформулировать теорему о виртуальной мощности (в терминах тензора напряжений Коши) для

а) случая произвольного поля виртуальных скоростей;

б) случая поля виртуальных скоростей, которое обращается в нуль на  $\partial\Omega$ .

**3.** См. упражнение 1, пункт в, гл. 7.



# ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИИ, ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В этой главе сначала мы введем кинематические величины, которые будут полезны при последующем изложении материала, особенно в разд. 5.3. Затем мы приступим к обсуждению определяющих соотношений, которые имеют совсем другое содержание и являются более физическими и весьма важными.

В механике определяющие соотношения выражают связь тензора напряжений с кинематическими величинами. Они зависят от физических свойств рассматриваемого материала в противоположность ранее полученным уравнениям, которые верны для всех материалов. Кроме того, эти соотношения принимают во внимание, например, различия в поведении жидкостей и твердых тел (резины, дерева, стали и др.).

Не претендуя на всесторонний охват, мы перечислим различные определяющие соотношения, имеющие разный характер для твердых тел и жидкостей. Некоторые материалы имеют память, а другие — нет; некоторые материалы ведут себя по-разному в зависимости от некоторых параметров, тогда как поведение других материалов одинаково для всех режимов. Изучение механического поведения материалов называют реологией. Мы также кратко опишем фундаментальные принципы, которым должны удовлетворять реологические законы.

## 5.1. СВОЙСТВА ДЕФОРМАЦИЙ

В гл. 1 мы ввели следующее деформационное отображение:

$$\Phi : a \in \Omega_0 \rightarrow x \in \Omega_t.$$

Кроме того, мы определим градиент от  $\Phi$  (при фиксированном  $t$ ):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_{ij}) = \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j} \right) = \nabla \Phi.$$

В этом разделе мы уточним ту роль, которую играет  $\mathbf{F} = \nabla \Phi$  в изучении локальных искажений расстояний и углов вблизи одной точки.

Будем предполагать, что время  $t$  фиксировано и  $\Phi(\cdot) = \Phi(\cdot, t, 0)$ . Случай переменного времени рассмотрим в разд. 5.2.

### Искажение расстояний

Пусть  $a$  и  $a'$  заданы в  $\Omega_0$ . Положим  $x = \Phi(a)$ ,  $x' = \Phi(a')$ ,  $a' = a + e'$ , где  $|e'| = \lambda$  — малая величина и  $x' = x + f'$  (см. рис. 5.1).

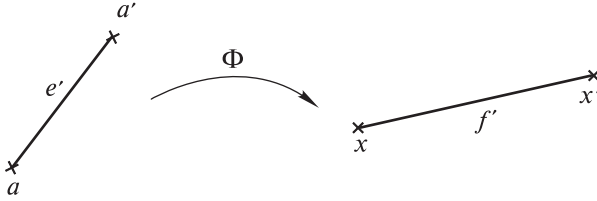


Рис. 5.1. Искажение расстояний

Тогда

$$x'_i = \Phi_i(a) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j}(a) \cdot (a'_j - a_j) + o(|a' - a|),$$

$$x' - x = \mathbf{F}e' + o(\lambda).$$

Полагая  $\bar{e}' = e'/\lambda$ , получим

$$\frac{|x' - x|}{\lambda} = |\mathbf{F}\bar{e}' + o(1)| \simeq |\mathbf{F}\bar{e}'|.$$

Тогда

$$\frac{|f'|^2}{|e'|^2} = \frac{|x' - x|^2}{\lambda^2} \simeq \bar{e}'^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \bar{e}' = \bar{e}'^T C \bar{e}',$$

где  $C = (C_{\alpha\beta}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ .

Следовательно, при малых  $\lambda$  имеет место следующее соотношение, верное с точностью  $o(\lambda)$ :

$$|x' - x| \simeq [(a' - a)^T C (a' - a)]^{1/2}.$$

### Искажение углов

Пусть  $a, a', a''$  принадлежит  $\Omega_0$ . Положим  $x = \Phi(a)$ ,  $x' = \Phi(a')$ ,  $x'' = \Phi(a'')$ ,  $e' = a' - a$ ,  $e'' = a'' - a$ ,  $f' = x' - x$  и  $f'' = x'' - x$  (см. рис. 5.2).

Пусть  $|e'| = |e''| = \lambda$ . Тогда, если  $\bar{e}' = e'/\lambda$ ,  $\bar{e}'' = e''/\lambda$ , то

$$x' - x = \mathbf{F}e' + o(\lambda) = \lambda \mathbf{F}\bar{e}' + o(\lambda),$$

$$x'' - x = \mathbf{F}e'' + o(\lambda) = \lambda \mathbf{F}\bar{e}'' + o(\lambda)$$

и

$$(x'' - x) \cdot (x' - x) = e''^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} e' + o(\lambda^2) = \lambda^2 \bar{e}''^T C \bar{e}' + o(\lambda^2).$$

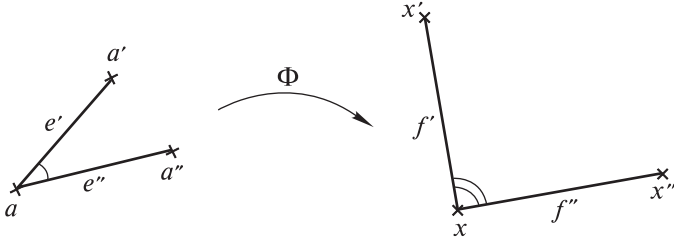


Рис. 5.2. Искажение углов

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{f'' \cdot f'}{|f''| \cdot |f'|} &= \cos[(x'' - x), (x' - x)] = \frac{\bar{e}''^T C \bar{e}'}{(\bar{e}''^T C \bar{e}'')^{1/2} (\bar{e}'^T C \bar{e}')^{1/2}} + o(1) \simeq \\ &\simeq \frac{e''^T C e'}{(e''^T C e'') \cdot (e'^T C e')} \end{aligned}$$

Если  $|e'| = \lambda(e') \neq |e''| = \lambda(e'')$ , то

$$\begin{aligned} \cos[(x'' - x), (x' - x)] &= \frac{(x'' - x) \cdot (x' - x)}{|x'' - x| \cdot |x' - x|} \simeq \\ &\simeq \frac{(a'' - a)^T C (a' - a)}{[(a'' - a)^T C (a'' - a)]^{1/2} [(a' - a)^T C (a' - a)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Таким образом, билинейная форма и квадратичная форма, связанные с  $C = C(x)$ , позволяют описать локальное искажение углов и расстояний вблизи точки  $x$  (т. е. определена метрика в касательном пространстве).

**Определение 5.1.** Линейный оператор  $C = C(x)$  называется правым тензором деформации Коши–Грина в точке  $x$ . Здесь этот тензор выражен в эйлеровых переменных.

Аналогично, тензор  $B = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  называется левым тензором деформации Коши–Грина.

*Примечание 5.1.* Пусть  $u$  – перемещение. Тогда  $\Phi(a) = u(a) + a$  и

$$C = (\nabla u^T + I) \cdot (\nabla u + I) = I + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u.$$

В случае жесткого перемещения

$$|x' - x| = |a' - a|, \quad \forall a, a';$$

имеем

$$(x'' - x) \cdot (x' - x) \equiv (a'' - a) \cdot (a' - a),$$

откуда

$$C = I.$$

Обратно, можно доказать, что если  $C = I$ , то перемещение является жестким. Это доказательство, состоящее в переходе от локальной информации вблизи одной точки к глобальной информации, требует привлечения методов и понятий дифференциальной геометрии, что выходит за рамки данной книги.

**Определение 5.2.** Тензор деформации (или тензор деформации Грина) имеет вид<sup>1)</sup>

$$X = \frac{1}{2}(C - I).$$

Из сказанного выше заключаем, что деформация является жесткой тогда и только тогда, когда  $X = 0$ .

Для изучения малых<sup>2)</sup> деформаций, которые возникают, например, в механике твердого тела, мы введем понятие линейризованного тензора деформаций.

**Определение 5.3.** Линейризованный тензор деформаций  $\varepsilon(u)$  имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad \text{или} \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T),$$

где  $u$  — перемещение и  $u_{\alpha,\beta}(a) = (\partial u_\alpha / \partial a_\beta)(a)$ .

*Примечание 5.2.* Имеем  $C = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ . Следовательно,  $C$  — положительно определенная матрица и может быть записана в форме

$$C = W^2,$$

где  $W$  — симметричная положительно определенная матрица. Заметим, что матрица  $C$  определенная, поскольку  $\det(\nabla \Phi) \neq 0$ . Тогда

$$(\mathbf{F}W^{-1})^T (\mathbf{F}W^{-1}) = W^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{F} W^{-1} = W^{-1} C W^{-1} = I,$$

поскольку  $C$  коммутирует с  $W$  и  $W^{-1}$ . Отсюда заключаем, что

$$R = \mathbf{F}W^{-1}$$

является ортогональной матрицей и  $\mathbf{F} = RW$ . Более того, матрица  $V = \mathbf{F}W^{-1} = RW^{-1}$  симметрична и положительно определена, поскольку

$$(RW^{-1} R^T x, x) = (W^{-1} x, R^T x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= RW = VR, \\ \mathbf{F}\mathbf{F}^T &= VRR^T V^T = V^2 = B. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>Некоторыми авторами этот тензор обозначается через  $\mathbf{E}$ .

<sup>2)</sup>Понятие бесконечно малой иногда используется в этом контексте. Нам представляется, что использование этого понятия сбивает с толку, а потому мы будем его избегать.

Таким образом,  $V$  — положительный квадратный корень из  $B = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ , тогда как  $W$  — положительный квадратный корень из  $C = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$  (конечно,  $B \neq C$ ). Более того,  $R$  — матрица поворота;  $W$  называется правым тензором растяжения, а  $R$  называется еще тензором поворота. Аналогично,  $V$  — левый тензор Коши—Грина, а  $V$  — левый тензор растяжения.

В случае малых возмущений имеем

$$\mathbf{F} = I + \nabla u = I + h,$$

где  $h = \nabla u = O(\eta)$ . Тогда,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2}(h + h^T) \text{ — симметричная часть от } h, \\ \varphi &= \frac{1}{2}(h - h^T) \text{ — антисимметричная часть от } h.\end{aligned}$$

С точностью до  $o(\eta)$  имеем

$$\begin{aligned}C &= \mathbf{F}^T\mathbf{F} = (I + h^T)(I + h) \simeq I + h^T + h = I + 2\varepsilon, \\ \mathbf{F} &= I + h = I + \varepsilon + \varphi \simeq (I + \varepsilon)(I + \varphi) \simeq (I + \varphi)(I + \varepsilon),\end{aligned}$$

где матрица  $I + \varepsilon$  положительно определена. Поскольку

$$(I + \varepsilon)^2 \simeq C + o(\eta), \quad (I + \varphi^T)(I + \varphi) \simeq I + o(\eta),$$

с точностью до  $o(\eta)$  получим

$$\begin{aligned}W &\simeq V \simeq I + \varepsilon, \\ R &\simeq I + \varphi.\end{aligned}$$

## 5.2. ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ

Теперь предположим, что время переменено. Пусть  $t_0$  — начальный момент времени. Положим

$$\begin{aligned}x &= \Phi(a, t, t_0), \\ v(a, t) [\equiv U(x, t)] &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a, t, t_0).\end{aligned}$$

В предыдущем разделе (см. рис. 5.2) мы видели, что с точностью  $o(1)$  выполнено

$$f''(t) \cdot f'(t) = C_{\alpha\beta}(a, t, t_0) e''_{\alpha} e'_{\beta}.$$

Наша цель — вычислить производную по времени  $(d/dt)[f''(t) \cdot f'(t)]$  в точке  $t = t_0$ . Другими словами, вычислить  $(\partial/\partial t)[C_{\alpha\beta}(a, t, t_0)]|_{t=t_0}$ , или  $(\partial/\partial t)[X_{\alpha\beta}(a, t, t_0)]|_{t=t_0}$ .

Рассматривая деформации между  $t_0$  и  $t > t_0$ , мы можем записать

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(C - I), \\ C &= \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке  $(a, t, t_0)$  имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - I) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}^T \mathbf{F}).$$

Поскольку  $\Phi(a, t, t_0) = I$ ,  $\nabla_a \Phi(a, t, t_0) = I$ ; следовательно, в точке  $(a, t, t_0)$  выполнено равенство

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F^T}{\partial t} \right).$$

Далее, поскольку  $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_a \Phi = \nabla_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla_a v$ , в точке  $(a, t, t_0)$ :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla_a v + \nabla_a v^T).$$

*Примечание 5.3.* В предыдущих рассуждениях через  $a$  обозначено положение в момент времени  $t_0$ , выбранный в качестве начала отсчета или начального времени. Ниже (особенно в определении 5.4)  $t_0$  — уже произвольный момент времени, и мы вернемся к эйлеровому представлению. Тогда  $a$  заменяется фактическим положением  $x$  и  $v$  заменяется на  $U(x, t_0)$ . В новых обозначениях частная производная  $\partial X / \partial t$  равна  $\frac{1}{2} (\nabla_x U + \nabla_x U^T)$  в момент времени  $t$ .<sup>1)</sup>

**Определение 5.4.** Тензор  $D = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T)$  называется тензором скоростей деформаций. Тензор  $\omega = \frac{1}{2} (\nabla U - \nabla U^T)$  называется тензором скоростей поворотов. Имеем

$$\nabla U = D + \omega.$$

**Теорема 5.1.** В момент времени  $t$  поле скоростей  $U = U(x, t)$  является полем скоростей движения твердого тела тогда и только тогда, когда в этот момент времени в каждой точке системы выполнено равенство  $D = 0$ .

*Доказательство.* Пусть движение жесткое. Тогда существует вектор  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , такой, что

$$U(x) = U(0) + \vec{\omega} \wedge x = U(0) + \begin{pmatrix} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\ \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\ \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1)</sup>Здесь мы записали  $\nabla_x U$  вместо  $\nabla U$ , чтобы подчеркнуть, что градиент берется относительно  $x$ .

Поэтому

$$\nabla U = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\omega = \nabla U \quad \text{и} \quad D = 0.$$

Обратно, пусть  $D = 0$  в каждой точке в заданный момент времени. Тогда для любых  $i, j, \ell$  имеем

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i}), \\ \omega_{ij,\ell} &= \frac{1}{2}(U_{i,j\ell} - U_{j,i\ell}) = \frac{1}{2}(U_{i,j\ell} + U_{\ell,ij} - U_{\ell,ij} - U_{j,\ell i}) = (D_{i\ell,j} - D_{j\ell,i}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, величина  $\omega_{ij}$  постоянна, значит величина  $\omega = \nabla U$  также постоянна. Отсюда заключаем, что

$$\nabla U(x, t) = \omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix},$$

где  $\omega_i$  — постоянная величина в пространстве. Интегрируя, получим

$$U(x) = U(0) + \vec{\omega} \wedge x,$$

где  $\vec{\omega}$  — вектор с компонентами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

*Примечание 5.4.* Вектор  $\vec{\omega}$  называется вектором скоростей поворотов. Не будет ошибкой перенести сказанное на вектор  $\text{curl } U$ , который, в частности, используется в механике жидкостей и газов. Действительно, легко видеть, что  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl } U$ .

*Примечание 5.5.* Полезно отметить аналогию между выражениями скоростей деформаций и выражениями линеаризованных деформаций при малых возмущениях. Более того, имеют место следующие соответствия:

скорость $U = U(x, t)$	$\longleftrightarrow$	перемещение $u = u(a, t)$
градиент скорости $\nabla U = \nabla_x U$	$\longleftrightarrow$	градиент перемещения $\nabla_a u$
тензор скоростей деформаций $D = D(U)$	$\longleftrightarrow$	линеаризованный тензор деформаций $\epsilon = \epsilon(u)$
тензор скоростей поворотов $\omega$	$\longleftrightarrow$	тензор поворотов $\omega$

### 5.3. ВВЕДЕНИЕ В РЕОЛОГИЮ: ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим определяющие соотношения, называемые также зависимостями напряжений от деформации, и опишем некоторые принципы реологии.

Простым подсчетом числа уравнений и входящих в них неизвестных мы приходим к выводу, что нам нужны дополнительные уравнения. Действительно, неизвестными в задачах механики являются

- перемещения в лагранжевом представлении или скорости в эйлеровом представлении,
- напряжения и
- кинетическое состояние (массовая плотность  $\rho$ ).

К этим неизвестным следует добавить внутреннюю энергию  $e$  (или температуру), которую мы еще не рассматривали и введем позже в гл. 6.

Фундаментальный закон динамики, являющийся универсальным законом для перемещений, дает три скалярных уравнения

$$\rho \gamma_i = f_i + \sigma_{ij,j}.$$

Таким образом, в эйлеровом представлении мы имеем 10 неизвестных: плотность  $\rho$  (одно неизвестное), вектор скорости  $U$  (три неизвестные компоненты) и тензор напряжений (шесть неизвестных компонент). Однако мы имеем только четыре уравнения: выписанные три скалярные уравнения и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0.$$

Формальным сравнением числа уравнений и неизвестных (оставляя в стороне вопросы существования и единственности решений этих уравнений) заключаем, что не хватает шести уравнений.

Чтобы восполнить этот недостаток, добавим некоторые уравнения, характерные для исследуемого материала. Таковыми уравнениями являются зависимости напряжений и деформаций, которые соотносят  $U$  (или  $u$ ) с  $\sigma$ .

Выбор и обоснование этих уравнений занимают важное место в механике сплошных сред, они основаны на термодинамике и составляют предмет реологии.

В следующем разделе мы кратко опишем некоторые фундаментальные принципы реологии, а далее представим некоторые важные зависимости напряжений от деформаций.

### Некоторые принципы реологии

В случае материалов зависимости между напряжениями и деформациями удовлетворяют следующим фундаментальным принципам.

1. Законы термодинамики и, в частности, первый и второй принципы термодинамики: сохранение энергии (см. гл. 6) и принцип энтропии.
2. Инвариантность этих законов относительно замены галилеевой системы отсчета (этот принцип еще называют принципом независимости материала от системы отсчета).
3. Пространственная инвариантность или инвариантная локализация: зависимость напряжений от деформаций не меняется от положения мате-



риала в пространстве (например, инвариантность при поступательном перемещении по  $x$ ).

4. Изотропия: зависимость напряжений от деформаций должна быть инвариантна (в том смысле, который будет уточнен) по отношению к замене ортонормальной системы координат (например, вращение).
5. Причинность или детерминизм: согласно этому принципу механики, знание истории материала вплоть до момента времени  $t$  дает знание о напряженном состоянии в момент времени  $t$ .

Последний принцип, однако, должен быть надлежаще адаптирован к случаю внутренних связей, таких, как закон несжимаемости  $\operatorname{div} u = 0$ <sup>1)</sup> для жидкостей.

Завершим этот раздел напоминанием некоторых основных сведений из линейной алгебры, полезных, в частности, для принципа изотропии. Рассмотрим линейный оператор в  $\mathbb{R}^3$ , представленный его матрицей  $A = (A_{ij})$  в ортонормальном базисе. Согласно теореме Кэли—Гамильтона, матрица  $A$  является корнем ее характеристического многочлена  $p = p(\lambda)$ , а именно:

$$p(A) = 0. \quad (5.1)$$

Запишем многочлен  $p(\lambda)$  в виде

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + A_I \lambda^2 - A_{II} \lambda + A_{III}, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_I &= \operatorname{tr} A = A_{ii}, \\ A_{II} &= \frac{1}{2} \{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\}, \\ A_{III} &= \det A. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эти три величины  $A_I, A_{II}, A_{III}$  инвариантны при замене ортонормальной системы координат (т. е. они зависят от линейного оператора, а не от выбранного базиса). Это единственные инварианты, присущие матрице  $A$ . Согласно теореме Кэли—Гамильтона, в частности, имеем

$$A^3 = A_I A^2 - A_{II} A + A_{III} I;$$

можно выразить след матрицы  $A^k$ ,  $k \geq 3$ , через  $A_I, A_{II}$  и  $A_{III}$ . Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — собственные значения матрицы  $A$  (т. е. корни многочлена  $p$ ). Тогда

$$A_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad A_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad A_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Зависимости напряжений и деформаций по-разному выражаются для жидкостей и твердых тел. Эти случаи мы рассмотрим последовательно.

### Основные примеры в механике жидкостей и газов

Здесь мы не ставим перед собой цель дать полное описание уравнений механики жидкостей и газов. Эта тема рассматривается во второй части книги.

<sup>1)</sup>Для более полного описания принципов реологии мы отсылаем читателя к книгам Germain (1973) и Truesdell (1977).

**Определение 5.5.** Для широкого класса жидкостей и газов зависимость между напряжениями и деформациями имеет форму

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (5.4)$$

где  $\varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$  — тензор скоростей деформаций (ранее вместо  $\varepsilon$  мы использовали обозначение  $D$ ).

*Примечание 5.6.* Мы могли бы рассмотреть другие зависимости, такие, как  $\sigma = f(\nabla U)$ ,  $\sigma = f(\varepsilon, \omega)$  или  $\sigma = f(U, \varepsilon, \omega)$ . Если  $f$  явно зависит от  $\omega$  (или  $U$ ), то можно доказать, что такие зависимости не удовлетворяют сформулированным принципам реологии. Для неоднородных сред мы могли бы рассматривать зависимости вида  $\sigma = f(\varepsilon, x)$ ; такое обобщение не вызывает никаких трудностей.

### Ньютоновские вязкие жидкости

Под ньютоновскими вязкими жидкостями понимаются жидкости, для которых зависимость напряжений от деформаций линейна. Иными словами, тензор напряжений  $\sigma$  является линейной функцией тензора скоростей деформаций  $D = \varepsilon(U)$ :

$$\sigma_{ij} = \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) + c \delta_{ij},$$

где  $U$  — скорость и  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости. По термодинамическим причинам коэффициент  $c$  выписывается в виде  $\lambda \operatorname{div} U - p$ , где  $p$  — давление. Тогда

$$\sigma_{ij} = \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) + \lambda(\operatorname{div} U)\delta_{ij} - p\delta_{ij}.$$

Согласно второму закону термодинамики, имеем  $\mu \geq 0$ . В гл. 7 из термодинамических соотношений мы получим, что  $2\mu + 3\lambda \geq 0$ .

Из этой зависимости напряжений от деформаций выводятся уравнения Навье–Стокса, которые описывают движение сжимаемой ньютоновской жидкости (такие, например, как вода и воздух):

$$\rho\gamma_i = \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) = f_i + \mu U_{i,jj} + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} U)_{,i} - p_{,i}.$$

Для однородных и несжимаемых жидкостей имеем  $\rho = \rho_0$  и  $\operatorname{div} U = 0$ ; тогда мы приходим к следующим уравнениям Навье–Стокса для такого рода жидкостей:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) &= f_i + \mu \Delta U_i - p_{,i}, \\ \operatorname{div} U &= 0. \end{aligned}$$

Как частные случаи, мы можем рассматривать стационарные уравнения Навье–Стокса или эволюционные и стационарные уравнения Навье–Стокса при условии малых движений путем подавления нелинейных членов (см. гл. 7 и далее).

Назовем жидкость идеальной, если  $\mu = \lambda = 0$ . В этом случае зависимость напряжений от деформаций принимает вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

т. е. тензор напряжений становится сферическим. Идеальная жидкость может быть как сжимаемой, так и несжимаемой. Если такая жидкость несжимаема и однородна, то  $\operatorname{div} U = 0$ . Если же идеальная жидкость сжимаема и баротропна (см. гл. 7), то  $p$  задается функцией от  $\rho$ ,  $p = g(\rho)$ . Последнее соотношение называют уравнением состояния. Такого рода зависимости, которые полезны во многих других случаях в механике жидкостей и газов, приводят к соотношению между  $p$ ,  $\rho$  и температурой  $T$  или внутренней энергией  $e$ . К этому вопросу мы вернемся в последующих главах.

### Ньютоновские жидкости

Тензор напряжений может быть нелинейной функцией от тензора скоростей деформации. В этом случае мы говорим, что жидкость является ньютоновской. Классическими примерами ньютоновских жидкостей служат моторное масло, расплавленный пластик, кровь или высыхающий бетон.

Даже когда эта модель недостаточно реалистична, мы обычно рассматриваем (по крайней мере в теоретических исследованиях) ньютоновские жидкости, для которых зависимость напряжений от деформаций имеет вид (5.4) и  $f$  — нелинейная функция (например, так называемые жидкости Рейнера—Ривлина).

В предположении изотропии можно показать, что при отсутствии внутренних связей наиболее общую форму зависимости (5.4) можно записать следующим образом:

$$\sigma = h_0(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})I + h_1(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})\varepsilon + h_2(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})\varepsilon^2,$$

где  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$  и  $\varepsilon_{III}$  — инварианты для  $D = \varepsilon(U)$  (см. (5.3)):

$$\begin{aligned}\varepsilon_I &= \operatorname{tr} \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \\ \varepsilon_{II} &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \varepsilon)^2 - \operatorname{tr} \varepsilon^2], \\ \varepsilon_{III} &= \det \varepsilon.\end{aligned}$$

Напомним, что, согласно (5.3), любая скалярная изотропная функция от  $\varepsilon$  является функцией от  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$  и  $\varepsilon_{III}$ .

Когда жидкость несжимаема и однородна, уравнения принимают вид

$$\operatorname{div} U = 0, \quad (5.5)$$

$$\sigma = -pI + h_1(\varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})\varepsilon + h_2(\varepsilon_{II}, \varepsilon_{III})\varepsilon^2, \quad (5.6)$$

где давление  $p$  не определено.

*Примечание 5.7.* В общем случае величины  $h_1$  и  $h_2$  зависят также от температуры (см. гл. 6).

### Основные примеры в механике твердого тела

В механике твердого тела рассматриваются материалы, для которых тензор Пиолы–Кирхгофа  $\Pi$  (см. разд. 3.5) является функцией от  $X, a$  и  $t$ , где  $a$  — переменная Лагранжа,  $u = u(a, t)$  — перемещение и функция  $X = X(u)$  определена в разд. 5.2:

$$\Pi = f(X, a, t); \quad (5.7)$$

здесь  $X_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,k}u_{k,j})$  и  $u_{i,j} = (\partial u_i / \partial a_j)(a, t)$ .

Мы ограничимся случаем малых перемещений, когда вектор  $\mathbf{F}$  в первом приближении тождественный, а тензор  $\Pi(a, t)$  является тензором  $\sigma(\Phi(a, t), t)$ , (см. принцип линеаризации в гл. 13, разд. 13.2). Тогда (5.6) принимает вид

$$\sigma = f(\varepsilon, a, t), \quad (5.8)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  и  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})^1$ .

*Примечание 5.8.* Для линеаризованного случая, как и в примечании 5.6, можно было бы представить зависимость напряжений от деформаций в виде  $\sigma = f(u, \nabla_a u)$ . Однако можно показать, что такие зависимости, в которых  $f$  явно зависит от  $u$  (или от  $\omega$ , или от  $u$  и  $\omega$ ), не согласуются с общими принципами реологии, сформулированными ранее.

### Упругие среды

а) *Линейная, или классическая, упругость*

В предположении о малых деформациях для линейной упругой среды зависимость напряжений от деформаций имеет вид

$$\sigma = f(\varepsilon),$$

где  $f$  — линейная функция и  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  — линеаризованный тензор деформаций. Более точно, эта зависимость имеет форму

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  и  $u = u(a, t)$  — перемещение, а  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе. Из второго закона термодинамики следует, что  $\mu \geq 0$  и  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ .

б) *Нелинейная упругость*

Рассмотрим поведение упругой среды в предположении больших деформаций. Классическим примером такого рода материала служит резина.

В каждый момент времени зависимость напряжений от деформаций имеет вид

$$\sigma = \mathcal{G}(\mathbf{F}),$$

<sup>1)</sup> В гл. 13 поясняется, почему пространственная переменная обозначается через  $x$  вместо  $a$ .

где функция  $\mathcal{G}$  характеризует материал и зависит от пространственной переменной  $x$  в неоднородном материале. Более того,  $F = RW$ ; можно показать, что для другой функции  $\mathcal{G}$  имеет место зависимость

$$\sigma = R\mathcal{G}(W)R^T,$$

которую можно записать как

$$\sigma = R\mathcal{H}(C)R^T,$$

где  $C = F^T F = W^2$ .

Дополнительные термодинамические рассуждения приводят, в предположении о больших деформациях, к требованию, что функция в (5.7) должна быть дифференциалом Фреше (относительно  $X$  или  $C$ ) от скалярной функции  $g = g(X, a, t)$ . В случае малых перемещений функция  $f$  в (5.8) является дифференциалом Фреше (относительно  $\varepsilon$ ) от скалярной функции  $g = g(\varepsilon, a, t)$ . В случае линейной упругости мы просто сводим функцию  $g$  к ее квадратичной части относительно  $\varepsilon$  (разложение Тейлора при малом значении  $\varepsilon$ ). Функция  $g$  связана с энергией; эта функция появляется снова в гл. 15 (линейная упругость) и в гл. 16 (нелинейная упругость) под новым обозначением  $w$ .

*Примечание 5.9.* В гл. 16 мы кратко остановимся на нескольких задачах нелинейной упругости в случае малых деформаций. Случай же больших деформаций порождает значительные трудности, когда к механическим проблемам добавляются геометрические.

#### в) Гипоупругость

В этом случае производная от  $\sigma$ , обозначаемая через  $D_J\sigma_{ij}$ , является линейной функцией от  $D$  с коэффициентами, зависящими от  $\sigma$ . Для таких материалов зависимость напряжений от деформаций принимает вид

$$D_J\sigma_{ij} = C_{ijkl}D_{kl},$$

где  $C_{ijkl}$  зависит от  $\sigma$  и  $D_J\sigma_{ij}$  определяется как

$$D_J\sigma_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} - \omega_{ik}\sigma_{kj} - \omega_{jk}\sigma_{ik}.$$

### Вязкоупругие материалы (материалы с памятью)

В этом случае зависимость напряжений от деформаций содержит функции от производных по времени. В классической теории вязкоупругости положим

$$\begin{aligned} s &= \text{tr } \sigma = \sigma_{ii}, \\ e &= \text{tr } \varepsilon = \varepsilon_{ii} = \text{div } u, \end{aligned}$$

где  $u = u(x, t)$  — перемещение;<sup>1)</sup> тогда

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{s}{3} \delta_{ij}, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \frac{e}{3} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>Здесь также пространственная лагранжева переменная обозначается через  $x$  вместо  $a$ .

Зависимость напряжений от деформаций принимает вид

$$s(x, t) = 3\kappa(0)e(x, t) + 3 \int_0^t \frac{d\kappa}{d\tau}(\tau)e(x, t - \tau) d\tau,$$

$$s_{ij}(x, t) = 2\mu(0)e_{ij}(x, t) + 2 \int_0^t \frac{d\mu}{d\tau}(\tau)e_{ij}(x, t - \tau) d\tau,$$

где  $\kappa = \kappa(\tau)$  и  $\mu = \mu(\tau)$  удовлетворяют равенствам  $\kappa(0) = \kappa_0$ ,  $\mu(0) = \mu_0$ ,  $\kappa(\infty) = \kappa_\infty$  и  $\mu(\infty) = \mu_\infty$ , функции  $\kappa$  и  $\mu$  монотонно убывают от их значений при  $t = 0$  до их значений при  $t = \infty$  (при этом  $\kappa_0, \kappa_\infty > 0$ ,  $\mu_0, \mu_\infty > 0$ ). Если  $\mu$  и  $\kappa$  — константы (т. е.  $(d\kappa/d\tau) = (d\mu/d\tau) = 0$ ), то мы приходим к зависимости напряжений от деформаций для случая линейной упругости.

*Примечание 5.10.*

1. Для сравнения со случаем линейной упругости перепишем соответствующие определяющие соотношения с использованием функций  $s$ ,  $e$ ,  $s_{ij}$  и  $e_{ij}$ :

$$s = \kappa e, \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad \kappa = 3\lambda + 2\mu.$$

2. Определяющие соотношения для вязкоупругих материалов могут быть записаны в другой форме, более похожей на случай линейной упругости. Продолжим все функции  $\kappa(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $e(t)$ , ... нулем при  $t < 0$  и рассмотрим преобразование Фурье по времени от этих функций:  $\hat{\kappa}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{e}$ , ... Тогда определяющие соотношения принимают вид

$$\hat{s} = 3[\kappa(0) + \hat{\kappa}']\hat{e},$$

$$\hat{s}_{ij} = 2[\mu(0) + \hat{\mu}']\hat{s}_{ij}.$$

*Примечание 5.11.* Можно рассмотреть вязкоупругие жидкости; для них  $u$  уже обозначает *скорость* и определяющие соотношения имеют аналогичный вид.

### Пластичные материалы

Пластичными средами называют такие среды, в которых напряжения удовлетворяют некоторым априорным соотношениям; иными словами, напряжения образуют некоторое множество в пространстве тензоров. Рассмотрим такие среды в предположении о малых деформациях. Пусть  $u$  — перемещение и  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  — линеаризованный тензор деформаций.

а) *Идеально пластичные материалы*

Рассмотрим однородный изотропный и несжимаемый материал, для которого  $e = \varepsilon$ . Пусть

$$\sigma_{II}^D = \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^D \sigma_{ji}^D.$$

Тогда материал должен обязательно удовлетворять некоторым связям, налагаемым на  $\sigma^D$  (например,  $\sigma_{II}^D \leq K^2$ ). В этом случае материал ведет себя

как твердое тело, пока не будет достигнута указанная граница, т. е. пока выполнено неравенство

$$\sigma_{II}^D < K^2.$$

В этой области имеем  $\varepsilon(u) = 0$  и  $u$  — жесткое перемещение. Более того,  $\omega_{ij}$  — константа.

В области, где  $\sigma_{II}^D = K^2$ , имеет место соотношение

$$\sigma_{ij}^D = \frac{K}{(\varepsilon_{II}^D)^{1/2}} \varepsilon_{ij}^D,$$

откуда

$$\sigma_{ij}^D \sigma_{ji}^D = K^2 \frac{\varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ji}^D}{\varepsilon_{II}^D} = K^2.$$

б) *Упругопластичные материалы*

Как и выше, на напряжения налагается условие типа  $\sigma_{II}^D \leq K^2$ . Для таких сред, когда  $\sigma_{II}^D < K^2$ , материал имеет линейно упругое поведение, т. е. зависимость напряжений от деформаций записывается в форме

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

В области, где  $\sigma_{II}^D = K^2$ , материал имеет то же самое поведение, что и в предыдущем случае.

в) *Вязкопластичные материалы*

Для простоты рассмотрим несжимаемую однородную изотропную среду. Такая среда ведет себя как твердое тело, если  $s_{II} < K^2$ . Если же  $s_{II} \geq K^2$ , то

$$s_{ij} = \left( 2\mu + \frac{K}{(e_{II})^{1/2}} \right) e_{ij},$$

$$\sigma_{ij}^D = \left( 2\mu + \frac{K}{(\varepsilon_{II}^D)^{1/2}} \right) \varepsilon_{ij}^D.$$

Условие  $s_{II} \geq K^2$  эквивалентно условию

$$\sigma_{ij}^D \sigma_{ji}^D = \left( 2\mu + \frac{K}{(\varepsilon_{II}^D)^{1/2}} \right)^2 \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D \geq K^2,$$

т. е.

$$\left( 2\mu + \frac{K}{(e_{II})^{1/2}} \right)^2 e_{II} \geq K^2$$

или

$$2\mu + \frac{K}{(e_{II})^{1/2}} \geq \frac{K}{(e_{II})^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\mu \geq 0.$$

Зависимости напряжений от деформаций, рассмотренные выше, обычно называют законами пластичности; в случае идеально пластичных или жестко пластичных материалов они носят название закона пластичности Генки. Эти зависимости являются законами нелинейной упругости с заданиями порогов. В действительности явления пластичности учитывают те случаи, когда материалы обладают памятью и описываются уравнениями Прандтля—Рейса, которые мы не будем здесь обсуждать.

г) *Уравнения Прандтля—Рейса*

Уравнения Прандтля—Рейса включают в себя выпуклое множество  $\mathcal{C}$  в пространстве  $(\mathbb{R}^6)$  симметричных тензоров напряжений. Например, в случаях а), б) таким множеством является  $\sigma_{II}^D < K^2$  с включением начала системы отсчета.

Пусть  $a$  — лагранжева переменная и  $\Omega_0$  — область, соответствующая начальному недеформированному состоянию. В каждой точке области  $\Omega_0$  и в каждый момент времени  $t$  в случае, когда  $\sigma = \sigma(a, t)$  принадлежит внутренней части множества  $\mathcal{C}$ , зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  линейна для случая б). Если  $\sigma = \sigma(a, t)$  принадлежит границе множества  $\mathcal{C}$ , то

$$\varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = A_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + \lambda,$$

где  $A_{ijkl}$  соответствует обратной зависимости напряжений от деформаций в случае линейной упругости (подробнее см. разд. 13.1), и для  $\lambda = \lambda(a, t)$  выполняется соотношение

$$\lambda \cdot (\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{C}.$$

Более детальное обсуждение рассмотренных здесь вопросов можно найти в специализированной литературе. Указанные неравенства могут быть изучены в контексте вариационных неравенств и выпуклого анализа.

*Примечание 5.12.* Как сказано выше, для более полного изучения зависимостей напряжений от деформаций мы отсылаем читателя к книгам Germain (1973, 1986) и Truesdell (1977) и к включенным в них ссылкам на литературу.

В последующих главах мы вернемся к зависимостям напряжений от деформаций для случаев ньютоновских жидкостей и упругих тел (линейная и нелинейная упругость).

Все введенные в этой главе параметры и функции, такие, как  $\mu, \lambda, \kappa, h_1$  и  $h_2$ , могут также зависеть от температуры (см. следующую главу) и от других величин, однако в общем случае мы рассматриваем их как константы.



#### 5.4. ПРИЛОЖЕНИЕ: ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Используя методы и обозначения разд. 5.1 этой главы, мы докажем формулу (3.9) гл. 3 о замене переменных в поверхностных интегралах.

Пусть  $x, x'$  и  $x''$  принадлежат поверхности  $\Sigma_t$ . Тогда векторное произведение

$$(x' - x) \wedge (x'' - x) = f' \wedge f'' (= O(\lambda^2))$$

с точностью порядка  $\lambda^3$  приближает вектор  $n\delta\Gamma_t$ , где  $\delta\Gamma_t = \delta\Gamma_t(x, t)$  — площадь параллелепипеда, построенного на  $f'$  и  $f''$  (здесь мы записали  $n$  вместо  $n_t(x, t)$ ).

Напомним, что  $i$ -я компонента векторного произведения  $f' \wedge f''$  может быть записана в виде

$$(f' \wedge f'')_i = \varepsilon_{ijk} f'_j f''_k,$$

где используется правило суммирования по повторяющимся индексам и значение  $\varepsilon_{ijk}$  равно  $+1$  или  $-1$ , если  $(i, j, k)$  — четная или нечетная перестановка для  $1, 2, 3$ , или же  $0$  в других случаях.

Имеем

$$f'_j = \frac{\partial\Phi_j}{\partial a_\alpha} e'_\alpha + O(\lambda^2), \quad (5.9)$$

$$n_i \delta\Gamma = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial\Phi_j}{\partial a_\beta} \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_\gamma} e'_\beta e''_\gamma \delta\Gamma + O(\lambda^3), \quad (5.10)$$

$$n_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial a_\alpha} \delta\Gamma = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial\Phi_i}{\partial a_\alpha} \frac{\partial\Phi_j}{\partial a_\beta} \frac{\partial\Phi_k}{\partial a_\gamma} e'_\beta e''_\gamma + O(\lambda^3). \quad (5.11)$$

Пусть  $F_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{F}$ . Тогда легко проверить следующие формулы линейной алгебры:

$$\det \mathbf{F} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma}, \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \det \mathbf{F} = \varepsilon_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma}. \quad (5.13)$$

Таким образом, из (5.11) следует, что

$$n_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial a_\alpha} \delta\Gamma_t = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \det \mathbf{F} e'_\beta e''_\gamma + O(\lambda^3).$$

Для  $n = n_t(a, t)$  имеем

$$(a' - a) \wedge (a'' - a) = e' \wedge e'' (= O(\lambda^2)) = n_0 \delta\Gamma_0 + O(\lambda^3),$$

где  $n_0 = n_0(a, t)$  и  $\delta\Gamma_0 = \delta\Gamma_0(a, t)$  — площадь параллелепипеда, построенного на  $e'$  и  $e''$ . Следовательно,

$$n_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial a_\alpha} \delta\Gamma_t = n_{0\alpha} \det \mathbf{F} \delta\Gamma_0 + O(\lambda^3).$$

В векторной форме

$$n_0 \det \mathbf{F} \delta\Gamma_0 = \mathbf{F}^T \cdot n_t \delta\Gamma_t + O(\lambda^3), \quad (5.14)$$

Поскольку вектор  $n_0$  имеет единичную норму,

$$(\det \mathbf{F})^2 (\delta\Gamma_0)^2 = n_t^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot n_t (\delta\Gamma_t)^2 + O(\lambda^5).$$

Поскольку  $B = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  (см. разд. 5.1), это соотношение принимает вид

$$(\det \mathbf{F})^2 (\delta\Gamma_0)^2 = n_t^T \cdot B \cdot n_t (\delta\Gamma_t)^2 = O(\lambda^5).$$

Отсюда при  $\lambda \rightarrow 0$  получим

$$\left( \frac{d\Gamma_0}{d\Gamma_t} \right)^2 = (\det \mathbf{F})^{-2} n_t^T \cdot B \cdot n_t. \quad (5.15)$$

Учитывая (5.14) и (5.15), при  $\lambda \rightarrow 0$  можно и записать

$$n_0 = (n_t^T \cdot B \cdot n_t)^{1/2} \mathbf{F}^T \cdot n_t. \quad (5.16)$$

Используя равенство  $C = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , получим

$$n_t^T \cdot B \cdot n_t = (n_0 \cdot C^{-1} \cdot n_0)^{-1}, \quad (5.17)$$

$$\left( \frac{d\Gamma_t}{d\Gamma_0} \right)^2 = \frac{(\det \mathbf{F})^{-2}}{n_0 \cdot C^{-1} \cdot n_0}, \quad (5.18)$$

$$n_t = (n_0 \cdot C^{-1} \cdot n_0)^{1/2} (\mathbf{F}^{(-1)})^T \cdot n_0, \quad (5.19)$$

$$n_t \frac{d\Gamma_t}{d\Gamma_0} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot n_0 (\det \mathbf{F}). \quad (5.20)$$

Уравнение (3.9) гл. 3 следует из (5.20).

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Векторное поле для сплошной среды, находящейся в движении, задается в виде

$$U_1 = -A(x_1^3 + x_1 x_2^2) e^{-kt}, \quad U_2 = A(x_1^2 x_2 + x_2^3) e^{-kt}, \quad U_3 = 0. \quad (5.21)$$

Вычислить поле ускорений, тензор скоростей деформаций и тензор скоростей поворотов.

2. В предположении о малых возмущениях рассмотрим поле перемещений

$$X_1 = kx_2, \quad X_2 = kx_3, \quad X_3 = kx_1, \quad (5.22)$$

где  $k$  — малый постоянный параметр. Вычислить линеаризованный тензор деформаций  $\varepsilon$ , главные относительные удлинения (т. е. собственные значения тензора  $\varepsilon$ ), главные направления тензора  $\varepsilon$  (т. е. собственные векторы для  $\varepsilon$ ) и вектор вращений  $\Omega$ .

**3.** Рассмотрим сплошную среду, находящуюся в стационарном движении по отношению к ортонормальной системе отсчета  $(Ox_1x_2x_3)$ , такой, что все компоненты тензора скоростей деформации равны нулю, за исключением  $D_{13}$  и  $D_{23}$ , зависящих от  $x_1$  и  $x_2$ . Выписать общий вид поля скоростей.

**4.** Рассмотрим плоское стационарное движение по закону  $U = \nabla\varphi$ , где  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$  — потенциал скорости.

- а) Показать, что вектор скоростей вращения обращается в нуль.
- б) Вычислить тензор скоростей деформации и его главные инварианты.

## УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И УРАВНЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

В этой последней главе первой части книги мы вернемся к фундаментальным понятиям механики сплошных сред и рассмотрим два новых независимых объекта исследований.

Во-первых, мы введем термодинамические понятия внутренней энергии, тепла и температуры, чтобы сформулировать принцип сохранения энергии, что приведет нас к новому уравнению.

Во-вторых, мы будем изучать ударные волны в следующем контексте. В противоположность ранее сделанным нами предположениям о регулярности, мы рассмотрим случай, когда некоторые физические и механические величины кусочно-регулярны, т. е. терпят разрыв только при переходе через некоторые поверхности. Такая ситуация имеет место, например, в механике идеальной жидкости при моделировании ударных волн, возникающих при полете летательных аппаратов с околосвуковой или сверхзвуковой скоростью.

### 6.1. ТЕПЛО И ЭНЕРГИЯ

Рассмотрим материальную систему  $S$ , которая занимает область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ .

**Определение 6.1.** Для любой материальной системы  $S$  и в каждый момент времени  $t$  существует мера на  $\Omega_t$  вида  $e(x, t) dx$ , где функция  $e$  неотрицательна. Величина

$$E = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) e(x, t) dx$$

называется внутренней энергией системы  $S$  в момент времени  $t$ , где  $e(x, t)$  — массовая плотность удельной внутренней энергии системы  $S$  в момент времени  $t$  и  $\rho e$  — объемная плотность внутренней энергии.

**Определение 6.2.** Энергия системы  $S$  в момент времени  $t$  представляет собой сумму ее кинетической энергии и ее внутренней энергии:

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} \rho \left( e + \frac{1}{2} U_i U_i \right) dx.$$

Иногда энергию  $\mathcal{E}$  называют полной энергией системы. Таким образом, энергия системы определяется объемной плотностью

$$\rho \left( e + \frac{1}{2} U_i U_i \right).$$

*Примечание 6.1.* Для случая жидкостей в термодинамике формулируются соотношения между  $\rho$ ,  $p$  и  $e$  (здесь  $p$  — давление). В частности, постулируется существование соотношения вида  $e = g(p, \rho)$ , называемого уравнением состояния. Предположения о свойствах функции  $g$  уточняются в следующей главе.

## 6.2. ТЕПЛО

В каждый момент времени материальная система следующим образом получает тепло.

1. Через ее границу в результате контактного воздействия. Этот случай нагрева системы соответствует существованию теплопроводности, определяемой поверхностной плотностью  $\chi$ . Можно доказать, что

$$\chi = -q \cdot n,$$

где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega_t$  и  $q$  — вектор теплового потока. Этот факт доказывается точно так же, как и в гл. 3, на основе разумного физического предположения о том, что для контактного воздействия выполнено равенство  $T = \sigma \cdot n$ .

Таким образом, скорость нагрева системы  $S$  через границу  $\partial\Omega_t$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$- \int_{\partial\Omega_t} q \cdot n \, d\Gamma.$$

2. В объеме в результате удаленного воздействия. Этот случай соответствует тепловому излучению, определяемому объемной плотностью  $r = r(x, t)$ .

Скорость нагрева системы  $S$  в момент времени  $t$  в результате теплового излучения имеет вид

$$\int_{\Omega_t} r(x, t) \, dx.$$

Пусть  $Q_S(t)$  — тепло, полученное системой  $S$  в течение временного интервала от 0 до  $t$ . Скорость нагрева системы  $S$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$\dot{Q}_S(t) = \frac{d}{dt} Q_S(t) = \int_{\Omega_t} r \, dx - \int_{\partial\Omega_t} q \cdot n \, d\Gamma.$$

В силу формулы Грина имеем

$$\dot{Q}_S(t) = \int_{\Omega_t} (r - \operatorname{div} q) \, dx.$$

Эволюцию системы называют адиабатической, если в каждый момент времени выполнено равенство

$$\dot{Q}_S(t) = 0.$$

### Сохранение энергии: первый закон термодинамики

Закон сохранения энергии формулируется следующим образом.

*В каждый момент  $t$  производная по времени от энергии  $\mathcal{E}$  системы  $S$  является суммой мощности внешних сил, приложенных к системе, и скорости нагрева системы:*

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \dot{Q}_S.$$

*Примечание 6.2.* Интегрируя это уравнение от  $t$  до  $t'$ , мы приходим к заключению, что изменение полной энергии  $\mathcal{E}(t') - \mathcal{E}(t)$  представляет собой сумму работы внешних сил и полученного тепла.

*Примечание 6.3.* Сравнивая закон сохранения энергии с теоремой о кинетической энергии гл. 4 и принимая во внимание выписанное выражение для полной энергии  $\mathcal{E}$ , мы видим, что скорость изменения внутренней энергии  $E = E(t)$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho e \, dx = \dot{Q}_S - \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

### Уравнение сохранения энергии

Теперь выразим закон сохранения энергии для материальной системы  $S$  в виде уравнения в частных производных, называемого уравнением сохранения энергии. Ниже мы выпишем это уравнение в различных формах.

Пусть на систему  $S$  действуют объемные силы с плотностью  $f$ , а на ее границу — силы с поверхностной плотностью  $F$ ; тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left( e + \frac{1}{2} U_i U_i \right) dx = \int_{\Omega_t} (f \cdot U + r) dx + \int_{\partial\Omega_t} (F \cdot U + \chi) d\Gamma.$$

Применим закон сохранения энергии к произвольной подсистеме  $S' \subset S$ , занимающей подобласть  $\Omega'_t \subset \Omega_t$  в момент времени  $t$ . Преобразуем интеграл по  $\partial\Omega'_t$  в объемный интеграл; поскольку  $F = \sigma \cdot n$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega'_t} F \cdot U \, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega'_t} \sigma_{ij} n_i U_j \, d\Gamma = \int_{\Omega'_t} (\sigma_{ij} U_j)_{,i} \, dx, \\ \int_{\partial\Omega'_t} \chi \, d\Gamma &= - \int_{\partial\Omega'_t} q \cdot n \, d\Gamma = - \int_{\Omega'_t} q_{i,i} \, dx. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\int_{\Omega'_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} U_i U_i \right) \right] + \left[ \rho U_i \left( e + \frac{1}{2} U_j U_j \right) - U_j \sigma_{ij} + q_i \right]_{,i} \right\} = \int_{\Omega'_t} (f_i U_i + r) dx.$$

Полученное соотношение имеет место для любой подобласти  $\Omega'_t \subset \Omega_t$  и приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} U_i U_i \right) \right] + \left[ \rho U_i \left( e + \frac{1}{2} U_j U_j \right) - U_j \sigma_{ij} + q_i \right]_{,i} = f_i U_i + r. \quad (6.1)$$

Поскольку

$$\rho \gamma \cdot U = \rho U_i \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right),$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{|U|^2}{2} \right) + \left( \rho \frac{|U|^2}{2} U_j \right)_{,j} &= \\ &= \frac{|U|^2}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho U) \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|U|^2}{2} \right) + \rho U_j \left( \frac{|U|^2}{2} \right)_{,j}. \end{aligned}$$

Подчеркнутое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения неразрывности, что дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{|U|^2}{2} \right) + \left( \rho \frac{|U|^2}{2} U_j \right)_{,j} = \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j U_i U_{i,j} = \rho \gamma \cdot U. \quad (6.2)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho U e) &= e \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho U) \right) + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho U \cdot (\nabla e) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (U \cdot \nabla) e; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho U e) &= \rho \frac{De}{Dt}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из уравнения (6.2) заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{|U|^2}{2} \right) + (U \cdot \nabla) \rho U_j \left( \frac{|U|^2}{2} \right)_{,j} - \sigma_{ij,j} U_i = f_i U_i. \quad (6.4)$$

В силу (6.3) и (6.4) уравнение (6.1) принимает вид

$$\rho \frac{De}{Dt} + q_{i,i} - \sigma_{ij} U_{i,j} = r. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) называют уравнением энергии, из которого следует, что изменение удельной внутренней энергии

$$\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} U_{ij} + \frac{1}{\rho} (r - q_{i,i})$$

обусловлено мощностью внутренних сил и теплообменом.

**Частные случаи**

Для некоторых материалов (например, идеальных газов) выполнено соотношение  $e = C_V \theta$ , где  $\theta$  — температура,  $q = -\kappa \text{grad } \theta$  и  $C_V$ ,  $\kappa > 0$ . Тогда уравнение энергии принимает вид

$$\rho C_V \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho C_V (U \cdot \nabla) \theta - \kappa \Delta \theta = r + \sigma_{ij} U_{i,j}. \quad (6.6)$$

В случае идеального несжимаемого газа имеем  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$  и  $\text{div } U = 0$ , откуда следует, что

$$\sigma_{ij} U_{i,j} = -p \delta_{ij} U_{i,j} = -p \text{div } U = 0.$$

Тогда уравнение энергии принимает вид

$$\rho_0 C_V \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \cdot \nabla \theta \right) - \kappa \Delta \theta = r. \quad (6.7)$$

Для других материальных сред член  $\sigma_{ij} U_{i,j}$  часто обращается в нуль или же пренебрежимо мал.

**6.3. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СООТНОШЕНИЯ РЭНКИНА—ГЮГОНИО**

Мы уже неявно сталкивались с возможностью существования разрывных величин на границах раздела. Например, если два материала вступают в контакт, то на границе раздела плотность может оказаться разрывной (как это имеет место для воздуха и воды) или же тензор напряжений может терпеть разрыв, поскольку определяющие соотношения этих материалов различны.

Теперь мы рассмотрим более сложный вид разрывности, который имеет место на кинематическом уровне (т. е. для скоростей) и обычно внутри рассматриваемой среды. Такой вид разрывности называют ударными волнами.

При моделировании ударных волн скорость и другие физические величины могут терпеть разрыв при пересечении некоторых поверхностей. Здесь мы дадим математические основы для изучения такого рода разрывов. Этот раздел не зависит от материала, рассмотренного в разд. 6.1.

Переформулируем центральные аксиомы механики сплошных сред. По-прежнему будем предполагать, что отображение  $\Phi$ , переводящее положение в момент времени 0 в положение в момент времени  $t$ , является взаимно однозначным. Соответствующее отображение будем обозначать через  $x = \Phi(a) = \Phi(a, t, t_0)$ .

Рассмотрим подвижную поверхность  $\Sigma_t$  с уравнением

$$x = \mathcal{E}(a, t), \quad a \in \Sigma_{t_0}.$$

Когда  $\mathcal{E} = \Phi$ , поверхность  $\Sigma_t$  перемещается вместе с потоком, однако в общем случае это не имеет места, т. е.  $\Phi^{-1}(\Sigma_t) \neq \Sigma_{t_0}$  и  $\Phi(\Sigma_{t_0}) \neq \Sigma_t$  (см. рис. 6.1). Как



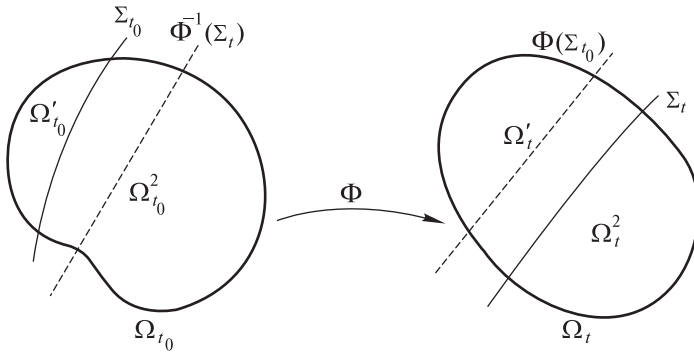


Рис. 6.1. Отображение  $\Phi$

обычно, примем, что  $(\partial\Phi/\partial t)(a, t)$  — скорость жидкости, обозначаемая через  $U(x, t)$  в эйлеровом описании. Аналогично,  $(\partial\mathcal{E}/\partial t)(a, t)$  — скорость поверхности  $\Sigma_t$ , обозначаемая через  $W(x, t)$  в эйлеровом описании. Предположим, что поверхность  $\Sigma_t$  разделяет область  $\Omega_t$  на две подобласти  $\Omega_t^1$  и  $\Omega_t^2$  и что  $\Phi|_{\Phi^{-1}(\Omega_t^1)}$  и  $\Phi|_{\Phi^{-1}(\Omega_t^2)}$  — отображения из  $\Phi^{-1}(\Omega_t^i)$  в  $\Omega_t^i$  при  $i = 1, 2$ . Пусть эти отображения и обратные к ним принадлежат классу  $\mathcal{C}^1$ .

**Основные соотношения**

Сначала определим величины вида

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C \, dx,$$

где  $C$  терпит разрыв на поверхности  $\Sigma_t$ . Мы уже видели, что такого рода производные встречались при выводе уравнений сохранения.

Прежде всего заметим, что в силу примечания 1.7 формула

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C \, dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega_t} CU \cdot n \, d\Gamma \tag{6.8}$$

применима к каждой подобласти  $\Omega_t^i$ ,  $i = 1, 2$ , в форме

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^i} C \, dx = \int_{\Omega_t^i} \frac{\partial C}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega_t^i \cap \partial\Omega_t} CU \cdot n \, d\Gamma + \int_{\Sigma_t} CW \cdot n \, d\Gamma, \tag{6.9}$$

если переменная  $U$  в (6.8) рассматривается как скорость границы; следовательно,  $U = W$  на  $\Sigma_t$ . Если  $N$  — нормаль к  $\Sigma_t$ , направленная от  $\Omega_t^1$  к  $\Omega_t^2$ , то  $n = N$  при  $i = 1$  и  $n = -N$  при  $i = 2$ .

Суммируя соотношения (6.9) по  $i = 1, 2$ , получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C \, dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega_t} CU \cdot n \, d\Gamma - \int_{\Sigma_t} [CW] \cdot N \, d\Gamma,$$

где  $X_i = X|_{\Omega_t^i}$ ,  $i = 1, 2$ , а  $[X] = X_2 - X_1$  — скачок, совершаемый  $X$  при переходе через  $\Sigma_t$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C \, dx &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t} \, dx + \int_{\partial\Omega_t^1 \cap \partial\Omega_t} CU \cdot n \, d\Gamma + \int_{\partial\Omega_t^2 \cap \partial\Omega_t} CU \cdot n \, d\Gamma - \\ &- \int_{\Sigma_t} [CU] \cdot N \, d\Gamma + \int_{\Sigma_t} [CV] \cdot N \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega_t^1 \cup \Omega_t^2} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(CU) \right] dx + \int_{\Sigma_t} [CV] \cdot N \, d\Gamma, \end{aligned}$$

где  $V = U - W$  — относительная скорость жидкости по отношению к  $\Sigma_t$  и  $\{\partial C/\partial t + \operatorname{div}(CU)\}$  — кусочно-регулярная функция, равная  $\partial C/\partial t + \operatorname{div}(CU)$  в  $\Omega_t^1$  и в  $\Omega_t^2$ .

**Следствие: условия возникновения ударных волн**

Если

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t'} C \, dx = \int_{\Omega_t'} f \, dx, \quad \forall \Omega_t' \subset \Omega_t,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(CU) &= f \quad \text{в } \Omega_t^i, \quad i = 1, 2, \\ \int_{\Sigma_t'} [CV] \cdot N \, d\Gamma &= 0, \quad \forall \Sigma_t' \subset \Sigma_t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[CV] \cdot N = 0 \quad \text{на } \Sigma_t.$$

Когда  $C$  — скаляр, последнее соотношение можно переписать в виде

$$(Cv)_2 - (Cv)_1 = 0, \tag{6.10}$$

где  $v = V \cdot N$ .

**Приложение законов сохранения: соотношения Рэнкина—Гюгонно**

а) *Сохранение массы*

В этом случае имеем  $C = \rho$ . Тогда соотношение (6.10) принимает вид

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1,$$

где  $v$  — нормальная компонента скорости  $V$  и  $v = V \cdot N$ . Могут иметь место два случая.

1. Случай контактного разрыва, когда  $v_2 = v_1$ . Тогда  $\rho_2 = \rho_1$ , а  $U_2 \cdot n = U_1 \cdot n$  и  $W \cdot n = 0$ . Скорость поверхности  $\Sigma_t$  касательна к линиям тока.

2. Случай ударных волн, когда  $\rho_2 \neq \rho_1$  и поверхность разрыва перемещается относительно среды. Ее скорость имеет компоненту, нормальную к линиям тока, и компоненту, касательную к ним.

б) *Сохранение количества движения*

В этом случае имеем  $C = \rho U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , откуда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho U_i dx = \int_{\Omega_t} (f_i + \sigma_{ij,j}) dx.$$

Вследствие присутствия члена  $\sigma_{ij,j}$ , где  $\sigma$  терпит разрыв на  $\Sigma_t$ , необходимо изменить предыдущее доказательство и распространить его на случай, когда  $C$  — вектор или тензор. Аналогичные рассуждения, которые мы здесь опускаем, приводят к соотношению

$$[\rho v U] = [\sigma \cdot N];$$

полагая  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = m$ , получим

$$m[U] = [\sigma \cdot N] = [T].$$

В случае идеальной жидкости имеем  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ; следовательно,

$$\sigma_{ij} N_j = -p N_i,$$

откуда

$$m[U] + [pN] = 0.$$

Проектируя на  $N$  и на касательную плоскость к  $\Sigma_t$ , можно записать

$$(U_T)_1 = (U_T)_2,$$

где  $U_T$  — касательная скорость на ударной поверхности. Кроме того, имеем

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2,$$

поскольку величина  $W \cdot N$  непрерывна.

### Сохранение энергии

Как следствие закона сохранения энергии выпишем условие

$$\left[ \rho v \left( e + \frac{1}{2} U^2 \right) - T \cdot U + q \cdot N \right] = 0,$$

где  $T = \sigma \cdot N$ . Полагая  $U = V + W$ , получим

$$[mU^2] = m[V^2] + 2m[V] \cdot W,$$

$$[T \cdot U] = [T \cdot V] + [T \cdot W] = [T \cdot V] + [T]W = [T \cdot V] + m[V] \cdot W,$$

откуда

$$\left[ \rho v \left( e + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] - [TV] + [q \cdot N] = 0.$$

*Примечание 6.4.* В действительности величина  $q$  должна быть непрерывной. Представляет интерес адиабатический случай, когда  $q = 0$ .

*Примечание 6.5.* Далее мы не будем рассматривать ударные волны, поскольку их рассмотрение требует привлечения дополнительных результатов термодинамики, в частности понятия энтропии, а также второго закона термодинамики.

В списке литературы для первой части этой книги мы привели несколько ссылок на публикации на французском и английском языках, которые содержат более глубокий анализ основополагающих гипотез и доказательство некоторых утверждений, принимаемых здесь нами в виде исходных предположений, а также дополнительные разделы механики, такие как реология и термодинамика. На французском языке отметим книги Duvaut (1990), Germain (1973) и Salençon (1988), которые соответствуют этой части нашей книги, хотя материал излагается несколько с другой, менее математической точки зрения. На английском языке отметим весьма полезные книги Curtin (1981) и Spencer (1975), а также книгу Segel (1987). Книги Goldstein (1980) и Ziegler (1965) делают акцент на аналитической механике и механике твердых тел. Книга Truesdell (1977) дает подробный анализ аксиом механики. Книга Zemansky (1968) представляет собой классический справочник по термодинамике.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Второй закон термодинамики утверждает, что существует функция  $s$ , называемая энтропией на единицу массы, такая, что изменение энтропии при элементарном преобразовании является суммой изменения энтропии, вызванного внешними воздействиями, и изменения энтропии, вызванного внутренними причинами в материальной системе. Для замкнутых систем этот второй закон часто записывается в форме

$$\delta Q = T ds - \delta f, \quad \delta f \geq 0 \quad (\text{соотношение Жуге}), \quad (6.11)$$

где  $T$  — температура и  $\delta f$  — некомпенсированная работа. Из первого и второго законов следует, что

$$de = T ds - p d \frac{1}{\rho}, \quad (6.12)$$

где  $s$  — энтропия на единицу массы и  $p$  — давление.

а) Показать, что энтальпия на единицу массы  $h = e + p/\rho$  удовлетворяет соотношению

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp. \quad (6.13)$$

б) Рассмотрим идеальный газ; тогда

$$e = \frac{c_v}{\gamma} \rho^{\gamma-1} e^{s/c_v}, \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1}. \quad (6.14)$$

Показать, что  $p/\rho = (\gamma - 1)e = rT$  и  $e = c_v T$ .

2. Пусть  $h$  и  $s$  определены, как в упражнении 1. Назовем свободной энергией и свободной энтальпией функции  $F = e - Ts$  и  $G = h - Ts$  соответственно. Показать, что

$$dF = -sdT - pd \frac{1}{\rho}, \quad (6.15)$$

$$dG = -sdT + \frac{1}{\rho} dp. \quad (6.16)$$

3. Пусть  $h$  и  $s$  определены, как в упражнении 1. Рассмотрим двумерную ударную волну в идеальной жидкости. Пусть разрывом служит стационарная вертикальная прямая. Предположим, что внешние силы пренебрежимо малы и что эволюция имеет адиабатический характер. Предположим также, что вектор скорости горизонтален. Как обычно, индексом 1 помечаются величины перед ударной волной, а индексом 2 — величины позади ударной волны.

а) Выписать законы сохранения массы, количества движения, энергии и энтальпии.

б) То же самое задание, что и в пункте а), но для случая идеального газа, для которого уравнение состояния имеет вид  $p = \rho r T$ , а энтальпия задается в виде  $h = c_p T$ .

в) Показать, что  $(p_2/p_1) - 1 = -\gamma M_1^2 (\rho_1/\rho_2 - 1)$ , где  $M = v/c$  — число Маха,  $c^2 = \partial p / \partial \rho$  и  $p = \rho^\gamma e^{s/c_v}$  в случае идеального газа.

4. Рассмотрим случай 3 а).

а) Показать, что  $h_2 - h_1 = \frac{1}{2} v_1 v_2 (p_2/p_1 - \rho_1/\rho_2)$  и  $p_2 - p_1 = v_1 v_2 (\rho_2 - \rho_1)$ .

б) Показать, что  $h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1)(1/\rho_1 + 1/\rho_2)$  и  $e_2 - e_1 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)(1/\rho_1 - 1/\rho_2)$ .

5. То же самое задание, что и в пунктах 3 а) и 3 б) для прямой линии, образующей угол  $\varepsilon$  с горизонталью. Пусть скорость  $v_1$  перед ударной волной горизонтальна, а скорость  $v_2$  после ударной волны образует угол  $\beta$  с ударной волной.

ЧАСТЬ II

---

**ФИЗИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ**

---

## ОБЩИЕ СВОЙСТВА НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

### 7.1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Рассмотрим подробнее ранее обсуждавшиеся уравнения движения ньютоновской жидкости и соответствующие граничные условия.

В этой главе предполагается, что жидкость представляет собой материальную систему  $S$ , которая заполняет область  $\Omega_0$  в момент времени  $t = 0$  и область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ . Эти области могут совпадать, например, в случае, когда перемещающаяся жидкость целиком заполняет некоторый объем постоянной формы.

Основываясь на эйлеровом представлении, введем следующие обозначения:  $\rho = \rho(x, t)$  — плотность жидкости,  $f = f(x, t)$  — объемные силы,  $F = F(x, t)$  — поверхностные силы, приложенные к границе  $\partial\Omega_t$  области  $\Omega_t$ , и  $u = u(x, t)$  — скорость частицы жидкости, занимающей положение  $x \in \Omega_t$  в момент времени  $t$  (ранее скорость мы обозначали через  $U(x, t)$ ).

#### Уравнения движения

Общими уравнениями движения жидкостей и газов являются уравнение неразрывности (или уравнение сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u_i)_{,i} = 0 \quad \text{в } \Omega_t \quad (7.1)$$

и уравнение сохранения импульса как следствие фундаментального закона динамики:

$$\rho \gamma_i = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \sigma_{ij,j} \quad \text{в } \Omega_t.$$

Для ньютоновской жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - p \delta_{ij},$$

где  $p = p(x, t)$  — давление и  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ . Следовательно,

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} - p \delta_{ij},$$

откуда

$$\sigma_{ij,j} = \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + \lambda (\operatorname{div} u)_{,i} - p_{,i} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)_{,i} - p_{,i}.$$

Таким образом, уравнение сохранения импульса можно переписать в форме

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + p_{,i} - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)_{,i} = f_i \quad \text{в } \Omega_t. \quad (7.2)$$

В векторной форме это уравнение принимает вид

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] + \operatorname{grad} p - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f \quad \text{в } \Omega_t. \quad (7.2')$$

Уравнения (7.1) и (7.2) (или (7.2')) называются уравнениями Навье–Стокса для несжимаемой жидкости.<sup>1)</sup>

Применяя покомпонентное сравнение, легко убедиться, что

$$u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \operatorname{grad} \frac{|u|^2}{2} + (\operatorname{curl} u) \wedge u.$$

В векторной форме уравнение (7.2) может быть также представлено как

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|u|^2}{2} + (\operatorname{curl} u) \wedge u \right) + \operatorname{grad} p - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f \quad \text{в } \Omega_t. \quad (7.2'')$$

В уравнениях (7.2), (7.2') и (7.2'') постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  удовлетворяют условиям  $\mu \geq 0$  и  $3\lambda + 2\mu \geq 0$  (следовательно,  $(\lambda + \mu) \geq 0$ ). Эти условия положительности обусловлены термодинамическими соображениями; в разд. 7.3 мы еще раз рассмотрим условие  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ .

### Невязкая жидкость

Жидкость, для которой  $\lambda = \mu = 0$ , называется невязкой. В этом случае  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$  (т.е. тензор напряжений является сферическим) и уравнения (7.2), (7.2') и (7.2'') принимают вид

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + p_{,i} = f_i, \quad (7.3)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] + \operatorname{grad} p = f, \quad (7.3')$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|u|^2}{2} + (\operatorname{curl} u) \wedge u \right] + \operatorname{grad} p = f, \quad (7.3'')$$

где  $x \in \Omega_t$  и  $t \in I$ . Уравнения (7.3) называются уравнениями Эйлера невязкой жидкости.

<sup>1)</sup>Некоторые авторы используют данный термин только для несжимаемой жидкости; мы же не будем различать эти два случая.



**Несжимаемая жидкость**

Говорят, что жидкость несжимаема, если объем любой ее части остается постоянным в процессе движения. Из уравнения (1.8) гл. 1 следует, что при  $C = 1$  в этом случае выполнено уравнение

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (7.4)$$

Предполагая начальное состояние однородным, т. е.

$$\rho(x, 0) = \rho_0 = \text{const},$$

заключаем, что

$$\rho(x, t) = \rho_0, \quad \forall x \in \Omega_t, \quad \forall t \in I, \quad (7.5)$$

а уравнение (7.4) эквивалентно уравнению неразрывности.

Если жидкость несжимаема и однородна, то уравнения (7.2), (7.2') и (7.2'') принимают соответственно вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} = \nu \Delta u_i + f'_i, \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \nu \Delta u + f', \quad (7.6')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{curl} u \wedge u + \operatorname{grad} \left( \frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \nu \Delta u + f', \quad (7.6'')$$

где  $x \in \Omega_t$ ,  $t \in I$ ,  $f' = f/\rho$  и  $\nu = \mu/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости. Уравнения (7.4) и (7.6) — это уравнения Навье–Стокса для несжимаемой однородной жидкости.

*Примечание 7.1* (неоднородная несжимаемая жидкость). Уравнения (7.4) и (7.6) остаются справедливыми и в этом случае, для которого уравнение (7.5) нарушается. Однако уравнение (7.4) перестает быть эквивалентным уравнению неразрывности, которое теперь может быть представлено в упрощенном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\rho = 0 \quad \text{в } \Omega_t. \quad (7.1')$$

**Уравнение завихренности**

Завихренность — это вектор  $\omega = \operatorname{curl} u$ .

Пусть жидкость несжимаема и однородна. Полагая  $\omega = \operatorname{curl} u$  и применяя оператор ротора к (7.6''), получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{curl}(\omega \wedge u) - \nu \Delta \omega = \operatorname{curl} f' \quad \text{в } \Omega_t. \quad (7.7)$$

Можно выписать два альтернативных представления этого уравнения, которые различаются для случаев двух и трех пространственных переменных. Напомним, что  $\omega$  является вектор-функцией в трехмерном пространстве, тогда как в двумерном пространстве эта функция принимает вид  $\omega = \omega_3 e_3$  (только одна компонента ненулевая). В этом случае мы можем положить  $\omega = \omega_3$  и считать, что  $\text{curl}$  — скалярная функция.

Вид второго слагаемого  $\text{curl}(\omega \wedge u)$  в (7.7) зависит от того, является ли течение двумерным или трехмерным:

$$\begin{aligned} \text{curl}(\omega \wedge u) &= (u \cdot \nabla)\omega, \quad \text{если } n = 2, \\ \text{curl}(\omega \wedge u) &= (u \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)u, \quad \text{если } n = 3. \end{aligned}$$

Действительно, в случае  $n = 2$  третья компонента — единственная ненулевая в  $\text{curl}(\omega \wedge u)$ , что эквивалентно выполнению соотношения

$$D_1(\omega_3 u_1) + D_2(\omega_3 u_2) = u_1(D_1\omega_3) + u_2(D_2\omega_3) = (u \cdot \nabla)\omega,$$

поскольку  $\text{div } u = 0$  ( $u_3 = 0$ ,  $\omega_3 = D_1 u_2 - D_2 u_1$ ,  $D_i = \partial/\partial x_i$ ). Если  $n = 3$ , то это соотношение можно вывести покомпонентным сравнением. Например, третья компонента в  $\text{curl}(\omega \wedge u)$  имеет вид

$$\begin{aligned} D_1(\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) - D_2(\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) &= (\text{div } \omega)u_3 + (u \cdot \nabla)\omega_3 - (\omega \cdot \nabla)u_3 = \\ &= (u \cdot \nabla)\omega_3 - (\omega \cdot \nabla)u_3, \end{aligned}$$

поскольку  $\text{div } \omega = 0$ . Тогда уравнение завихренности можно записать как

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega - \nu \Delta \omega = \text{curl } f', \quad \text{если } n = 2, \quad (7.7')$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega - \nu \Delta \omega = (\omega \cdot \nabla)u + \text{curl } f', \quad \text{если } n = 3. \quad (7.7'')$$

Если жидкость невязкая, то в этих уравнениях следует положить  $\nu = 0$ ; например, в двумерном случае уравнение (7.7') принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega = \text{curl } f'. \quad (7.7''')$$

*Примечание 7.2.* Если  $f$  — градиент по  $x$  функции  $V = V(x, t)$  (тогда в механике говорят, что «силы порождаются потенциалом»), то  $\text{curl } f = 0$ . Например, это соотношение верно для гравитационных сил.

### Уравнение состояния для баротропной жидкости

Четырех уравнений (7.1) и (7.2) недостаточно, чтобы полностью описать движение сжимаемой жидкости, поскольку требуется найти пять неизвестных,  $\rho$ ,  $p$  и  $u$ . Недостающим уравнением является уравнение состояния (см. гл. 5).

В уравнении состояния давление  $p$  представляется в виде некоторой заданной функции от плотности  $\rho$  и внутренней энергии  $e$ . В случае баротропной жидкости давление  $p$  зависит только от  $\rho$ :

$$p = g(\rho).$$

Из термодинамических соображений следует, что

$$g > 0, \quad \frac{dg}{d\rho} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2g}{d\rho^2} \geq 0.$$

Тогда можно положить  $c^2 = dg/d\rho$ , где  $c$  — локальная скорость звука в жидкости.

*Примеры.*

1. Если рассматривается совершенный газ с постоянной удельной теплоемкостью в процессе изотермической эволюции, то  $p = k\rho$ ,  $k > 0$  и  $c = \sqrt{k}$ .
2. В случае адиабатической эволюции имеем  $p = k\rho^\gamma$ ,  $k > 0$ ,  $\gamma > 1$  ( $\gamma = 1.4$  для воздуха); следовательно,  $c^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1} = k^{1/\gamma}\gamma p^{(\gamma-1)/\gamma}$ .

## Граничные условия

Для того чтобы полностью описать движение жидкости, в дополнение к описанным ранее общим уравнениям необходимо знать поведение физических величин на границе области, заполненной этой жидкостью; иными словами, необходимо задать *граничные (краевые) условия*.

а) *Случай жесткой стенки*

Если граница непроницаема и неподвижна в галилеевой системе координат, то жидкость не может пересечь границу, что выражается следующим кинематическим условием:

$$u \cdot n = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega_t, \quad \forall t \in I. \quad (7.8)$$

Если жидкость вязкая и граница непроницаема, то ее скольжение вдоль границы отсутствует; следовательно, скорость частицы жидкости, занимающей положение  $x$  в момент времени  $t$ , равна скорости  $g(x, t)$  границы:

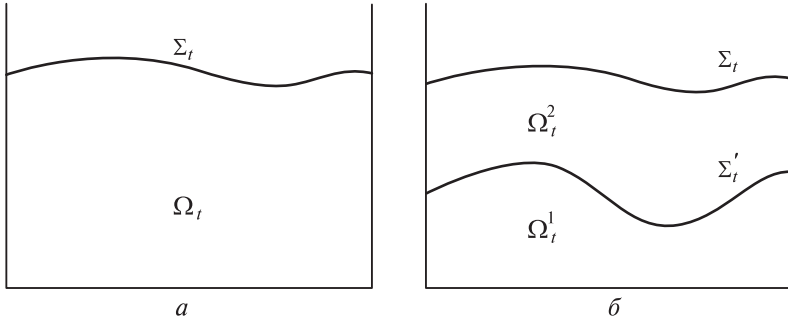
$$u(x, t) = g(x, t), \quad \forall x \in \partial\Omega_t, \quad \forall t \in I. \quad (7.8')$$

б) *Случай проницаемой (открытой) границы*

Теперь рассмотрим проницаемую (или открытую) границу  $\Sigma_t$  (рис. 7.1, а) и границу раздела  $\Sigma'_t$  между двумя текучими жидкостями (рис. 7.1, б).

*Кинематические условия.* В случае совершенной жидкости имеем, что величина  $u \cdot n$  непрерывна и  $u \cdot n = v \cdot n$  на  $\Sigma_t$ , где  $v$  — скорость границы  $\Sigma_t$ , которая может стать нулевой:

$$\begin{aligned} u \cdot n &= v \cdot n & \text{на } \Sigma_t, & \text{случай (а),} \\ u^1 \cdot n &= u^2 \cdot n = v \cdot n & \text{на } \Sigma'_t, & \text{случай (б).} \end{aligned} \quad (7.9)$$



**Рис. 7.1.** Проницаемая (или открытая) граница (а); граница раздела между двумя жидкостями (б)

Если же жидкость вязкая, то условия в (7.9) по-прежнему остаются в силе; в случае (б) можно также выписать условие непрерывности скорости  $u$ :

$$u^1 = u^2 \quad \text{на } \Sigma_t'.$$

*Условия, налагаемые на жидкость.* Как ранее упоминалось в гл. 3 (примечание 3.3), векторы связей непрерывны:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot n &= 0 \quad \text{на } \Sigma_t, \quad \text{случай (а)}, \\ \sigma^1 \cdot n &= \sigma^2 \cdot n \quad \text{на } \Sigma_t', \quad \text{случай (б)}. \end{aligned}$$

В случае совершенной жидкости имеем  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ ; тогда эти условия принимают вид

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{на } \Sigma_t, \quad \text{случай (а)}, \\ p^1 &= p^2 \quad \text{на } \Sigma_t', \quad \text{случай (б)}. \end{aligned}$$

### Другие случаи

В случае переменной температуры необходимо ввести другие термодинамические величины (внутреннюю энергию  $e$ , энтальпию  $h$ , энтропию  $s$  и др.), а также уравнения термодинамики, обзор которых содержится в ч. 1 настоящей книги. Некоторые элементарные аспекты термодинамики будут обсуждаться в гл. 9. Кроме того, будут рассмотрены электромагнитные явления. Таким образом, можно говорить о магнитогидродинамике, ряд вопросов которой будут затронуты в гл. 11. И наконец, будут рассмотрены также химические явления в контексте процессов горения (см. гл. 12).

## 7.2. СТАТИКА ЖИДКОСТЕЙ

Теперь рассмотрим покоящуюся жидкость, для которой  $u(x, t) \equiv 0$  и, следовательно,  $\Omega_t \equiv \Omega_0$  для всех  $t$ . Ранее обсуждавшиеся уравнения принимают вид

$$f = \text{grad } p \tag{7.10}$$

для любой ньютоновской жидкости (вязкой или невязкой, сжимаемой или несжимаемой), поскольку  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ . Тогда можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 7.1.** *Если жидкость находится в состоянии покоя, то объемные силы порождаются потенциалом.*

Далее покажем выполнение закона Архимеда в случае тела, погруженного в жидкость.

**Теорема 7.2 (закон Архимеда).** *Силы давления, действующие со стороны покоящейся жидкости на полностью погруженное тело, образуют спиральное векторное поле, противоположное полю, связанному с гравитационными силами, действующими на объем жидкости, равный объему тела.*

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  — область, занятая погруженным телом. Поскольку жидкость находится в состоянии покоя, выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij}, \\ \text{grad } p &= -\rho g e_3, \end{aligned}$$

где  $e_3$  — единичный вектор, направленный вверх в вертикальном направлении.

Таким образом, равнодействующая сил давления, действующих со стороны жидкости на тело, принимает вид

$$-\int_{\partial\Omega} pn \, d\Gamma = -\int_{\Omega} \text{grad } p \, dx = \int_{\Omega} \rho g \vec{e}_3 \, dx.$$

Эта равнодействующая противоположна равнодействующей гравитационных сил, действующих на равный объем жидкости:

$$-\int_{\Omega} \rho g \vec{e}_3 \, dx.$$

Пусть  $O$  — центр масс области  $\Omega$ . Импульс сил давления в точке  $O$  равен  $-\int_{\partial\Omega} x \wedge np \, d\Gamma$ . Первая компонента этого импульса имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (n_2x_3 - n_3x_2)p \, d\Gamma &= (\text{по формуле Стокса}) \int_{\Omega} [(x_3p)_{,2} - (x_2p)_{,3}] \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (x_3p_{,2} - x_2p_{,3}) \, dx = \\ &= -\int_{\Omega} (x \wedge \text{grad } p)_1 \, dx \quad (\text{первая компонента}) = \\ &= \int_{\Omega} (x \wedge \rho g e_3)_1 \, dx = 0 \quad (O - \text{центр масс области } \Omega). \end{aligned}$$

Поступая тем же образом с двумя другими компонентами, мы убеждаемся, что импульс сил давления в точке  $O$  действительно противоположен импульсу гравитационных сил в точке  $O$  для рассматриваемого объема:

$$-\int_{\partial\Omega} x \wedge np \, d\Gamma = \int_{\Omega} x \wedge \rho g e_3 \, dx = 0.$$

### Статика несжимаемой жидкости

Для несжимаемой однородной жидкости имеем

$$f = \text{grad } p, \quad f = -\rho_0 g \vec{e}_3,$$

откуда

$$p = -\rho_0 g(x_3 - h).$$

Теперь обратимся к некоторым приложениям полученных результатов.

#### а) Касание двух жидкостей

Рассмотрим две жидкости  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}'$ , плотность и давление которых обозначим  $(\rho, p)$  и  $(\rho', p')$  соответственно. Эти две жидкости вступают в соприкосновение в  $U$ -образной трубе (рис. 7.2). Следующее соотношение определяет положение жидкостей в состоянии равновесия:

$$\rho g h = \rho' g(h + H).$$

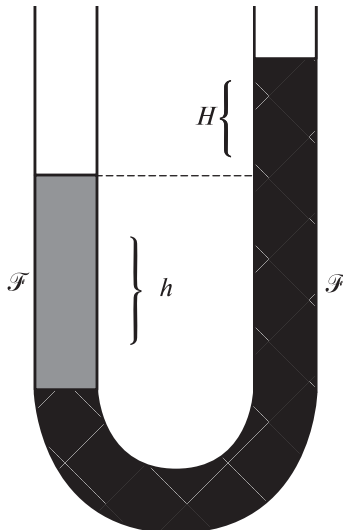


Рис. 7.2. Касание двух жидкостей

б) *Расходомер Вентури*

Ранее устройства, изображенные на рис. 7.3 и 7.4, имели важное значение для проведения измерений в аэродинамических трубах. В настоящее время их заменили лазерные устройства измерения скорости, однако для наших целей рассмотрение принципа их действия представляет интерес.

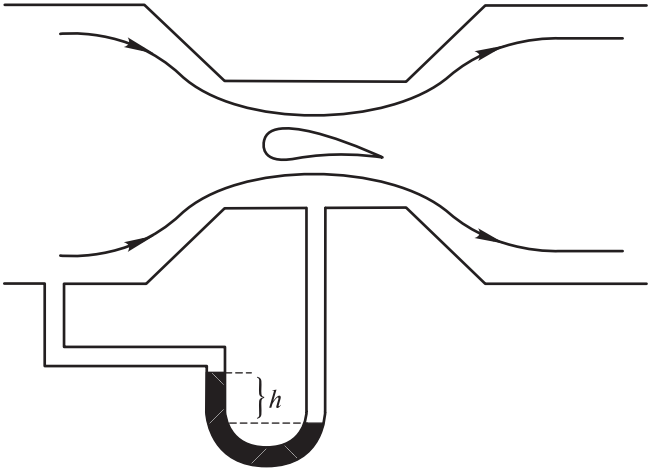


Рис. 7.3. Расходомер Вентури

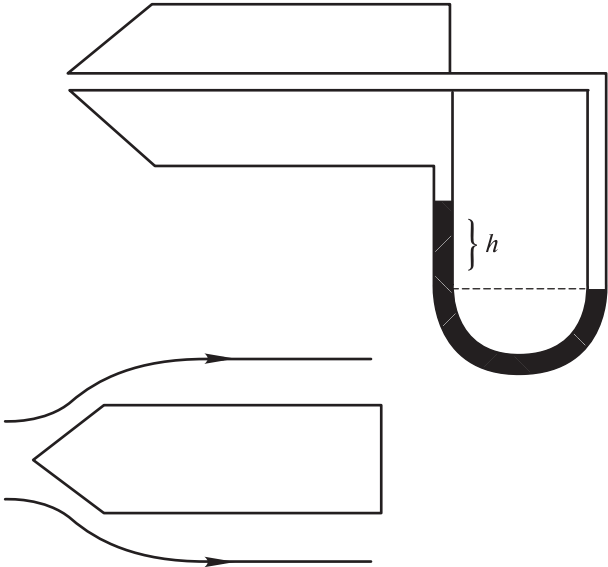


Рис. 7.4. Трубка Пито

Поскольку труба имеет небольшое поперечное сечение, для расходомера Вентури (рис. 7.3) мы можем предположить, что содержащаяся в нем жидкость находится в состоянии покоя. Тогда разность давлений на концах трубы равна  $\rho gh$ . Согласно теореме Бернулли (см. гл. 8), эта разность определяет скорость жидкости в устье аэродинамической трубы.

в) *Трубка Пито*

Трубка Пито похожа на расходомер Вентури и предназначена для измерения разности давления на передней и задней частях препятствия (например, ракеты). В некоторых случаях эти измерения позволяют вычислять разность скоростей с помощью теоремы Бернулли (такая возможность обсуждается в гл. 8).

### Статика сжимаемой баротропной жидкости. Первое приближение в метеорологии

Предположим, что атмосфера представляет собой покоящийся сжимаемый газ (в гл. 10 мы рассмотрим не столь упрощенные предположения). Тогда

$$f = -\rho g \vec{e}_3 = \text{grad } p;$$

следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g.$$

Более того, воздух может рассматриваться как баротропный газ, для которого плотность и давление связаны соотношением<sup>1)</sup>

$$p = \varphi(\rho),$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = -\frac{\rho g}{\varphi'(\rho)}.$$

Если  $p = k\rho$  (это справедливо для совершенного газа с постоянной удельной теплоемкостью), то

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_3} = \frac{d\rho}{dx_3} = -\frac{\rho g}{k}.$$

Следовательно,

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{gx_3}{k}\right).$$

Поскольку  $k = p_0/\rho_0$ , выражение для давления принимает вид

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{g\rho_0 x_3}{p_0}\right),$$

<sup>1)</sup>Ранее уравнение состояния записывалось в виде  $p = g(\rho)$ , но здесь  $g$  — ускорение силы тяжести.



где  $x_3 = 0$  соответствует уровню Земли, а  $p_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность на уровне Земли соответственно.

### 7.3. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ЭНЕРГИИ ЖИДКОСТИ

В этом разделе мы покажем, что коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  в уравнении (7.2) удовлетворяют неравенствам  $\mu \geq 0$  и  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ . Для этого рассмотрим мощность внутренних сил. Имеем

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} u_{i,j} dx = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} u_{i,j} &= -p u_{i,i} + \lambda (\operatorname{div} u)^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \\ &= -p \operatorname{div} u + \varphi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathcal{P}^{(1)} = - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} u dx \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^{(2)} = - \int_{\Omega_t} \varphi[\varepsilon(u)] dx.$$

Для несжимаемой жидкости имеем  $\mathcal{P}^{(1)} = 0$ . Для сжимаемой и несжимаемой жидкостей значение  $\mathcal{P}^{(2)}$  равно мощности силы трения, а законы термодинамики требуют, чтобы  $\mathcal{P}^{(2)} \leq 0$ ; иными словами,  $\varphi$  — положительно полуопределенная квадратичная форма. Однако имеет место представление

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \\ &+ 4\mu (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2). \end{aligned}$$

Поэтому форма  $\varphi$  положительно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма  $q = \lambda(x + y + z)^2 + 2\mu(x^2 + y^2 + z^2)$  положительно определена. В силу однородности необходимо и достаточно, чтобы форма  $q$  была положительна, когда  $x + y + z = 1$ ; иными словами,  $\mu \geq 0$  и форма  $q$  положительно определена при  $x + y + z = 1$ .

Таким образом, не существует значений  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих

$$x^2 + y^2 + z^2 < -\frac{\lambda}{2\mu} \quad \text{и} \quad x + y + z = 1,$$

откуда следует, что расстояние от точки  $O$  до плоскости  $R$ , описываемой уравнением  $x + y + z = 1$ , таково, что

$$[d(O, R)]^2 \geq -\frac{\lambda}{2\mu}.$$

Поскольку  $d(O, R) = 1/\sqrt{3}$ ,

$$3\lambda + 2\mu \geq 0.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть вязкая однородная несжимаемая и стационарная жидкость заполняет объем  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . В ней действуют объемные силы с объемной плотностью  $f = f(x)$ , а также поверхностные силы с поверхностной плотностью  $F = F(x)$  на границе  $\Sigma = \partial\Omega$ .

а) Выписать уравнения движения в терминах тензора напряжений  $\sigma$ , скорости  $u$  и объемной плотности  $f$ .

б) Определяющее соотношение для такой жидкости имеет вид

$$\sigma^D = 2\mu\varepsilon^D, \quad (7.11)$$

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} - 3p, \quad (7.12)$$

где  $p$  — давление и  $\varepsilon$  — тензор скоростей деформации. Записать уравнения движения через  $u$ ,  $p$  и  $f$ .

в) Сформулировать теорему о виртуальной мощности для произвольного виртуального поля скоростей  $v = v(x)$ .

2. Пусть  $p$ ,  $\rho$  и  $T$  — давление, плотность и температура атмосферы. Предположим, что эти величины связаны соотношением  $p = R\rho T$  (закон совершенного газа). Пусть атмосфера находится в состоянии покоя и  $T$  — известная функция от высоты  $x_3$ . Вычислить изменение давления  $p$  в зависимости от  $x_3$ .

3. Рассмотрим движение совершенной сжимаемой жидкости в прямоугольной трубе очень малого постоянного сечения. Предположим, что движение происходит параллельно оси  $0x$  с единичным вектором  $\vec{x}$  (объемными силами пренебрегаем). Пусть  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$  и  $\vec{U}(x, t) = u(x, t)\vec{x}$  — плотность, давление и скорость жидкости в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Будем предполагать, что жидкость удовлетворяет уравнению состояния  $p = k\rho$ . Показать, что скорость  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.13)$$

4. Переформулировать закон Архимеда для не полностью погруженного в жидкость тела в предположении, что жидкость и тело находятся в состоянии покоя (тем самым мы предполагаем, что поверхность жидкости плоская и расположена горизонтально).

## ТЕЧЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Эта глава посвящена изучению течений невязкой ньютоновской жидкости. В ней обсуждаются некоторые общие результаты и рассматривается ряд частных случаев.

## 8.1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

В этом разделе мы остановимся на нескольких простых теоремах об общих свойствах течений невязких жидкостей. Эти теоремы известны как теоремы Бернулли и Лапласа.

Ниже будем рассматривать только несжимаемые жидкости, для которых  $(1/\rho) \operatorname{grad} p$  является градиентом. Однако заметим, что наш анализ применим и к невязким баротропным жидкостям, для которых  $(1/\rho) \operatorname{grad} p$  также является градиентом, поскольку при  $p = g(\rho)$  можно записать

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} g'(\rho) \operatorname{grad} \rho = \operatorname{grad} G(\rho),$$

где  $G(\rho)$  — первообразная от  $g'(\rho)/\rho$ .

**Теоремы Бернулли, Кельвина и Лагранжа**

Предположим, что массовая плотность обладает потенциалом:

$$\frac{f}{\rho} = -\operatorname{grad} V.$$

Тогда из фундаментального закона динамики можно заключить, что

$$\gamma = -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho} + V \right),$$

где  $\gamma$  — ускорение.

Пусть  $\mathcal{H} = (p/\rho) + V + \frac{1}{2} |u|^2$ . Можно вывести уравнение (см. гл. 7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{curl} u \wedge u + \operatorname{grad} \mathcal{H} = 0, \quad (8.1)$$

откуда вытекает следующее утверждение.

**Теорема 8.1 (стационарное течение).** Если жидкость несжимаемая и невязкая, массовая плотность сил обладает потенциалом и течение стационарное, то  $\mathcal{H}$  не меняет своего значения вдоль каждой траектории.

**Доказательство.** Поскольку течение стационарное, уравнение (8.1) принимает вид

$$(\operatorname{curl} u) \wedge u + \operatorname{grad} \mathcal{H} = 0. \quad (8.2)$$

Умножая уравнение (8.2) скалярно на  $u$ , получим

$$u \cdot \operatorname{grad} \mathcal{H} = 0. \quad (8.3)$$

Вдоль некоторой траектории скорость  $u$  параллельна единичному вектору касательной и, в силу (8.3), производная от  $\mathcal{H}$  по криволинейной координате оказывается равной нулю; следовательно, величина  $\mathcal{H}$  остается постоянной.

*Примечание 8.1.* Если массовая плотность сил равна нулю (т. е.  $V = 0$ ), то вдоль траекторий имеем

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|u|^2 = \text{const} = \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}|u_0|^2,$$

где  $p_0$ ,  $\rho_0$  и  $u_0$  — значения, которые принимают  $p$ ,  $\rho$  и  $u$  в некоторой точке траектории. Тем самым, вычисление давления  $p$  сводится к определению кинематических величин или, наоборот, величина  $|u|$  известна, если величина  $p$  задана, как и  $p_0$ ,  $\rho_0$  и  $|u_0|$ .

**Определение 8.1.** Течение называется безвихревым, если значение  $\omega = \operatorname{curl} u$  всюду равно нулю.

Для безвихревых течений можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 8.2 (безвихревое течение).** Пусть несжимаемая невязкая жидкость заполняет область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ . Если течение жидкости безвихревое, то существует потенциал скорости  $\Phi(x, t)$ , такой, что на любой односвязной подобласти области  $\Omega_t$  выполнено

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t),$$

где  $C$  зависит только от времени.

**Доказательство.** Поскольку  $\operatorname{curl} u = 0$ , локальное поведение скорости  $u$  определяется соотношением

$$u = \operatorname{grad} \Phi.$$

Из уравнения (8.1) получим

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{H} \right) = 0,$$

откуда заключаем, что выполнено соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t),$$

где  $C$  зависит от времени  $t$ , но не от  $x$ .

Последнее соотношение выполняется в любой односвязной подобласти области  $\Omega_t$  с одной и той же постоянной  $C(t)$ : тогда потенциал  $\Phi$  однозначен. Заменяя  $\Phi$  на  $\Phi - C^*$ , где  $C^*$  — первообразная от  $C$ , мы можем предположить, что  $C = 0$ . В связной, но не в односвязной, подобласти функции не являются однозначными, и мы должны удалять кривые или поверхности из  $\Omega_t$ , чтобы сделать подобласть односвязной.

Непосредственным следствием теорем 8.1 и 8.2 служит следующий результат.

**Следствие 8.1.** *В дополнение к условиям теоремы 8.2 предположим, что течение стационарно. Тогда значение  $\mathcal{H}$  постоянно на любой односвязной подобласти той области, которую заполняет жидкость.*

**Теорема 8.3 (теорема Бернулли).** *В случае безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости потенциал скорости  $\Phi$  является гармонической функцией:*

$$\Delta \Phi = 0.$$

**Доказательство.** Поскольку течение безвихревое, существует функция  $\Phi$ , для которой локально выполнено

$$u = \operatorname{grad} \Phi.$$

По предположению жидкость несжимаема, т. е.

$$0 = \operatorname{div} u = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi.$$

Остановимся теперь на некоторых следствиях из уравнения завихренности, введенного в гл. 7.

**Теорема 8.4 (теорема Кельвина).** *Пусть рассматривается невязкая несжимаемая жидкость, для которой массовая (или объемная) сила обладает потенциалом. Тогда поток вектора вихря через поверхность, перемещающуюся вместе с течением, остается постоянным. Кроме того, циркуляция вектора скорости вокруг замкнутой кривой, двигающейся вместе с течением, также остается постоянной.*

*Примечание 8.2.* Напомним, что под «множеством точек, перемещающихся вместе с течением» понимается множество, прообраз которого в области, заполненной жидкостью в начальный момент времени, остается постоянным.

*Доказательство.* Пусть задана поверхность  $\Sigma_t$ , которая перемещается вместе с течением. Выпишем следующее уравнение, аналогичное уравнениям (1.7) и (1.8) гл. 1:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Sigma_t} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{curl}(\omega \wedge u) \right\} \cdot n \, d\Gamma,$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к  $\Sigma_t$ .

Из уравнения завихренности (7.7) гл. 7 при  $\nu = 0$  и  $f' = 0$  заключаем, что производная по времени от интеграла  $\int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma$  равна нулю, что доказывает первую часть теоремы. Напомним без доказательства следующую формулу векторного анализа:

$$\oint_{\Gamma_t} u \cdot \tau \, dl = \int_{\Sigma_t} \operatorname{curl} u \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma.$$

Здесь  $\Gamma_t$  — граница поверхности  $\Sigma_t$  и  $\tau$  — единичный вектор касательной к  $\Gamma_t = \partial\Sigma_t$ , образующий с вектором  $n$  прямой угол. Следовательно, выписанные выше интегралы остаются постоянными, если  $\Gamma_t$  и  $\Sigma_t$  перемещаются вместе с течением.

Первым следствием теоремы 8.4 является то, что вектор вихря перемещается вместе с течением (здесь следует прибегнуть к дифференциальной геометрии, чтобы дать строгое определение сказанного). Тем не менее теперь нетрудно доказать следующий результат.

**Теорема 8.5 (теорема Лагранжа).** Пусть рассматривается течение невязкой несжимаемой жидкости. Если в какой-то момент времени  $t$  течение становится безвихревым, то в дальнейшем характер течения не меняется.

*Доказательство.* Пусть поверхность  $\Sigma_t$  перемещается вместе с течением. По теореме 8.4 для всех  $t$  и  $t'$  имеем

$$\int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Sigma_{t'}} \omega \cdot n \, d\Gamma.$$

Если  $\omega = 0$  при  $t = t'$ , то

$$\int_{\Sigma_t} \omega \cdot n \, d\Gamma = 0, \quad \forall \Sigma_t \subset \Omega_t, \quad \forall t \in I.$$

Следовательно,  $\omega = 0$  во всей области  $\Omega_t$  при всех  $t$ .

*Примечание 8.3.* Теорема 8.4 применима только к совершенным жидкостям. Если жидкость вязкая, то вследствие турбулентности (разд. 9.5 гл. 9) возникает самопроизвольная завихренность, даже если течение изначально безвихревое.

## 8.2. ПЛОСКИЕ БЕЗВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В этом разделе обсуждаются плоские безвихревые стационарные течения невязких несжимаемых жидкостей. Начнем с нескольких замечаний более общего характера.

**Определение 8.2.** Говорят, что плоское течение параллельно плоскости  $\pi$ , если любой вектор скорости параллелен плоскости  $\pi$  и если поле скоростей инвариантно относительно любого параллельного переноса, ортогонального этой плоскости.

*Примечание 8.4.* Фактически плоскость  $\pi$  будет выбираться параллельной плоскости  $(Ox_1x_2)$ , так что любой вектор скорости будет иметь вид

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, 0) \\ u_2(x_1, x_2, 0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Потенциал скорости и функция тока

Пусть задано плоское течение несжимаемой жидкости. В дальнейшем вектор скорости будем обозначать через  $\vec{u} = (u, v)$ , а вместо  $x_1$  и  $x_2$  будем использовать  $x$  и  $y$ :

$$\vec{u} = [u(x, y), v(x, y), 0].$$

Для течения несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, существует локально определенная функция тока  $\Psi$ , такая, что

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Поскольку течение безвихревое, имеем  $\text{curl } \vec{u} = 0$ ; следовательно, существует локально определенный потенциал скорости  $\Phi$ , такой, что

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi,$$

откуда

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Так как  $\text{div } \vec{u} = 0$ ,  $\Delta \Phi = 0$ ; иными словами,  $\Phi$  — гармоническая функция. Аналогично,  $\Delta \Psi = 0$ , поскольку  $\text{curl } \vec{u} = 0$ .

Легко видеть, что функции  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют уравнениям Коши—Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

следовательно, функция

$$f(z, t) = (\Phi + i\Psi)(z, t), \quad z = x + iy,$$

является аналитической функцией от  $z$ , называемой комплексным потенциалом течения. Заметим, что эта функция не обязательно однозначна во всей области, заполненной жидкостью. Кроме того,

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \overline{u + iv}.$$

а) *Граничные условия*

Теперь зададим граничные условия. На границе неподвижного препятствия выпишем уравнение непроницаемости

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0,$$

которое локально эквивалентно условию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0.$$

*Примечание 8.5.* Предыдущие примечания остаются в силе для случая сжимаемой баротропной жидкости, для которой  $(1/\rho)\nabla p$  является градиентом.

б) *Линии тока*

Линии тока представляют собой кривые  $\Psi = \text{const}$ . Действительно, на линии тока нормаль параллельна  $(\Psi_{,x}, \Psi_{,y})$ , а касательная параллельна  $(\Phi_{,x}, \Phi_{,y}) = (u, v)$ .

в) *Эквипотенциальные линии*

Кривые  $\Phi = \text{const}$  называются эквипотенциальными линиями.

*Примечание 8.6.* Линии тока и эквипотенциальные линии взаимно ортогональны в любой точке.

## Элементарные стационарные плоские течения

Здесь мы остановимся на элементарных течениях, соответствующих простым функциям  $f$ . В дополнение к тому, что такие течения интересны сами по себе, их изучение полезно, как мы в этом убедимся далее, для анализа более сложных реально существующих течений, таких как плоское обтекание крыла. Эта задача соответствует классическому подходу, применявшемуся в теории крыла на ранних этапах развития аэродинамики и основанному на теории аналитических функций. В настоящее время все чаще применяются численные методы (см. гл. 8.2) для изучения обтекания крыла, хотя существовавшие ранее подходы все еще представляют интерес.

Заметим, что всякая линия тока, которая не проходит через особую точку вектора скорости (см. ниже), предполагается материальной линией, когда речь идет о граничных условиях. Таким образом, мы приходим к случаю течения совершенной жидкости в каждой из областей, ограниченных кривой.



## а) Однородные течения

В этом случае имеем  $f(z) = V_0 z \exp(-i\alpha)$ . Тогда  $\Phi = V_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ ,  $\Psi = V_0(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$ ,  $u = V_0 \cos \alpha$ ,  $v = V_0 \sin \alpha$  и  $(df/dz) = V_0 e^{-i\alpha}$ , что соответствует течению с постоянной скоростью  $V_0$  в направлении под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Линии тока являются прямыми, составляющими угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ , а эквипотенциальные линии — это прямые линии, составляющие угол  $\alpha$  с осью  $Oy$  (рис. 8.1).

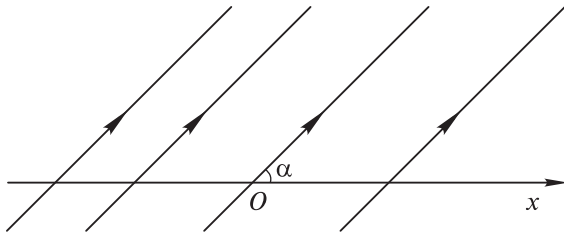


Рис. 8.1. Линии тока однородного течения

## б) Источники и стоки

Пусть  $f(z) = (D/2\pi) \log z = (D/2\pi)(\log r + i\theta)$ , где  $z = r e^{i\theta}$  и  $D$  — вещественная постоянная. Тогда

$$\Phi = \frac{D}{2\pi} \log r, \quad \Psi = \frac{D}{2\pi} \theta, \quad \frac{df}{dz} = \frac{D}{2\pi z} = \frac{D}{2\pi r} e^{-i\theta},$$

$$u = \frac{D}{2\pi r} \cos \theta, \quad v = \frac{D}{2\pi r} \sin \theta.$$

Пусть точка  $O$  на рис. 8.2 обозначает источник или сток. Линии тока — это прямые линии, содержащие точку  $O$ , а эквипотенциальные линии — это окружности с центром в точке  $O$ .

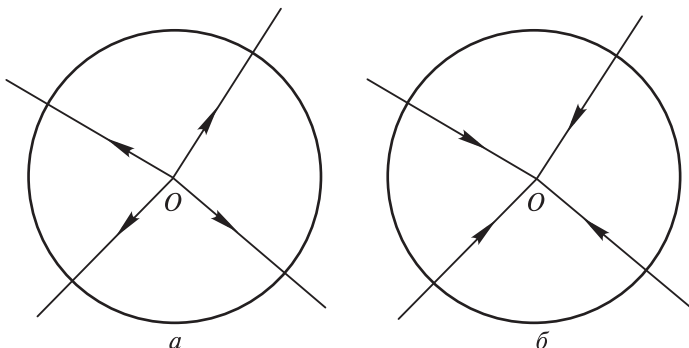


Рис. 8.2. Линии тока источника (а) и стока (б)

По определению количество жидкости, вытекающей из источника в единицу времени, т. е. расход жидкости, задается формулой

$$\int_C \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma,$$

где  $C$  — произвольная окружность с центром в точке  $O$ ; следовательно, расход жидкости оказывается равным

$$\int_0^{2\pi} \frac{D}{2\pi r_0} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r_0 \, d\theta = D.$$

Когда  $D > 0$  или  $D < 0$ , говорят, что точка  $O$  — источник или сток соответственно.

в) *Точечный вихрь*

Пусть  $f(z) = (\Gamma/2\pi i) \log z = -(i\Gamma/2\pi)(\log r + i\theta)$ , где  $\Gamma \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\Phi = (\Gamma/2\pi)\theta$ ,  $\Psi = -(\Gamma/2\pi) \log r$ ,  $(df/dz) = -(i\Gamma/2\pi z) = -(i\Gamma/2\pi r)e^{-i\theta}$ ,  $u = -(\Gamma/2\pi r) \sin \theta$  и  $v = (\Gamma/2\pi r) \cos \theta$ .

Эквипотенциальные линии представляют собой прямые линии, содержащие точку  $O$ , тогда как линии тока — окружности с центром в  $O$ . Заметим, что течение инвариантно относительно вращения вокруг точки  $O$  (рис. 8.3).

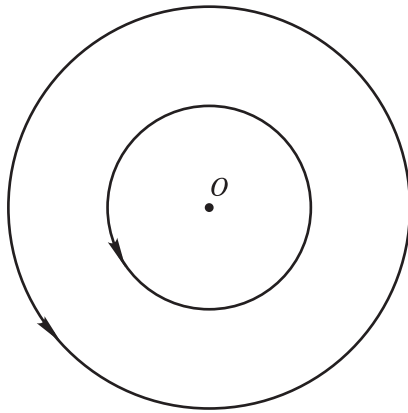


Рис. 8.3. Линии тока точечного вихря

г) *Диполь*

Пусть  $f(z) = -(K/2\pi z) = -(K/2\pi r)e^{-i\theta}$ , где  $K \in \mathbb{R}$ . Тогда  $(df/dz) = (K/2\pi z^2)$ ,  $\Psi = (K/2\pi r) \sin \theta$  и  $\Phi = -(K/2\pi r) \cos \theta$ . Следовательно, линии тока — это окружности, которые касаются оси  $Ox$  и центры которых расположены на оси  $Oy$ . Эквипотенциальные линии — это окружности, которые касаются оси  $Oy$  и центры которых расположены на оси  $Ox$  (рис. 8.4).

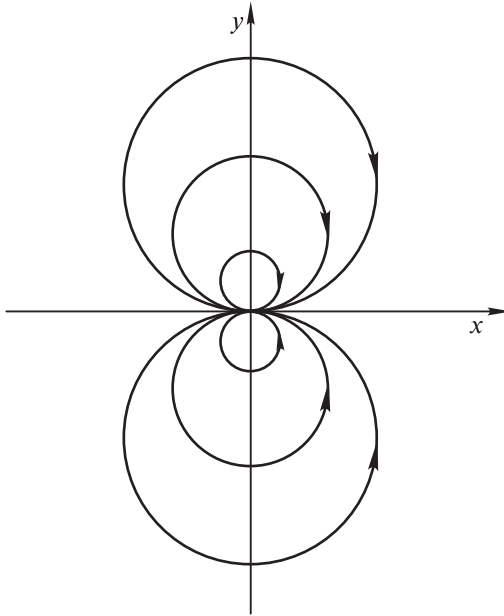


Рис. 8.4. Линии тока диполя

В этом случае говорят о диполе, расположенном в точке  $O$  и направленном вдоль оси  $Ox$ . Интенсивность (или импульс) этого диполя равна  $K$ . В более общей постановке, функция  $f(z) = -Ke^{i\alpha}/[2\pi(z - z_0)]$  задает диполь в точке  $M_0$  с комплексной координатой  $z_0$ , причем направление диполя образует угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  (достаточно использовать замену переменных  $z = z_0 + Ze^{i\alpha}$ ).

д) *Течение в угле или обтекание угла*

Для таких течений имеем  $f(z) = az^2 = ar^2e^{2i\theta}$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\Psi = ar^2 \sin 2\theta = (a/2)xy$ ,  $\Phi = ar^2 \cos 2\theta = a(x^2 - y^2)$  и  $(df/dz) = 2az$ . Отсюда заключаем, что линии тока — это гиперболы с асимптотами  $Ox$  и  $Oy$ , а также прямые линии  $x=0$  и  $y=0$ . Эквипотенциальные линии — это гиперболы, асимптоты которых являются биссектрисами.

е) *Течение с циркуляцией вокруг окружности*

Такого рода течение является некоторым приближением к обтеканию крыла и может рассматриваться как суперпозиция диполя в точке  $O$ , однородного течения и точечного вихря.

В этом случае в полярных координатах комплексный потенциал принимает вид

$$f(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z.$$

Уравнение, описывающее поведение линий тока, записывается в форме

$$V_0 \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r = C.$$

Если  $C = -(\Gamma/2\pi) \log R$ , то мы получаем окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$ . Таким образом, функция  $f$  соответствует обтеканию этой окружности.

Можно также рассматривать обтекание окружности под углом атаки  $\alpha$ . Этому случаю соответствует комплексный потенциал

$$f(z) = V_0 \left( ze^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z. \quad (8.4)$$

Здесь мы не затрагиваем такие течения, которые могут иметь сложный характер в зависимости от значений, принимаемых  $\alpha$ ,  $\Gamma$ ,  $V_0$  и  $R$ . Однако заметим, что циркуляция вектора скорости вокруг окружности точно равна  $\Gamma$ . Далее мы увидим, что циркуляция важна, поскольку она связана с подъемной силой, являющейся вертикальной компонентой равнодействующей сил давления, которые действуют со стороны воздуха на крыло.

### Расчет сил, действующих на стенку: формулы Блазиуса

Покажем, как равнодействующая сил давления, действующих со стороны жидкости на замкнутую кривую  $C$ , может быть рассчитана при помощи аналитической функции  $f$ , которая соответствует комплексному потенциалу в области, ограниченной этой кривой, являющейся линией тока. Применяемые при этом формулы называются формулами Блазиуса. Разумеется, для трехмерных течений эти силы берутся на единицу длины в ортогональном направлении к плоскости.

Плотность поверхностных сил есть  $T = \sigma \cdot n = -pn$ . По теореме Бернулли, имеем  $p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = p_1$ , где  $p_1$  — давление в точке покоя вдоль линии тока (т. е. в точке нулевой скорости или максимального давления). Таким образом,

$$p = p_1 - \frac{1}{2} \rho \left| \frac{df}{dz} \right|^2.$$

Пусть  $n = n_1 - in_2$  и  $T = T_1 - iT_2$ . Тогда

$$T = -pn = -p \left( \frac{dy + idx}{ds} \right) = -ip \frac{d\bar{z}}{ds} = -ip_1 \frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{i}{2} \rho \frac{df}{dz} \cdot \frac{d\bar{f}}{ds}.$$

На кривой  $C$  имеем

$$\frac{df}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + i \frac{d\Psi}{ds}, \quad \frac{d\Psi}{ds} = 0 \quad \text{и} \quad df = d\bar{f}.$$

Поэтому равнодействующая сил давления выражается формулой

$$\mathcal{F} = - \int_C ip_1 \frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz,$$

откуда

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz.} \quad (8.5)$$

Импульс сил давления в точке  $O$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_C (xT_2 - yT_1) ds = \int_C \operatorname{Re}(izT) ds = \\ &= \operatorname{Re} \int_C zp_1 \frac{d\bar{z}}{ds} ds - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{ds} z ds = \\ &= p_1 \operatorname{Re} \int_C \frac{d}{ds} \left( \frac{|z|^2}{2} \right) ds - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C z \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\boxed{\mathcal{M} = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C z \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz.} \quad (8.6)$$

Соотношения (8.5) и (8.6) называются формулами Блазиуса.

*Примечание 8.7.* Интегралы в выражениях для  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{M}$  могут быть вычислены, например, методом вычетов, который широко известен в комплексном анализе. В частности, для этого можно непрерывно деформировать кривую  $\mathcal{C}$  до тех пор, пока не встретится особая точка.

### Теория крыла: аналитический подход

#### а) Условие Кутта—Жуковского

Как сказано выше, в классическом подходе расчет крыла основан на теории аналитических функций. Цель состоит в определении замкнутой кривой  $\mathcal{C}$  и аналитической функции  $f$ , определенной в открытой бесконечной области, ограниченной кривой  $\mathcal{C}$ . Эта кривая должна быть линией тока и удовлетворять некоторым необходимым свойствам (в частности, обеспечивать достаточную подъемную силу, являющуюся вертикальной компонентой силы  $\mathcal{F}$ ).

Такие функции  $f$  могут быть получены суперпозицией рассмотренных выше простых функций и применением конформных отображений:

$$\tilde{z} = \tilde{h}(z), \quad z = h(\tilde{z}).$$

Здесь  $h$  и  $\tilde{h}$  — аналитические функции в соответствующих областях из  $\mathbb{C}$ . Заинтересованный читатель может ознакомиться с деталями этого подхода в специальной литературе. Мы же остановимся на нескольких существенных аспектах.

Важным частным случаем является обтекание окружности (см. уравнение (8.4)), для которого мы рассмотрим конформное отображение, имеющее особую точку на окружности. В результате получим задачу обтекания профиля с углом  $\delta\pi$ ,  $0 < \delta < 1$  (рис. 8.5). Функция  $h$  принимает вид

$$z = z_F + a(\tilde{z} - \tilde{z}_F)^q + (\text{члены порядка, большего } q),$$

где

$$(2 - \delta)\pi = q\pi, \quad q = 2 - \delta.$$

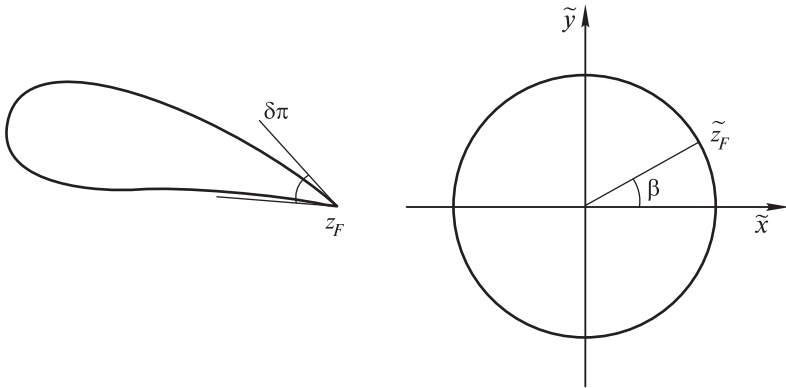


Рис. 8.5. Задняя кромка

Имеем

$$\frac{dz}{d\tilde{z}} = a(2 - \delta)(\tilde{z} - \tilde{z}_F)^{1-\delta} + (\text{члены порядка, большего } 1 - \delta),$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}} \cdot \frac{d\tilde{z}}{dz} [\tilde{f}(\tilde{z}) = f(h(\tilde{z}))].$$

Тогда производная ( $df/dz$ ) и скорости оказываются бесконечными в  $z_F$ , что неприемлемо, если только не выполнено условие

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}(\tilde{z}_F) = 0, \tag{8.7}$$

т. е.

$$V_0(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\beta)}) - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\beta} = 0 \tag{8.7'}$$

при  $\tilde{z}_F = Re^{i\beta}$ .

Соотношения (8.7) и (8.7') называют условием Кутта—Жуковского, которое позволяет вычислить циркуляцию  $\Gamma$ , что важно в задачах аэродинамики.

Применяя формулы Блазиуса и простые приемы теории аналитических функций, можно показать, что  $M = 0$  и  $\mathcal{F} = i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha}$ . Таким образом, сила сопротивления (т. е. компонента силы  $\mathcal{F}$  по направлению скорости на бесконечности  $V_0 e^{i\alpha}$ ) становится равной нулю, тогда как подъемная сила (т. е. нормальная компонента силы  $\mathcal{F}$ ) оказывается равной  $-\rho\Gamma V_0$ ; тем самым подъемная сила пропорциональна циркуляции  $\Gamma$ , что и объясняет практическую важность учета циркуляции и применения формулы Кутта—Жуковского в задачах аэродинамики.

### б) Численные методы

Ранее отмечалось, что в настоящее время на практике численные методы постепенно заменяют аналитические методы, что позволяет более гибко выбирать кривую  $\mathcal{C}$ . Кроме того, применение численных методов позволяет решать наряду с задачами гидроаэромеханики и оптимизационные задачи (например, поиск профиля  $\mathcal{C}$  для оптимизации подбора некоторых параметров течения с целью максимального увеличения подъемной силы).

Вообще говоря, численные методы не позволяют выполнять вычисления во всем пространстве; поэтому обычно пространство  $\mathbb{R}^2$  заменяется достаточно большим прямоугольником  $0 < x < \ell$ ,  $|y| \leq L$ , после чего решается краевая задача для определения  $\Phi$  или  $\Psi$  в открытой области, состоящей из части прямоугольника вне кривой  $\mathcal{C}$  (рис. 8.6).

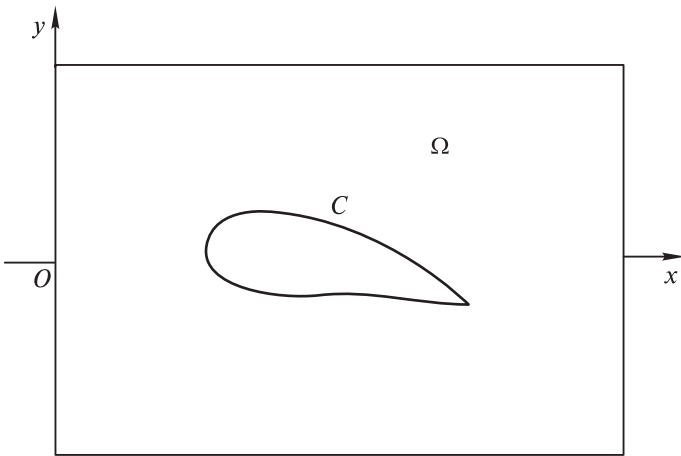


Рис. 8.6. Область  $\Omega$  в численных методах

Например, для  $\Psi$  можно записать

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\Psi = \gamma = \text{const} \quad \text{на } \mathcal{C}.$$

Здесь константа  $\gamma$  не известна, однако условие Кутта—Жуковского дает алгебраическое условие, которое «компенсирует» этот недостаток информации:

$$\int_C \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl = \Gamma.$$

И наконец, условия на границе прямоугольника выписываются из предположения, что прямоугольник настолько велик, что на его краях можно пренебречь возмущениями, вызванными профилем. Например, разумно предположить, что

$$\begin{aligned} \Psi &= V_0 y, & x &= 0, & |y| &\leq L, \\ \Psi &= V_0 y, & \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, & x &= \ell, & |y| &\leq L, \\ \Psi &= \pm V_0 L, & y &= \pm L, & 0 < x < \ell. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют математически корректную задачу, численное решение которой не составляет серьезных трудностей на современных компьютерах.

### 8.3. ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим плоские безвихревые стационарные течения *сжимаемых* невязких жидкостей. Как и в разд. 8.2, поле скоростей обозначается как

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} (x, y).$$

Тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0.$$

Условие отсутствия вихрей записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Уравнения импульса

$$\rho \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) + \operatorname{grad} p = f$$

дает возможность вычислить  $p$  по известным  $\rho$  и  $|\vec{u}|$  при условии, что  $\rho \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right)$  действительно является градиентом.



Ниже будем предполагать, что  $f = 0$  и жидкость баротропна. Тогда уравнение импульса принимает вид (см. гл. 7)

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) + \frac{1}{\rho} g'(\rho) \nabla \rho = 0, \quad (8.8)$$

откуда

$$\int \frac{g'(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 = \text{const}, \quad (8.9)$$

где знак интеграла означает первообразную.

Из уравнения (8.9) следует, что плотность  $\rho$  является функцией от  $|\vec{u}|$ , т. е. от модуля скорости  $\vec{u}$ . Величина  $(dp/d\rho) = c^2 = g'(\rho)$  называется локальной скоростью звука. Пусть  $[dp(\rho)]/\rho = dh(\rho)$ , где  $h$  — удельная энтальпия. Тогда уравнение (8.9) может быть записано в форме

$$h + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 = \text{const}. \quad (8.10)$$

Поскольку вихри отсутствуют, существует потенциал скорости, такой, что локально выполнено

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Аналогично, существует функция  $\Psi$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Следовательно, функции  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0, \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (8.12)$$

Из (8.9) следует, что  $\rho$  — функция от  $|\vec{u}|^2$ , а уравнения (8.11) и (8.12) нелинейны по  $\Phi$  и  $\Psi$  соответственно. Несмотря на кажущуюся простоту, эти уравнения в действительности весьма сложны, а математическая теория их решения (включая вопросы существования и единственности решений и их аппроксимацию) далека от своего полного построения.

Функции  $h$ ,  $p$ ,  $\rho$  и  $c$  являются убывающими по  $q = |\vec{u}|$ . Действительно,  $h = \text{const} - q^2/2$ , откуда следует, что  $h(q)$  — убывающая функция. Поскольку  $(dp/dh) = \rho > 0$ , функция  $p(h)$  возрастающая, а это означает, что  $q \mapsto p(q)$  — убывающая функция. Далее,  $p = g(\rho)$  и  $g'(\rho) > 0$ . Следовательно,  $p(\rho)$  — возрастающая функция, т. е.  $\rho(p)$  возрастает, а  $\rho(q)$  убывает. И наконец,

$c^2 = (dg/d\rho)$  и  $(d^2g/d\rho^2) \geq 0$ ; поэтому  $(dc^2/d\rho) \geq 0$  и  $c^2(\rho)$  — возрастающая функция. Отсюда заключаем, что  $c = c(q)$  — убывающая функция.

**Определение 8.3.** Назовем  $M = (q/c)$  локальным числом Маха. Это число может рассматриваться как возрастающая функция от  $q$ . Если в какой-то точке выполнено  $M > 1$  или  $M < 1$ , то течение называется сверхзвуковым или дозвуковым соответственно. Линия  $M = 1$  называется звуковой.

Величина  $\rho q$  может быть найдена из уравнения

$$\frac{d(\rho q)}{\rho q} = \frac{dq}{q} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dq}{q} + \frac{dh}{c^2} = \frac{dq}{q} - \frac{q}{c^2} dq = \frac{dq}{q} (1 - M^2).$$

Таким образом, величина  $\rho q$  достигает своего максимума как функция от  $q$  при  $M = 1$ .

Выписанные выше скалярные функции выражаются (или могут быть выражены) через  $q$ ; чтобы выразить  $\vec{u}$  через  $q$ , запишем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dp}{c^2\rho} = \frac{dh}{c^2} = -q \frac{dq}{c^2}, \\ \frac{1}{\rho} \nabla\rho &= -\frac{1}{2c^2} \nabla(q^2). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение для  $\Phi$  принимает вид

$$\rho\Phi_{,xx} + \rho\Phi_{,yy} + \nabla\rho \cdot \nabla\Phi = 0,$$

или

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} + \frac{1}{\rho} \nabla\rho \cdot \nabla\Phi = 0.$$

Тогда

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} - \frac{1}{c^2} (\Phi_{,x}^2 \Phi_{,xx} + 2\Phi_{,x}\Phi_{,y}\Phi_{,xy} + \Phi_{,y}^2 \Phi_{,yy}) = 0.$$

После упрощений мы получим следующее уравнение для  $\Phi$ :

$$\left(1 - \frac{\Phi_{,x}^2}{c^2}\right) \Phi_{,xx} - \frac{2}{c^2} \Phi_{,x}\Phi_{,y}\Phi_{,xy} + \left(1 - \frac{\Phi_{,y}^2}{c^2}\right) \Phi_{,yy} = 0. \quad (8.13)$$

Рассмотрим коэффициенты при  $\Phi_{,xx}$ ,  $\Phi_{,xy}$ ,  $\Phi_{,yy}$  и положим

$$\delta = \frac{\Phi_{,x}^2 \Phi_{,y}^2}{c^4} - \left(1 - \frac{\Phi_{,x}^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\Phi_{,y}^2}{c^2}\right) = \frac{\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2}{c^2} - 1 = M^2 - 1.$$

Согласно теории уравнений в частных производных (см. разд. 8.5), уравнение (8.13) является гиперболическим при  $M > 1$  (течение сверхзвуковое) и имеет место распространение волн (ударных волн). В области, в которой

$M < 1$  (течение дозвуковое), уравнение (8.13) является эллиптическим. Как уже говорилось, в настоящее время аналитического решения этого уравнения не найдено, однако оно достаточно легко может быть решено численно.

Как и для случая несжимаемой жидкости, заменим пространственную область на большой прямоугольник, содержащий кривую  $C$ :  $0 < x < \ell$ ,  $|y| \leq L$  (см. рис. 8.6). Этот прямоугольник имеет достаточно большие размеры, чтобы возмущения, вызванные кривой  $C$ , оказались пренебрежимо малыми на внешней границе прямоугольника.

Тогда уравнение (8.13) решается в области  $\Omega$ , являющейся частью прямоугольника вне кривой  $C$ . Это уравнение дополняется граничными условиями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C$$

и, например,

$$\begin{cases} \pm \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -V_0 & \text{при } x = 0 \text{ или } \ell, \quad |y| \leq L, \\ \pm \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 & \text{при } y = \pm L, \quad 0 < x < \ell. \end{cases}$$

*Примечание 8.8.*

1. Можно сформулировать аналогичную краевую задачу для функции  $\Psi$ . Однако соответствующее уравнение менее интересно, чем в случае плоского безвихревого течения, для которого плотность является функцией, однозначно определенной величиной  $|\nabla \Phi|$ . Для заданного  $|\nabla \Psi|$ , однако, существуют два возможных значения плотности, которые соответствуют дозвуковым и сверхзвуковым течениям.

2. В аэродинамике вместо условия отсутствия вихря вводят вязкость.

#### 8.4. ЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

Звук распространяется в воздухе или воде с бесконечно малыми изменениями плотности и давления, поскольку эти среды сжимаемы. Уравнения линейной акустики выводятся из уравнений для сжимаемой жидкости с использованием асимптотических разложений в предположении, что перемещения такого рода сред (воздух или вода) незначительны.

Действительно, в силу сложности решаемых задач разумно учитывать малость определенных параметров, что дает возможность применять линеаризацию и, тем самым, упрощать модели. Принцип линеаризации весьма прост: пусть параметр  $\eta$  мал; тогда можно делать заключения о порядках изменения различных физических величин, зависящих от  $\eta$ , что в отсутствие строгих математических доказательств требует хорошего понимания физической сущности решаемой задачи. В качестве примеров применения

линеаризации можно указать линеаризованные модели распространения волн в жидких средах или же уравнения Стокса. Другие волновые явления будут рассмотрены в четвертой части этой книги на основе широкого применения асимптотических разложений.

В этом разделе мы приступим к изучению мелкомасштабных движений совершенной сжимаемой жидкости, что приведет нас к уравнениям линейной акустики. Будем предполагать, что жидкость баротропна, почти неподвижна и не подвержена действию внешних сил. Пусть в состоянии покоя жидкость имеет давление  $p_0$  и объемную плотность  $\rho_0$ , а соответствующая скорость звука равна  $c_0$ . В заключение остановимся на следующем предположении.

### Предположение о «бесконечно малом» движении

Пусть скорость  $u$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$  могут быть представлены в форме

$$u = \eta \bar{u} + o(\eta), \quad p = p_0 + \eta \bar{p} + o(\eta), \quad \rho = \rho_0 + \eta \bar{\rho} + o(\eta),$$

в которой асимптотические разложения определены в области  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega} \cdot 0, T]$ , где  $k = 2$  или  $3$ .

Теперь мы можем выписать формальные асимптотические разложения уравнений. С точностью до  $o(\eta)$  уравнение неразрывности принимает вид

$$\eta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \eta \bar{u}) = 0;$$

следовательно,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{u} = 0. \quad (8.14)$$

В уравнении импульса мы пренебрегаем членами порядка  $\eta^2$  и выше:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \bar{p} = 0. \quad (8.15)$$

Поскольку  $\bar{p} = \frac{dg}{d\rho}(\rho_0) \cdot \bar{\rho} + o(1)$ , мы можем пренебречь членами порядка  $\eta^2$  и выше:

$$\bar{p} = c_0^2 \bar{\rho}. \quad (8.16)$$

Исключая  $\bar{u}$ , мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \bar{\rho} = 0, \quad (8.17)$$

где  $c_0$  — скорость распространения волны (см. гл. 18). Это уравнение относится к классу гиперболических (см. приложение к данной книге) и моделирует явления, связанные с распространением волн (в данном случае распространение звука).

*Примечание 8.9.* Преобразом волнового уравнения служит  $\square\rho = 0$ , где  $\square$  — даламбертиан, что соответствует случаю  $c_0 = 1$  в уравнении (8.17).

Применяя соответствующие подстановки, мы приходим к похожим волновым уравнениям для  $\bar{p}$  и  $\bar{u}$ :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \bar{p} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - c_0^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = 0.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим движение стационарной совершенной несжимаемой жидкости под действием тяжести. Пусть  $\rho$  — удельная масса жидкости, а ее скорость  $U$  выражается формулами

$$U_1 = -\frac{x_2}{r} \Phi(r), \quad U_2 = \frac{x_1}{r} \Phi(r), \quad U_3 = \Psi(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (8.18)$$

а) Показать, что это движение подчиняется законам динамики совершенной несжимаемой жидкости.

б) Вычислить линии тока.

в) Вычислить  $\Phi$  и  $\Psi$  для случая безвихревого течения и выписать уравнение для плотности.

2. Рассмотрим плоское безвихревое движение стационарной несжимаемой жидкости с комплексным потенциалом  $f(z) = m \log\left(z - \frac{1}{z}\right)$ ,  $m > 0$ .

а) Вычислить функцию тока  $\psi$  и потенциал скорости  $\phi$ .

б) Показать, что линии тока — это координатные оси и единичная окружность.

3. Пусть плоское нестационарное течение определяется в каждый момент времени  $t$  вектором скорости  $U = (u, v)$ , где

$$u = \alpha c e^{ky} \sin[k(x - ct)],$$

$$v = -\alpha c e^{ky} \cos[k(x - ct)]$$

и  $\alpha, k, c > 0$ . Пусть  $Oz$  — ось, ортогональная плоскости  $(Oxy)$ . Показать, что течение безвихревое, а жидкость несжимаема; вычислить линии тока при  $t = 0$ .

4. Пусть совершенный газ совершает адиабатическое стационарное и безвихревое движение. Пусть потенциал скорости имеет вид  $\Phi(r)$ , где  $r$  — расстояние частицы жидкости от начала координат.

а) Показать, что скорость  $\vec{U}$  и плотность  $\rho$  зависят только от  $r$ .

б) Показать, что  $r^2 \rho U = \text{const}$ , где  $\vec{U} = U(r) \vec{e}_r$ .

в) Выразить  $r^2$  через число Маха  $M$  и показать, что невозможно описать движение внутри сферы  $(S)$  (предполагается, что  $U^2 = c_0^2 M^2 / [1 + (\gamma - 1) M^2 / 2]$ )

и  $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}}$ , где  $c_0$  — скорость звука и  $\gamma$  — показатель адиабаты).

**5.** Пусть невязкая жидкость плотности  $\rho$  вытекает из небольшого отверстия радиуса  $r$  в основании большого резервуара. Предположим, что давление в отверстии постоянно и равно давлению на свободной поверхности в резервуаре и что равновесие жидкости в резервуаре не нарушается (т. е. течение остается стационарным). Вычислить расход жидкости.

## ВЯЗКИЕ ЖИДКОСТИ И ТЕРМОГИДРАВЛИКА

Эта глава посвящена изучению задач механики вязкой жидкости и термогидравлики. Рассматриваются несколько простых классических задач в качестве элементарных примеров очень сложных явлений, таких как турбулентность и пограничный слой.

### 9.1. УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Вначале напомним уравнения Навье–Стокса, которые описывают движение вязкой несжимаемой однородной жидкости (см. гл. 7). Скорость  $u = (u_1, u_2, u_3)$  и давление  $p$  как функции от  $x$  и  $t$  удовлетворяют уравнениям

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \text{grad } p = \mu \Delta u + f, \quad (9.1)$$

$$\text{div } u = 0. \quad (9.2)$$

Эти уравнения дополним граничным условием непроскальзывания

$$u = \varphi \quad \text{на границе}, \quad (9.3)$$

где  $\varphi$  — заданная регулярная функция в случае жесткой границы; в случае свободной границы граничные условия принимает вид

$$u \cdot n = 0, \quad (\sigma \cdot n)_\tau = 0 \quad \text{на границе}, \quad (9.3')$$

где  $(v)_\tau$  — касательная составляющая вектора  $v$ .

### 9.2. ПРОСТЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Остановимся на нескольких классических примерах стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

#### Течение Пуазейля между двумя параллельными плоскостями

а) *Двумерный случай*

Рассмотрим стационарные двумерные течения между двумя закрепленными параллельными плоскостями  $x_2 = \pm h$  при отсутствии внешних сил. Будем

искать поля скоростей  $u = (u_1, u_2)$ , такие, что  $u_2 = 0$  и  $u_1 = u_1(x_2)$ , т. е.  $\operatorname{div} u = 0$ . Тогда уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $p = p(x_1)$ . Более того,

$$\frac{dp}{dx_1}(x_1) = \mu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}(x_2) = -K,$$

где  $K$  — градиент перепада давления (линейная скорость перепада давления на единицу длины). Тогда

$$\begin{aligned} p &= -Kx_1, \\ u_1 &= -\frac{K}{2\mu} x_2^2 + \alpha x_2 + \beta. \end{aligned}$$

Из граничного условия непротекания следует

$$u_1 = \frac{K}{2\mu} (h^2 - x_2^2).$$

Профиль скорости имеет вид параболы (рис. 9.1).

Пусть теперь верхняя плоскость  $x_2 = h$  перемещается со скоростью  $U_0 \vec{e}_1$ , а нижняя плоскость закреплена (для простоты примем, что ее уравнение

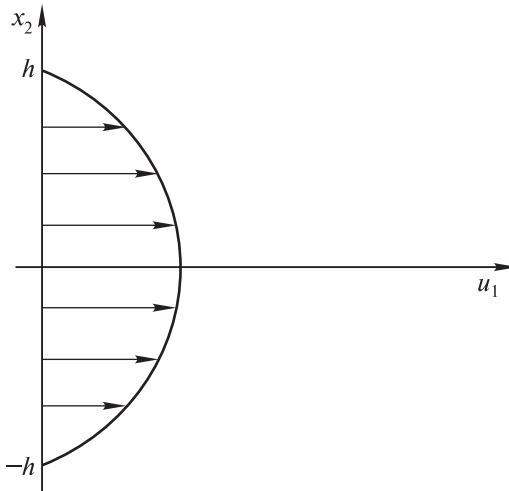


Рис. 9.1. Профиль скорости для течения Пуазейля



имеет вид  $x_2 = 0$ ). В этом случае также имеем

$$u_1 = -\frac{K}{2\mu} x_2^2 + \alpha x_2 + \beta,$$

откуда с учетом граничных условий получим

$$u_1 = -\frac{K}{2\mu} x_2(x_2 - h) + U_0 \frac{x_2}{h}.$$

Если  $K = 0$ , то функция  $u_1$  линейная, а соответствующее течение называют течением Куэтта.

### б) Трехмерный случай

Снова рассмотрим стационарное течение между двумя параллельными плоскостями  $x_3 = \pm h$  при отсутствии внешних сил. Будем искать поле скоростей  $u$ , такое, что  $u_2 = u_3 = 0$  и  $u_1 = u_1(x_3)$ . Как и выше, имеем

$$p = -Kx_1,$$

$$u_1 = \frac{K}{2\mu} (h^2 - x_3^2), \quad (9.4)$$

когда плоскости закреплены, и

$$u_1 = -\frac{K}{2\mu} x_3(x_3 - h) + U_0 \frac{x_3}{h},$$

когда верхняя плоскость перемещается со скоростью  $U_0 \vec{e}_1$ , а нижняя плоскость  $x_3 = 0$  закреплена.

### Течение Пуазейля в цилиндрической трубе

Обозначим ось цилиндрической трубы через  $Ox_1$ , а ее поперечное сечение через  $\Omega$ . Будем искать течение, такое, что линии тока параллельны  $Ox_1$ , т. е.  $u_2 = u_3 = 0$  и  $u_1 = u_1(x_2, x_3)$  (рис. 9.2). Тогда

$$-\mu \Delta u_1(x_2, x_3) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0.$$

Следовательно, давление  $p$  зависит только от  $x_1$ , откуда заключаем, как и выше, что существует такая константа  $K$ , что

$$\frac{dp}{dx_1} = \mu \Delta u_1 = -K.$$

Течение полностью определяется функцией  $u_1(x_1, x_2)$ , которая является решением следующей краевой задачи Дирихле в области  $\Omega$ :

$$\begin{cases} -\mu \Delta u_1 = K & \text{в } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

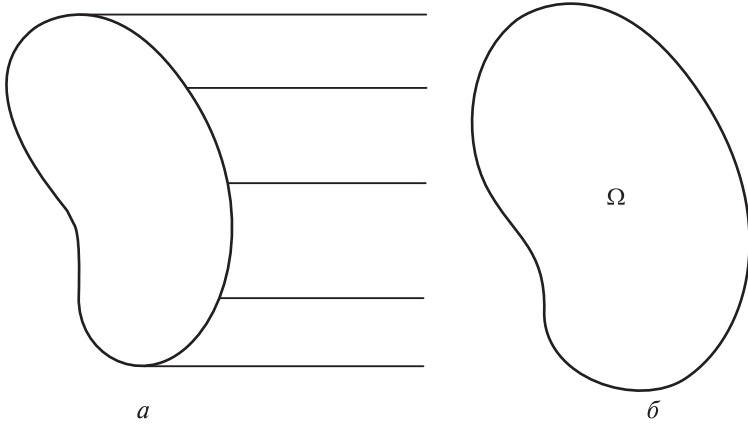


Рис. 9.2. Течение в цилиндрической трубе (а) и сечение трубы (б)

Рассмотрим частный случай, когда  $\Omega$  — диск с уравнением в полярных координатах  $r \leq R$ . Напомним, что в цилиндрических координатах выполнено

$$\Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}.$$

Будем искать решение  $u_1$ , такое, что  $\partial u_1 / \partial \theta = 0$ ; тогда,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = -\frac{K}{\mu},$$

$$u_1 = -\frac{K}{4\mu} r^2 + \alpha \log r + \beta.$$

Из непрерывности функции  $u$  в нуле следует, что  $\alpha = 0$ ; принимая во внимание граничное условие  $u_1 = 0$  при  $r = R$ , получим

$$u_1 = \frac{K}{4\mu} (R^2 - r^2). \quad (9.5)$$

*Примечание 9.1.* Этот результат является центральным в инженерных расчетах течений в трубах. Скорость потока в канале имеет вид

$$D = \int_{\Omega} u_1(x_2, x_3) dx_2 dx_3 = 2\pi \int_0^R u_1(r) r dr.$$

Следовательно,

$$D = \frac{K\pi R^4}{8\mu}.$$

Таким образом, скорость потока пропорциональна линейному перепаду давления  $K$  и четвертой степени радиуса диска, что соответствует экспериментальным законам Пуазейля.

*Примечание 9.2.* На практике полученные результаты справедливы для небольших радиусов и умеренных градиентов давления. В противном случае течение может оказаться турбулентным, а решение может зависеть от времени или быть стационарным, но отличающимся от рассмотренного. В разд. 9.5 мы остановимся на этом вопросе более подробно.

### Течение между двумя коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта–Тейлора)

Запишем уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах при отсутствии внешних сил, оставляя в стороне необходимые для этого выкладки. Пусть  $(r, \theta, z)$  – цилиндрическая система координат и  $(e_1, e_2, e_3)$  – канонический базис в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Положим  $u = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z$ , где  $(e_r, e_\theta, e_z = e_3)$  – локальный базис в цилиндрических координатах. Тогда

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \nu \left( \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + u \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \nu \left( \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + u \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - \nu \Delta u_z + u \cdot \nabla u_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (9.8)$$

Для скалярной функции  $v$  имеем

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{\partial v}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial v}{\partial z} e_z, \\ \Delta v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим стационарное течение между двумя цилиндрами радиуса  $R_1$  и  $R_2$ ,  $0 < R_1 < R_2$ , с общей осью  $Oz$ . Пусть эти цилиндры вращаются с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Будем искать решение, такое, что  $u_z = 0$ , а  $u_r$ ,  $u_\theta$  and  $p$  зависят только от  $r$ . Тогда

$$\operatorname{div} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) = 0,$$

откуда

$$r u_r = c_0 \text{ (const)}$$

и

$$u_r = \frac{c_0}{r}.$$

Из граничных условий  $u_r = 0$  при  $r = R_1, R_2$  следует, что  $c_0 = 0$  и  $u_r = 0$ . Осталось определить  $u_\theta$  и  $p$ . Полагая  $\rho = 1$  и принимая некоторые другие

упрощения, получим

$$-\frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (9.9)$$

$$-\nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] = 0. \quad (9.10)$$

Уравнение (9.10) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) = 0.$$

Положим  $y = (ru_\theta)'$ ,  $(\partial/\partial r =')$  и получим

$$y' - \frac{1}{r} y = 0.$$

Следовательно,

$$y = Cr,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) = Cr,$$

$$u_\theta = Cr + \frac{D}{r},$$

где  $C$  и  $D$  — константы. Эти константы определяются граничными условиями

$$u_\theta = R_i \omega_i \quad \text{при} \quad r = R_i, \quad i = 1, 2,$$

из которых следует, что

$$C = \frac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_1^2 - R_2^2},$$

$$D = -\frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_1^2 - R_2^2}.$$

Окончательно имеем

$$u_\theta = \frac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_1^2 - R_2^2} r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r (R_1^2 - R_2^2)}. \quad (9.11)$$

Подставляя (9.11) в (9.9), получим

$$\frac{\partial p}{\partial r} = C^2 r + \frac{D^2}{r^3} + 2 \frac{CD}{r}.$$

Следовательно,

$$p = C^2 \frac{r^2}{2} - \frac{D^2}{2r^2} + 2CD \log r,$$

где  $C$  и  $D$  определены выше.

*Примечание 9.3.* Полученные выражения для  $u_\theta$  и  $p$  позволяют простым образом определить вращающий момент на единицу длины, при котором цилиндры равномерно вращаются.

### 9.3. ТЕРМОГИДРАВЛИКА

Общие уравнения для ньютоновских жидкостей (см. гл. 7) выводятся в предположении, что жидкость не проводит тепло или что температура постоянна. Теперь мы остановимся на уравнениях Буссинеска, описывающих эволюцию слабосжимаемых жидкостей, когда тепловые процессы принимаются во внимание.

Поведение локальной температуры  $T = T(x, t)$  описывается уравнением (6.6) гл. 6, эквивалентным уравнению сохранения энергии. Меняя обозначения гл. 6 ( $\theta$ ,  $U$  и  $\kappa$  заменим на  $T$ ,  $u$  и  $\tilde{\kappa}$  соответственно), полагая  $C_V = 1$  и пренебрегая членом  $\sigma_{ij}U_{i,j}$ , получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla)T - \tilde{\kappa}\Delta T = r. \quad (9.12)$$

Пусть  $\kappa = \tilde{\kappa}/\rho_0$  и источник тепла отсутствует ( $r = 0$ ); тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla)T - \kappa\Delta T = 0, \quad (9.13)$$

где  $\kappa$  — коэффициент термодиффузии.

Для слабосжимаемых однородных жидкостей в приближении Буссинеска уравнения (7.1) и (7.2) гл. 7, выражающие законы сохранения массы и импульса, могут быть упрощены в предположении, что *плотность  $\rho = \rho_0$  в них постоянна, кроме члена, соответствующего силе тяжести.*

Для силы тяжести плотность  $\rho$  заменяется следующей линейной функцией от  $T$ :

$$\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0).$$

Таким образом, уравнение (7.1) сводится к уравнению

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (9.14)$$

а уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla \frac{p}{\rho_0} - \nu\Delta u = \frac{\alpha g}{\rho_0} \mathbf{k}(T - T_0), \quad (9.15)$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор восходящей нормали. Уравнения (9.13), (9.14) и (9.15) называют уравнениями Буссинеска для слабосжимаемых жидкостей.

Дополним эти уравнения граничными условиями. Для функции  $u$  примем условия разд. 1 этой главы или гл. 7. Для температуры  $T$  возьмем граничные

условия Дирихле (проводящий материал расположен на границе и температура задана) или Неймана (заданный расход тепла на границе  $\partial\Omega$ ). Смешанные граничные условия являются их комбинациями.

В термогидравлике задача Бенара состоит в изучении процесса нагрева снизу горизонтального слоя жидкости, заключенного между плоскостями (стенками)  $x_2 = 0$  и  $x_2 = L_2$ .

Пусть жидкость занимает область  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$  в двумерном случае или область  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$  в трехмерном случае. Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — канонический базис пространства  $\mathbb{R}^3$  и  $e_2$  — единичный вектор восходящей нормали. Тогда уравнения движения принимают вид (9.13), (9.14) и (9.15) при  $\mathbf{k} = e_2$ . Предположим, например, что граница области  $\Omega$  материализована и закреплена, а нижняя и верхняя теплопроводящие стенки нагреваются при температуре соответственно  $T_1$  и  $T_2$ ,  $T_1 > T_2$ . Пусть, наконец, боковые стенки не теплопроводны. Тогда уравнения (9.13), (9.14) и (9.15) могут быть дополнены следующими граничными условиями:

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{9.16}$$

$$\left. \begin{aligned} T = T_1 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \quad \text{и} \quad T = T_2 \quad \text{при} \quad x_2 = L_2, \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{на боковой границе области} \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{9.17}$$

Здесь  $\partial T / \partial n = n \cdot \text{grad} T$  — производная температуры  $T$  по нормали, т. е. скалярное произведение  $\text{grad} T$  и единичного вектора внешней нормали  $n$ .

Легко видеть, что следующие соотношения определяют решение уравнений (9.14) и (9.15), которое соответствует равновесию жидкости и термодиффузии вследствие проводимости:

$$\left. \begin{aligned} u_s = 0, \quad T_s = T_1 + \frac{x_2}{L_2} (T_2 - T_1), \\ p_s = \alpha g \left[ (T_1 - T_0)x_2 + \frac{x_2^2}{2L_2} (T_2 - T_1) \right], \\ \rho_s = \rho_0 - \alpha(T_1 - T_0) - \frac{\alpha x_2}{L_2} (T_2 - T_1). \end{aligned} \right\} \tag{9.18}$$

Выписанное решение стационарно.

Полагая  $\theta = T - T_s$  и  $q = p - p_s$ , приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla q = e_2 \frac{g\alpha}{\rho_0} \theta, \tag{9.19}$$

$$\text{div} u = 0, \tag{9.20}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \Delta \theta + (u \cdot \nabla)\theta = -\frac{T_2 - T_1}{L_2} u_2. \tag{9.21}$$

Для  $u$  граничные условия имеют вид (9.16), а для  $\theta$  — вид

$$\left. \begin{aligned} \theta = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = L_2, \\ \partial \theta / \partial n = 0 \quad \text{на боковой границе области} \Omega. \end{aligned} \right\} \tag{9.22}$$

*Примечание 9.4.* Граничные условия (9.16) и (9.17) служат примерами граничных условий, адекватных рассматриваемой задаче. Другие возможные граничные условия, соответствующие другим физическим условиям, также могут быть сформулированы (например, на верхней границе жидкости  $x_2 = L_2$  могут быть поставлены условия свободной границы).

*Примечание 9.5.* В разд. 9.5 мы увидим, как могут быть получены стационарные решения типа (9.4), (9.5) и (9.11) для течений жидкости или типа (9.18) в задачах термогидравлики. Этот вопрос связан с понятиями устойчивости и турбулентности.

Прежде чем перейти к обсуждению этих понятий остановимся на безразмерной форме рассмотренных уравнений и на связанной с ней концепции подобия.

#### 9.4. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПОДОБИЕ

В физике принято выписывать уравнения в безразмерной форме, независимой от системы единиц, когда различные величины (длина, время и др.) выражаются относительно величин, характерных для исследуемого явления. Такой подход имеет следующие преимущества. Физические величины заменяются характерными безразмерными, что дает возможность соотносить друг с другом различные явления и говорить о степени подобия между ними. Процедура обезразмеривания выявляет большие и малые параметры, порядок величины которых становится существенным для понимания физического явления. В качестве примера выпишем безразмерные уравнения Навье–Стокса и Буссинеска.

Сначала рассмотрим уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \nu \Delta u + \frac{1}{\rho_0} f,$$

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Положим

$$x = L_c x', \quad u = U_c u', \quad t = T_c t',$$

$$p = P_c p', \quad f = F_c f',$$

где  $L_c$ ,  $U_c$ ,  $T_c$ ,  $P_c$  и  $F_c$  — характерные длина, скорость, время, давление и сила. Например, выберем для длины  $L_c$  диаметр объема, заполненного жидкостью, в случае стесненного течения или диаметр тела в случае его обтекания; для  $U_c$  — характерную скорость жидкости (среднюю скорость на границе в случае стесненного течения или скорость на бесконечности в случае свободного течения). Выбрав эти два параметра, мы можем выписать другие величины при помощи выражений, соответствующих их физическим единицам. Сделанный нами выбор дает следующие характерные время, давление и силу:

$$T_c = L_c U_c, \quad P_c = \rho_0 U_c^2, \quad F_c = \rho_0 L_c / T_c^2.$$

Тогда уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla')u' + \nabla' p' = \frac{1}{R} \Delta' u' + f', \quad (9.23)$$

$$\operatorname{div}' u' = 0, \quad (9.24)$$

где  $R = U_c L_c / \nu$  — число Рейнольдса.

Из уравнений (9.23) и (9.24) заключаем, что теперь течение зависит только от одного параметра — числа Рейнольдса. Например, пусть известно стационарное обтекание вокруг сферы радиуса  $2a$ , помещенной в жидкость, скорость которой на бесконечности равна  $U_\infty/2$ ; тогда обтекание сферы радиуса  $a$ , помещенной в жидкость такого же рода, скорость которой на бесконечности равна  $U_\infty$ , полностью определено в силу соотношений подобия: в обоих случаях числа Рейнольдса одинаковы и остается только перейти от одного решения к другому при помощи соответствующего масштабирования. Рассмотренный пример иллюстрирует возможное применение подобия течений. В аэродинамике широко применяется метод масштабных моделей, основанный на соотношениях подобия между течениями (например, обтекание крыла или всего самолета экспериментально моделируется в аэродинамической трубе обтеканием модели меньшего размера).

*Примечание 9.6.* В механике жидкости и газа возникают существенные трудности в связи с тем, что числа Рейнольдса могут принимать очень большие значения в случае наиболее интересных течений: например, от  $10^6$  до  $10^8$  в аэродинамике или в промышленных приложениях гидромеханики (насосы и др.). Это число уже довольно велико даже для течений, возникающих при помешивании ложкой в чашке кофе. Числа Рейнольдса порядка единицы соответствуют очень медленным течениям или же жидкостям, вязким как мед. Числа Рейнольдса, большие  $10^8$ , появляются в задачах метеорологии, в которых и другие сложности должны приниматься во внимание.

Подобным же образом можно получить безразмерные уравнения Буссинеска (9.19)–(9.21), соответствующие задаче Бенара. Как и выше, эта процедура выполняется для переменных  $x$ ,  $u$ ,  $t$  и  $p$  с помощью  $L_c = L_2$  и  $T_c = (L_2/g)^{1/2}$ . Для температуры полагаем  $\theta = (T_1 - T_2)\theta'$ . В результате приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla')u' - \nu' \Delta' u' + \nabla' p' = e_2 \alpha' \theta', \quad (9.25)$$

$$\operatorname{div}' u' = 0, \quad (9.26)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t'} + (u' \nabla')\theta' - \kappa' \Delta' \theta' = u'_2, \quad (9.27)$$

где

$$\kappa' = \frac{\kappa L_2}{T_1 - T_2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{g^{1/2} L_2^{3/2}}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\rho_0} (T_1 - T_2).$$



Теперь течение зависит только от двух *безразмерных чисел*  $\kappa'$  и  $\nu'$ . Наряду с другими в термодинамике принято рассматривать следующие числа:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\nu'}\right)^2 &= \text{Gr} = \text{число Грасгофа,} \\ \frac{\nu'}{\kappa'} &= \text{Pr} = \text{число Прандтля,} \\ \frac{1}{\nu'\kappa'} &= \text{Ra} = \text{число Рэлея.} \end{aligned}$$

*Примечание 9.7.* Для упрощения обозначений мы опустим штрихи в безразмерных уравнениях (9.25)–(9.27) и будем далее на них ссылаться, как будто они выписаны без штрихов.

## 9.5. ПОНЯТИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В этом и следующем разделах мы кратко остановимся на весьма сложных явлениях гидромеханики, являющихся в настоящее время предметом исследований в экспериментальных лабораториях и имеющих важное прикладное и теоретическое значение, а именно на устойчивости, турбулентности и пограничном слое. Наше обсуждение этих важных явлений будет носить довольно поверхностный характер на примерах очень простых моделей.

Проблемы устойчивости и турбулентности возникают, например, при исследовании вопросов появления стационарных течений, описываемых уравнениями (9.4), (9.5), (9.11) или (9.18), при приложении соответствующих сил и формулировке различных граничных условий. Ниже мы ограничимся задачами термогидравлики, хотя наше обсуждение имеет силу как для других случаев, рассмотренных выше, так и для многих случаев, которые выходят за рамки данной книги.

Возвращаясь к обозначениям разд. 9.3, мы выполним следующую математическую операцию, важность которой будет ясна позже. Рассмотрим уравнения (9.25)–(9.27), которые являются безразмерными версиями уравнений (9.19)–(9.21) и в которых штрихи опускаем. Умножим уравнение (9.27) на  $\theta$  и проинтегрируем полученное уравнение по  $x$  в области  $\Omega$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)\theta]\theta dx - \kappa \int_{\Omega} \Delta\theta \cdot \theta dx = \int_{\Omega} u_2\theta dx. \quad (9.28)$$

Используя формулу Грина—Стокса и граничные условия (9.16) и (9.22) с безразмерными переменными, получим

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)\theta]\theta dx &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial\theta^2}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \theta^2 d\Gamma - \int_{\Omega} (\text{div } u)\theta^2 dx = 0, \\ - \int_{\Omega} \Delta\theta \cdot \theta dx &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\theta}{\partial n} \theta d\Gamma + \int_{\Omega} |\text{grad } \theta|^2 dx = \int_{\Omega} |\text{grad } \theta|^2 dx. \end{aligned}$$

Для любой функции  $\theta$ , удовлетворяющей (9.22), выполняется неравенство Пуанкаре

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx \leq \int_{\Omega} |\text{grad } \theta|^2 dx.$$

Тогда из (9.28) заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + 2\kappa \int_{\Omega} \theta^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} u_2 \theta dx. \quad (9.29)$$

Аналогичное соотношение может быть получено для  $u$  из уравнения (9.25):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + 2\nu \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 2\alpha' \int_{\Omega} u_2 \theta dx. \quad (9.30)$$

Прибавляя (9.30) к (9.29), получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^2 + |u|^2) dx + 2 \int_{\Omega} (\kappa\theta^2 + \nu|u|^2) dx \leq 2(1 + \alpha') \int_{\Omega} \theta u_2 dx. \quad (9.31)$$

Следовательно, если

$$\kappa\nu > (1 + \alpha')^2, \quad (9.32)$$

то существует  $\delta > 0$ , такое, что

$$\kappa\theta^2 + \nu|u|^2 - 2(1 + \alpha')\theta u_2 \geq \delta(\theta^2 + |u|^2).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\theta^2 + |u|^2) dx + \delta \int_{\Omega} (\theta^2 + |u|^2) dx \leq 0.$$

Интегрируя, приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} (\theta^2 + |u|^2)(x, t) dx \leq \exp(-\delta t) \int_{\Omega} (\theta^2 + |u|^2)(x, 0) dx. \quad (9.33)$$

Это неравенство означает, что *каким бы ни было начальное распределение (при  $t = 0$ ) скоростей и температур в задаче Бенара, спустя некоторое время устанавливается стационарный режим, описываемый уравнением (9.18);* иными словами, жидкость становится неподвижной, а температура ведет себя как линейная функция от  $x_2$ . Неравенство (9.33) означает, что стационарный режим достигается при  $t \rightarrow \infty$ ; поскольку в практических расчетах значение  $\exp(-10)$  является весьма небольшим числом, то принимают, что такой режим устанавливается, скажем, при  $t = 10/\delta$ .

Используя число Рэлея, введенное в разд. 9.4, можно переписать условие (9.32) в виде

$$\text{Ra} < (1 + \alpha')^{-2}. \quad (9.34)$$

Естественно задать вопрос: что произойдет, если это условие не выполнено? Прежде чем ответить на этот вопрос, заметим, что если только  $T_1$  меняется, а другие характерные величины остаются неизменными ( $T_1 \geq T_2$ ), то при  $T_1 = T_2$  или небольших значениях величины  $T_1 - T_2$  число Рэлея очень мало и неравенство (9.34) выполнено. С другой стороны, это неравенство нарушается, если число Ra (или  $T_1$ ) увеличивается.

Как сказано выше, при малых значениях Ra после переходного режима жидкость становится неподвижной с линейным распределением температур в направлении оси  $Ox_2$ . Когда значения Ra увеличиваются, жидкость на дне, будучи более теплой, чем на поверхности, поднимается вверх, что нарушает состояние покоя, и жидкость приходит в движение. Стационарное решение уравнения (9.18), которое все еще математически существует, становится физически неустойчивым. Обычно появляются другие устойчивые стационарные решения. Эту ситуацию можно назвать *бифуркацией* стационарных решений. Если значения  $L_2/L_1$  и  $L_2/L_3$  достаточно малы, то появляются так называемые вихри Бенара в достаточном удалении от границы  $x_1 = 0$  или  $x_1 = L_1$ . Количество появляющихся вихрей зависит от условий эксперимента. Рис. 9.3 иллюстрирует соответствующие линии тока течения.

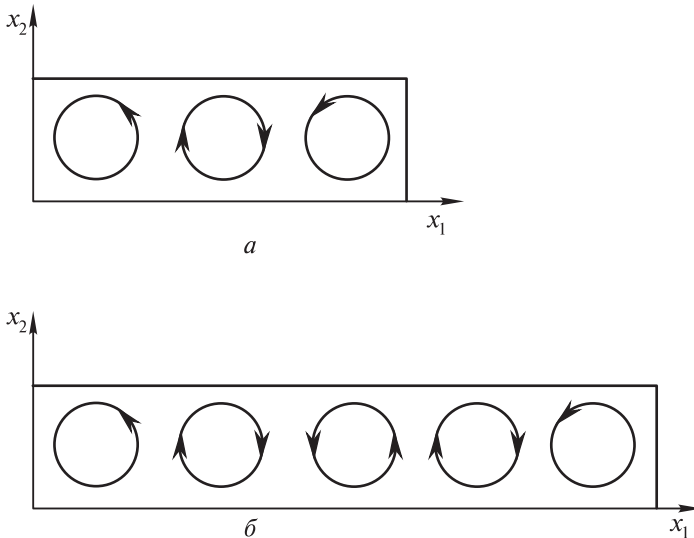


Рис. 9.3. Вихри Бенара: (а) три вихря; (б) пять вихрей

С увеличением Ra (или  $T_1$ ) течение уже никогда не станет стационарным и наблюдаются вихри с расплывчатой и подвижной формой. Когда же значение Ra (или  $T_1$ ) становится очень большим, течение больше не имеет отчетливой структуры: появляются многочисленные нестационарные вихри и течение становится *полностью турбулентным*.

Если мы выполним временной фурье-анализ сигналов, характеризующих течение (например, измеренная лазерным устройством скорость жидкости в точке), то увидим, что в стационарном режиме сигнал плоский. При промежуточном нестационарном режиме появляются несколько частот, соответствующих периодическим или квазипериодическим течениям. При чисто турбулентном режиме наблюдается уже непрерывный спектр частот.

*Примечание 9.8.* Все сказанное выше в рамках задач термогидравлики верно и для случая течений жидкости, рассмотренных в разд. 9.1 и 9.2, в которых важным параметром является число Рейнольдса.

## 9.6. ПОНЯТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Опишем другое важное явление в гидромеханике, существование которого связано с очень большими числами Рейнольдса: это — пограничный слой. Сначала остановимся на физически нереальном, но все же поучительном эксперименте. Затем мы сформулируем соответствующую математическую модель.

### Плоская стенка, мгновенно приводимая в движение

Рассмотрим следующий эксперимент. Вязкая несжимаемая жидкость целиком заполняет полупространство  $x_3 > 0$ . Сначала жидкость находится в состоянии покоя; затем при  $t = 0$  плоскость  $x_3 = 0$  мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью  $V\vec{e}_1$ . Этот эксперимент не реален, поскольку требует бесконечной энергии и бесконечного объема жидкости для своего воплощения. Тем не менее он носит поучительный характер. Будем искать течение в виде  $(u, p) = (v(x_3, t), 0, 0, \text{const})$ ; можно показать, что других решений не существует. Следовательно,  $v$  является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0. \quad (9.35)$$

Если положить  $x'_3 = ax_3$  и  $t' = a^2t$ , то приходим к заключению, что это уравнение инвариантно, т. е.  $v(x_3, t) = v(ax_3, a^2t)$ . Тогда естественно искать решения, которые зависят только от  $\theta = x_3/\sqrt{2\nu t}$ :

$$v(x_3, t) = f(\theta), \quad \theta = \frac{x_3}{\sqrt{2\nu t}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\theta}{2t} f'(\theta), \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} &= \frac{1}{\sqrt{2\nu t}} f'(\theta), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{2\nu t} f''(\theta). \end{aligned}$$

Таким образом, для определения  $f$  приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f''(\theta) + \theta f'(\theta) = 0,$$

откуда

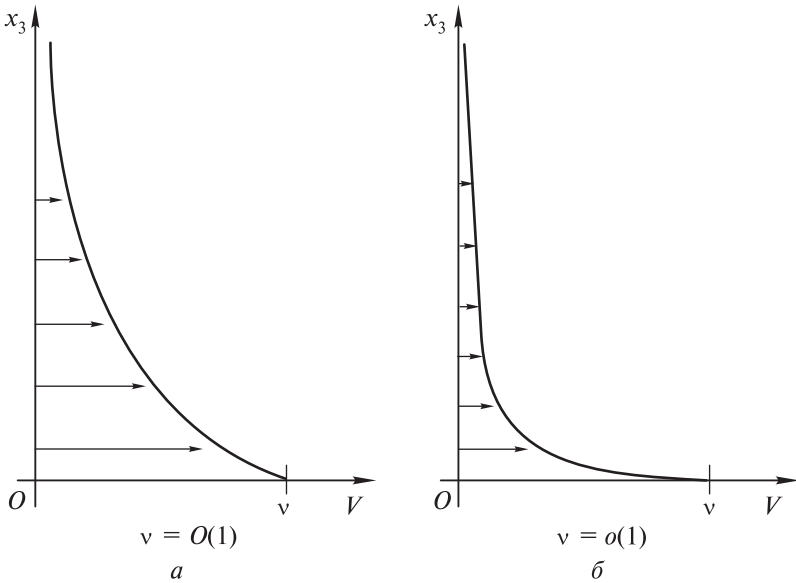
$$f(\theta) = A + B \int_0^\theta e^{-s^2/2} ds.$$

Вычисляя  $A$  и  $B$  из начального и граничного условий, получим

$$v(x_3, t) = V \left[ 1 - 2 \operatorname{erf} \left( \frac{x_3}{\sqrt{2\nu t}} \right) \right],$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) d\xi.$$

Поскольку единственность предполагалась, мы уже нашли решение нашей задачи (см. рис. 9.4). Обсудим свойства этого решения.



**Рис. 9.4.** Профиль скорости при фиксированном  $t$ : (а) при  $\nu = O(1)$ , (б) при  $\nu = o(1)$

1. Поскольку  $\operatorname{erf} x \leq \operatorname{erf}(+\infty) = 1/2$ , то  $v(x_3, t) > 0$  при  $t > 0$ . Значит, вся масса жидкости приведена в движение мгновенно. Скорость распространения бесконечна, что противоречит гиперболическим уравнениям (например волновым уравнениям), для которых из-за вязкости скорость распространения конечна (распространение волн с конечной скоростью рассмотрено в гл. 17).

2. При фиксированном значении  $x_3 > 0$  имеем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(x_3, t) = V$ , поэтому вся жидкость в целом приобретает скорость  $V$ .

3. При фиксированных значениях  $x_3$  и  $t$  и при  $\nu \rightarrow 0$  имеем  $\theta \rightarrow +\infty$  и  $v \rightarrow 0$ ; иными словами, в каждой внутренней точке жидкости скорость стремится к нулю. Заметим, что в этом эксперименте невязкая жидкость остается в состоянии покоя. Таким образом, решение  $v = v_\nu(x_3, t)$  стремится к решению для невязкой жидкости в каждой точке  $x_3 > 0$ , но не на оси  $x_3 = 0$ .

При небольших значениях  $\nu$  скорость быстро меняется вблизи  $x_3 = 0$ . Это поведение скорости мы обсудим ниже.

4. Пусть теперь значение  $k$  фиксировано и  $0 < k < 1$ . Будем искать множество точек, для которых  $v > kV$  и, тем самым,  $kV < v < V$ . Поскольку  $\text{erf}$  — возрастающая функция, это условие эквивалентно условию

$$\theta < \theta_0(k).$$

Поэтому в полосе толщиной порядка  $\sqrt{\nu}$  в направлении оси  $x_3$  имеем  $v > kV$  независимо от значения  $k$ ,  $k = 0(1)$ . Эта полоса носит название пограничного слоя, толщина которого имеет порядок  $\sqrt{\nu}$ .

Таким образом, при больших числах Рейнольдса вблизи границ существует слой толщины порядка  $1/\sqrt{R}$ , называемый пограничным слоем течения, в котором наблюдаются большие градиенты скорости порядка  $\sqrt{R}$ . Такая ситуация имеет место и при нетурбулентных течениях. В целом явление пограничного слоя имеет гораздо более сложный характер. В случае турбулентных течений много вопросов остаются открытыми.

## Математическая модель

Существуют простые математические модели, раскрывающие некоторые из многочисленных особенностей пограничного слоя (можно говорить о явлении сингулярного возмущения). Обсудим в качестве простого примера одну из первых математических моделей, описывающих течение Гольфстрима вблизи восточного побережья Америки.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + u'(x) + a &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

где  $0 < a < 1$  и параметр  $\varepsilon > 0$  мал. Легко проверить, что

$$u(x) = u(x, \varepsilon) = a \frac{1 - \exp(-x/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)} - ax.$$

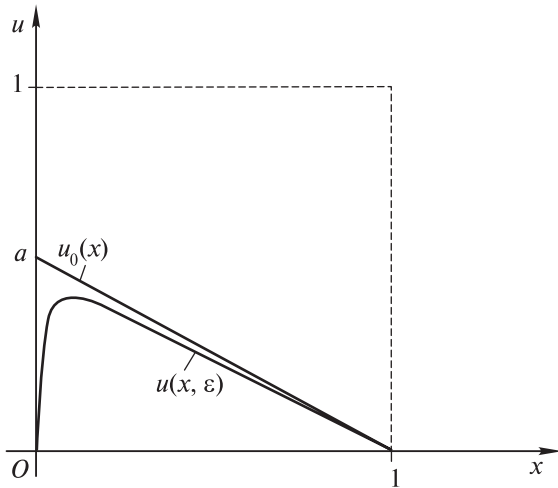
Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, x > 0 \text{ fixed}} u(x, \varepsilon) = u_0(x) = a(1 - x)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(0, \varepsilon) = 0 \neq u_0(0) = a.$$

Заметим, что граничное условие на стенке  $x = 0$  потеряно. Поскольку параметр  $\varepsilon$  мал, вблизи этой стенки появляется пограничный слой. Функция  $u(x, \varepsilon)$  равномерно сходится к пределу  $u_0(x)$  на  $[\alpha, 1]$  при всех  $\alpha > 0$ , однако эта равномерная сходимость отсутствует на  $[0, 1]$  (рис. 9.5).



**Рис. 9.5.** Простая математическая модель пограничного слоя. Графики функций  $u(x, \varepsilon)$  (нижняя кривая) и  $u_0(x)$  (верхняя линия)

*Примечание 9.9.* Предложены методы выявления и изучения пограничного слоя на основе анализа только уравнений и граничных условий. Такой подход связан с асимптотическим анализом и дополняется применением численных методов.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. В области  $\Omega_\infty = \{(x_1, x_2), 0 < x_2 < L\}$  рассматривается течение вязкой однородной несжимаемой жидкости под действием силы тяжести. Известно, что жидкость проводит тепло. В приближении Буссинеска уравнения принимают вид

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) - \mu \Delta v + \nabla p = -\rho_0 g (T - T_*) e_2 \quad (9.36)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (9.37)$$

$$c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (v \cdot \nabla) T \right) - v_0 \Delta T = 0, \quad (9.38)$$

где  $x \in \Omega$ ,  $0 < t < T_{\max}$ ,  $e_2$  — единичный вектор нисходящей вертикали,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $c_v > 0$  и  $T_*$  — исходная температура.

а) Пусть на границе  $x_2 = 0$  поддерживается температура  $T = T_0$ , а на границе  $x_2 = L$  — температура  $T = T_1$ . Пусть  $p_0(x_1, x_2)$  — давление. Найти стационарное решение, удовлетворяющее условиям  $v = 0$  и  $T = \psi(x_2)$ .

б) Ниже примем  $T = \psi(x_2) + \theta$  и  $p = p_0 + P$ . Переписать уравнения (9.36)–(9.38) в новых переменных  $v$ ,  $P$  и  $\theta$ . Предположим, что решения  $(v, P, \theta)$  полученных уравнений являются периодическими с периодом  $2\pi$  по  $x_1$  и что  $v$  обращается в нуль при  $x_2 = 0$  и  $x_2 = L$ . Пусть  $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, L)$ .

$$(61) \text{ Показать, что } \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla)v]v dx = 0.$$

$$(62) \text{ Показать, что } \int_{\Omega} [(v \cdot \nabla)\theta]\theta dx = 0.$$

$$(63) \text{ Показать, что } \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx = 0.$$

в) Выписать выражение для

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_0 |v|^2 + c_v \theta^2) dx \quad (9.39)$$

в предположении, что граничные условия для  $v$ ,  $P$  и  $\theta$  однородны.

г) Показать, что (9.39) принимает отрицательные значения при  $g = 0$  и  $T_1 = T_0$ .

**2.** Рассматриваются уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями в кубе  $\Omega = (0, L)^3$  (такие условия типичны в теории турбулентности):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $u$  — периодическая функция по  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , а плотность полагается равной единице. Разложения в ряды Фурье для функций  $u$ ,  $p$  и  $f$  имеют вид

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^M} u_k e^{\frac{2i\pi k \cdot x}{L}}, \quad p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^M} p_k e^{\frac{2i\pi k \cdot x}{L}}, \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^M} f_k e^{\frac{2i\pi k \cdot x}{L}}.$$

а) Выписать уравнения для  $u_k$  и  $p_k$ .

б) С использованием рядов Фурье решить линейные стационарные уравнения Навье–Стокса

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned}$$

где  $u$  — периодическая функция по  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .



## МАГНИТОГИДРОДИНАМИКА И ИНЕРЦИОННОЕ УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ

В этой главе мы рассмотрим течения электропроводящих жидкостей при наличии электрических токов и электромагнитных полей, а в следующей — при наличии химических реакций. Исследование таких течений составляет предмет магнитогидродинамики (МГД). Уравнения магнитогидродинамики состоят из уравнений Максвелла, описывающих поведение электромагнитных величин, и уравнений механики жидкости и газа с учетом электромагнитных сил.

Здесь мы ограничимся течениями однокомпонентной жидкости, хотя при определенных обстоятельствах (например, при высоких температурах и интенсивных электромагнитных полях) электропроводящая жидкость ионизируется и превращается в плазму. В таких случаях требуется изучать потоки положительно и отрицательно заряженных частиц в отдельности, что приводит к необходимости исследования течений многокомпонентных жидкостей, как это имеет место, в частности, в случае течений двух смешивающихся жидкостей. Такого рода течения рассматриваются в следующей главе.

Моделирование электромагнитных явлений приводит к уравнениям Максвелла и может проводиться по той же схеме, которой мы придерживались в гл. 1–5: описание физических величин, выписывание законов сохранения, уравнений в частных производных и граничных условий. В рамках данной книги было бы слишком утомительно и не особенно поучительно строго следовать этой схеме. Мы сосредоточимся на описании уравнений Максвелла, предполагая, что заинтересованный читатель может ознакомиться с их физическим обоснованием в специальной литературе.

В разд. 10.1 рассматриваются уравнения Максвелла, а в разд. 10.2 — другие уравнения магнитогидродинамики. В разд. 10.3 обсуждается одно из важных МГД-приложений, которое связано с равновесием плазмы, удерживаемой в устройствах токамак. В этих экспериментальных устройствах жидкость (плазма) подвергается воздействию высоких температур и давлений и интенсивных магнитных полей. Ученые-физики предполагают на этом пути добиться осуществления управляемого термоядерного синтеза в качестве незагрязняющего источника энергии.

### 10.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Рассмотрим следующие электромагнитные величины:  $q$  — плотность электрического заряда,  $J$  — плотность электрического тока,  $D$  — электрическая индукция,  $B$  — магнитная индукция,  $H$  — магнитное поле и  $E$  — электрическое

поле. Плотность  $q$  является скаляром, тогда как остальные величины — это векторы пространства  $\mathbb{R}^3$ . Перечисленные величины связаны законами сохранения, которые мы выпишем ниже без обоснования. Заметим, что соответствующие уравнения могут быть выведены теми же способами, которые мы применили в первой части этой книги при выводе уравнений сохранения массы и импульса на основе принятых физических предположений.

### Сохранение электрического заряда

Закон сохранения электрического заряда выписывается математически в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q \, dx = - \int_{\partial\Omega} J \cdot n \, d\Gamma + \int_{\Omega} g \, dx, \quad (10.1)$$

где  $\Omega$  — ограниченная регулярная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\partial\Omega$  и  $g$  — источник электрических зарядов в единицу времени и на единицу объема. Поскольку уравнение (10.3) удовлетворяется на любом открытом множестве  $\Omega$ , то в каждой точке имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} J = g. \quad (10.2)$$

Рассмотрим векторы  $D$  и  $G$ , такие, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= q, \\ \operatorname{div} G &= g. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь  $D$  — электрическая индукция. Поскольку

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial D}{\partial t} + J - G \right) = 0, \quad (10.4)$$

выполнено соотношение

$$\frac{\partial D}{\partial t} + J - \operatorname{curl} H = G, \quad (10.5)$$

где  $H$  — магнитное поле.

### Закон Фарадея

Закон Фарадея соотносит магнитную индукцию  $B$  электрическому полю  $E$ :

*для любой неподвижной поверхности  $\Sigma$  с границей  $\partial\Sigma$  производная по времени от потока магнитной индукции  $B$  через поверхность  $\Sigma$  равна по величине и противоположно направлена по отношению к циркуляции электрического поля  $E$  вдоль границы  $\partial\Sigma$ .*

Этот закон выражается уравнением

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \cdot n \, d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} E \cdot dl = 0. \quad (10.6)$$

Напомним классическую формулу векторного исчисления:

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot d\ell = \int_{\Sigma} \operatorname{curl} E \cdot n \, d\Sigma, \quad (10.7)$$

где  $n$  и  $\partial\Sigma$  имеют одинаковую ориентацию. Из (10.6) и (10.7) следует, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \cdot n \, d\Sigma + \int_{\Sigma} \operatorname{curl} E \cdot n \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{curl} E \right) \cdot n \, d\Sigma = 0.$$

Поскольку  $\Sigma$  — произвольная неподвижная поверхность, приходим к уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{curl} E = 0. \quad (10.8)$$

Применяя к (10.8) операцию дивергенции, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} B = 0.$$

Если  $\operatorname{div} B = 0$  в начальный момент времени (это предположение связано с вопросом существования магнитного монополя), то в любой момент времени выполнено

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (10.9)$$

Уравнения (10.2), (10.3), (10.5), (10.8) и (10.9) носят название уравнений Максвелла и являются основными уравнениями электромагнетизма. Теперь следует дополнить их уравнениями, которые выполняются на поверхности раздела, и определяющими соотношениями.

### Уравнения на границе раздела

Теперь рассмотрим случай, когда открытая область  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^3$  разбита на две подобласти  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  гладкой поверхностью  $\Sigma$ , на которой одна или несколько величин  $D$ ,  $H$ ,  $B$  и  $E$  терпят разрыв.

Используя законы сохранения, записанные в интегральной форме уравнениями (10.1) и (10.6), и уравнения (10.2), (10.3), (10.5), (10.8) и (10.9), получим условия на поверхности раздела  $\Sigma^1$ ). Для  $D$ , например, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^1} D \cdot n \, d\Gamma &= \int_{\Omega^1} q \, dx, \\ \int_{\partial\Omega^2} D \cdot n \, d\Gamma &= \int_{\Omega^2} q \, dx, \\ \int_{\partial\Omega} D \cdot n \, d\Gamma &= \int_{\Omega} q \, dx, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Ситуация подобна разд. 6.2 гл. 6, но здесь она проще, поскольку область  $\Omega$  фиксирована.

где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Omega^1$ ,  $\Omega^2$  и  $\Omega$ . Следовательно, на поверхности  $\Sigma$  выполнено

$$(D^2 - D^1)n = q, \quad (10.10)$$

где  $D^i = D|_{\Omega^i}$ ,  $i = 1, 2$ , и вектор  $n$  направлен от  $\Omega^1$  к  $\Omega^2$ . Если же  $H$ ,  $B$  и  $E$  терпят разрыв на  $\Sigma$ , то из соотношения

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} H \, dx = \int_{\partial\Omega} n \wedge H \, d\Gamma,$$

из закона Фарадея и уравнений (10.5), (10.8) и (10.9) заключаем, что

$$n \wedge (H^2 - H^1) = J, \quad (10.11)$$

$$(B^2 - B^1) \cdot n = 0, \quad (10.12)$$

$$n \wedge (E^2 - E^1) = 0. \quad (10.13)$$

### Определяющие соотношения

Как и в случае уравнений для жидкостей и твердых тел (см. гл. 5 и 7), система уравнений Максвелла не достаточна для описания электромагнитной эволюции среды, поскольку эта система содержит семь независимых скалярных уравнений (10.3), (10.5) и (10.8) с 16 неизвестными  $q$ ,  $D$ ,  $J$ ,  $B$ ,  $H$  и  $E$ . Следовательно, данную систему надо дополнить определяющими соотношениями, которые выражают отличия в свойствах различных сред (например степень электропроводности). Эти соотношения связывают  $D$  и  $E$ , а также  $B$  и  $H$ . Здесь мы остановимся на наиболее употребительных формах представления определяющих соотношений. Другие формы представления и их физическое обоснование изложены в книгах, которые перечислены в списке литературы.

Прежде всего запишем следующие предположения о пропорциональности:

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon E, \\ B &= \mu H. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды и  $\mu$  — магнитная проницаемость среды. В простейших случаях (например для воздуха) эти параметры предполагаются независимыми от электромагнитных величин и даже постоянными.

Второе определяющее соотношение соответствует закону Ома, который соотносит плотность тока с электрическим полем:

$$J = \sigma E. \quad (10.14')$$

Здесь  $\sigma$  — удельная электропроводность, также не зависящая от электромагнитных величин. Среда, в которых закон Ома имеет силу, называют устойчивыми.

Выписанные три соотношения дают девять уравнений, которые замыкают систему уравнений Максвелла.

*Примечание 10.1.* Рассмотренные законы имеют линейный характер. В противоположность уравнениям Максвелла, эти законы не удовлетворяют условиям галилеевой инвариантности и потому в общем случае мы можем применять их только в галилеевой системе отсчета (это неестественное ограничение привело к созданию теории относительности).

### Электромагнетизм в устойчивой среде

Чтобы описать электромагнитную эволюцию в среде, занимающей объем  $\Omega$ , необходимо дополнить уравнения Максвелла и определяющие соотношения граничными и начальными условиями, т. е. условиями на границе области  $\Omega$  и значениями электромагнитных величин в начальный момент времени.

Принимая во внимание определяющие соотношения (10.14) и (10.14'), выпишем следующие уравнения для неизвестных величин  $B$ ,  $D$  и  $J$ :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + J - \text{curl} \left( \frac{1}{\mu} B \right) = G \quad \text{в } \Omega, \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{curl} \left( \frac{1}{\varepsilon} D \right) = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (10.16)$$

Дополним уравнения (10.15) и (10.16) начальными условиями при  $t = 0$ :

$$B(x, 0) = B_0(x), \quad D(x, 0) = D_0(x). \quad (10.17)$$

Если граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  сверхпроводящая, то граничные условия, верные также для  $B_0$  и  $D_0$ , принимают вид

$$B \cdot n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (10.18)$$

$$D \wedge n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (10.19)$$

*Примечание 10.2.* Величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  могут зависеть от  $x$  и  $t$ , но остаются ограниченными (значения  $\varepsilon$  и  $\mu$  строго положительны, а значения  $\sigma$  положительны).

## 10.2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИКА

В этом разделе мы рассмотрим движение электропроводящих жидкостей. Такие явления возникают, например, в ионизированных газах при применении лазеров, в геофизике (магнитное поле ядра Земли или высотные слои атмосферы), в космонавтике (вход космических аппаратов в атмосферу) или в морской воде под действием электрических токов или магнитных полей при попытках уменьшить турбулентность или сопротивление движению кораблей и подводных лодок.

Система уравнений магнитогидродинамики состоит из уравнений Максвелла и уравнений гидродинамики с учетом электромагнитных сил.

Как и в предыдущем разделе, мы выпишем уравнения магнитогидродинамики без обоснования их вывода. Читателей, интересующихся этой темой,

мы отсылаем к книге Cabannes (1970) в списке литературы. Эти уравнения описывают движение жидкости (мы сохраним обозначения, введенные в первой части книги) и вместе с уравнениями Максвелла образуют следующую систему:

$$\rho \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \text{curl } U \wedge U + \text{grad} \left( p + \frac{U^2}{2} \right) \right] = \rho f + \Phi + \text{div } \Sigma, \quad (10.20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho U) = 0, \quad (10.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[ \rho U \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \right] = \rho f \cdot U + e_m + \text{div} (TU) - \text{div } \theta, \quad (10.22)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{curl } E = 0, \quad (10.23)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - J = H, \quad (10.24)$$

$$\text{div } D = q. \quad (10.25)$$

Здесь  $f$  — внешние объемные силы, отличные от электромагнитных сил.

Эти основные уравнения (уравнения сохранения) дополняются следующими определяющими соотношениями:

$$J = \sigma_m (E + U \wedge B), \quad (10.26)$$

$$D = \varepsilon_m (\rho, T) E, \quad (10.27)$$

$$B = \mu_m (\rho, T) E. \quad (10.28)$$

Заметим, что закон Ома (10.14') записан в виде (10.26) для случая подвижной среды и что параметры  $\varepsilon_m$  и  $\mu_m$  зависят от плотности  $\rho$  и температуры  $T$ . Кроме того, использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= qE + J \wedge B, \\ e_m &= J \cdot E, \\ T &= \frac{\partial e}{\partial s}, \\ p &= -\frac{\partial e}{\partial \tau}, \\ \Sigma &= [-p + \lambda_f(T) \text{div } U]I + \mu_f(T)(\nabla U + {}^t\nabla U), \\ \theta &= -\lambda(T)\nabla T. \end{aligned}$$

Здесь  $T$  — температура,  $s$  — энтропия и  $\tau = 1/\rho$ .

Таким образом, мы получили систему из 21 скалярного уравнения (10.20)–(10.28) относительно скалярных неизвестных  $\rho$ ,  $q$ ,  $T$  или  $e$ ,  $U$ ,  $D$ ,  $V$ ,  $J$ ,  $E$  и  $H$  (их количество — 21). К этой системе следует добавить начальные и граничные условия. Конечно, давление  $p$  также не известно, однако это дополнительное неизвестное компенсируется уравнением состояния  $p = \varphi(\rho, \tau)$  или  $p = \varphi(\rho, e)$  в случае сжимаемых жидкостей или уравнением  $\rho = \rho_0$  в случае несжимаемых жидкостей, как это имеет место для непроводящих жидкостей.

### 10.3. УСТРОЙСТВО ТОКАМАК

Токамак — это одно из устройств, предназначенных для термоядерного синтеза как незагрязняющего источника энергии. Это устройство представляет собой тор, частично заполненный плазмой (проводящий материал под действием высоких температур и давлений, а также интенсивных магнитных полей). Магнитные поля генерируются электромагнитными катушками, расположенными вокруг тора.

Ниже предполагается, что плазма находится в состоянии покоя. Наша цель — записать уравнения, которые в осесимметричной геометрии характеризуют свойства среды в состоянии равновесия<sup>1)</sup>.

Представим токамак в виде осесимметричного тора с осью  $Oz$  (рис. 10.1). Пусть поперечное сечение тора плоскостью  $Oxz$  представляет собой открытую область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ . Пусть плазма заполняет подобласть  $\Omega_p$  области  $\Omega$  с границей  $\Gamma_p$ . Предположим, что область  $\Omega_v = \Omega \setminus (\Omega_p \cup \Gamma_p)$  пуста.

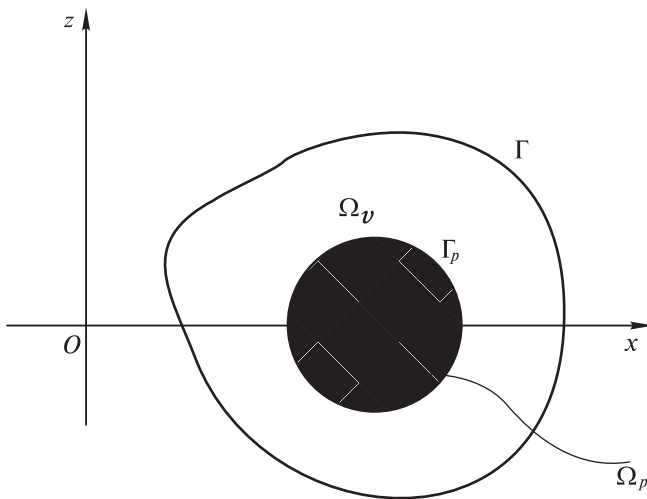


Рис. 10.1. Устройство токамак

<sup>1)</sup>В реальности такое равновесие довольно неустойчиво. В настоящее время удержание плазмы в состоянии равновесия является основной задачей физики (см. примечания об устойчивости стационарных решений в разд. 9.5 гл. 9).

В пустой области  $\Omega_v$  электромагнитное состояние среды описывается уравнениями Максвелла, которые в данном случае имеют вид

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{в } \Omega_v, \quad (10.29)$$

$$\operatorname{curl} B = 0 \quad \text{в } \Omega_v. \quad (10.30)$$

Электромагнитное состояние в плазме описывается уравнениями магнитогидродинамики. Поскольку  $U = 0$  и система не зависит от времени, эти уравнения принимают вид

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{в } \Omega_p, \quad (10.29')$$

$$\operatorname{curl} B = \mu_0 J \quad \text{в } \Omega_p, \quad (10.30')$$

$$\operatorname{grad} p = J \wedge B \quad \text{в } \Omega_p. \quad (10.31)$$

Принимая во внимание геометрию задачи, естественно ввести цилиндрические координаты  $r, \theta, z$  и соответствующую ортонормальную систему  $e_r, e_\theta$  и  $e_z$ . Полагая  $B = B_r e_r + B_\theta e_\theta + B_z e_z$  и  $J = J_r e_r + J_\theta e_\theta + J_z e_z$ , перепишем уравнения (10.29) и (10.29') в форме

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

поскольку в силу осесимметрии функции  $B_r, B_\theta, B_z, J_r, J_\theta, J_z$  и  $p$  не зависят от  $\theta$ . Отсюда следует локальное существование функции потока  $\Phi$ :

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Можно показать, что функция  $\Phi$  определена и однозначна во всей области  $\Omega$  в силу граничных условий, на которых мы остановимся ниже. Полагая  $h = h(r, z) = r B_\theta$ , получим

$$B = \nabla_c \Phi \wedge \frac{e_\theta}{r} + \frac{1}{r} h e_\theta, \quad (10.32)$$

где  $\nabla_c = (\partial/\partial r)e_r + (\partial/\partial z)e_z$ . Теперь можно переписать уравнения (10.30) и (10.30') в виде

$$\mathcal{L}\Phi = 0 \quad \text{в } \Omega_v, \quad (10.33)$$

$$-\mathcal{L}\Phi e_\theta + \nabla_{\text{ch}} \wedge \frac{e_\theta}{r} = \mu_0 J \quad \text{в } \Omega_p, \quad (10.33')$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение (10.31) принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \mathcal{L}\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial H^2}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \mu_0 \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \mathcal{L}\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial h^2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10.34)$$



Первое следствие из уравнения (10.34) состоит в том, что  $\nabla_{\text{ch}}$  и  $\nabla_c \Phi$  параллельны в области  $\Omega_p$  и, тем самым,  $h$  зависит только от  $\Phi$ . Более строго, положим

$$h^2 = g_0(\Phi),$$

откуда

$$\nabla_{\text{ch}}^2 = g_0' \cdot \nabla \Phi,$$

где  $g_0' = dg_0/d\Phi$ . Тогда

$$\mu_0 \nabla_c p = \left( -\frac{1}{r} \mathcal{L} \Phi - \frac{1}{2r^2} g_0' \right) \nabla_c \Phi.$$

Поскольку  $\nabla_c p$  параллельно  $\nabla_c \Phi$ , то  $p$  зависит только от  $\Phi$  и можно записать

$$p = g_1(\Phi), \quad \nabla_c p = g_1' \cdot \nabla_c \Phi.$$

Таким образом, система (10.34) сводится к одному уравнению

$$\mathcal{L} \Phi = -\mu_0 r g_1'(\Phi) - \frac{1}{2r} g_0'(\Phi) \quad \text{в } \Omega_p. \quad (10.35)$$

Теперь все неизвестные нашей задачи являются функциями от  $\Phi$ . Однако уравнений Максвелла не достаточно для определения функций  $g_0$  и  $g_1$ , поэтому необходимы дальнейшие рассуждения.

Пусть  $n$  — единичный вектор нормали к границе  $\Gamma$ , а  $\tau$  — единичный вектор касательной к границе  $\Gamma_p$ . Дополним выписанные уравнения следующими граничными условиями в предположении, что граница  $\Gamma$  электропроводящая:

$$B \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma \text{ и } \Gamma_p, \quad (10.36)$$

$$B \cdot \tau \text{ непрерывна при пересечении } \Gamma_p. \quad (10.37)$$

Поскольку  $B \cdot n = -(1/r)(\partial\Phi/\partial\tau)$  и  $B \cdot \tau = (1/r)(\partial\Phi/\partial n)$ , заключаем, что локально  $\partial\Phi/\partial\tau = 0$  на  $\Gamma$  и  $\Gamma_p$ , откуда  $\Phi$  — константа на  $\Gamma$  и  $\Gamma_p$ , т. е. эта функция определена и однозначна во всей области  $\Omega$ . Определив  $\Phi$  с точностью до аддитивной постоянной, получим

$$\Phi = 0 \quad \text{на } \Gamma_p, \quad (10.38)$$

$$\Phi = \gamma \quad (\text{неизвестная постоянная}) \quad \text{на } \Gamma. \quad (10.39)$$

Тогда уравнение (10.37) принимает вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_p. \quad (10.40)$$

Примем следующие весьма реалистичные предположения:

$$p = J_\theta = 0 \quad \text{на } \Gamma_p, \quad (10.41)$$

$$J_\theta \neq 0 \quad \text{в } \Omega_p. \quad (10.42)$$

Тогда из уравнения (10.38) заключаем, что  $g_1(0) = 0$ . Более того, из (10.33') имеем

$$\mu_0 J_\theta = -\mathcal{L}\Phi = \mu_0 r g_1'(\Phi) + \frac{1}{2r} g_0'(\Phi),$$

откуда

$$g_0'(0) = g_1'(0) = 0.$$

Из уравнения (10.42) заключаем, что  $\Phi$  не обращается в нуль в области  $\Omega_p$ .

Одна из простейших моделей может быть получена, если взять  $g_0$  и  $g_1$  (и, тем самым,  $p$  и  $h^2$ ) в виде квадратичных функций от  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} g_0(\Phi) &= b_0 + b_2 \Phi^2, \\ g_1(\Phi) &= a_2 \Phi^2. \end{aligned}$$

Здесь  $a_2$ ,  $b_0$  и  $b_2$  — положительные постоянные. В этом частном случае уравнение (10.35) можно переписать в форме

$$\mathcal{L}\Phi = -\left(2\mu_0 r a_2 + \frac{b_2}{r}\right) \Phi \quad \text{в } \Omega_p. \quad (10.43)$$

Кроме того, предположим, что полный ток в плазме фиксирован, что выражается уравнением

$$\mu_0 \int_{\Omega_p} J_\theta dr dz = - \int_{\Omega_p} \mathcal{L}\Phi dr dz = \int_{\Gamma_p} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = I \mu_0. \quad (10.44)$$

Итак, наша задача сведена к определению скалярной функции  $\Phi$ , определенной в  $\Omega$ , непрерывной при пересечении границы  $\Gamma_p$  и такой, что уравнения (10.33), (10.43), (10.38), (10.39) и (10.44) выполняются при заданном значении  $I$  и неизвестном значении  $\gamma$ . Это — нелинейная задача, хотя уравнения (10.33) и (10.43) линейны; действительно, кривая  $\Gamma_p$ , определяющая форму плазмы в состоянии покоя, также не известна, что делает задачу нелинейной. При фиксированных  $\Omega$ ,  $g_0$  и  $g_1$  значение  $I$  становится единственным параметром задачи, а функция  $\{I \rightarrow \Phi\}$  не линейна, как это легко видеть.

*Примечание 10.3.* В заключение этой главы сделаем несколько замечаний различного уровня общности.

1. Для устройства токамак представляет интерес рассмотрение другого представления функций  $g_0$  и  $g_1$  вместо использованного ранее их представления в виде квадратичных функций. Можно также рассмотреть неосесимметричные равновесия и даже эволюционные задачи, однако уравнения значительно усложняются, при этом не удастся сформулировать упрощающие предположения, аналогичные тем, которые были сделаны в осесимметричном стационарном случае.

2. Для осуществления термоядерного синтеза могут быть рассмотрены устройства, геометрия которых отлична от тора. Отметим, в частности, стеллаторные устройства цилиндрической формы.

3. Как указано выше, в задачах термоядерного синтеза рассматриваются и другие подходы (в частности, применение мощных лазеров).

4. Многие среды (как естественные, так и искусственно созданные) находятся в плазменном состоянии. Плазму часто называют четвертым состоянием материи (наряду с твердым, жидким и газообразным). Для всех видов плазменных состояний основными уравнениями являются уравнения магнитогидродинамики (разд. 10.2) для одной или нескольких жидкостей. Хотя эти уравнения весьма сложны, их можно упростить, как это сделано в разд. 10.3, на основе частных особенностей изучаемой задачи.

**УПРАЖНЕНИЯ**

- 1. Из (10.23)–(10.28) вывести уравнение для магнитного поля  $H$ .
- 2. В области  $\Omega$  рассмотреть уравнение, полученное после выполнения упражнения 1. Пусть жидкость неподвижна и пусть электрическая индукция  $D$  обращается в нуль.

а) Показать, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |H|^2 dx = - \int_{\Omega} H \cdot \text{curl} (\eta \text{curl} H) dx,$$

где

$$\eta = \frac{1}{\mu_m \sigma_m}.$$

б) Показать, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |H|^2 dx = - \int_{\Omega} \eta |\text{curl} H|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \eta (H \wedge \text{curl} H) \cdot n d\sigma.$$

в) Показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= - \int_{\Omega} \frac{|J|^2}{\sigma_m} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\sigma_m} (H \wedge J) \cdot n d\sigma, \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= - \int_{\Omega} \frac{|J|^2}{\sigma_m} dx + \int_{\partial\Omega} (H \wedge E) \cdot n d\sigma, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{M} = (\mu/2) \int_{\Omega} |H|^2 dx$  — магнитная энергия (выписанные равенства означают, что изменение магнитной энергии внутри области  $\Omega$  состоит в потере тепла вследствие эффекта Джоуля из-за токов, протекающих в проводники, в появлении потока энергии Пойнтинга, вытекающего из внешнего поля в проводник).

3. Рассмотрим уравнение магнитного поля  $H$  в случае бесконечного сопротивления  $\sigma_m$  и постоянной магнитной проницаемости  $\mu_m$ :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \text{curl} (u \wedge H) = 0.$$

Пусть электрическая индукция  $D$  обращается в нуль.

а) Показать, что  $\int_{\Sigma_t} H \cdot n d\sigma = \text{const}$  для любой поверхности  $\Sigma_t$ , которая движется вместе с течением.

б) Для любого объема  $\Omega$  показать, что

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mu_m \int_{\Omega} H \cdot \text{curl} (u \wedge H) dx.$$

в) Пусть жидкость заключена в объеме  $\Omega$ , т. е.  $u \cdot n = 0$  на  $\partial\Omega$ . Показать, что

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mu_m \int_{\Omega} u \cdot (H \wedge J) dx + \mu_m \int_{\partial\Omega} [(H \cdot u)H] \cdot n d\sigma.$$

4. Рассмотрим следующие уравнения магнитогидродинамики для несжимаемой невязкой жидкости в потенциальном поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu_m}{\rho} H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \mu_m \frac{|H|^2}{2\rho} + V \right), \\ \frac{\partial H_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} &= H_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ \text{div} u &= 0, \\ \text{div} H &= 0. \end{aligned}$$

Показать, что решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} u_i &= \pm \left( \frac{\mu_m}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} H_i, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \mu_m \frac{|H|^2}{2\rho} + V \right) &= 0. \end{aligned}$$

## ГОРЕНИЕ

Цель этой главы состоит в изучении смесей реагирующих газов или жидкостей, вступающих в химические реакции (топливо, нефть и кислород, различные химические соединения и др.). Уравнения и модели, обсуждаемые ниже, широко используются при изучении таких явлений, как распространение химических загрязнений в атмосфере и морской воде (моря, реки, эстуарии) или горение смесей топлива, масел и кислорода в двигателях автомобилей, самолетов и ракет. Количество принимаемых во внимание химических компонентов может меняться от нескольких единиц до нескольких сотен.

В разд. 11.1 рассматриваются смеси не обязательно реагирующих жидкостей. Раздел 11.2 посвящен уравнениям химической кинетики. В разд. 11.3 приводятся общие уравнения горения и описывается типовая задача теории горения. В разд. 11.4 мы остановимся на уравнениях Стефана—Максвелла, которые соответствуют более сложным задачам химической кинетики и горения. В заключительном разд. 11.5 мы обсудим случай двухкомпонентных смесей, который несмотря на свою кажущуюся простоту приводит к очень сложным математическим задачам.

### 11.1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТЕЙ

В этом разделе мы рассмотрим смесь, состоящую из  $N$  различных смешивающихся жидкостей. Каждая  $i$ -я жидкость (компонент), где  $i = 1, \dots, N$ , может рассматриваться в отдельности вместе со своими характеристиками: плотность  $\rho_i$ , скорость  $u_i$  и давление  $p_i$ , которые в эйлеровом представлении являются функциями от  $x$  и  $t$ . Для полного описания течения необходимо выписать уравнения Навье—Стокса для каждой  $i$ -й жидкости с учетом коэффициентов вязкости  $\mu_i$  (для несжимаемой жидкости) или коэффициентов  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  (для сжимаемой жидкости)<sup>1)</sup>.

Наиболее часто мы будем описывать движение смеси, рассматриваемую как однокомпонентную жидкость. Тогда плотность смеси представляется в виде

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i, \quad (11.1)$$

<sup>1)</sup>Интересующийся читатель может найти подробное изложение уравнений для смесей с учетом термодинамики в приложениях С и Д книги Williams (1985) из списка литературы.

а давление в смеси — в виде

$$p = \sum_{i=1}^N p_i. \quad (11.2)$$

Скорость смеси трактуется как взвешенная средняя скорость:

$$u = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} u_i. \quad (11.3)$$

Кроме того, нам необходимо дать определение коэффициента вязкости смеси  $\mu$  (или коэффициентов  $\mu$  и  $\lambda$ , если жидкость сжимаема) путем введения необходимых весовых множителей для  $\mu_i$  (или для  $\mu_i$  и  $\lambda_i$ ), что составляет часть процедуры моделирования. После этого мы уже можем выписывать уравнения Навье–Стокса или уравнения Эйлера для смеси, рассматриваемой как однокомпонентная жидкость.

Подобным образом выписываются уравнения энергии и температуры для каждой жидкости. Для однокомпонентной смеси уравнение энергии принимает вид, аналогичный уравнению (6.5) гл. 6, а уравнение температуры — аналогичный уравнению (6.6) гл. 6. В последнем случае необходимо вычислить коэффициенты смеси  $C_V$  и  $\kappa$  с учетом коэффициентов  $C_{V,i}$  и  $\kappa_i$  каждой  $i$ -й жидкости. Обычно полагают

$$C_V = \sum_{i=1}^N C_{V,i},$$

тогда как для коэффициента  $\kappa$  требуются дополнительные пояснения.

Массовая доля  $i$ -й жидкости определяется как

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11.4)$$

причем

$$\begin{cases} 0 \leq Y_i \leq 1, & i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N Y_i = 1. \end{cases} \quad (11.5)$$

Наиболее употребительная модель  $N$ -компонентной смеси включает в себя уравнения, описывающие эволюцию каждой массовой доли  $Y_i$ , и уравнений, описывающих поведение однокомпонентной смеси с плотностью  $\rho$ , давлением  $p$ , температурой  $T$ , скоростью  $u$  и вязкостью  $\mu$ . На следующем этапе мы будем трактовать смесь как однородную несжимаемую жидкость, для которой  $\operatorname{div} u = 0$  и  $\rho = \rho_0$ , где  $\rho_0$  — константа.

## 11.2. УРАВНЕНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В этом разделе мы будем изучать поведение  $N$ -компонентной смеси, рассматриваемой как одна жидкость. Сначала выпишем уравнения, описывающие эволюцию массовых долей  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Пусть  $\omega_i = \omega_i(x, t)$  — скорость образования  $i$ -го компонента на единицу объема в точке  $x$  в момент времени  $t$  (ее выражение будет дано ниже) и пусть общая масса постоянна (имеет место только перераспределение массы от одного компонента к другому). Полагаем, что  $\omega_i > 0$  в случае образования  $i$ -го компонента и  $\omega_i < 0$  в случае его удаления. Имеем

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 0. \quad (11.6)$$

Пусть  $\Omega_t$  — объем, занимаемый  $i$ -м компонентом. Тогда закон сохранения массы для этого компонента принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho_i dx = \int_{\Omega_t} \omega_i dx.$$

В силу (11.4) и формулы дифференцирования объемного интеграла (см. гл. 1) получим

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_i) + \operatorname{div}(\rho Y_i u_i) - \omega_i \right] dx = 0.$$

Поскольку  $\Omega_t$  — произвольная открытая область, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_i) + \operatorname{div}(\rho Y_i u_i) = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (11.7)$$

Заметим, что уравнения (11.7) не все независимы: действительно, выполняя суммирование по  $i$  и принимая во внимание уравнения (11.3), (11.4) и (11.6), приходим для смеси к уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Теперь перепишем уравнения (11.7) в другом виде. Определим скорость диффузии  $V_i$  для  $i$ -го компонента и его поток  $F_i$  следующим образом:

$$V_i = u_i - u, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11.8)$$

$$F_i = Y_i V_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.9)$$

Принимая во внимание (11.3) и (11.8), получим

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0. \quad (11.10)$$

На основании (11.8) и (11.9) можно переписать уравнения (11.7) в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \operatorname{div}(\rho Y_i u) + \operatorname{div}(\rho F_i) = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (11.11)$$

Для завершения построения нашей модели необходимо выписать формулы для  $\omega_i$  и  $F_i$ . Предположим, что

$$\omega_i = \omega_i(T, Y_1, \dots, Y_N) = \alpha_i(T, Y_1, \dots, Y_N) - Y_i \beta_i(T, Y_1, \dots, Y_N), \quad (11.12)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — непрерывные положительные и ограниченные функции при  $T \geq 0$  и  $0 \leq Y_i \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Общий вид этих функций для задач химической кинетики мы уточним в следующем разделе.

Согласно закону диффузии Фика имеем

$$F_i = V_i Y_i = -D_i \nabla Y_i, \quad (11.13)$$

где  $F_i$  — диффузионный поток массы и  $D_i > 0$  — коэффициент диффузии  $i$ -го компонента.

На основании (11.13) и (11.12) перепишем уравнения (11.11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \operatorname{div}(\rho Y_i u) - D_i \Delta Y_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (11.14)$$

### 11.3. УРАВНЕНИЯ ГОРЕНИЯ

Чтобы получить уравнения, описывающие процессы горения, мы объединим уравнения химической кинетики и уравнения гидромеханики. Затем добавим к этим уравнениям соответствующие граничные условия и построим модель ламинарного пламени предварительно перемешанной смеси.

Как указано в конце разд. 11.1, в нашей модели мы трактуем смесь как однокомпонентную жидкость, при этом уравнения химической кинетики используем для описания эволюции массовых долей составляющих ее компонентов.

Для упрощения предположим, что смесь несжимаема и однородна (случай сжимаемой жидкости рассматривается в разд. 11.4). В эйлеровом представлении смесь заполняет область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ , а неизвестными функциями, определенными при  $x \in \Omega_t$  и  $t > 0$ , являются скорость смеси  $u$ , ее давление  $p$ , температура  $T$  и массовые плотности  $Y_1, \dots, Y_N$  ее  $N$  химических компонентов; предполагается, что  $\rho = \rho_0$ , где  $\rho_0$  — положительная постоянная.

Ниже мы выпишем уравнения Навье–Стокса для случая несжимаемой жидкости. Уравнение температуры для смеси имеет вид, аналогичный уравнению (6.6) гл. 6, в котором источник тепла  $r$  в случае экзотермических реакций представляется в виде

$$r = - \sum_{i=1}^N h_i \omega_i, \quad (11.15)$$



где  $h_i$  — энтальпия  $i$ -го компонента. Имеем

$$\sum_{i=1}^N h_i \omega_i \leq 0$$

при  $T \geq 0$  для всех  $Y_1, \dots, Y_N$ ,  $0 \leq Y_i \leq 1$ . Перепишем уравнения (11.14) при  $\rho = \rho_0$  и  $\operatorname{div} u = 0$ . Тогда

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] - \mu \Delta u + \operatorname{grad} p = f, \quad (11.16)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (11.17)$$

$$\rho_0 c_V \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T \right] - \kappa \Delta T = - \sum_{i=1}^N h_i \omega_i, \quad (11.18)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial t} + (u \cdot \nabla) Y_i \right] - D_i \Delta Y_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (11.19)$$

где значения  $\omega_i$  определены в (11.12).

Выписанные уравнения являются основными для задачи горения. Как сказано во введении к этой главе, эти уравнения используются для изучения многих явлений, включая распространение загрязняющих веществ в воде и воздухе (см. также гл. 12) или горение топлива в двигателях автомобилей, самолетов и ракет. В зависимости от требуемой точности модели, количество  $N$  химических компонентов может меняться от нескольких единиц до нескольких сотен или даже тысяч. В разд. 11.4 мы остановимся на более сложных моделях, а в разд. 11.5 ограничимся упрощенными версиями выписанных уравнений.

Уравнения (11.16)–(11.19) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями. Выпишем нужные условия для случая ламинарного пламени предварительно перемешанной смеси.

### Модель ламинарного пламени

В этой задаче область  $\Omega_t a$ , заполненная смесью, представляет собой цилиндр высотой  $h$  с поперечным сечением  $\mathcal{O}$ ; ось цилиндра параллельна оси  $Ox_3$ . Таким образом,  $\Omega = \mathcal{O} \times (0, h)$ . Химическая смесь поступает в канал снизу цилиндра и вытекает из канала сверху на уровне сечения  $x_3 = h$  цилиндра. Предполагается, что боковые стенки канала утеплены (изотермические).

Выпишем набор физически обоснованных граничных условий, оставив некоторую свободу для учета специфики отдельных задач или экспериментов в зависимости от особенностей исследуемых явлений.

1. В основании канала  $x_3 = 0$  имеем

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = 0, \quad u_3(x_1, x_2) = U(x_1, x_2), \\ T = T_u \geq 0, \\ Y_i = Y_{i,u} > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N Y_{i,u} = 1, \end{aligned}$$

где функция  $U$  и константы  $Y_{i,u}$  и  $T_u$  заданы.

2. На боковых границах канала  $x \in \partial O, 0 < x_3 < h$  выполнено

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial Y_i}{\partial n} = 0, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

3. На выходе из канала  $x_3 = h$  имеем

$$\begin{aligned} u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial x_3} = 0, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

4. Начальные условия для  $u$ ,  $T$  и  $Y_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \\ T(x, 0) = T_0(x) \geq 0, \\ Y_i(x, 0) = Y_{i,0}(x), \quad Y_{i,0}(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N Y_{i,0}(x) = 1. \end{aligned}$$

Сформулированная задача составляет предмет многих современных теоретических и численных исследований в теории горения.

#### 11.4. УРАВНЕНИЯ СТЕФАНА–МАКСВЕЛЛА

В этом разделе мы остановимся на более общей и сложной модели горения, включающей в себя уравнения Стефана–Максвелла химической кинетики. Для анализа явлений взрыва и детонации необходимо рассматривать сжимаемые жидкости.

Для этой модели надо прежде всего ввести дополнительные химические величины. Пусть  $c_i = c_i(x, t), i = 1, \dots, N$ , — молярная концентрация  $i$ -го компонента в точке  $x$  и в момент времени  $t$ , т. е. количество грамм-молекул (молей)  $i$ -го компонента на единицу объема в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Общая молярная концентрация  $c$  выражается формулой

$$c = \sum_{i=1}^N c_i. \quad (11.20)$$

Пусть  $M_i$  — молярная масса  $i$ -го компонента. Тогда

$$c_i = \frac{\rho_i}{M_i}. \quad (11.21)$$

Дополнительно к массовой доле  $Y_i$   $i$ -го компонента определим его молярную долю по формуле

$$X_i = \frac{c_i}{c}. \quad (11.22)$$

Как и в (11.5), имеют место следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq X_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N X_i = 1. \end{array} \right. \quad (11.23)$$

Имеем

$$X_i = \frac{\rho_i}{cM_i} = \frac{\rho_i}{\rho} \frac{\rho}{cM_i} = \frac{Y_i}{M_i} \frac{\rho}{c} = \frac{Y_i/M_i}{c/\rho} = \frac{Y_i/M_i}{\sum_{j=1}^N (\rho_j/(M_j\rho))}.$$

Таким образом,  $X_i$  и  $Y_i$  связаны следующими уравнениями, которые позволяют легко выразить один набор величин через другой:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = \frac{1}{Y_M} \frac{Y_i}{M_i}, \quad Y_i = \frac{X_i M_i}{X_M}, \\ Y_M = \sum_{j=1}^N \frac{Y_j}{M_j}, \quad X_M = \sum_{j=1}^N X_j M_j, \quad X_M Y_M = 1. \end{array} \right. \quad (11.24)$$

Для уточнения представлений для  $\omega_i$  и  $F_i$  вернемся к (11.12) и (11.13). Для  $\omega_i$  выполнены феноменологические соотношения химической кинетики, вытекающие из закона Аррениуса. Дадим уточненный вид для (11.12):

$$\begin{aligned} \omega_i &= M_i \sum_{k=1}^N (\nu''_{i,k} - \nu'_{i,k}) B_k T^{\alpha_k} \exp(-E_k/RT) \times \\ &\times \prod_{j=1}^N \left( \frac{X_{j,p}}{RT} \right)^{\nu'_{j,k}}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Теперь приведем полный список обозначений:  $M_i$  — молярная масса  $i$ -го компонента;  $R$  — постоянная идеального газа;  $T$  — температура;  $p$  — давление;  $B_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $E_k$  — постоянные, причем  $B_k \geq 0$ ,  $-1 < \alpha_k \leq 2$ ;  $E_k$  — энергия активации;  $\nu'_{i,k}$  и  $\nu''_{i,k}$  — стехиометрические коэффициенты, характеризующие взаимодействие  $i$ -го и  $k$ -го компонентов;  $X_j$  — молярная доля  $j$ -го компонента.

Для определения диффузионных потоков массы вместо (11.13) мы используем уравнения Стефана–Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla X_i = & \sum_{j=1}^N \frac{X_i X_j}{D_{ij}} (V_j - V_i) + (Y_i - X_i) \frac{\nabla p}{p} + \frac{\rho}{p} \sum_{j=1}^N Y_i Y_j (f_i - f_j) + \\ & + \sum_{j=1}^N \frac{X_i X_j}{\rho D_{ij}} \left( \frac{D_{T,j}}{Y_j} - \frac{D_{T,i}}{Y_i} \right) \left( \frac{\nabla T}{T} \right), \end{aligned} \quad (11.26)$$

где  $D_{ij}$  — бинарный коэффициент диффузии для  $i$ -го и  $j$ -го компонентов,  $D_{T,i}$  — коэффициент термодиффузии  $i$ -го компонента и  $f_i$  — объемная плотность внешних сил, действующих на  $i$ -й компонент (остальные переменные описаны выше).

При надлежащих предположениях в правой части в (11.26) можно оставить только первое слагаемое:

$$\nabla X_i = \sum_{j=1}^N \frac{X_i X_j}{D_{ij}} (V_j - V_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (11.27)$$

В точке  $(x, t)$ , в которой  $Y_i(x, t)$  (или  $X_i(x, t)$ ) строго положительны, мы определим  $F_i$  следующим образом. Уравнения (11.27) (или (11.26)) рассматриваются как линейная система с неизвестными  $V_i$ . Эта система не является линейно независимой, но оказывается совместной (заметим, что  $\sum_{i=1}^N \nabla X_i = 0$ , поскольку  $\sum_{i=1}^N X_i = 1$ ). Можно показать, что если дополнить эту систему уравнением (11.10) в форме

$$\sum_{i=1}^N Y_i V_i = 0, \quad (11.28)$$

то мы приходим к линейной системе, которая однозначно определяет  $V_i = V_i(x, t)$  и, тем самым,  $F_i = V_i Y_i$ . Кроме того, можно показать, что в точке  $(x, t)$ , в которой некоторые из  $Y_j$  обращаются в нуль, уравнения (11.27) или (11.26), выраженные через  $F_j$ , позволяют вместе с (11.10) и (11.24) однозначно выразить  $F_i$  как линейные функции от  $\nabla Y_j$  с коэффициентами, являющимися функциями от  $Y_k$  и других величин.

Подставляя полученные выражения для  $F_i$  в (11.11), для  $Y_i$  получим нелинейные уравнения в частных производных высокого уровня сложности. Тем не менее, такие уравнения используются во многих исследованиях.

Перечислим главные составляющие модели горения, основанные на уравнениях Стефана–Максвелла.

1. Неизвестными являются скорость  $u$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$  для сжимаемых жидкостей, температура  $T$  или внутренняя энергия  $e$ , а также  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

2. Уравнениями модели являются уравнения Навье–Стокса и уравнения сохранения массы для несжимаемых или сжимаемых жидкостей в зависимости от исследуемого явления. Кроме того, в их число входят уравнение

температуры (11.18) для несжимаемой жидкости или уравнение состояния для сжимаемой жидкости, а также уравнение энергии (6.5) гл. 6. В последнем случае выражение для  $q$  принимает вид

$$q = -\kappa \nabla T + \rho \sum_{i=1}^N h_i Y_i V_i + RT \sum_{i,j=1}^N \frac{X_j D_{T,i}}{M_i D_{ij}} (V_i - V_j) + q_R, \quad (11.29)$$

где  $q_R$  — заданный лучистый тепловой поток и  $h_i$  — средняя энтальпия на единицу объема для  $i$ -го компонента, которая для простоты полагается постоянной; другие переменные описаны выше. И наконец, уравнения (11.11) для  $Y_i$  и выражения для потоков, которые можно выписать на основе предыдущих рассуждений.

Дальнейшее изучение вопросов горения можно найти в книге Williams (1985) из списка литературы.

## 11.5. УПРОЩЕННАЯ ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Для упрощения предположим, что жидкость несжимаема и смесь состоит из двух химических компонентов. Тем самым, в уравнениях (11.16)–(11.19) следует положить  $N = 2$ . Уравнения (11.19) не являются независимыми, поскольку  $Y_1 + Y_2 \equiv 1$ . Интерес представляет случай, когда число Льюиса

$$Le = D_2/D_1$$

равно 1, т. е.  $D_1 = D_2$ . Тогда достаточно рассмотреть случай одного уравнения (11.19), в котором  $Y_1$  надо обозначить через  $Y$ . Если скорость жидкости  $u$  задана, то следует рассмотреть уравнения для температуры  $T$  и для массовой доли  $Y$ . Пусть  $D_1 = 1$  и  $\rho_0 = 1$ . Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T - \kappa \Delta T = -h\omega, \quad (11.30)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + (u \cdot \nabla) Y - D \Delta Y = \omega, \quad (11.31)$$

где  $\omega = \omega_1$  принимает вид (см. (11.27))

$$\omega = BY(1 - Y)T \exp(-E/RT)$$

и  $h = h_1 - h_2$ , поскольку  $\omega_2 = -\omega_1 = -\omega$  и

$$h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 = (h_1 - h_2) \omega.$$

Одним из многочисленных приложений уравнений (11.30) и (11.31) является поиск бегущих волн и изучение их устойчивости в задаче распространения пламени. В пространстве  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$  будем искать их решения в виде

$$T(x, t) = \mathcal{T}(x - Ut), \quad Y(x, t) = \mathcal{Y}(x - Ut),$$

где скорость распространения фронта пламени  $U = (U_1, U_2, U_3)$  не известна, наряду с  $T$  и  $Y$ . Для функций  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi)$  и  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\xi)$  ( $\xi \in \mathbb{R}^3$ ) выполнены уравнения

$$[(u - U) \cdot \nabla_\xi] \mathcal{T} - \kappa \Delta_\xi \mathcal{T} = -h\omega, \quad (11.32)$$

$$[(u - U) \cdot \nabla_\xi] \mathcal{Y} - D \Delta_\xi \mathcal{Y} = \omega. \quad (11.33)$$

Эти уравнения очень сложны даже для одномерного случая, когда  $T$  и  $Y$  зависят только от  $x_1$  (или когда  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{Y}$  зависят только от  $\xi_1$ ). Их изучению посвящена большая часть книги Volpert и др. (1994) из списка литературы.

## УПРАЖНЕНИЯ<sup>1)</sup>

### 1. Теория теплового взрыва Семенова

Пусть газ в реакторе хорошо перемешан и температура однородна. Тогда на начальном этапе реакции, когда расходом реагирующих веществ можно пренебречь, эволюция температуры описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = qke^{-E/RT} - \sigma(T - T_0), T(0) = T_0.$$

Это — модель Семенова теплового взрыва. Преобразование Франк-Каменецкого

$$\frac{E}{RT} \approx \frac{E}{RT_0} - \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0)$$

приводит это уравнение к виду

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta e^{Z\theta} - \sigma\theta, \quad \theta(0) = 0, \quad (11.34)$$

где  $\theta = (T - T_0)/q$  — безразмерная температура,  $Z = qE/(RT_0^2)$  — число Зельдовича,  $\beta$  и  $\sigma$  — положительные параметры:  $\beta$  характеризует производство тепла вследствие реакции, а  $\sigma$  — потери тепла через стенку реактора.

а) Пусть  $\alpha = \sigma/\beta$ . Показать, что существует критическое значение  $\alpha_*$  параметра  $\alpha$ , такое, что уравнение (11.34) имеет два стационарных решения при  $\alpha > \alpha_*$  и не имеет решений при  $\alpha < \alpha_*$ .

б) В случае двух решений  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ,  $\theta_1 < \theta_2$ , показать, что решение  $\theta_1$  устойчиво по отношению к нестационарной задаче (11.34), а решение  $\theta_2$  — не устойчиво.

в) Как будет вести себя решение нестационарной задачи (11.34), если  $\alpha < \alpha_*$ ? Дать физическую интерпретацию этого решения.

<sup>1)</sup>Эти упражнения предназначены для более подготовленных читателей. Мы благодарим V. A. Volpert'a за предоставление нам этих упражнений.

## 2. Теория теплового взрыва Франк-Каменецкого

Если отказаться от пространственной однородности температуры, то вместо уравнения (11.34) мы приходим к модели Франк-Каменецкого теплового взрыва. В одномерном случае эта модель описывается уравнением

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \beta e^{Z\theta}, \quad 0 < x < 2L, \quad \theta(0) = \theta(2L) = 0. \quad (11.35)$$

Пусть стационарное решение симметрично относительно середины интервала. Тогда

$$\theta'' + \beta e^{Z\theta} = 0, \quad 0 < x < L, \quad \theta(0) = \theta'(L) = 0. \quad (11.36)$$

а) Свести задачу (11.36) к задаче на интервале  $0 \leq x \leq 1$  и найти ее явное решение.

б) Показать, что существует критическое значение  $\alpha_*$  параметра  $\alpha = L^2\beta$ , такое, что существуют два решения при  $\alpha < \alpha_*$  и что нет решений при  $\alpha > \alpha_*$ .

в) Рассмотреть  $\theta_m = \theta(L)$  как параметр и найти все решения на плоскости параметров  $(\alpha, \theta_m)$ .

## 3. Существование газового пламени

Рассмотрим систему из двух уравнений «реакции—диффузии»:

$$\begin{aligned} \kappa T'' + cT' + qK(T)(1 - \alpha) &= 0, \\ d\alpha'' + c\alpha' + K(T)(1 - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система описывает поведение стационарного одномерного пламени в подвижной системе координат. Здесь  $T$  — температура и  $\alpha$  — глубина химического превращения. Кинетическая функция  $1 - \alpha$  соответствует реакции первого порядка.

а) Пусть число Льюиса  $Le = \kappa/d$  равно 1. Показать, что эта система может быть сведена к одному уравнению

$$\kappa T'' + cT' + F(T) = 0. \quad (11.37)$$

Будем искать решение этого уравнения при условиях  $T(+\infty) = T_0$  и  $T(-\infty) = T_a$ , где  $T_a$  — нуль функции  $F(T)$ . Чтобы избежать трудностей так называемой «холодной границы», предположим, что  $F(T) = 0$  при  $T \leq T_*$ , где  $T_* < T_a$ . Функция  $F(T)$  положительна на интервале  $T_* < T < T_a$ . Поиск решения этой задачи означает поиск значения параметра  $c$  (скорость волны), такого, что существует решение уравнения (11.37) с заданными предельными значениями на бесконечности.

б) Свести уравнение (11.37) к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$T' = p, \quad p' = \frac{1}{\kappa}(-cp - F(T)) \quad (11.38)$$

и найти стационарные точки системы.

в) Показать, что стационарная точка  $T = T_a, p = 0$  является седлом. Найти соответствующие собственные векторы и доказать существование траектории, выходящей из стационарной точки и входящей в четверть плоскости  $T < T_a, p < 0$ .

г) Показать, что эта траектория снижается, когда  $c$  уменьшается.

д) Показать, что существует такое значение параметра  $c$ , что система (11.38) имеет траекторию, которая связывает две стационарные точки  $T = T_a, p = 0$  и  $T = T_0, p = 0$ .



## УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

Прогноз погоды в метеорологии основан на двух взаимодополняющих подходах.

1. Сбор и статистическая обработка обширных массивов данных о скорости ветра, влажности, температуры и др. на больших отрезках времени и на больших территориях Земли. Основой здесь служат методы математической статистики и анализа стохастических процессов.

2. Моделирование атмосферных явлений на основе систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с последующим их численным исследованием. В результате дискретизации этих уравнений мы приходим к системам с миллионами и даже миллиардами неизвестных. Численное решение таких систем требует привлечения современных наиболее мощных суперкомпьютеров. Размеры машинной памяти и быстродействие, необходимые для такого рода вычислений, весьма велики даже для терафлопного диапазона ( $10^{12}$  операций в секунду).

В настоящей главе мы остановимся на втором подходе и дадим общее описание основных уравнений, широко используемых в данной области знаний. Атмосфера рассматривается как жидкая среда, состояние которой определяется вектором скорости, температурой, плотностью и давлением в каждой ее точке в эйлеровом представлении. Возникающие при этом уравнения являются версиями уравнений Навье–Стокса и уравнений температуры, выписываемых с учетом предметной области.

Вводные замечания к тематике этой главы приводятся в разд. 12.1. В разд. 12.2 и 12.3 обсуждаются основные уравнения динамики атмосферы и океана. Помимо самостоятельного интереса, изучение динамики океана играет фундаментальную роль метеорологии, поскольку наблюдается интенсивное тепловое и динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой (достаточно упомянуть течение Эль-Ниньо).

В разд. 12.4 кратко рассматриваются модели и уравнения, описывающие изменение в атмосфере концентраций водных и газопылевых субстанций, а также инертных газов, таких как озон, углекислый газ, оксиды азота, хлорированный фторуглерод, сульфиды и др. Такого рода концентрации описываются уравнениями химической кинетики, близкие к тем, которые мы обсуждали в гл. 11 в связи с задачами горения.

Указанные задачи имеют общечеловеческий и экономический интерес и являются предметом совместных исследований многих научных коллективов во всем мире. Подчеркнем, что изложение материала в этой главе носит

сугубо вводный характер. После ее прочтения было бы ошибкой полагать, что геофизическая динамика жидкостей и газов состоит просто в сопоставлении хорошо известных уравнений. Эта область знаний ставит много сложных проблем, которые совсем здесь не затрагиваются. Тем не менее представляет несомненный интерес рассмотрение связи динамики атмосферы и океана с результатами, полученными в предыдущих главах.

## 12.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

### Фундаментальный закон динамики в системе отсчета, связанной с Землей

При изучении метеорологических явлений принимается галилеева система отсчета и предполагается, что Земля представляет собой сферу радиуса  $a$ , а линия, соединяющая ее полюса, закреплена и что сама Земля равномерно вращается вокруг этой линии. Обычно предполагается, что Земля свободна от действия внешних сил (исключение составляют некоторые задачи, такие как изучение приливов, порождаемых влиянием Луны и Солнца).

Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, рассматриваются только силы, действие которых вызвано кориолисовым ускорением и переносным ускорением (см. разд. 2.5 гл. 2). Выпишем влияние этих сил в явной форме. Пусть  $u$  — скорость ветра относительно Земли; тогда в силу (2.16) массовая плотность силы Кориолиса имеет вид

$$-2\omega \wedge u.$$

Поскольку  $\dot{\omega} = 0$ , аналогичное выражение верно и для переносного ускорения:

$$\gamma_e = \omega \wedge (\omega \wedge OM).$$

Использованные здесь и ниже обозначения приведены в гл. 2. Обозначив  $OM = x$ , легко проверить, что

$$\gamma_e = \frac{1}{2} \text{grad}|\omega \wedge x|^2.$$

Тогда полное давление приобретает вид

$$P = p + \frac{1}{2}|\omega \wedge x|^2. \quad (12.1)$$

В дальнейшем полное давление  $P$  будем обозначать через  $p$ .

### Статические уравнения динамики атмосферы

В гл. 7 выписаны упрощенные уравнения динамики атмосферы, рассматриваемой как статическая баротропная жидкая среда, в которой давление  $p$  — функция высоты  $x_3$ , причем

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g. \quad (12.2)$$

Привлекая уравнение состояния для баротропной жидкости

$$p = \varphi(\rho), \quad (12.3)$$

где  $\varphi' > 0$  и  $\varphi'' \geq 0$ , можно выразить  $p$  и  $\rho$  как функции от  $x_3$ . Если, например, полагать, что воздух — это идеальная жидкая среда с постоянной удельной теплоемкостью и  $p = k\rho$ , то

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{1}{k} g x_3\right), \quad (12.4)$$

где значение  $x_3 = 0$  соответствует поверхности Земли, а  $p_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность на этой поверхности.

### Дифференциальные операторы на сфере

Наша цель — выписать уравнения динамики атмосферы и океана в масштабах всей Земли. Естественно ввести сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ , где  $0 \leq \theta \leq \pi$  — дополнение географической широты Земли,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  — долгота и  $r$  — расстояние до центра Земли. Пусть  $z = r - a$ , где  $a$  — радиус Земли и  $z$  — высота над уровнем моря. Введем также соответствующую локальную ортонормальную систему  $e_r, e_\theta, e_\varphi$ , так что вектор  $v$  может быть представлен в форме  $v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi$ .

Высота атмосферы (от 20 до 100 км в зависимости от принятого соглашения) мала по сравнению с горизонтальными размерами Земли и ее радиусом ( $\approx 6000$  км). Следовательно, вертикальные масштабы земной атмосферы малы по сравнению с горизонтальными. Первым следствием этого заключения является то, что мы будем пренебрегать изменениями вертикальной компонентой  $z$  и будем заменять, где это возможно, переменную  $r$  радиусом Земли  $a$ . В частности, вместо полного дифференциального оператора

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}$$

будем использовать оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это упрощение означает замену области, в реальности заполненной атмосферой, на произведение сферической поверхности Земли  $S^2$  на интервал изменения переменной  $z$ .

В приложении к данной главе приводятся используемые выражения для дифференциальных операторов в сферических координатах.

## 12.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Общие уравнения динамики атмосферы состоят из уравнений для сжимаемой жидкости, находящейся под действием силы Кориолиса и гравитационной

силы, и уравнения температуры как следствия первого закона термодинамики (см. гл. 6). Эти уравнения настолько сложны, что и в настоящее время, и, вероятно, в ближайшем будущем невозможно выполнить их полный анализ. Тем самым следует ввести упрощающие предположения.

Поскольку вертикальные масштабы атмосферы малы по сравнению с горизонтальными, анализ размерностей, подтвержденный метеорологическими наблюдениями и статистическими данными, показывает, что крупномасштабные модели должны включать в себя гидростатическое уравнение (см. (12.2) и выписанные ниже формулы). В силу своей высокой точности это уравнение принимается как основное и как изначальное для изучения многих атмосферных явлений. Кроме того, из него следует уравнение, связывающее давление с плотностью. Таким образом, общие уравнения динамики атмосферы могут быть сведены к системе уравнений, называемых примитивными уравнениями динамики атмосферы.

В подвижной системе отсчета, вращающейся вместе с Землей (см. разд. 12.1), из фундаментального закона динамики следует уравнение сохранения импульса, которое в векторной форме имеет вид

$$\frac{DV_3}{Dt} = \text{градиент давления} + \text{сила тяжести} \\ + \text{сила Кориолиса} + \text{силы диссипации},$$

или

$$\frac{DV_3}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_3 p + G - 2\omega \wedge V_3 + D, \quad (12.5)$$

где  $V_3$  — скорость. Далее выпишем уравнение неразрывности

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}_3 V_3 = 0, \quad (12.6)$$

а также первый закон термодинамики

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} \quad (12.7)$$

и уравнение состояния

$$p = R\rho T. \quad (12.8)$$

В этих уравнениях приняты следующие обозначения:  $G = -ge_3$  — сила тяжести;  $D$  — члены, описывающие вязкость (см. разд. 12.4) (см. также работы Lions, Temam, Wang (1993));  $DQ/Dt$  — поток тепла на единицу объема в единичном временном интервале (в основном в силу солнечного нагрева);  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $\text{grad}_3$  и  $\text{div}_3$  — трехмерные операторы градиента и дивергенции.

Как сказано выше, для исследования этих уравнений нам следует сделать упрощающие предположения. В частности, в гидростатическом приближении уравнение (12.2) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g. \quad (12.9)$$

Это гидростатическое приближение связывает давление  $p$  и плотность  $\rho$ , заменяет уравнение сохранения импульса (12.5) в проекции на вертикаль и представляет собой его приближенную форму, учитывающую небольшую высоту атмосферы. Кроме того, мы пренебрегаем изменениями переменной  $z$ , что означает замену  $r$  радиусом Земли  $a$  там, где это следует делать (например, в дифференциальных операторах). Наконец, представим  $V_3$  в форме

$$V_3 = v + w, \quad (12.10)$$

где  $v$  — горизонтальная скорость и  $w$  — вертикальная скорость. В указанных упрощающих предположениях мы приходим к следующей системе уравнений, называемых примитивными, в координатах  $(t, \theta, \varphi, z)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p + 2\omega \cos \theta \vec{k} \wedge v = D, \quad (12.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (12.12)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \text{div } v + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (12.13)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \quad (12.14)$$

$$p = R\rho T. \quad (12.15)$$

Здесь  $\vec{k}$  — единичный вектор восходящей нормали. Определения использованных дифференциальных операторов даны в приложении к этой главе.

*Примечание 12.1.* В уравнениях (12.11)–(12.15) мы не учитываем влажность атмосферы. Влажность и другие характеристики атмосферы обсуждаются в разд. 12.4.

Непосредственное следствие гидростатического уравнения (12.12) состоит в том, что полное давление  $p$  является строго убывающей функцией переменной  $z$ . При соответствующей замене переменных уравнения можно переписать в системе координат  $(t, \theta, \varphi, p)$ , в которой атмосферное давление принимается

как вертикальная координата. Далее будем предполагать, что давление  $p$  ограничено интервалом  $[p_0, P]$ , где  $P$  — давление на поверхности Земли (или среднее давление на небольшой высоте от Земли) и  $p_0 > 0$  — давление на некоторой высотной изобаре в атмосфере. Строго говоря, область между изобарой  $p = P$  и Землей и область  $p < p_0$  не принимаются во внимание. Последний случай связан с наличием разреженных и ионизированных газов (плазма), — предметом других разделов физики.

В системе координат  $(t, \theta, \varphi, p)$  высота  $z$  — неизвестная функция от  $t, \theta, \varphi$  и  $p$ . Обычно вводят функцию

$$\Phi = gz, \quad (12.16)$$

называемую геопотенциалом. Пусть

$$\varpi = \frac{dp}{dt}. \quad (12.17)$$

В новых обозначениях мы приходим к системе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v + \varpi \frac{\partial v}{\partial p} + 2\omega \cos \theta k \wedge v + \text{grad } \Phi = D, \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RT}{p} = 0, \quad (12.19)$$

$$\text{div } v + \frac{\partial \varpi}{\partial p} = 0, \quad (12.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{c^2} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_v T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \frac{R\omega}{p} - \frac{R^2}{c^2} \omega \frac{\partial \bar{T}(p_a)}{\partial p_a} = \\ = \mu_T \Delta T + \nu_T \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( \frac{gp}{R\bar{T}} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial p} \right] + Q_T. \end{aligned} \quad (12.21)$$

В уравнении (12.21) функция  $\bar{T} \in C^\infty([p_0, P])$  известна и удовлетворяет соотношению

$$c^2 = R \left( \frac{R\bar{T}}{cp} - p \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} \right) = \text{const}. \quad (12.22)$$

Температура  $\bar{T}(p)$  — это средняя климатическая температура на изобаре  $p$  и измеряется при метеорологических наблюдениях. Кроме того, имеем

$$\mu_T = \frac{R^2}{c^2} \frac{\widetilde{\mu}_T}{c_p}, \quad \nu_T = \frac{R^2}{c^2} \frac{\widetilde{\nu}_T}{c_p}, \quad (12.23)$$

$$Q_T = \frac{R^2}{c^2} \frac{\mathcal{E}}{c_p}, \quad (12.24)$$

где  $\tilde{\mu}_T$  и  $\tilde{\nu}_T$  — коэффициенты диффузии, а  $\mathcal{E}$  — адиабатический нагрев воздуха. Здесь мы не приводим выражения для правой части  $D$  уравнения (12.18), поскольку оно аналогично выражению правой части уравнения (12.21).

Уравнения (12.18)–(12.24) называют примитивными уравнениями динамики атмосферы, выраженными в системе координат  $(t, \theta, \varphi, p)$ . Их следует дополнить граничными условиями на изобарах  $p = p_0$  и  $p = P$ , с которыми заинтересованный читатель может ознакомиться в публикациях, указанных в списке литературы этой книги.

### 12.3. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Обычно предполагается, что океан — слабосжимаемая жидкость, которая подвержена действию силы Кориолиса и силы гравитации и к которой применимо приближение Буссинеска (см. гл. 9). Общие уравнения динамики океана состоят из следующих уравнений.

Уравнение импульса и уравнение неразрывности:

$$\rho_0 \frac{DV_3}{Dt} + 2\rho_0 \omega \vec{k} \wedge V_3 + \text{grad}_3 p + \rho g = D, \quad (12.25)$$

$$\text{div}_3 V_3 = 0; \quad (12.26)$$

уравнение температуры:

$$\frac{DT}{Dt} = \tilde{Q}_T + \text{диффузия}; \quad (12.27)$$

уравнение солёности (концентрации соли):

$$\frac{DS}{DT} = \text{диффузия}. \quad (12.28)$$

Кроме того, в их число входят уравнение состояния, выражающее плотность как линейную функцию температуры и солёности:

$$\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0) - \beta(S - S_0). \quad (12.29)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — константы, а  $\rho_0$ ,  $T_0$  и  $S_0$  — номинальные плотность, температура и солёность.

Как и в случае атмосферы, вертикальный масштаб океана мал по сравнению с горизонтальными. Тем самым в гидростатическом приближении имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g. \quad (12.30)$$

Заметим, что в приближении Буссинеска (гл. 9) плотность  $\rho = \rho_0$  полагается всюду постоянной, кроме члена, содержащего силу тяжести, что приводит к выталкивающей силе. Кроме того, в случае океана мы также пренебрегаем изменениями переменной  $z = r - a$  и заменяем переменную  $r$  радиусом Земли  $a$  там, где это возможно.

Снова положим  $V_3 = v + w$ , где  $v$  — горизонтальная скорость и  $w$  — вертикальная скорость. Учитывая сформулированные упрощения, представим общие уравнения в виде следующей системы:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + 2\omega \cos \theta \vec{k} \wedge \vec{v} = D, \quad (12.31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (12.32)$$

$$\operatorname{div} v + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (12.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_v T + w \frac{\partial T}{\partial z} - \mu_T \Delta T - \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q_T, \quad (12.34)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla_v S + w \frac{\partial S}{\partial z} - \mu_S \Delta S - \nu_S \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0, \quad (12.35)$$

$$\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0) - \beta(S - S_0). \quad (12.36)$$

Здесь  $\mu_T$ ,  $\nu_T$ ,  $\mu_S$  и  $\nu_S$  — коэффициенты диффузии. Уравнения (12.31)–(12.36) называют примитивными уравнениями динамики океана. Их следует дополнить граничными условиями на поверхности океана, на его дне и на боковых границах (см. список литературы). Эти уравнения называют также фундаментальными уравнениями динамики океана.

## 12.4. ХИМИЯ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

Изучение процессов распространения загрязнений в атмосфере и океане основано на рассматриваемых здесь уравнениях и их упрощениях. Эти уравнения представляют собой объединение примитивных уравнений динамики атмосферы и океана и уравнений химической кинетики, подобных тем, которые были рассмотрены в гл. 11.

Здесь мы обсудим только общий подход к проблеме, поскольку сам предмет изучения весьма сложен и требует анализа многочисленных задач в зависимости от их конкретной специфики. Грубо говоря, уравнения гидродинамики, описывающие движение воздуха и воды, должны быть дополнены уравнениями энергии и температуры, а также уравнениями пространственно-временной



эволюции концентраций загрязняющих веществ, таких как озон, углекислый газ, сернистые соединения и др. Можно сосредоточиться на изучении локальных (маломасштабных) или глобальных (крупномасштабных) явлений. К первым относятся исследование явлений в рамках города, области или устья реки. Ко вторым относятся такие обширные объекты исследований, как океан и атмосфера в целом или озоновые дыры над полюсами Земли. Поскольку цели, поставленные нами в этом разделе и в этой главе, весьма ограничены (см. ниже примечание 12.2), мы выпишем только уравнения химии атмосферы.

Как и в разд. 12.2, давление  $p$  — переменная величина по вертикали, а все неизвестные величины являются функциями от времени  $t$ , долготы  $\varphi$ , дополнения географической широты  $\theta$  и давления  $p$ .

Неизвестными функциями являются

- скорость ветра  $V_3 = v + \varpi$ , где  $v$  — горизонтальная скорость и  $\varpi$  — вертикальная скорость;
- плотность  $\rho$ , геопотенциал  $\Phi = gz$ , где  $z$  — функция от  $t, \varphi, \theta, p$ ;
- температура  $T$ ;
- массовые доли  $Y_1, \dots, Y_N$  для  $N$  химических компонентов в атмосфере (пусть  $Y_1$  относится к воде).

Уравнениями, описывающими пространственно-временную эволюцию указанных величин, являются уравнения (12.18)–(12.24), а также уравнения (12.19) с выражениями (12.12) и (12.25) для  $\omega_i$ . Учитывая явное выражение для  $D$  в уравнении (12.8), аналогичное выражению в правой части уравнения (12.1), приходим к следующей системе (в правой части уравнения (12.38) подчеркнут член, которым обычно пренебрегают):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + 2\Omega \cos \theta k \wedge v + \nabla \Phi - \\ - \mu_v \Delta v - \nu_v \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( \frac{gp}{RT} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial p} \right] = 0, \end{aligned} \quad (12.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{C^2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_v T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right\} - \frac{R\omega}{p} - \mu_T \Delta T - \nu_T \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( \frac{gp}{RT} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial p} \right] = \\ = \frac{R^2}{C^2} \left[ \frac{\mathcal{E}}{c_p} - \sum_{i=1}^N \frac{h^i w^i(T, Y^1, \dots, Y^N)}{i} \right], \end{aligned} \quad (12.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y^i}{\partial t} + \nabla_v Y^i + \omega \frac{\partial Y^i}{\partial p} - \mu_{Y^i} \Delta Y^i - \nu_{Y^i} \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( \frac{gp}{RT} \right)^2 \frac{\partial Y^i}{\partial p} \right] = \\ = \omega^i(T, Y^1, \dots, Y^N), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (12.39)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{RT}{p} = 0, \quad (12.40)$$

$$\operatorname{div} v + \frac{\partial \varpi}{\partial p} = 0. \quad (12.41)$$

Здесь  $h^i$  — энтальпия  $i$ -го компонента (как в уравнении (11.15)), а остальные величины определены выше.

Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, на которых мы здесь не останавливаемся.

Неизвестные функции могут быть разбиты на две группы: прогностические (для них выписываются эволюционные уравнения и начальные условия) и диагностические (они определяются в каждый момент времени через прогностические переменные из уравнений и граничных условий). К первой группе относятся  $v$ ,  $T$  и  $Y_i$ , а ко второй —  $\Phi$ ,  $\varpi$  и  $\rho = p/RT$ .

*Примечание 12.2.* Как сказано выше, здесь мы только затронули задачи моделирования процессов в атмосфере и океане. Многочисленные проблемы, такие как формулирование граничных условий, взаимодействие атмосферы и океана, учет радиации, земной топографии и растительного покрова, все еще требуют своего решения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Пусть  $(e_\theta, e_\varphi, e_r)$  — локальный канонический базис в сферических координатах,  $V_3 = v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi + v_r e_r$  — вектор и  $F$  — скаляр. Цель этого приложения — выписать набор формул для операторов градиента, дивергенции, вихря и Лапласа в сферических координатах. Для оператора Лапласа мы рассмотрим скалярный и векторный случаи, поскольку этот оператор для векторной функции на многообразии не определен однозначно. После выполнения некоторых выкладок получим следующий набор представлений:

$$\operatorname{grad}_3 F = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial F}{\partial r} e_r, \quad (12.42)$$

$$\operatorname{div}_3 V_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}, \quad (12.43)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}_3 V_3 = & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi + \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) e_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 F &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right), \\ \Delta V_3 &= \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) e_\theta + \\ &+ \left( \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) e_\varphi + \\ &+ \left( \Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) e_r.\end{aligned}$$

Выше мы ввели следующее упрощение: область, заполненную атмосферой или океаном, мы заменили произведением сферической поверхности Земли  $S_a^2$  на интервал изменения вертикальной переменной, т. е. приняли, что  $r \simeq a$ . Поэтому мы должны выписать эти операторы на случай  $S_a^2$ . Пусть  $v = v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi$  — вектор касательной к сфере и  $F$  — скаляр. Тогда для двумерного случая операторы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\text{grad } F &= \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} e_\varphi, \\ \text{div } v &= \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Delta F &= \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ \Delta v &= \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{a^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) e_\theta + \\ &+ \left( \Delta v_\varphi + \frac{2 \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{a^2 \sin^2 \theta} \right) e_\varphi.\end{aligned}$$

Далее, пусть  $v = v_\theta e_\theta + v_\varphi e_\varphi$ ,  $F$  — скалярная функция и  $w = w_\theta e_\theta + w_\varphi e_\varphi$  — векторная функция, касательная к сфере. Тогда

$$\begin{aligned}\nabla_v F &= \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{a \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \\ \nabla_v w &= \left[ v \cdot \text{grad } w_\theta - \frac{v_\varphi w_\varphi}{a} \cot \theta \right] e_\theta + \left[ (v \cdot \text{grad}) w_\varphi + \frac{v_\varphi w_\theta}{a} \cot \theta \right] e_\varphi.\end{aligned}$$

В дифференциальной геометрии эти функции называют ковариантными производными от  $F$  и  $w$  по направлению  $v$ .

Гораздо более глубокие результаты, полученные в механике жидкостей и газов, изложены в книгах, приведенных в списке литературы: в книге Candel (1995) на французском языке, а также на английском языке в книгах Batchelor (1988), Chorin и Marsden (1979), Lamb (1945) и Landau и Lifschitz (1953); см. также книгу Majda и Bertozzi (2001), в которой большое внимание уделено уравнениям Эйлера и явлениям, связанным с вихрями.

Книги Hinze (1987) и Schlichting (1968) служат примерами классических справочников соответственно по явлению турбулентности и образованию пограничных (возможно, турбулентных) слоев. Книги Chandrasekhar (1981), а также Drazin и Reed (1981) посвящены изучению устойчивости в задачах механики жидкостей и газов (и магнитогидродинамики в первой из упомянутых здесь книг).

Математические аспекты уравнений Навье–Стокса рассматриваются в книгах Doering и Gibbon (1995) с упором на физические приложения, а также в книгах Ladyzhenskaya (1963) и Temam (2001) и в большой статье Serrin (1959); кроме того, см. многочисленные ссылки, помещенные в перечисленных изданиях.

Книга Cabannes (1970) содержит весьма полное изложение магнитогидродинамики (см. также Chandrasekhar (1981)). Книга Williams (1985) представляет собой справочник по теории горения; математические аспекты этой теории рассмотрены в книге Volpert и др. (1994).

Среди многочисленных публикаций, посвященных исследованию уравнений атмосферы и океана, отметим классические книги Pedlosky (1987) и Washington и Parkinson (1986); соответствующие математические аспекты обсуждаются в статьях Lions, Temam и Wang (1993) и в готовящейся к изданию книге.

Конечно, для более полного ознакомления с этой весьма объемной тематикой мы отсылаем читателя к ссылкам на литературу, содержащимся в перечисленных здесь публикациях.



ЧАСТЬ III

---

**МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

---

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Наша цель в настоящей главе состоит в более подробном изучении уравнений линейной упругости, а также связанных с ними граничных условий.

Мы изменим наши обозначения, и на всем протяжении части III настоящей книги  $x$  будет обозначать лагранжевы переменные, а  $x'$  — эйлеровы. Следовательно,  $x' = \Phi(x, t) = x + u(x, t)$  представляет в момент времени  $t > 0$  положение точки, занимавшей положение  $x$  в момент времени 0, причем  $u(x, t)$  обозначает ее перемещение.

### 13.1. ЕЩЕ РАЗ О ЗАКОНЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ДЕФОРМАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ: КОЭФФИЦИЕНТЫ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Напомним, что закон зависимости напряжений от деформации для упругого материала в предположении малых деформаций записывается в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij},$$

где  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , причем  $u$  — перемещение и  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$  обозначает производную  $u_i$  относительно лагранжевой переменной  $x_j$ .

Величины  $\lambda$  и  $\mu$  являются коэффициентами Ламе для материала, причем во втором принципе термодинамики предполагается, что  $\mu \geq 0$  и  $3\lambda + 2\mu \geq 0$  (как для жидкостей и газов; см. гл. 7). Эти коэффициенты могут быть функциями точки пространства, времени, температуры или даже других величины. Однако в общем и в первом приближении они рассматриваются как постоянные, которые мы определим в дальнейшем.

Рассмотрим «девиаторные части»  $\varepsilon^D$  и  $\sigma^D$  тензоров  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , чьи компоненты

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^D &= e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}, \\ \sigma_{ij}^D &= s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij},\end{aligned}$$

где

$$e = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}, \quad s = \frac{1}{3}\sigma_{kk}.$$

Таким образом,

$$s_{ij} + s\delta_{ij} = 2\mu(e_{ij} + e\delta_{ij}) + 3\lambda e\delta_{ij},$$

и, следовательно, в сумме ( $s_{jj} = e_{jj} = 0$ ):

$$s = (3\lambda + 2\mu)e,$$

так что

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}.$$

### Другие коэффициенты упругости: модули Юнга и Пуассона

Обращение предыдущих соотношений приводит к другим коэффициентам (зависящим от  $\lambda$  и  $\mu$ ), имеющим физический смысл. Мы выпишем здесь только алгебраические формулы, но позже вернемся к физическому смыслу введенных коэффициентов.

Прежде всего запишем

$$3\kappa = 3\lambda + 2\mu \geq 0,$$

где  $\kappa$  называется твердостью объемного модуля упругости (см. пример всестороннего сжатия стержня в разд. 14.2). Затем зададим

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Поскольку  $3\lambda + 2\mu \geq 0$  и  $\mu \geq 0$ , получаем  $\lambda \geq -2\mu/3$ ,  $\lambda + \mu \geq \mu/3 \geq 0$ , и, следовательно,  $E \geq 0$ . Величина  $E$  называется модулем Юнга, а  $\nu$  — модулем Пуассона.

Более того,  $3\kappa = 3\lambda + 2\mu = E/(1 - 2\nu)$ , что приводит к  $1 - 2\nu \geq 0$ .

Легко показать, что

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

и поскольку  $\mu \geq 0$  и  $E \geq 0$ , имеем  $1 + \nu \geq 0$ . Таким образом,

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}, \quad E \geq 0.$$

Обрастая закон зависимости напряжений от деформации, мы находим

$$s = 3\kappa e = \frac{E}{1 - 2\nu}e,$$

$$\varepsilon_{ij} - e \delta_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ij} - s \delta_{ij}),$$

так как  $e_{ij} = (1/2\mu)s_{ij}$ . В результате

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} + \left( \frac{1 - 2\nu}{E}s - \frac{s}{2\mu} \right) \delta_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} + \left( \frac{1 - 2\nu}{E} - \frac{1 + \nu}{E} \right) s \delta_{ij} = \\ &= \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E}s \delta_{ij}, \end{aligned}$$



и окончательно получаем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

### 13.2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ: ПРИНЦИП ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Мы начинаем этот раздел с краткого напоминания основных понятий линейной упругости.

Для изучения задач линейной упругости мы имеем основной закон динамики

$$\rho \gamma_i = f_i + \tilde{\sigma}_{ij,j}, \quad (13.1)$$

и закон зависимости напряжений от деформации

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \end{aligned} \quad (13.2)$$

где  $u$  является перемещением. Обозначения в этом разделе не совсем обычны. В приведенных выше формулах  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(x', t)$  является тензором напряжений в эйлеровых переменных  $x'$ , а  $\tilde{\sigma}_{ij,j}$  — производной относительно переменной  $x'_j$ . Тем не менее в законе зависимости напряжений от деформации перемещение  $u_i = u_i(x, t)$  выражено в лагранжевых переменных  $x$ , а  $u_{i,j}$  — производная относительно лагранжевой переменной  $x_j$ . Для согласованности изложения мы также выразили тензор напряжений в (13.2) через лагранжевы переменные и обозначили через  $\sigma$ . Это усложнение исчезнет в линейной упругости благодаря предположению о малых перемещениях, которое позволит нам приблизить уравнения (и краевые условия), линеаризуя их по отношению к перемещению. В итоге, *все уравнения и краевые условия будут выписаны в недеформированных (лагранжевых) переменных  $x$ .*

*Примечание 13.1.* Безусловно необходимо проверить обоснованность сделанного приближения. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 13.4, где будем изучать предел критериев упругости, давая эмпирические правила (которыми мы будем довольствоваться, но которые не могут заменить строгие теоремы о сходимости, не всегда доступные и трудно доказуемые).

#### Линеаризация уравнений

Рассмотрим упругое тело, заполняющее область  $\Omega_0$  в момент времени 0 и область  $\Omega_t$  в момент времени  $t$ . Как и ранее, обозначим через  $x' = \Phi(x, t)$  положение в момент времени  $t > 0$  точки, расположенной в  $x$  в момент времени

0 ( $x \in \Omega_0$ ,  $x' \in \Omega_t$ ). Также обозначим через  $\tilde{u}(x', t) = \tilde{u}[\Phi(x, t), t] = u(x, t)$  перемещение. Таким образом, согласно определениям и результатам гл. 1:

$$\gamma_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x, t),$$

$$\tilde{\sigma}_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} \tilde{\sigma}_{ij}(x', t) = \frac{\partial}{\partial x'_k} \sigma_{ij}(\psi(x', t), t) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x'_k},$$

где положили  $x = \psi(x', t)$  и  $\sigma(x, t) = \tilde{\sigma}[\Phi(x, t), t]$ . Имеем

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Поскольку перемещение и его производные малы (являются бесконечно малыми первого порядка) и  $\psi$  является обратной функцией к перемещению  $\Phi$ , то

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x'_k} = \delta_{jk} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + o(\eta) \simeq \delta_{jk} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k},$$

причем  $\partial \psi_j / \partial x'_k$  равно элементу  $(j, k)$  обратной матрицы  $\nabla \Phi$ . Следовательно,

$$\tilde{\sigma}_{ij,k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_\ell} \cdot \left( \delta_{\ell k} - \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} \right) + o(\eta);$$

отсюда в первом приближении (т. е. порядка  $o(1)$ ):

$$\sigma_{ij,j} \simeq \tilde{\sigma}_{ij,j}.$$

Неформально это означает, что можно заменить  $\tilde{\sigma}_{ij}$  на  $\sigma_{ij}$  в (13.1) или, иначе, что мы можем дифференцировать относительно  $x_j$ , а не относительно  $x'_j$ ; это решает одну из трудностей, упомянутых выше.

В таком случае линеаризованное уравнение количества движения принимает следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = f_i(x, t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x, t).$$

Мы еще раз преобразуем это уравнение, используя соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

и закон зависимости напряжений от деформации:

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}.$$

Таким образом, мы получаем следующее уравнение для перемещения, которое называется уравнением Навье:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u.$$

Напоминаем, что  $u$  и  $f$  зависят от  $x$  и  $t$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \Omega$ , что в дальнейшем является обозначением для недеформированной области  $\Omega_0$ .

Следующим шагом является линейризация краевых условий.

### Линеаризация краевых условий

Рассмотрим две неперекрывающиеся части границы для  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_F$ , такие что  $\Gamma_u \cup \Gamma_F = \partial\Omega$  ( $= \partial\Omega_0$ ), и предположим, что  $u$  задано на  $\Gamma_u$ , а  $T = \sigma \cdot n$  задано на образе  $\Gamma_T$  при отображении  $\Phi$ . Это соответствует естественным граничным условиям для задач механики твердого тела. Поэтому часть краевых условий соответствует недеформированному состоянию, а часть — деформированному. Как и для уравнений, эта проблема, неизбежная в общем случае, будет здесь решена с помощью линеаризации краевых условий.

а) *Заданное перемещение*

Мы полагаем

$$u = \varphi \quad (\text{задано}) \quad \text{на} \quad \Gamma_u.$$

Как уже отмечалось, это краевое условие автоматически задано в недеформированной конфигурации.

б) *Заданное напряжение*

Мы временно возвращаемся к обозначениям с  $\sim$  и используем переменные  $x'$  для написания краевых условий на  $\Phi(\Gamma_F)$ :

$$\tilde{\sigma}(x', t) \cdot \tilde{n}(x', t) = F(x', t) \quad (\text{задано}), \quad x' \in \Phi(\Gamma_T, t).$$

Здесь  $\tilde{n}$  обозначает единичную нормаль к  $\Phi(\Gamma_T)$ . Легко проверить, что в первом приближении,  $\tilde{n}(x', t) = \tilde{n}[\Phi(x, t), t] = n(x, t)$ , где  $n$  — единичная нормаль к  $\partial\Omega_0$ . Действительно, если уравнение для  $\partial\Omega_t$  — это  $\tilde{g}(x', t) = 0$ , то  $\tilde{g}[\Phi(x, t), t] \equiv g(x, t) = 0$  является уравнением для  $\partial\Omega_0$ , и

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \frac{\nabla_{x'} \tilde{g}}{|\nabla_{x'} \tilde{g}|}, \\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x'_i} &= \frac{\partial g}{\partial x_\ell} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x'_i} \simeq \frac{\partial g}{\partial x_i} + o(1). \end{aligned}$$

Вследствие этого, в первом приближении

$$\tilde{n} = \frac{\nabla_{x'} \tilde{g}}{|\nabla_{x'} \tilde{g}|} \simeq \frac{\nabla_x g}{|\nabla_x g|} = n.$$

Учитывая, что  $\sigma(x, t) = \tilde{\sigma}[\Phi(x, t), t]$ , краевое условие на  $\Phi(\Gamma_T)$  после линеаризации становится следующим:

$$(\sigma_{ij}n_j)(x, t) = F_i[\Phi(x, t), t] = F_i(x, t) + o(1) \quad \text{на } \Gamma_T.$$

Далее, возвращаясь к прежним обозначениям, мы сохраним условие

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = F_i \quad \text{на } \Gamma_T,$$

причем  $\sigma_{ij}$  выражается через производные  $u$  при использовании закона зависимости напряжений от деформации среды и определении  $\varepsilon_{k\ell}$ .

Таким образом, основными уравнениями линейной упругости для нестационарных задач являются

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (13.3)$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \Gamma_u, \quad (13.4)$$

$$\sigma \cdot n = F \quad \text{на } \Gamma_T. \quad (13.5)$$

### Частные случаи

а) *Статика*

В этом случае, поскольку  $u$  не зависит от  $t$ ,  $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$ , и уравнения перемещения (см. (13.3)) становятся

$$f + \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u = 0. \quad (13.6)$$

б) *Эволюционный случай*

В этом случае мы обязаны задать в дополнение к  $f$ ,  $\varphi$  и  $F$  начальные перемещения и скорости  $\theta_0, \theta_1$ :

$$u(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (13.8)$$

*Примечание 13.2.* Также мы можем рассмотреть предельные случаи, в которых  $\Gamma_u = \partial\Omega$  и  $\Gamma_T = \emptyset$  или  $\Gamma_T = \partial\Omega$  и  $\Gamma_u = \emptyset$ . В стационарном случае и если  $\Gamma_u = \emptyset$ , решение задачи о перемещении неединственно; оно определено с точностью до движения твердого тела.

### Краевые задачи

Можно доказать, что при надлежащих предположениях на данные  $\Omega, f, \varphi, F$  и, возможно, на  $\theta_0, \theta_1$  (в частности, регуляризационные предположения) краевые задачи для эластостатики и эластодинамики обладают единственным решением в подходящем классе функций. Эти задачи описаны ниже.

а) *Эластостатика*

Задача в эластостатике состоит в изучении уравнения (13.6) и краевых условий, заданных уравнениями (13.4) и (13.5). Эта задача связана с проекционной теоремой и с вариационной постановкой эллиптических краевых задач. Мы вернемся к этому более подробно в следующих главах. Эта задача обладает единственным решением, за исключением случая, отмеченного в примечании 13.2. Единственность решения в эластостатике доказывается в разд. 15.4.

б) *Эластодинамика*

Мы изучаем в этом случае краевую задачу, которая включает уравнение (13.3), краевые условия, определенные уравнениями (13.4) и (13.5), и начальные условия, заданные уравнениями (13.7) и (13.8). Можно доказать существование и единственность решения для этой задачи на соответствующем математическом языке; дальнейшие замечания, касающиеся этого случая, даны ниже.

в) *Линейность*

Нетрудно заметить, что решение  $u$  (а следовательно,  $\sigma$  и  $\varepsilon$ ) является линейной функцией исходных данных, т. е. отображение  $(f, \varphi, F) \mapsto (u, \sigma, \varepsilon)$  линейно. Таким образом, если  $(u^1, \varepsilon^1, \sigma^1)$  и  $(u^2, \varepsilon^2, \sigma^2)$  — решения, которые соответствуют  $(f^1, \varphi^1, F^1)$  и  $(f^2, \varphi^2, F^2)$ , то для действительных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  набор  $(\alpha u^1 + \beta u^2, \alpha \varepsilon^1 + \beta \varepsilon^2, \alpha \sigma^1 + \beta \sigma^2)$  является решением, которое соответствует  $(\alpha f^1 + \beta f^2, \alpha \varphi^1 + \beta \varphi^2, \alpha F^1 + \beta F^2)$ . Сформулированное утверждение называется аддитивным принципом линейной упругости.

### 13.3. ДРУГИЕ УРАВНЕНИЯ

Мы пополним набор уравнений для  $u$ , полученных в предыдущем разделе, другими уравнениями для деформации и напряжения, которые иногда могут быть полезны. Безусловно, эти уравнения не являются независимыми от предыдущих.

#### Уравнения совместности (для деформации)

Имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{13.9}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \tag{13.10}$$

где  $\omega$  — тензор поворота. Следовательно,

$$\omega_{ij,\ell} = \frac{1}{2}(u_{i,j\ell} - u_{j,i\ell}) = \frac{1}{2}(u_{i,j\ell} + u_{\ell,ij}) - \frac{1}{2}(u_{\ell,ij} + u_{j,i\ell}),$$

и, таким образом,

$$\omega_{ij,\ell} = (\varepsilon_{i\ell,j} - \varepsilon_{j\ell,i}). \tag{13.11}$$

Тогда, поскольку  $\omega_{ij,\ell k} = \omega_{ij,k\ell}$ , получаем

$$\varepsilon_{i\ell,jk} - \varepsilon_{j\ell,ik} = \varepsilon_{ik,j\ell} - \varepsilon_{jk,i\ell}. \quad (13.12)$$

*Примечание 13.3.* Условие (13.12) является необходимым и достаточным для того, чтобы данное тензорное поле  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  локально было тензором деформации векторного поля  $u$ . Более того, если условие (13.12) выполняется, можно восстановить тензор  $u_i$  по тензору  $\varepsilon_{ij}$ . Сначала восстанавливается  $\omega_{ij}$ , используя уравнение (13.11), и затем  $u_i$  из соотношения

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (13.13)$$

если необходимые и достаточные условия Шварца удовлетворяют уравнениям (13.11) и (13.13). Они выполнены для (13.11): условия Шварца являются в точности соотношением, стоящим в уравнении (13.12). Остается проверить, что  $u_{i,jk} = u_{i,kj}$ , т. е.

$$\varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} + \omega_{ik,j},$$

которое ведет прямо к уравнению (13.11). Отметим, что если оно обладает решением, задача нахождения  $u_i$  через  $\varepsilon_{ij}$  также обладает другими решениями, которые выводятся одно из другого добавлением перемещения без деформации.

Теперь перепишем уравнение (13.12) в виде

$$0 = \varepsilon_{i\ell,jk} + \varepsilon_{jk,i\ell} - (\varepsilon_{j\ell,ik} + \varepsilon_{ik,j\ell})$$

и отметим, что правая часть кососимметрична относительно пары  $(i, j)$  и относительно пары  $(\ell, k)$ . Таким образом, для пар  $(i, j)$  и  $(k, \ell)$  мы можем ограничиться рассмотрением случаев (1,2), (1,3) и (2,3). Выписанное выражение также инвариантно относительно перестановки пары  $(i, j)$  и пары  $(k, \ell)$ . Следовательно, мы получим все соотношения, взяв

$$(i, j) = (1, 2), \quad (k, \ell) = (1, 2), (1, 3), (2, 3);$$

$$(i, j) = (1, 3), \quad (k, \ell) = (1, 3), (2, 3);$$

$$(i, j) = (2, 3), \quad (k, \ell) = (2, 3);$$

это дает шесть независимых уравнений.

Теперь если для каждого  $i, \ell$  в (13.12) положить  $j = k = 1, 2, 3$ , то, суммируя, получим

$$\Delta\varepsilon_{i\ell} + (3e)_{,i\ell} - (\varepsilon_{ik,\ell k} + \varepsilon_{\ell k,ik}) = 0. \quad (13.14)$$

Эти шесть уравнений независимы и образуют систему, эквивалентную исходным уравнениям.

Уравнения, полученные выше, являются уравнениями совместности для  $\varepsilon_{ij}$ . Как отмечалось ранее, они являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы  $\varepsilon_{ij}$  локально был тензором деформации (точно так же, как и соотношения Шварца являются необходимыми и достаточными для того, чтобы векторное поле было локальным градиентом).

### Уравнения Бельтрами

Предыдущие уравнения были чисто кинематическими. Теперь, принимая во внимание основной закон динамики, мы получим другие уравнения.

Имеем

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} s,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} s \delta_{ij}.$$

Из уравнений совместимости (13.14) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1 + \nu}{E} \Delta \sigma_{il} - \frac{3\nu}{E} (\Delta s) \delta_{il} + \frac{3(1 - 2\nu)}{E} s_{,il} - \\ - \frac{1 + \nu}{E} (\sigma_{ik, \ell k} + \sigma_{\ell k, ik}) + \frac{3\nu}{E} [(s \delta_{ik})_{, \ell k} + (s \delta_{\ell k})_{, ik}] = 0, \end{aligned}$$

и, поскольку в статике

$$\sigma_{ik, k} = -f_i,$$

окончательно получаем

$$\Delta \sigma_{il} - \frac{3\nu}{\nu + 1} (\Delta s) \delta_{il} + \frac{3(1 - 2\nu)}{1 + \nu} s_{,il} + (f_{i, \ell} + f_{\ell, i}) + \frac{6\nu}{\nu + 1} s_{,il} = 0.$$

Поскольку  $-3\Delta s = [(1 + \nu)/(1 - \nu)] \operatorname{div} f$  (это соотношение независимо доказано дальше), мы выводим уравнение Бельтрами, которое верно в эластостатике:

$$\Delta \sigma_{il} + \frac{3}{1 + \nu} s_{,il} + \frac{\nu}{1 - \nu} f_{k, k} \delta_{il} + f_{i, \ell} + f_{\ell, i} = 0.$$

Если внешние силы постоянны, то оно сводится к соотношению

$$\Delta \sigma_{il} + \frac{3}{1 + \nu} s_{,il} = 0.$$

### Другие уравнения

Из уравнения Навье получаем, что

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} u = \operatorname{div} f + \mu \Delta \operatorname{div} u + (\lambda + \mu) \Delta \operatorname{div} u,$$

т. е.

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} u = \operatorname{div} f + (\lambda + 2\mu) \Delta \operatorname{div} u.$$

Поскольку  $\operatorname{div} u = \varepsilon_{kk} = 3e$ ,

$$\rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta e = \frac{1}{3} \operatorname{div} f,$$

или иначе, вводя функцию  $s = [E/(1 - 2\nu)]e$ ,

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta s = \frac{E}{1 - 2\nu} \frac{\operatorname{div} f}{3}.$$

В статике имеем

$$-3\Delta s = \frac{E}{1 - 2\nu} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} f.$$

Теперь

$$\lambda + 2\mu = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} + \frac{E}{1 + \nu} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}.$$

Вследствие этого мы получаем уравнение, упомянутое выше:

$$-3\Delta s = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \operatorname{div} f.$$

### 13.4. ПРЕДЕЛ КРИТЕРИЕВ УПРУГОСТИ

Основной постулат линейной упругости состоит в том, что перемещения остаются малыми. Вообще, мы не способны доказать строго теоремы сходимости или аппроксимации, и необходимо как минимум проверить на опыте обоснованность этого предположения. Для того чтобы это сделать, мы имеем в нашем распоряжении эмпирические критерии, которые широко применяются в машиностроении; наиболее известными из них являются критерии Треска и фон Мизеса. Напомним, что упругие деформации являются обратимыми, в противоположность неупругим деформациям; вообще инженеры хотят иметь структуры, работающие в упругой области так, что они могут предсказывать их поведение в любое время<sup>1)</sup>.

#### Критерий Треска

Мы пишем, что модуль касательного напряжения во всех точках  $x$  и в любой момент времени  $t$  остается ниже константы, обозначенной через  $g/2$ ,  $g > 0$ . Можно показать, что, согласно так называемой теории кругов Мора (не представлена в настоящей книге),

$$\operatorname{Max} |T_t| = \operatorname{Max} \frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j|,$$

где  $\sigma_i$  — главные нормальные напряжения. Первый максимум берется для всех направлений  $n$  ( $T = \sigma \cdot n$ ); второй — для  $i, j = 1, 2, 3$ . Тогда

$$\operatorname{Max} |\sigma_i - \sigma_j| \leq g,$$

<sup>1)</sup>Если среда становится неупругой после того, как она была подвержена большой деформации, или существенной силе, или иному, и другому, то ее механическое состояние полностью неизвестно, поскольку оно зависит от характера протекания нагрузки; ее реакция на последующие приложения силы становится непредсказуемой.



во всех точках  $x \in \Omega$  и для всех моментов времени  $t$ , т. е.

$$\text{Max}|s_i - s_j| \leq g,$$

где  $s_i$  — собственные значения девиатора  $\sigma^D$  для  $\sigma$ , так что  $s_i - s_j = \sigma_i - \sigma_j, \forall i, j$ . Последний максимум берется относительно  $i, j$  и относительно  $x, t, x \in \Omega, t \geq 0$ .

### Критерий фон Мизеса

В этом случае мы пишем

$$s_{ij}s_{ij} \leq \text{const} = g'^2,$$

или

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq g'^2.$$

Это соотношение должно выполняться в каждой точке  $x \in \Omega$  и в любой момент времени  $t \geq 0$ , если мы имеем дело с задачами, зависящими от времени. Позже мы увидим, как можно экспериментально определять величины  $g$  и  $g'$ . Критерии Треска и фон Мизеса хорошо согласуются с результатами экспериментов.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Показать, что в случае, когда объемные силы обращаются в нуль, компоненты  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  тензора напряжения, соответствующего полю плоской деформации, могут быть выражены в виде функции  $\chi(x_1, x_2)$  (решение для бигармонического уравнения  $\Delta(\Delta\chi) = 0$ ) следующим образом:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

б) Рассмотрим функцию  $\chi$  вида  $\chi = f(x_2) \cos(\omega x_1), \omega > 0$ . Дать наиболее общую запись функции  $f$ .

2. Пусть упругое тело находится в равновесии относительно ортонормированного репера  $(0x_1x_2x_3)$ . Положим  $\vec{r} = 0\vec{M}$ .

а) Решения для уравнения Навье будем искать в виде

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{B} + \nabla\chi,$$

где  $\vec{X}_0$  — частное решение уравнения Навье, а  $\vec{B}$  — гармонический вектор (т. е. такой, что  $\Delta\vec{B} = 0$ ). Показать, что

$$\nabla \left( \Delta\chi + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \text{div}\vec{B} \right) = 0,$$

и  $\chi$  имеет вид

$$\chi = -\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} (\vec{r} \cdot \vec{B} + B_0) + b\vec{r}^2,$$

где  $B_0$  — гармоническая функция.

б) Показать, что эти решения уравнения Навье имеют вид

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{B} - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B} + B_0),$$

где  $X_1$  является частным решением.

**3.** Пусть поле напряжений упругой среды задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= x_2^2 + k(x_1^2 - x_2^2), & \sigma_{12} &= -2kx_1x_2, & \sigma_{22} &= x_1^2 + k(x_2^2 - x_1^2), \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0, & \sigma_{33} &= k(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Вычислить ассоциированное с ним поле сил. Является ли это поле сил согласованным с таким полем напряжений в упругой среде?

**4.** Рассмотрим упругую среду в равновесии и предположим, что объемные силы обращены в ноль и что тензор напряжения задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} &= 0, & \sigma_{13} &= \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{mx_1^2}{2}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{nx_2^2}{2}, & \sigma_{33} &= mx_1x_3 + rx_2x_3. \end{aligned}$$

Показать, что без ограничения общности  $F$  не зависит от  $x_3$  и  $\Delta F$  является аффинным относительно  $x_1$  и  $x_2$ .

**5.** Рассмотреть повторно упражнение 3 гл. 4, полагая, что тело является упругим (т. е. что  $\sigma$  удовлетворяет закону зависимости напряжений от деформации линейной упругости).

## КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОСТАТИКИ

Цель этой главы состоит в том, чтобы рассмотреть несколько классических задач эластостатики. Строго говоря, описанные ниже задачи упругости не могут быть решены точно в общем случае: они могут быть решены точно только в частных случаях (например, для особых областей); в противном случае находятся приближенные численные решения с использованием компьютеров. Однако в примерах, рассмотренных ниже, мы собираемся найти приближенные решения, принимая концепцию точного решения при некоторых разумных условиях, что и будет аккуратно сделано в каждом случае (используя, в частности, принцип Сен-Венана, описанный в разд. 14.7).

Для каждой рассматриваемой задачи механики мы будем искать (угадывая) точное решение для измененной задачи, связанной с исходной. По теореме единственности для эластостатики не существует других решений для измененной задачи. Тогда, используя принцип Сен-Венана, можно установить связь между решениями исходной и измененной задач. Мы также будем интерпретировать математические результаты с точки зрения механики, что будет приводить, в общем случае, но не всегда, к выводам, которые согласуются с практической интуицией.

### 14.1. ПРОДОЛЬНЫЕ СЖАТИЯ–РАСТЯЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим вытянутый цилиндрический стержень при растяжении (или сжатии). Предположим, что ось цилиндра параллельна  $Ox_1$  (см. рис. 14.2).

Для изучения данной задачи сформулируем следующие упрощающие предположения, которые являются реалистичными в случае, когда стержень достаточно длинный и мы находимся далеко от его концов:

- Объемные силы являются незначительными.
- Внешние силы на боковой поверхности равны нулю.
- Напряжения на торцевых гранях  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$ , соответствующие уравнениям  $x_1 = 0$  и  $x_1 = L$ , имеют форму

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F, & \sigma_{21} &= \sigma_{31} = 0 & \text{на } x_1 &= L, \\ \sigma_{11} &= -F, & \sigma_{21} &= \sigma_{31} = 0 & \text{на } x_1 &= 0. \end{aligned}$$

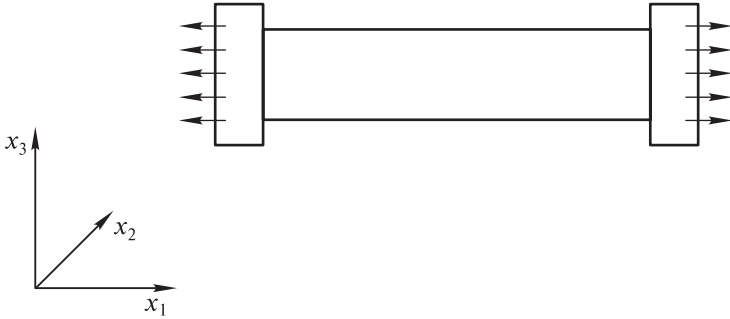


Рис. 14.1. Цилиндрический стержень при сжатии–растяжении

Тогда мы предполагаем следующее решение для задачи эластостатики, используя тензор напряжений:

$$\sigma_{11} = F \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \text{для всех остальных } i \text{ и } j,$$

что приводит к

$$\sigma_{kk} = F, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} F \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Величина

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 + \nu}{E} F - \frac{\nu F}{E} = \frac{F}{E}$$

называется степенью удлинения на единицу длины в направлении  $Ox_1$ . Кроме того, мы имеем

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} F, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad \text{если } i \neq j.$$

Уравнения равновесия выполняются так же, как уравнения совместности для  $\varepsilon_{ij}$ . Таким образом, существует поле перемещений  $u$ , такое что  $u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij}$ . Это поле можно, например, найти следующим образом:

$$u_1 = \frac{F}{E} x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu}{E} F x_2, \quad u_3 = -\frac{\nu}{E} F x_3.$$

Любое другое решение (поле перемещений) может быть получено из построенного выше добавлением перемещения без деформации.

Для выбранного поля перемещений сечение  $\Sigma_0$  фиксировано, тогда как сечение  $\Sigma_1$  переместится в направлении  $Ox_1$  на расстояние  $FL/E$ ; эта последняя величина, пропорциональная  $L$  и  $F$ , является удлинением стержня. Более того, каждое сечение подвергается переносу, параллельному  $Ox_1$ , и гомотетии в направлениях  $Ox_2$  и  $Ox_3$  с коэффициентом  $(1 - \nu F/E)$ . Его площадь, таким образом, умножается на  $(1 - \nu F/E)^2$ . Мы будем говорить об удлинении

и сужении, когда  $F > 0$ , и об укорочении и расширении, когда  $F < 0$  (здесь предполагается, что  $\nu \geq 0$ ).

*Примечание 14.1.* Согласно аппроксимационному принципу Сен-Венана, который будет описан в разд. 14.7, полученное выше решение является хорошим приближением к точному решению в случае удлиненного стержня с одним фиксированным концом (допустим,  $\Sigma_0$ ) при условии, что мы находимся достаточно далеко от  $\Sigma_0$  и от  $\Sigma_1$ .

**Сравнение с экспериментом**

Этот эксперимент является одним из основных в механике сплошных сред. Он позволяет проверить закон Гука экспериментально:  $E\varepsilon_{11} = F$ , где  $\varepsilon_{11}$  коэффициент удлинения. Кроме того, данный эксперимент позволяет определить модуль Юнга  $E$  для новых материалов, поведение которых неизвестно. Позже мы увидим, что он также позволяет связать критерии предела упругости Треска и фон Мизеса, сравнивая постоянные  $g$  и  $g'$ , возникающие в этих критериях.

Для заданного стержня соотношение между растяжением  $F$  и удлинением на единицу длины  $\varepsilon_{11}$  показано на рис. 14.2. До тех пор пока абсолютное значение  $F$  остается меньше, чем предельное значение  $k$ , это соотношение линейно, как предполагается в линейной упругости. Оно перестает быть линейным для  $|F| > k$ .

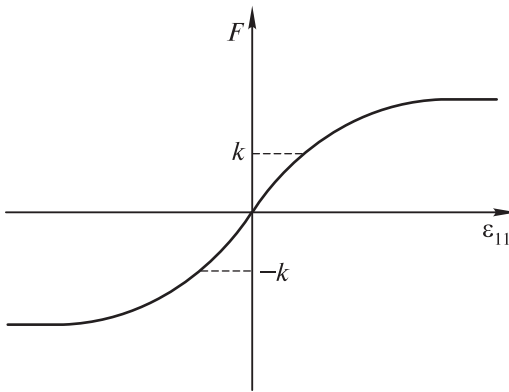


Рис. 14.2. Закон Гука

Экспериментальное определение  $k$  позволяет построить точно значения коэффициентов  $g$  и  $g'$ , встречающихся в критериях Треска и фон Мизеса; эти критерии могут быть экстраполированы для других случаев.

Критерий Треска дает при  $\sigma_1 = F, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ :

$$\text{Max}|\sigma_i - \sigma_j| = |F| \leq g,$$

и мы, таким образом, выбираем  $g = k$ . Подобным образом для критерия фон Мизеса вычисляем ( $\sigma_i^D = s_i$ ):

$$s_1 = \frac{2}{3}F, \quad s_2 = s_3 = -\frac{F}{3};$$

отсюда,

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{2}{3}F^2 \leq g'^2.$$

Это эквивалентно  $|F| \leq \sqrt{3/2}g'$  и, для согласованности, выбираем для критерия фон Мизеса  $g' = \sqrt{2/3}k$  (таким образом,  $g' = \sqrt{2/3}g$ ).

## 14.2. ВСЕСТОРОННЕЕ СЖАТИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА

Предположим, что тело  $S$  подвержено на границе равномерному сжатию  $F = -pn$ , где  $p$  обозначает давление,  $n$  — единичная внешняя нормаль, и не подвержено объемным силам ( $f = 0$ ).

Предложим решение для поля напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Уравнения равновесия, так же как и краевые условия, выполняются. Это решение, таким образом, подходит (в этой задаче нет краевых условий на  $u$ ). Соответствующий тензор деформаций дан ниже; он определяет перемещение  $u$ , единственное с точностью до жесткого перемещения. Действительно,

$$\sigma^D = 0, \quad \varepsilon^D = 0,$$

что приводит к

$$\sigma_I = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_I,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{3p}{(3\lambda + 2\mu)}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p}{3\kappa}.$$

В итоге получаем перемещение следующего вида:

$$u(x) = -\frac{p}{3\kappa}x.$$

На практике тело  $S$ , как правило, закреплено в одной из своих точек (в этой точке перемещение и вращение приравняются к нулю), которая однозначно задает жесткое перемещение, прибавляемое к  $u$  (см. рис. 14.3;  $S$  фиксировано в  $O$ ).

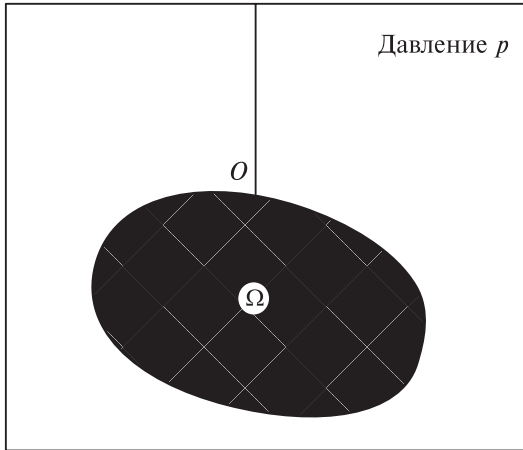


Рис. 14.3. Всестороннее сжатие произвольного тела: практическая реализация

В критериях предела упругости предполагается, что поведение остается упругим для произвольно больших значений  $p$  (поскольку  $s_{ij} = \sigma_{ij}^D = 0$ ). Этот неожиданный факт хорошо подтвержден экспериментально. Подобные эксперименты используются на практике также для определения  $\kappa$  для новых материалов (в качестве  $S$ , например, может быть взят шар, фиксированный в одной из точек поверхности).

### 14.3. РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВНУТРЕННЕМУ И ВНЕШНЕМУ ДАВЛЕНИЯМ

Рассмотрим тело, ограниченное двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Предположим, что объемные силы равны нулю, а тело подвержено равномерному нормальному давлению:  $p_1$  на внутренней поверхности и  $p_2$  на внешней (см. рис. 14.4).

Представляется разумным искать радиальное перемещение в виде

$$u(x) = g(r)x, \quad r = |x|.$$

Поскольку  $\partial r / \partial x_i = x_i / r$ , отсюда следует, что

$$\text{curl } u = \text{grad } g \wedge x + g \text{ curl } x = g'(r) \frac{x}{r} \wedge x = 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\Delta u = \text{grad div } u - \text{curl curl } u,$$

и, таким образом, уравнение Навье может быть записано в виде

$$\mu \text{ curl curl } u - (\lambda + 2\mu) \text{ grad div } u = f.$$

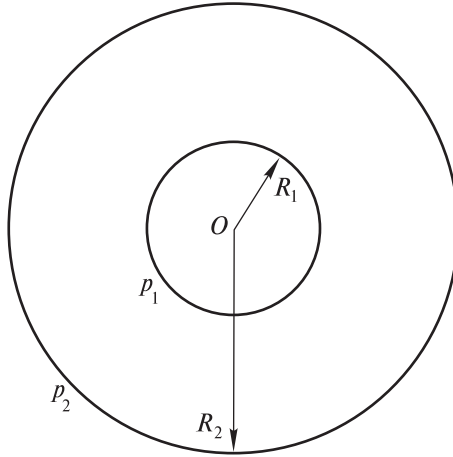


Рис. 14.4. Сферическая емкость

Следовательно, уравнение Навье сокращается до  $\text{grad div } u = 0$ , которое дает

$$\text{div } u = rg'(r) + 3g(r) = \text{const} \quad (\text{обозначим ее через } 3\alpha).$$

После интегрирования мы выводим, что

$$g(r) = \alpha + \beta \frac{1}{r^3},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — константы.

Следовательно, выражение для  $\varepsilon_{ij}$  примет вид

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} = g(r)\delta_{ij} + \frac{1}{r}g'(r)x_ix_j.$$

Для тензора напряжений имеем

$$\sigma_I = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_I = 3\alpha(3\lambda + 2\mu),$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_I\delta_{ij} = 2\mu\frac{g'(r)}{r}x_ix_j + [2\mu g(r) + 3\lambda\alpha]\delta_{ij}.$$

Главными направлениями напряжений в  $x$  является  $Ox$  и все ортогональные направления с собственными значениями

$$\begin{aligned} \sigma_1 (\text{соответствует } Ox) &= 3\alpha\kappa - \frac{4\mu\beta}{r^3}, \\ \sigma_2 = \sigma_3 &= 3\alpha\kappa + \frac{2\mu\beta}{r^3}. \end{aligned}$$



### Краевые условия

На поверхности  $r = R_2$  единичной внешней нормалью является  $n = x/r$  и, таким образом,

$$\sigma n = \sigma_1 n = -p_2 n.$$

Следовательно, краевое условие записывается в виде

$$\sigma_1|_{r=R_2} = -p_2,$$

или

$$3\alpha\kappa - \frac{4\mu\beta}{R_2^3} = -p_2.$$

Аналогично, для  $r = R_1$  имеем

$$\sigma_1|_{r=R_1} = -p_1,$$

$$3\alpha\kappa - \frac{4\mu\beta}{R_1^3} = -p_1.$$

Тогда из этого следует, что

$$\beta = \frac{p_2 - p_1}{4\mu} \frac{R_1^3 R_2^3}{R_1^3 - R_2^3},$$

$$3\kappa\alpha = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}.$$

В итоге,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $u$  полностью определены, причем  $u$  известно с точностью до жесткого перемещения.

### Предел упругости

Для рассматриваемого примера интересно явно получить предел критериев упругости.

Для этой цели мы сначала вычислим главные нормальные напряжения  $\sigma_i$ . В произвольной точке имеем

$$\sigma_1 = -p_1 \frac{R_1^3}{r^3} \frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3} - p_2 \frac{R_2^3}{r^3} \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3},$$

$$\sigma_2 = p_1 \frac{R_1^3}{2r^3} \frac{R_2^3 + 2r^3}{R_2^3 - R_1^3} - p_2 \frac{R_2^3}{2r^3} \frac{R_1^3 + 2r^3}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Следовательно,

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \left| \frac{6\mu\beta}{r^3} \right| = \frac{3}{2} |p_1 - p_2| \frac{R_2^3 R_1^3}{r^3 (R_2^3 - R_1^3)},$$

$$\sigma_{II}^D = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D = \frac{12\mu^3 \beta^3}{r^6} = \frac{3}{4} \frac{(p_1 - p_2)^2}{r^6} \frac{R_2^6 R_1^6}{(R_2^3 - R_1^3)^2}.$$

Максимальные значения для  $|\sigma_1 - \sigma_2|$  и  $\sigma_{II}^D$  достигаются на внутренней поверхности  $r = R_1$  и равны

$$\frac{3}{2}|p_1 - p_2| \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \quad \text{и} \quad \frac{3}{4}|p_1 - p_2|^2 \frac{R_2^6}{(R_2^3 - R_1^3)^2}.$$

Взяв, как в разд. 14.1,  $g' = \sqrt{2/3}g = \sqrt{2/3}k$ , видим, что критерии Треска и фон Мизеса совпадают и дают

$$|p_1 - p_2| \leq \frac{2}{3}k \left( 1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right).$$

Правая часть последнего неравенства стремится к  $2k/3$  когда  $R_2 \rightarrow \infty$ . Этот результат означает, что не обязательно полезно чрезмерно увеличивать толщину емкости; для емкости, подверженной внутреннему и внешнему давлениям  $p_1$  и  $p_2$ , с заданной вместимостью ( $R_1$  фиксирован), нет смысла увеличивать ширину ( $R_2 \rightarrow +\infty$ ) до бесконечности, так как разность давлений, которую емкость может выдерживать в упругом режиме, остается ограниченной  $2k/3$  при  $R_2 \rightarrow \infty$ .

#### 14.4. ДЕФОРМАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЕГО ВЕСА

Рассмотрим теперь вертикальное цилиндрическое тело, деформирующееся только под действием гравитации (см. рис. 14.5).

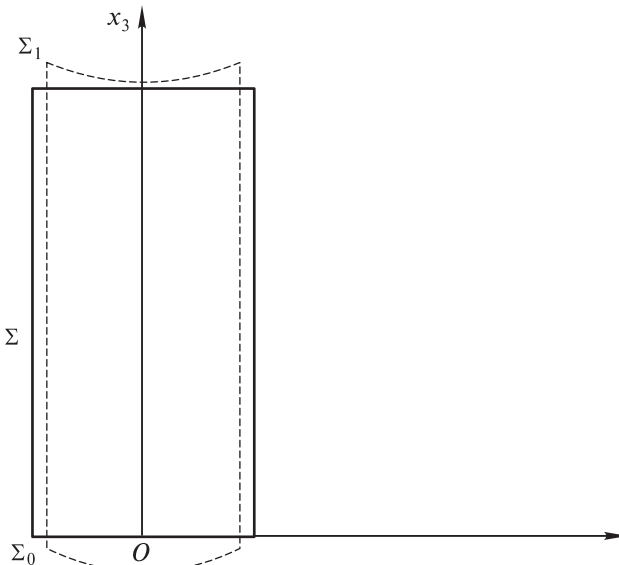


Рис. 14.5. Вертикальное тело, подверженное гравитации

Предположим, что ось  $Ox_3$  направлена вертикально вверх, совпадает с осью цилиндра и с линией, соединяющей центры масс сечений цилиндра. Пусть  $\Sigma$  является боковой поверхностью цилиндра,  $\Sigma_1$  — его верхним основанием, а  $\Sigma_0$  — нижним основанием. Позже мы уточним, что происходит на  $\Sigma_1$  в предположении, что «малая» область точки  $A$  (см. ниже) фиксирована.

Объемные силы (силы гравитации) задаются в виде

$$f = -\rho g e_3.$$

Будем искать решение (в напряжениях) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \rho g x_3, \\ \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{для остальных пар } (i, j). \end{aligned}$$

Тогда все соотношения равновесия выполняются. Более того, краевые условия  $\sigma \cdot n = 0$  выполняются на  $\Sigma$  и  $\Sigma_0$ .

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu \rho g}{E} x_3, \quad \varepsilon_{33} = \rho g \frac{x_3}{E}, \\ \varepsilon_{ij} &= 0, \quad \text{если } i \neq j. \end{aligned}$$

В таком случае необходимо определить  $u$  (существование  $u$  обеспечено, так как условия совместности для  $\varepsilon_{ij}$  выполняются). Поскольку  $u_{i,i} = \varepsilon_{ii}$ , имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu \rho g}{E} x_1 x_3 + \varphi_1(x_2, x_3), \\ u_2 &= -\frac{\nu \rho g}{E} x_2 x_3 + \varphi_2(x_3, x_1), \\ u_3 &= \frac{\rho g}{2E} x_3^2 + \varphi_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Остается определить функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Соотношения  $u_{i,j} + u_{j,i} = 0, i \neq j$ , дают

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} &= 0, \\ \varphi_{2,3} + \varphi_{3,2} &= \frac{\nu \rho g}{E} x_2, \\ \varphi_{1,3} + \varphi_{3,1} &= \frac{\nu \rho g}{E} x_1. \end{aligned}$$

Зададим  $\psi_1 = \varphi_1, \psi_2 = \varphi_2, \psi_3 = -\frac{1}{2}(\nu \rho g/E)(x_1^2 + x_2^2) + \varphi_3$  и найдем

$$\psi_{1,2} = -\psi_{2,1}, \quad \psi_{2,3} = -\psi_{3,2}, \quad \psi_{3,1} = -\psi_{1,3}.$$

Поскольку, кроме того,  $\varphi_{1,1} = \varphi_{2,2} = \varphi_{3,3} = 0$ , имеем также  $\psi_{1,1} = \psi_{2,2} = \psi_{3,3} = 0$ . Следовательно,  $\varepsilon_{ij}(\psi) = 0$ , а  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ; т. е.  $\psi$  является

жестким перемещением. Это приводит к  $\psi = \alpha \wedge x + \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные векторы, т. е.

$$\psi_1 = \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2 + \beta_1,$$

$$\psi_2 = \alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3 + \beta_2,$$

$$\psi_3 = \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 + \beta_3.$$

Теперь предположим, что перемещение и вращение в точке  $A = (0, 0, \ell)$  равны нулю, что окончательно приводит к

$$u_1 = -\frac{\nu \rho g}{E} x_1 x_3,$$

$$u_2 = -\frac{\nu \rho g}{E} x_2 x_3,$$

$$u_3 = \frac{\rho g}{2E} [x_3^2 + \nu (x_1^2 + x_2^2) - \ell^2].$$

На верхнем основании  $\Sigma_1$  мы уже наложили условие, что перемещение и вращение равны нулю в точке  $A$ . Более того, заметив, что

$$\sigma \cdot n = \rho g \ell e_3 \quad \text{на } \Sigma_1,$$

получим, что результирующая внешняя сила на  $\Sigma_1$ , равная  $\rho g \ell e_3 \times \times$  площадь( $\Sigma_1$ ), противоположна силе гравитации, а результирующий импульс равен нулю в точке  $A$ . Эта ситуация невозможна в реальности, но, согласно принципу Сен-Венана (см. разд. 14.7) и если стержень достаточно длинный ( $\ell \gg$  диаметр основания  $\Sigma_1$ ), найденное решение весьма хорошо приближает точное решение, когда мы находимся достаточно далеко от  $\Sigma_1$ .

Для точки на оси  $Ox_3$  перемещение направлено вниз:

$$u_1 = u_2 = 0,$$

$$u_3 = -\frac{\rho g}{2E} (\ell^2 - x_3^2).$$

Сечение  $x_3 = c$  после деформации примет вид

$$x'_1 = x_1 \left( 1 - \frac{\nu \rho g c}{E} \right),$$

$$x'_2 = x_2 \left( 1 - \frac{\nu \rho g c}{E} \right),$$

$$\begin{aligned} x'_3 &= c + \frac{\rho g}{2E} (c^2 - \ell^2) + \frac{\nu \rho g}{2E} (x_1^2 + x_2^2) \simeq \\ &\simeq (\text{в приближении первого порядка}) \simeq \\ &\simeq c + \frac{\rho g}{2E} (c^2 - \ell^2) + \frac{\nu \rho g}{2E} (x_1'^2 + x_2'^2). \end{aligned}$$

Деформированная поверхность сечения  $x_3 = c$  представляет собой параболоид вращения с осью  $Ox_3$ . Наконец, сжатие поперечных размеров пропорционально  $x_3$  (расстоянию до основания).

### 14.5. ПРОСТОЕ ИЗГИБАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БАЛКИ

В этом разделе мы будем рассматривать цилиндрическую балку с осью  $Ox_3$ , чья боковая поверхность  $\Sigma$  не подвержена какой-либо силе, причем торцевая поверхность  $\Sigma_1$  подвержена крутящему моменту  $M_2e_2$ , перпендикулярному  $Ox_3$ , а торцевая поверхность  $\Sigma_0$  — противоположному крутящему моменту (см. рис. 14.6).

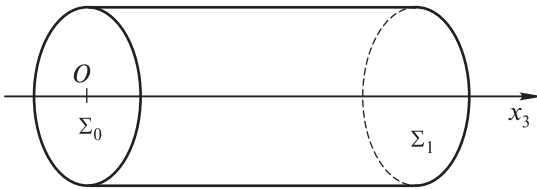


Рис. 14.6. Изгибание цилиндрической балки

Сделаем следующее упрощающее предположение, которое приводит к правдоподобному решению, если балка достаточно длинная и если мы находимся далеко от ее концов (см. также принцип Сен-Венана):

- Объемные силы, включая гравитацию, не учитываются.
- Внешние силы на поверхности  $\Sigma$  отбрасываются.
- Напряжения на поверхностях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_0$  имеют форму

$$F = \begin{cases} -cx_1e_3 & \text{на } \Sigma_1, \\ cx_1e_3 & \text{на } \Sigma_0 \end{cases}$$

и оси  $Ox_1x_2x_3$  выбираются следующим образом:

- $\int_{\Sigma_i} x_j dx_1 dx_2 = 0, i = 0,1, j = 1,2$ , т. е.  $(0,0)$  является центром масс для  $\Sigma_0$  (и  $\Sigma_1$ );
- $e_1$  и  $e_2$  — главные направления тензора инерции в точке  $O$  поверхности  $\Sigma_0$  (и  $\Sigma_1$ ), т. е.

$$\int_{\Sigma_i} x_1x_2 dx_1 dx_2 = 0, \quad i = 0,1,$$

и обозначим через  $I_j$  момент инерции относительно  $Ox_j, j = 1,2$ .

Образующие элементы спирального векторного поля, связанного с внешними силами, являются следующими:

$$R = \int_{\Sigma_0} F dx_1 dx_2 = ce_3 \int_{\Sigma_0} x_1 dx_1 dx_2 = 0,$$

$$M = \int_{\Sigma_0} x \wedge (cx_1 e_3) dx_1 dx_2 = -c \int_{\Sigma_0} x_1^2 e_2 dx_1 dx_2 + c \int_{\Sigma_0} x_1 x_2 e_1 dx_1 dx_2 =$$

$$= -cI_2 e_2 = -M_2 e_2.$$

Аналогично, на  $\Sigma_1$  результирующая сила становится равной нулю и результирующий импульс равен

$$M_2 e_2 = cI_2 e_2.$$

Эта задача может быть решена только для напряжений, так как нет краевых условий для перемещений. Проверим, что существует решение вида

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_2} x_1,$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{для всех остальных пар } (i, j).$$

Имеем

$$\sigma_{ij,j} = 0 = -f_i,$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{на } \Sigma.$$

Более того, на  $\Sigma_1$  имеем

$$F_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{13};$$

следовательно,

$$F = \sigma_{33} e_3 = -\frac{M_2}{I_2} x_1 \quad \text{на } \Sigma_1,$$

и аналогично

$$F = -\sigma_{33} e_3 = \frac{M_2}{I_2} x_1 \quad \text{на } \Sigma_0.$$

Остается определить перемещения. Благодаря предыдущим формулам и законам зависимости напряжений от деформации имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_I \delta_{ij};$$

таким образом,

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad \text{а для } i = j:$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{\nu}{E} \frac{M_2}{I_2} x_1 = u_{1,1} = u_{2,2},$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{M_2}{EI_2} x_1 = u_{3,3},$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = u_{1,3} + u_{3,1} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0.$$

Тогда можно взять компоненты  $u$  следующими:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2}{2EI_2} [x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)], \\ u_2 &= \frac{\nu M_2}{EI_2} x_1 x_2, \\ u_3 &= -\frac{M_2}{EI_2} x_1 x_3. \end{aligned}$$

Как говорилось ранее, этот результат является хорошим приближением реального решения для достаточно длинной балки, фиксированной в точке  $O$  или на  $\Sigma_0$  при достаточном удалении от  $\Sigma_0$ .

*Примечание 14.2.* Если мы применим более общий крутящий момент  $M_1 e_1 + M_2 e_2$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — компоненты на главных осях инерции сечения, то мы получим такой же результат. Случай крутящего момента вида  $M_3 e_3$  (задача скручивания) рассмотрим отдельно в следующем разделе.

### Обсуждение результата

Далее мы предполагаем, что основание  $\Sigma_0$  фиксировано.

1. Каждая часть (или каждый сегмент) балки, соответствующая фиксированным  $x_1$  и  $x_2$ , называется нитью. Нить удлиняется или натягивается при  $x_1 < 0$ , т. е.  $u_3 > 0$ ; она сжимается или укорачивается при  $x_1 > 0$ , т. е.  $u_3 < 0$ .
2. Центральная нить, соответствующая  $x_1 = x_2 = 0$ , после деформации принимает вид

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_2 = 0, & x'_3 &= x_3, \\ x'_1 &= \frac{M_2}{2EI_2} x_3^2 \simeq \frac{M_2}{2EI_2} x'^2_3. \end{aligned}$$

Это парабола, чья кривизна в приближении первого порядка равна  $1/R = M_2/EI_2$ .

Поскольку мы имеем дело с малыми деформациями, дуга параболы может быть приравнена касательной окружности в точке  $O$  радиуса  $R$  (соприкасающаяся окружность в  $O$ ).

Этот результат известен как закон Эйлера–Бернулли: изгибающий вращающий момент пропорционален кривизне балки. Коэффициент пропорциональности  $EI_2$  называется модулем жесткого изгиба для оси  $Ox_2$ . Для увеличения  $EI_2$  необходимо увеличить  $I_2 = \int_{\Sigma_0} x_1^2 dx_1 dx_2$ .

Проинтерпретируем последнее положение: для заданной площади сечения (установленное количество объема материала), увеличиваем сопротивление

изгибу, уменьшая  $I_2$ ; это приводит к классической балке I-формы, используемой в высотных зданиях.

3. Сечение с начальным состоянием  $\mathcal{D}_a = \{x_3 = a\}$  после деформации находится в плоскости

$$x'_3 = x_3 + u_3(x) = a \left( 1 - \frac{M_2}{EI} x_1 \right),$$

$$x_3 = a \left( 1 - \frac{x_1}{R} \right).$$

Эта плоскость перпендикулярна параболу, соответствующей деформации центральной нити.

Эти результаты являются классическими в теории упругости криволинейных материалов в гражданском строительстве.

### 14.6. СКРУЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Цилиндрический стержень с осью  $Ox_3$  подвергается крутящим моментам  $-Me_3$  и  $Me_3$  (см. рис. 14.6) на своих концах  $\Sigma_0 (x_3 = 0)$  и  $\Sigma_1 (x_3 = \ell)$ .

Предположим, что нет объемных сил и нет сил, действующих на боковую поверхность  $\Sigma$ . Более точно воздействия на  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  будут определены позже. Предположим далее, что  $Ox_3$  совпадает с линией, соединяющей центры масс всех сечений цилиндра.

Ищем решение в напряжениях, для которого априори все  $\sigma_{ij}$  равны нулю, кроме  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{23}$ , которые предполагаются независимыми от  $x_3$ . Тогда уравнения равновесия дают

$$\sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{23,3} = 0,$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 = \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2}.$$

Таким образом,  $\sigma_{13,1} = -\sigma_{23,2}$ ,  $(\sigma_{23}, -\sigma_{13})$  является в этом случае градиентом, и существует функция  $\theta = \theta(x_1, x_2)$  такая, что

$$\sigma_{13} = \mu\alpha\theta_{,2}, \quad \sigma_{23} = -\mu\alpha\theta_{,1},$$

где  $\alpha$  — угол вращения, который предполагается малым. Поскольку  $s = \sigma_I = 0$ , уравнение Бельтрами принимает вид

$$\Delta\sigma_{i\ell} = 0,$$

что приводит к

$$\Delta\theta_{,2} = \Delta\theta_{,1} = 0,$$

и, таким образом,

$$\Delta\theta = \text{const} = C.$$



Получаем тензор напряжений вида

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{\alpha}{2}\theta_{,2}, & \varepsilon_{23} &= -\frac{\alpha}{2}\theta_{,1}, \\ \varepsilon_{ij} &= 0 & \text{для всех остальных пар } (i, j).\end{aligned}$$

Наконец, для перемещений мы собираемся показать, что существует решение вида

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

где  $\varphi$ , а также  $\theta$  и  $C$  подлежат определению.

Поскольку  $u_{3,3} = 0$ , мы выводим, что  $\varphi$  зависит только от  $x_1$  и  $x_2$ . Более того,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(-\alpha x_2 + \alpha \varphi_{,1}) = \frac{\alpha}{2}\theta_{,2}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(\alpha x_1 + \alpha \varphi_{,2}) = -\frac{\alpha}{2}\theta_{,1};\end{aligned}$$

следовательно,

$$2(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}) = -2\alpha = \alpha \Delta \theta,$$

и, таким образом,  $C = -2$  и

$$\Delta \theta + 2 = 0.$$

Предположим теперь, что  $\psi = \theta + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\Delta \psi = \Delta \theta + 2 = 0$$

и

$$\begin{aligned}\psi_{,2} &= \varphi_{,1}, \\ \psi_{,1} &= -\varphi_{,2},\end{aligned}$$

что приводит к уравнению

$$\Delta \varphi = 0.$$

Функция  $\varphi + i\psi$  является голоморфной, и, следовательно, мы можем воспользоваться теорией комплексного анализа. Более того, мы получим полное решение задачи, как только будет известна одна из функций  $\theta$ ,  $\varphi$  или  $\psi$ .

### Краевые условия

На  $\Sigma$  условие  $\sigma_{ij}n_j = 0$  можно записать в виде

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0,$$

и, соответственно,

$$\theta_{,2}n_1 - \theta_{,1}n_2 = 0.$$

Поэтому

$$\theta_{,2}\tau_2 + \theta_{,1}\tau_1 = 0;$$

иначе говоря

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = 0,$$

т. е.  $\theta$  — константа на  $\Sigma$ . Поскольку  $\theta$  определяется с точностью до аддитивной константы, можно считать, что

$$\theta = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Таким образом,  $\theta$  является решением следующей краевой задачи, которая называется задачей Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta\theta + 2 = 0 & \text{на} \quad \Sigma_0, \\ \theta = 0 & \text{на} \quad \partial\Sigma_0. \end{cases}$$

Можно доказать, что эта задача обладает единственным решением (которое, таким образом, зависит лишь от основания цилиндра  $\Sigma_0$ ). Функция  $\theta$  иногда называется функцией напряжения задачи кручения. Это позволяет определить перемещения и напряжения.

Для завершения анализа теперь определим более точно силы, действующие на  $\Sigma_1$ , где  $\sigma \cdot n = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, 0)$ . Результирующая внешних сил на  $\Sigma_1$  равна нулю:

$$\begin{aligned} R &= \int_{\Sigma_1} (\sigma_{13}, \sigma_{23}, 0) dx_1 dx_2 = \int_{\Sigma_1} \mu\alpha(\theta_{,2}, -\theta_{,1}, 0) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\partial\Sigma_1} \mu\alpha(n_2, -n_1, 0) \theta dl = 0. \end{aligned}$$

Их результирующий момент в точке  $O$  равен  $Me_3$ , где

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Sigma_1} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13}) dx_1 dx_2 = \int_{\Sigma_1} -\mu\alpha(x_1\theta_{,1} + x_2\theta_{,2}) dx_1 dx_2 = \\ &= -\mu\alpha \int_{\Sigma_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\theta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\theta) - 2\theta \right] dx_1 dx_2 = \\ &= -\mu\alpha \int_{\partial\Sigma} x \cdot n\theta dl + 2\mu\alpha \int_{\Sigma_1} \theta dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Следовательно, задавая  $D = 2\mu \int_{\Sigma_1} \theta dx_1 dx_2$ , находим

$$M = D\alpha e_3.$$

Константа  $D$  называется модулем жесткого скручивания стержня. Видим, что вращающий момент, приложенный к  $\Sigma_1$ , пропорционален углу вращения  $\alpha$ .

В частном случае цилиндрического стержня радиуса  $a$  легко видеть, что  $2\theta = a^2 - x_1^2 - x_2^2$  является решением соответствующей задачи Дирихле; тогда непосредственными вычислениями находим

$$D = \frac{\pi a^4 \mu}{2}.$$

Модуль жесткого скручивания цилиндрического стержня, таким образом, пропорционален четвертой степени его радиуса.

### Предел упругости (для цилиндрического стержня радиуса $a$ )

Имеем

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = \sigma_{II}^D = \mu^2 \alpha^2 |\nabla \theta|^2 = \mu^2 \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2).$$

Максимум  $\sigma_{II}^D$  достигается на  $\partial \Sigma_0$  (можно доказать справедливость данного факта для цилиндра общего вида) и равен  $\mu^2 \alpha^2 a^2$ . Тогда критерий фон Мизеса дает

$$\mu^2 \alpha^2 a^2 \leq \frac{k^2}{3},$$

откуда

$$\alpha \leq \frac{k}{\mu a \sqrt{3}}.$$

Максимальная мощность крутящего момента определяется неравенством

$$M \leq \frac{\pi a^3}{2\sqrt{3}} k.$$

## 14.7. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

В этом небольшом разделе мы ограничимся только формулировкой принципа Сен-Венана ввиду того, что предыдущие разделы содержат многочисленные приложения и пояснения этого принципа.

Согласно этому принципу, если на некоторой части  $\Sigma_0$  границы  $\partial \Omega$  вместо условия  $u = 0$  мы примем, что перемещение  $u(A)$  и вращение  $\omega(A)$  в точке  $A$  участка  $\Sigma_0$  равны нулю, или если мы заменим поверхностные силы плотности  $F (\sigma \cdot n = F)$  другим множеством сил, образующих такое же спиральное векторное поле (на  $\Sigma_0$ ), то **на удалении от  $\Sigma_0$**  перемещения и напряжения остаются неизменными в первом приближении.

Этот принцип оправдывает упрощающие гипотезы, сделанные нами в предыдущих разделах. Некоторые его более точно сформулированные частные случаи были строго доказаны.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим тензор  $\sigma$  с компонентами в ортонормальном базисе

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0, \sigma_{13} = Ax_1^2 + Bx_2^2 + C, \sigma_{23} = Dx_1x_2, \sigma_{33} = Ex_1 + Fx_1x_3.$$

а) Определить условия, которым должны удовлетворять константы  $A, B, C, D, E, F$ , чтобы этот тензор мог быть тензором напряжений любого упругого материала с коэффициентом Пуассона  $\nu$  (без учета объемных сил).

б) Предположим, что эти условия выполнены и что  $\sigma$  является тензором напряжений цилиндрического тела ( $\mathcal{C}$ ), заданного условиями  $x_1^2 + x_2^2 \leq a$ ,  $0 \leq x_3 \leq l$ , и такого, что

- (i) внешние силы равны нулю на боковой поверхности;
- (ii) на основании  $x_3 = l$  спиральное векторное поле, связанное с внешними силами, эквивалентно ползунку (единичная сила) мощности  $P$  с носителем, содержащим центр основания (т. е.  $\mathcal{R} = (P, 0, 0)$  и  $\mathcal{M} = 0$ ); мы рассматриваем результирующий момент в центре основания). Вычислить константы  $A, B, C, D, E$  и  $F$ .

2. Рассмотрим упругую среду в равновесии относительно ортогонального репера  $(0x_1x_2x_3)$  такую, что тензор напряжений имеет компоненты

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0, \\ \sigma_{33} &= \alpha(l - x_3).\end{aligned}$$

а) Вычислить внешние силы.

б) Вычислить компоненты  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформаций через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

в) Вычислить поле перемещений  $u$  в предположении, что начало координат  $O$  принадлежит среде.

3. Упругое тело с плотностью  $\rho$  и с коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  представлено цилиндрической трубкой, ограниченной двумя круглыми соосными цилиндрами с осью  $(0x_3)$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Предположим, что тело находится в равновесии и что объемные силы равны нулю. Пусть  $M$  — точка трубки,  $H$  — ее ортогональная проекция на  $(0x_3)$ . Зададим  $HM = r$ ,  $e_r = \frac{1}{r} \overrightarrow{HM}$ .

а) Предположим, что перемещение имеет вид

$$u = U(r)e_r.$$

Вычислить  $\operatorname{div} u$  и  $\operatorname{curl} u$ . Выписать обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $U$ .

б) Решить это уравнение в предположении, что давления внутри и снаружи трубки равны  $P_1$  и  $P_2$  соответственно.

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ

В этой главе мы представим принципы минимизации энергии, которые определяют равновесия в эластостатике; также введем два связанных между собой понятия, а именно понятие двойственности (двойственность для вариационных принципов и двойственность между перемещениями и напряжениями) и понятие вариационной постановки. Кроме их значимости для механики эти понятия также играют важную роль в численном приближении рассматриваемых задач и во многих других областях науки.

## 15.1. УПРУГАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛА

В изотропном упругом материале можно определить квадратичный функционал  $w = w(\varepsilon)$ , называемый функционалом энергии, такой, что:

$$\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (15.1)$$

для любого тензорного поля  $\varepsilon$ , и тогда уравнение (15.1) идентично закону зависимости напряжений от деформации материала. Этот функционал, таким образом, задается соотношением

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} \{ \lambda \varepsilon_{kk} \varepsilon_{\ell\ell} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \};$$

следовательно,

$$2w(\varepsilon) = 2\mu \left( \varepsilon_{ij}^D + \frac{\varepsilon_{\ell\ell}}{3} \delta_{ij} \right) \left( \varepsilon_{ij}^D + \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + \lambda (\varepsilon_{kk})^2,$$

или иначе

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu}{3} + \lambda \right) (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D. \quad (15.2)$$

Следовательно,  $w$  является положительно определенной квадратичной формой от  $\varepsilon$  (всегда будем считать, что  $\mu$  и  $\kappa = \lambda + 2\mu/3$  строго положительны).

Если мы рассмотрим тензорное поле  $\varepsilon$ , определенное на  $\Omega$ ,  $x \in \Omega \mapsto \varepsilon(x)$ , мы можем поставить ему в соответствие функционал

$$W(\varepsilon) = \int_{\Omega} w[\varepsilon(x)] dx.$$

Сформулируем следующий результат, который дает физическую интерпретацию  $W$  и объясняет его введение.

**Предложение 15.1.** Рассмотрим упругую систему  $S$ , которая находится в своем естественном состоянии ( $\varepsilon = 0$ ) и занимает область  $\Omega$  в момент времени  $t = 0$  и которая в момент времени  $t = t_1$  находится в деформированном состоянии, соответствующем тензору деформаций  $\varepsilon$ . Тогда  $-W(\varepsilon)$  является, в первом приближении, работой внутренних сил на отрезке времени между 0 и  $t_1$ . Таким образом,  $W(\varepsilon)$  является количеством энергии, накопленной при деформации между 0 и  $t_1$ .

**Доказательство.** Известно, что энергия внутренних сил в каждый момент времени задается

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\Omega_t} \tilde{\sigma}_{ij}(x', t) \tilde{\varepsilon}_{ij}[U(x', t)] dx' = - \int_{\Omega_0} \tilde{\sigma}_{ij}[\Phi(x, t)] \tilde{\varepsilon}_{ij} \left[ \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right] \frac{D\Phi}{Dx} dx.$$

В линейной случае (см. гл. 13)  $D\Phi/Dx \simeq 1$  с точностью до первого порядка и, таким образом, в первом приближении

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x, t) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}(x, t) dx,$$

где  $\Omega = \Omega_0$  — недеформированное состояние (в момент времени  $t = 0$ ). Поэтому

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{\partial w[\varepsilon(x, t)]}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x, t)}{\partial t} dx = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w[\varepsilon(x, t)] dx = - \frac{d}{dt} W[\varepsilon(t)].$$

Работа внутренних сил на интервале времени между 0 и  $t_1$  есть, по определению, интеграл от  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  на отрезке от 0 до  $t_1$ ; поэтому

$$- \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} [W(\varepsilon(t))] dt = -W[\varepsilon(t_1)] + W[\varepsilon(0)] = -W(\varepsilon),$$

так как  $\varepsilon = \varepsilon(t_1)$  и  $\varepsilon(0) = 0$ .

Учитывая данный результат, введем следующее определение.

**Определение 15.1.** Пусть  $\varepsilon$  является тензорным полем, определенным на  $\Omega$ . Назовем  $W(\varepsilon)$  энергией упругой деформации поля  $\varepsilon$ , а  $w[\varepsilon(x)]$  — объемной интенсивностью энергии деформации в точке  $x$ ,  $x \in \Omega$ .

## 15.2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Мы также можем рассмотреть сопряженную к  $w$  квадратичную форму, которая определяется выражением

$$w^*(\sigma) = \text{Sup}_{\varepsilon_{ij}} \{ \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} - w(\varepsilon) \}. \quad (15.3)$$

Непосредственные вычисления дают

$$w^*(\sigma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\ell\ell})^2 \right];$$

отметим, что

$$\frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}, \quad \forall i, j. \quad (15.4)$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} 2w^*(\sigma) &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{ij}^D + \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \left( \sigma_{ij}^D + \frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} \delta_{ij} \right) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\ell\ell})^2 = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_{kk})^2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\ell\ell})^2 = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \frac{1-2\nu}{3E} (\sigma_{kk})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$w^*(\sigma) = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{II}^D)^2 + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_I^2 \quad (15.5)$$

и, следовательно,  $w^*(\sigma)$  также является положительно определенной квадратичной формой относительно  $\sigma$  (в предположении, что  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$  и  $E > 0$ ).

Прямым следствием уравнения (15.3) является неравенство

$$w(\varepsilon) + w^*(\sigma) - \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \geq 0, \quad (15.6)$$

справедливое для всех пар тензоров  $\varepsilon, \sigma$ . Более того,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  связаны законом зависимости напряжений от деформации тогда и только тогда, когда

$$w(\varepsilon) = w^*(\sigma) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}. \quad (15.7)$$

Действительно, когда уравнение (15.7) верно,  $\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} - w(\varepsilon) = w^*(\sigma)$ , и, таким образом, супремум в уравнении (15.3) действительно достигается на  $\varepsilon$ . Учитывая, что производные по  $\varepsilon_{ij}$  тензора  $\varepsilon_{k\ell} \sigma_{k\ell} - w(\varepsilon)$  равны нулю, мы получаем следующее соотношение:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \forall i, j; \quad (15.8)$$

оно совпадает с законом зависимости напряжений от деформации. Обратно, поскольку функция  $\varepsilon, \varepsilon \mapsto \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} - w(\varepsilon)$  выпуклая, (15.8) означает, что эта функция достигает своего максимума на  $\varepsilon$ .

Теперь для всех пар тензорных полей  $\varepsilon, \sigma$ , определенных на  $\Omega$ , мы задаем

$$\begin{aligned} W^*(\sigma) &= \int_{\Omega} w^*[\sigma(x)] dx, \\ \langle \varepsilon, \sigma \rangle &= \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(x) \sigma_{ij}(x) dx; \end{aligned}$$

как следствие уравнений (15.6), (15.7) и (15.8) получаем следующее утверждение.

**Предложение 15.2.** Для каждой пары тензорных полей  $\sigma, \varepsilon$ , определенных на  $\Omega$ , имеем

$$W(\varepsilon) + W^*(\sigma) - \langle \varepsilon, \sigma \rangle \geq 0. \quad (15.9)$$

Более того, неравенство (15.9) превращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$W(\varepsilon) = W^*(\sigma) = \frac{1}{2} \langle \varepsilon, \sigma \rangle, \quad (15.10)$$

и в этом случае

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}[\varepsilon(x)] \quad (15.11)$$

для всех  $x \in \Omega$ .

**Доказательство.** Неравенство (15.9) выводится интегрированием неравенства (15.6). Более того, если в (15.9) стоит равенство, то

$$\int_{\Omega} [w(\varepsilon) + w^*(\sigma) - \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}] dx = 0;$$

следовательно, по неравенству (15.6):

$$w[\varepsilon(x)] + w^*[\sigma(x)] - \varepsilon_{ij}(x) \sigma_{ij}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Таким образом, уравнение (15.7) верно для всех  $x$ , которые после интегрирования приводят к уравнению (15.10). В этом случае уравнение (15.8) верно для всех  $x$ , что эквивалентно выполнению уравнения (15.11). Обратно, если условие уравнения (15.10) имеет место, то легко можно проверить, что в неравенстве (15.9) достигается равенство.

**Определение 15.2.** Пусть  $\sigma$  является тензорным полем, определенным на  $\Omega$ . Назовем  $W^*(\sigma)$  энергией упругих напряжений для поля  $\sigma$ , а  $w^*[\sigma(x)]$  — объемной интенсивностью энергии напряжений в точке  $x$ .

## Обобщение

До сих пор, рассматривая случай линейной упругости, мы ограничивали себя однородными изотропными материалами, т. е. материалами, которые обладают одним и тем же поведением во всех точках (однородность) и во всех направлениях (изотропность). В нелинейном случае закон зависимости напряжений от деформации имеет следующий, более общий, вид:

$$\sigma_{ij} = a_{ijhk} \varepsilon_{hk}, \quad (15.12)$$



где модуль упругости  $a_{ijhk}$  удовлетворяет условиям симметричности

$$a_{ijhk} = a_{jihk} = a_{ijkh}$$

и условию положительной определенности

$$a_{ijhk}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{hk} \geq \alpha \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \forall \varepsilon,$$

причем  $\alpha$  — строго положительная константа. Величина  $a_{ijhk}$  может зависеть от  $x$ , и тогда условие положительной определенности будет необходимым в каждой точке  $x \in \Omega$ .

Вернемся к изотропному случаю, взяв

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}).$$

Обращая равенства (15.12), мы можем написать

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkh}\sigma_{kh}, \tag{15.13}$$

причем  $A_{ijkh}$  удовлетворяет тем же условиям симметричности

$$A_{ijkh} = A_{jihk} = A_{ijkh}$$

и условию положительной определенности

$$A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh} \geq \alpha' \sigma_{ij}\sigma_{ij}, \quad \forall \sigma,$$

при  $\alpha' > 0$ .

Тогда все, что было рассмотрено выше (в частности уравнения (15.1) и (15.4)), может быть обобщено и на неизотропный случай, если положить

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh},$$

$$w^*(\sigma) = \frac{1}{2} A_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh}.$$

*Примечание 15.1.* Выше мы ограничили себя линейным случаем. Тем не менее полученные результаты могут быть обобщены на случай *нелинейной* упругости. Тогда функции  $w, w^*, W$  и  $W^*$  уже не будут квадратичными формами от  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , но будут более общими выпуклыми функциями от  $\varepsilon$  и  $\sigma$ . Краткое обсуждение таких ситуаций будет проведено в гл. 16.

### 15.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим, как и в гл. 13, общую задачу эластостатики: найти  $\sigma, \varepsilon$  и  $u$ , которые являются решениями

$$(P) \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0, & \text{в } \Omega, \\ \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \sigma_{ij}n_j = F_i, & \text{на } \Gamma_F, \\ u = U_d, & \text{на } \Gamma_u, \end{cases}$$

при  $\Gamma_u \cup \Gamma_F = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_F = \emptyset$ . Предположим, что  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_F$  непусты. Некоторые предельные случаи, соответствующие  $\Gamma_u = 0$  или  $\Gamma_F = 0$ , будут обсуждены отдельно.

Перед формулировкой энергетических теорем мы дадим несколько определений, которые будут полезны далее.

**Определение 15.3.** Назовем перемещение  $u$ , определенное на  $\Omega$ , кинематически допустимым для  $(\mathcal{P})$ , если оно удовлетворяет равенству  $u = U_d$  на  $\Gamma_u$  и если оно удовлетворяет некоторым допущениям регулярности.<sup>1)</sup>

**Определение 15.4.** Будем говорить, что поле напряжений  $\sigma$ , определенное на  $\Omega$ , статически допустимо для  $(\mathcal{P})$ , если оно удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \sigma_{ij}n_j &= F_i & \text{на } \Gamma_F, \end{aligned}$$

так же как и некоторым допущениям регулярности.<sup>2)</sup>

**Определение 15.5.** Обозначим через  $(\mathcal{P}_h)$  однородную задачу, связанную с  $(\mathcal{P})$ , соответствующую  $f_i = 0, F_i = 0$  и  $U_d = 0$ . Как и в определениях 15.3 и 15.4, определим допустимые тензорные поля перемещений и напряжений для  $(\mathcal{P}_h)$ .<sup>3)</sup>

**Определение 15.6.**

1. Потенциальная энергия кинематически допустимого векторного поля  $u$  задается выражением

$$V(u) = \frac{1}{2} W[\varepsilon(u)] - L(u),$$

где  $\varepsilon(u)$  — тензор деформаций с элементами

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$L(u) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot u \, d\Gamma.$$

<sup>1)</sup>В общем случае мы предположим, что функция  $u$  является кусочно гладкой класса  $\mathcal{C}^1$  или  $\mathcal{C}^2$ . Однако в современном функциональном анализе рассматривают, как правило, функции, принадлежащие пространствам Соболева, которые здесь, с физической точки зрения, непосредственно связаны с множеством функций с конечной энергией.

<sup>2)</sup>Как и для  $u$ , мы рассмотрим в общем случае непрерывное или кусочно гладкое тензорное поле класса  $\mathcal{C}^1$ , но будет проще рассматривать тензорное поле, интегрируемое с квадратом.

<sup>3)</sup>Решение задачи  $(\mathcal{P}_h)$  равно нулю везде, где  $(\sigma = \varepsilon = u = 0)$ , но, конечно же, допустимое поле напряжений или поле перемещений для  $(\mathcal{P}_h)$  не обращаются одновременно в нуль.

2. Потенциальная энергия статически допустимого тензорного поля  $\sigma$  задается выражением

$$V^*(\sigma) = -\frac{1}{2} W^*(\sigma) + K(\sigma),$$

где

$$K(\sigma) = \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (U_d)_i d\Gamma.$$

Если  $u$  и  $\sigma$  являются, соответственно, кинематически и статически допустимыми для  $(\mathcal{P})$ , то непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} L(u) + K(\sigma) &= \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n)u \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i \, dx + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n)u \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \sigma_{ij} \, dx. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем соотношение

$$L(u) + K(\sigma) = \langle \varepsilon(u), \sigma \rangle, \tag{15.14}$$

результатом которого является следующая теорема.

**Теорема 15.1.** Пусть  $u'$  является кинематически допустимым полем перемещений для  $(\mathcal{P})$  и пусть  $\sigma'$  — статически допустимое поле напряжений для  $(\mathcal{P})$ . Тогда

$$V^*(\sigma') \leq V(u').$$

Если, более того, предположить, что задача  $(\mathcal{P})$  разрешима и, если  $(u, \sigma)$  — ее решение, то

$$V^*(\sigma') \leq V^*(\sigma) = V(u) \leq V(u'). \tag{15.15}$$

Из этого следует, в частности, что минимум  $V(u')$  среди всех кинематически допустимых перемещений  $u'$  для  $(\mathcal{P})$  достигается на  $u$ , или максимум  $V^*(\sigma')$  среди всех статически допустимых полей напряжений  $\sigma'$  для  $(\mathcal{P})$  достигается на  $\sigma$ .

**Доказательство.** Соотношение  $V^*(\sigma') \leq V(u')$  немедленно следует из уравнения (15.14) и определения  $V$  и  $V^*$ . Для уравнения (15.15) предположим, что задача  $(\mathcal{P})$  обладает решениями, и обозначим любое такое решение через  $(u, \sigma)$ . Безусловно,  $u$  является кинематически допустимым, а  $\sigma$  — статически допустимым. Более того, если  $u'$  — кинематически допустимое поле, то

$$W[\varepsilon(u')] \geq -W^*(\sigma) + \langle \varepsilon(u'), \sigma \rangle.$$

Поскольку

$$\langle \varepsilon(u'), \sigma \rangle = L(u') + K(\sigma),$$

видно, что

$$W[\varepsilon(u')] - L(u') \geq -W^*(\sigma) + K(\sigma);$$

следовательно,

$$V(u') \geq V^*(\sigma)$$

для всех кинематически допустимых полей  $u'$ .

Аналогично, если  $\sigma'$  является статически допустимым полем, то

$$\begin{aligned} V^*(\sigma') &= -W^*(\sigma') + K(\sigma') \\ &= [\text{согласно (15.14)}] \\ &= -W^*(\sigma') + \langle \varepsilon(u), \sigma' \rangle - L(u) \\ &\leq [\text{по неравенству (15.19)}] \\ &\leq W[\varepsilon(u)] - L(u) = V(u). \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$V(u) = V^*(\sigma),$$

так как

$$W[\varepsilon(u)] + W^*(\sigma) = \langle \varepsilon(u), \sigma \rangle = L(u) + K(\sigma).$$

Следовательно,

$$W[\varepsilon(u)] - L(u) = -W^*(\sigma) + K(\sigma).$$

Таким образом, доказано, что

$$V^*(\sigma') \leq V^*(\sigma) = V(u) \leq V(u')$$

для всех кинематически допустимых полей  $u'$  и всех статически допустимых полей  $\sigma'$ . Теорема доказана.

*Примечание 15.2.* Из предыдущих теорем следует, что решение задачи эластостатики ( $\mathcal{P}$ ) связано со следующими двумя вариационными задачами, касающимися, соответственно, перемещений и напряжений:

*Найти минимум  $V(u')$  по всем векторным полям  $u'$ , кинематически допустимым для ( $\mathcal{P}$ );*

*Найти максимум  $V^*(\sigma')$  по всем тензорным полям  $\sigma'$ , статически допустимым для ( $\mathcal{P}$ ).*

Эти две вариационные задачи (задачи вариационного исчисления) двойственны друг другу в том смысле, как это определено в вариационном исчислении и выпуклом анализе. Теорема 15.1, и в частности уравнение (15.15), обеспечивают несколько соотношений, существующих между двумя общими двойственными задачами.

Наконец, отметим, что  $V$  и  $V^*$  являются квадратичными функционалами  $u'$  и  $\sigma'$  соответственно. С физической точки зрения, теорема 15.1 дает энергетические принципы (или теоремы), которые обуславливают  $(\mathcal{P})$ .

Разделе 15.4 до некоторой степени углубляет изучение вариационных постановок, относящихся к  $(\mathcal{P})$ , что полезно как для механики, так и для математической теории и численного анализа данной задачи.

### 15.4. ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ

Введем симметричные билинейные формы, связанные с  $W$  и  $W^*$ , а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varepsilon', \varepsilon'') &= \frac{1}{2} [W(\varepsilon' + \varepsilon'') - W(\varepsilon') - W(\varepsilon'')] \quad \text{и} \\ \mathcal{W}^*(\sigma', \sigma'') &= \frac{1}{2} [W^*(\sigma' + \sigma'') - W^*(\sigma') - W^*(\sigma'')]. \end{aligned} \tag{15.16}$$

Пусть  $(u, \sigma)$  является решением задачи  $(\mathcal{P})$ . В предыдущем разделе было показано, что

$$V(u) \leq V(u')$$

для всех кинематически допустимых векторных полей  $u'$ . В силу выпуклости  $V$  это соотношение эквивалентно

$$\frac{d}{d\lambda} V[u + \lambda(u' - u)]|_{\lambda=0} = 0, \quad \forall u',$$

или иначе

$$\mathcal{W}[\varepsilon(u), \varepsilon(u') - \varepsilon(u)] - L(u' - u) = 0 \tag{15.17}$$

для всех кинематически допустимых векторных полей  $u'$ . Аналогично, в силу вогнутости  $V^*$  соотношение

$$V^*(\sigma') \leq V^*(\sigma), \tag{15.18}$$

верное для всех статически допустимых векторных полей  $\sigma'$ , эквивалентно

$$\mathcal{W}^*(\sigma, \sigma' - \sigma) - K(\sigma' - \sigma) = 0, \quad \forall \sigma'. \tag{15.19}$$

С другой стороны, отметим, что уравнение (15.17) эквивалентно

$$\mathcal{W}[\varepsilon(u), \varepsilon(v)] - L(v) = 0 \tag{15.17'}$$

для всех векторных полей  $v$ , кинематически допустимых для  $\mathcal{P}_h$ . Аналогично, уравнение (15.19) эквивалентно

$$\mathcal{W}^*(\sigma, \tau) - K(\tau) = 0 \tag{15.19'}$$

для всех тензорных полей  $\tau$ , статически допустимых для  $\mathcal{P}_h$ .

Отметим также, что уравнения (15.17) и (15.19) обладают не более чем одним решением. В самом деле, если  $u'$  и  $u''$  — два решения уравнения (15.17), то зададим  $u = u' - u''$  и заметим, что

$$\mathcal{W}[\varepsilon(u), \varepsilon(u)] = W[\varepsilon(u)] = 0,$$

откуда

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u') - \varepsilon(u'') = 0,$$

так как  $W(\varepsilon)$  положительно определен. Следовательно,  $u' = u''$ , если  $\Gamma_u \neq \emptyset$  и  $u' = u'' +$  жесткое перемещение при  $\Gamma_u = \emptyset$ . Аналогично, если  $\sigma'$  и  $\sigma''$  — два решения (15.19), и если  $\sigma = \sigma' - \sigma''$ , то тогда

$$\mathcal{W}^*(\sigma, \sigma) = W^*(\sigma) = 0;$$

следовательно,  $\sigma = 0$  и  $\sigma' = \sigma''$ .

Таким образом, уравнение (15.17) обладает не более чем одним решением, а именно  $u$ , и то же верно для уравнения (15.19). Кроме того, каждое из этих уравнений эквивалентно задаче  $(\mathcal{P})$ .

Этот результат можно прямо вывести вариационными методами или, что эквивалентно (для уравнения (15.17)), выписав теорему о виртуальной мощности для кинематически допустимого виртуального векторного поля  $v$  для  $(\mathcal{P}_h)$  и используя закон зависимости напряжений от деформации. Это будет целью разд. 15.5.

Теперь сделаем уравнения (15.17) и (15.19) явными.

Мы видели, что при подходящих предположениях регулярности  $u$  является кинематически допустимым тогда и только тогда, когда  $u = U_d$  на  $\Gamma_u$ . Следовательно, уравнение (15.17) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^D(u) \varepsilon_{ij}^D(u - u') dx + \kappa \int_{\Omega} \varepsilon_{kk}(u) \varepsilon_{\ell\ell}(u - u') dx = \\ = \int_{\Omega} f \cdot (u - u') dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot (u - u') d\Gamma \end{aligned} \quad (15.20)$$

для всех  $u'$ , таких, что  $u' = U_d$  на  $\Gamma_u$ ; следовательно, для  $u = U_d$  на  $\Gamma_u$  и для всех  $v$ , таких, что  $v = 0$  на  $\Gamma_u$ , выполнено

$$2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^D(u) \varepsilon_{ij}^D(v) dx + \kappa \int_{\Omega} \varepsilon_{kk}(u) \varepsilon_{\ell\ell}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot v d\Gamma. \quad (15.20')$$

Аналогично  $\sigma$  является статически допустимым тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \sigma_{ij} n_j &= F_i & \text{на } \Gamma_F, \end{aligned}$$

и уравнение (15.19), таким образом, эквивалентно

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^D (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}^D) dx + \frac{1-2\nu}{3E} \int_{\Omega} \sigma_{jj} (\sigma'_{kk} - \sigma_{\ell\ell}) dx = \\ = \int_{\Gamma_u} (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) n_j (U_d)_i d\Gamma \end{aligned} \quad (15.21)$$

для всех  $\sigma'$ , таких, что  $\sigma'_{ij,j} + f_i = 0$  в  $\Omega$ , и  $\sigma'_{ij} n_j = F_i$  на  $\Gamma_F$ ; или иначе уравнение (15.19) эквивалентно

$$\frac{1+\nu}{E} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^D \tau_{ij}^D dx + \frac{1-2\nu}{3E} \int_{\Omega} \sigma_{kk} \tau_{\ell\ell} dx = \int_{\Gamma_u} \tau_{ij} n_j (U_d)_i d\Gamma \quad (15.21')$$

для всех  $\tau$ , таких, что  $\tau_{ij,j} = 0$  в  $\Omega$  и  $\tau_{ij} n_j = 0$  на  $\Gamma_F$ .

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Теорема 15.2.** *Решение  $\sigma, \varepsilon, u$  задачи  $(\mathcal{P})$  единственно; если  $\Gamma_u = \emptyset$ , то  $u$  единственно с точностью до жесткого перемещения. Это решение задается уравнениями (15.20') (для  $\mu$ ) и (15.21') (для  $\sigma$ ).*

Будем говорить, что уравнения (15.20') и (15.21') являются вариационными постановками, связанными с вариационными задачами, приведенными в теореме 15.1 и примечании 15.2. В вариационном исчислении, мы также говорим, что они являются уравнениями Эйлера для вариационной задачи.

## 15.5. ТЕОРЕМА О ВИРТУАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ

Теперь мы покажем, как вариационные постановки могут быть выведены напрямую из теоремы о виртуальной мощности. Они могут быть также выведены из уравнений задачи  $(\mathcal{P})$  при помощи непосредственных математических вычислений, но этого мы делать не будем.

Пусть  $(u, \varepsilon = \varepsilon(u), \sigma)$  является решением задачи  $(\mathcal{P})$  и пусть  $u'$  — произвольное поле виртуальных скоростей на  $\Omega$ , причем  $\varepsilon' = \varepsilon(u')$  — поле скоростей деформаций, связанное с  $u'$ . Тогда

$$\begin{aligned} -\mathcal{W}(\varepsilon, \varepsilon') &= -2\mu \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^D(u) \varepsilon_{ij}^D(u') dx - \kappa \int_{\Omega} \varepsilon_{kk}(u) \varepsilon_{\ell\ell}(u') dx = \\ &= - \int_{\Omega} \left[ \varepsilon_{ij}^D(u') + \frac{\varepsilon_{\ell\ell}(u')}{3} \delta_{ij} \right] \left[ 2\mu \varepsilon_{ij}^D(u) + 3\kappa \frac{\varepsilon_{kk}}{3}(u) \right] dx = \\ &= - \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u') \cdot \sigma_{ij} dx. \end{aligned}$$

Полученная величина является в точности мощностью, развиваемой полем напряжений  $\sigma$  в поле виртуальных скоростей  $u'$ . Если  $u'$  является полем перемещений (снова произвольным), то мы находим работу, произведенную этими силами в поле перемещений  $u'$ .

Таким образом, из теоремы виртуальной энергии мы заключаем, что

$$\mathcal{W}(\varepsilon, \varepsilon') = \int_{\Omega} f \cdot u' \, dx + \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot u' \, d\Gamma$$

является мощностью внешних сил. Тогда, если  $u'$  кинематически допустим для  $\mathcal{P}_h$ , мы приходим к уравнениям (15.17) и (15.19). Кроме того, для  $u' = u$ , получаем

$$\mathcal{W}(\varepsilon, \varepsilon) = 2W(\varepsilon) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot u \, d\Gamma.$$

Это означает, что для упругой системы работа внешних сил по перемещению  $u(x)$  точек системы из естественного состояния (состояния покоя) равна удвоенной энергии деформации.

Подведем итог механической интерпретацией вариационных постановок.

### Теорема взаимности

Пусть  $(u, \varepsilon, \sigma)$  и  $(u', \varepsilon', \sigma')$  являются двумя состояниями равновесия упругой системы; тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot u' \, dx + \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot u' \, d\Gamma &= \mathcal{W}(\varepsilon, \varepsilon') = \\ &= \mathcal{W}(\varepsilon', \varepsilon) = \\ &= \int_{\Omega} f' \cdot u \, dx + \int_{\Gamma} (\sigma' \cdot n) \cdot u \, d\Gamma, \end{aligned}$$

откуда получаем следующую теорему.

**Теорема 15.3 (теорема взаимности).** При двух заданных состояниях равновесия одной и той же упругой системы работа внешних сил для первого состояния в поле перемещений второго состояния равна работе внешних сил второго состояния в поле перемещений первого состояния.



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ОСРЕДНЕНИЕ

Линейная упругость представляет собой только лишь упрощенное и очень частное поведение твердых тел. Цель данной главы состоит в том, чтобы дать несколько простых примеров задач, когда определяющие соотношения нелинейны, как некоторые законы, описанные в гл. 5, когда тензор напряжений  $\sigma$  является нелинейной функцией тензора деформаций  $\varepsilon(u)$  в рамках нелинейной упругости при малых перемещениях (см. гл. 5). В результате соответствующие уравнения равновесия становятся нелинейными, в противоположность уравнениям, с которыми мы сталкивались в предыдущих главах части 3 настоящей книги. Нелинейные механические задачи в настоящее время — это бурно развивающаяся область механики твердого тела в связи с открытием новых материалов и изучением их механических свойств (полимеры, композитные материалы и т. п.).

Эта глава весьма короткая; мы рассмотрим только стационарные задачи и иногда ограничимся задачами механики с одной пространственной переменной.

В первых трех разделах настоящей главы изложение основано на энергетических теоремах, аналогичных тем, что были рассмотрены в гл. 15, и, как было отмечено в примечании 15.1, будут рассмотрены энергетические функционалы  $w(\varepsilon)$ , которые уже не являются квадратичными функциями от  $\varepsilon$ . В разд. 16.1, в связи с нелинейной упругостью, мы рассмотрим случаи, в которых  $w$  строго выпуклая функция от  $\varepsilon$ . В разд. 16.2, в связи с пластичностью, мы рассмотрим энергетический функционал, обладающий некоторой вырожденностью:  $w(\varepsilon)$  выпукла, но не строго выпукла, что может привести к нарушению непрерывности (трещинам, скользящим линиям). Наконец, в разд. 16.3, мы рассмотрим случаи, в которых отображение  $\varepsilon \mapsto \sigma$  немонотонно, и тогда  $w(\varepsilon)$  является невыпуклой функцией; это может приводить к неожиданному поведению материалов. Разд. 16.4 является кратким введением в неоднородные материалы (неоднородные на микроскопическом уровне); эти материалы в первом приближении обладают линейно-упругим поведением, но изучение их свойств относится к нелинейному анализу.

## 16.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ (НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ)

Как было отмечено во введении, в этом разделе и двух следующих рассматриваются материалы, чьи уравнения равновесия задаются энергетическими принципами, аналогичными тем, что были представлены в гл. 15 (см. также разд. 5.3).

Начнем, как в гл. 15, с функции  $w = w(\varepsilon)$ , для которой

$$\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \forall i, j; \quad (16.1)$$

это означает, что уравнения (16.1) являются определяющими соотношениями для рассматриваемого материала (закон зависимости напряжений от деформаций). Функция  $w(\varepsilon)$  будет неквадратичной в рассматриваемом здесь случае, и, таким образом, уравнение (16.1) будет нелинейным. Если, кроме того,  $u$  — поле перемещений материала, а  $\varepsilon(u)$  — линеаризованный тензор перемещений, то будем рассматривать также величину

$$W[\varepsilon(u)] = \int_{\Omega} w[\varepsilon(u)(x)] dx. \quad (16.2)$$

Как и в гл. 15, минимизация некоторых величин, зависящих от  $w$  и  $W$ , приводит к энергетическим принципам.

Перед заданием уравнений равновесия и связанных с ними энергетических принципов опишем тип функций  $w(\varepsilon)$ , которые рассматриваются в этом разделе.

Типичный пример дается моделью льда, для которой

$$w(\varepsilon) = c \sum_{i,j} |\varepsilon_{ij}|^p, \quad p > 1, \quad (16.3)$$

где  $c > 0$  — физическая константа, подлежащая уточнению; скажем  $c = 1$ . Тогда приходим к определяющим соотношениям

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = p |\varepsilon_{ij}|^{p-2} \varepsilon_{ij}, \quad (16.4)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ .

Рассмотрим нелинейно-упругое тело, которое находится в равновесии под действием (как в гл. 15) объемных сил  $f$ , заданного перемещения  $U_d$  на  $\Gamma_u$  и заданного сцепления  $\sigma_{ij} n_j = F_i$  на  $\Gamma_F$ . Тогда уравнения равновесия являются в точности уравнениями задачи  $(\mathcal{P})$ , рассмотренной в начале разд. 15.3, где линейное определяющее соотношение заменяется уравнением (16.4). Можно показать, как в гл. 15 (но обоснование сейчас более трудное), что поле перемещений в равновесии минимизирует функцию

$$V(u) = \frac{1}{2} W[\varepsilon(u)] - L(u) \quad (16.5)$$

среди всех полей перемещений  $u$ , которые кинематически допустимы в смысле определения 15.3; здесь  $W[\varepsilon(u)]$  имеет представление, заданное уравнениями (16.2) и (16.3), и  $L(u)$  определено в гл. 15:

$$L(u) = \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot u \, d\Gamma. \quad (16.6)$$

Можно также определить двойственный энергетический принцип. Для этого введем сопряженную к  $w$  функцию  $w^*$  (также называемую трансформацией Лежандра–Фенхеля функции  $w$ ):

$$w^*(\sigma) = \text{Sup}_{\varepsilon_{ij}} \{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - w(\varepsilon) \}, \quad (16.7)$$

где супремум берется среди всех симметричных тензоров  $\varepsilon_{ij}$ . Например, из (16.7) после вычислений (которые мы опускаем) получим

$$w^*(\sigma) = \frac{p^{p-1} - 1}{p^p} \sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^{p/(p-1)}. \quad (16.8)$$

Также при заданном тензорном поле напряжений  $\sigma = \sigma(x)$  рассмотрим интеграл

$$W^*(\sigma) = \int_{\Omega} w^*(\sigma(x)) \, dx. \quad (16.9)$$

Используя величину  $K(\sigma)$  из гл. 15:

$$K(\sigma) = \int_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (U_d)_i \, d\Gamma, \quad (16.10)$$

можно показать, что напряжения в равновесии являются решениями задачи минимизации

$$V^*(\sigma) = -\frac{1}{2} W^*(\sigma) + K(\sigma) \quad (16.11)$$

среди всех полей напряжений  $\sigma$ , которые статически допустимы в смысле определения 15.4 гл. 15.

Можно доказать существование и единственность решения для уравнений равновесия, или, что эквивалентно, для каждого приведенного выше вариационного принципа, когда функция  $w(\varepsilon)$  задается уравнением (16.3), или в других случаях строго выпуклых функций  $w(\varepsilon)$ , которые имеют полиномиальный рост на бесконечности.

*Примечание 16.1.* Аналог предыдущей модели для жидкостей соответствует, например, модели турбулентности Смагоринского, где  $u$  — скорость, а  $\sigma$  заменяется на  $\dot{\sigma} = \partial\sigma/\partial t$ .

## 16.2. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛАСТОСТАТИКА С ПОРОГОМ (МОДЕЛЬ ЭЛАСТОПЛАСТИКИ ХЕНКИ)

Ниже описывается модель нелинейной упругости с порогом, тесно связанная с несколькими задачами пластичности (см. разд. 5.3, пункты, относящиеся к нелинейной упругости и пластичности)<sup>1)</sup>.

Ограничимся одномерной задачей, известной как задача среза антикрыла. В этом случае  $\varepsilon$  сводится к своей первой компоненте  $\varepsilon_{11}$ , и, таким образом, будем писать  $\varepsilon$  вместо  $\varepsilon_{11}$ .

Имеем (см. рис. 16.1, а):

$$w(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2}, & \text{если } |\varepsilon| \leq 1, \\ |\varepsilon| - \frac{1}{2}, & \text{если } |\varepsilon| \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что функция  $w$  выпуклая, но не строго выпуклая, в противоположность примеру, приведенному в предыдущем разделе.

Выводим, что  $\sigma = \sigma_{11} = \partial w(\varepsilon) / \partial \varepsilon$  удовлетворяет соотношению

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } |\varepsilon| \leq 1, \\ \text{sign } \varepsilon, & \text{если } |\varepsilon| \geq 1, \end{cases} \quad (16.12)$$

где знак  $\varepsilon$  равен 1, если  $\varepsilon > 0$ , и  $-1$ , если  $\varepsilon < 0$ . Теперь мы можем получить явное выражение для функции

$$w^*(\sigma) = \text{Sup}_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \{\varepsilon \sigma - w(\varepsilon)\};$$

элементарными вычислениями получаем, что

$$w^*(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}, & \text{если } |\sigma| \leq 1, \\ +\infty, & \text{если } |\sigma| > 1. \end{cases} \quad (16.13)$$

Этот тип определяющего соотношения связан с упругопластическими определяющими соотношениями: определяющее соотношение линейно ниже определенного порога. Условие  $|\sigma| < 1$  соответствует пределу критерия упругости фон Мизеса: материал является линейно упругим при  $|\sigma| < 1$ .

Рассмотрим задачу среза антикрыла. Рассматриваем сечение  $0 < x = x_1 < 1$  материала; перемещение происходит в направлении  $x_1$  и не зависит от  $x_2$  и  $x_3$ . Рассматривая краевые условия, предположим, например, что перемещение  $u = 0$  задано в точке  $x = 0$  и что  $\sigma = \sigma_{11}$  задано в точке  $x = L(\sigma = F)$ .

<sup>1)</sup>Реальные явления пластичности являются развивающимися и необратимыми и здесь не рассматриваются (см. закон Прандтля–Реуса, разд. 5.3, пластичность).

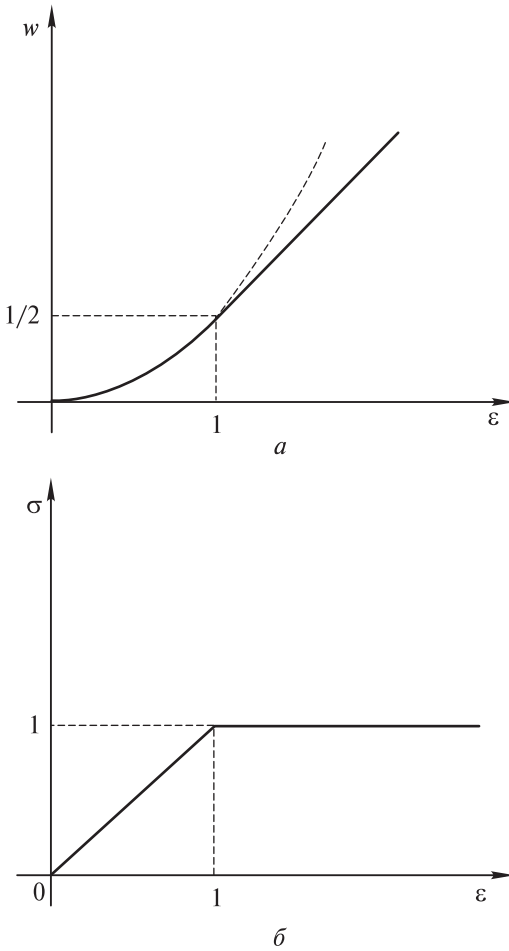


Рис. 16.1. Функции (а)  $w(\varepsilon)$  и (б)  $\sigma(\varepsilon)$  для  $\varepsilon \geq 0$

Введем функции

$$W(\varepsilon) = \int_0^L w[\varepsilon(x)] dx,$$

$$W^*(\sigma) = \int_0^L w^*[\sigma(x)] dx$$

для всех тензорных полей  $\varepsilon = \varepsilon(u(x))$  и  $\sigma(x)$ , определенных на  $(0, L)$ .

Аналогами величин  $L$  и  $K$  являются

$$L(u) = Fu(1),$$

$$K(\sigma) = 0 \quad (U_d = 0 \text{ при } x = 0).$$

Тогда энергетические принципы, связанные с данной задачей, в точности совпадают с приведенными в предыдущем разделе (или в гл. 15):

*Минимизировать  $V(u)$  среди всех кинематически допустимых  $u$ , удовлетворяющих определенным предположениям регулярности, где*

$$V(u) = W(\varepsilon(u)) - Fu(1),$$

*Максимизировать  $V^*(\sigma)$  среди всех статически допустимых  $\sigma$ , где*

$$V^*(\sigma) = W^*(\sigma).$$

Доказательство существования решения в этом случае достаточно трудно; одна из новых сложностей, по сравнению с предыдущими примерами, состоит в том, что функция  $w$  больше не строго выпуклая, а просто выпуклая. Мы отсылаем читателя, интересующегося проблемой существования для этого типа функционала, к специальной литературе (см., например, Теман (1985) и ссылки там).

### 16.3. НЕВЫПУКЛЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Законы зависимости напряжений от деформации выводятся, как правило, из экспериментов по простому растяжению стержня (таких, как были описаны в линейной упругости в разд. 14.1). В случае линейной упругости, как и в предыдущих разделах в случае нелинейной упругости, одномерный закон зависимости напряжений от деформации является монотонным, при этом он приводит к функции накопления энергии  $w(\varepsilon)$ , которая является выпуклой относительно  $\varepsilon$ . Отметим, что закон зависимости напряжений от деформации может быть немонотонным для некоторых материалов и для некоторых режимов (тогда материал стягивается, когда его растягивают); функция  $w(\varepsilon)$  не является выпуклой в этом случае. В дальнейшем мы опишем ряд проблем, которые появляются при изучении таких материалов.

Таким образом, рассмотрим в этом разделе нелинейную модель упругости типа Ван-дер-Ваальса, для которой энергетический функционал больше не является выпуклым. В случае одномерной задачи, для которой  $\varepsilon \simeq \varepsilon_{11}$  и  $\sigma \simeq \sigma_{11}$ , как в предыдущем разделе, имеем, например, функцию

$$w(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - 1)^2, \quad (16.14)$$

(см. рис. 16.2), и, следовательно, определяющее соотношение принимает вид

$$\sigma = 4\varepsilon(\varepsilon^2 - 1). \quad (16.15)$$

Когда энергетический функционал  $w(\varepsilon)$  перестает быть выпуклым, соответствующая вариационная задача становится более сложной, и о существовании решения в общем случае не известно (а иногда его не существует).

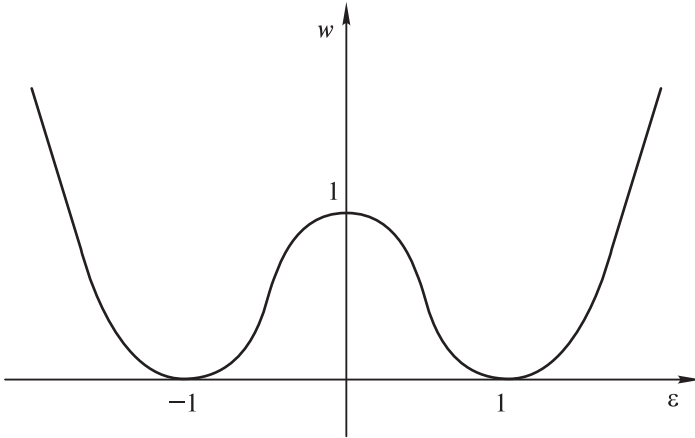


Рис. 16.2. Функция  $w(\varepsilon)$

Рассмотрим, например, задачу минимизации

$$W[\varepsilon(u)] = \int_0^L w[u'(x)] dx = \int_0^L \left[ \left| \frac{du}{dx} \right|^2 - 1 \right]^2 dx \quad (16.16)$$

по всем функциям  $u$ , которые удовлетворяют условиям  $u(0) = 0$  и  $u(L) = 1$ .

Легко проверить, что, когда  $L > 1$ , инфимум равен 0. Однако этот инфимум не достигается, но может быть приближен на сколь угодно малую величину  $\{W[\varepsilon(u)] \text{ сколь угодно мало}\}$ , например, следующими функциями  $u_n$ :  $u_n(x) = x$  для  $0 < x < 1$  и для  $1 < x < L$ , и пилообразным поведением с амплитудой  $1/n$  и  $u'_n(x) = \pm 1$  в противном случае, как на рис. 16.3.

Читатель, интересующийся этой проблематикой (и задачами изгиба), может обратиться к книгам Antman (1995) и Ericksen (1998).

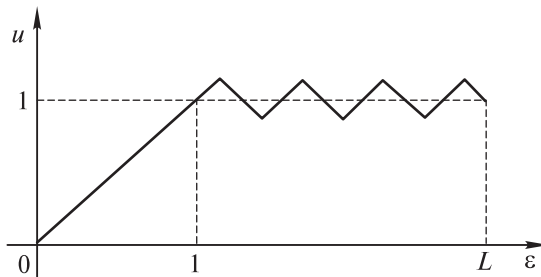


Рис. 16.3. Минимизирующая последовательность задачи (16.16)

### 16.4. КОМПОЗИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ: ЗАДАЧА ОСРЕДНЕНИЯ

Мы рассмотрим в этом разделе материалы с периодической структурой в одном пространственном направлении, как на рис. 16.4. Далее предположим, что каждый период состоит из двух или более различных материалов (см. рис. 16.5), каждый из которых задается определяющими соотношениями линейной упругости между  $\sigma$  и  $\varepsilon$ . Принцип осреднения состоит, как правило, в поиске при малом  $\delta$  линейного и однородного материала-эквивалента для периодической структуры.

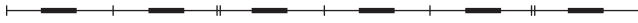


Рис. 16.4. Периодическая структура



Рис. 16.5. Период композитного материала

Для пояснения этого подхода к задаче осреднения рассмотрим следующую «модельную» задачу:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ a \left( \frac{x}{\delta} \right) \frac{du^\delta}{dx} (x) \right] = f(x), & 0 < x < 1, \\ u^\delta(0) = u^\delta(1), & \frac{du^\delta}{dx}(0) = \frac{du^\delta}{dx}(1), \end{cases} \quad (16.17)$$

где  $a = a(y)$  является периодической функцией с периодом 1 и ограниченной сверху и снизу константами  $0 < \underline{a} \leq a \leq \bar{a} < +\infty$ , и  $f$  — функция, определенная и гладкая на  $(0,1)$ . Предположим, для простоты, что  $\delta = 1/N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  и, таким образом, что  $a(x/\delta)$  периодична по  $x$  с периодом  $\delta$ . Наша цель состоит в поиске предела  $u^\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Мы фактически получим предел  $u^0$  величины  $u^\delta$  как решение уравнения, называемого осредненным уравнением (16.17). Для этого мы определим

$$b(x) = \frac{1}{a(x)}, \quad F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau;$$

имеем

$$p^\delta(x) = a \left( \frac{x}{\delta} \right) \frac{du^\delta}{dx} = F(x) - c_\delta. \quad (16.18)$$

Следовательно,

$$\frac{du^\delta}{dx} = b \left( \frac{x}{\delta} \right) [F(x) - c_\delta], \quad (16.19)$$



где  $c_\delta$  задается соотношением

$$0 = \int_0^1 \frac{du^\delta}{dx} dx = \int_0^1 b\left(\frac{x}{\delta}\right) [F(x) - c_\delta] dx. \quad (16.20)$$

Ясно, что, когда  $\delta$  стремится к 0,  $b(x/\delta)$  сходится в слабом смысле (в слабой топологии  $L^2(0,1)$ ) к средней величине  $b$  по всем периодам, обозначаемой через  $\langle b \rangle$ , которая не равна нулю, так как она находится между  $\bar{a}^{-1}$  и  $\underline{a}^{-1}$ . Таким образом, из (16.20) следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} c_\delta = \int_0^1 F(x) dx.$$

Тогда из уравнений (16.18) и (16.19) выводим, что  $du^\delta/dx$  и  $p^\delta$  сходятся, в том же смысле (в слабой топологии  $L^2(0,1)$ ), к функциям  $du^0/dx$  и  $p^0$ , определенным выражениями

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{dx}(x) &= \langle b \rangle [F(x) - \langle F \rangle], \\ p^0(x) &= F(x) - \langle F \rangle, \end{aligned}$$

где

$$u^0(x) = \int_0^x \frac{du^0}{dx} dx,$$

а  $\langle \cdot \rangle$  обозначает среднюю величину по периоду. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} p^0 &= \langle b \rangle^{-1} \frac{du^0}{dx}, \\ \frac{dp^0}{dx} &= f, \end{aligned}$$

и  $u^0$  является решением следующей линейной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \langle a^{-1} \rangle^{-1} \frac{du^0}{dx} \right) = f, \\ u^0(0) = u^0(1), \quad \frac{du^0}{dx}(0) = \frac{du^0}{dx}(1), \end{cases} \quad (16.21)$$

где  $a^0 = \langle a^{-1} \rangle^{-1}$  называется коэффициентом осреднения функции  $a$ .

Читатель, который интересуется этой темой, может обратиться, среди прочего, к книгам по осреднению в списке литературы, в частности к книгам Bensoussan, Lions и Papanicolaou (1978) и Jikov, Kozlov и Oleinik (1991).

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим 1-периодическую функцию  $f(x) = \sin(2\pi x)$ , определенную на  $\mathbb{R}$ , и зададим

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in ]a, b[, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- а) Показать, что  $f_\varepsilon$  не может сходиться в каждой точке.  
б) Показать, что для всех интервалов  $I = ]\alpha, \beta[ \subset ]a, b[$  выполнено

$$\int_\alpha^\beta f_\varepsilon(x) dx \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из этого результата следует, что  $f_\varepsilon$  сходится к 0 в слабой топологии  $L^2(a, b)$ , так как  $\int_a^b f_\varepsilon(x)^2 dx$  ограничен независимо от  $\varepsilon$ .

в) Показать, что  $\int_a^b f_\varepsilon(x)^2 dx$  не сходится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (т. е.  $f_\varepsilon$  не сходится к 0 в сильной топологии  $L^2(a, b)$ ).

## НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ И ПРИЛОЖЕНИЯ К БИОМЕХАНИКЕ

В этой главе мы опишем уравнения нелинейной упругости в контексте больших деформаций. Затем рассмотрим частный случай гиперупругости и, наконец, представим приложение к биомеханике для моделирования мягких тканей. Эта глава очень близка по содержанию с книгой Ciarlet (1988), далее обозначаемой [C88]; модели мягких тканей взяты из S. Jemiole и J. J. Telega (2001).

### 17.1. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Рассмотрим систему  $S$ , соответствующую нелинейно упругой среде, которая занимает область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  в исходном состоянии и область  $\Omega_\Phi = \Phi(\Omega)$  — в деформированном. Как обычно  $\Phi$  — деформация, и мы пишем  $x = \Phi(a)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $x \in \Omega_\Phi$ ;  $u(a) = \Phi(a) - a$  является смещением точки  $a$ .

Предполагая, что тело подвержено большим деформациям, мы напомним общие уравнения движения в лагранжевых переменных, введенные в гл. 3:

$$f_a + \text{Div}_a \Pi = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (17.1)$$

где

$$f_a(a) = f(x) \det \mathbf{F}(a) = f(\Phi(a)) \det \mathbf{F}(a); \quad (17.2)$$

здесь  $f$  является плотностью приложенных к телу сил на единицу объема в деформированной конфигурации и  $f_a$  — их плотность на единицу объема в исходной конфигурации;  $\mathbf{F}$  — матрица Якоби  $\nabla_a \Phi = Dx/Da$ , и  $\text{Div}_a \Pi$  — вектор с компонентами  $\sum_{j=1}^3 \partial \Pi_{ij} / \partial a_j$ . Далее,  $\Pi$  — первый тензор Пиола-Кирхгофа, определяемый соотношением

$$\Pi = (\det \mathbf{F}) \bar{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad \Pi \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \Pi^T, \quad (17.3)$$

где  $\bar{\sigma}(a) = \sigma(x) = \sigma(\Phi(a))$ , причем  $\sigma$  является тензором напряжений Коши в деформированном состоянии. Мы также введем второй тензор Пиола-Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \Pi. \quad (17.4)$$

Напомним, что  $\mathbf{P}$  симметричен, в то время как  $\Pi$ , в общем случае, несимметричен.

### Определяющие соотношения

Можно доказать, используя принципы независимости материала от системы отсчета и изотропии<sup>1)</sup>, что любые определяющие соотношения нелинейной упругости имеют вид:

$$\mathbf{P} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 \mathbf{C}^2, \quad (17.5)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  — тензор деформации Коши–Грина, а  $\beta_0, \beta_1$  и  $\beta_2$  — функции от  $a \in \Omega$  и  $C_I, C_{II}, C_{III}$ , которые являются тремя инвариантами тензора  $\mathbf{C}$ . Читатель, интересующийся доказательством этого утверждения, отсылается к книге Ciarlet (1988), далее обозначаемой [C88]. Как упоминалось в гл. 5, основная сложность здесь заключается в том, что уравнение равновесия (17.1) включает первый тензор Пиола–Кирхгофа  $\mathbf{\Pi}$ , но не  $\mathbf{P}$ , тогда как определяющее соотношение (17.5) включает  $\mathbf{P}$ ; кроме того, не существует простой эквивалентной формы для (17.5) для  $\mathbf{\Pi}$  (см. разд. 5.3), где приведены определяющие соотношения, включающие тензор напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### Отсчетная конфигурация и естественное состояние

В отсчетном состоянии  $\Omega$  имеем  $\Phi = \mathbf{I}, u = 0$  и  $\mathbf{C} = 0$ . Таким образом, из (17.5) следует, что

$$\mathbf{P} = \beta_0 \mathbf{I}, \quad (17.6)$$

т. е.  $\mathbf{P}$  диагонален. Эта величина называется тензором остаточного напряжения в точке  $a$  исходного состояния  $\Omega$  и обозначается через  $\mathbf{P}_R$ . Соотношение (17.5) показывает, что в общем случае  $\mathbf{P}$  не является диагональным и изотропия сохраняется только для частных случаев отсчетной конфигурации.

Действительно, даже если априори возможно выбрать произвольную деформированную конфигурацию в качестве отсчетной, в общем случае материал уже не будет изотропным в такой произвольной отсчетной конфигурации.

**Определение 17.1.** *Отсчетная конфигурация называется естественным состоянием, если тензор остаточного напряжения  $\mathbf{P}_R$  равен нулю в каждой точке.*

*Примечание 17.1.* Можно показать (см. [C88]), что если отсчетная конфигурация является естественным состоянием, то и любая отсчетная конфигурация, полученная жесткой деформацией, тоже является естественным состоянием.

*Примечание 17.2.* В отличие от механики жидкостей и газов в механике твердого тела предполагается, что естественные отсчетные состояния существуют.

<sup>1)</sup>Это одни из основных принципов реологии, описанных в разд. 5.3.

**Определяющие соотношения вблизи отсчетной конфигурации**

Представляется естественным линейаризовать материальное уравнение (17.5) вблизи  $X$ , где  $X = \frac{1}{2}(C - I)$  является тензором деформаций. Действительно, в некотором смысле  $X$  характеризует различие между заданной деформацией  $\Phi$  и жесткой деформацией (для которой  $C = I$ ). Таким образом, мы хотим линейаризовать тензор напряжений  $P$ , соответствующий деформированной конфигурации  $\Omega_\Phi$  вблизи отсчетной конфигурации, соответствующей определенной жесткой деформации  $I$ . Можно показать (см. [C88]), что вследствие изотропии линейаризованные соотношения включают только два коэффициента  $\lambda = \lambda(a)$ ,  $\mu = \mu(a)$ , т. е.:

$$P = -pI + \lambda(\text{Tr}X)I + 2\mu X + o(X), \quad (17.7)$$

где  $\mu > 0$  и  $3\lambda + 2\mu > 0$  — экспериментально установленные ограничения (см. [C88], разд. 3.8).

Заметим, что вблизи естественного состояния  $pI \equiv 0$  и, пренебрегая членом  $o(X)$ , получаем

$$P = \lambda(\text{Tr}X)I + 2\mu X. \quad (17.8)$$

Именно это соотношение определяет линейную упругость при малых деформациях (см. гл. 5).

**Материал Сен-Венана–Кирхгофа**

Материалом Сен-Венана–Кирхгофа называют материал, для которого тензор напряжений  $P$  имеет вид

$$P = \lambda(\text{Tr}X)I + 2\mu X, \quad (17.9)$$

где  $I + 2X = C$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать общие определяющие соотношения (17.5) и иногда, отдельно оговаривая, материалы Сен-Венана–Кирхгофа. Материалы Сен-Венана–Кирхгофа являются простейшими среди нелинейных моделей [C88], и они довольно популярны в современных вычислениях, где они часто используются для моделирования инженерных сооружений вместе с методом конечных элементов.

**17.2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ**

Рассмотрим, как и в предыдущих главах, типичную задачу механики, в которой внешние приложенные силы, определенные в деформированном состоянии, состоят из:

- (i) заданных объемных сил с объемной плотностью  $f$  (в деформированном состоянии);

- (ii) заданных поверхностных сил сцепления с поверхностной плотностью  $g$  (в деформированном состоянии)<sup>1)</sup> на части  $\Gamma_T$  границы  $\Gamma = \partial\Omega$ ;
- (iii) заданного смещения на дополнении  $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_T$  к  $\Gamma_T$ .

Дополнительная трудность, появляющаяся здесь, состоит в том, что (i), (ii) проще выписать в деформированной конфигурации, тогда как (iii) проще выписать в отсчетной конфигурации. Подобная проблема упоминалась в гл. 13 для линейной упругости, но там она легко преодолевалась с помощью линеаризации.

Другая сложность состоит в том, что некоторые краевые задачи являются глобальными; это обычно происходит, когда приложенные поверхностные или объемные силы нелокальны, т. е. значение силы в одной точке зависит от значений деформации в других точках. За дальнейшими подробностями мы отсылаем интересующегося читателя к книге Ciarlet ([C88], разд. 2.7). Такая ситуация может встретиться, например, в задаче воздушного шара, для которой внешняя граница подвержена постоянной сжимающей нагрузке, тогда как внутренняя граница подвержена давлению, которое является заданной функцией рабочего объема.

Типичная задача механики описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{cases} \operatorname{Div} {}_a\Pi + f_a = 0 & \text{в } \Omega, \\ \Pi n = g_a & \text{на } \Gamma_T \subset \partial\Omega, \\ \Phi = \Phi_0 & \text{на } \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_T, \end{cases} \quad (17.10)$$

вместе с определяющим соотношением

$$P = \beta_0 I + \beta_1 C + \beta_2 C^2, \quad (17.11)$$

где

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot P, \quad (17.12)$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} {}_a\Phi, \quad (17.13)$$

$$\Pi \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \Pi^T. \quad (17.14)$$

Нам также необходимы некоторые геометрические условия для того, чтобы исключить случай наложения (см. рис. 17.1), который невозможен с физической точки зрения, хотя является геометрически допустимым. Таким образом, мы предположим, что  $\Phi$  задана в точности на  $\bar{\Omega}$ , а не только на  $\Omega$ . Дополнительные механические условия будут нужны в случае касания (см. рис. 17.2).

В завершение, назовем допустимым тензор деформация  $\Phi$ , такой, что

$$\det \operatorname{grad} {}_a\Phi > 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (17.15)$$

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{на } \Gamma_u, \quad (17.16)$$

$$\Phi \quad \text{в точности на } \bar{\Omega}. \quad (17.17)$$

<sup>1)</sup>В других частях книги плотность поверхностных сил обозначается через  $F$  вместо  $g$ , но мы хотим здесь избежать путаницы с  $\mathbf{F}$ .

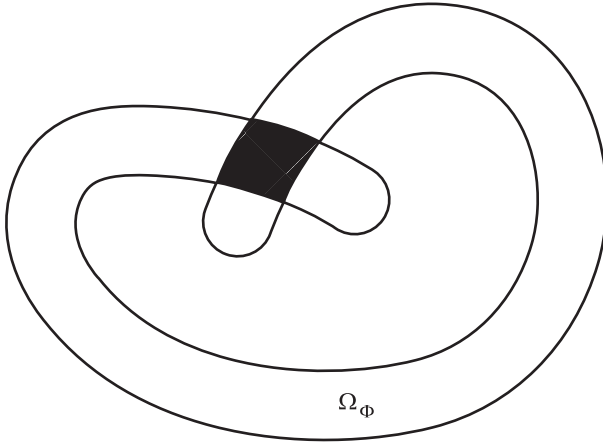


Рис. 17.1. Наложение

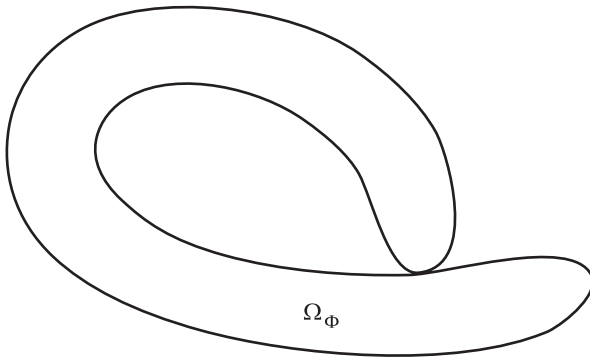


Рис. 17.2. Касание

### 17.3. ГИПЕРУПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

Гиперупругий материал — материал, для которого первый тензор Пиола–Кирхгофа  $\Pi = \Pi(a, \mathbf{F})$  удовлетворяет соотношениям

$$\Pi_{ij}(a, \mathbf{F}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_{ij}}(a, \mathbf{F}), \quad \forall a \in \Omega, \quad (17.18)$$

для всех положительно определенных матриц  $\mathbf{F}$  размером  $3 \times 3$ , где  $W = W(a, \mathbf{F})$  — данная функция, называемая функцией запаса энергии (она уже была введена в контексте линейной упругости в гл. 16 и обозначалась через  $w$ ).

Теорема о виртуальной мощности, примененная к отсчетной конфигурации (см. [С88], разд. 2.6), приводит к следующим вариационным постановкам:

$$\int_{\Omega} \Pi \cdot \nabla v \, da = \int_{\Omega} f_a \cdot v \, da + \int_{\Gamma_T} g_a \cdot v \, d\Gamma, \quad (17.19)$$

для всех достаточно гладких векторных полей  $v = v(a)$  на  $\Omega$ , которые равны нулю на  $\Gamma_u$ . Мы определили  $f_a$  соотношением (17.2);  $g_a$  определяется аналогично:  $g$  — поверхностная плотность в деформированной конфигурации сил сцепления, приложенных к  $\Gamma_T$ , и  $g_a$  — их поверхностная плотность в отсчетной конфигурации, т. е. (см. разд. 5.4)  $g(x)d\Gamma_x = g_a(a)d\Gamma_a$  или, что эквивалентно,

$$g_a(a) = g(x) \frac{d\Gamma_x}{d\Gamma_a},$$

причем выражение  $d\Gamma_x/d\Gamma_a$  задается формулой (5.16) (где оно обозначено через  $d\Gamma_t/d\Gamma_0$ ).

Фактически мы ограничимся специальным классом объемных и поверхностных сил согласно следующему определению.

### Определение 17.2.

(i) Приложенные объемные силы с плотностью  $f_a = f_a(a) = f(\Phi(a)) \det \mathbf{F}(a)$  в отсчетной конфигурации называются консервативными, если интеграл

$$\int_{\Omega} f_a \cdot v \, da$$

является производной по Гаю функционала  $F : \{\Psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \mapsto F(\Psi) = \int_{\Omega} \bar{F}(a, \Psi(a)) \, da$ , а именно

$$F'(\Phi)v = \int_{\Omega} f_a \cdot v \, da, \quad (17.20)$$

где функция  $\bar{F}$  называется потенциалом приложенных объемных сил, а  $\Phi$  является деформацией.

(ii) Приложенные поверхностные силы с плотностью  $g_a$  в отсчетной конфигурации называются консервативными, если интеграл

$$\int_{\Gamma_T} g_a \cdot v \, d\Gamma$$

является производной по Гаю функционала  $G : \{\Psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \mapsto G(\Psi) = \int_{\Gamma_T} \bar{G}(a, \Psi(a), \nabla \Psi(a)) \, da$ , а именно

$$G'(\Phi)v = \int_{\Gamma_T} g_a \cdot v \, d\Gamma, \quad (17.21)$$

где функция  $G$  называется потенциалом приложенных поверхностных сил, а  $\Phi$  является деформацией.

Например, центробежные силы в теле, вращающемся с постоянной угловой скоростью, являются консервативными объемными силами, когда выражены в репере, вращающемся с телом. Аналогично, приложенные поверхностные силы, которые являются статической нагрузкой, т. е. плотность независима от конкретной рассматриваемой деформации  $\Phi$ , являются консервативными.



Одним из преимуществ рассмотрения консервативных приложенных объемных и поверхностных сил является то, что, как можно доказать, решения краевой задачи (17.10) являются особыми точками функционала  $L(\Psi)$ , определенного соотношением

$$L(\Psi) = \int_{\Omega} W(a, \mathbf{F}) da - (F(\Psi) + G(\Psi)) \quad (17.22)$$

для гладких отображений  $\Psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , т. е.

$$L'(\Phi)v = 0 \quad (17.23)$$

для всех гладких полей  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которые равны нулю на  $\Gamma_0$  (см. [C88], стр. 142).

Функционал

$$\mathcal{W}(\Phi) = \int_{\Omega} W(a, \mathbf{F}) da \quad (17.24)$$

называется энергией деформации; функционал  $L$  называется полной энергией.

Используя принципы независимости материала от системы отсчета и изотропии, мы заключаем (см. [C88], разд. 4.2), что накопленная энергия принимает вид

$$W = W(a, C), \quad C = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (17.25)$$

Кроме того, можно найти, используя (17.4) и (17.18), что

$$P_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}}. \quad (17.26)$$

Изотропия также означает, что функция накопленной энергии удовлетворяет следующему дополнительному соотношению:

$$W(a, C) = W(a, Q C Q), \quad \forall Q \in O(3), \quad (17.27)$$

где  $O(3)$  — ортогональная группа.

Наконец, предположим существование свободной от напряжений отсчетной конфигурации, для которой

$$W(a, I) = 0, \quad (17.28)$$

$$\Pi(a, I) = 0, \quad (17.29)$$

где  $I$  — единичный тензор.

Для таких материалов задачи равновесия становятся задачами вариационного исчисления (см. книгу Ciarlet (1988) и ссылки в ней, в частности, на работы Z. M. Ball'a).

## 17.4. ГИПЕРУПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ В БИОМЕХАНИКЕ

### Материалы Сен-Венана–Кирхгофа

Напомним, что материал Сен-Венана–Кирхгофа является материалом, для которого тензор напряжений  $\mathbf{P}$  имеет вид (17.9). В этом случае заключаем, что материал Сен-Венана–Кирхгофа является гиперупругим с функцией накопленной энергии  $W$  вида

$$W = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } C)^2 + \mu \text{tr } C^2. \quad (17.30)$$

В частности, это показывает, что определение материала Сен-Венана–Кирхгофа инвариантно относительно системы отсчета и что такой материал изотропен.

### Гиперупругие материалы в биомеханике

Для моделирования поведения мышечных тканей был предложен следующий тип функции накопленной энергии (см., например, обзорную статью Jemioło и Telega и ссылки там):

$$W = W(C) = \frac{\lambda}{\mu} (e^{\mu\psi(\bar{C}_I, \bar{C}_{II}, \bar{C}_{III})} - 1). \quad (17.31)$$

Здесь  $\bar{C}_I$  и  $\bar{C}_{II}$  являются первым и вторым инвариантами тензора  $\bar{C}$ ;  $\bar{C}$  и  $\mathbf{F}$  определяются соотношениями

$$\bar{C} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F} = C_{III}^{1/3} \bar{\mathbf{F}}, \quad (17.32)$$

так что  $\det \bar{\mathbf{F}} = \det \bar{C} = \bar{C}_{III} = 1$ , а  $\lambda$  и  $\mu$  являются коэффициентами, зависящими от материала.

Предполагая существование недеформированного естественного состояния для материалов, рассматриваемых в биомеханике, например мягких тканей, в первом приближении получаем из (17.28)–(17.29), что

$$\psi(3, 3, 1) = 0, \quad (17.33)$$

$$\Pi(I) = 0. \quad (17.34)$$

Используя функцию накопленной энергии (17.30), можно показать, что соответствующий тензор напряжений Коши имеет вид

$$\sigma = \beta_0 I + \beta_1 \bar{B}_D + \beta_{-1} \bar{B}_D^{-1}, \quad (17.35)$$

где

$$\bar{B} = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T, \quad \bar{B}_D = \bar{B} - \frac{1}{3} \bar{C}_I I, \quad \bar{B}_D^{-1} = \bar{B}^{-1} - \frac{1}{3} \bar{C}_{II} I, \quad (17.36)$$

$$\beta_0 = \lambda e^{\mu\psi} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{III}}, \quad \beta_1 = \frac{2}{C_{III}} \lambda e^{\mu\psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}_I}, \quad \beta_{-1} = -\frac{2}{C_{III}} \lambda e^{\mu\psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}_{II}}. \quad (17.37)$$

Здесь разумно рассмотреть функции  $\psi$  вида

$$\psi = \mu_1(\bar{C}_I - 3) + \mu_2(\bar{C}_{II} - 3) + \mu_3(C_{III} - 1) + \mu_4(\bar{C}_I \bar{C}_{II} - 1) + \dots, \quad (17.38)$$

где константы  $\mu_i$  зависят от материала. В частном случае несжимаемых материалов выполнено  $C_{III} = 1$ . В этом случае мы берем

$$W = \frac{\lambda}{2\mu} (e^{\mu(\bar{C}_I - 1)} - 1), \quad (17.39)$$

где  $\lambda$  называется модулем сдвига. Для таких материалов определяющее соотношение (17.35) принимает вид

$$\sigma = -pI + \lambda e^{\mu(\bar{C}_I - 3)} \bar{B}. \quad (17.40)$$

В общем случае в (17.30) можно рассматривать функции  $\psi$  одного из следующих видов:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\bar{C}_I, \bar{C}_{II}), \\ \psi &= \psi_1(\bar{C}_I, \bar{C}_{II}) + \psi_2(C_{III}), \\ \psi &= \psi_1(\bar{C}_I, \bar{C}_{II}, C_{III}). \end{aligned}$$

*Примечание 17.3.* Для сжимаемых материалов рассматривается следующая функция накопленной энергии:

$$W = \frac{\lambda}{e} (e^{\mu_1(\bar{C}_I - 3) + \mu_2(\bar{C}_{II} - 3) + \mu_3(C_{III} - 1)} - 1). \quad (17.41)$$

Несколько книг, упомянутых в первой части этой книги, содержат дополнительные результаты, полученные в механике твердого тела, в частности изданные на французском языке книги Duvaut (1990), Germain (1986) и Salençon (1988), и на английском языке Curtin (1981) и Spencer (1975). Отметим также ориентированную на физиков книгу Landau и Lifshitz (1953) и книгу Truesdell (1977), содержащую более строгое изложение материала.

Книги Antman ((1995), Ciarlet (1988), Ericksen (1998), Curtin (1981), Sokolnikoff (1956) и Truesdell (1977) содержат более глубокое изучение вопросов линейной и нелинейной упругости. Что же касается вязкоупругости, то мы отсылаем читателя к книге Renardy и др. (1987) (математические аспекты). Вопросы пластичности обсуждаются в книгах Hodge (1981) (физические аспекты) и Temam (1985) (математические аспекты).

Процессы осреднения стали объектом исследования главным образом в связи с разработкой новых композиционных материалов. Математические аспекты методов осреднения изложены в книгах Bensoussan и др. (1978) и Jikov и др. (1991). Вводный, но достаточно углубленный характер носит книга Cioranescu и Donata (2000).

**ЧАСТЬ IV**

---

**ВВЕДЕНИЕ В ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ**

---

# ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Перед тем как изучить (в гл. 19 и 20) нелинейные волновые уравнения, встречающиеся в механике, мы рассмотрим несколько линейных волновых уравнений и изучим основные аспекты соответствующих колебательных явлений.

В разд. 18.1 мы рассмотрим основные волновые уравнения, которые появились в предыдущих главах: уравнения линейной акустики (в гл. 8 в контексте механики жидкости) и уравнение Навье (в гл. 13 в контексте линейной упругости). Кроме того, мы дадим частный вид этих уравнений для таких приложений, как звуковые трубы, колебательные шнуры и мембраны.

В разд. 18.2 мы покажем, как решить одномерное волновое уравнение, рассмотренное во всем пространстве  $\mathbb{R}$ . Затем в разд. 18.3 нам будут интересны граничные интервалы, ведущие к введению нормальных (автоколебательных) режимов, которые, в свою очередь, зависят от граничных условий; будут рассмотрены некоторые характерные примеры граничных условий и соответствующие собственные частоты, полученные явно. В разд. 18.4 мы покажем, как решить волновое уравнение в области общего вида в  $\mathbb{R}^3$  с использованием соответствующих собственных частот; однако в данной ситуации решение не будет полным, потому что мы не можем вычислить собственные частоты в общем случае. Окончательно, в последнем разделе этой главы мы дадим некоторые указания на другие важные колебательные явления, такие, как суперпозиция волн, биения и волновые пакеты.

## 18.1. ЕЩЕ РАЗ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

### Еще раз о волновых уравнениях линейной акустики

Уравнения линейной акустики были введены в разд. 8.4. Они были выведены из уравнений сжимаемой жидкости в предположении о малом перемещении жидкости с использованием асимптотического разложения.

Типичное уравнение линейной акустики имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0, \quad (18.1)$$

где  $c$  обозначает скорость звука в воздухе в состоянии, близком к покою, и  $\rho$  обозначает плотность или давление. Похожее уравнение было также получено для скорости, которая отмечена здесь через  $\vec{u}$  (линеаризованное движение вблизи равновесия):

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \text{grad div } \vec{u} = 0. \quad (18.2)$$

Соотношение (18.1) называется волновым уравнением; оно является гиперболическим уравнением (см. приложение в конце книги). Как мы увидим далее, оно ведет к явлению распространения волн, в котором волны распространяются со скоростью  $c$ . Это уравнение является модельным уравнением волнового явления как в математике, так и в физике.

Следующий частный случай (звуковая труба) заслуживает особого внимания.



**Рис. 18.1.** Звуковая труба

а) *Частный случай: звуковые трубы*

Предположим, что в данном эксперименте воздух движется в длинной цилиндрической трубе по оси  $Ox$ , скорость  $\vec{u}$  параллельна  $Ox$ ,  $\vec{u} = (u, 0, 0)^T$ , и эта скорость зависит только от  $x$  и  $t$ . В этом случае уравнение (18.2) сводится к одномерному волновому уравнению, а именно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (18.3)$$

*Примечание 18.1.* Как мы увидим далее, уравнение (18.3) также характеризует продольные колебания упругой струны (и многие другие «простые» колебательные явления).

### Еще раз об уравнениях Навье линейной упругости

В гл. 13 мы получили для упругой однородной среды в предположении о малых деформациях уравнение для перемещений, которое является уравнением Навье:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \vec{f}; \quad (18.4)$$

здесь  $\vec{u}$  — перемещение,  $\rho$  — плотность (считаем константой),  $\vec{f}$  — объемные силы,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе среды (вспомним, что из второго начала термодинамики следует, что  $\mu > 0$  и  $3\lambda + 2\mu \geq 0$ ; отсюда,  $\lambda + \mu \geq 0$ ). Уравнение (18.4) было получено линеаризацией уравнения сохранения импульса. Оно является важным волновым уравнением, и далее мы рассмотрим некоторые интересные частные случаи.

### Частные случаи

#### а) *Колблюющийся шнур*

Мы рассмотрим тонкий упругий бесконечный шнур, расположенный вдоль оси  $Ox$ . Мы предположим, что шнур движется только по оси  $Oy$ , тогда

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В силу того что шнур является тонким, мы можем предположить, что  $u$  зависит только от  $x$  и  $t$ . Тогда мы имеем  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , и векторное уравнение (18.4) сводится к одному скалярному уравнению на  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (18.5)$$

где  $\nu = \mu/\rho$ . Таким образом, мы вернулись к уравнению (18.3), в котором  $c^2$  заменено на  $\nu$ .

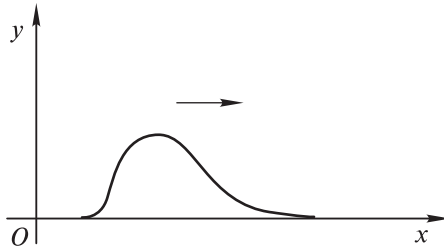


Рис. 18.2. Колблюющийся шнур

#### б) *Колблюющаяся мембрана*

Еще одним важным частным случаем уравнения (18.4) является колебание тонкой мембраны (например, барабан). Мембрана заполняет область  $\Omega$  плоскости  $Oxy$  и движется в ортогональном направлении  $Oz$ ; вследствие этого

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Поскольку мембрана тонкая, мы можем предположить, что  $u$  зависит в первом приближении только от  $x$ ,  $y$  (и  $t$ ).

Как и ранее, мы имеем  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , и векторное уравнение (18.4) сводится к скалярному уравнению на  $u$  при обозначениях  $\nu = \mu/\rho$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu \Delta_2 u = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (18.6)$$

Здесь  $\Delta_2$  — оператор Лапласа от переменных  $x$  и  $y$  ( $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ).

Предполагая, например, что граница мембраны фиксирована (в случае барабана), мы дополним уравнение (18.6) граничным условием Дирихле:

$$u = 0 \quad \text{на границе } \partial\Omega \text{ мембраны.} \quad (18.7)$$

### Изгиб упругой струны

Мы исследовали в гл. 14 в контексте линейной упругости простое изгибание цилиндрической балки; это исследование было сделано в рамках статики для тензора напряжений области.

Если струна тонкая и очень длинная, то мы можем изучить ее динамическое сгибание в направлении, ортогональном к струне. При некоторых допущениях и моделировании, которое мы не предпринимаем здесь, нам приходится ввести функцию  $u = u(x, t)$ , которая полностью характеризует сгибание, причем струна расположена вдоль оси  $Ox$ . Полученное волновое уравнение для  $u$  отличается от уравнений (18.3) и (18.5); оно содержит производные четвертого порядка по  $x$  и имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (18.8)$$

где  $E$  — модуль Юнга (предполагается постоянным),  $I$  — момент инерции сечений в направлении  $Ox$ .

## 18.2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Мы рассмотрим в этом разделе колебания бесконечного шнура, определяемые уравнением (18.5). Мы также можем рассмотреть бесконечную звуковую трубу (см. (18.3)), но шнур дает лучшее представление решения.

Поскольку шнур бесконечный, мы можем не рассматривать граничные условия. Таким образом, мы исследуем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (18.9)$$

где  $c = \sqrt{\nu}$ . Мы дополним это уравнение следующими начальными условиями (при  $t = 0$ ):

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (18.10)$$



где функции  $u_0$  и  $u_1$  заданы и, как обычно, достаточно регулярные (например, из  $C^1(\mathbb{R})$ ).

Для решения этого уравнения мы сделаем замену переменных

$$z = x + ct, \quad s = x - ct,$$

и положим

$$\bar{u}(r, s) = u(x, t).$$

Простые выкладки показывают, что (18.8) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r \partial s} = 0, \quad (18.11)$$

решение которого уже легко находится как

$$\bar{u}(r, s) = f(r) + g(s),$$

где функции  $f$  и  $g$  произвольные. Следовательно,  $u$  можно записать в виде

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct). \quad (18.12)$$

*Примечание 18.2.* Выражение (18.12) описывает общий вид решений уравнения (18.9). Если  $g = 0$ , то  $u(x, t) = f(x + ct)$  описывает волну, которая движется влево со скоростью  $c$  без изменения формы. Если  $f = 0$ , то  $u(x, t) = g(x - ct)$  является волной, движущийся направо с той же скоростью. Таким образом, общее решение является суммой двух движущихся волн в разных направлениях со скоростью  $c$  без изменения формы.

Если дополнить (18.9) начальными условиями (18.10), мы можем найти  $f$  и  $g$ , используя начальные условия. Предположим, что функции  $f$  и  $g$  из класса  $C^1$ . Из (18.10) получаем, что

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (18.13)$$

и

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c} u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (18.14)$$

что с помощью дифференцирования (18.13) по  $x$  приводит к соотношениям

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0'(x) + \frac{1}{c} u_1(x) \right],$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0'(x) - \frac{1}{c} u_1(x) \right].$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + k_1,$$

$$g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + k_2,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — константы. Из (18.13) получаем, что  $k_1 + k_2 = 0$ , и мы можем фактически взять  $k_1 = k_2 = 0$ . В итоге имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \\ + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds,$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds.$$

### 18.3. НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Предыдущий метод решения волнового уравнения не применим к ограниченной области. С физической точки зрения волны, описанные в примечании 18.2, достигают границы, отражаются и совмещаются с волнами, движущимися на границу; метод из разд. 18.2 неприменим в данном случае.

Метод, подходящий для нашей задачи, состоит в анализе собственных колебаний (также называемых нормальными колебаниями или автоколебаниями) вида

$$u(x, y, z, t) = V(x, y, z) \exp(i\omega t). \quad (18.15)$$

В этом разделе мы рассмотрим только собственные колебания задач из разд. 18.1. На самом деле, собственные колебания являются решениями бесконечномерной задачи о собственных значениях, но здесь мы не будем рассматривать такую постановку.

#### Шнур, фиксированный на концах

Мы рассмотрим здесь колеблющийся шнур, зафиксированный на концах  $x = 0$  и  $x = L$  (см. рис. 18.3).

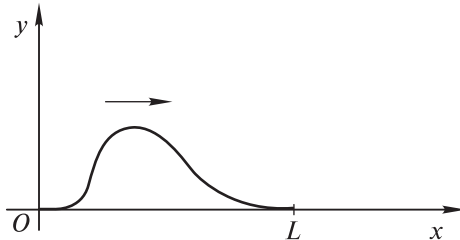


Рис. 18.3. Шнур, фиксированный на концах

В результате мы получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (18.16)$$

характеризующее колебания шнура ( $c^2$  равно  $\nu$  в этом случае, см. разд. 18.1) со следующими условиями Дирихле на границе:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (18.17)$$

Будем искать решение в виде  $u(x, t) = U(x) \exp(i\omega t)$  и выведем уравнение для функции  $U$ :

$$U'' + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0.$$

Полученное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Получим

$$U(x) = a \sin\left(\frac{\omega}{c} x + \varphi\right),$$

где  $a$  и  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Далее, из (18.17) следует  $U(0) = U(\varphi) = 0$ , откуда

$$\varphi = 0,$$

$$\frac{\omega L}{c} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Собственные колебания определяются уравнением

$$u_k(x, t) = U_k(x) \exp(i\omega_k t),$$

где

$$U_k(x) = a_k \sin \frac{k\pi}{L} x, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

а

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{L}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

— соответствующие собственные частоты.

Мы можем легко проверить, что собственные функции  $U_k$  удовлетворяют свойству ортогональности<sup>1)</sup>

$$\int_0^L U_i(x) U_j(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (18.18)$$

Можно показать, что они являются ортогональным базисом пространства  $L^2(0, L)$  (это можно вывести из спектральных свойств симметрических неограниченных операторов).

<sup>1)</sup>Это частный случай более общего результата, который будет рассмотрен ниже.

### Звуковая труба

Рассмотрим волновое уравнение из разд. 18.3, в котором  $c$  означает скорость звука. Свяжем с этим уравнением граничные условия

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (18.19)$$

соответствующие потоку воздуха, находящемуся в покое на входе в трубу, и свободному потоку на выходе.

Так же как и в разд. 18.3, найдем

$$U(x) = a \sin\left(\frac{\omega}{c}x + \varphi\right).$$

Из (18.19) следует  $U(0) = U'(L) = 0$ , откуда

$$\varphi = 0,$$

$$\frac{\omega L}{c} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Собственные колебания, таким образом, являются функциями

$$u_k(x, t) = U_k(x) \exp(i\omega_k t),$$

где

$$U_k(x) = a_k \sin \frac{(2k + 1)\pi}{2L} x, \quad k \in \mathbb{N},$$

и

$$\omega_k = \frac{(2k + 1)\pi c}{2L}, \quad k \in \mathbb{N},$$

— соответствующие собственные частоты.

Собственные функции  $U_k(x)$  удовлетворяют свойству ортогональности (18.18) и также составляют ортогональный базис пространства  $L^2(0, L)$ .

*Примечание 18.3.* Граничные условия (18.19) также соответствуют колеблющемуся шнуру, который фиксирован в  $x = 0$  и свободен в  $x = L$ .

### Мембрана, фиксированная на границе

Напомним уравнение, характеризующее вертикальные колебания мембраны, заполняющей область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 u = 0, \quad (18.20)$$

где  $c^2 = \nu = \mu/\rho$ . Предположим, что мембрана фиксирована на границе, которая выражается граничными условиями

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (18.21)$$

Собственные колебания являются решениями вида

$$u(x, y, t) = U(x, y) \exp(i\omega t). \quad (18.22)$$

Подставляя  $u$  из (18.22) в (18.20), мы получаем следующее уравнение для  $U$ :

$$\Delta_2 U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (18.23)$$

Подставляя то же выражение для  $u$  в граничные условия (18.22), получаем:

$$U = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (18.24)$$

Таким образом,  $\omega^2/c^2$  является собственным значением оператора  $-\Delta_2$ , связанного с граничными условиями Дирихле, а  $U$  — соответствующей собственной функцией. Можно показать (более подробное изложение можно найти в книге Куранта и Гильберта (1953)), что этот оператор обладает бесконечным семейством собственных значений  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ , причем  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Соответствующие собственные функции  $U_n$  образуют *ортogonalный базис* в гильбертовом пространстве  $L^2(\Omega)$ .

*Примечание 18.4.* На самом деле, задача нахождения собственных колебаний, описанных в разд. 18.3, схожа с задачами нахождения собственных значений и функций, которые можно решить явно в одномерном случае. В двумерном случае задача (18.23)–(18.24) не может быть решена явно в аналитическом виде, за исключением случаев, когда область имеет простой вид, такой, как прямоугольники или круги.

*Примечание 18.5.* Если предположить, например, что область  $\Omega$  — это барабан, то собственные значения  $\lambda_i$  дают акустическую сигнатуру барабана. Обратная задача, нахождение формы  $\Omega$  по частотам собственных колебаний  $\lambda_i$ , является известной проблемой математической физики, по большей части решенной в последние годы. Математики и физики сводят ее к вопросу: можем ли мы слышать форму барабана?

Собственные автоколебания мембраны, таким образом, заданы уравнением

$$u_k(x, y, t) = U_k(x, y) \exp(i\omega_k t), \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (18.25)$$

соответствующие собственные частоты определяются как

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k} c, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Пусть  $U_i$  и  $U_j$  являются двумя собственными функциями, соответствующими двум разным собственным значениям  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ . Тогда, используя формулу Грина и (18.24), мы получим

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \int_{\Omega} U_i U_j \, dx \, dy &= - \int_{\Omega} (U_j \Delta_2 U_i - U_i \Delta_2 U_j) \, dx \, dy = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_2 U_j \nabla_2 U_i - \nabla_2 U_i \nabla_2 U_j) \, dx \, dy = 0, \end{aligned}$$

где  $\nabla_2$  — градиент по переменным  $x$  и  $y$ . Здесь мы предполагаем, что функции  $U_i$  и  $U_j$ , так же как и область  $\Omega$ , достаточно регулярны. Таким образом, мы возвращаемся к вопросу об ортогональном свойстве, который описали ранее:

$$\int_{\Omega} U_i U_j dx dy = 0 \quad (18.26)$$

для всех собственных функций  $U_i$  и  $U_j$ , связанных с различными собственными значениями  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ . Более того, собственные функции  $U_k$ , связанные с одинаковыми собственными значениями, можно выбрать так, чтобы они были ортогональны друг другу (так как собственное подпространство, соответствующее определенному собственному значению, имеет конечную размерность). Таким образом, мы получаем ортогональное (или ортонормированное) семейство собственных векторов; можно показать, что это семейство полное, т. е. линейная комбинация этого семейства плотна в  $L^2(\Omega)$ . Собственные функции образуют базис в  $L^2(\Omega)$ .

#### 18.4. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В этом разделе нашей целью будет нахождение решения уравнения (18.1), дополненного граничными и начальными условиями, с использованием спектрального представления вида

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) U_k(x, y, z), \quad (18.27)$$

где  $U_k(x, y, z)$  являются собственными функциями стационарной задачи. Будем предполагать, что представление, определенное в (18.27), сходится и почленно дифференцируемо.

Заметим, что если решение уравнения (18.1) имеет вид

$$u(x, y, z, t) = f(t) U(x, y, z),$$

то

$$\frac{f''}{c^2 f} = \frac{\Delta U}{U}, \quad (18.28)$$

и общее значение этих двух величин является константой (обозначенной через  $-\lambda$ ), то левая часть зависит только от  $t$ , а правая — не зависит от  $t$ .

Предположив дополнительно, что  $U$  обращается в нуль на границе, получаем, что  $\sqrt{-\lambda}$  является собственной частотой для  $U = U_k$  и, таким образом, в разложении (18.27) мы можем в качестве  $f_k$  взять

$$f_k(t) = c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t), \quad (18.29)$$

где  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} c$  является собственной частотой, связанной с собственным колебанием  $U_k$ .

В первую очередь мы рассмотрим частный случай, описанный в предыдущем разделе, а затем дадим некоторые указания на трехмерную задачу в общем виде.

### Общие колебания шнура, фиксированного на концах

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (18.30)$$

$$u(0) = u(L) = 0, \quad (18.31)$$

которую дополним начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (18.32)$$

Мы видели в предыдущем разделе, что собственные функции заданы выражениями (здесь возьмем  $a_k = 1$ )

$$U_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L} x, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (18.33)$$

Таким образом, мы ищем решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) (c_k \cos \omega_k t + d_k \sin \omega_k t), \quad (18.34)$$

где  $\omega_k = (k\pi c)/L$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Следовательно, задача состоит в нахождении коэффициентов  $c_k$  и  $d_k$ . Можно вычислить коэффициенты  $c_k$  и  $d_k$ , используя начальные условия. Действительно, подставляя  $t = 0$  в (18.34), мы найдем

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (18.35)$$

Более того,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) (-c_k \sin \omega_k t + d_k \cos \omega_k t);$$

следовательно, для  $t = 0$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k d_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right).$$

В итоге из свойства ортогональности (18.18) получаем

$$c_k = \frac{1}{\int_0^L U_k^2(x) dx} \int_0^L u_0(x) U_k(x) dx,$$

$$d_k = \frac{1}{\omega_k \int_0^L U_k^2(x) dx} \int_0^L u_1(x) U_k(x) dx.$$

Это завершает решение волнового уравнения.

*Примечание 18.6.* Похожий результат можно получить в случае звуковых труб.

**Общие колебания мембраны, фиксированной на границе**

Рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_2 u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (18.36)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (18.37)$$

где  $\Omega$  — область, заполненная мембраной. Дополним это уравнение начальными условиями

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y). \quad (18.38)$$

Как и ранее, функцию  $u$  будем искать в виде спектрального разложения

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y)(c_k \cos \omega_k t + d_k \sin \omega_k t),$$

где собственные функции  $U_k$  и собственные значения  $\omega_k$  были определены в разд. 18.3.

Как и выше, имеем

$$u_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U_k(x, y),$$

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \omega_k U_k(x, y).$$

Следовательно, так как  $U_k$  ортогональны,

$$c_k = \frac{1}{\int_{\Omega} U_k^2 dx dy} \int_{\Omega} u_0 U_k dx dy,$$

$$d_k = \frac{1}{\omega_k \int_{\Omega} U_k^2 dx dy} \int_{\Omega} u_1 U_k dx dy.$$

Когда функции  $U_k$  известны, мы получаем общее решение уравнений (18.36)–(18.38). Основное затруднение заключается именно в определении собственных функций  $U_k$  (что не является легкой задачей, за исключением случаев «простых» областей  $\Omega$ ).

**Трёхмерный случай**

В общем случае мы следуем той же процедуре, что и в предыдущих примерах, и ищем функцию  $u$  в виде спектрального разложения

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y, z)(c_k \cos \omega_k t + d_k \sin \omega_k t). \quad (18.39)$$



Здесь  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  является ортогональным семейством собственных векторов, соответствующих собственным значениям оператора  $-\Delta$ , связанным с граничными условиями задачи;  $\omega_k$  — связанная собственная частота.

Задача сводится к вычислению собственных колебаний  $U_k$ . Как было упомянуто выше, эти собственные колебания не могут быть получены явно в общем случае. Заметим, однако, что в некоторых случаях мы все же можем разделить переменные для нахождения собственных функций. Рассмотрим, например, цилиндрическую область  $\Omega$  сечения  $S \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченную плоскостями  $z = 0$  и  $z = L$  (т. е.  $\Omega = S \times (0, L)$ ). Предположим, что волновое уравнение дополнено граничными условиями Дирихле. В этом случае мы можем записать

$$U(x, y, z) = f(z)g(x, y). \quad (18.40)$$

Соотношение  $-\Delta U = \lambda U$  дает

$$\frac{-f''}{f} = \frac{\Delta_2 g}{g} + \lambda = k, \quad (18.41)$$

где  $k$  — константа, не зависящая от  $x, y$  и  $z$ . Далее следует, что  $k = n^2, n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(z) = \sin n^2 z, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (18.42)$$

и  $g$  является решением задачи

$$\Delta_2 g + (\lambda - n^2)g = 0 \quad \text{в } S, \quad (18.43)$$

$$g = 0 \quad \text{на } \partial S. \quad (18.44)$$

Задача свелась к двумерной и, таким образом, упростилась, но еще не решена.

### 18.5. СУПЕРПОЗИЦИЯ ВОЛН, БИЕНИЙ И ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Для длинного колеблющегося шнура будем исследовать вопрос о визуализации распространения волн на удалении от концов шнура для того, чтобы избежать проблем с отражением волн.

Из разд. 18.3 следует, что колебания шнура являются суперпозицией элементарных волн вида

$$a_k \sin \lambda_k x \cos \omega_k t \quad \text{и} \quad b_k \sin \lambda_k x \sin \omega_k t.$$

Первые могут быть записаны, как

$$\frac{a_k}{2} \left\{ \cos \left( \lambda_k x - \omega_k t + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left( \lambda_k x + \omega_k t + \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

вторые тоже могут быть записаны в аналогичном виде (см. также разд. 18.2). Следовательно, допустимо рассматривать волны вида  $a \cos(\lambda x - \omega t + \varphi)$ , которые обычно записывают в комплексной форме  $Re a e^{i(\lambda x - \omega t + \varphi)}$ ;  $\omega$  — частота

волны,  $T = 2\pi/\omega$  — период (по времени),  $\lambda$  — период (по пространству) или длина волны, и  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число;  $a$  определяет амплитуду волны; наконец,  $\varphi$  называется фазой волны и  $v = \omega/\lambda$  — фазовой скоростью.

Композиция волн с одинаковой частотой и длиной волны, но с разными фазами, дает волны с той же частотой и длиной волны, но с другой фазой. Действительно,

$$a_1 e^{i(\lambda x - \omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{i(\lambda x - \omega t + \varphi_2)} = a e^{i(\lambda x - \omega t + \varphi)},$$

где

$$a e^{i\varphi} = a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2};$$

следовательно,

$$a = \{(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2)^2 + (a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2)^2\}^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

Теперь рассмотрим композицию двух волн с разными частотами; мы предположим, для простоты, что они имеют одну и ту же амплитуду и фазу.

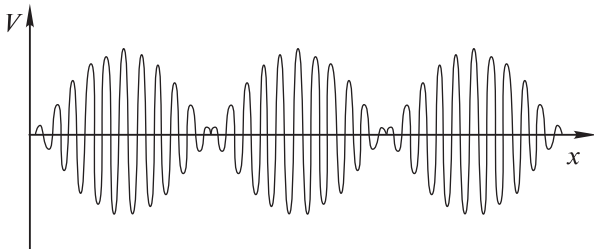
$$u_1 = a \cos(\lambda x - \omega t), \quad u_2 = a \cos(\lambda' x - \omega' t).$$

Далее, подставляя  $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ,  $\delta\omega = \omega' - \omega$ , получим

$$u = u_1 + u_2 = 2a \cos \left[ \frac{1}{2}(\delta\lambda x - \delta\omega t) \right] \times \cos \left[ \left( \lambda + \frac{\delta\lambda}{2} \right) x - \left( \omega + \frac{\delta\omega}{2} \right) t \right]. \quad (18.45)$$

В случае, когда  $\delta\lambda$  и  $\delta\omega$  малы,  $\delta\lambda \ll \lambda$ , и  $\delta\omega \ll \omega$ , мы получаем *биения*. Новая волна  $u = u_1 + u_2$ , изображенная на рис. 18.4, является волной модулированной амплитуды. Она состоит из волны с высокой частотой  $\omega + \delta\omega/2$  и большим волновым числом  $\lambda + \delta\lambda/2$ . Огибающая сама по себе является волной с малой частотой и малым волновым числом; таким образом, ее амплитуда есть

$$U = 2a \cos \left[ \frac{1}{2}(\delta\lambda x - \delta\omega t) \right].$$



**Рис. 18.4.** Линейная суперпозиция двух синусоидальных волн, дающих длинную волну модулированной амплитуды

Совмещенная волна сама является периодической, медленного изменения, с периодом  $4\pi/\delta\omega$  и длиной волны  $4\pi/\delta\lambda$ . Схожие явления биения используется, к примеру, в музыке для настройки инструмента путем сравнения колебания с опорной частотой.

Каждая длинная волна формируется из пакета коротких волн. Короткие волны распространяются с фазовой скоростью

$$v = \frac{2\omega + \delta\omega}{2\lambda + \delta\lambda},$$

и огибающая (которая содержит группу волн или пакет) распространяется с фазовой скоростью

$$\frac{\delta\omega}{\delta\lambda}.$$

Когда  $\delta\omega$  и  $\delta\lambda$  стремятся к 0, эта скорость стремится к величине

$$v_g = \frac{d\omega}{d\lambda},$$

называемой групповой скоростью.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть  $u_0$  и  $u_1$  принадлежат  $C^2(\mathbb{R})$ . Показать, что функция  $u$ , определенная в разд. 18.2, является решением волнового уравнения (18.9)–(18.10), т. е.  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[,$$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x,0)} u(x,t) = u_0(x_0),$$

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_1(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

2. Выписать явное решение волнового уравнения на луче:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ в } \mathbb{R}_+ \times ]0, +\infty[$$

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), x \in \mathbb{R}_+,$$

где  $u_0$  и  $u_1$  принадлежат  $C^2(\mathbb{R}_+)$ .

3. Рассматривается волновое уравнение в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T),$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \text{в } \Omega.$$

Показать, что эта задача имеет не менее чем одно решение  $u$ , такое, что  $u \in C^2(\overline{\Omega \times (0, T)})$ .

4. (Конечная скорость распространения.) Пусть  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$  — решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ на } \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[.$$

Предположим, что  $u$  и  $\partial u / \partial t$  обращаются в нуль в шаре  $B = B(x_0, t_0)$  с центром  $x_0$  и радиусом  $t_0$ . Показать, что  $u$  равно нулю в конусе

$$C = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), |x - x_0| \leq t_0 - t, 0 \leq t \leq t_0\}.$$

5. Рассматривается уравнение (18.18), моделирующее сгибание упругой струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Предположим, что струна фиксирована на концах  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

и мы ищем решение в виде

$$u(x, t) = U(x) \exp(i\omega t).$$

а)

- (i) Показать, что  $u$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$U^{(4)} - m^4 U = 0,$$

$$\text{где } m^4 = \frac{\omega^2 \rho}{EI}.$$

- (ii) Показать, что  $U$  имеет вид  $U(x) = A \cos mx + B \sin mx + C \operatorname{ch} mx + D \operatorname{sh} mx$ .

б) Положим  $\sigma = mL$ . Показать, что

$$U = A[(\sin \sigma - \operatorname{sh} \sigma)(\cos mx - \operatorname{ch} mx) - (\cos \sigma - \operatorname{ch} \sigma)(\sin mx - \operatorname{sh} mx)],$$

где

$$\cos \sigma \operatorname{ch} \sigma = 1,$$

и вычислить собственные частоты  $\sigma$ .

6. В упражнении 5 предположить, что струна всего лишь оперта на концах.

7. В упражнении 5 предположить, что конец  $x = 0$  фиксирован, а конец  $x = L$  свободен.

## УРАВНЕНИЕ СОЛИТОНА: УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

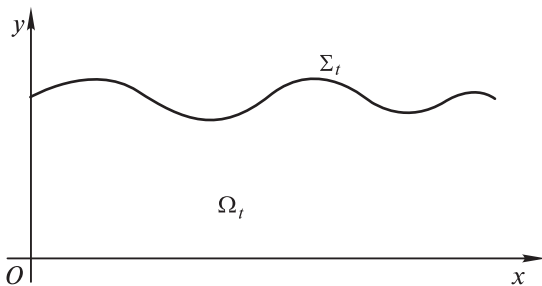
Солитоны — это тип нелинейных волн, которые были открыты и исследованы относительно недавно. Солитоны присутствуют во многих явлениях распространения волн и, возможно, сыграют решающую роль в телекоммуникациях по оптическому волокну. Два известных уравнения, которые обладают солитоном в качестве решения: уравнение Кортевега–де Фриза и нелинейное уравнение Шрёдингера; мы представим эти два уравнения в гл. 18 и 19 соответственно. Эти уравнения могут быть получены посредством предельного перехода в некоторых других уравнениях (например, в уравнениях механики жидкостей, электромагнетизме). Отметим здесь два замечательных свойства солитонов: с одной стороны, они являются волнами, которые распространяются с сохранением формы; с другой стороны, когда два солитона, распространяющиеся с разными скоростями, встречаются, они некоторое время взаимодействуют, а затем вновь обретают изначальные формы и продолжают свое распространение с начальными скоростями.

Солитоны присутствуют, в частности, в малоамплитудных движениях поверхности мелкой жидкости; в этом случае они подчиняются уравнению Кортевега–де Фриза. В этой главе мы запишем различные волновые уравнения и покажем, как уравнение Кортевега–де Фриза может быть получено из уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости; в конце мы получим солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза.

Солитоны были открыты англичанином Джоном Скоттом Расселом. Он обнаружил появление волн с постоянной формой, распространяющихся на большие расстояния в мелких каналах, и следовал за ними верхом на лошади вдоль берега канала (Д. С. Рассел, 1884). Теоретическое (аналитическое) исследование этих волн было предпринято Кортевегом и де Фризом, которые ввели уравнение, носящее их имена (Кортевег и де Фриз (1895)).

### 19.1. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОДЫ

В этом разделе мы изучим двумерное течение несжимаемой безвихревой жидкости, заполняющей область  $\Omega = \Omega_t$ , определенную уравнениями  $0 < x < \ell$ ,  $0 < y < h(x, t)$ . Поверхность жидкости  $\Sigma = \Sigma_t$ , заданная уравнением  $y = h(x, t)$ , является свободной поверхностью (см. рис. 19.1).

Рис. 19.1. Область  $\Omega_t$ 

Поскольку поток является несжимаемым и безвихревым, существует (см. гл. 8) функция  $\varphi = \varphi(x, t)$ , такая, что

$$u = \text{grad } \varphi \quad \text{и} \quad \text{div } u = \Delta \varphi = 0,$$

т. е.

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0. \quad (19.1)$$

Чтобы определить граничные условия, которым удовлетворяет  $\varphi$  на свободной поверхности  $\Sigma$ , рассмотрим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{curl } u \wedge u + \text{grad} \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{u^2}{2} \right) = f.$$

Поскольку  $\text{curl } u = 0$ ,  $u = \text{grad } \varphi$  и  $f = -\text{grad}(gy)$ , мы выводим уравнение Бернулли

$$\varphi_{,t} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{1}{2} (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2) + gy = \text{const.}$$

На поверхности  $\Sigma_t$  давление жидкости равно атмосферному давлению  $p_0$ , и мы получаем

$$\varphi_{,t} + \frac{1}{2} (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2) + gh(x, t) = c(t) \quad \text{на } \Sigma_t.$$

Так как  $\varphi$  определена вплоть до прибавления функции от  $t$  (которая в пространственном отношении постоянна), можно заменить  $\varphi(x, y, t)$  в предыдущем равенстве на  $\varphi(x, y, t) - \int_0^t c(s) ds$ , и тогда мы получаем

$$\varphi_{,t} + \frac{1}{2} (\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2) + gh = 0 \quad \text{на } \Sigma_t. \quad (19.2)$$

С другой стороны, из условия непротекания нормальная составляющая скорости  $\Sigma_t$  равна нормальной составляющей скорости жидкости. Точка на поверхности  $\Sigma_t$ , имеющая в момент времени  $t$  координаты  $[x, h(x, t)]$  к моменту

времени  $t + \Delta t$  сместится в  $[x, h(x, t + \Delta t)]$ ; из этого мы выводим, что скорость  $\Sigma_t$  равна  $(0, h_{,t})$ . Поскольку  $(-h_{,x}, 1)$  — нормаль к  $\Sigma_t$  и  $u = \text{grad } \varphi$ ,

$$-\varphi_{,x}h_{,x} + \varphi_{,y} = h_{,t} \quad \text{на } \Sigma_t,$$

что мы переписываем в виде

$$h_{,t} + \varphi_{,x}h_{,x} - \varphi_{,y} = 0 \quad \text{на } \Sigma_t. \tag{19.3}$$

В итоге на нижней горизонтальной стенке условие непротекания  $u \cdot n = 0$  дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_{,y} = 0 \quad \text{при } y = 0. \tag{19.4}$$

**Волны малой амплитуды в мелкой воде: безразмерный вид уравнений**

Обозначив через  $a$  амплитуду волны, предположим, что уравнение  $\Sigma_t$  имеет вид  $h = h_0 + \eta$ , где  $h_0$  — константа и  $\eta = O(a)$ , где  $a$  — амплитуда волны (см. рис. 19.2).

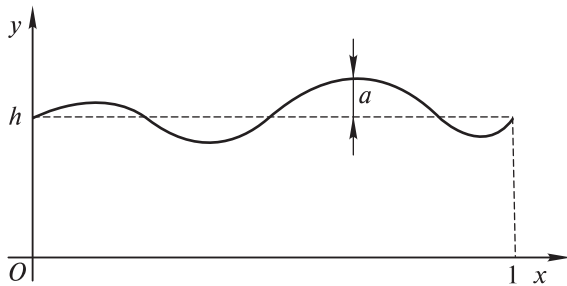


Рис. 19.2. Волны малой амплитуды в мелкой воде

В дальнейшем мы будем предполагать, что  $a \ll h_0$  и  $h_0 \ll \ell$ , т. е. нас интересуют волны малой амплитуды в мелкой воде.

Для получения безразмерного вида волновых уравнений мы положим

$$\begin{aligned} x &= \ell x', & y &= h_0 y', & t &= \frac{\ell t'}{c_0}, & c_0 &= \sqrt{gh_0}, \\ \eta &= a \eta', & \varphi &= g \frac{\ell a}{c_0} \varphi', & \alpha &= \frac{a}{h_0}, & \beta &= \frac{h_0^2}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Затем удалим штрихи в уравнениях, полученных этой заменой переменных. Уравнение поверхности  $\Sigma_t$ , таким образом, превращается в  $y = 1 + \alpha \eta$ ,

а уравнения (19.1)–(19.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \beta\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} &= 0, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 1 + \alpha\eta, \\
 \eta_{,t} + \alpha\varphi_{,x}\eta_{,x} - \frac{1}{\beta}\varphi_{,y} &= 0 & \text{на } y &= 1 + \alpha\eta, \\
 \varphi_{,t} + \frac{1}{2}\alpha\varphi_{,x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_{,y}^2 + \eta &= 0 & \text{на } y &= 1 + \alpha\eta, \\
 \varphi_{,y} &= 0 & \text{на } y &= 0.
 \end{aligned} \tag{19.5}$$

## 19.2. УПРОЩЕННЫЙ ВИД ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Наша цель в этом разделе состоит в приближенном решении (для малых  $\beta$ ) уравнения

$$\begin{aligned}
 \beta\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} &= 0, \\
 \varphi_{,y} &= 0 \quad \text{на } y = 0.
 \end{aligned}$$

Для этого будем искать решение, допускающее разложение по  $y$  вида:

$$\varphi = \varphi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, t)y^n.$$

Таким образом,  $\varphi_{,y} = \sum_{n=0}^{\infty} ny^{n-1}f_n(x, t)$ , и мы получаем для  $y = 0$

$$f_1(x, t) = 0.$$

Уравнение Лапласа  $\beta\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0$  дает

$$\beta \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)y^{n-2}f_n = 0;$$

иначе

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + (n+1)(n+2)f_{n+2} \right] y^n = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\beta \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + (n+1)(n+2)f_{n+2} = 0, \quad n \geq 0.$$

Мы можем решить эти уравнения рекурсивно для четных и нечетных  $n$  отдельно.

Так как  $f_1 = 0$ , мы выводим, что  $f_3 = 0$ , и с помощью индукции получаем  $f_{2j+1} = 0$  при всех  $j$  из  $\mathbb{N}$ .

Затем для четных  $n$  имеем

$$\begin{aligned}
 \beta \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2f_2 &= 0, \\
 \beta \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + 12f_4 &= 0;
 \end{aligned}$$



отсюда

$$f_2 = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2},$$

$$f_4 = \frac{\beta^2}{24} \frac{\partial^4 f_0}{\partial x^4}.$$

Методом индукции может быть доказано, что

$$f_{2j} = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \beta^j \frac{\partial^{2j} f_0}{\partial x^{2j}}.$$

Полагая  $f_0(x, t) = f(x, t)$ , мы получим следующее выражение для  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(x, y, t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!} \beta^j \frac{\partial^{2j} f}{\partial x^{2j}}.$$

### Асимптотические разложения

Далее мы подставим полученное выражение  $\varphi$  в уравнение для  $\eta$  и построим асимптотическое разложение для малых  $\beta$  (а также, возможно, и для малых  $\alpha$ ). Получаем при  $y = 1 + \alpha\eta$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= f - \beta \frac{y^2}{2} f_{,xx} + \beta^2 \frac{y^4}{24} f_{,xxxx} + O(\beta^3), \\ -\frac{1}{\beta} \varphi_{,y} &= y f_{,xx} - \beta \frac{y^3}{6} f_{,xxxx} + O(\beta^2), \\ \varphi_{,x} &= f_{,x} - \beta \frac{y^2}{2} f_{,xxx} + O(\beta^2), \end{aligned}$$

и, так как

$$\alpha\eta_{,x} f_{,x} + (1 + \alpha\eta) f_{,xx} = [(1 + \alpha\eta) f_{,x}]_{,x},$$

первое уравнение для  $\eta$  дает

$$\eta_{,t} + [(1 + \alpha\eta) f_{,x}]_{,x} - \left[ \frac{1}{6} (1 + \alpha\eta)^3 f_{,xxxx} + \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha\eta)^2 \eta_{,x} f_{,xxx} \right] \beta + O(\beta^2) = 0. \quad (19.6)$$

Более того,

$$\varphi_{,t} = f_{,t} - \beta \frac{y^2}{2} f_{,xxt} + O(\beta^2),$$

и мы выводим из второго уравнение для  $\eta$  следующее соотношение:

$$\eta + f_{,t} - \frac{1}{2} \beta y^2 f_{,xxt} + \frac{1}{2} \alpha f_{,x}^2 - \frac{1}{2} \alpha \beta y^2 f_{,x} f_{,xxx} + \frac{1}{2} \alpha \beta y^2 f_{,xx}^2 + O(\beta^2) = 0. \quad (19.7)$$

**Упрощенные уравнения (основанные на асимптотическом разложении)**

Первое упрощение уравнений (19.6) и (19.7) состоит в пренебрежении членами порядка  $\beta$  (т. е.,  $O(\beta)$ ). Полагая  $w = f_{,x}$  и дифференцируя уравнение (19.7) по  $x$ , мы получаем

$$\eta_{,t} + [(1 + \alpha\eta)w]_{,x} = 0, \quad (19.8)$$

$$w_{,t} + \eta_{,x} + \alpha w w_{,x} = 0. \quad (19.9)$$

Эти уравнения называются нелинейными уравнениями мелкой воды.

Другое упрощение состоит в сохранении членов порядка  $\beta$  и пренебрежении членами порядка  $\alpha\beta$  (т. е.,  $O(\alpha\beta)$ ). В результате мы получаем

$$\eta_{,t} + [(1 + \alpha\eta)w]_{,x} - \frac{\beta}{6} w_{,xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0, \quad (19.10)$$

$$\eta_{,x} + w_{,t} + \alpha w w_{,x} - \frac{1}{2} \beta w_{,xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0. \quad (19.11)$$

Эти последние уравнения являются одним из вариантов так называемых уравнений Буссинеска.

*Примечание 19.1.* Мы видели, что

$$\varphi_{,x} = w - \beta \frac{y^2}{2} w_{,xx} + O(\beta^2).$$

Следовательно, усредняя по  $y$  (по глубине), мы замечаем, что средняя скорость  $\tilde{u}$  удовлетворяет соотношению

$$\tilde{u} = w - \frac{1}{6} \beta w_{,xx} + O(\alpha\beta, \beta^2),$$

откуда имеем

$$w = \tilde{u} + \frac{1}{6} \beta \tilde{u}_{,xx} + O(\alpha\beta, \beta^2).$$

Заменяя  $w$  этим выражением, мы получаем

$$\eta_{,t} + [(1 + \alpha\eta)\tilde{u}]_{,x} + \frac{\beta}{6} \tilde{u}_{,xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0,$$

$$\tilde{u}_{,t} + \alpha \tilde{u} \tilde{u}_{,x} + \eta_{,x} - \frac{1}{3} \beta \tilde{u}_{,xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0.$$

**19.3. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА**

Нашей целью в этом разделе будет вывод уравнения Кортевега–де Фриза из предыдущих уравнений. Это уравнение (являющееся важным по историческим причинам, потому что именно оно привело к открытию понятия солитона) может фактически быть выведено из любых уравнений, полученных в предыдущем разделе, путем рассмотрения волн, распространяющихся вправо.

Если положить  $\alpha = \beta = 0$ , то из уравнений (19.9) и (19.10) получаем

$$\begin{aligned}\eta_{,t} + w_{,x} &= 0, \\ w_{,t} + \eta_{,x} &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\eta_{,tt} + w_{,xt} &= 0, \\ \eta_{,tt} - \eta_{,xx} &= 0.\end{aligned}$$

Как мы видели в гл. 18, все решения этого уравнения, распространяющиеся вправо, имеют вид

$$\eta(x, t) = a(x - t) = \eta(x - t, 0),$$

что дает  $\eta_t + \eta_x = 0$ , и для  $\psi = \eta - w$ ,

$$\begin{aligned}\psi_{,t} &= \eta_{,t} - w_{,t} = \eta_{,t} + \eta_{,x} = 0, \\ \psi_{,x} &= \eta_{,x} - w_{,x} = \eta_{,x} + \eta_{,t} = 0;\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\psi &= \eta - w = 0, \\ \eta_{,t} + \eta_{,x} &= 0.\end{aligned}$$

Далее мы ищем поправку на первый порядок по  $\alpha$  и  $\beta$  в виде

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + O(\alpha^2 + \beta^2)$$

и

$$\eta_{,t} + \eta_{,x} = O(\alpha, \beta).$$

Теперь из (19.10) и (19.11) получаем:

$$\begin{aligned}\eta_{,t} + \eta_{,x} + \alpha(A_{,x} + 2\eta\eta_{,x}) + \beta\left(B_{,x} - \frac{1}{6}\eta_{,xxx}\right) + O(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= 0, \\ \eta_{,t} + \eta_{,x} + \alpha(A_{,t} + \eta\eta_{,x}) + \beta\left(B_{,t} - \frac{1}{2}\eta_{,xxx}\right) + O(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= 0.\end{aligned}$$

Отметим, что  $\eta_{,t} = -\eta_{,x} + O(\alpha, \beta)$ . Это подразумевает, что в первом приближении для членов, включающих  $\eta$ , выполнено

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -\frac{\partial}{\partial x},$$

и, таким образом, мы получаем следующие уравнения:

$$\eta_{,t} + \eta_{,x} + \alpha(A_{,x} + 2\eta\eta_{,x}) + \beta\left(B_{,x} - \frac{1}{6}\eta_{,xxx}\right) + O_2 = 0, \quad (19.12)$$

$$\eta_{,t} + \eta_{,x} + \alpha(A_{,t} + \eta\eta_{,x}) + \beta\left(B_{,t} - \frac{1}{2}\eta_{,xxx}\right) + O_2 = 0, \quad (19.13)$$

где  $O_2 = O(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ . Для совместимости уравнений (19.12) и (19.13) и асимптотических разложений требуется выполнение условий

$$\begin{aligned} A_{,x} + 2\eta\eta_{,x} &= A_{,t} + \eta\eta_{,x}, \\ B_{,x} - \frac{1}{6}\eta_{,xxx} &= B_{,t} - \frac{1}{2}\eta_{,xxx}. \end{aligned}$$

Первое соотношение может быть переписано в виде

$$A_{,t} - A_{,x} = \eta\eta_{,x}.$$

Затем сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} r &= x - t, & s &= x + t, \\ x &= \frac{1}{2}(r + s), & t &= \frac{1}{2}(s - r), \end{aligned}$$

и для каждой функции  $\varphi(x, t)$  запишем  $\varphi(x, t) = \bar{\varphi}(r, s)$ . Получаем

$$\bar{\eta}_{,s} = \eta_{,xx,s} + \eta_{,t}t_{,s},$$

или

$$\bar{\eta}_{,s} = \frac{1}{2}\eta_{,x} + \frac{1}{2}\eta_{,t} = O(\alpha, \beta),$$

так как  $\eta_{,t} + \eta_{,s} = O(\alpha, \beta)$ . Аналогично,

$$\bar{\eta}_{,r} = \frac{1}{2}\eta_{,x} - \frac{1}{2}\eta_{,t} = \eta_{,x} + O(\alpha, \beta).$$

Более того,

$$\begin{aligned} A_{,t} &= -\bar{A}_{,r} + \bar{A}_{,s}, \\ A_{,x} &= \bar{A}_{,r} + \bar{A}_{,s}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$A_{,t} - A_{,x} = -2\bar{A}_{,r}.$$

Вследствие этого

$$-2\bar{A}_{,r} = \bar{\eta}\bar{\eta}_{,r} + O(\alpha, \beta),$$

иначе

$$\bar{A}_{,r} = -\frac{1}{4}(\bar{\eta}^2)_{,r} + O(\alpha, \beta).$$

Мы можем считать, с точностью до  $O(\alpha, \beta)$ , что

$$A = -\frac{\eta^2}{4}.$$

Выполняя аналогичные выкладки для уравнения относительно  $B$ , находим

$$B_{,t} - B_{,x} = -\frac{2}{3}\eta_{,xxx},$$

$$-2\bar{B}_{,r} = -\frac{2}{3}\bar{\eta}_{,rrr} + O(\alpha, \beta);$$

или

$$\bar{B}_{,r} = \frac{1}{3}\bar{\eta}_{,rrr} + O(\alpha, \beta),$$

что дает нам

$$B = \frac{1}{3}\bar{\eta}_{,rr} + O(\alpha, \beta),$$

$$B = \frac{1}{3}\eta_{,xx} + O(\alpha, \beta).$$

Выберем

$$B = \frac{1}{3}\eta_{,xx}.$$

Заменяя  $A$  и  $B$  в (19.12) и (19.13), мы получаем

$$\eta_{,t} + \eta_{,x} + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_{,x} + \frac{1}{6}\beta\eta_{,xxx} + O(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = 0,$$

т. е. в первом приближении

$$\eta_{,t} + \eta_{,x} + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_{,x} + \frac{1}{6}\beta\eta_{,xxx} = 0, \quad (19.14)$$

что уже является уравнением Кортевега–де Фриза.

Чтобы получить более простой вид уравнения Кортевега–де Фриза, мы сделаем замену переменных

$$x = t' + x',$$

$$t = t'.$$

Полагая

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta}(x', t'),$$

мы получаем из (19.14) выражение

$$\tilde{\eta}_{t'} + \frac{3}{2}\alpha\tilde{\eta}\tilde{\eta}_{,x'} + \frac{1}{6}\beta\tilde{\eta}_{,x'x'x'} = 0. \quad (19.15)$$

Затем масштабируем  $x'$ ,  $t'$  и  $\tilde{\eta}$ :

$$x' = kx,$$

$$t' = \ell t,$$

$$\tilde{\eta} = u,$$

где  $k$  и  $\ell$  будут выбраны позже. Имеем

$$\frac{1}{\ell}u_{,t} + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{k}uu_{,x} + \frac{1}{6}\frac{\beta}{k^3}u_{,xxx} = 0.$$

Выберем  $k$  и  $\ell$  такими, что

$$\frac{3}{2} \frac{\alpha \ell}{k} = 1, \quad \frac{1}{6} \frac{\beta \ell}{k^3} = 1;$$

следовательно,

$$\frac{\ell}{k} = \frac{2}{3\alpha}, \quad \frac{\ell}{k^3} = \frac{6}{\beta},$$

$$k = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

$$\ell = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^3}}.$$

В итоге мы получаем уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_{,t} + uu_{,x} + u_{,xxx} = 0. \quad (19.16)$$

#### 19.4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Мы закончим эту главу получением солитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза. Эти решения соответствуют волнам, которые распространяются с постоянной скоростью и сохраняют заданную форму; поэтому мы можем записать

$$u(x, t) = \Psi(\xi) = \Psi(x - Vt),$$

где  $\xi = x - Vt$ . Подставив это выражение в (19.16), мы получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\Psi$ :

$$(\Psi - V) \frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{d^3\Psi}{d\xi^3} = 0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{1}{2} \Psi^2 - V\Psi + \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = k_1, \quad (19.17)$$

где  $k_1$  — константа. Далее умножим обе части равенства на  $d\Psi/d\xi$  и проинтегрируем еще раз, чтобы получить

$$\frac{1}{6} \Psi^3 - \frac{1}{2} V\Psi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 = k_1\Psi + k_2, \quad (19.18)$$

где  $k_2$  — константа. Константы  $k_1$  и  $k_2$  определяются из граничных условий: волна должна быть плоской на бесконечности; таким образом,  $\Psi$  и ее производные должны стремиться к нулю. Это дает  $k_2 = 0$  в (19.18). Затем, полагая  $\xi \rightarrow \infty$  в (19.17), мы получим  $k_1 = 0$ .

Уравнение (19.18), в котором  $k_1 = k_2 = 0$ , может быть решено с использованием элементарных трансцендентных функций. Запишем решение

$$\Psi = \Psi(\xi) = 3V \left[ 1 + \operatorname{sh}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{V} \xi \right) \right]^{-1} = \frac{3V}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{V} \xi \right)};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 3V \left[ 1 + \operatorname{sh}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{V} (x - Vt) \right) \right]^{-1} = \\ &= \frac{3V}{\operatorname{ch}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{V} (x - Vt) \right]} = 3V \operatorname{sch}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{V} (x - Vt) \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что эта функция  $u$  является решением уравнения (19.16). Заметим также, что  $u$  становится практически равной нулю при условии, что  $\xi$  больше нескольких единиц (например,  $\sqrt{V}|\xi| = \sqrt{V}|x - Vt| \geq 20$ ).

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение Синус Гордона

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0.$$

Это уравнение возникает, например, при рассмотрении механической трансмиссии, состоящей из упруго связанных маятников.

а) Предположим, что угол  $\theta$  мал. Затем приблизим уравнение Синус Гордона уравнением Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

При каком условии (дисперсионном отношении)

$$\theta = \theta_0 \cos(kx - \omega t)$$

является решением уравнения Клейна–Гордона?

б)

- (i) Показать, что при замене переменных  $t \mapsto \omega_0 T$ ,  $x \mapsto \frac{\omega_0}{c_0} x$ , уравнение Синус Гордона может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \sin \theta = 0.$$

- (ii) Будем искать решение упомянутого выше уравнения в виде

$$\theta = \theta(s) = \theta(x - ut), \quad -1 < u < 1.$$

Показать, что

$$(1 - u^2)\theta_{,ss} = \sin \theta$$

и что

$$\theta_{,s} = \pm \sqrt{\frac{2(c - c_\infty \theta)}{1 - u^2}},$$

где  $c$  — константа интегрирования.

- (iii) Вычислить значение  $c$  при условии, что мы ищем локальные решения (например, при условии, что  $\theta$  и ее производные  $s \rightarrow \pm\infty$ ).
- (iv) Получить выражение для солитонного решения.

**2.** Рассмотрим систему уравнений, описывающую малоамплитудные и длинные волны в водном канале

$$\begin{aligned} \eta_{,t} + u_{,x} + (u\eta)_{,x} + u_{,xxx} - \eta_{,xxt} &= 0, \\ u_{,t} + \eta_{,x} + uu_{,x} + \eta_{,xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Положим  $\xi = x + x_0 - ct$  и будем искать решения предыдущей системы в виде

$$\eta(x, t) = \eta(\xi), \quad u(x, t) = \alpha\eta(\xi), \quad \alpha \neq 0,$$

где  $\eta$  локализована.

а) Показать, что  $c = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha}$  и что

$$(\alpha^2 - 1)\eta_{,\xi} + \alpha^2\eta\eta_{,\xi} + \eta_{,\xi\xi\xi} = 0.$$

б) Рассмотрим уравнение

$$a\eta_{,\xi} - b\eta_{,\xi\xi\xi} = \eta\eta_{,\xi}, \quad ab > 0.$$

Показать, что

$$\eta = 3a \operatorname{sch}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} (\xi + \xi_0) \right)$$

является решением предыдущего уравнения (здесь  $\xi_0$  — произвольная постоянная).

в) Показать, что

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \eta_0 \operatorname{sch}^2(\lambda(x + x_0 - ct)), \\ u(x, t) &= \pm \sqrt{\frac{3}{\eta_0 + 3}} \eta_0 \operatorname{sch}^2(\lambda(x + x_0 - ct)), \end{aligned}$$

где

$$\eta_0 > 0, \quad c = \frac{3 + 2\eta_0}{\pm\sqrt{3(3 + \eta_0)}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_0 + 3}},$$

является солитонным решением исходной системы.



3. Найти солитонное решение следующей системы Уитхема:

$$\eta_{,t} + u_{,x} + (u\eta)_{,x} - \frac{1}{6} u_{,xxx} = 0,$$

$$u_{,t} + \eta_{,x} + uu_{,x} - \frac{1}{2} u_{,xxt} = 0,$$

такое, что  $\eta(x, t) = \eta(\xi) = \eta(x + x_0 - ct)$ ,  $u(x, t) = \alpha\eta(\xi)$ .

## НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Целью данной главы является рассмотрение еще одного уравнения, описывающего нелинейные волновые явления. Это нелинейное уравнение Шрёдингера, которое не следует путать с линейным уравнением Шрёдингера из квантовой механики (см. ниже).

Как было отмечено в гл. 18, это уравнение, так же как и уравнение Кортевега–де Фриза, было открыто относительно недавно. Эти два уравнения используются при изучении различных волновых явлений. В частности, нелинейное уравнение Шрёдингера, как и уравнение Кортевега–де Фриза, может описывать волны в воде, и оно также может быть выведено из уравнений Эйлера для идеальной жидкости при надлежащих предположениях.

Однако нелинейное уравнение Шрёдингера также описывает очень важные на сегодняшний день явления: распространение волн в проводниках в соответствии со схемой оптических линий связи на дальние расстояния и оптических устройствах обработки сигналов для надежной и быстрой передачи информации.

Учитывая важность данной темы, а также для того, чтобы разнообразить математические методы настоящей книги, мы в этой главе выведем уравнение Шрёдингера из уравнений Максвелла в контексте волноводов, а не из уравнения Эйлера в контексте механики жидкости.

В разд. 20.1 мы начнем с повторения уравнений Максвелла. Мы также введем новое понятие, присущее оптическим волокнам, а именно поляризацию, которая описывает электромагнитное анизотропное поведение среды. В разд. 20.2 и 20.3 мы смоделируем распространение электромагнитных волн в поляризованной среде с помощью материальных уравнений среды, которые связывают поляризацию и электрическое поле (эти материальные уравнения схожи во многих отношениях с теми, которые были рассмотрены в гл. 5 и 10). Нелинейное уравнение Шрёдингера будет затем введено в разд. 20.4. В разд. 20.5 мы получим солитонные решения незатухающего нелинейного уравнения Шрёдингера. Материал разд. 20.1 и 20.2 универсален и содержит основные элементы, используемые в большом разнообразии фотоэлектрических явлений в проводниках. Последующие разделы связаны с оптоволоконном и в них рассматривается изотропность среды и ее геометрия.

## 20.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ СРЕДЫ

В этом разделе нас будет интересовать распространение сигналов в поляризованных средах, таких как оптоволокно. Эти явления электромагнитной природы подчиняются уравнениям Максвелла, введенным в гл. 10, к которым мы добавляем поляризацию.

Таким образом, мы начнем с повторения уравнений Максвелла в том виде, в каком они появились в гл. 10. Электрическое и магнитное поля  $E$ ,  $H$  и электрическая и магнитная индукция  $D$ ,  $B$  удовлетворяют в среде уравнениям

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{curl} E = 0, \quad (20.1)$$

$$\operatorname{curl} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (20.2)$$

$$\operatorname{div} D = q, \quad (20.3)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (20.4)$$

где  $q$  — плотность заряда. В случае оптоволокна и в более общем случае при отсутствии свободного заряда в среде мы имеем  $J = 0$  и  $q = 0$ ; следовательно,

$$\operatorname{curl} H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (20.5)$$

$$\operatorname{div} D = 0. \quad (20.6)$$

Как и в гл. 10, индукции  $D$  и  $B$  связаны с полями  $E$  и  $H$  с помощью определяющих соотношений электромагнитной среды. Именно в этом месте появляется поляризация и первое отличие от гл. 10. Мы вводим индуцированные электрические и магнитные поляризованные векторы  $P$  и  $M$ . Далее материальные уравнения, схожие с уравнениями (10.14) гл. 10, записываются в виде

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad (20.7)$$

$$B = \mu_0 H + M, \quad (20.8)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  являются диэлектрической проницаемостью и проницаемостью вакуума соответственно. Впредь мы будем полагать  $M = 0$ , так как магнитная поляризация стремится к нулю для немагнитной среды, такой как оптоволокно; следовательно,

$$B = \mu_0 H. \quad (20.9)$$

Применим операцию  $\operatorname{curl}$  к уравнению (20.1), тогда из уравнения (20.9) следует, что

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} E = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} B = - \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \operatorname{curl} H.$$

Поэтому  $J = 0$ . Далее находим

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} E = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

и окончательно выводим из уравнения (20.7) следующее уравнение волнового типа:

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (20.10)$$

где  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ ,  $c$  — скорость света в вакууме.

Уравнение (20.10) — фундаментальное уравнение для описания распространения электрического поля  $E$  в оптоволокне. Оно должно быть дополнено подходящими определяющими связями между  $E$  и индуцированным электрическим поляризационным вектором  $P$ : мы разберем этот вопрос в следующих разделах. Сейчас мы дадим другие формы уравнения (20.10).

В частности, мы будем использовать преобразование Фурье по времени для  $E$

$$\mathcal{F}E(x, \omega) = \widehat{E}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, t) \exp(i\omega t) dt.$$

Уравнение (20.10) с помощью преобразования Фурье может быть записано в виде

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \widehat{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{E} + \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} \widehat{P}.$$

В изотропной среде  $E$  и  $D$  пропорциональны (с независящим от  $t$  коэффициентом пропорциональности). Отсюда вытекает, что  $\widehat{E}$  и  $\widehat{D}$  также пропорциональны; далее, из того, что  $\operatorname{div} D = 0$ , следует, что  $\operatorname{div} E = 0$  и  $\operatorname{div} \widehat{E} = 0$ , так что

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \operatorname{curl} E &= \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \Delta E = -\Delta E, \\ \operatorname{curl} \operatorname{curl} \widehat{E} &= -\Delta \widehat{E}, \end{aligned}$$

и последнее уравнение принимает вид

$$-\Delta \widehat{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \widehat{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \widehat{P} \right). \quad (20.11)$$

При некоторых условиях важно рассмотреть неизотропную среду, для которой  $D = [\varepsilon]E$ , где  $[\varepsilon]$  — тензор второго порядка; в этом случае  $\operatorname{div} E \neq 0$ , но эта проблема не будет здесь рассматриваться.

## 20.2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ: ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

В самом общем случае вывод соотношений между электрическим полем  $E$  и поляризацией  $P$  опирается на квантовую механику; квантовая механика, в частности, требуется в том случае, когда оптическая частота близка к резонансу со средой<sup>1)</sup>. При отдалении от резонанса (случай оптоволокна с длиной

<sup>1)</sup>Здесь уже требуется *линейное* уравнение Шрёдингера из квантовой механики. Как было отмечено во введении, это уравнение полностью отличается от нелинейного уравнения Шрёдингера, упоминавшегося выше.

волны между 0,5 и 2  $\mu\text{м}$ ) мы можем использовать простые феноменологические отношения между  $P$  и  $E$  — например, соотношения, соответствующие началу тейлоровского разложения  $E$  в 0. Это разложение оправданно тем, что  $E$  мало (в надлежащем безразмерном виде) и выражает, с физической точки зрения, тот факт, что электромагнитные силы слабы по сравнению с силами сцепления.

Следовательно, мы получим разложение вида

$$P = \varepsilon_0 \{ \mathcal{L}^{(1)}(E) + \mathcal{L}^{(2)}(E \otimes E) + \mathcal{L}^{(3)}(E \otimes E \otimes E) + \dots + \mathcal{L}^{(j)}(\underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_j) + \dots \}, \tag{20.12}$$

где  $\mathcal{L}^{(j)}$  — линейные функциональные операторы. Здесь должно быть выполнено феноменологическое исследование, схожее с реологией, описанной в гл. 5, а также необходимо принять во внимание, в частности, изотропность (инвариантность при изменении ортонормированного базиса), причинность (прошлое не должно зависеть от будущего) и инвариантность по времени (при преобразовании времени). Посредством анализа, не рассматриваемого здесь, эти принципы ведут к следующему виду операторов  $\mathcal{L}^{(j)}$  (мы ограничимся  $j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(E)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau, \\ \mathcal{L}^{(2)}(E)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(2)}(t - \tau_1, t - \tau_2) \cdot E(\tau_1) \otimes E(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \\ \mathcal{L}^{(3)}(E)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \times \\ &\quad \times E(\tau_1) \otimes E(\tau_2) \otimes E(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{aligned}$$

где  $\cdot$  обозначает сокращенное тензорное произведение и  $\chi^{(j)}$  — тензор порядка  $j + 1$ , называемый многоимпульсным тензором отклика; его преобразование Фурье по времени является тензором восприимчивости. Отметим, что  $\chi^{(j)}$  равен нулю при  $t < 0$ .

Вследствие условий симметрии и изотропности оператор  $\mathcal{L}^{(2)}$  равен нулю<sup>1)</sup>. Если мы, таким образом, ограничимся членом третьего порядка, останется только

$$P = P_L + P_{NL}, \tag{20.13}$$

<sup>1)</sup>Каждая функция, являющаяся тензором нечетного порядка, инвариантным при центральной симметрии, равна нулю; из этого мы выводим, что  $\mathcal{L}^{(2)} = 0$ .

где  $P_L$  — линейная часть; из условия изотропности мы можем взять  $\chi^{(1)}$  диагональным,  $\chi^{(1)} = I\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(1)}$  — скаляром и получим

$$P_L(x, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(x, t - \tau) E(x, \tau) d\tau. \quad (20.14)$$

Далее, применяя преобразование Фурье по времени, мы получаем

$$\widehat{P}_L(x, \omega) = \varepsilon_0 \widehat{\chi}^1(x, \omega) \widehat{E}(x, \omega). \quad (20.14')$$

В уравнениях (20.14) и (20.15) через  $x$  обозначена, как обычно, точка  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_3 = z$  далее).

Мы предполагаем, что в нелинейном члене  $P_{NL}$  (который при малом  $E$  дает эффекты малого порядка) реакция является мгновенной, что выражается в

$$\chi^{(3)}(x, t, t', t'') = \chi^3(x) \delta_t \delta_{t'} \delta_{t''},$$

где  $\delta_t$  здесь обозначает массу Дирака в нуле по переменной  $t$ , а  $\chi^{(3)}$  — тензор четвертого порядка, независящий от  $t$ . Далее следует

$$P_{NL}(x, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(x) \cdot E(x, t) \otimes E(x, t) \otimes E(x, t). \quad (20.15)$$

Выражение для  $\chi^{(3)}$  и его зависимость от  $x$  будет рассмотрено далее.

### Линеаризованное уравнение

В начале мы будем пренебрегать членом  $P_{NL}$  и рассматривать линеаризованную форму уравнения (20.10). Поскольку

$$D = \varepsilon_0 E + P \simeq \varepsilon_0 E + P_L,$$

имеем, благодаря (20.14),

$$\begin{aligned} \widehat{D} &= \varepsilon_0 \widehat{E} + \widehat{P}_L, \\ \widehat{D} &= \varepsilon_0 (1 + \widehat{\chi}^{(1)}) \widehat{E}. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Уравнение (20.11) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \Delta \widehat{E} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{E} = 0, \\ \varepsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega). \end{cases} \quad (20.17)$$

Отметим здесь, что, поскольку выражение  $\widehat{\chi}^{(1)}(\omega)$  комплексное, то же самое верно для  $\varepsilon(\omega)$ . По определению

$$\varepsilon = \left( n + \frac{i\alpha c}{2\omega} \right)^2 = n^2 - \frac{\alpha^2 c^2}{4\omega^2} + i \frac{n\alpha c}{\omega}, \quad (20.18)$$

где  $n + i\alpha c/2\omega$  — комплексный коэффициент преломления среды,  $n = n(\omega)$  — действительная часть этого индекса;  $\alpha = \alpha(\omega)$  обозначает коэффициент поглощения частоты  $\omega$ , и  $c$  обозначает, как обычно, скорость света в вакууме. Таким образом,

$$\alpha = \frac{\omega}{nc} \operatorname{Im}[\widehat{\chi}^{(1)}(\omega)],$$

где  $\operatorname{Im}$  обозначает мнимую часть (действительная часть будет обозначена  $\operatorname{Re}$ ); это соотношение точно. Более того, мы имеем  $\widehat{\chi}^{(1)} \ll 1$ , так что в первом приближении

$$n + \frac{i\alpha c}{2\omega} = \varepsilon^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \widehat{\chi}^{(1)},$$

т. е.

$$n \simeq 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\widehat{\chi}^{(1)}(\omega)].$$

Таким образом, в первом приближении мы получим

$$\varepsilon \simeq n^2 \simeq 1.$$

Теперь мы перейдем к решению уравнения (20.17) для длинного волокна сечения  $\Omega \subset \mathbb{R}_{x_1 x_2}^2$  (отметим здесь, что мы получим задачу, схожую с (20.17) в нелинейном случае). Для этого мы будем искать решение в виде

$$\widehat{E}(x, \omega) = A(\omega) F(x_1, x_2) \exp(i\beta z),$$

где мы положили  $z = x_3$ . Поделив на  $\exp(i\beta z)$ , мы получаем из (20.17), что

$$A\Delta_2 F - A\beta^2 F + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} AF = 0,$$

где  $\Delta_2$  обозначает двумерный оператор Лапласа относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$  и где  $A$  — нормирующий множитель. Мы пришли к следующей задаче о нахождении собственных значений для  $F$ :

$$\begin{cases} \Delta_2 F + \kappa^2 F = 0, & x_1, x_2 \in \Omega, \\ F = 0 & \text{на границе } \partial\Omega \text{ области } \Omega. \end{cases} \quad (20.19)$$

Сделаем здесь предположение, что  $E$  (и, таким образом,  $F$ ) обращается в нуль на  $\partial\Omega$  (в книге Agrawal (1989) заинтересованный читатель может найти более подробное изложение).

Следовательно,  $\kappa^2$  — собственное значение оператора Лапласа в  $\Omega$ , связанного с граничными условиями Дирихле на  $\partial\Omega$ . Это соответствует бесконечномерной спектральной задаче (несколько похожих задач появлялись в гл. 17). Возможные значения  $\kappa^2$  формируют последовательность неотрицательных действительных чисел  $\lambda_n$ :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть  $\kappa^2$  равно одному из этих значений, тогда  $\beta = \beta(\omega)$  будет определено для каждой частоты  $\omega$  посредством соотношения

$$\varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta(\omega)^2 = \kappa^2. \quad (20.20)$$

В итоге нам остается нормализовать собственный вектор  $F$  (определенный вплоть до постоянного множителя). Если мы выберем, например,  $F$  таким, что выполнено условие

$$\int_{\Omega} F^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1,$$

то  $A(\omega)$  будем называть коэффициентом интенсивности.

### 20.3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы вернемся к уравнению (20.10) с нелинейными членами, т. е. будем учитывать член  $P_{NL}$ . Мы предположим ради простоты, что волны распространяются в направлении  $x_3 = z$  и что поляризация направлена по направлению оси  $Ox_1$  (с единичным вектором  $e_1$ ) таким образом, что

$$\begin{cases} E(x, t) = E_1(x, t)e_1, \\ P_L(x, t) = P_{1L}(x, t)e_1, \\ P_{NL}(x, t) = P_{1NL}(x, t)e_1. \end{cases} \quad (20.21)$$

С другой стороны, для стекловолокна частоты  $\omega$  близки к центральной частоте  $\omega_0$  ( $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ). Тогда положим

$$E_1(x, t) = \text{Re}[\mathcal{E}(x, t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad (20.22)$$

$$P_{1L}(x, t) = \text{Re}[\mathcal{P}_L(x, t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad (20.23)$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}_L$  — комплексные; с учетом (20.14) естественно предположить, что  $\mathcal{P}_L$  и  $\mathcal{E}$  удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{P}_L(x, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi}^{(1)}(t - t') \mathcal{E}(x, t') \exp(i\omega_0(t - t')) dt'. \quad (20.24)$$

Более того, поскольку (20.24) эквивалентно

$$\mathcal{P}_L(x, \cdot) = \varepsilon_0 \left\{ \widehat{\chi}^{(1)}(\cdot) \exp(i\omega_0 \cdot) \right\} * \mathcal{E}(x, \cdot),$$

где  $*$  обозначает свертку, мы получаем

$$\widehat{\mathcal{P}}_L(x, \omega) = \varepsilon_0 \mathcal{F} \left\{ \widehat{\chi}^{(1)}(\cdot) \exp(i\omega_0 \cdot) \right\}(\omega) \widehat{\mathcal{E}}(x, \omega),$$

где  $\mathcal{F}G = \widehat{G}$ . К тому же,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \widehat{\chi}^{(1)}(\cdot) \exp(i\omega_0 \cdot) \right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi}^{(1)}(t) \exp(i\omega_0 t) \exp(i\omega t) dt = \\ &= \widehat{\chi}^{(1)}(\omega + \omega_0), \end{aligned}$$



и, таким образом,

$$\widehat{\mathcal{P}}_L(x, \omega) = \varepsilon_0 \widehat{\chi}^{(1)}(\omega + \omega_0) \widehat{\mathcal{E}}(x, \omega),$$

что окончательно дает после обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi}^{(1)}(\omega' + \omega_0) \widehat{\mathcal{E}}(x, \omega') \exp(-i\omega't) d\omega' = \\ &= (\text{полагая } \omega' + \omega_0 = \omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi}^{(1)}(\omega) \widehat{\mathcal{E}}(x, \omega - \omega_0) \exp(-i(\omega - \omega_0)t) d\omega. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Затем из уравнений (20.15) и (20.21) выводим, что

$$P_{1NL} = \varepsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} (E_1)^3,$$

где  $\chi_{1111}^{(3)} = \chi_{x_1, x_1, x_1, x_1}^{(3)}$  — компонента на  $e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_1$  тензора четвертого порядка  $\chi^{(3)}$ . Соотношение (20.22) дает

$$E_1 = \text{Re } a = \frac{1}{2} (a + \bar{a}),$$

где

$$a = \mathcal{E}(x, t) \exp(-i\omega_0 t),$$

откуда

$$\begin{aligned} E_1^3 &= \frac{1}{8} \text{Re}(a^3 + 3a^2\bar{a} + 3a\bar{a}^2 + \bar{a}^3) = \\ &= \frac{1}{8} \text{Re}[\mathcal{E}^3 \exp(-3i\omega_0 t) + 3\mathcal{E}^2 \bar{\mathcal{E}} \exp(-i\omega_0 t) + 3\mathcal{E} \bar{\mathcal{E}}^2 \exp(i\omega_0 t) + \bar{\mathcal{E}}^3 \exp(3i\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Члены вида  $\exp(\pm 3i\omega_0 t)$  соответствуют очень быстрым колебаниям, и тем самым, они пренебрежимо малы по сравнению с членами вида  $\exp(\pm i\omega_0 t)$ . Следовательно, в первом приближении получаем

$$E_1^3 \simeq \frac{3}{4} \mathcal{E} \bar{\mathcal{E}} \text{Re}[\mathcal{E} \exp(-i\omega_0 t)] = \frac{3}{4} |\mathcal{E}|^2 E_1.$$

В результате,

$$P_{1NL} \simeq \text{Re}(\mathcal{P}_{NL} \exp(-i\omega_0 t)), \quad (20.26)$$

где

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{NL} \simeq \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \mathcal{E}, \\ \varepsilon_{NL} \simeq \frac{3}{4} \chi_{1111}^{(3)} |\varepsilon(x, t)|^2. \end{cases} \quad (20.27)$$

Чтобы получить (20.11), нам необходимо применить преобразование Фурье по времени к уравнениям (20.26) и (20.27). Таким образом, мы устанавливаем (что представляется разумным), что для оптоволокна  $\chi_{1111}^{(3)}$  и  $|\mathcal{E}(x, t)|^2$  очень близки к своим усредненным по времени значениям. Итак, в первом приближении  $\varepsilon_{NL}$  не зависит от времени и, таким образом,

$$\widehat{\mathcal{P}}_{NL} \simeq \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \widehat{\mathcal{E}}. \quad (20.28)$$

Применяя преобразование Фурье к (20.7), мы видим, что  $\widehat{D}$  пропорционально  $\widehat{E}$ ; следовательно, мы опять имеем  $\operatorname{div}\widehat{E} = 0$ ,  $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\widehat{E} = -\Delta\widehat{E}$ . Уравнение (20.10), далее, дает

$$\Delta\widehat{\mathcal{E}} + \varepsilon(\omega)k^2\widehat{\mathcal{E}} = 0, \quad (20.29)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \widehat{\chi}^1(\omega) + \varepsilon_{\text{NL}},$$

и  $k = \omega/c$ ;  $\varepsilon_{\text{NL}}$  не зависит от  $\omega$ <sup>1)</sup>.

Теперь нашей целью будет приближенное решение уравнения (20.29). После всех вычислений мы получим нелинейное уравнение Шрёдингера. Для этого нам потребуются предварительные выкладки, а также несколько замечаний, касающихся  $\varepsilon(\omega)$ .

Аналогично линейному случаю, мы имеем

$$\varepsilon = \left( \tilde{n} + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \right)^2,$$

где  $\tilde{n}$  и  $\tilde{\alpha}$  определены, как и в линейном случае, а  $k_0 = \omega_0/c$ ; однако различные величины теперь зависят от интенсивности  $|\mathcal{E}|^2$ . Обычно  $\tilde{n}$  и  $\tilde{\alpha}$  записывают в виде

$$\tilde{n} = n + n_2|\mathcal{E}|^2, \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|\mathcal{E}|^2, \quad (20.30)$$

где  $n$  и  $\alpha$  были определены в предыдущем разделе (линейный случай). Далее мы получаем, что

$$\frac{\tilde{n}\tilde{\alpha}}{k_0} = \operatorname{Im}\left(1 + \widehat{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4}\chi_{1111}^{(3)}|\mathcal{E}|^2\right) = \frac{n\alpha}{k_0} + \frac{3}{4}\operatorname{Im}\chi_{1111}^{(3)}|\mathcal{E}|^2;$$

следовательно,

$$\tilde{\alpha} = \alpha \frac{n}{\tilde{n}} + \frac{k_0}{\tilde{n}} \frac{3}{4} \operatorname{Im}\chi_{1111}^{(3)}|\mathcal{E}|^2.$$

В первом приближении имеем  $\tilde{n} \approx n$  (а также  $\omega \approx \omega_0$ ), следовательно,

$$\alpha_2 = \frac{3}{4} \frac{\omega_0}{nc} \operatorname{Im}\chi_{1111}^{(3)}.$$

Более того,

$$\varepsilon = \tilde{n}^2 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{4k_0^2} + i \frac{\tilde{\alpha}\tilde{n}}{k_0} = 1 + \widehat{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4}\chi_{1111}^{(3)}|\mathcal{E}|^2,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = 1 + \operatorname{Re}\widehat{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4}\operatorname{Re}(\chi_{1111}^{(3)}|\mathcal{E}|^2) = \tilde{n}^2 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{4k_0^2}.$$

<sup>1)</sup>На самом деле мы неявно задали ее значение равным ее же значению в  $\omega_0$ : эффекты рассеивания (соответствующие  $\omega \neq \omega_0$ ) учитываются в линейной части  $P_L$ , в то время как нелинейная часть эти эффекты не учитывает.

С другой стороны,

$$(n + n_2|\mathcal{E}|^2)^2 = n^2 + 2nn_2|\mathcal{E}|^2 + n_2^2|\mathcal{E}|^4 \simeq n^2 + 2nn_2|\mathcal{E}|^2,$$

где мы пренебрегли в первом приближении членом  $n_2^2|\mathcal{E}|^4$ . Поскольку  $1 + \operatorname{Re}\chi^{(1)} \simeq n^2$  и  $\tilde{\alpha} \ll \tilde{n}$ , то

$$\frac{3}{4} \operatorname{Re}\chi_{1111}^{(3)} = 2nn_2,$$

и, таким образом, в первом приближении

$$n_2 \simeq \frac{3}{8n} \operatorname{Re}\chi_{1111}^{(3)}.$$

Эта последняя величина характеризует нелинейность волокна.

#### 20.4. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Теперь мы можем приближенно решить уравнение (20.29). Для этого будем искать решение в виде

$$\hat{\mathcal{E}}(x, \omega - \omega_0) = F(x_1, x_2) \hat{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z),$$

где опять положим  $z = x_3$ . Подставляя это выражение для  $\hat{\mathcal{E}}$  в (20.29), мы получим, после сокращения на  $\exp(i\beta_0 z)$ :

$$\hat{A}\Delta_2 F - \hat{A}F\beta_0^2 + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial z^2} F + 2i\beta_0 \frac{\partial \hat{A}}{\partial z} F + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \hat{A}F = 0.$$

В предположении о малом изменении вдоль волокна член  $\partial^2 \hat{A} / \partial z^2$  пренебрежимо мал по сравнению с  $\beta_0 \partial \hat{A} / \partial z$ . Если мы поделим на  $\hat{A}F$ , то получим, что

$$\frac{\Delta_2 F}{F} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = \beta_0^2 - \frac{2i\beta_0}{\hat{A}} \frac{\partial \hat{A}}{\partial z}.$$

Пусть  $\tilde{\beta}^2 = \tilde{\beta}(z, \omega)^2$  — общая часть этих двух уравнений (правая часть зависит только от  $z$  и  $\omega$ ). Таким образом,

$$\Delta_2 F + \left[ \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \tilde{\beta}^2 \right] F = 0, \tag{20.31}$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \hat{A}}{\partial z} + \left( \tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \right) \hat{A} = 0. \tag{20.32}$$

Сначала решим уравнение (20.31), которое мы дополним, как и ранее, граничным условием Дирихле. Соответствующая задача на собственные значения немного отличается от той, которую мы получили в линейном случае, потому что коэффициент при  $F$  также зависит от  $x_1$  и  $x_2$  (и  $z$ ). Можно показать,

используя теорию возмущений для задачи на собственные значения<sup>1)</sup>, что в первом приближении значение  $F$  не меняется, т. е., как и в линейном случае, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_2 F + \kappa^2 F &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ F &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Точно так же получим

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \delta\beta,$$

где  $\beta(\omega)$  было вычислено в разд. 20.2 (например, в случае  $P_{\text{NL}} = 0$ ). Таким образом,

$$\kappa^2 = \varepsilon(\omega)k^2 - \tilde{\beta}^2,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= [(n + \delta n)^2 \simeq n^2 + 2n \cdot \delta n = \left( n + n_2 |\mathcal{E}|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} + i \frac{\alpha_2 |\mathcal{E}|^2}{2k_0} \right)^2 \simeq \\ &\simeq n^2 + 2nn_2 |\mathcal{E}|^2 + n \frac{i\alpha}{k_0} + \text{члены более низкого порядка,}\end{aligned}$$

что дает в первом приближении

$$\delta n \simeq n_2 |\mathcal{E}|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0}.$$

Более того,

$$\tilde{\beta}^2 \simeq \beta^2 + 2\beta \cdot \delta\beta.$$

Собственная функция  $F$ , следовательно, в первом приближении является решением уравнения

$$\Delta_2 F + [k_0^2(n^2 + 2n \cdot \delta n) - \beta^2 - 2\beta \cdot \delta\beta] F = 0,$$

где  $\delta n$  зависит от  $x_1$  и  $x_2$ , но  $n, \beta$  и  $\delta\beta$  не зависят от  $x_1$  и  $x_2$ . Умножая предыдущее уравнение на  $F$  и интегрируя по  $\Omega$ , мы находим

$$\int_{\Omega} |\nabla F|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} [k_0^2(n^2 + 2n \cdot \delta n) - \beta^2 - 2\beta \cdot \delta\beta] F^2 dx_1 dx_2.$$

В силу (20.19) и (20.20) в первом приближении выполнено

$$\int_{\Omega} |\nabla F|^2 dx_1 dx_2 \simeq \int_{\Omega} (k_0^2 n^2 - \beta^2) F^2 dx_1 dx_2$$

и мы выводим, что

$$\beta \cdot \delta\beta \int_{\Omega} |F|^2 dx_1 dx_2 \simeq k_0^2 n \int_{\Omega} \delta n |F|^2 dx_1 dx_2,$$

<sup>1)</sup>Детали и ссылки можно посмотреть в Agrawal (1989).

и, таким образом,

$$\delta\beta \simeq \frac{k_0^2 n}{\beta} \frac{\int_{\Omega} \delta n F^2 dx_1 dx_2}{\int_{\Omega} F^2 dx_1 dx_2}.$$

Если  $\kappa^2$  — собственное значение линейной задачи и  $\varepsilon \simeq n^2$ , то  $n^2 k_0^2 - \beta^2 = \kappa^2$ . Отсюда

$$\delta\beta \simeq \frac{k_0^2 n}{\sqrt{n^2 k_0^2 - \kappa^2}} \frac{\int_{\Omega} \delta n F^2 dx_1 dx_2}{\int_{\Omega} F^2 dx_1 dx_2}. \quad (20.33)$$

После определения функций  $F$  и  $\tilde{\beta}$  мы можем перейти к решению уравнения (20.32). Поскольку  $\tilde{\beta} \simeq \beta_0$ , мы имеем  $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \simeq 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ , и, таким образом, мы получаем в первом приближении уравнение

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial z} = i(\beta + \delta\beta - \beta_0)\hat{A}.$$

Учитывая, что  $\omega \simeq \omega_0$ , выпишем начало разложения Тейлора:

$$\beta(\omega) \simeq \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2,$$

где

$$\beta_n = \left. \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Из этих уравнений заключаем, что

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial z}(z, \omega - \omega_0) = i \left[ (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \delta\beta \right] \hat{A}(z, \omega - \omega_0),$$

и, применяя обратное преобразование Фурье, мы в итоге получаем следующее уравнение для  $A$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\delta\beta A.$$

Член  $\delta\beta$  содержит эффекты потери волокна и нелинейность. Мы выводим из предыдущих соотношений, и в частности из (20.33), что

$$\delta\beta \simeq \gamma |A|^2 + \frac{i\alpha}{2},$$

где

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}},$$

$$A_{\text{eff}} = \frac{(\int_{\Omega} |F|^2 dx_1 dx_2)^2}{\int_{\Omega} |F|^4 dx_1 dx_2},$$

и где  $F$  — вычисленная собственная функция. Таким образом, мы можем найти  $A_{\text{eff}}$ , как только будет определена собственная частота  $F$ .

В итоге  $A$  является решением уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A.$$

В завершение мы сделаем замену переменных  $z = z'$ ,  $t = t' + \beta_1 z'$ . Предыдущее уравнение (штрихи мы опускаем) переходит в

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\gamma |A|^2 A + \frac{\alpha}{2} A = 0, \quad (20.34)$$

которое и называется **нелинейным уравнением Шрёдингера**.

*Примечание 20.1.* Линейное уравнение Шрёдингера (известное и изученное задолго до появления нелинейного) состоит из (20.34), в котором  $\gamma = \alpha = 0$ , и его аналога в двумерном или трехмерном пространствах. Член, включающий  $\gamma$ , является нелинейным; именно он порождает солитоны при  $\gamma > 0$ . Член, включающий  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , является затухающим.

## 20.5. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

В отсутствие колебаний ( $\alpha = 0$ ) нелинейное уравнение Шрёдингера (20.34) обладает солитонным решением так же, как и уравнение Кортевега–де Фриза, а именно волнами, распространяющимися без изменения своей формы вдоль оси  $z$ . Мы завершим это исследование, как и в предыдущей главе, приведя выражение для солитонного решения. Предположим для простоты, что  $\beta_2 = -1$  ( $\beta_2 < 0$  по физическим причинам) и  $\gamma = 1$ . Заметим, что можно прийти к этим значениям путем несложного масштабирования  $A$ ,  $z$ , и  $t$ .

Легко проверить, что для этих значений  $\beta_2$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$  следующая функция является **точным решением** уравнения (20.34) для всех действительных значений константы  $b$  и комплексных значений константы  $a$ , по модулю равной 1:

$$A(t, z) = \frac{a \exp\left(\frac{1}{2} iz\right)}{\operatorname{csh}(t - b)}. \quad (20.35)$$

Методы, рассмотренные в четвертой части этой книги, имеют многочисленные приложения в акустике, общей теории волновых явлений и теории солитонов.

В качестве основных справочных изданий следует упомянуть книги Courant and Hilbert (1953) и Roseau (1987). Среди публикаций по акустике и аэроакустике отметим книги Goldstein (1976), Lighthill (1987) и Rayleigh (1894). Физические или математические аспекты музыкального звучания изложены в книгах Benade (1976), Fletcher и Rossing (1998), Roederer (1995) и Sundberg (1991).

Во введении к четвертой главе этой книги отмечалось, что солитоны, первоначально рассматриваемые как любопытное явление, проявляющееся в определенных каналах, оказались фундаментальным объектом исследований в задачах распространения цифровых сигналов в волоконных световодах и волноводах. Книги Agrawal (1989), Boyd (1992) и Remoissenet (1996) служат примерами базовых или продвинутых книг по этой весьма важной тематике.

**УПРАЖНЕНИЯ**

1. Рассмотрим следующее слабо диспергирующее нелинейное уравнение, которое появляется при моделировании упругих сетей:

$$u_{,tt} - \frac{\delta^2}{LC_0} u_{,xx} = \frac{\delta^4}{12LC_0} u_{,xxxx} + bu_{,tt}^2.$$

Будем искать его солитонное решение  $u(x, t) = U(x - vt)$ .

а) Выписать обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $U$ .

б) Будем искать локальные решения этого уравнения (например, такие, при которых  $U$  со своими производными стремятся к 0 на  $+$  и  $-\infty$ ). Показать, что  $U$  – решение уравнения

$$(v^2 - v_0^2)U = bv^2U^2 + \delta^2 \frac{v_0^2}{12} U_{,ss}.$$

в) Показать, что

$$\frac{2bv^2}{3} U^3 - (v^2 - v_0^2)U^2 + \delta^2 \frac{v_0^2}{12} (U_{,s})^2 = 0.$$

г) Показать, что

$$U^2 = \frac{3(v^2 - v_0^2)}{2bv^2} \operatorname{sch}^2 \left[ \frac{\sqrt{3(v^2 - v_0^2)}}{v_0} \frac{(x - vt)}{\delta} \right]$$

является солитонным решением уравнения.

2. Рассмотрим следующее нелинейное уравнение Шрёдингера, которое появляется при моделировании упругих сетей:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + q|\Psi|^2\Psi = 0, \quad q > 0.$$

Запишем  $\Psi$  в виде  $\Psi = a(\xi, t)e^{i[\theta(\xi, t) + nt]}$ , где  $a$  и  $\theta$  – действительные функции и  $n$  – действительная константа.

а) Выписать уравнения, которым удовлетворяют  $a$  и  $\theta$ .

б) Будем искать решение в виде  $a = a(\xi - ct)$  и  $\theta = \theta(\xi - ct)$ .

• (i) Показать, что

$$\begin{aligned} a_{,ss} + a[c\theta_s - n - (\theta_{,s})^2] + qa^3 &= 0, \\ a\theta_{,ss} + 2a_{,s}\theta_{,s} - ca_{,s} &= 0. \end{aligned}$$

- (ii) Показать, что

$$a^2(2\theta_{,s} - c) = A,$$

где  $A$  — константа интегрирования и

$$a_{,ss} = \left(n - \frac{c^2}{4}\right)a + \frac{A^2}{4a^3} - qa^3.$$

- (iii) Показать, что

$$(a_{,s})^2 = \left(n - \frac{c^2}{4}\right)a^2 - \frac{A^2}{4a^2} - q\frac{a^4}{2} + \kappa,$$

где  $\kappa$  — константа интегрирования и

$$(a^2_{,s})^2 = 4\left(n - \frac{c^2}{4}\right)a^4 - A^2 - 2qa^6 + 4\kappa a.$$

- (iv) Показать, что  $S = a_{,s}$  является решением уравнения

$$\frac{1}{2q}S^2_{,s} = E + BS + V_m^2S^2 - S^3,$$

где  $E = -\frac{A^2}{2q}$ ,  $B = \frac{4\kappa}{2q}$  и  $V_m = \frac{2(n - c^2/4)}{q}$ .

- (v) Будем искать локальные решения (например, такие, при которых  $S$  со своими производными равны нулю на  $\pm\infty$ ), такие, что  $E = B = 0$ . Показать, что  $S = V_m \operatorname{sch}\left(\frac{\sqrt{2q}}{2}V_m s\right)$  является решением.
- (vi) И наконец, показать, что

$$\Psi = V_m \operatorname{sch}\left[\sqrt{\frac{2q}{2}}V_m(\xi - ct)\right] \exp\left[i\frac{c}{2}(\xi - ct) + int\right]$$

является решением начального уравнения.



# ПРИЛОЖЕНИЕ

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В МЕХАНИКЕ

Хотя в этой книге мы и не рассматриваем основы функционального анализа и теории уравнений в частных производных, все же мы считаем целесообразным дать краткий обзор и высказать несколько замечаний о тех чрезвычайно важных и разнообразных уравнениях этого типа, которые мы здесь использовали. Некоторые из них уже хорошо изучены, тогда как другие требуют дальнейшего изучения с точки зрения их корректности в смысле Адамара, что подразумевает исследование вопросов существования и единственности решений в соответствующих функциональных пространствах и непрерывной зависимости этих решений от входных данных.

Для простоты ограничимся рассмотрением двумерного случая. Несколько интересных и важных уравнений в частных производных имеют вид

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  могут зависеть от  $x$  и  $y$  или же быть константами, тогда уравнение (A.1) линейное; эти коэффициенты могут также зависеть от  $u$ ,  $\partial u / \partial x$  и  $\partial u / \partial y$ , тогда это уравнение становится нелинейным.

Рассматриваемое уравнение называют

- эллиптическим, если  $b^2 - 4ac < 0$ ,
- гиперболическим, если  $b^2 - 4ac > 0$ , или
- параболическим, если  $b^2 - 4ac = 0$ .

Среди простейших уравнений, которые мы рассматривали, следует отметить эллиптическое уравнение (разд. 8.2 и разд. 14.6)

$$\Delta u = 0 \quad (\text{A.2})$$

и гиперболическое уравнение (разд. 8.4 и гл. 17)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.3})$$

где вместо символа  $y$  использован символ  $t$ . Кроме того, мы рассматривали линейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A.4})$$

которое соответствует уравнению распространения тепла (6.6), когда жидкость находится в состоянии покоя (в одномерном случае с надлежащими значениями величин, встречающихся в (6.6)).

Гораздо более трудными и порождающими много нерешенных математических проблем являются уравнения Навье–Стокса и Эйлера (гл. 5 и 7), которые в некотором смысле соответствуют нелинейным параболическим уравнениям.

Еще более трудным и совсем малоизученным с математической точки зрения является уравнение околосвуковых течений (см. (8.13) гл. 8), которое представляет собой смешанное уравнение второго порядка: оно эллиптическое в дозвуковой области, гиперболическое в сверхзвуковой области и параболическое на звуковой линии  $M = 1$ . Более того, это уравнение нелинейное.

И наконец, напомним нелинейные уравнения другого типа, такие как уравнения Кортевега–де Фриза и Шрёдингера (гл. 18 и 19). Эти нелинейные волновые уравнения значительно отличаются от уравнений (A.1)–(A.4), хорошо поняты с математической точки зрения и описывают такое удивительное волновое явление, как солитон.

# УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

## ГЛАВА 1

1.  $U = \partial\Phi(a, t, t_0)/\partial t$ . Выразить  $U_1, U_2$  и  $U_3$  через  $x_1, x_2, x_3, x = \Phi(a, t, t_0)$ .

2.

$$\frac{1}{2} \nabla |U|^2 + (\operatorname{curl} U) \wedge U = (U \cdot \nabla) U.$$

3.  $U = \partial\Phi(a, t, t_0)/\partial t$  и  $x = (x_1, x_2, x_3) = \Phi(a, t, t_0) = (\Phi_1(a, t, t_0), \Phi_2(a, t, t_0), \Phi_3(a, t, t_0))$ ; учесть, что  $\Phi_1 \partial\Phi_1/\partial t + \Phi_2 \partial\Phi_2/\partial t = 0$ .

4. Учесть, что  $U_1 = -\omega x_2, U_2 = \omega x_1$  и что  $x_1^2 + x_2^2 = a_1^2 + a_2^2$ .

5. Использовать надлежащие координаты должным образом выбранной системы координат: например если  $\vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0}$ , то выбрать вектор  $\vec{A}$  параллельным первому координатному вектору, а вектор  $\vec{B}$  расположить на плоскости  $0x_1x_2$ .

7. (i) Учесть, что если  $v_i = u$  и  $v_j = 0$  при  $j \neq i$ , то  $\operatorname{div} v = \partial u/\partial x_i$ .

(ii) Применить указание (i) к  $\partial u/\partial x_i$ , а затем просуммировать по  $i$ .

(iii) Применить указание (ii).

(iv) Учесть, что  $\operatorname{div} (u \wedge v) = v \operatorname{curl} u - u \operatorname{curl} v$ .

## ГЛАВА 2

1. Использовать фундаментальный закон  $m\gamma = F$ .

2. Представить полукруг в виде  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \text{ и } x^2 + y^2 \leq R^2\}$  и использовать полярные координаты.

3. Выписать фундаментальный закон в полярных координатах.

4. Использовать формулу Грина  $\int_{\partial\Omega} f \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \nabla f dx$ .

## ГЛАВА 3

1. Вычислить собственные значения и собственные векторы матрицы  $(\sigma_{ij})$ .

3. Учесть, что  $\int_A \sigma_{ij,j} \theta_i dx = - \int_A \sigma_{ij} \partial \theta_i / \partial x_j dx + \int_{\partial A} (\sigma \cdot n) \cdot \theta d\Sigma$ ; показать, что  $\int_A \sigma_{ij} \partial \theta_i / \partial x_j dx = 0$ .

4. Выбрать главные направления в качестве базиса; тогда одна из компонент  $\sigma_{ij} \neq 0$ , а все другие обращаются в нуль.

5. Учесть, что тензор напряжений имеет размерность, равную силе, умноженной на длину. Использовать соотношение равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  для вычисления констант  $c_1$  и  $c_2$  в упражнении а) (i). Учесть также, что поверхностная плотность сил задается в виде  $F = \sigma \cdot n$  на  $S_0$  и  $S_1$ .

**ГЛАВА 4**

1. а) Для каждой материальной точки рассмотреть силы, действующие на каждую пружину, и учесть направления этих сил (выбрать ориентированную ось). Теорема 4.2 определяет виртуальную мощность для случая системы из двух материальных точек.

б) Наряду с этими силами в п. а) рассмотреть действие силы тяжести.

2. Имеем  $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$ ,  $\mathcal{P}_{ext} = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) \cdot V d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot V dx$  и  $\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(V) dx$ ,  $\varepsilon(V)_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i})$ . Учесть, что величина  $\sigma \cdot n = F$  на  $\Gamma_1(\sigma \cdot n)$  не известна на  $\Gamma_0$ .

**ГЛАВА 5**

1. Имеем  $\gamma = \partial^2\Phi/\partial t^2$  при  $x = \Phi(a, t, t_0)$  и  $U = \partial\Phi/\partial t$ .

2. Учесть, что  $\omega x = \Omega \wedge x$ , где  $\omega$  — тензор поворота.

3. Учесть, что  $U_1$  (соответственно  $U_2, U_3$ ) зависит только от  $(x_2, x_3)$  (соответственно от  $(x_1, x_3), (x_1, x_2)$ ). Положить  $D_{13} = f$  и  $D_{23} = g$ , где  $f$  и  $g$  зависят только от  $x_1$  и  $x_2$ . Показать, что  $\partial f/\partial x_2 - \partial g/\partial x_1 = -\partial^2 U_2/\partial x_1 \partial x_3 = \partial^2 U_1/\partial x_2 \partial x_3$ , так что  $\partial f/\partial x_2 - \partial g/\partial x_1$  не зависит от  $x_1$  и  $x_2$ .

4. а) Имеем  $\omega x = \Omega \wedge x$  и  $\omega = 0$  (тензор скорости вращений).

$$б) \nabla U = D + \omega, D_I = -\text{Tr}D, D_{II} = \frac{1}{2} [\text{Tr}(D)^2 - \text{Tr}(D^2)], D_{III} = \text{Det } D.$$

**ГЛАВА 6**

1. а) Учесть, что  $d \frac{\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} d\rho - \frac{p}{\rho^2} d\rho$ .

б) Из (6.12) следует, что

$$T = \frac{\partial e}{\partial s} \quad \text{и} \quad \frac{p}{\rho^2} = \frac{\partial e}{\partial \rho}.$$

3. а) Учесть, что  $\sigma = -pN$  и  $q = 0$ .

в) Доказать, что  $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ .

4. а) Решить совместно уравнения сохранения энтальпии и массы и уравнения сохранения количества движения и массы.

б) Исключить скорость из полученного в п. а) соотношения.

5. Пусть  $v_{it}$  и  $v_{in}$  — касательная и нормальная компоненты скорости  $v_i$  по отношению к ударной волне; тогда

$$\begin{aligned} v_{1t} &= V_1 \cos \varepsilon, & V_{1n} &= V_1 \sin \varepsilon, & v_{2t} &= V_2 \cos \beta, \\ v_{2n} &= V_2, & V_i^2 &= v_i^2, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

## ГЛАВА 7

1. а) Учтеть, что  $\rho = \text{const}$ ,  $\text{div } u = 0$  и  $\gamma_i = u_j u_{i,j}$ .

б) Имеем  $\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3}(\text{Tr}\sigma)I$  и  $\varepsilon^D = \varepsilon - \frac{1}{3}(\text{Tr}\varepsilon)I$ ; заметить, что  $u_{j,j} = (\text{div } u)_{,i} = 0$ .

в)  $\mathcal{P} = \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v dx$ ,  $\mathcal{P}_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} F \cdot v d\Gamma$  и  $\mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma$ .

2. Имеем  $\frac{dp}{dx_3} = -\rho g$ , где  $\rho = \frac{p}{RT}$ . Тогда  $\frac{1}{p} \frac{dp}{dx_3} = -\frac{g}{RT} = f(x_3)$ .

3. Продифференцируем уравнение Эйлера  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  по  $t$  и получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right).$$

Далее использовать уравнение неразрывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$  и снова применить уравнение Эйлера при  $p = k\rho$ .

## ГЛАВА 8

1. а) Проверить, что  $\text{div } U = 0$  и что  $\gamma$  — градиент (поскольку из уравнения Эйлера следует, что  $\gamma = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + gx_3 \right)$ , где ось  $0x_3$  направлена вниз).

Для  $\gamma = \frac{1}{2} \nabla U^2 + (\text{curl } U) \wedge U$  показать, что в цилиндрических координатах выполнено равенство  $\text{curl } U \wedge U = - \left[ \psi \psi' + \frac{\phi}{r} (r\phi)' \right] \vec{r}$ .

б) Доказать, что  $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 \left( = \frac{1}{2} dr^2 \right) = 0$  и  $x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \frac{\phi r}{\psi} dx_3$  (где  $(r, \theta, x_3)$  — цилиндрические координаты, так что на линиях тока выполнено  $dx_3 = \left( \frac{r\psi}{\phi} \right) d\theta$ , где  $\frac{r\psi}{\phi} = \text{const}$ ).

в) Учтеть, что в цилиндрических координатах выполнено  $U_r = 0$ ,  $U_\theta = \phi(r)$ ,  $U_3 = \psi(r)$ , так что  $\text{curl } U = (0, -\psi'(r), (\phi/r) + \phi')$ . Тогда  $\gamma + \nabla(P/\rho + gx_3) = 0$ , где  $\gamma = \frac{1}{2} \nabla U^2$ .

2. а) Использовать полярные координаты (положить  $z = re^{i\theta}$ ).

б) Уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \text{tg } \theta = \lambda;$$

следовательно, в декартовой системе координат получим

$$(x^2 + y^2 + 1)y = \lambda x(x^2 + y^2 - 1).$$

Положить  $\lambda = 0$  и  $\lambda = +\infty$ .

3. При  $t = 0$  линии тока имеют вид  $dy = -dx/\operatorname{tg}(kx)$ . Исследовать решения на  $]0, \pi/k[$  и дать иллюстрацию.

4. а) Учесть, что  $\vec{U} = \nabla\Phi = \Phi'(r)\vec{e}_r$ . Применить теорему Бернулли при  $p = f(\rho)$  (газ предполагается совершенным) и получить  $f(\rho)/\rho = c(r)$ .

б) Использовать уравнение неразрывности и показать, что  $\operatorname{div}(\rho\vec{U}) = \frac{1}{2}d(r^2\rho U)/dr$  (использовать сферические координаты).

в) Учесть, что  $r^2\rho U = \operatorname{const}$ . Дать анализ вариации функции  $M \mapsto r^2(M)$  и показать, что эта функция достигает минимума при  $M = 1$ .

5. Применить теорему Бернулли в области между точкой  $A$  на свободной поверхности контейнера и точкой  $B$  около отверстия. Пусть  $h$  — высота жидкости между отверстием и свободной поверхностью контейнера. Тогда имеем

$$\frac{v_B^2}{2g} = h + \frac{v_A^2}{2g}.$$

Пренебрегая величиной  $v_A$  (поскольку сечение контейнера велико по сравнению с отверстием), находим  $v_B$ .

## ГЛАВА 9

1. а) Показать, что  $p_0$  не зависит от  $x_1$  и что  $dp_0/dx_2 = -\rho_0g(\psi - T_*)$ . Затем показать, что  $\kappa\psi'' = 0$  и получить  $\psi = \frac{T_1 - T_0}{L}x_2 + T_0$ .

б) (i) Учесть, что  $[(v \cdot \nabla)v] \cdot v = v_i v_{j,i} v_j = \frac{1}{2} v_i (v_j)_{,i}^2$ . Проинтегрировать по частям и использовать условие несжимаемости. Поступить таким же образом для случаев (ii) и (iii). Использовать формулу Грина для интегрирования по частям и учета условия несжимаемости.

в) Использовать уравнения (1') и (3'), а также б), чтобы показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_0 |v|^2 + c_v \theta^2) dx \right] &= \mu \int_{\Omega} \Delta v \cdot v dx + \kappa \int_{\Omega} \Delta \theta \cdot \theta dx - \\ &- c_v \int_{\Omega} \left[ (\rho_0 g + \frac{T_1 - T_0}{L}) v_2 \theta \right] dx. \end{aligned}$$

Затем проинтегрировать по частям.

2. б) При  $k \neq 0$  получим

$$-\frac{\nu 4\pi^2 |k|^2}{L^2} u_k + \frac{2i\pi k}{L} p_k = f_k, \quad k \cdot u_k = 0.$$

Умножая первое уравнение скалярно на  $k$ , найдем  $p_k$  из условия несжимаемости; затем получим  $u_k$ .

**ГЛАВА 10**

1. Учтеть, что из (10.26) и (1.28) следует  $E = (1/\sigma_m)J - \mu_m u \wedge H$ . Подставить это выражение в (10.23).

2. а) Умножить уравнение для  $H$  на  $H$  и проинтегрировать по  $\Omega$ .

б) Использовать (iv) из упражнения 7 гл. 1.

в) Использовать (10.24) при  $D = 0$  и (10.26) при  $u = 0$ .

3. а) См. доказательство теоремы Кельвина (теорема 8.4).

б) Поступить так же, как и в упражнении 2.

в) Поступить так же, как и в упражнении 2, п. б), и показать, что

$$\frac{dM}{dt} = \mu_m \int_{\Omega} (u \wedge H) \cdot \operatorname{curl} H dx - \mu_m \int_{\partial\Omega} [H \wedge (u \wedge H)] \cdot nd\sigma.$$

Затем использовать (10.24) при  $D = 0$  и упражнение 5, п. (i) и (ii) гл. 1 с учетом того, что  $u \cdot n = 0$  на  $\partial\Omega$ .

**ГЛАВА 11**

1. а) Исследовать вариации функции  $f(\theta) = e^{z\theta} - \alpha\theta$ . Учтеть, что эта функция достигает своего минимума при  $\theta = \frac{1}{z} \log\left(\frac{\alpha}{z}\right)$  и что этот минимум строго отрицателен при  $\frac{\alpha}{z} > e$ .

б) Учтеть, что линеаризованное в окрестности  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , уравнение принимает вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta z \theta e^{z\theta_i} - \sigma \theta.$$

Учитывая, что  $e^{z\theta_i} = \alpha\theta_i$ , получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta\alpha(z\theta_i - 1)\theta.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = \theta(0) e^{\beta\alpha(z\theta_i - 1)t}.$$

Затем учтеть, что  $z\theta_2 - 1 > 0$ . Представив уравнение в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta(z e^{z\theta_i} - \alpha)\theta,$$

учтеть, что  $z e^{z\theta_i} - \alpha < 0$ .

2. а) Выполнить замену переменных  $x' = x/L$ . Затем учтеть, что задача сведется к виду

$$\theta'' + L^2 \beta e^{z\theta} = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\theta(0) = \theta(1) = 0.$$

Умножить преобразованное уравнение на  $\theta'$  и проинтегрировать. Учитывая, что  $\theta'(1) = 0$ , получим

$$(\theta')^2 = \frac{2L^2\beta}{z} (e^{z\theta(1)} - e^{z\theta}).$$

Таким образом,

$$\theta' = \pm \sqrt{\frac{2L^2\beta}{z} e^{z\theta(1)} \sqrt{1 - e^{z(\theta - \theta(1))}}}.$$

Положить  $u = z(\theta - \theta(1))$ . Тогда

$$\frac{du}{\sqrt{1 - e^u}} = \pm \sqrt{2L^2\beta z e^{z\theta(1)}} dx.$$

Интегрируя, приходим к выражению

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - e^u}} = \pm \sqrt{2L^2\beta z e^{z\theta(1)}} x + c.$$

Полагая  $u = \sqrt{1 - e^u}$ , получим  $dv = -\frac{e^u du}{2\sqrt{1 - u}}$ , так что  $\frac{du}{\sqrt{1 - e^u}} = -\frac{2 dv}{1 - vL}$ .  
Отсюда

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - e^u}} = -2 \int \frac{dv}{1 - v^2} = - \int \left( \frac{1}{1 - v} + \frac{1}{1 + v} \right) dv,$$

$$\log \left| \frac{1 - v}{1 + v} \right| = \pm \sqrt{2zL^2\beta e^{z\theta(1)}} x + c.$$

Следовательно,

$$\frac{1 - v}{1 + v} = ce \pm \sqrt{2zL^2\beta e^{z\theta(1)}} x.$$

Наконец, вычислить  $c$ , положив  $x = 1$ , и показать, что

$$\theta(x) = \theta(1) - \frac{2}{z} \log \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{zL^2\beta e^{z\theta(1)}}{2}} (x - 1) \right) \right].$$

б) Учсть, что мы должны положить  $\theta(0) = 0$  и исследовать вариации функции  $f(x) = -\frac{2}{z} \log \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{z\alpha}{2}} e^{zx/2} \right) \right]$ . Имеем

$f'(x) = 1 - \sqrt{\frac{z\alpha}{2}} e^{zx/2} \operatorname{th} \left[ e^{zx/2} \sqrt{\frac{\alpha z}{2}} \right]$ . Затем учсть, что функция  $f'$  строго убывает.



3. а) Если  $Le = 1$ , то  $v_0(T - q\alpha)'' + c(T - q\alpha)' = 0$ ; тогда можно выразить  $\alpha$  через  $T$ .

б) Рассмотрим следующую систему, линеаризованную в окрестности  $(T_\alpha, 0)$ :

$$\begin{aligned} T' &= p, \\ p' &= \frac{1}{v_0} (-cp - F'(T_\alpha)T). \end{aligned}$$

Затем показать, что собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F'(T_\alpha) & -\frac{c}{\kappa} \end{pmatrix}$$

имеют противоположные знаки (учесть, что  $F'(T_0) < 0$ ).

### ГЛАВА 13

1. а) Учесть, что  $\chi$  представляется в виде

$$\chi = \int_0^{x_2} ds \int_0^s \sigma_{11}(x_1, \xi) d\xi + x_2 F(x_1) + G(x).$$

Из уравнения неразрывности  $\sigma_{ij,j} = 0$  следует, что  $\sigma_{11,11} = \sigma_{22,22}$ . Отсюда

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = \sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{22}(x_1, 0) - x_2 \sigma_{22,2}(x_1, 0) + x_2 F''(x_1) + G''(x_1).$$

Поскольку  $\sigma_{11,1} = -\sigma_{12,2}$ , имеем

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\sigma_{12}(x_1, x_2) + \sigma_{12}(x_1, 0) + F'(x_1).$$

При определении  $F$  и  $G$  учесть, что  $\sigma_{12,1} = \sigma_{22,2}$ . Учесть также, что

$$\Delta(\Delta\chi) = \sigma_{11,22} - 2\sigma_{12,12} + \sigma_{22,11}.$$

б) Показать, что  $f$  — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$f'''' - 2\omega^2 f'' + \omega^4 f = 0,$$

где  $' = d/dx_2$ .

2. а) В рассматриваемом случае уравнение Навье имеет вид

$$(\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \vec{\chi}_0 + \operatorname{div} \vec{B} + \nabla\chi) + \mu(\Delta\vec{\chi}_0 + \Delta\vec{B} + \Delta\nabla\chi) + \vec{f} = 0;$$

следовательно,  $\vec{\chi}_0$  является решением этого уравнения. Тогда

$$\Delta\chi + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{const} = a.$$

Показать, что  $\Delta(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 2 \operatorname{div} \vec{B}$ . Учитывая  $\Delta(a\vec{r}^2) = 6a$ , получить

$$\Delta\left(\chi + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \vec{r} \cdot \vec{B} - \frac{a}{6} \vec{r}^2\right) = 0,$$

так что  $\chi + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \vec{r} \cdot \vec{B} - \frac{a}{6} \vec{r}^2$  — гармоническая функция, которую можно представить в виде  $-\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \vec{B}_0$ , где  $\vec{B}_0$  — гармонический вектор.

б) Учесть, что  $\vec{\chi}_1 = \vec{\chi}_0 + b\vec{r}$  — решение уравнения Навье.

3. Из  $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$  следует, что  $f = 0$ . Из уравнений Бельтрами

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + (Tr\sigma)_{,ij} = 0$$

следует, что (при  $i = j = 1$  и  $i = j = 3$ ) имеем  $k = 0$  и  $\nu = -2$ , что невозможно, поскольку  $\nu \geq 0$ .

4. Из уравнений равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  следует, что  $\partial F/\partial x_2$  и  $\partial F/\partial x_1$  не зависят от  $x_3$  при  $i = 1$  и 3. Учесть, что в выражении для  $\sigma$  присутствуют только производные от  $F$ . Из уравнений Бельтрами следует, что при  $i = 1, j = 3$  и  $i = 2, j = 3$  величина  $\Delta F$  является аффинной.

## ГЛАВА 14

1. а) Из уравнений равновесия следует, что  $2A + D + F = 0$ , а из уравнений Бельтрами следует, что  $2(1 + \nu)(A + B) + F = 0$ .

б) Рассмотрим точку  $M$  с цилиндрическими координатами  $(a \cos \theta, a \sin \theta, x_3)$  на боковой поверхности. Тогда  $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Использовать соотношение  $T = \sigma n = 0, \forall \theta$ , и получить

$$\begin{aligned} A &= B + D \\ C + Aa^2 &= 0. \end{aligned}$$

Для  $x_3 = \ell$  имеем  $n = (0, 0, 1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left( (A + B)a^4 \frac{\pi}{4} + \pi a^2, 0, 0 \right), \\ \mathcal{M} &= \left( 0, -(E + F\ell) \frac{\pi a^4}{4}, 0 \right). \end{aligned}$$

Мы пришли к шести уравнениям с шестью неизвестными  $A, B, C, D, E$  и  $F$ .

2. а) Учесть, что  $\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (Tr\sigma)\delta_{ij}$ .

б) Учесть, что  $\varepsilon = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ .

3. а) В цилиндрических координатах имеем  $\operatorname{div} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU(r))$  и  $\operatorname{curl} u = 0$ . Учтешь, что  $\Delta u = -\operatorname{curl} \operatorname{curl} u + \nabla \operatorname{div} u$ . Тогда из уравнения Навье следует, что

$$\nabla \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) \right] = 0.$$

б) Имеем  $U(r) = \frac{ar}{2} + \frac{b}{r}$ . Учтешь, что  $\varepsilon = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$  и  $u = U(r)e_r, e_r = \left( \frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right)$ . Тогда из определяющего соотношения

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\operatorname{Tr}\varepsilon)I$$

следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda a + 2\mu \left[ \frac{U}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U}{r} \right) \frac{x_1^2}{r} \right], \\ \sigma_{12} &= 2\mu \frac{x_1 x_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U}{r} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, граничные условия (см., например, разд. 14.3) и получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \\ d &= \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{2\mu(R_1^2 - R_2^2)}. \end{aligned}$$

## ГЛАВА 16

1. а) Сделать рисунок. Положить, например,  $a = 0, b = 2$  и рассмотреть значения  $\varepsilon = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}$ .

б) Учтешь, что  $\int_{\alpha}^{\beta} \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon}) dx = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \left[ \cos(\pi \frac{x}{\varepsilon}) \right]_{\alpha}^{\beta}$ .

в) Учтешь, что  $\int_a^b f_2^2 dx = \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ \sin\left(\frac{4\pi a}{\varepsilon}\right) - \sin\left(\frac{4\pi b}{\varepsilon}\right) \right]$  (использовать соотношение  $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$ ).

## ГЛАВА 18

2. Положить

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{если } x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x, t), & \text{если } x \leq 0, t \geq 0; \end{cases}$$

определить  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_1$  аналогичным образом. Затем рассмотреть уравнение, решением которого является  $\tilde{u}$  (для простоты предположить, что  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_1$  принадлежат пространству  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ).

3. Рассмотреть «энергию»

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \right] dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

и показать, что  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ .

4. Положить

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_B \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \right] dx.$$

Использовать (1.8) в предложении 1.3 и показать, что

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_B \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \right) dx + \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial t} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial B} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \right] dx.$$

Использовать неравенство Коши–Шварца и получить

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2,$$

где  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial B$ . Следовательно,  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq 0$ .

5. а) (ii) Учесть, что решениями характеристического уравнения

$$r^4 - m^4 = 0$$

являются  $\pm m$  и  $\pm im$ .

б) Использовать граничные условия. Решения уравнения  $\cos \sigma \operatorname{ch} \sigma = 1$  могут быть записаны в виде  $\sigma_p, p \in \mathbb{N}^*$  (здесь может помочь графическая интерпретация: нарисовать на одном и том же графике кривые  $\eta = \cos \xi$  и  $\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi}$ ). Тогда собственные частоты принимают вид

$$\omega_p = \frac{\sigma_p^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

Заметить, что  $\omega^2 = m^4 \frac{EI}{\rho} = \frac{\sigma^4}{L^4} \frac{EI}{\rho}$ .

6. В рассматриваемом случае имеем  $u(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$ .

Отсюда заключаем, что  $U = B \sin mx$ , а собственные частоты имеют вид  $\sigma_p = p\pi, p \in \mathbb{N}^*$ .

7. В рассматриваемом случае имеем  $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0, \forall t \geq 0$ ; тогда получим

$$U = A [\cos \sigma + \operatorname{ch} \sigma](\cos mx - \operatorname{ch} mx) + (\sin \sigma - \operatorname{sh} \sigma)(\sin mx - \operatorname{sh} mx), \operatorname{ch} \sigma \cos \sigma + 1 = 0.$$

**ГЛАВА 19**

1. б) Умножая первое уравнение в (ii) на  $\theta_{,s}$  и интегрируя, получим второе уравнение. Для локализованных решений имеем  $c = 1$ ; интегрируя, получим

$$\pm \frac{s - s_0}{\sqrt{1 - u^2}} = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} \right);$$

следовательно,

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( \pm \frac{s - s_0}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right].$$

2. а) Подставить выражения для  $\eta$  и  $u$  в систему при  $\eta_{,x} = \eta_{,\xi}$  и  $\eta_{,t} = -c\eta_{,\xi}$ . Два полученных уравнения должны быть совместными.

б) Положить  $\eta_0 = \frac{3(1 - \alpha^2)}{\alpha^2}$  и использовать б).

3. Поступить таким же образом, как и в упражнении 2, а), и показать, что  $\alpha = \pm \frac{2\sqrt{15}}{5}$ ,  $c = \mp \frac{\sqrt{15}}{15}$  и что  $\eta$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{7}{5} \eta_{,\xi} + \frac{1}{5} \eta_{,\xi\xi\xi} = \frac{12}{5} \eta \eta_{,\xi}.$$

Использовать упражнение 2, б) и показать, что

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= -\frac{7}{4} \operatorname{sch}^2(\lambda(x + x_0 - ct)), \\ u(x_1, t) &= \mp \frac{7\sqrt{15}}{10} \operatorname{sch}^2(\lambda(x + x_0 - ct)), \end{aligned}$$

где  $\lambda = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

**ГЛАВА 20**

1. а) Положить  $s = x - vt$  и заметить, что  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds}$  и  $\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial x}$ .

б) Дважды проинтегрировать уравнение и учесть, что константы интегрирования обращаются в нуль.

в) Умножить уравнение из п. б) на  $2dU_{,s}$  и проинтегрировать. Учесть, что константа обращается в нуль.

2. а) Отделить вещественную и мнимую части и получить

$$\begin{aligned} \theta_{,\xi\xi} - a(\theta_{,t} + n) - a(\theta_{,\xi})^2 + qa^3 &= 0, \\ a\theta_{,\xi\xi} + 2a_{,\xi}\theta_{,\xi} + a_{,t} &= 0. \end{aligned}$$

б) (i) Положить  $s = \xi - ct$ . (ii) Проинтегрировать второе уравнение в (i); затем подставить значение, полученное для  $\theta_{,s}$ , в первое уравнение. (iii) Умножить уравнение в (ii) на  $2a_{,s}$  и проинтегрировать.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## ЧАСТЬ I

- Duvaut, G., *Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris, 1990 (in French).
- Germain, P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Vol. 1, Masson, Paris, 1973 (in French).
- Germain, P., *Mécanique*, Vol. 1 & 2, Cours de l'Ecole Polytechnique, Ellipses, Paris, 1986 (in French).
- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2d ed., Addison–Wesley, Reading, MA, 1980.
- Gurtin, E., *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, Boston, 1981.
- Lai, W. M., D. Rubin and E. Krempf, *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, New York, 1974.
- Landau, L., and E. Lifschitz, *Mechanics of Continuum Media*, Butterworth–Hernemann, New York, 1976 [В оригинале: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. — М.: Наука, 1976].
- Salençon, J., *Mécanique des Milieux Continus*, Vols. 1 & 2, Ellipses, Paris, 1988 (in French).
- Segel, L. A., *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*, Dover Publications, New York, 1987.
- Spencer, A. J. M., *Continuum Mechanics*, Longman Scientific and Technical, New York, 1975.
- Truesdell, C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1977 [Русский перевод: Труделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. — М.: Мир, 1975].
- Ziegler, H., *Mechanics*, Vol. 2, *Dynamics of Rigid Bodies and Systems* (English translation), Addison–Wesley, Reading, MA, 1965.

## Специальная литература

- Spencer, A. J. M., *Continuum Mechanics*, Longman Scientific and Technical, New York, 1975.
- Zemansky, M. W., *Heat and Thermodynamics*, 5th ed., McGraw–Hill, New York, 1968.

## ЧАСТЬ II

- Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988 [Русский перевод с первого издания Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*. — М.: Мир, 1973].
- Chorin, A. J., and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.
- Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, London and New York, 1932. Reprinted New York, Dover, 1945 [Русский перевод: Ламб Г. *Гидродинамика*. — М.: ГИТТЛ, 1947].

## Специальная литература

- Cabannes, H., *Theoretical Magnetofluidynamics*, Academic Press, New York, 1970.
- Candel, S., *Mécanique des Fluides*, Dunod, Paris, 1995 (in French).
- Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications, New York, 1981.
- Doering, R., and J. D. Gibbon, *Applied Analysis of the Navier–Stokes Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- Drazin, P. G., and W. H. Reed, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 198.
- Dunwoody, J., *Elements of Stability of Visco-elastic Fluids*, Pitman Research Notes in Mathematical Series, Longman Scientific & Technical, 1989.
- Duvaut, G., and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- Hinze, J. O., *Turbulence*, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
- Ladyzhenskaya, O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, 1963 [В оригинале: Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. — М.: Физматлит, 1961].
- Landau, L., and E. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, New York, 1953 [В оригинале: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988].
- Lions J. L., R., Temam, and S. Wang, «Models of the Coupled Atmosphere and Ocean (CAO I & II),» in *Computational Mechanics Advances*, J. T. Oden, ed., 1, Elsevier, Amsterdam, 1993, 5–54 and 55–119.
- Majda, A. and A. L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, 2d ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
- Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968 [Русский перевод: Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. — М.: Наука, 1969].
- Serrin, J., «Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics,» in *Handbuch der Physik*, 8, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

- Temam, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, AMS-Chelsea Series, AMS, Providence, 2001 (Updating).
- Volpert, A. I., V. A. Volpert, and V. A. Volpert, *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- Washington, W. M., and C. L. Parkinson, *An Introduction to Three-Dimensional Climate Modeling*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- Williams, F. A., *Combustion Theory*, 2d ed., The Benjamin / Cummings Publishing Company, Menlo Park, CA, 1985 [Русский перевод: Вильямс Ф. А. *Теория горения*. — М.: Наука, 1971].

### ЧАСТЬ III

#### Специальная литература

- Antman, S., *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- Ball, J. M., Minimizers and the Euler-Lagrange equations, in *Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, P. G. Ciarlet and M. Roseau, Editors, 1984, p. 1-4, Springer-Verlag, New York.
- Bensoussan, A., J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- Ciarlet, P. G., *Mathematical Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988 [Русский перевод: Сьярле Ф. *Математическая теория упругости*. — М.: Мир, 1992].
- Cioranescu, D., and P. Donata, *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, New York, 2000.
- Dorfmann, A. and A. Muhr (Eds.), *Constitutive Models for Rubber*, A. A. Balkema, Rotterdam/Brookfield 1999.
- Ericksen, J. L., *Introduction to the Thermodynamics of Solids*, Rev. Ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.
- Gurtin, M. E., *Topics in Finite Elasticity*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1981.
- Hodge, P., *Plastic Analysis of Structure*, Reprint, R. E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1981.
- Jemelio, S. and J. J. Telega, Modelling elastic behaviour of soft tissue, I & II, *Engineering Transactions*, 49, 2-3, 2001, pp.213-240 and 241-281.
- Jikov, V. V., S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994 [В оригинале: Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. *Усреднение дифференциальных операторов*. — М.: Наука, 1993].
- Ogden, R. W., *Non-linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, 1984 (second edition to appear soon).
- Renardy, M., W. J. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Longman Scientific and Technical, New York, 1987.
- Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1956.



Temam, R., *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier–Villars, New York, 1985.

Truesdell, C., *Mechanics of Solids I–III*, Springer–Verlag, Heidelberg, 1973.

## **ЧАСТЬ IV**

### **Специальная литература**

Agrawal, G. P., *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, 1989.

Benade, A. H., *Fundamentals of Musical Acoustics*, Oxford University Press, Oxford, 1976.

Benjamin, T. B., «Lectures on Nonlinear Wave Motion,» in *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974, pp. 3–47.

Boyd, R. W., *Nonlinear Optics*, Academic Press, Boston, 1992.

Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York, 1953 [Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*. — М.: Наука, 1975].

Fletcher, N. H., and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, 2d ed., Springer–Verlag, Heidelberg, 1998.

Goldstein, M. E., *Aeroacoustics*, McGraw–Hill, New York, 1976.

Lightill, J., *Waves in Fluids*, Reprint, Cambridge University Press, 1978 [Русский перевод: Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях*. — М.: Мир, 1981].

Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound* (1894), Dover edition published in 1945, Dover, New York.

Remoissenet, M., *Waves Called Solitons*, 2d ed., Springer–Verlag, Heidelberg, 1996.

Roederer, J. G., *The Physics and Psychophysics of Music*, 3d ed., Springer–Verlag, Heidelberg, 1995.

Roseau, M., *Vibrations in Mechanical Systems*, Springer–Verlag, Heidelberg, 1987.

Sundberg, J., *The Science of Musical Sounds*, Academic Press, New York, 1991.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Асимптотические разложения 272  
атмосфера 176, 177

Безвихревое течение 115  
безразмерные уравнения 142

Вариационные постановки 228, 230  
вектор напряжений 49  
виртуальная мощность 61  
– – сил сцепления 66  
– – системы 68  
вихри Бенара 146  
внутренняя энергия 91  
волновые уравнения для воды 268  
волны малой амплитуды в мелкой  
воде 270  
всестороннее сжатие произвольного  
тела 205  
вязкие жидкости 134  
вязкопластичные материалы 86  
вязкоупругие материалы 84

Галилеева система отсчета 37, 43, 45  
гиперболическое уравнение 296  
гиперупругие материалы 246  
– – в биомеханике 249  
гипотезы о силах сцепления 47  
горение 164  
граничные условия 106

Движение центра масс 39  
деформации 12  
– сдвига 14  
диполь 121  
дифференцирование детерминанта 26  
– объемного интеграла 25

Жесткие деформации 13  
жидкость баротропная 82  
– идеальная 82  
– несжимаема 82  
– сжимаемая 82

Закон Архимеда 108  
– Фарадея 153  
– сохранения количества движения 37  
– – момента количества движения 37  
звуковая труба 253, 259

Идеально пластичные материалы 85  
изгиб упругой струны 255  
изгибание цилиндрической балки 212  
источники 120

Кинематика движения 15  
кинетическая энергия 34, 91  
классическая упругость 83  
классические задачи эластостатики 202  
колеблющаяся мембрана 254  
колеблющийся шнур 254  
количество движения 34, 35  
композитные материалы 239  
конвективная производная 33  
коэффициенты упругости материала 190  
краевые задачи 244  
– – в линейной упругости 192  
– условия 208, 216, 244  
критерий Треска 199  
– фон Мизеса 200

Лагранжево описание движения  
системы 18  
линеаризация краевых условий 194  
– уравнений 192

- линеаризованное уравнение 285
- линейная акустика 130
- упругость 83
- линейное сжатие 14
- удлинение 14
- линейные волновые уравнения 252
- линии тока 17, 119
- Магнитная индукция** 152
- магнитное поле 152
- магнитогидродинамика 152, 156
- материалы Сен-Венана–Кирхгофа 244, 249
- материальная производная 33
- система 12, 63
- мембрана, фиксированная на границе 259
- механика жидкостей 80
- модель ламинарного пламени 168
- модули Пуассона 191
- Юнга 191
- момент количества движения 34, 35
- Невыпуклые энергетические функции** 237
- невязкая жидкость 103
- нелинейная упругость 83, 233
- эластостатика 235
- нелинейное уравнение Шрёдингера 281, 290, 293
- нелинейные определяющие соотношения 232
- неньютоновские жидкости 82
- нормальные колебания 257
- ньютоновская жидкость 102
- ньютоновские вязкие жидкости 81
- Общие колебания мембраны** 263
- – шнура 262
- уравнения движения 52
- однородное спиральное векторное поле 23
- течение 120
- операции над спиральными векторными полями 23
- описание движения материальной системы 12
- при помощи поля скоростей 18
- – – траекторий 18
- определяющие соотношения 155, 243
- основные уравнения линейной упругости 190
- Параболическое уравнение** 296
- первый закон термодинамики 93
- перемещение 13
- пластичные материалы 85
- плоские безвихревые течения 118
- пограничный слой 147
- подобие 142
- поле скоростей твердого тела 20
- понятие массы 30
- потенциал скорости и функция тока 118
- предположение о регулярности 13
- принцип Сен-Венана 218
- действия и противодействия 38
- линеаризации 192
- производные Лагранжа 18, 19
- Эйлера 18, 19
- Равнодействующая сил** 36
- расходомер Вентури 110
- реальная мощность 70
- результатирующее количество движения 36
- реология 78
- решение волнового уравнения 261
- одномерного волнового уравнения 255
- Свойства деформаций** 72
- сжатия–растяжения цилиндрического стержня 202
- силы 36
- система обозначений 9
- отсчета 15
- материальных точек 39
- скорость частицы 16
- скручивание цилиндрических стержней 215
- солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза 277
- солитоны 268
- соотношения Рэнкина–Гюгиони 95
- сохранение количества движения 98
- массы 30
- электрического заряда 153
- энергии 93, 98

- спиральное векторное поле 22  
 --- количества движения 34  
 --- ускорений 34  
 сравнение скоростей и ускорений 43  
 статика жидкостей 107  
 – несжимаемой жидкости 109  
 стационарное течение 115  
 стоки 120  
 структура спирального векторного поля 24  
 суперпозиция волн, биений, волновых пакетов 264
- Твердые тела** 41  
 тензор Пиолы–Кирхгофа 56  
 – деформации Коши–Грина 74  
 – инерции 42  
 – напряжений 54  
 – – Коши 50  
 – скоростей деформаций 76  
 теорема Бернулли 114, 116  
 – Кельвина 114, 116  
 – Лагранжа 114, 117  
 – взаимности 231  
 – о виртуальной мощности 61, 65, 230  
 – – кинетической энергии 60, 70  
 – – моменте количества движения 41  
 теория вязкоупругости 84  
 – крыла 124  
 – теплового взрыва Семенова 173  
 – – – Франк-Каменецкого 174  
 тепло 91, 92  
 термодравлика 134, 140  
 течение Куэтта–Тейлора 138  
 – Пуазейля 134, 136  
 – невязкой жидкости 114  
 точечный вихрь 121  
 траектория частицы 16  
 трансзвуковые течения 127  
 трубка Пито 111  
 турбулентность 144
- Ударные волны** 95  
 упрощенный вид волновых уравнений 271  
 упругая энергия материала 220  
 упругие среды 83  
 упругопластичные материалы 86
- уравнение Кортевега–де Фриза 268, 273  
 – Максвелла 152  
 – завихренности 104  
 – солитона 268  
 – состояния для баротропной жидкости 105  
 – сохранения энергии 93  
 уравнения 177  
 – Бельтрами 198  
 – Максвелла для поляризованной среды 282  
 – Праддгля–Рейса 87  
 – Стефана–Максвелла 169  
 – в частных производных 296  
 – вязкой несжимаемой жидкости 134  
 – горения 167  
 – движения 102  
 – динамики атмосферы 176, 178  
 – – океана 176, 182  
 – для смесей жидкостей 164  
 – на границе раздела 154  
 – нелинейной упругости 242  
 – неразрывности 32  
 – равновесия 54  
 – совместности 196  
 – ударных волн 91  
 – химической кинетики 166  
 – электрического поля 283  
 – энергии 91  
 ускорение 35  
 – частицы 17  
 – в эйлеровом представлении 20  
 условие Кутта–Жуковского 124  
 устойчивость 144  
 устройство токамак 158
- Формулы Блазиуса** 123  
 фундаментальные законы динамики 30  
 фундаментальный закон в негалилеевой системе отсчета 45  
 – – динамики 37, 41, 177  
 – – статики 38
- Химия атмосферы и океана** 183

Центр инерции материальной системы 31

– масс 31

Число Грасгофа 144

– Маха 129

– Прандтля 144

– Рейнольдса 143

– Рэлея 144

Эйлерово описание движения системы 18

эквипотенциальные линии 119

эластодинамика 196

эластостатика 196

электрическая индукция 152

электрический заряд 152

электрическое поле 153

электромагнетизм 152

эллиптическое уравнение 296

энергетические теоремы 224

энергия 91

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода .....	5
Предисловие .....	7
О системе обозначений .....	9
<b>Часть I. Фундаментальные понятия механики сплош-</b> <b>ных сред</b> .....	<b>11</b>
<b>Глава 1. Описание движения материальной системы: геометрия</b> <b>и кинематика</b> .....	<b>12</b>
1.1. Деформации .....	12
1.2. Кинематика движения .....	15
1.3. Описание движения системы: производные Эйлера и Лагранжа ....	18
1.4. Поле скоростей твердого тела: спиральные векторные поля .....	20
1.5. Дифференцирование объемного интеграла, зависящего от параметра	25
Упражнения .....	28
<b>Глава 2. Фундаментальные законы динамики</b> .....	<b>30</b>
2.1. Понятие массы .....	30
2.1.1. Сохранение массы в лагранжевых переменных .....	34
2.2. Силы .....	36
2.3. Фундаментальный закон динамики и его первое следствие .....	37
2.4. Приложение к системам материальных точек и к твердым телам ...	39
2.5. Галилеевы системы отсчета: фундаментальный закон динамики для	
негалилеевой системы отсчета .....	43
Упражнения .....	46
<b>Глава 3. Тензоры напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа: прило-</b> <b>жения</b> .....	<b>47</b>
3.1. Гипотезы о силах сцепления .....	47
3.2. Тензор напряжений Коши .....	50
3.3. Общие уравнения движения .....	52
3.4. Симметрия тензора напряжений .....	54
3.5. Тензор Пиолы–Кирхгофа .....	56
Упражнения .....	59

Глава 4. <b>Реальная и виртуальная мощность</b> .....	60
4.1. Система материальных точек .....	60
4.2. Материальные системы общего вида: скорости, придающие жесткость .....	63
4.3. Виртуальная мощность сил сцепления: общий случай .....	66
4.4. Реальная мощность: теорема о кинетической энергии .....	70
Упражнения .....	70
Глава 5. <b>Тензор деформации, тензор скоростей деформации, определяющие соотношения</b> .....	72
5.1. Свойства деформаций .....	72
5.2. Тензор скоростей деформаций .....	76
5.3. Введение в реологию : определяющие соотношения .....	78
5.4. Приложение: замена переменных в поверхностных интегралах .....	88
Упражнения .....	89
Глава 6. <b>Уравнения энергии и уравнения ударных волн</b> .....	91
6.1. Тепло и энергия .....	91
6.2. Тепло .....	92
6.3. Ударные волны и соотношения Рэнкина—Гюгонио .....	95
Упражнения .....	99
<b>Часть II. Физика жидкостей и газов</b> .....	101
Глава 7. <b>Общие свойства ньютоновской жидкости</b> .....	102
7.1. Общие уравнения механики жидкостей и газов .....	102
7.2. Статика жидкостей .....	107
7.3. Замечание об энергии жидкости .....	112
Упражнения .....	113
Глава 8. <b>Течение невязкой жидкости</b> .....	114
8.1. Общие теоремы .....	114
8.2. Плоские безвихревые течения .....	118
8.3. Трансзвуковые течения .....	127
8.4. Линейная акустика .....	130
Упражнения .....	132
Глава 9. <b>Вязкие жидкости и термогидравлика</b> .....	134
9.1. Уравнения вязкой несжимаемой жидкости .....	134
9.2. Простые течения вязкой несжимаемой жидкости .....	134
9.3. Термогидравлика .....	140
9.4. Безразмерные уравнения. Подобие .....	142
9.5. Понятия устойчивости и турбулентности .....	144
9.6. Понятие пограничного слоя .....	147
Упражнения .....	150
Глава 10. <b>Магнитогидродинамика и инерционное удержание плазмы</b> .....	152
10.1. Уравнения Максвелла и электромагнетизм .....	152
10.2. Магнитогидродинамика .....	156
10.3. Устройство токамак .....	158
Упражнения .....	162

Глава 11. <b>Горение</b> .....	164
11.1. Уравнения для смесей жидкостей .....	164
11.2. Уравнения химической кинетики .....	166
11.3. Уравнения горения .....	167
11.4. Уравнения Стефана—Максвелла .....	169
11.5. Упрощенная двухкомпонентная модель .....	172
Упражнения .....	173
Глава 12. <b>Уравнения динамики атмосферы и океана</b> .....	176
12.1. Вводные замечания .....	177
12.2. Уравнения динамики атмосферы .....	178
12.3. Уравнения динамики океана .....	182
12.4. Химия атмосферы и океана .....	183
Приложение: дифференциальные операторы в сферических координатах ..	185
<b>Часть III. Механика твердого тела</b> .....	189
Глава 13. <b>Основные уравнения линейной упругости</b> .....	190
13.1. Еще раз о законе зависимости напряжений от деформации в линейной упругости: коэффициенты упругости материала .....	190
13.2. Краевые задачи в линейной упругости: принцип линеаризации .....	192
13.3. Другие уравнения .....	196
13.4. Предел критериев упругости .....	199
Упражнения .....	200
Глава 14. <b>Классические задачи эластостатики</b> .....	202
14.1. Продольные сжатия—растяжения цилиндрического стержня .....	202
14.2. Всестороннее сжатие произвольного тела .....	205
14.3. Равновесие сферической емкости, подверженной внутреннему и внешнему давлению .....	206
14.4. Деформация вертикального цилиндрического тела под действием его веса .....	209
14.5. Простое изгибание цилиндрической балки .....	212
14.6. Скручивание цилиндрических стержней .....	215
14.7. Принцип Сен-Венана .....	218
Упражнения .....	218
Глава 15. <b>Энергетические теоремы, двойственность и вариационные постановки</b> .....	220
15.1. Упругая энергия материала .....	220
15.2. Двойственность .....	221
15.3. Энергетические теоремы .....	224
15.4. Вариационные постановки .....	228
15.5. Теорема о виртуальной мощности и вариационные постановки .....	230
Глава 16. <b>Нелинейные определяющие соотношения и осреднение</b> ..	232
16.1. Нелинейные определяющие соотношения (нелинейная упругость) ..	233
16.2. Нелинейная эластостатика с порогом (модель эластопластики Хенки) .....	235
16.3. Невыпуклые энергетические функции .....	237
16.4. Композитные материалы: задача осреднения .....	239
Упражнения .....	240



Глава 17. <b>Нелинейная упругость и приложения к биомеханике</b> . . . . .	242
17.1. Уравнения нелинейной упругости . . . . .	242
17.2. Краевые условия и краевые задачи . . . . .	244
17.3. Гиперупругие материалы . . . . .	246
17.4. Гиперупругие материалы в биомеханике . . . . .	249
<b>Часть IV. Введение в волновые явления</b> . . . . .	251
Глава 18. <b>Линейные волновые уравнения в механике</b> . . . . .	252
18.1. Еще раз об уравнениях линейной акустики и линейной упругости . . . . .	252
18.2. Решение одномерного волнового уравнения . . . . .	255
18.3. Нормальные колебания . . . . .	257
18.4. Решение волнового уравнения . . . . .	261
18.5. Суперпозиция волн, биений и волновых пакетов . . . . .	264
Упражнения . . . . .	266
Глава 19. <b>Уравнение солитона: уравнение Кортевега–де Фриза</b> . . . . .	268
19.1. Волновые уравнения для воды . . . . .	268
19.2. Упрощенный вид волновых уравнений . . . . .	271
19.3. Уравнение Кортевега–де Фриза . . . . .	273
19.4. Солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза . . . . .	277
Упражнения . . . . .	278
Глава 20. <b>Нелинейное уравнение Шрёдингера</b> . . . . .	281
20.1. Уравнения Максвелла для поляризованной среды . . . . .	282
20.2. Уравнения электрического поля: линейный случай . . . . .	283
20.3. Общий случай . . . . .	287
20.4. Нелинейное уравнение Шрёдингера . . . . .	290
20.5. Солитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера . . . . .	293
Упражнения . . . . .	294
<b>Приложение</b> . . . . .	296
<b>Указания к упражнениям</b> . . . . .	298
<b>Список литературы</b> . . . . .	309
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	313

*Учебное электронное издание*

Серия: «Математическое моделирование»

**Темам** Роджер  
**Миранвиль** Ален

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*  
Редактор *А. С. Попов*

Художественное оформление: *И. Е. Марев*

Художественный редактор *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Корректор *Е. Н. Клитина*

Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

Подписано 04.12.13. Формат 70×100/16.

Усл. печ. л. 26,00.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: [binom@Lbz.ru](mailto:binom@Lbz.ru), <http://www.Lbz.ru>

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для операционных систем Windows, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry